

Trabajo Fin de Grado Ingeniería Aeroespacial

Eficiencia computacional de los elementos de Scott-Vogelius

Autor: Carlota Gutiérrez Amor

Tutor: Juan Bosco García Archilla

Dpto. Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2022



Trabajo Fin de Grado
Ingeniería Aeroespacial

Eficiencia computacional de los elementos de Scott-Vogelius

Autor:

Carlota Gutiérrez Amor

Tutor:

Juan Bosco García Archilla

Catedrático de Universidad

Dpto. Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2022

Trabajo Fin de Grado: Eficiencia computacional de los elementos de Scott-Vogelius

Autor: Carlota Gutiérrez Amor
Tutor: Juan Bosco García Archilla

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer a mi tutor, Bosco García Archilla, toda su ayuda y dedicación a lo largo de este trabajo.

A mi familia, especialmente a mis padres y a mi hermana Alejandra.

*Carlota Gutiérrez Amor
Sevilla, 2022*

Resumen

Los elementos de Scott-Vogelius son unos elementos finitos diseñados para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes. El interés de estos elementos es que poseen divergencia nula para las velocidades satisfaciendo automáticamente la ley de conservación de masa.

En el presente trabajo se analiza la eficiencia computacional de los elementos de Scott-Vogelius frente a otros elementos de divergencia no nula acompañados de métodos de estabilización (elementos de Taylor-Hood con estabilización grad-div).

Abstract

The Scott-Vogelius finite elements are a family of finite elements designed to solve the Navier-Stokes equations. The main interest of these elements is that they provide divergence-free velocities which automatically verify mass conservation.

This work studies the computational efficiency of Scott-Vogelius finite elements and its comparison with non-divergence-free finite elements with stabilization methods (Taylor-Hood finite elements with grad-div stabilization).

Índice Abreviado

<i>Resumen</i>	III
<i>Abstract</i>	V
<i>Índice Abreviado</i>	VII
<i>Notación</i>	XI
1 Introducción	1
2 Ecuaciones de Navier-Stokes	3
3 Método de los Elementos Finitos	5
3.1 Descripción del método	6
3.2 Expresión del problema en forma matricial	8
3.3 Transformación afín de los elementos al triángulo de referencia	9
4 Elementos de Scott-Vogelius y Taylor-Hood	11
4.1 Espacio de elementos finitos de Taylor-Hood	11
4.2 Espacio de elementos finitos de Scott-Vogelius	12
4.3 Existencia y unicidad de solución	13
4.4 Cambio de formulación de elementos de Taylor-Hood a elementos de Scott-Vogelius	14
5 Problema de Stokes	15
6 Problema de Oseen	19
7 Problema de Navier-Stokes estacionario	23
7.1 Método de Newton	23
7.2 Resultados numéricos	24
8 Conclusiones Finales	27
Apéndice A Resultados numéricos	29
A.1 Problema de Stokes	29
A.2 Problema de Oseen	31
A.3 Ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias	33
Apéndice B Programas de MATLAB®	35
B.1 Problema de Stokes	35
B.2 Problema de Oseen	39
B.3 Ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias	44
<i>Índice de Figuras</i>	59
<i>Bibliografía</i>	61

Índice

<i>Resumen</i>	III
<i>Abstract</i>	V
<i>Índice Abreviado</i>	VII
<i>Notación</i>	XI
1 Introducción	1
2 Ecuaciones de Navier-Stokes	3
3 Método de los Elementos Finitos	5
3.1 Descripción del método	6
3.2 Expresión del problema en forma matricial	8
3.3 Transformación afín de los elementos al triángulo de referencia	9
4 Elementos de Scott-Vogelius y Taylor-Hood	11
4.1 Espacio de elementos finitos de Taylor-Hood	11
4.1.1 Método de estabilización grad-div	12
4.2 Espacio de elementos finitos de Scott-Vogelius	12
4.3 Existencia y unicidad de solución	13
4.4 Cambio de formulación de elementos de Taylor-Hood a elementos de Scott-Vogelius	14
5 Problema de Stokes	15
6 Problema de Oseen	19
7 Problema de Navier-Stokes estacionario	23
7.1 Método de Newton	23
7.2 Resultados numéricos	24
8 Conclusiones Finales	27
Apéndice A Resultados numéricos	29
A.1 Problema de Stokes	29
A.1.1 Taylor-Hood sin estabilización grad-div	29
A.1.2 Taylor-Hood con estabilización grad-div	30
A.1.3 Scott-Vogelius	30
A.2 Problema de Oseen	31
A.2.1 Taylor-Hood sin estabilización grad-div	31
A.2.2 Taylor-Hood con estabilización grad-div	32
A.2.3 Scott-Vogelius	32
A.3 Ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias	33
A.3.1 Taylor-Hood sin estabilización grad-div	33

A.3.2	Taylor-Hood con estabilización grad-div	33
A.3.3	Scott-Vogelius	34
Apéndice B Programas de MATLAB®		35
B.1	Problema de Stokes	35
B.2	Problema de Oseen	39
B.3	Ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias	44
<i>Índice de Figuras</i>		59
<i>Bibliografía</i>		61

Notación

A	Matriz de coeficientes lineales.
\mathbf{b}	Campo vectorial de la convección en el problema de Oseen.
<i>c.c.</i>	En caso contrario.
d	Dimensión del dominio de definición Ω .
inf	Ínfimo.
int	Interior.
\mathbf{f}	Campo vectorial de las aceleraciones debidas a las fuerzas externas que actúan sobre el fluido.
gen	Espacio vectorial generado por.
h	Máximo diámetro del mallado.
L^2	Espacio de funciones cuadrado integrables.
L_0^2	Espacio de funciones cuadrado integrables de media nula.
n	Número de subdivisiones.
n_h	Dimensión asociada a una componente del espacio V^h .
n_n	Número de nodos.
n_T	Número de triángulos.
\mathbb{N}	Conjunto de los números naturales.
m_h	Dimensión del espacio Q^h .
\mathcal{O}	Orden de convergencia.
p	Campo escalar de la presión.
\mathbf{P}_k	Espacio de elementos finitos polinomiales de grado k .
P_l	Coefficiente de la l -ésima función base del espacio Q^h .
Q	Espacio de campos escalares definidos sobre Ω .
Q^h	Subespacio de Q de dimensión finita al que se restringe la solución numérica aproximada de la presión.
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales.
sup	Supremo.
supp	Soporte.
t	Variable temporal.
$T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	Producto tensorial del tensor de tercer orden $T := T_{i,j,k}$ con los vectores \mathbf{x} , \mathbf{y} definido como: $\sum_{j,k} T_{i,j,k} x_j y_k$.
T_{ref}	Triángulo de referencia.
T_s	Elemento triangular.
$\{T_s\}$	Triangulación, conjunto de triángulos.
\mathbf{u}	Campo vectorial de la velocidad.
u	Componente de la velocidad \mathbf{u} en la dirección OX .
U_j	Coefficiente de la componente de la velocidad en la dirección OX en la j -ésima función base del espacio V^h .
v	Componente de la velocidad \mathbf{u} en la dirección OY .

V	Espacio de campos vectoriales definidos sobre Ω .
V^h	Subespacio de V de dimensión finita al que se restringe la solución numérica aproximada de la velocidad.
V_j	Coefficiente de la componente de la velocidad en la dirección OY en la j -ésima función base del espacio V^h .
\mathbf{x}	Vector de incógnitas.
α	Constante del término de reacción adicional.
γ	Parámetro de la estabilización grad-div.
Δ	Operador laplaciano.
η	Función test de la presión.
λ	Parámetro de escala de la presión.
ν	Viscosidad cinemática del fluido.
ρ	Densidad, masa por unidad de volumen del fluido.
ϕ	Función test de la velocidad.
ϕ	Componente en la dirección OX de ϕ .
ψ	Componente en la dirección OY de ϕ .
Ω	Dominio de definición de los campos.
$\bar{\Omega}$	Clausura de Ω .
$\partial\Omega$	Frontera de Ω .
\cap	Intersección.
\forall	Para todo.
\in	Perteneciente a.
∇	Operador gradiente.
$\nabla \cdot$	Operador divergencia.
$\frac{\partial}{\partial t}$	Derivada parcial respecto de t .
$\frac{\partial}{\partial x}$, \cdot_x	Derivada parcial respecto de x .
$\frac{\partial}{\partial y}$, \cdot_y	Derivada parcial respecto de y .
\emptyset	Conjunto vacío.
(\cdot, \cdot)	Producto escalar en L^2 , integral del producto.
$ \cdot $	Determinante.
$\ \cdot\ _{L^2}$	Norma del espacio L^2 o norma do, $\ \mathbf{u}\ _{L^2} = \left(\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \right)^{1/2}$.
:	Tal que.

1 Introducción

Los elementos de Scott-Vogelius son unos elementos finitos diseñados para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes que rigen la dinámica de un fluido. El interés de estos elementos es que poseen divergencia nula para las velocidades satisfaciendo automáticamente la ley de conservación de masa.

En este trabajo se analizan la eficiencia computacional y la convergencia del error de forma experimental de los elementos finitos de Scott-Vogelius frente a otros elementos de divergencia no nula: los elementos de Taylor-Hood con y sin estabilización grad-div.

Este trabajo consta de las siguientes secciones:

1. En el capítulo 2 se presentan las ecuaciones de Navier-Stokes y los tres problemas de aplicación derivados de estas ecuaciones: el problema de Stokes, el problema de Oseen y las ecuaciones estacionarias de Navier-Stokes.
2. En el capítulo 3 se describe el método de elementos finitos, empleado para obtener una solución aproximada de un sistema de ecuaciones diferenciales.
3. En el capítulo 4 se definen los elementos finitos de Scott-Vogelius y Taylor-Hood, así como las condiciones suficientes para garantizar la existencia y unicidad de solución.
4. Los capítulos 5, 6, 7 tratan los problemas ordenados de menor a mayor complejidad (problema de Stokes, problema de Oseen y ecuaciones estacionarias de Navier-Stokes), exponiendo y analizando los resultados obtenidos.
5. Al final de este trabajo se encuentran dos apéndices. El Apéndice A recoge los resultados numéricos obtenidos de los errores cometidos en el cálculo de la velocidad, la divergencia de la velocidad y la presión y del tiempo de ejecución de los algoritmos. En el Apéndice B se proporcionan los códigos de MATLAB® empleados.

2 Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes consisten en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que rigen el movimiento de los fluidos.

En el caso de fluidos newtonianos (con viscosidad constante independiente de la velocidad del fluido), en flujos isotérmicos e incompresibles (a temperatura y densidad del fluido constantes en todo el espacio fluido) estas ecuaciones son

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2.2)$$

donde \mathbf{u} es la velocidad y p la presión del fluido definidas en cada punto del espacio y cada instante de tiempo, ρ es la densidad, ν es la viscosidad cinemática (ambas constantes) y \mathbf{f} son las aceleraciones debidas a las fuerzas externas que actúan sobre el fluido en cada punto e instante de tiempo.

Si se considera además un flujo en régimen estacionario entonces $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$ y las ecuaciones de Navier-Stokes pueden simplificarse

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.3)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2.4)$$

Si además la velocidad del fluido es pequeña, el término no lineal de fuerzas de inercia es despreciable frente al término de las fuerzas viscosas y el sistema se reduce al llamado problema de Stokes:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.5)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2.6)$$

Si no puede hacerse esta aproximación porque el término de fuerzas de inercia no sea despreciable, para simplificar el problema numéricamente se puede considerar el problema de Oseen:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.7)$$

$$(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2.8)$$

donde \mathbf{b} es una función de divergencia nula $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ que es una aproximación de la solución para la \mathbf{u} .

3 Método de los Elementos Finitos

Las ecuaciones de Navier-Stokes constituyen un problema cuya solución está definida en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $\text{int}(\Omega) \neq \emptyset$, de un espacio de funciones de dimensión infinita.

Para poder obtener una solución numérica aproximada se usan conjuntamente el método de elementos finitos para discretizar el espacio de definición y el método de Galerkin para reducir la dimensión del espacio de funciones a uno de dimensión finita que permita resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de forma aproximada.

El método de elementos finitos requiere dividir la clausura del dominio de definición Ω en elementos, usualmente símplices¹ o prismas. El conjunto de elementos $\mathcal{M}(\Omega)$ es tal que

$$\text{int}(C) \cap \text{int}(D) = \emptyset \quad \forall C, D \in \mathcal{M}(\Omega) : C \neq D.$$

En el presente documento, se van a considerar solo dominios bidimensionales $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ por lo que los recubrimientos también serán bidimensionales². El mallado seleccionado es una malla uniforme triangular con diagonales en dirección suroeste a noreste (SWNE). Dado un número natural $n \in \mathbb{N}$, el mallado viene dado por la triangulación $\{T_s\}$ con $s \in \{1, \dots, n_T\}$ donde n_T es el número de triángulos.

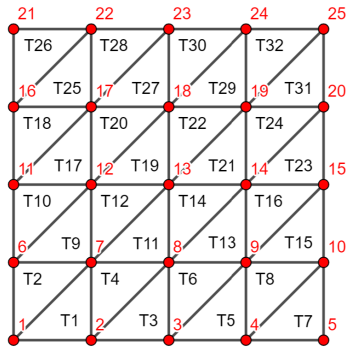


Figura 3.1 Malla triangular uniforme SWNE para $n = 4$.

En este tipo de mallado el número de triángulos viene dado por $n_T = 2n^2$ y el número de nodos o vértices por $n_n = (n + 1)^2$.

El diámetro de un símplice se define como la máxima distancia entre dos puntos pertenecientes a dicho símplice. Los resultados teóricos de convergencia del error de la solución se suelen expresar respecto del

¹ Sea un subconjunto abierto $\Omega \in \mathbb{R}^d$, un símplice en dicho espacio se define como la envolvente convexa de $d + 1$ puntos de Ω no habiendo tres de ellos alineados. En el caso \mathbb{R}^2 un símplice es un triángulo y en \mathbb{R}^3 un tetraedro. [7]

² Se define el espacio de definición Ω como un cuadrado de lado unidad $\Omega = [0, 1]^2$.

máximo diámetro del mallado, denotado por h . Este parámetro es inversamente proporcional al número de subdivisiones n .

3.1 Descripción del método

Para aplicar el método de elementos finitos al problema de interés es necesario realizar los siguientes dos pasos:

1. Obtener la formulación débil del problema.
2. Restringir el espacio solución a un subespacio de dimensión finita de funciones polinómicas a trozos a fin de obtener la solución aproximada.

La obtención de la forma débil requiere primero establecer la integral del producto de la función test por el residuo. Para las ecuaciones de Navier-Stokes estas integrales se pueden escribir en coordenadas cartesianas como:

$$\int_{\Omega} \phi [uu_x + vu_y - vu_{xx} + p_x - f^x] d\Omega \quad (3.1)$$

$$\int_{\Omega} \psi [uv_x + vv_y - vv_{yy} + p_y - f^y] d\Omega \quad (3.2)$$

$$\int_{\Omega} \eta [u_x + v_y] d\Omega \quad (3.3)$$

donde ϕ y ψ son las funciones test para la velocidad y η la función test para la presión, $\mathbf{u} = (u, v)$ es la velocidad, p la presión y $\mathbf{f} = (f^x, f^y)$ las fuerzas externas y los subíndices denotan las derivadas parciales respecto a las coordenadas correspondientes.

Después es necesario relajar la derivada, a fin de eliminar los componentes con derivadas segundas. Para ello, en el ejemplo anterior, teniendo en cuenta que $u_{xx} = \Delta u = \nabla \cdot (\nabla u)$ y la relación

$$\nabla \cdot (\phi \nabla u) = \nabla \phi \cdot \nabla u + \phi \nabla \cdot (\nabla u),$$

se puede desarrollar la integral de $\phi \Delta u$ como

$$\int_{\Omega} \phi \Delta u d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\phi \nabla u) - \nabla \phi \cdot \nabla u d\Omega$$

por lo que la expresión (3.1) resulta

$$\int_{\Omega} \phi [uu_x + vu_y + p_x - f^x] d\Omega + v \int_{\Omega} (\phi_x u_x + \phi_y u_y) d\Omega - v \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\phi \nabla u)) d\Omega. \quad (3.4)$$

Aplicando el teorema de la divergencia a la tercera integral se obtiene

$$\int_{\Omega} \phi [uu_x + vu_y + p_x - f^x] d\Omega + v \int_{\Omega} (\phi_x u_x + \phi_y u_y) d\Omega - v \int_{\partial\Omega} \phi \nabla u \cdot \mathbf{n} ds. \quad (3.5)$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{u} = 0$ en $\partial\Omega$, la función test verifica que $\phi, \psi = 0$ en $\partial\Omega$, por lo que la última integral es nula quedando

$$\int_{\Omega} \phi [uu_x + vu_y + p_x - f^x] d\Omega + v \int_{\Omega} (\phi_x u_x + \phi_y u_y) d\Omega. \quad (3.6)$$

Además, teniendo en cuenta que $\phi p_x + \psi p_y = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \cdot \nabla p = \nabla \cdot \left[p \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \right] - p \nabla \cdot \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}$, integrando en todo el espacio y aplicando el teorema de la divergencia

$$\int_{\Omega} \phi p_x + \psi p_y d\Omega = \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \cdot \nabla p d\Omega = \int_{\partial\Omega} p \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} d\Omega. \quad (3.7)$$

Como $\phi, \psi = 0$ en $\partial\Omega$, la primera integral del segundo término se anula

$$\int_{\Omega} \phi p_x + \psi p_y d\Omega = - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} d\Omega = \int_{\Omega} \phi_x p + \psi_y p d\Omega. \quad (3.8)$$

Además, esta igualdad debe ser cierta para ϕ, ψ cualesquiera, en particular para $\psi \equiv 0$, quedando la ecuación 3.6 como:

$$\int_{\Omega} \phi (uu_x + vu_y) d\Omega + v \int_{\Omega} (\phi_x u_x + \phi_y u_y) d\Omega - \int_{\Omega} \phi_x p d\Omega - \int_{\Omega} \phi f^x d\Omega. \quad (3.9)$$

Operando de forma análoga para la expresión (3.2) y teniendo en cuenta que la expresión (3.3) no tiene derivadas de orden dos, el problema consiste en encontrar $\mathbf{u} \in V$, $p \in Q$ con $V = H_0^1(\Omega)^2$, $Q = L_0^2(\Omega)$ ³ tales que verifiquen:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi (uu_x + vu_y) d\Omega + v \int_{\Omega} (\phi_x u_x + \phi_y u_y) d\Omega - \int_{\Omega} \phi_x p d\Omega &= \int_{\Omega} \phi f^x d\Omega \\ \int_{\Omega} \psi (uv_x + vv_y) d\Omega + v \int_{\Omega} (\psi_x v_x + \psi_y v_y) d\Omega - \int_{\Omega} \psi_y p d\Omega &= \int_{\Omega} \psi f^y d\Omega \\ \int_{\Omega} \eta [u_x + v_y] d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

para todo $\phi = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \in V$, $\eta \in Q$ definidas en Ω con $\phi, \psi = 0$ en $\partial\Omega$.

A este problema se le conoce como forma débil de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Tal y como se ha comentado anteriormente al inicio de la sección, el segundo paso consiste en establecer un subespacio de funciones de dimensión finita $V^h \subset V$, $Q^h \subset Q$ del cual obtener la solución aproximada $\mathbf{u}^h \in V^h$, $p^h \in Q^h$.

Estos espacios V^h , Q^h tienen por elementos funciones continuas, polinómicas a trozos y de grado fijo en cada elemento. En este documento se considera un espacio de funciones cuadráticas para la velocidad (para V^h) y lineales para la presión (para Q^h).

Como V^h, Q^h son espacios de funciones de dimensión finita, se pueden generar a partir de una base finita. Un conjunto de funciones $\phi^h = \left\{ \begin{pmatrix} \phi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \phi_{n_h} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{n_h} \end{pmatrix} \right\} : \text{gen}(\phi^h) = V^h$ se denomina como conjunto de funciones base de la velocidad. Análogamente, un conjunto de funciones $\eta^h = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m_h}\} : \text{gen}(\eta^h) = Q^h$ se denomina como conjunto de funciones base de la presión.

Por ejemplo, para un espacio de funciones cuadráticas en dos dimensiones una base es el conjunto $\{x^2, y^2, xy, x, y, 1\}$, pues cualquier función cuadrática puede escribirse como combinación lineal de las seis funciones de la base, $h(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$ con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

³ Sea el espacio de funciones cuadrado integrables $L^2(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} f^2 d\Omega < \infty\}$.

Se define $L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : (q, 1) = 0\}$.

Se define $H_0^1(\Omega)^2 = \overline{\{f \in L^2(\Omega) : Df \in L^2(\Omega)\}^2} : \text{supp}(\mathbf{v}) \text{ es compacto}$ como el conjunto de funciones en dos dimensiones cuyas componentes son cuadrado integrables con primera derivada cuadrado integrables que se anulan en $\partial\Omega$.

De esta forma el problema se reduce a encontrar $\mathbf{u}^h = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n_h} \begin{pmatrix} U_j \phi_j \\ V_j \psi_j \end{pmatrix} \in V^h$ y $p^h = \sum_{l=1}^{m_h} P_l \eta_l \in Q^h$ con $U_j, V_j, P_l \in \mathbb{R} \forall j \in \{1, \dots, n_h\}, l \in \{1, \dots, m_h\}$ tales que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi_i (u^h u_x^h + v^h u_y^h) d\Omega + \nu \int_{\Omega} (\phi_{ix} u_x^h + \phi_{iy} u_y^h) d\Omega - \int_{\Omega} \phi_{ix} p d\Omega &= \int_{\Omega} \phi_i f^x d\Omega. \\ \int_{\Omega} \psi_i (u^h v_x^h + v^h v_y^h) d\Omega + \nu \int_{\Omega} (\psi_{ix} v_x^h + \psi_{iy} v_y^h) d\Omega - \int_{\Omega} \psi_{iy} p d\Omega &= \int_{\Omega} \psi_i f^y d\Omega. \\ \int_{\Omega} \eta_k [u_x^h + v_y^h] d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{u}^h = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

para todo $i \in \{1, \dots, n_h\}$ y para todo $k \in \{1, \dots, m_h\}$ ya que gracias a la linealidad de las integrales y de las derivadas basta con que se cumpla para las funciones base.

Este problema es no lineal. Si en lugar de las ecuaciones de Navier-Stokes se considera el problema de Oseen con $\mathbf{b} = (b, c) \in V$ (El caso no lineal se trata en el capítulo 7) el problema finalmente se puede escribir como

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_h} U_j \int_{\Omega} [b \phi_i \phi_{jx} + c \phi_i \phi_{jy} + \nu \phi_{ix} \phi_{jx} + \nu \phi_{iy} \phi_{jy}] d\Omega - \sum_{l=1}^{m_h} P_l \int_{\Omega} \phi_{ix} \eta_l d\Omega &= \int_{\Omega} \phi_i f^x d\Omega \\ \sum_{j=1}^{n_h} V_j \int_{\Omega} [b \psi_i \psi_{jx} + c \psi_i \psi_{jy} + \nu \psi_{ix} \psi_{jx} + \nu \psi_{iy} \psi_{jy}] d\Omega - \sum_{l=1}^{m_h} P_l \int_{\Omega} \psi_{iy} \eta_l d\Omega &= \int_{\Omega} \psi_i f^y d\Omega \\ \sum_{j=1}^{n_h} U_j \int_{\Omega} \eta_k \phi_{jx} d\Omega + \sum_{j=1}^{n_h} V_j \int_{\Omega} \eta_k \psi_{jy} d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\sum_{j=1}^{n_h} U_j \phi_j = \sum_{j=1}^{n_h} V_j \psi_j = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

de forma que el problema se reduce a encontrar los coeficientes $U_j, V_j, P_l \in \mathbb{R} \forall j \in \{1, \dots, n_h\}, l \in \{1, \dots, m_h\}$ satisfaciendo las ecuaciones lineales anteriores $\forall i \in \{1, \dots, n_h\}, k \in \{1, \dots, m_h\}$. Es decir, se ha obtenido un sistema de $2n_h + m_h$ ecuaciones lineales con $2n_h + m_h$ incógnitas.

De aquí en adelante se considerará la misma base de funciones para las velocidades en x y en y , es decir, $\psi_i = \phi_i \forall i \in \{1, \dots, n_h\}$ y se denotará $\phi^h = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n_h}\}$.

3.2 Expresión del problema en forma matricial

El sistema a resolver, al ser lineal, puede escribirse en la forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$, de forma que conocidas \mathbf{A} y \mathbf{f} , la solución \mathbf{x} puede obtenerse mediante cualquier método de eliminación gaussiana. A partir del sistema (3.12)

A , \mathbf{x} y \mathbf{f} se definen como:

$$A = \begin{pmatrix} A_h & \mathbf{0} & -D_x^T & 0 \\ \mathbf{0} & A_h & -D_y^T & 0 \\ -D_x & -D_y & \mathbf{0} & M_p \\ 0 & \dots & 0 & M_p^T \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{n_h} \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{n_h} \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{m_h} \\ R \end{pmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_v \\ \mathbf{f}_p \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

donde la submatriz A_h a su vez se puede descomponer como $A_h = \nu S + D$ con:

$$S := s_{i,j} = \int_{\Omega} [\phi_{ix}\phi_{jx} + \phi_{iy}\phi_{jy}] d\Omega \quad \forall i,j \in \{1, \dots, n_h\} \quad (3.14)$$

$$D := d_{i,j} = \int_{\Omega} [b\phi_i\phi_{jx} + c\phi_i\phi_{jy}] d\Omega \quad \forall i,j \in \{1, \dots, n_h\} \quad (3.15)$$

$$D_x := d_{k,j}^x = \int_{\Omega} \eta_k \phi_{jx} d\Omega \quad \forall k \in \{1, \dots, m_h\}, j \in \{1, \dots, n_h\} \quad (3.16)$$

$$D_y := d_{k,j}^y = \int_{\Omega} \eta_k \phi_{jy} d\Omega \quad \forall k \in \{1, \dots, m_h\}, j \in \{1, \dots, n_h\} \quad (3.17)$$

$$M_p := m_k^p = \sum_{l=1}^{m_h} \int_{\Omega} \eta_k \eta_l d\Omega \quad \forall k \in \{1, \dots, m_h\} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{f}_u := f_i^u = \int_{\Omega} \phi_i f^x d\Omega \quad \forall i \in \{1, \dots, n_h\} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{f}_v := f_i^v = \int_{\Omega} \phi_i f^y d\Omega \quad \forall i \in \{1, \dots, n_h\} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{f}_p := f_k^p = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, m_h\} \quad (3.21)$$

Debido a que las ecuaciones de Navier-Stokes no dependen de la presión, sino únicamente de su gradiente, no pueden definirse valores para la presión ya que si se añade una constante al valor de las presiones estas seguirán verificando las ecuaciones de Navier-Stokes.

Esto significa que las $2n_h + m_h$ ecuaciones del sistema (3.12) no son independientes y por tanto el sistema no tiene una sino infinitas soluciones.

La última de las ecuaciones impone que la media de la presión sea nula ampliando el sistema de ecuaciones a $2n_h + m_h + 1$ y haciéndolo determinado al establecer una condición sobre los valores de las presiones.

Para mantener la simetría de la matriz del sistema se añade la incógnita R cuyo valor será nulo.

3.3 Transformación afín de los elementos al triángulo de referencia

Para reducir la cantidad de cálculos de la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones (3.12) se realiza una transformación afín de cada elemento triangular T_s al triángulo de referencia T_{ref} definido por los vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$.

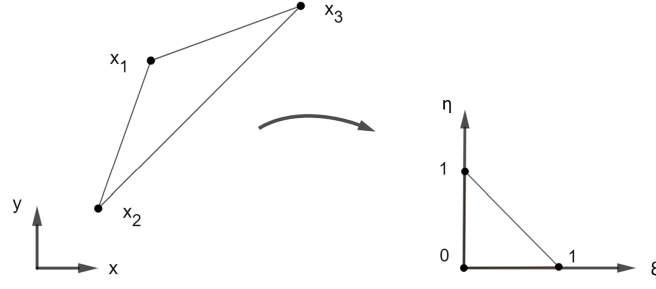


Figura 3.2 Transformación afín al triángulo de referencia.

Como $\{T_s\}$ es un recubrimiento de $\bar{\Omega}$ cuya intersección dos a dos es de medida nula

$$\int_{\Omega} f d\Omega = \sum_s \int_{T_s} f d\Omega$$

donde la integral en T_s

$$\int_{T_s} f(x,y) d\Omega = |J_s| \int_{T_{\text{ref}}} f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) d\Omega.$$

siendo $|J_s|$ el determinante del jacobiano de la transformación del triángulo de referencia T_{ref} en el triángulo T_s

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Esto es especialmente útil en el caso de que las funciones $\phi_i, \eta_k \forall i \in \{1, \dots, n_h\}, k \in \{1, \dots, m_h\}$ sean no nulas en un número reducido de triángulos T_s . Se denotan los conjuntos $T_{\phi,i} = \{s \in \{1, \dots, n_T\} : \phi_i|_{T_s} \neq 0\}$ y $T_{\eta,k} = \{s \in \{1, \dots, n_T\} : \eta_k|_{T_s} \neq 0\}$.

De esta forma, las matrices definidas en la sección 3.2 toman la forma

$$S := s_{i,j} = \sum_{s \in T_{\phi,i} \cap T_{\phi,j}} |J_s| \int_{T_{\text{ref}}} [\phi_{ix} \phi_{jx} + \phi_{iy} \phi_{jy}] d\Omega \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n_h\} \quad (3.23)$$

$$D := d_{i,j} = \sum_{s \in T_{\phi,i} \cap T_{\phi,j}} |J_s| \int_{T_{\text{ref}}} [b \phi_i \phi_{jx} + c \phi_i \phi_{jy}] d\Omega \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n_h\} \quad (3.24)$$

$$D_x := d_{k,j}^x = \sum_{s \in T_{\eta,k} \cap T_{\phi,j}} |J_s| \int_{T_{\text{ref}}} \eta_k \phi_{jx} d\Omega \quad \forall k \in \{1, \dots, m_h\}, j \in \{1, \dots, n_h\} \quad (3.25)$$

$$D_y := d_{k,j}^y = \sum_{s \in T_{\eta,k} \cap T_{\phi,j}} |J_s| \int_{T_{\text{ref}}} \eta_k \phi_{jy} d\Omega \quad \forall k \in \{1, \dots, m_h\}, j \in \{1, \dots, n_h\} \quad (3.26)$$

$$M_p := m_k^p = \sum_{l=1}^{m_h} \sum_{s \in T_{\eta,k} \cap T_{\eta,l}} |J_s| \int_{T_{\text{ref}}} \eta_k \eta_l d\Omega \quad \forall k \in \{1, \dots, m_h\} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{f}_u := f_i^u = \sum_{s \in T_{\phi,i}} |J_s| \int_{T_{\text{ref}}} \phi_i f^x d\Omega \quad \forall i \in \{1, \dots, n_h\} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{f}_v := f_i^v = \sum_{s \in T_{\phi,i}} |J_s| \int_{T_{\text{ref}}} \phi_i f^y d\Omega \quad \forall i \in \{1, \dots, n_h\} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{f}_p := f_k^p = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, m_h\} \quad (3.30)$$

Únicamente es necesario calcular las integrales en el triángulo de referencia, lo cual permite reducir el número de integrales a calcular.

4 Elementos de Scott-Vogelius y Taylor-Hood

En el presente documento se estudia la eficiencia computacional de los elementos de Scott-Vogelius frente a otros elementos de divergencia no nula (elementos de Taylor-Hood).

A continuación se definen los elementos de Taylor-Hood y los de Scott-Vogelius y se dan los requisitos de existencia y unicidad de solución para ambos espacios de elementos finitos.

4.1 Espacio de elementos finitos de Taylor-Hood

Dado un recubrimiento triangular T_s de un dominio de funciones. Se define \mathbf{P}_k como el espacio de funciones continuas definidas a trozos por funciones polinomiales de grado k en cada elemento del recubrimiento.

El espacio de elementos finitos de Taylor-Hood asigna a los espacios V^h, Q^h como $V^h = \mathbf{P}_k \times \mathbf{P}_k$, $Q^h = \mathbf{P}_{k-1}$ para algún $k \geq d$ con d la dimensión del dominio de definición.

En este caso el dominio de definición es bidimensional $d = 2$ y se ha considerado el espacio de elementos finitos más sencillo $k = 2$.

La base asociada al espacio de velocidades V^h es el conjunto de funciones definidas a trozos, cuadráticas en cada triángulo que se anulan en todos los puntos dados por los vértices y los puntos medios de las aristas de los triángulos salvo en uno.

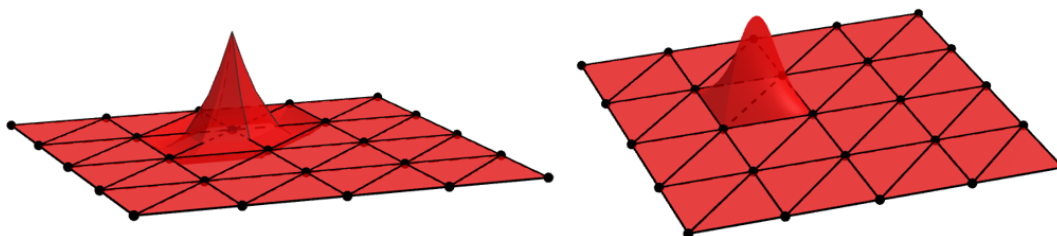


Figura 4.1 Función base de $V^h = \mathbf{P}_2$.

La base asociada al espacio de presiones Q^h es el conjunto de funciones definidas a trozos, lineales en cada triángulo que se anulan en todos los vértices de los triángulos excepto en uno.

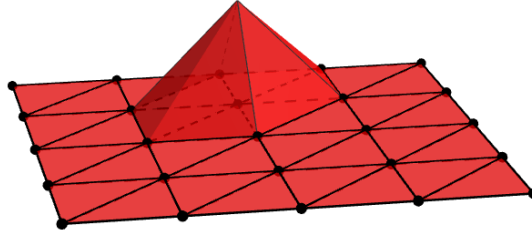


Figura 4.2 Función base de $Q^h = P_1$.

Una base para las funciones cuadráticas definidas en el triángulo de referencia es

$$\phi^h = \{(1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta), \xi(2\xi - 1), \eta(2\eta - 1), 4\xi(1 - \xi - \eta), 4\xi\eta, 4\eta(1 - \xi - \eta)\} \quad (4.1)$$

y para las funciones lineales

$$\eta^h = \{1 - \xi - \eta, \xi, \eta\}. \quad (4.2)$$

Haciendo uso de la transformación afín definida en la sección 3.3, las funciones base en los espacios de velocidades y presiones se pueden obtener a su vez como combinación lineal de transformaciones inversas apropiadas de las funciones base en el triángulo de referencia.

Las ecuaciones (3.12) son la forma débil de las ecuaciones de conservación del momento lineal por lo que obtener la solución del sistema no es resolver el problema de Oseen ya que la divergencia de las velocidades puede no ser nula, es decir, no se verifica la conservación de masa.

Para garantizar la conservación de masa es necesario utilizar un espacio de elementos finitos de divergencia nula (por ejemplo, el de Scott-Vogelius) o métodos de estabilización como la estabilización grad-div.

4.1.1 Método de estabilización grad-div

Este método propuesto en [4] consiste en añadir un término a las ecuaciones (3.10) obteniendo las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi (uu_x + vu_y) d\Omega + \nu \int_{\Omega} (\phi_x u_x + \phi_y u_y) d\Omega + \gamma \int_{\Omega} \phi_x (u_x + v_y) d\Omega - \int_{\Omega} \phi_x p d\Omega &= \int_{\Omega} \phi f^x d\Omega \\ \int_{\Omega} \psi (uv_x + vv_y) d\Omega + \nu \int_{\Omega} (\psi_x v_x + \psi_y v_y) d\Omega + \gamma \int_{\Omega} \psi_y (u_x + v_y) d\Omega - \int_{\Omega} \psi_y p d\Omega &= \int_{\Omega} \psi f^y d\Omega \\ \int_{\Omega} \eta [u_x + v_y] d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

El parámetro γ que pondera el término de estabilización grad-div tiene las mismas unidades que la viscosidad ν .

El término añadido incluye el residuo de la ecuación de continuidad de masa, controlando así el valor de la norma dos de la divergencia.

4.2 Espacio de elementos finitos de Scott-Vogelius

El espacio de elementos finitos de Scott-Vogelius es un espacio de elementos finitos de divergencia nula que asigna $V^h = \mathbf{P}_k \times \mathbf{P}_k$, $Q^h = \mathbf{P}_{k-1}^{\text{disc}}$ con $\mathbf{P}_k^{\text{disc}}$ el espacio de funciones, no necesariamente continuas, definidas a trozos por funciones polinomiales de grado k en cada elemento del recubrimiento.

Para el caso considerado, $k=2$, la base en el triángulo de referencia utilizada es la dada en (4.1) para las velocidades y

$$\eta^h = \{1, 2\xi + \eta - 1, 2\eta + \xi - 1\} \quad (4.4)$$

para las presiones [7].

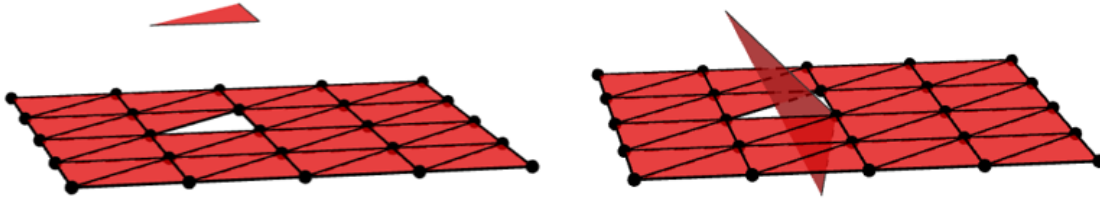


Figura 4.3 Función base de $Q^h = P_1^{\text{disc}}$.

Es evidente que $P_{k-1} \subset P_{k-1}^{\text{disc}}$ por lo que la dimensión del espacio de presiones de Scott-Vogelius es mayor que la del espacio de presiones de Taylor-Hood. El espacio de presiones de Taylor-Hood tiene asociada una función base por cada nodo mientras que el espacio de presiones de Scott-Vogelius para cada nodo hay tantas funciones base como triángulos que contengan dicho vértice.

4.3 Existencia y unicidad de solución

A la hora de definir un problema es necesario conocer si tiene solución y, en caso de tenerla, si dicha solución es única.

Una condición que garantiza la existencia y unicidad de la solución del presente problema es la condición inf-sup, también conocida como condición LBB.

$$\inf_{q^h \in Q^h} \sup_{\mathbf{v}^h \in V^h \times V^h} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}^h, q^h)}{\|\nabla \cdot \mathbf{v}^h\|_{L^2} \|q^h\|_{L^2}} \geq \beta_0 \tag{4.5}$$

con $\beta_0 > 0$.

Los elementos de Taylor-Hood son inf-sup estables. Sin embargo, los elementos de Scott-Vogelius no verifican esta condición en general sino únicamente en algunos casos particulares. Se ha demostrado en [9] que para los casos $d = 2, 3$ con una malla refinada en el baricentro, los elementos de Scott-Vogelius sí verifican la condición inf-sup.

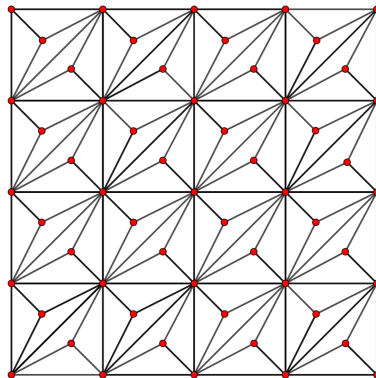


Figura 4.4 Malla refinada en el baricentro para $n = 4$.

Se ha demostrado en [7] que en ocasiones es necesario introducir un término de reacción adicional a las ecuaciones 3.10 siendo las ecuaciones resultantes:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \phi (uu_x + vv_y) d\Omega + v \int_{\Omega} (\phi_x u_x + \phi_y u_y) d\Omega + \alpha \int_{\Omega} \phi u d\Omega - \int_{\Omega} \phi_x p d\Omega = \int_{\Omega} \phi f^x d\Omega \\
& \int_{\Omega} \psi (uv_x + vv_y) d\Omega + v \int_{\Omega} (\psi_x v_x + \psi_y v_y) d\Omega + \alpha \int_{\Omega} \psi v d\Omega - \int_{\Omega} \psi_y p d\Omega = \int_{\Omega} \psi f^y d\Omega \\
& \int_{\Omega} \eta [u_x + v_y] d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

Este término, ponderado por el parámetro $\alpha \geq 0$, permite garantizar la existencia y unicidad de solución en determinados problemas numéricos o mejorar la eficiencia de resolución.

4.4 Cambio de formulación de elementos de Taylor-Hood a elementos de Scott-Vogelius

Para reformular el problema escrito en el espacio de elementos finitos de Taylor-Hood como uno sobre el espacio de elementos finitos de Scott-Vogelius es necesario realizar los siguientes cambios:

1. Sustituir la base de funciones del espacio de elementos de Taylor-Hood por la de Scott-Vogelius.
2. Expandir el sistema de ecuaciones obtenido a partir de las funciones base de las presiones del número de nodos (para una malla refinada en el baricentro $(n+1)^2 + 2n^2$) a tres veces el número de triángulos (para una malla refinada en el baricentro $18n^2$).

5 Problema de Stokes

En este capítulo y los dos capítulos siguientes (6, 7) se realizan una serie de experimentos para analizar la convergencia y realizar una comparativa entre los distintos métodos empleados: elementos finitos de Taylor-Hood con y sin estabilización grad-div frente a elementos finitos de Scott-Vogelius.

A partir de los códigos programados con MATLAB® para la resolución de los problemas de Stokes y Oseen con elementos finitos de Taylor-Hood se ha programado la resolución de ambos problemas con los elementos de Scott-Vogelius y la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias con ambos elementos.

En esta sección se analiza el resultado obtenido del problema de Stokes para mallados con diferente número de subdivisiones ($n = 6, 12, 24, 48, 96$) para el caso de un fluido de baja viscosidad $\nu = 10^{-6}$. Las condiciones de contorno de Dirichlet y el término independiente \mathbf{f} se han seleccionado para obtener como solución exacta:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 8\text{sen}^2(\pi x) y(1-y)(1-2y) (1.2 + 0.8 \cos(4t)) \\ -8\pi(y(1-y))^2 \text{sen}(\pi x) \cos(\pi x) (1.2 + 0.8 \cos(4t)) \end{pmatrix}$$

$$p = \lambda \text{sen}(\pi x) \cos(\pi y) (0.5 (1.2 + 0.8 \cos(4t)))$$

donde λ es un parámetro utilizado para escalar las presiones y $t = 0$. El parámetro γ de la estabilización grad-div se ha fijado en 0.05 [3].

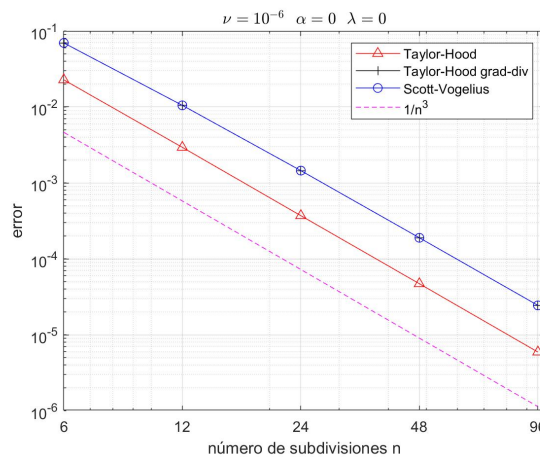


Figura 5.1 Convergencia del error en la velocidad u frente al número de subdivisiones, n .

La figura 5.1 muestra que las respectivas soluciones u^{h1} convergen a la solución exacta del problema para los tres espacios de elementos finitos ya que el error decrece al aumentar la dimensión de dichos espacios. Además, el orden de convergencia dado por la pendiente de la gráfica es $\mathcal{O}(1/n^3)$. La figura 5.2 muestra que

¹ Las conclusiones que se obtienen para la componente v^h son equivalentes a los obtenidos para u^h .

las soluciones para la presión p^h convergen de forma cuadrática, $\mathcal{O}(1/n^2)$. Ambos resultados coinciden con el resultado teórico (véase [7]).

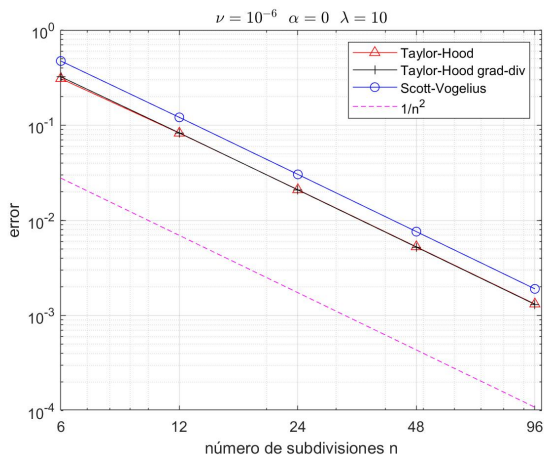


Figura 5.2 Convergencia del error en la presión p frente al número de subdivisiones, n .

Se han realizado los experimentos para valores de $\lambda = 0$, $\lambda = 10$ y $\lambda = 100$. Las gráficas 5.1 y 5.2 se consideran representativas de todos los casos de velocidades y presiones obtenidos en cuanto al orden de convergencia.

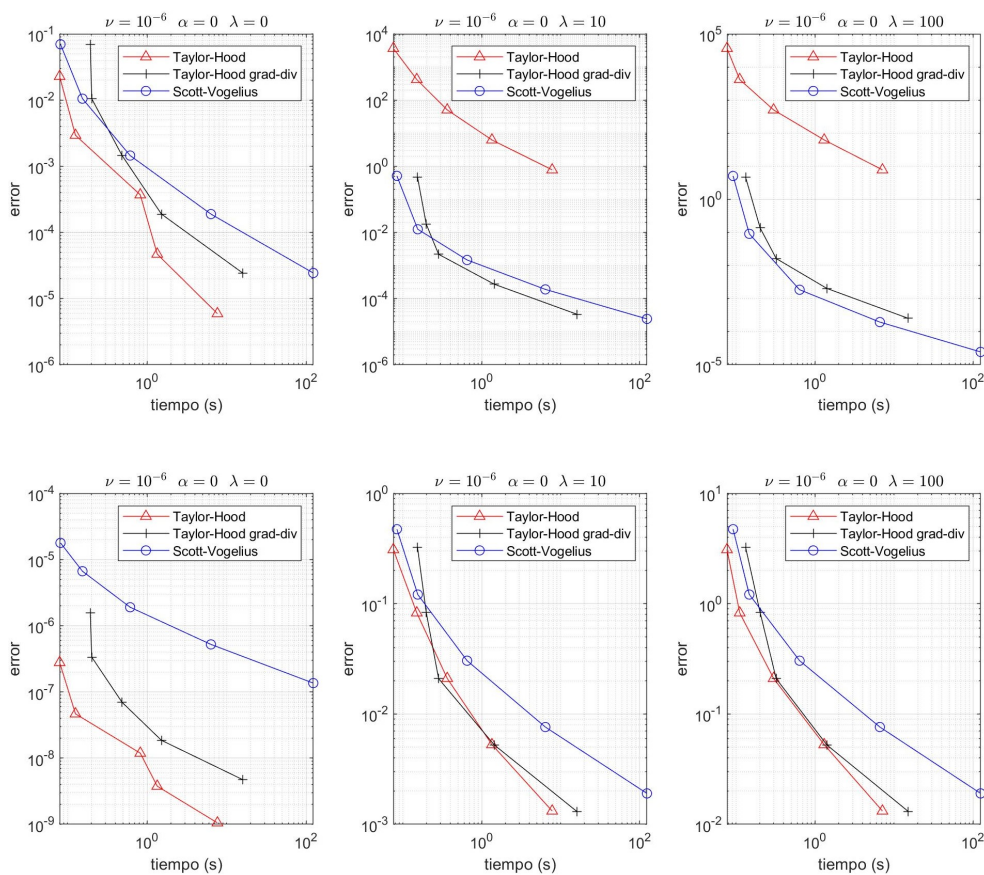


Figura 5.3 Evolución del máximo error (arriba, error en velocidad u ; abajo, error en presión p) y el tiempo de computación para distintos valores del parámetro λ de las presiones para diferentes mallados ($n = 6, 12, 24, 48, 96$).

La figura 5.3 recoge los resultados obtenidos para el problema de Stokes para diferentes valores de λ ($\lambda = 0, 10, 100$). De esta figura se extrapolan los siguientes resultados:

1. Para gradientes de presiones medios y bajos, el uso de los elementos de Taylor-Hood es la opción más eficiente desde el punto de vista computacional. El principal inconveniente de estos elementos es el elevado error del término de la divergencia de las velocidades (véase figura 5.4). Sin embargo, se observa que el empleo de un método de estabilización (en este caso estabilización grad-div) corrige este defecto, mejorando los valores obtenidos para gradientes de presión no nulos.

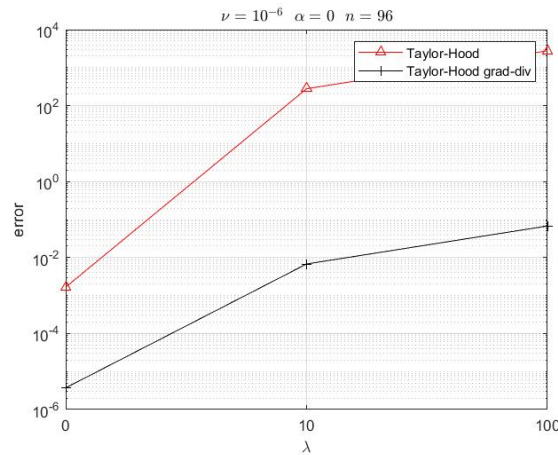


Figura 5.4 Error de la divergencia en norma dos, $\|\nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)\|_{L^2}$, para distintos valores del parámetro λ .

2. Los elementos de Scott-Vogelius no aproximan los valores de las presiones tan bien como los elementos de Taylor-Hood debido a la discontinuidad de estos elementos. Sin embargo, para gradientes elevados de presiones, los elementos de Scott-Vogelius son los que mejor aproximan la solución exacta de las velocidades por lo que en estos casos resulta muy recomendable su uso.

6 Problema de Oseen

En esta sección se analiza el resultado obtenido en el problema de Oseen para mallados con diferente número de subdivisiones ($n = 6, 12, 24, 48$) para el caso $\nu = 10^{-6}$. Las condiciones de contorno de Dirichlet y el término independiente \mathbf{f} se han seleccionado para obtener como solución exacta:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 8\text{sen}^2(\pi x) y(1-y)(1-2y) (1.2 + 0.8 \cos(4t)) \\ -8\pi(y(1-y))^2 \text{sen}(\pi x) \cos(\pi x) (1.2 + 0.8 \cos(4t)) \end{pmatrix}$$

$$p = \lambda \text{sen}(\pi x) \cos(\pi y) (0.5 (1.2 + 0.8 \cos(4t)))$$

donde λ es un parámetro utilizado para escalar las presiones y $t = 0$. Asimismo el coeficiente \mathbf{b} es

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8\text{sen}^2(\pi x) y(1-y)(1-2y) (1.2 + 0.8 \cos(4t)) \\ -8\pi(y(1-y))^2 \text{sen}(\pi x) \cos(\pi x) (1.2 + 0.8 \cos(4t)) \end{pmatrix}.$$

Nótese que el coeficiente \mathbf{b} coincide con \mathbf{u} , lo que implica que la solución exacta elegida para el problema de Oseen es también una solución exacta para el problema de Navier-Stokes estacionario.

En el problema de Oseen las soluciones también convergen a la solución exacta y lo hacen con orden $\mathcal{O}(1/n^2)$ para las velocidades y para las presiones (véase [7]).

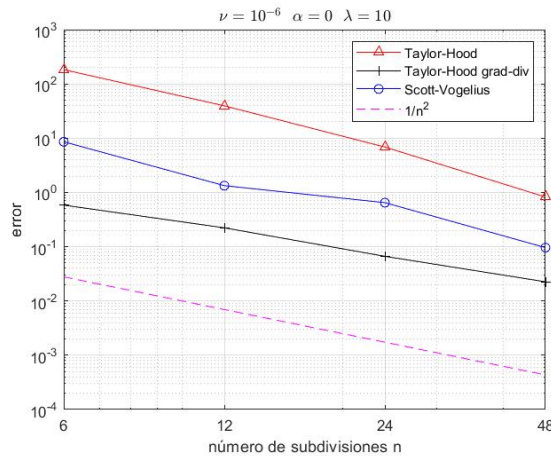


Figura 6.1 Convergencia del error en la velocidad u frente al número de subdivisiones, n .

En las figuras 6.1 y 6.2 se refleja el orden de convergencia de los errores. Para los elementos de Taylor-Hood y de Scott-Vogelius se verifica el resultado teórico de convergencia cuadrática. El hecho de que los elementos de Taylor-Hood con estabilización grad-div converjan con un orden ligeramente inferior a dos puede deberse a que el número de subdivisiones no es suficientemente alto para observar la tendencia teórica.

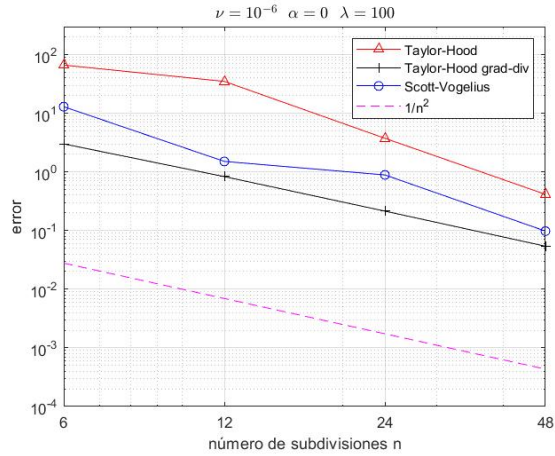


Figura 6.2 Convergencia del error en la presión p frente al número de subdivisiones, n .

Se han realizado los experimentos para valores de $\lambda = 0$, $\lambda = 10$ y $\lambda = 100$. Las gráficas 5.1 y 5.2 se consideran representativas de todos los casos de velocidades y presiones obtenidos en cuanto al orden de convergencia.

La figura 6.3 recoge los resultados obtenidos para el problema de Stokes para diferentes valores de λ ($\lambda = 0, 10, 100$).

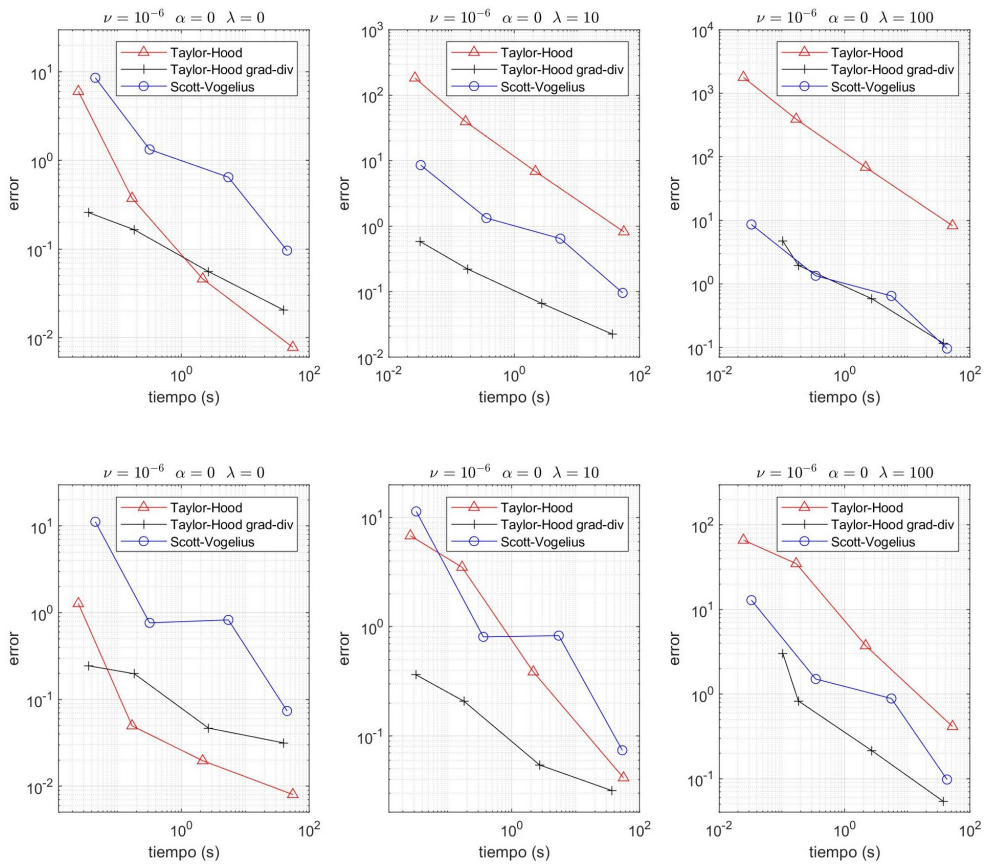


Figura 6.3 Evolución del máximo error (arriba, error en velocidad u ; abajo, error en presión p) y el tiempo de computación para distintos valores del parámetro λ de las presiones para diferentes mallados ($n = 6, 12, 24, 48$).

De la figura anterior se extraen conclusiones similares a las observadas en el problema de Stokes:

1. Para gradientes de presiones nulos, el uso de los elementos de Taylor-Hood es la opción más eficiente desde el punto de vista computacional.
2. Para gradientes de presiones medios y bajos, el uso de los elementos de Taylor-Hood resulta poco eficiente debido al elevado error de la divergencia de las velocidades (véase figura 6.4). Sin embargo, se observa que el empleo de un método de estabilización (en este caso, estabilización grad-div) corrige este defecto, mejorando los valores obtenidos para gradientes de presión no nulos y siendo el método más eficiente en estos casos.

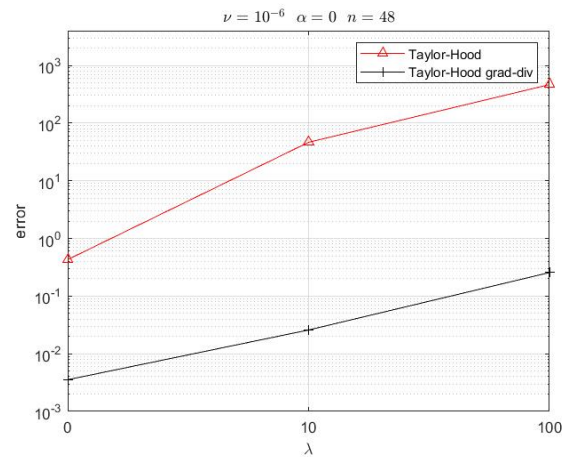


Figura 6.4 Error de la divergencia en norma dos, $\|\nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)\|_{L^2}$, para distintos valores del parámetro λ .

3. Los elementos de Scott-Vogelius no aproximan los valores de las presiones tan bien como los elementos de Taylor-Hood debido a la discontinuidad de estos elementos. Sin embargo, para gradientes elevados de presiones, los elementos de Scott-Vogelius son los que mejor aproximan la solución exacta de las velocidades por lo que en estos casos resulta muy recomendable su uso.

7 Problema de Navier-Stokes estacionario

En este capítulo se trata el problema de Navier-Stokes estacionario.

Recordando el problema dado por las ecuaciones (3.11), con $\psi^h = \phi^h$ y sustituyendo $\mathbf{u}^h = \sum_{j=1}^{n_h} \begin{pmatrix} U_j \phi_j \\ V_j \phi_j \end{pmatrix} \in$

$V^h \times V^h$ y $p^h = \sum_{l=1}^{m_h} P_l \eta_l \in Q^h$ se obtiene

$$\sum_{j,r=1}^{n_h} U_r \int_{\Omega} \phi_i \phi_j (U_j \phi_{rx} + V_j \phi_{ry}) d\Omega + \nu \sum_{j=1}^{n_h} U_j \int_{\Omega} [\phi_{ix} \phi_{jx} + \phi_{iy} \phi_{jy}] d\Omega - \sum_{l=1}^{m_h} P_l \int_{\Omega} \phi_{ix} \eta_l d\Omega = \int_{\Omega} \phi_i f^x d\Omega$$

$$\sum_{j,r=1}^{n_h} V_r \int_{\Omega} \phi_i \phi_j (U_j \phi_{rx} + V_j \phi_{ry}) d\Omega + \nu \sum_{j=1}^{n_h} V_j \int_{\Omega} [\phi_{ix} \phi_{jx} + \phi_{iy} \phi_{jy}] d\Omega - \sum_{l=1}^{m_h} P_l \int_{\Omega} \phi_{iy} \eta_l d\Omega = \int_{\Omega} \phi_i f^y d\Omega$$

$$\sum_{j=1}^{n_h} U_j \int_{\Omega} \eta_k \phi_{jx} d\Omega + V_j \int_{\Omega} \eta_k \phi_{jy} d\Omega = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n_h} U_j \phi_j = \sum_{j=1}^{n_h} V_j \phi_j = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (7.1)$$

para todo $i = 1, \dots, n_h$ y para todo $k = 1, \dots, m_h$.

Este problema no es lineal sino cuadrático y por tanto, a diferencia de los problemas anteriores, no se puede resolver mediante eliminación gaussiana. Es necesario otro método, en este caso, el método de Newton.

7.1 Método de Newton

El método de Newton es un método iterativo para el cálculo de una solución de una ecuación no lineal. Este método se basa en la obtención de un cero de una función, que representa la ecuación a resolver, y de su diferencial.

La función F considerada para la resolución mediante el método de Newton es

$$F(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + A\mathbf{x} - \mathbf{f} \quad (7.2)$$

donde A , \mathbf{x} y \mathbf{f} son la matriz de coeficientes lineales, el vector de incógnitas y el término independiente definidos en (3.13) (con $D = 0$ ya que este término es sustituido por el término no lineal) y L es un tensor de tercer orden definido como

$$L := L_{i,j,r} = \begin{cases} \int_{\Omega} \phi_{i-\tau_i} \phi_{j-\tau_j} \phi_{(r-\tau_r)x} d\Omega & \text{si } i, j \leq 2n_h, r \leq n_h \\ \int_{\Omega} \phi_{i-\tau_i} \phi_{j-\tau_j} \phi_{(r-\tau_r)y} d\Omega & \text{si } i, j \leq 2n_h, n_h < r \leq 2n_h \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad \forall i, j, r \in \{1, \dots, 2n_h + m_h + 1\} \quad (7.3)$$

con

$$\tau_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq n_h \\ n_h & \text{si } n_h < i \leq 2n_h \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, 2n_h\} \quad (7.4)$$

7.2 Resultados numéricos

En este apartado se analiza el resultado obtenido en el problema de Navier-Stokes estacionario para mallados con diferente número de subdivisiones ($n = 3, 6, 12, 24$) para el caso $\nu = 10^{-6}$. Las condiciones de contorno de Dirichlet y el término independiente \mathbf{f} se han seleccionado para obtener como solución exacta la del problema de Oseen (capítulo 6).

Los parámetros usados para establecer el fin de la iteración del método de Newton han sido la tolerancia relativa $tol_r = 10^{-3}$, la tolerancia absoluta $tol_a = 10^{-3}$ y el número máximo de iteraciones $it = 100$.

En el problema de Navier-Stokes estacionario los errores de u y p convergen con orden $\mathcal{O}(1/n^2)$ [3].

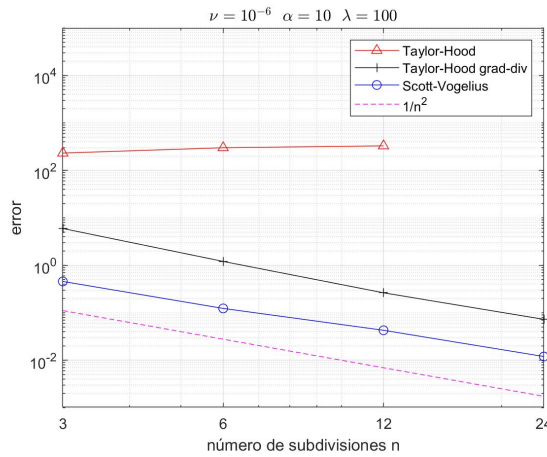


Figura 7.1 Convergencia del error en la velocidad u frente al número de subdivisiones, n .

En las figuras 7.1 y 7.2 se refleja el orden de convergencia de los errores. Para los elementos de Taylor-Hood con estabilización grad-div y de Scott-Vogelius se verifica el resultado teórico de convergencia cuadrática.

En el caso de los elementos de Taylor-Hood sin estabilización grad-div se observa que los errores no convergen para ningún caso distinto de $\lambda = 0$, donde los errores convergen con orden $\mathcal{O}(1/n^2)$ (véase figura 7.3).

Adicionalmente se han realizado los experimentos para valores de $\lambda = 0$ y $\lambda = 10$. Sin embargo, se ha decidido no incluir estos casos al no haber diferencias significativas en cuanto a la convergencia del error frente al caso mostrado anteriormente.

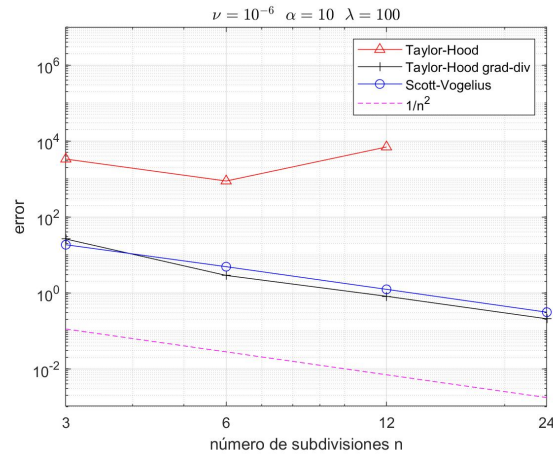


Figura 7.2 Convergencia del error en la presión p frente al número de subdivisiones, n .

La figura 7.3 recoge los resultados obtenidos para el problema de Navier-Stokes estacionario para diferentes valores de λ ($\lambda = 0, 10, 100$).

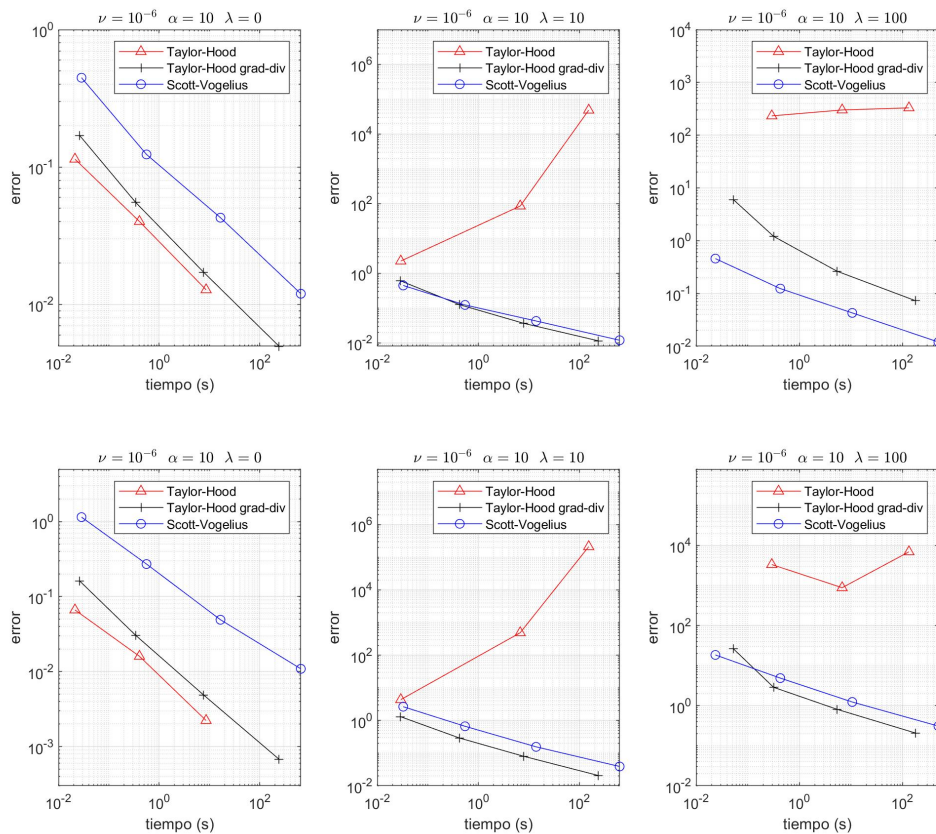


Figura 7.3 Evolución del máximo error (arriba, error en velocidad u ; abajo, error en presión) y el tiempo de computación para distintos valores del parámetro λ de las presiones para diferentes mallas ($n = 3, 6, 12, 24$).

De la figura anterior se extraen conclusiones similares a las observadas en los problemas de Stokes y Oseen:

1. Para gradientes de presiones nulos, el uso de los elementos de Taylor-Hood sin estabilización grad-div es la opción más eficiente desde el punto de vista computacional.
2. Los elementos de Taylor-Hood suelen presentar elevado error de la divergencia de las velocidades (véase figura 7.4). Sin embargo, se observa que el empleo de un método de estabilización (en este caso, estabilización grad-div) disminuye el error de la divergencia, mejorando los valores obtenidos para gradientes de presión no nulos y siendo el método más eficiente en para casos con gradientes de presiones bajos y medios.

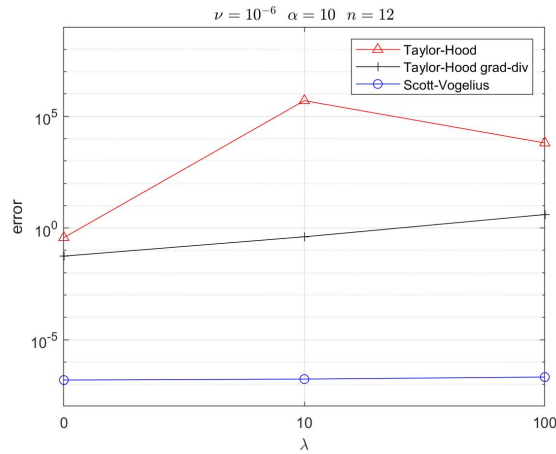


Figura 7.4 Error de la divergencia en norma dos, $\|\nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)\|_{L^2}$, para distintos valores del parámetro λ .

3. Los elementos de Scott-Vogelius no aproximan los valores de las presiones tan bien como los elementos de Taylor-Hood con estabilización grad-div debido a la discontinuidad de estos elementos. Aún así, los elementos de Scott-Vogelius son los que mejor aproximan la solución exacta de las velocidades para valores de λ altos, por lo que su uso está indicado para gradientes de presiones elevados.

8 Conclusiones Finales

Los elementos de Taylor-Hood son una opción habitual en problemas derivados de las ecuaciones de Navier-Stokes en el caso de presión constante debido a su bajo coste computacional.

Sin embargo, en casos en los que los gradientes de presión no son despreciables y debido a que los elementos de Taylor-Hood no son de divergencia nula, la aproximación hecha en (3.7) no es válida y el error cometido por estos elementos aumenta considerablemente.

El error cometido al usar los elementos de Taylor-Hood en casos de gradientes de presiones no nulos se puede reducir mediante la implementación de un método de estabilización como la estabilización grad-div.

Los elementos finitos de Scott-Vogelius presentan un error mayor que los de Taylor-Hood para las presiones debido a la discontinuidad. En cambio, estos elementos sí son de divergencia nula y en casos de gradientes de presiones muy elevados resultan más eficientes que los de Taylor-Hood si se pretende obtener una buena solución para las velocidades.

Apéndice A

Resultados numéricos

En este apéndice se recogen los resultados numéricos de los experimentos realizados para los problemas de Stokes, Oseen y las ecuaciones estacionarias de Navier-Stokes.

A.1 Problema de Stokes

A.1.1 Taylor-Hood sin estabilización grad-div

Tabla A.1 Taylor-Hood, $n = 6$ $\gamma = 0$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	7.99e-02	0.0228	0.0157	2.78e-07	4.86e-03	5.30e-03	3.57e-01	6.18e-08
10	7.57e-02	3642.9	3402.1	0.309	1.18e+03	1.14e+03	7.70e+04	1.41e-01
100	7.71e-02	36429	34021	3.090	1.18e+04	1.14e+04	7.70e+05	1.41e+00

Tabla A.2 Taylor-Hood, $n = 12$ $\gamma = 0$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	1.26e-01	0.0029	0.0022	4.66e-08	5.80e-04	6.31e-04	1.01e-01	8.25e-09
10	1.50e-01	417.9	405.03	0.0825	1.33e+02	1.32e+02	1.83e+04	3.61e-02
100	1.12e-01	4179	4050.3	0.8254	1.33e+03	1.32e+03	1.83e+05	3.61e-01

Tabla A.3 Taylor-Hood, $n = 24$ $\gamma = 0$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	8.23e-01	0.00037	0.00029	1.19e-08	7.10e-05	7.71e-05	2.63e-02	1.65e-09
10	3.65e-01	50.427	49.955	0.0210	1.59e+01	1.59e+01	4.49e+03	9.09e-03
100	2.99e-01	504.27	499.55	0.2100	1.59e+02	1.59e+02	4.49e+04	9.09e-02

Tabla A.4 Taylor-Hood, $n = 48$ $\gamma = 0$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	1.34e+00	4.70e-05	3.83e-05	3.76e-09	8.82e-06	9.57e-06	6.66e-03	4.21e-10
10	1.35e+00	6.2394	6.2238	0.00527	1.97e+00	1.97e+00	1.11e+03	2.28e-03
100	1.31e+00	62.394	62.238	0.05273	1.97e+01	1.97e+01	1.11e+04	2.28e-02

Tabla A.5 Taylor-Hood, $n = 96$ $\gamma = 0$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	7.67e+00	5.93e-06	4.88e-06	1.05e-09	1.10e-06	1.19e-06	1.67e-03	1.07e-10
10	7.81e+00	0.77785	0.77735	0.0013197	2.46e-01	2.46e-01	2.78e+02	5.70e-04
100	7.15e+00	7.7785	7.7735	0.013197	2.46e+00	2.46e+00	2.78e+03	5.70e-03

A.1.2 Taylor-Hood con estabilización grad-div**Tabla A.6** Taylor-Hood, $n = 6$ $\gamma = 0.05$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	1.94e-01	0.0696	0.0628	1.58e-06	2.21e-02	2.29e-02	5.80e-05	3.90e-07
10	1.54e-01	0.4629	0.5065	0.323	1.27e-01	1.30e-01	1.79e+00	1.40e-01
100	1.33e-01	4.6062	5.0654	3.230	1.25e+00	1.28e+00	1.79e+01	1.40e+00

Tabla A.7 Taylor-Hood, $n = 12$ $\gamma = 0.05$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	2.02e-01	0.0105	0.0099	3.36e-07	2.77e-03	2.87e-03	2.09e-05	7.36e-08
10	1.98e-01	0.0178	0.0191	0.08305	5.64e-03	5.62e-03	4.39e-01	3.60e-02
100	2.02e-01	0.1368	0.1517	0.8305	4.92e-02	4.84e-02	4.39e+00	3.60e-01

Tabla A.8 Taylor-Hood, $n = 24$ $\gamma = 0.05$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	4.86e-01	0.00145	0.00142	6.96e-08	3.17e-04	3.31e-04	6.32e-06	1.19e-08
10	2.84e-01	0.00218	0.00233	0.0209	6.16e-04	6.22e-04	1.09e-01	9.07e-03
100	3.23e-01	0.01625	0.01658	0.2090	6.16e-03	5.28e-03	1.09e+00	9.07e-02

Tabla A.9 Taylor-Hood, $n = 48$ $\gamma = 0.05$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	1.52e+00	1.89e-04	1.93e-04	1.86e-08	3.72e-05	3.92e-05	1.97e-06	2.04e-09
10	1.44e+00	0.00218	0.00029	0.00523	7.53e-05	7.63e-05	2.72e-02	2.27e-03
100	1.41e+00	0.01625	0.00205	0.05233	6.56e-04	6.56e-04	2.72e-01	2.27e-02

Tabla A.10 Taylor-Hood, $n = 96$ $\gamma = 0.05$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	1.59e+01	2.44e-05	2.51e-05	4.73e-09	4.54e-06	4.80e-06	3.73e-06	4.19e-10
10	1.60e+01	3.38e-05	3.70e-05	0.00131	9.35e-06	9.48e-06	6.78e-03	5.68e-04
100	1.51e+01	0.000253	0.000256	0.01308	8.19e-05	8.19e-05	6.78e-02	5.68e-03

A.1.3 Scott-Vogelius**Tabla A.11** Scott-Vogelius, $n = 6$.

λ	t	max error			L^2 error		
0	8.18e-02	0.0697	0.0628	1.79e-05	2.21e-02	2.29e-02	3.17e-06
10	8.40e-02	0.5106	0.5607	0.4733	1.17e-01	1.23e-01	1.63e-01
100	9.20e-02	5.084	5.6072	4.7329	1.15e+00	1.21e+00	1.63e+00

Tabla A.12 Scott-Vogelius, $n = 12$.

λ	t	max error			L^2 error		
0	1.55e-01	0.0011	0.0099	6.65e-06	2.77e-03	2.87e-03	1.09e-06
10	1.55e-01	0.0125	0.0136	0.12096	3.47e-03	3.58e-03	4.14e-02
100	1.48e-01	0.0906	0.0947	1.2096	2.11e-02	2.16e-02	4.14e-01

Tabla A.13 Scott-Vogelius, $n = 24$.

λ	t	max error			L^2 error		
0	6.14e-01	0.0015	0.0015	1.90e-06	3.17e-04	3.32e-04	3.22e-07
10	6.52e-01	0.0015	0.0015	0.0305	3.19e-04	3.33e-04	1.04e-02
100	6.39e-01	0.0019	0.0020	0.3041	4.72e-04	4.85e-04	1.04e-01

Tabla A.14 Scott-Vogelius, $n = 48$.

λ	t	max error			L^2 error		
0	6.35e+00	0.00019	0.00019	5.22e-07	3.72e-05	3.92e-05	8.58e-08
10	6.41e+00	0.00019	0.00019	0.00761	3.72e-05	3.92e-05	2.60e-03
100	6.63e+00	0.00020	0.00020	0.07612	3.76e-05	3.96e-05	2.60e-02

Tabla A.15 Scott-Vogelius, $n = 96$.

λ	t	max error			L^2 error		
0	1.23e+02	2.44e-05	2.51e-05	1.36e-07	4.54e-06	4.80e-06	2.19e-08
10	1.24e+02	2.44e-05	2.51e-05	0.0019	4.54e-06	4.80e-06	6.50e-04
100	1.25e+02	2.45e-05	2.52e-05	0.0190	4.54e-06	4.80e-06	6.50e-03

A.2 Problema de Oseen

A.2.1 Taylor-Hood sin estabilización grad-div

Tabla A.16 Taylor-Hood, $n = 6$ $\gamma = 0$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	2.47e-02	6.0192	4.7195	1.2757	9.40e-01	8.84e-01	4.06e+01	4.98e-01
10	2.62e-02	182.82	147.87	6.8071	1.26e+01	1.56e+01	1.62e+03	1.1942
100	2.45e-02	1774	1434.5	66.222	1.26e+02	1.56e+02	1.62e+04	1.09e+01

Tabla A.17 Taylor-Hood, $n = 12$ $\gamma = 0$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	1.71e-01	0.374	0.3185	0.0497	4.31e-02	3.93e-02	4.47e+00	1.65e-02
10	1.68e-01	39.414	43.237	3.5073	3.7027	4.9738	6.17e+02	3.43e-01
100	1.69e-01	390.92	429.87	34.933	3.72e+01	4.97e+01	6.17e+03	3.4306

Tabla A.18 Taylor-Hood, $n = 24$ $\gamma = 0$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	2.1588	0.0471	0.0453	0.0197	1.19e-02	1.19e-02	1.4031	7.14e-03
10	2.1787	6.8543	7.6112	0.3862	4.91e-01	6.58e-01	1.68e+02	3.33e-02
100	2.1676	68.276	75.704	3.7409	4.91e+00	6.58e+00	1.68e+03	3.25e-01

Tabla A.19 Taylor-Hood, $n = 48$ $\gamma = 0$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	5.52e+01	0.0078	0.0078	0.00803	2.68e-03	2.70e-03	4.30e-01	2.51e-03
10	5.58e+01	0.8225	1.1162	0.04143	6.52e-02	8.02e-02	4.65e+01	4.95e-03
100	5.25e+01	8.2201	11.147	0.41381	6.51e-01	8.01e-01	4.65e+02	4.27e-02

A.2.2 Taylor-Hood con estabilización grad-div**Tabla A.20** Taylor-Hood, $n = 6$ $\gamma = 0.05$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	3.57e-02	0.2581	0.2786	0.245	1.12e-01	1.12e-01	2.16e-01	2.30e-02
10	3.19e-02	0.5832	0.6009	0.364	1.26e-01	1.26e-01	1.72e+00	1.70e-01
100	1.04e-01	4.6852	4.8182	2.999	5.87e-01	5.87e-01	1.70e+01	1.43e+00

Tabla A.21 Taylor-Hood, $n = 12$ $\gamma = 0.05$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	1.85e-01	0.1653	0.159	0.19808	6.82e-02	6.81e-02	5.14e-02	6.67e-02
10	1.81e-01	0.2227	0.288	0.20772	7.00e-02	7.00e-02	4.19e-01	7.58e-02
100	1.83e-01	1.9586	2.270	0.83115	1.72e-01	1.77e-01	4.16e+00	3.67e-01

Tabla A.22 Taylor-Hood, $n = 24$ $\gamma = 0.05$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	2.6657	0.05572	0.05502	0.0468	2.13e-02	2.17e-02	1.35e-02	1.94e-02
10	2.7428	0.06652	0.08147	0.0542	2.17e-02	2.21e-02	1.04e-01	2.14e-02
100	2.7275	0.58377	0.52259	0.2144	4.65e-02	4.74e-02	1.03e+00	9.26e-02

Tabla A.23 Taylor-Hood, $n = 48$ $\gamma = 0.05$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	3.96e+01	0.02054	0.02067	0.03163	6.39e-03	6.45e-03	3.55e-03	2.68e-03
10	3.67e+01	0.02255	0.02125	0.03163	6.47e-03	6.52e-03	2.58e-02	6.12e-03
100	3.72e+01	0.01173	0.1248	0.05405	1.19e-02	1.16e-02	2.56e-01	2.34e-02

A.2.3 Scott-Vogelius**Tabla A.24** Scott-Vogelius, $n = 6$.

λ	t	max error			L^2 error		
0	4.55e-02	8.571	8.1928	11.2	3.7374	3.7806	4.3668
10	3.24e-02	8.5752	8.1972	11.373	3.7374	3.7806	4.3698
100	3.28e-02	8.6126	8.2263	12.922	3.7376	3.7808	4.6625

Tabla A.25 Scott-Vogelius, $n = 12$.

λ	t	max error			L^2 error		
0	3.20e-01	1.3314	1.3512	0.76542	2.44e-01	2.53e-01	2.37e-01
10	3.61e-01	1.3325	1.3523	0.80839	2.44e-01	2.23e-01	2.41e-01
100	3.47e-01	1.3424	1.3622	1.509	2.44e-01	2.53e-01	4.77e-01

Tabla A.26 Scott-Vogelius, $n = 24$.

λ	t	max error			L^2 error		
0	5.4353	0.6476	0.7306	0.8277	2.20e-01	2.19e-01	2.90e-01
10	5.4396	0.6476	0.7306	0.8294	2.20e-01	2.19e-01	2.90e-01
100	5.5667	0.6466	0.6306	0.8879	2.20e-01	2.19e-01	3.08e-01

Tabla A.27 Scott-Vogelius, $n = 48$.

λ	t	max error			L^2 error		
0	4.49e+01	0.09613	0.09984	0.07368	2.15e-02	2.23e-02	1.57e-02
10	5.34e+01	0.09613	0.09984	0.07403	2.15e-02	2.23e-02	1.59e-02
100	4.28e+01	0.09613	0.09984	0.09781	2.15e-02	2.23e-02	3.04e-02

A.3 Ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias

A.3.1 Taylor-Hood sin estabilización grad-div

Tabla A.28 Taylor-Hood, $n = 3$ $\gamma = 0$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	2.12e-02	0.1141	0.1753	0.0664	3.09e-02	3.98e-02	2.395	1.98e-02
10	2.91e-02	2.2493	2.9767	4.3496	5.04e-01	5.27e-01	2.44e+01	7.27e-01
100	2.93e-01	231.95	192.25	3327.4	4.67e+01	4.59e+01	1.92e+03	9.44e+02

Tabla A.29 Taylor-Hood, $n = 6$ $\gamma = 0$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	4.06e-01	0.0401	0.0483	0.0160	7.66e-03	7.94e-03	9.38e-01	3.57e-03
10	6.6522	85.796	82.083	488.4	1.45e+01	1.42e+01	1.30e+03	1.14e+02
100	6.7661	300.28	195.21	879.75	3.40e+01	3.06e+01	3.07e+03	2.22e+02

Tabla A.30 Taylor-Hood, $n = 12$ $\gamma = 0$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	8.5636	0.0013	0.0012	0.0022	1.79e-03	1.74e-03	3.71e-01	4.31e-04
10	1.54e+02	48677	29439	2.11e+05	2.83e+03	2.77e+03	5.04e+05	2.29e+04
100	1.33e+02	329.22	282.9	6926.4	3.87e+01	3.78e+01	6.43e+03	1.12e+03

A.3.2 Taylor-Hood con estabilización grad-div

Tabla A.31 Taylor-Hood, $n = 3$ $\gamma = 0.05$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	2.62e-02	0.16981	0.20904	0.16189	4.18e-02	4.53e-02	1.02e+00	4.12e-02
10	2.86e-02	0.61076	0.54925	1.3119	1.73e-01	1.53e-01	4.80e+00	4.51e-01
100	5.23e-02	5.9775	4.8919	26.094	1.59e+00	1.37e+00	4.44e+01	6.02e+00

Tabla A.32 Taylor-Hood, $n = 6$ $\gamma = 0.05$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	3.41e-01	0.05527	0.04871	0.03046	1.17e-02	1.03e-02	2.37e-01	6.39e-03
10	4.27e-01	0.12569	0.10432	0.28895	3.09e-02	2.90e-02	1.53e+00	1.36e-01
100	3.18e-01	1.208	0.85456	2.8681	2.87e-01	2.76e-01	1.51e+01	1.32e+00

Tabla A.33 Taylor-Hood, $n = 12$ $\gamma = 0.05$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	7.63e+00	0.01717	0.01149	0.00488	2.87e-03	2.41e-03	5.53e-02	6.58e-04
10	7.97e+00	0.03651	0.03214	0.07979	5.98e-03	5.51e-03	4.05e-01	3.59e-02
100	5.39e+00	0.26359	0.23821	0.80983	5.27e-02	4.99e-02	4.01e+00	3.59e-01

Tabla A.34 Taylor-Hood, $n = 24$ $\gamma = 0.05$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	2.41e+02	0.00496	0.00369	6.78e-04	6.86e-04	5.88e-04	1.33e-02	7.18e-05
10	2.38e+02	0.01152	0.01032	0.02065	1.37e-03	1.20e-03	1.02e-01	9.05e-03
100	1.79e+02	0.07274	0.07129	0.20675	1.19e-02	1.05e-02	1.02e+00	9.05e-02

A.3.3 Scott-Vogelius**Tabla A.35** Scott-Vogelius, $n = 3$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	2.86e-02	0.44653	0.39499	1.148	1.13e-01	1.07e-01	3.12e-01	
10	3.26e-02	0.44761	0.39607	2.6464	1.13e-01	1.07e-01	6.92e-01	
100	2.36e-02	0.45732	0.40579	18.44	1.13e-01	1.08e-01	6.18e+00	

Tabla A.36 Scott-Vogelius, $n = 6$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	5.60e-01	0.12345	0.09873	0.27149	2.64e-02	2.27e-02	4.99e-02	
10	5.45e-01	0.12347	0.09878	0.66403	2.64e-02	2.27e-02	1.71e-01	
100	4.28e-01	0.12368	0.09925	4.8741	2.64e-02	2.27e-02	1.63e+00	

Tabla A.37 Scott-Vogelius, $n = 12$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	1.65e+01	0.04277	0.03332	0.04907	5.88e-03	5.38e-03	9.15e-03	
10	1.39e+01	0.04277	0.03333	0.15582	5.88e-03	5.38e-03	4.24e-02	
100	1.06e+01	0.04279	0.03335	1.233	5.88e-03	5.38e-03	4.14e-01	

Tabla A.38 Scott-Vogelius, $n = 24$.

λ	t	max error			L^2 error			
0	6.54e+02	0.01195	0.00899	0.01088	1.37e-03	1.31e-03	2.01e-03	
10	6.29e+02	0.01195	0.00899	0.03899	1.37e-03	1.31e-03	1.06e-02	
100	4.97e+02	0.01199	0.00892	0.30862	1.38e-03	1.31e-03	1.04e-01	

Apéndice B

Programas de MATLAB®

B.1 Problema de Stokes

Código B.1 Cálculo de las matrices de los coeficientes, caso Scott-Vogelius. **makronvq.m**.

```
function [A,M,Dx,Dy,Mp,Sp,J,Se,Me]=makronvq(T,z,epsilon)

% INPUT
% T nxn matriz con los vértices de cada triángulo T(i,j),
% i=1,2,3, j=1,...,nt es el i-ésimo vértice del
% triángulo número j. nt=2*N*N
% z nn x 2 matriz con las coordenadas xy de los vértices de
% la triangulación. z(n,1) y z(n,2), son las
% coordenadas x e y del n-ésimo nodo. nn=(N+1)*(N+1)
% epsilon parámetro de difusión

% OUTPUT
% A nn x nn Matriz de la forma bilineal. epsilon*(grad(phi_i),grad(phi_j))
% M nn x nn Matriz de masa
% Dx,Dy n1 x nn matrices de las formas bilineales:
% (\psi_i, partial_x\phi_j), (\psi_i, partial_y\phi_j)
% con i=1,2,...,n1, j=1,2,...,nn,
% (divergencia de la velocidad)
% J nt x 1 vector con las jacobianas de los elementos.
% Se ne*nt x ne matrices elementales de a(u,v)= (grad(u), grad(v))
% Me ne*nt x ne matrices elementales de masa
% Mp n1xn1 matriz de masa para las presiones lineales.
% Sp n1xn1 matriz de rigidez para las presiones lineales.
% (grad(phi_i),grad(phi_j))

% nodos de cuadratura
c1=[1 1]/3;
c2=(6+sqrt(15))*[1 1]/21;
c3=[(9-2*sqrt(15)),(6+sqrt(15))]/21;
c4=[c3(2) c3(1)];
c5=(6-sqrt(15))*[1 1]/21;
c6=[(9+2*sqrt(15)),(6-sqrt(15))]/21;
c7=[ c6(2) c6(1)];
c=[c1;c2;c3;c4;c5;c6;c7]';
cx=(c(1,:));
```

```

cy=(c(2,:));

% pesos en los nodos de cuadratura
w1=0.1125;
w2=(155+sqrt(15))/2400;
w3=w2;
w4=w2;
w5=(155-sqrt(15))/2400;
w6=w5;
w7=w5;

w=[w1 w2 w3 w4 w5 w6 w7]';

% funciones base en los nodos de cuadratura
Nc=[(1-cx-cy).*(1-2*cx-2*cy); cx.*(2*cx-1); cy.*(2*cy-1); ...
    4*cx.*(1-cx-cy); 4*cx.*cy; 4*cy.*(1-cx-cy)];
Ncxi=[-(1-2*cx-2*cy)-2*(1-cx-cy); 4*cx-1; zeros(size(cx));...
    4*(1-cx-cy)-4*cx; 4*cy; -4*cy];
Nceta=[-(1-2*cx-2*cy)-2*(1-cx-cy); zeros(size(cx)); 4*cy-1;...
    -4*cx; 4*cx; 4*(1-cx-cy)-4*cy];

ne=6; ne0=3; %velocidades cuadráticas y presiones lineales

nt=size(T,2); nn=size(z,1);
x1=z(:,1);y1=z(:,2);x=x1(T');y=y1(T');
clear x1 y1;% b=reshape(b,2,1);

% Derivadas parciales de x e y con respecto a xi y eta
xxi=x(:,2)-x(:,1); xet=x(:,3)-x(:,1);
yxi=y(:,2)-y(:,1); yet=y(:,3)-y(:,1);

% Jacobiano
J=(x(:,2)-x(:,1)).*(y(:,3)-y(:,1))-(x(:,3)-x(:,1)).*(y(:,2)-y(:,1));

% Derivadas parciales de xi y eta con respecto a x e y
xix=(y(:,3)-y(:,1))./J; xiy=(x(:,1)-x(:,3))./J;
etx=(y(:,1)-y(:,2))./J; ety=(x(:,2)-x(:,1))./J;

% MATRICES ELEMENTALES
% Derivadas parciales con respecto a xi y eta de las funciones base
u=[-1 1 0]'; v=[-1 0 1]'; e=ones(ne,1);

S1=[
3 1 0 -4 0 0
1 3 0 -4 0 0
0 0 0 0 0 0
-4 -4 0 8 0 0
0 0 0 0 8 -8
0 0 0 0 -8 8]/6; %(\partial_xi phi_i, \partial_xi phi_j)
S2 = [
6 1 1 -4 0 -4
1 0 -1 -4 4 0
1 -1 0 0 4 -4
-4 -4 0 8 -8 8
0 4 4 -8 8 -8
-4 0 -4 8 -8 8]/6; % S12+S12'
S3 = [

```

```

3 0 1 0 0 -4
0 0 0 0 0 0
1 0 3 0 0 -4
0 0 0 8 -8 0
0 0 0 -8 8 0
-4 0 -4 0 0 8]/6; %(\partial_eta phi_i, \partial_eta phi_j)
    S12 = [
3 0 1 0 0 -4
1 0 -1 -4 4 0
0 0 0 0 0 0
-4 0 0 4 -4 4
0 0 4 -4 4 -4
0 0 -4 4 -4 4]/6; %(\partial_xi phi_i, \partial_eta phi_j)

    S4 = [ ...
6 -1 -1 0 -4 0; ...
-1 6 -1 0 0 -4; ...
-1 -1 6 -4 0 0; ...
0 0 -4 32 16 16; ...
-4 0 0 16 32 16; ...
0 -4 0 16 16 32]/360; % (phi_i, phi_j)

    Se = (kron(abs(J).*(xix.^2+xiy.^2),S1)+...
        kron(abs(J).*(etx.^2+ety.^2),S3)+...
        kron(abs(J).*(xix.*etx+xiy.*ety),S2));
    Ae = epsilon*Se;

% Matriz elemental de masa
    Me = kron(abs(J),S4); Me = reshape(Me, (ne^2)*nt, 1);

% indices
    I1 = reshape(T(1:ne,:), ne*nt, 1);
    I = I1*e'; J1 = kron(T(1:ne,:)', e);
    I = reshape(I, ne*ne*nt, 1); J1 = reshape(J1, ne*ne*nt, 1);

% MATRICES FEM
    A = sparse(I, J1, Ae, nn, nn); M = sparse(I, J1, Me, nn, nn);
    Me = reshape(Me, ne*nt, ne);

% Divergencia
    ne0 = 3;
    N0c = [ones(1, size(cx, 2)); 2*cx+cy-1; 2*cy+cx-1]; e0 = ones(ne0, 1); nn0 = ne0*nt;
    Dxi = [-1 1 0 0 4 -4
            1 1 0 -2 0 0
            1 0 0 -1 1 -1]/6;
    Det = [-1 0 1 -4 4 0
            1 0 0 -1 1 -1
            1 0 1 0 0 -2]/6;

    II01 = (1:(ne0*nt))'; %reshape(T(1:ne0,:), nt*ne0, 1);
    I01 = reshape(kron(II01, e'), nt*ne0*ne, 1);
    J01 = reshape(kron(T(1:ne,:)', e0), ne0*ne*nt, 1);
    Dxe = kron(abs(J).*xix, Dxi) + kron(abs(J).*etx, Det);
    Dye = kron(abs(J).*xiy, Dxi) + kron(abs(J).*ety, Det);
    Dx = sparse(I01, J01, reshape(Dxe, numel(Dxe), 1), nn0, nn);
    Dy = sparse(I01, J01, reshape(Dye, numel(Dye), 1), nn0, nn);

```

```

% PRESIÓN
% Matriz de masa de la presión
S04=(1/24)*[12 0 0;0 2 1; 0 1 2];
M0e=kron(abs(J),S04);
I10=(1:(ne0*nt))';
J0=kron(reshape(I10,ne0,nt)',e0);
IIq=reshape(I10*e0',numel(I10)*numel(e0),1);
JJq=reshape(J0,numel(J0),1);
Mp=sparse(IIq,JJq,reshape(M0e,numel(M0e),1),nn0,nn0);

% Matriz de rigidez para la presión
ex0=[0 2 1]'; ey0=[0 1 2]';
S01=0.5*ex0*ex0'; S03=0.5*ey0*ey0'; S02=0.5*ex0*ey0' + 0.5*ey0*ex0';

S0e=(kron(abs(J).*(xix.^2+xiy.^2),S01)+...
      kron(abs(J).*(etx.^2+ety.^2),S03)+...
      kron(abs(J).*(xix.*etx+xiy.*ety),S02));
Sp=sparse(IIq,JJq,reshape(S0e,numel(S0e),1),nn0,nn0);

```

Código B.2 Resolución Problema de Stokes, caso Scott-Vogelius. **pruesto2d.m.**

```

N=96;           % número de subdivisiones n
uex=@bwinb;    % solución exacta
force=@forceb; % término independiente
epsilon=1e-6;  % parámetro de difusión
alpha=0;       % constante del término de reacción adicional
lambda=100;    % constante para escalar las presiones

tf=0;

global LANU
global ELALPHA
global ELLAMBDA
LANU=epsilon; ELALPHA=alpha; ELLAMBDA=lambda;

% MALLADO
[T1,z1,is1,ldir]=swne(N); % mallado regular con diagonales sume
[T1b,z1b]=red_sv(T1,z1); % mallado refinado en el baricentro

[T,z,is]=datosq(T1b,z1b',is1',is1');
z=z'; is=is';

x=z(:,1); y=z(:,2);
X=x(is(1:ldir,:)); Y=y(is(1:ldir,:));
uis=zeros(size(is(1:ldir,:))); vis=uis;
[u00,v00]=uex(x,y,0);

u0=u00; v0=v00;
ne0=3; nt=size(T,2);

% Índices necesarios para representación presiones en Scott-Vogelius
Ip=reshape(T(1:ne0,1:nt),nt*ne0,1);
z1p=z1b(Ip,:);

```



```

% Resolución
tic;
[u,v,p,rho,Mn,Mp,Se,Me]=sto2d_steady(T,z,is,ldir,epsilon,force,uis,vis,alpha);
t_gal=toc

TT=[T([1 4 6],:),T([2 5 4],:), T([3 6 5],:), T([4 5 6],:)];

% REPRESENTACIÓN Y ERRORES
figure(1); clf; trimesh(TT',z(:,1),z(:,2),u); % solución u
figure(2); clf; trimesh(TT',z(:,1),z(:,2),v); % solución v

[ue,ve]=uex(x,y,tf); [~,~,pe]=uex(z1p(:,1),z1p(:,2),tf);
ex=abs(u-ue); ey=abs(v-ve);

figure(3); clf; trimesh(TT',z(:,1),z(:,2),log10(ex)); % error u
figure(4); clf; trimesh(TT',z(:,1),z(:,2),log10(ey)); % error v

nt=length(p)/3;
Tp=(1:3*nt)';
Tp=reshape(Tp,3,nt);
Iph=kron(ones(7,1),3*(1:nt)')-2+[zeros(3*nt,1);ones(2*nt,1);2*ones(2*nt,1)];
Jph=kron(ones(7,1),3*(1:nt)')-2+[zeros(nt,1);ones(nt,1);2*ones(nt,1);zeros(nt,1);ones(nt,1);zeros(nt,1);2*ones(nt,1)];
ph=sparse(Iph,Jph, [ones(nt,1);-ones(2*nt,1);ones(4*nt,1)])*p;

figure(7); clf; h=trimesh(Tp',z1p(:,1),z1p(:,2),ph, 'FaceColor', [0.85 0.85 0.85]); % solución p

% Máximo error
format short g;
maxe=[max(abs(ex)),max(abs(ey)),max(abs(pe-ph))], format short e

I1=reshape(T(1:6,:),6*size(T,2),1); I=kron(ones(6,1),I1);
J1=kron(T(1:6,:)',ones(6,1)); J=reshape(J1,numel(J1),1);
S=sparse(I,J,Se,length(z),length(z));
ex=ue-u; ey=ve-v; ep=pe-ph; uv=[u;v];

% Error en u, v y p
ERRSL2=[sqrt(ex'*(Mn*ex)), sqrt(ey'*(Mn*ey)), sqrt(ep'*(Mp*ep))]

```

B.2 Problema de Oseen

Código B.3 Cálculo de las matrices de los coeficientes, caso Scott-Vogelius. **makronvq.m**.

```

function [A,M,Dx,Dy,Mp,Sp,J,Se,Me,Xi,Eta,bC,D,De]=makronvq(T,z,epsilon,bvar,t)

% INPUT
% T ne x nt matriz con los vértices de cada triángulo T(i,j),
% i=1,2,3, j=1,...,nt es el i-ésimo vértice del
% triángulo número j. nt=2*N*N
% z nn x 2 matriz con las coordenadas xy de los vértices de
% la triangulación. z(n,1) y z(n,2), son las

```

```

%      coordenadas x e y del n-ésimo nodo. nn=(N+1)*(N+1)
%      epsilon    parámetro de difusión
%      bvar       función [bx,by]=bvar(x,y,t) con la velocidad.
%      t          parámetro necesario para bvar

% OUTPUT
%      A nn x nn matriz con la forma bilineal epsilon*(grad(phi_i),grad(phi_j))
%      M nn x nn matriz de masa
%      Dx,Dy, n1 x nn matrices con las formas bilineales:
%              (\psi_i, partial_x\phi_j), (\psi_i, partial_y\phi_j)
%              i=1,2,...,n1, j=1,2,...,nn, (divergencia de la velocidad)
%      J nt x 1 vector con las jacobianas de los elementos.
%      Se ne*nt x ne matriz elemental de a(u,v)= (grad(u), grad(v))
%      Me ne*nt x ne matriz elemental de masa
%      Mp n1xn1 matriz de masa presiones lineales.
%      Sp n1xn1 matriz de rigidez con las presiones lineales.
%              (grad(phi_i),grad(phi_j))
%      D nn x nn matriz bilineal del término convectivo.
%              D(i,j) es (phi_i, bx*(phi_j)_x + by*(phi_j)_y)
%              phi_i, i=1,...,nn son las funciones base en los nodos.
%      De ne*nt x ne matriz elemental con la forma bilineal D

% nodos de cuadratura
c1=[1 1]/3;
c2=(6+sqrt(15))*[1 1]/21;
c3=[(9-2*sqrt(15)),(6+sqrt(15))]/21;
c4=[c3(2) c3(1)];
c5=(6-sqrt(15))*[1 1]/21;
c6=[(9+2*sqrt(15)),(6-sqrt(15))]/21;
c7=[ c6(2) c6(1)];
c=[c1;c2;c3;c4;c5;c6;c7]';
cx=c(1,:);
cy=c(2,:);

% pesos en los nodos de cuadratura
w1=0.1125;
w2=(155+sqrt(15))/2400;
w3=w2;
w4=w2;
w5=(155-sqrt(15))/2400;
w6=w5;
w7=w5;

w=[w1 w2 w3 w4 w5 w6 w7]';

% funciones base en los nodos de cuadratura
Nc=[(1-cx-cy).*(1-2*cx-2*cy); cx.*(2*cx-1); cy.*(2*cy-1); ...
    4*cx.*(1-cx-cy); 4*cx.*cy; 4*cy.*(1-cx-cy)];
Ncxi=[-(1-2*cx-2*cy)-2*(1-cx-cy); 4*cx-1; zeros(size(cx));...
    4*(1-cx-cy)-4*cx; 4*cy; -4*cy];
Ncet=[-(1-2*cx-2*cy)-2*(1-cx-cy); zeros(size(cx)); 4*cy-1;...
    -4*cx; 4*cx; 4*(1-cx-cy)-4*cy];

ne=6; ne0=3;
nt=size(T,2); nn=size(z,1);
x1=z(:,1);y1=z(:,2);x=x1(T');y=y1(T');
clear x1 y1;% b=reshape(b,2,1);

```

```

% Derivadas parciales de x e y con respecto a xi y eta
xxi=x(:,2)-x(:,1); xet=x(:,3)-x(:,1);
yxi=y(:,2)-y(:,1); yet=y(:,3)-y(:,1);

% Jacobiano
J=(x(:,2)-x(:,1)).*(y(:,3)-y(:,1))-(x(:,3)-x(:,1)).*(y(:,2)-y(:,1));

% Parciales de xi y eta con respecto a x e y
xix=(y(:,3)-y(:,1))./J; xiy=(x(:,1)-x(:,3))./J;
etx=(y(:,1)-y(:,2))./J; ety=(x(:,2)-x(:,1))./J;

% MATRICES ELEMENTALES
% parciales con respecto a xi y eta de funciones base
u=[-1 1 0]'; v=[-1 0 1]'; e=ones(ne,1);

S1=[
3 1 0 -4 0 0
1 3 0 -4 0 0
0 0 0 0 0 0
-4 -4 0 8 0 0
0 0 0 0 8 -8
0 0 0 0 -8 8]/6; %(\partial_xi phi_i, \partial_xi phi_j).
S2 = [
6 1 1 -4 0 -4
1 0 -1 -4 4 0
1 -1 0 0 4 -4
-4 -4 0 8 -8 8
0 4 4 -8 8 -8
-4 0 -4 8 -8 8]/6; % S12+S12'
S3 = [
3 0 1 0 0 -4
0 0 0 0 0 0
1 0 3 0 0 -4
0 0 0 8 -8 0
0 0 0 -8 8 0
-4 0 -4 0 0 8]/6; %(\partial_eta phi_i, \partial_eta phi_j).
S12 = [
3 0 1 0 0 -4
1 0 -1 -4 4 0
0 0 0 0 0 0
-4 0 0 4 -4 4
0 0 4 -4 4 -4
0 0 -4 4 -4 4]/6; %(\partial_xi phi_i, \partial_eta phi_j).

S4=[ ...
6 -1 -1 0 -4 0; ...
-1 6 -1 0 0 -4; ...
-1 -1 6 -4 0 0; ...
0 0 -4 32 16 16; ...
-4 0 0 16 32 16; ...
0 -4 0 16 16 32]/360; % (phi_i, phi_j).

% (grad(phi_i), grad(phi_j)).

Se=(kron(abs(J).*(xix.^2+xiy.^2),S1)+...
kron(abs(J).*(etx.^2+ety.^2),S3)+...

```

```

        kron(abs(J).*(xix.*etx+xiy.*ety),S2));

% Convección
    xc=x(:,1)*ones(size(cx))+xxi*cx+xet*cy; yc=y(:,1)*ones(size(cx))+yxi*cx+yety*
    cy;
if nargin>3
    [bx,by]=bvar(xc,yc,t); e6=ones(size(w')); bC=[bx,by];

    bxi=bx.*(xix*e6) + by.*(xiy*e6); bet =bx.*(etx*e6) + by.*(ety*e6);
    bxi3=kron(bxi,ones(size(Nc,1),1));bet3=kron(bet,ones(size(Nc,1),1));
    bxiN=(kron(abs(J),Nc).*bxi3)*diag(w); betN=(kron(abs(J),Nc).*bet3)*diag(w);
    Ae=epsilon*Se+bxiN*Ncxi'+betN*Ncet';
    De=bxiN*Ncxi'+betN*Ncet';
else
    De=zeros(size(Se)); bxi=[]; bet=[]; bxi3=[]; bet3=[];
    Ae=epsilon*Se;
    bC=zeros( nt , 2*length(w));
end

% Matriz elemental de masa
    Me=kron(abs(J),S4);Me=reshape(Me,(ne^2)*nt,1);

% índices
    I1=reshape(T(1:ne,:),ne*nt,1);
    I=I1*e'; J1=kron(T(1:ne,:)',e);
    I=reshape(I,ne*ne*nt,1); J1=reshape(J1,ne*ne*nt,1);

% MATRICES FEM
A=sparse(I,J1,Ae,nn,nn); M=sparse(I,J1,Me,nn,nn);
D=sparse(I,J1,De,nn,nn);
Me=reshape(Me,ne*nt,ne);
De=reshape(De,ne*nt,ne);
Xi=[xix,xiy];
Eta=[etx,ety];

% Divergencia
ne0=3;
N0c=[ones(1,size(cx,2)); 2*cx+cy-1; 2*cy+cx-1]; e0=ones(ne0,1); nn0=ne0*nt;
Dxi=[-1 1 0 0 4 -4
      1 1 0 -2 0 0
      1 0 0 -1 1 -1]/6;
Det=[-1 0 1 -4 4 0
      1 0 0 -1 1 -1
      1 0 1 0 0 -2]/6;
II01=(1:(ne0*nt))';
I01=reshape(kron(II01,e'),nt*ne0*ne,1);
J01=reshape(kron(T(1:ne,:)',e0),ne0*ne*nt,1);
Dxe=kron(abs(J).*xix,Dxi)+kron(abs(J).*etx,Det);
Dye=kron(abs(J).*xiy,Dxi)+kron(abs(J).*ety,Det);
Dx=sparse(I01,J01,reshape(Dxe,numel(Dxe),1),nn0,nn);
Dy=sparse(I01,J01,reshape(Dye,numel(Dye),1),nn0,nn);

% PRESIÓN
% Matriz de masa de las presiones lineales

```

```

S04=(1/24)*[12 0 0;0 2 1; 0 1 2];
M0e=kron(abs(J),S04);
I10=(1:(ne0*nt))';
J0=kron(reshape(I10,ne0,nt)',e0);
IIq=reshape(I10*e0',numel(I10)*numel(e0),1);
JJq=reshape(J0,numel(J0),1);
Mp=sparse(IIq,JJq,reshape(M0e,numel(M0e),1),nn0,nn0);

% Matriz de rigidez de las presiones lineales
ex0=[0 2 1]'; ey0=[0 1 2]';
S01=0.5*ex0*ex0'; S03=0.5*ey0*ey0'; S02=0.5*ex0*ey0' + 0.5*ey0*ex0';

S0e=(kron(abs(J).*(xix.^2+xiy.^2),S01)+...
      kron(abs(J).*(etx.^2+ety.^2),S03)+...
      kron(abs(J).*(xix.*etx+xiy.*ety),S02));
Sp=sparse(IIq,JJq,reshape(S0e,numel(S0e),1),nn0,nn0);

```

Código B.4 Resolución Problema de Oseen, caso Scott-Vogelius. `prueose2d.m`.

```

clear,close all,clc
N=6;           % número de subdivisiones n
bvar=@bwinb;  % término convectivo
uex=@bwinb;   % solución exacta
force=@forceb; % término independiente
epsilon=1e-6; % parámetro de difusión
alpha=0;      % constante del término de reacción adicional
lambda=100;   % parámetro para escalar las presiones

tf=0;

global LANU
global ELALPHA
global ELLAMBDA
LANU=epsilon; ELALPHA=alpha; ELLAMBDA=lambda;

% Mallado
[T1,z1,is1,ldir]=swne(N); % mallado regular con diagonales sume
[T1b,z1b]=red_sv(T1,z1); % mallado refinado en el baricentro

[T,z,is]=datosq(T1b,z1b',is1',is1');
z=z'; is=is';

x=z(:,1); y=z(:,2);
X=x(is(1:ldir,:)); Y=y(is(1:ldir,:));
%[uis,vis]=bvar(X,Y,0);
uis=zeros(size(is(1:ldir,:))); vis=uis;
[u00,v00]=uex(x,y,0);

u0=u00; v0=v00;
ne0=3; nt=size(T,2);
Ip=reshape(T(1:ne0,1:nt),nt*ne0,1);
z1p=z1b(Ip,:);

tic;

```

```

[u,v,p,rho,Mn,Mp,Se,Me]=ose2d_steady(T,z,is,ldir,epsilon,bvar,force,uis,vis,
    alpha);
t_gal=toc

TT=[T([1 4 6],:),T([2 5 4],:), T([3 6 5],:), T([4 5 6],:)];
figure(1); clf; trimesh(TT',z(:,1),z(:,2),u); % solución u
figure(2); clf; trimesh(TT',z(:,1),z(:,2),v); % solución v
[ue,ve]=uex(x,y,tf); [ue1,ve1,pe]=uex(z1p(:,1),z1p(:,2),tf);
ex=abs(u-ue); ey=abs(v-ve);
figure(3); clf; trimesh(TT',z(:,1),z(:,2),log10(ex)); % error u
figure(4); clf; trimesh(TT',z(:,1),z(:,2),log10(ey)); % error v
nt=length(p)/3;
Tp=(1:3*nt)';
Tp=reshape(Tp,3,nt);
Iph=kron(ones(7,1),3*(1:nt)')-2+[zeros(3*nt,1);ones(2*nt,1);2*ones(2*nt,1)];
Jph=kron(ones(7,1),3*(1:nt)')-2+[zeros(nt,1);ones(nt,1);2*ones(nt,1);zeros(nt,1);ones(nt,1);zeros(nt,1);2*ones(nt,1)];
ph=sparse(Iph,Jph,[ones(nt,1);-ones(2*nt,1);ones(4*nt,1)])*p;

figure(7); clf; h=trimesh(Tp',z1p(:,1),z1p(:,2),ph,'FaceColor',[0.85 0.85 0.85]); % representación solución p
figure(8); clf; hw=trimesh(Tp',z1p(:,1),z1p(:,2),pe,'FaceColor',[0.85 0.85 0.85]); % representación solución exacta de p

% Máximos errores
format short g;
maxe=[max(abs(ex)),max(abs(ey)),max(abs(pe-ph))], format short e
I1=reshape(T(1:6,:),6*size(T,2),1); I=kron(ones(6,1),I1);
J1=kron(T(1:6,:)',ones(6,1)); J=reshape(J1,numel(J1),1);
S=sparse(I,J,Se,length(z),length(z));
%Ss=sparse(I,J,SSe,length(z),length(z));
ex=ue-u; ey=ve-v; ep=pe-ph; uv=[u;v];

% Error de u, v y p
ERRSL2=[sqrt(ex'*(Mn*ex)), sqrt(ey'*(Mn*ey)), sqrt(ep'*(Mp*ep))]

```

B.3 Ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias

Código B.5 Cálculo de las matrices, caso Taylor-Hood. **makronvq.m**.

```

function [A,M,Dx,Dy,Mp,Sp,GD11,GD12,GD22,J,Se,Me,NLx,NLy]=makronvq(T,z,epsilon)

% nodos de cuadratura
c1=[1 1]/3;
c2=(6+sqrt(15))*[1 1]/21;
c3=[(9-2*sqrt(15)),(6+sqrt(15))]/21;
c4=[c3(2) c3(1)];
c5=(6-sqrt(15))*[1 1]/21;
c6=[(9+2*sqrt(15)),(6-sqrt(15))]/21;
c7=[ c6(2) c6(1)];
c=[c1;c2;c3;c4;c5;c6;c7]';
cx=c(1,:);
cy=(c(2,:));

```

```

% pesos en los nodos de cuadratura
w1=0.1125;
w2=(155+sqrt(15))/2400;
w3=w2;
w4=w2;
w5=(155-sqrt(15))/2400;
w6=w5;
w7=w5;

w=[w1 w2 w3 w4 w5 w6 w7]';
% funciones base en los nodos de cuadratura
Nc=[(1-cx-cy).*(1-2*cx-2*cy); cx.*(2*cx-1); cy.*(2*cy-1); ...
    4*cx.*(1-cx-cy); 4*cx.*cy; 4*cy.*(1-cx-cy)];
Ncxi=[-(1-2*cx-2*cy)-2*(1-cx-cy); 4*cx-1; zeros(size(cx));...
    4*(1-cx-cy)-4*cx; 4*cy; -4*cy];
Ncet=[-(1-2*cx-2*cy)-2*(1-cx-cy); zeros(size(cx)); 4*cy-1;...
    -4*cx; 4*cx; 4*(1-cx-cy)-4*cy];
ne=6; ne0=3;

nt=size(T,2); nn=size(z,1);
x1=z(:,1);y1=z(:,2);x=x1(T');y=y1(T');
clear x1 y1;% b=reshape(b,2,1);

% Derivadas parciales de x e y respecto a xi y eta
xxi=x(:,2)-x(:,1); xet=x(:,3)-x(:,1);
yxi=y(:,2)-y(:,1); yet=y(:,3)-y(:,1);

% Jacobiano
J=(x(:,2)-x(:,1)).*(y(:,3)-y(:,1))-(x(:,3)-x(:,1)).*(y(:,2)-y(:,1)));

% Derivadas parciales de xi y eta con respecto a x e y
xix=(y(:,3)-y(:,1))./J; xiy=(x(:,1)-x(:,3))./J;
etx=(y(:,1)-y(:,2))./J; ety=(x(:,2)-x(:,1))./J;

% MATRICES ELEMENTALES
u=[-1 1 0]'; v=[-1 0 1]'; e=ones(ne,1);

S1=[
3 1 0 -4 0 0
1 3 0 -4 0 0
0 0 0 0 0 0
-4 -4 0 8 0 0
0 0 0 0 8 -8
0 0 0 0 -8 8]/6; %(\partial_xi phi_i, \partial_xi phi_j).
S2 = [
6 1 1 -4 0 -4
1 0 -1 -4 4 0
1 -1 0 0 4 -4
-4 -4 0 8 -8 8
0 4 4 -8 8 -8
-4 0 -4 8 -8 8]/6; % S12+S12'
S3 = [
3 0 1 0 0 -4
0 0 0 0 0 0
1 0 3 0 0 -4
0 0 0 8 -8 0
0 0 0 -8 8 0

```

```

-4 0 -4 0 0 8]/6; %(\partial_eta phi_i, \partial_eta phi_j).
    S12 =[
3 0 1 0 0 -4
1 0 -1 -4 4 0
0 0 0 0 0 0
-4 0 0 4 -4 4
0 0 4 -4 4 -4
0 0 -4 4 -4 4]/6; %(\partial_xi phi_i, \partial_eta phi_j).

    S4=[ ...
6 -1 -1 0 -4 0; ...
-1 6 -1 0 0 -4; ...
-1 -1 6 -4 0 0; ...
0 0 -4 32 16 16; ...
-4 0 0 16 32 16; ...
0 -4 0 16 16 32]/360; % (phi_i, phi_j).

Se=(kron(abs(J).*(xix.^2+xiy.^2),S1)+...
kron(abs(J).*(etx.^2+ety.^2),S3)+...
kron(abs(J).*(xix.*etx+xiy.*ety),S2));
Ae=epsilon*Se;

Me=kron(abs(J),S4);Me=reshape(Me,(ne^2)*nt,1);

% Índices
I1=reshape(T(1:ne,:),ne*nt,1);
I=I1*e'; J1=kron(T(1:ne,:),e);
I=reshape(I,ne*ne*nt,1); J1=reshape(J1,ne*ne*nt,1);

% MATRICES FEM
A=sparse(I,J1,Ae,nn,nn); M=sparse(I,J1,Me,nn,nn);
Me=reshape(Me,ne*nt,ne);

% GRAD-DIV

GD11e=(kron(abs(J).*(xix.^2),S1)+...
kron(abs(J).*(etx.^2),S3)+...
kron(abs(J).*(xix.*etx),S2));
GD11=sparse(I,J1,reshape(GD11e,numel(GD11e),1),nn,nn);

GD22e=(kron(abs(J).*(xiy.^2),S1)+...
kron(abs(J).*(ety.^2),S3)+...
kron(abs(J).*(xiy.*ety),S2));
GD22=sparse(I,J1,reshape(GD22e,numel(GD11e),1),nn,nn);

GD12e=(kron(abs(J).*(xix.*xiy),S1)+...
kron(abs(J).*(etx.*ety),S3)+...
kron(abs(J).*(xix.*ety),S12)+...
kron(abs(J).*(xiy.*etx),S12'));
GD12=sparse(I,J1,reshape(GD12e,numel(GD12e),1),nn,nn);

% DIVERGENCIA
ne0=3;
N0c=[1-cx-cy; cx; cy]; e0=ones(ne0,1); nn0=max(max(T(1:ne0,:)));
Dxi=[-1 0 0 1 1 -1
0 1 0 -1 1 -1
0 0 0 0 2 -2]/6;

```



```

Det=[-1  0  0  -1  1  1
      0  0  0  -2  2  0
      0  0  1  -1  1  -1]/6;

II01=reshape(T(1:ne0,:),nt*ne0,1);
I01=reshape(kron(II01,e'),nt*ne0*ne,1);
J01=reshape(kron(T(1:ne,:),e0),ne0*ne*nt,1);
Dxe=kron(abs(J).*xix,Dxi)+kron(abs(J).*etx,Det);
Dye=kron(abs(J).*xiy,Dxi)+kron(abs(J).*ety,Det);
Dx=sparse(I01,J01,reshape(Dxe,numel(Dxe),1),nn0,nn);
Dy=sparse(I01,J01,reshape(Dye,numel(Dye),1),nn0,nn);

% PRESIÓN
S04=(1/24)*[2 1 1;1 2 1; 1 1 2];
M0e=kron(abs(J),S04);
I10=reshape(T(1:ne0,1:nt),nt*ne0,1);
J0=kron(T(1:ne0,1:nt)',e0);
IIq=reshape(I10*e0',numel(I10)*numel(e0),1);
JJq=reshape(J0,numel(J0),1);
Mp=sparse(IIq,JJq,reshape(M0e,numel(M0e),1),nn0,nn0);

ex0=[-1 1 0]'; ey0=[-1 0 1]';
S01=0.5*ex0*ex0'; S03=0.5*ey0*ey0'; S02=0.5*ex0*ey0' + 0.5*ey0*ex0';

S0e=(kron(abs(J).*(xix.^2+xiy.^2),S01)+...
      kron(abs(J).*(etx.^2+ety.^2),S03)+...
      kron(abs(J).*(xix.*etx+xiy.*ety),S02));
Sp=sparse(IIq,JJq,reshape(S0e,numel(S0e),1),nn0,nn0);

% TÉRMINO NO LINEAL
% (phi_i, phi_j phi_kx) (phi_i, phi_j phi_ky)
matxi=[-13/420 -1/140 0 4/105 1/105 -1/105;
        1/280 -1/280 0 0 1/630 -1/630;
        1/280 11/2520 0 -1/126 -2/315 2/315;
        -2/105 -4/315 0 2/63 -2/315 2/315;
        -1/210 -1/126 0 4/315 -2/105 2/105;
        -2/105 -2/315 0 8/315 -4/315 4/315;
        1/280 -1/280 0 0 1/630 -1/630;
        1/140 13/420 0 -4/105 1/105 -1/105;
        -11/2520 -1/280 0 1/126 -2/315 2/315;
        4/315 2/105 0 -2/63 -2/315 2/315;
        2/315 2/105 0 -8/315 -4/315 4/315;
        1/126 1/210 0 -4/315 -2/105 2/105;
        1/280 11/2520 0 -1/126 -2/315 2/315;
        -11/2520 -1/280 0 1/126 -2/315 2/315;
        1/140 -1/140 0 0 1/21 -1/21;
        1/126 -1/126 0 0 -2/315 2/315;
        2/315 -4/315 0 2/315 2/105 -2/105;
        4/315 -2/315 0 -2/315 2/105 -2/105;
        -2/105 -4/315 0 2/63 -2/315 2/315;
        4/315 2/105 0 -2/63 -2/315 2/315;
        1/126 -1/126 0 0 -2/315 2/315;
        -4/63 4/63 0 0 16/315 -16/315;
        -2/315 2/63 0 -8/315 16/315 -16/315;
        -2/63 2/315 0 8/315 16/315 -16/315;
        -1/210 -1/126 0 4/315 -2/105 2/105;
        2/315 2/105 0 -8/315 -4/315 4/315];

```

```

2/315 -4/315 0 2/315 2/105 -2/105;
-2/315 2/63 0 -8/315 16/315 -16/315;
4/105 4/63 0 -32/315 16/105 -16/105;
-2/315 2/315 0 0 8/105 -8/105;
-2/105 -2/315 0 8/315 -4/315 4/315;
1/126 1/210 0 -4/315 -2/105 2/105;
4/315 -2/315 0 -2/315 2/105 -2/105;
-2/63 2/315 0 8/315 16/315 -16/315;
-2/315 2/315 0 0 8/105 -8/105;
-4/63 -4/105 0 32/315 16/105 -16/105];

mateta=[-13/420 0 -1/140 -1/105 1/105 4/105;
1/280 0 11/2520 2/315 -2/315 -1/126;
1/280 0 -1/280 -1/630 1/630 0;
-2/105 0 -2/315 4/315 -4/315 8/315;
-1/210 0 -1/126 2/105 -2/105 4/315;
-2/105 0 -4/315 2/315 -2/315 2/63;
1/280 0 11/2520 2/315 -2/315 -1/126;
1/140 0 -1/140 -1/21 1/21 0;
-11/2520 0 -1/280 2/315 -2/315 1/126;
4/315 0 -2/315 -2/105 2/105 -2/315;
2/315 0 -4/315 -2/105 2/105 2/315;
1/126 0 -1/126 2/315 -2/315 0;
1/280 0 -1/280 -1/630 1/630 0;
-11/2520 0 -1/280 2/315 -2/315 1/126;
1/140 0 13/420 -1/105 1/105 -4/105;
1/126 0 1/210 2/105 -2/105 -4/315;
2/315 0 2/105 4/315 -4/315 -8/315;
4/315 0 2/105 2/315 -2/315 -2/63;
-2/105 0 -2/315 4/315 -4/315 8/315;
4/315 0 -2/315 -2/105 2/105 -2/315;
1/126 0 1/210 2/105 -2/105 -4/315;
-4/63 0 -4/105 -16/105 16/105 32/315;
-2/315 0 2/315 -8/105 8/105 0;
-2/63 0 2/315 -16/315 16/315 8/315;
-1/210 0 -1/126 2/105 -2/105 4/315;
2/315 0 -4/315 -2/105 2/105 2/315;
2/315 0 2/105 4/315 -4/315 -8/315;
-2/315 0 2/315 -8/105 8/105 0;
4/105 0 4/63 -16/105 16/105 -32/315;
-2/315 0 2/63 -16/315 16/315 -8/315;
-2/105 0 -4/315 2/315 -2/315 2/63;
1/126 0 -1/126 2/315 -2/315 0;
4/315 0 2/105 2/315 -2/315 -2/63;
-2/63 0 2/315 -16/315 16/315 8/315;
-2/315 0 2/63 -16/315 16/315 -8/315;
-4/63 0 4/63 -16/315 16/315 0];

matxi=reshape(matxi',size(matxi))';
mateta=reshape(mateta',size(mateta))';
NLxe=kron(abs(J).*xix,matxi)+kron(abs(J).*etx,mateta);
NLye=kron(abs(J).*xiy,matxi)+kron(abs(J).*ety,mateta);

IONL=reshape(T,ne*nt,1)*ones(1,ne^2);
JONL=kron(e',kron(T',e))+nn*kron(T'-1,ones(ne));

NLx=sparse(IONL,JONL,NLxe);
NLy=sparse(IONL,JONL,NLye);

```

Código B.6 Cálculo de la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias. **ns2d_steady.m**.

```

function [u,v,p,rho,Mn,Mp,Se,Me,GDn]=ns2d_steady(T,z,is,ldir,epsilon,...
        bvar,force,uis,vis,alpha,gamma)

nn=length(z);
t=0;
[An,Mn,Dxn,Dyn,Mp,Sp,GD11n,GD12n,GD22n,J,Se,Me,NLx,NLy]=makronvq(T,z,epsilon);
    % matrices
[fn,fxc,fyc]=fkronq(T,z,force,J,0);
ne=6; % número de nodos por elemento para velocidad cuadrática
nbe=3; % número de nodos por elemento para bc

Ilong=ones(length(z),1); u=zeros(length(z),1); v=u;
for j=1:nbe
    Ilong(is(1:ldir,j))=0;
    u(is(1:ldir,j))=uis(:,j);
    v(is(1:ldir,j))=vis(:,j);
end
I=find(Ilong); IO=find(~Ilong);
A1n=An+alpha*Mn;
ff=fn;
A1=A1n(I,I);

Dx=Dxn(:,I); Dy=Dyn(:,I);

Mpe=Mp*ones(size(Mp,2),1); % this is to obtain zero-mean pressures
GD=[GD11n(I,I), GD12n(I,I); GD12n(I,I)', GD22n(I,I)];
GDn=[GD11n, GD12n; GD12n, GD22n];
A=[A1,sparse(1,1,0,size(A1,1),size(A1,2)),-Dx',sparse(1,1,0,size(A1,1),1);...
    sparse(1,1,0,size(A1,1),size(A1,2)),A1,-Dy',sparse(1,1,0,size(A1,1),1);...
    -Dx,-Dy,sparse(1,1,0,size(Dx,1),size(Dx,1)),Mpe; ...
    sparse(1,1,0,1,2*size(A1,2)),Mpe',0];

A(1:2*length(I),1:2*length(I))=A(1:2*length(I),1:2*length(I))+gamma*GD;

% Matriz NL
jcut=kron(ones(length(I),1),I);
mcut=kron(I,ones(length(I),1));
jcut=jcut+nn*(mcut-1);
NLxc=NLx(I,jcut);
NLyc=NLy(I,jcut);
NL=sparse(1,1,0,size(A,1),4*length(I)^2);
Zs=sparse(1,1,0,size(NLxc,1),size(NLxc,2));
NL(1:2*length(I),:)= [NLxc Zs NLyc Zs; Zs NLxc Zs NLyc];

K=I+nn;
if norm(uis)~=0 || norm(vis)~=0
    ff(I)=ff(I)-A1n(I,IO)*u(IO) - gamma*(GD11n(I,IO)*u(IO) + GD12n(I,IO)*v(IO))
    ;
    ff(K)=ff(K)-A1n(I,IO)*v(IO) - gamma*(GD12n(IO,I)*u(IO) + GD22n(I,IO)*v(IO)
    );
    ffp=(Dxn(:,IO)*u(IO) + Dyn(:,IO)*v(IO));
else

```

```

    ffp=zeros(size(Dxn,1),1);
end
b=[ff([I;K]);ffp;0];

% Resolución método de Newton
fval=@(x)value(A,NL,x,length(I),b);
dfval=@(x)dvalue(A,NLxc,NLyc,x,length(I));
aux=zeros(size(A,1),1);

[x,iflag,iter,normf]=newton(fval,dfval,aux);

u(I)=x(1:length(I)); v(I)=x(length(I)+1:2*length(I));
p=x(2*length(I)+1:length(x)-1);
rho=x(length(x));

```

Código B.7 Resolución ecuaciones estacionarias de Navier-Stokes, Taylor-Hood. **pruste2d.m.**

```

clear, close all, clc
N=24;           % número de subdivisiones
bvar=@bwinb;    % término de convección
uex=@bwinb;     % solución exacta
force=@forceb; % término independiente
epsilon=1e-6;  % parámetro de difusión
alpha=10;      % constante del término de reacción adicional

lambda=100;    % parámetro para escalar las presiones
gamma=0.05;    % parámetro del método de estabilización grad-div

tf=0;

global LANU
global ELALPHA
global ELLAMBDA
LANU=epsilon; ELALPHA=alpha; ELLAMBDA=lambda;

% Mallado
[T1,z1,is1,ldir]=swne(N); % mallado regular con diagonales sume
[T1b,z1b]=red_sv(T1,z1); % mallado refinado en el baricentro

[T,z,is]=datosq(T1b,z1b',is1',is1');
z=z'; is=is';

x=z(:,1); y=z(:,2);
X=x(is(1:ldir,:)); Y=y(is(1:ldir,:));
uis=zeros(size(is(1:ldir,:))); vis=uis;
[u00,v00]=uex(x,y,0);

u0=u00; v0=v00;

tic;
[u,v,p,rho,Mn,Mp,Se,Me,GDn]ns2d_steady(T,z,is,ldir,epsilon,bvar,force,uis,vis,
    alpha,gamma);
t_gal=toc

% GRÁFICAS

```

```

figure(1); clf; trimesh(T1',z1(:,1),z1(:,2),u(1:length(z1)));
TT=[T([1 4 6],:),T([2 5 4],:), T([3 6 5],:), T([4 5 6],:)];
figure(2); clf; trimesh(T1',z1(:,1),z1(:,2),v(1:length(z1)));
[ue,ve]=uex(x,y,tf); [ue1,ve1,pe]=uex(z1b(:,1),z1b(:,2),tf);
ex=abs(u-ue); ey=abs(v-ve);
figure(3); clf; trimesh(T',z(:,1),z(:,2),ue);
figure(4); clf; trimesh(T',z(:,1),z(:,2),ve);
figure(6); clf; trimesh(T1',z1(:,1),z1(:,2),log10(abs(p-pe)))

format short g;
maxe=[max(abs(ex)),max(abs(ey)),max(abs(pe-p))], format short e

I1=reshape(T(1:6,:),6*size(T,2),1); I=kron(ones(6,1),I1);
J1=kron(T(1:6,:)',ones(6,1)); J=reshape(J1,numel(J1),1);
S=sparse(I,J,Se,length(z),length(z));

ex=ue-u; ey=ve-v; ep=pe-p; uv=[u;v];
% Error en u, v, divergencia, presión
ERRSL2=[sqrt(ex'*Mn*ex), sqrt(ey'*Mn*ey), sqrt(uv'*(GDn*uv)), sqrt(ep'*(Mp*
ep))]

```

Código B.8 Cálculo de las matrices, caso Scott-Vogelius. **makronvq.m**.

```

function [A,M,Dx,Dy,Mp,Sp,GD11,GD12,GD22,J,Se,Me,NLx,NLy]=makronvq(T,z,epsilon)
% INPUT y OUTPUT ídem que para el caso de Taylor-Hood

% nodos de cuadratura
c1=[1 1]/3;
c2=(6+sqrt(15))*[1 1]/21;
c3=[(9-2*sqrt(15)),(6+sqrt(15))]/21;
c4=[c3(2) c3(1)];
c5=(6-sqrt(15))*[1 1]/21;
c6=[(9+2*sqrt(15)),(6-sqrt(15))]/21;
c7=[ c6(2) c6(1)];
c=[c1;c2;c3;c4;c5;c6;c7]';
cx=c(1,:);
cy=(c(2,:));

% pesos en los nodos de cuadratura
w1=0.1125;
w2=(155+sqrt(15))/2400;
w3=w2;
w4=w2;
w5=(155-sqrt(15))/2400;
w6=w5;
w7=w5;

w=[w1 w2 w3 w4 w5 w6 w7]';
% funciones base en los nodos de cuadratura
Nc=[(1-cx-cy).*(1-2*cx-2*cy); cx.*(2*cx-1); cy.*(2*cy-1); ...
4*cx.*(1-cx-cy); 4*cx.*cy; 4*cy.*(1-cx-cy)];
Ncxi=[-(1-2*cx-2*cy)-2*(1-cx-cy); 4*cx-1; zeros(size(cx));...
4*(1-cx-cy)-4*cx; 4*cy; -4*cy];
Ncet=[-(1-2*cx-2*cy)-2*(1-cx-cy); zeros(size(cx)); 4*cy-1;...
-4*cx; 4*cx; 4*(1-cx-cy)-4*cy];
ne=6; ne0=3;

```

```

nt=size(T,2); nn=size(z,1);
x1=z(:,1);y1=z(:,2);x=x1(T');y=y1(T');
clear x1 y1;% b=reshape(b,2,1);

% Parciales de x e y con respecto a xi y eta
xxi=x(:,2)-x(:,1); xet=x(:,3)-x(:,1);
yxi=y(:,2)-y(:,1); yet=y(:,3)-y(:,1);

% JACOBIANO
J=(x(:,2)-x(:,1)).*(y(:,3)-y(:,1))-(x(:,3)-x(:,1)).*(y(:,2)-y(:,1));

% Parciales de xi y eta con respecto a x e y
xix=(y(:,3)-y(:,1))./J; xiy=(x(:,1)-x(:,3))./J;
etx=(y(:,1)-y(:,2))./J; ety=(x(:,2)-x(:,1))./J;

% MATRICES ELEMENTALES
u=[-1 1 0]'; v=[-1 0 1]'; e=ones(ne,1);

S1=[
3 1 0 -4 0 0
1 3 0 -4 0 0
0 0 0 0 0 0
-4 -4 0 8 0 0
0 0 0 0 8 -8
0 0 0 0 -8 8]/6; %(\partial_xi phi_i, \partial_xi phi_j).
S2 = [
6 1 1 -4 0 -4
1 0 -1 -4 4 0
1 -1 0 0 4 -4
-4 -4 0 8 -8 8
0 4 4 -8 8 -8
-4 0 -4 8 -8 8]/6; % S12+S12'
S3 = [
3 0 1 0 0 -4
0 0 0 0 0 0
1 0 3 0 0 -4
0 0 0 8 -8 0
0 0 0 -8 8 0
-4 0 -4 0 0 8]/6; %(\partial_eta phi_i, \partial_eta phi_j).
S12 = [
3 0 1 0 0 -4
1 0 -1 -4 4 0
0 0 0 0 0 0
-4 0 0 4 -4 4
0 0 4 -4 4 -4
0 0 -4 4 -4 4]/6; %(\partial_xi phi_i, \partial_eta phi_j).

S4=[ ...
6 -1 -1 0 -4 0; ...
-1 6 -1 0 0 -4; ...
-1 -1 6 -4 0 0; ...
0 0 -4 32 16 16; ...
-4 0 0 16 32 16; ...
0 -4 0 16 16 32]/360; % (phi_i, phi_j).

% DIFUSIÓN (grad(phi_i), grad(phi_j)).

```

```

Se=(kron(abs(J).*(xix.^2+xiy.^2),S1)+...
    kron(abs(J).*(etx.^2+ety.^2),S3)+...
    kron(abs(J).*(xix.*etx+xiy.*ety),S2));
Ae=epsilon*Se;

% MASA
Me=kron(abs(J),S4);Me=reshape(Me,(ne^2)*nt,1);
% Índices
I1=reshape(T(1:ne,:),ne*nt,1);
I=I1*e'; J1=kron(T(1:ne,:)',e);
I=reshape(I,ne*ne*nt,1); J1=reshape(J1,ne*ne*nt,1);

% MATRICES FEM
A=sparse(I,J1,Ae,nn,nn); M=sparse(I,J1,Me,nn,nn);

Me=reshape(Me,ne*nt,ne);

% GRAD-DIV

GD11e=(kron(abs(J).*(xix.^2),S1)+...
    kron(abs(J).*(etx.^2),S3)+...
    kron(abs(J).*(xix.*etx),S2));
GD11=sparse(I,J1,reshape(GD11e,numel(GD11e),1),nn,nn);

GD22e=(kron(abs(J).*(xiy.^2),S1)+...
    kron(abs(J).*(ety.^2),S3)+...
    kron(abs(J).*(xiy.*ety),S2));
GD22=sparse(I,J1,reshape(GD22e,numel(GD22e),1),nn,nn);

GD12e=(kron(abs(J).*(xix.*xiy),S1)+...
    kron(abs(J).*(etx.*ety),S3)+...
    kron(abs(J).*(xix.*ety),S12)+...
    kron(abs(J).*(xiy.*etx),S12'));
GD12=sparse(I,J1,reshape(GD12e,numel(GD12e),1),nn,nn);

% DIVERGENCIA
ne0=3;
N0c=[ones(1,size(cx,2)); 2*cx+cy-1; 2*cy+cx-1]; e0=ones(ne0,1); nn0=ne0*nt;
Dxi=[-1 1 0 0 4 -4
      1 1 0 -2 0 0
      1 0 0 -1 1 -1]/6;
Det=[-1 0 1 -4 4 0
      1 0 0 -1 1 -1
      1 0 1 0 0 -2]/6;
II01=(1:(ne0*nt))';
I01=reshape(kron(II01,e'),nt*ne0*ne,1);
J01=reshape(kron(T(1:ne,:)',e0),ne0*ne*nt,1);
Dxe=kron(abs(J).*xix,Dxi)+kron(abs(J).*etx,Det);
Dye=kron(abs(J).*xiy,Dxi)+kron(abs(J).*ety,Det);
Dx=sparse(I01,J01,reshape(Dxe,numel(Dxe),1),nn0,nn);
Dy=sparse(I01,J01,reshape(Dye,numel(Dye),1),nn0,nn);

```

```

% PRESIÓN
S04=(1/24)*[12 0 0;0 2 1; 0 1 2];
M0e=kron(abs(J),S04);
I10=(1:(ne0*nt))';
J0=kron(reshape(I10,ne0,nt)',e0);
IIq=reshape(I10*e0',numel(I10)*numel(e0),1);
JJq=reshape(J0,numel(J0),1);
Mp=sparse(IIq,JJq,reshape(M0e,numel(M0e),1),nn0,nn0);

ex0=[0 2 1]'; ey0=[0 1 2]';
S01=0.5*ex0*ex0'; S03=0.5*ey0*ey0'; S02=0.5*ex0*ey0' + 0.5*ey0*ex0';

S0e=(kron(abs(J).*(xix.^2+xiy.^2),S01)+...
      kron(abs(J).*(etx.^2+ety.^2),S03)+...
      kron(abs(J).*(xix.*etx+xiy.*ety),S02));
Sp=sparse(IIq,JJq,reshape(S0e,numel(S0e),1),nn0,nn0);

% TÉRMINO NO LINEAL
% (phi_i, phi_j phi_kx) (phi_i, phi_j phi_ky)
matxi=[-13/420 -1/140 0 4/105 1/105 -1/105;
        1/280 -1/280 0 0 1/630 -1/630;
        1/280 11/2520 0 -1/126 -2/315 2/315;
        -2/105 -4/315 0 2/63 -2/315 2/315;
        -1/210 -1/126 0 4/315 -2/105 2/105;
        -2/105 -2/315 0 8/315 -4/315 4/315;
        1/280 -1/280 0 0 1/630 -1/630;
        1/140 13/420 0 -4/105 1/105 -1/105;
        -11/2520 -1/280 0 1/126 -2/315 2/315;
        4/315 2/105 0 -2/63 -2/315 2/315;
        2/315 2/105 0 -8/315 -4/315 4/315;
        1/126 1/210 0 -4/315 -2/105 2/105;
        1/280 11/2520 0 -1/126 -2/315 2/315;
        -11/2520 -1/280 0 1/126 -2/315 2/315;
        1/140 -1/140 0 0 1/21 -1/21;
        1/126 -1/126 0 0 -2/315 2/315;
        2/315 -4/315 0 2/315 2/105 -2/105;
        4/315 -2/315 0 -2/315 2/105 -2/105;
        -2/105 -4/315 0 2/63 -2/315 2/315;
        4/315 2/105 0 -2/63 -2/315 2/315;
        1/126 -1/126 0 0 -2/315 2/315;
        -4/63 4/63 0 0 16/315 -16/315;
        -2/315 2/63 0 -8/315 16/315 -16/315;
        -2/63 2/315 0 8/315 16/315 -16/315;
        -1/210 -1/126 0 4/315 -2/105 2/105;
        2/315 2/105 0 -8/315 -4/315 4/315;
        2/315 -4/315 0 2/315 2/105 -2/105;
        -2/315 2/63 0 -8/315 16/315 -16/315;
        4/105 4/63 0 -32/315 16/105 -16/105;
        -2/315 2/315 0 0 8/105 -8/105;
        -2/105 -2/315 0 8/315 -4/315 4/315;
        1/126 1/210 0 -4/315 -2/105 2/105;
        4/315 -2/315 0 -2/315 2/105 -2/105;
        -2/63 2/315 0 8/315 16/315 -16/315;
        -2/315 2/315 0 0 8/105 -8/105;
        -4/63 -4/105 0 32/315 16/105 -16/105];

mateta=[-13/420 0 -1/140 -1/105 1/105 4/105;

```



```

1/280 0 11/2520 2/315 -2/315 -1/126;
1/280 0 -1/280 -1/630 1/630 0;
-2/105 0 -2/315 4/315 -4/315 8/315;
-1/210 0 -1/126 2/105 -2/105 4/315;
-2/105 0 -4/315 2/315 -2/315 2/63;
1/280 0 11/2520 2/315 -2/315 -1/126;
1/140 0 -1/140 -1/21 1/21 0;
-11/2520 0 -1/280 2/315 -2/315 1/126;
4/315 0 -2/315 -2/105 2/105 -2/315;
2/315 0 -4/315 -2/105 2/105 2/315;
1/126 0 -1/126 2/315 -2/315 0;
1/280 0 -1/280 -1/630 1/630 0;
-11/2520 0 -1/280 2/315 -2/315 1/126;
1/140 0 13/420 -1/105 1/105 -4/105;
1/126 0 1/210 2/105 -2/105 -4/315;
2/315 0 2/105 4/315 -4/315 -8/315;
4/315 0 2/105 2/315 -2/315 -2/63;
-2/105 0 -2/315 4/315 -4/315 8/315;
4/315 0 -2/315 -2/105 2/105 -2/315;
1/126 0 1/210 2/105 -2/105 -4/315;
-4/63 0 -4/105 -16/105 16/105 32/315;
-2/315 0 2/315 -8/105 8/105 0;
-2/63 0 2/315 -16/315 16/315 8/315;
-1/210 0 -1/126 2/105 -2/105 4/315;
2/315 0 -4/315 -2/105 2/105 2/315;
2/315 0 2/105 4/315 -4/315 -8/315;
-2/315 0 2/315 -8/105 8/105 0;
4/105 0 4/63 -16/105 16/105 -32/315;
-2/315 0 2/63 -16/315 16/315 -8/315;
-2/105 0 -4/315 2/315 -2/315 2/63;
1/126 0 -1/126 2/315 -2/315 0;
4/315 0 2/105 2/315 -2/315 -2/63;
-2/63 0 2/315 -16/315 16/315 8/315;
-2/315 0 2/63 -16/315 16/315 -8/315;
-4/63 0 4/63 -16/315 16/315 0];
matxi=reshape(matxi',size(matxi))';
mateta=reshape(mateta',size(mateta))';
NLxe=kron(abs(J).*xix,matxi)+kron(abs(J).*etx,mateta);
NLye=kron(abs(J).*xiy,matxi)+kron(abs(J).*ety,mateta);

IONL=reshape(T,ne*nt,1)*ones(1,ne^2);
JONL=kron(e',kron(T',e))+nn*kron(T'-1,ones(ne));

NLx=sparse(IONL,JONL,NLxe);
NLy=sparse(IONL,JONL,NLye);

```

Código B.9 Resolución ecuaciones estacionarias de Navier-Stokes, caso Scott-Vogelius. **pruste2d.m.**

```

clear, close all, clc
N=12;           % número de subdivisiones n
bvar=@bwinb;   % término de convección
uex=@bwinb;    % solución exacta
force=@forceb; % término independiente
epsilon=1e-6;  % parámetro de difusión
alpha=10;      % constante del término de reacción adicional

```

```

lambda=100;      % parámetro para escalar la presión
gamma=0;        % parámetro de estabilización grad-div

tf=0;

global LANU
global ELALPHA
global ELLAMBDA
LANU=epsilon; ELALPHA=alpha; ELLAMBDA=lambda;

% MALLADO
[T1,z1,is1,ldir]=swne(N); % mallado regular con diagonales sume
[T1b,z1b]=red_sv(T1,z1); % mallado refinado en el baricentro
[T,z,is]=datosq(T1b,z1b',is1',is1');
z=z'; is=is';

x=z(:,1); y=z(:,2);
X=x(is(1:ldir,:)); Y=y(is(1:ldir,:));
uis=zeros(size(is(1:ldir,:))); vis=uis;
[u00,v00]=uex(x,y,0);

u0=u00; v0=v00;
ne0=3; nt=size(T,2);
Ip=reshape(T(1:ne0,1:nt),nt*ne0,1);
z1p=z1b(Ip,:);

tic;
[u,v,p,rho,Mn,Mp,Se,Me,GDn]=ns2d_steady(T,z,is,ldir,epsilon,bvar,force,uis,vis,
    alpha,gamma);
t_gal=toc

TT=[T([1 4 6],:),T([2 5 4],:), T([3 6 5],:), T([4 5 6],:)];
figure(1); clf; trimesh(TT',z(:,1),z(:,2),u); % representación u
figure(2); clf; trimesh(TT',z(:,1),z(:,2),v); % representación v
[ue,ve]=uex(x,y,tf); [ue1,ve1,pe]=uex(z1p(:,1),z1p(:,2),tf);
ex=abs(u-ue); ey=abs(v-ve);
figure(3); clf; trimesh(TT',z(:,1),z(:,2),log10(ex)); % representación error
    u
figure(4); clf; trimesh(TT',z(:,1),z(:,2),log10(ey)); % representación error
    v

nt=length(p)/3;
Tp=(1:3*nt)';
Tp=reshape(Tp,3,nt);
Iph=kron(ones(7,1),3*(1:nt)')-2+[zeros(3*nt,1);ones(2*nt,1);2*ones(2*nt,1)];
Jph=kron(ones(7,1),3*(1:nt)')-2+[zeros(nt,1);ones(nt,1);2*ones(nt,1);zeros(nt
    ,1);ones(nt,1);zeros(nt,1);2*ones(nt,1)];
ph=sparse(Iph,Jph, [ones(nt,1);-ones(2*nt,1);ones(4*nt,1)])*p;

figure(7); clf; h=trimesh(Tp',z1p(:,1),z1p(:,2),ph, 'FaceColor', [0.85 0.85
    0.85]); % gráfica solución p
figure(8); clf; hw=trimesh(Tp',z1p(:,1),z1p(:,2),pe, 'FaceColor', [0.85 0.85
    0.85]); % gráfica solución p exacta

format short g;
maxe=[max(abs(ex)),max(abs(ey)),max(abs(pe-ph))], format short e

```

```

I1=reshape(T(1:6,:),6*size(T,2),1); I=kron(ones(6,1),I1);
J1=kron(T(1:6,:)',ones(6,1)); J=reshape(J1,numel(J1),1);
S=sparse(I,J,Se,length(z),length(z));
ex=ue-u; ey=ve-v; ep=pe-ph; uv=[u;v];

% Error en u, v, divergencia y p
ERRSL2=[sqrt(ex*(Mn*ex)), sqrt(ey*(Mn*ey)), sqrt(uv*(GDn*uv)), sqrt(ep*(Mp*
ep))]

```

Código B.10 Cálculo de F. `value.m`.

```

function fval=value(A,NL,x,n,f)
u=x(1:n);
v=x(n+1:2*n);
x2=[kron(u,u);kron(u,v);kron(v,u);kron(v,v)];
fval=A*x+NL*x2-f;
end

```

Código B.11 Cálculo de DF. `dvalue.m`.

```

function dfval=dvalue(A,NLxc,NLyc,x,n)
NLxk=reshape(NLxc',n,n^2)';
NLxj=reshape(NLxc,n^2,n);
NLyk=reshape(NLyc',n,n^2)';
NLyj=reshape(NLyc,n^2,n);
J11=reshape(NLxj*x(1:n)+NLyj*x(n+1:2*n),n,n)+reshape(NLxk*x(1:n),n,n)';
J12=reshape(NLyk*x(1:n),n,n)';
J21=reshape(NLxk*x(n+1:2*n),n,n)';
J22=reshape(NLyj*x(n+1:2*n)+NLxj*x(1:n),n,n)+reshape(NLyk*x(n+1:2*n),n,n)';
J=zeros(length(x));
J(1:2*n,1:2*n)=[J11 J12; J21 J22];
dfval=A+J;
end

```

Código B.12 Método de Newton. `makronvq.m`.

```

function [x,iflag,iter,normf]=newton(fun,jac,x0)
TOLr=0.001; % tol. relativa
TOLa=0.001; % tol. absoluta
maxit=100; % número máximo de iteraciones

x0 = x0(:);
x = x0; iter = 0; err = 2 * (TOLa + TOLr*norm(x)); iflag = 0;

while (err > TOLa + TOLr*norm(x)) && iter < maxit
    iter = iter + 1;
    f = fun(x);
    J = jac(x);
    e = J \ f;
    x = x - e;
    err = norm(e);
end

if err > TOLa + TOLr*norm(x); iflag = 1; end

```

```
normf = norm(fun(x));  
end
```

Índice de Figuras

3.1	Malla triangular uniforme SWNE para $n = 4$	5
3.2	Transformación afín al triángulo de referencia	10
4.1	Función base de $V^h = \mathbf{P}_2$	11
4.2	Función base de $Q^h = \mathbf{P}_1$	12
4.3	Función base de $Q^h = \mathbf{P}_1^{\text{disc}}$	13
4.4	Malla refinada en el baricentro para $n = 4$	13
5.1	Convergencia del error en la velocidad u frente al número de subdivisiones, n	15
5.2	Convergencia del error en la presión p frente al número de subdivisiones, n	16
5.3	Evolución del máximo error (arriba, error en velocidad u ; abajo, error en presión p) y el tiempo de computación para distintos valores del parámetro λ de las presiones para diferentes mallados ($n = 6, 12, 24, 48, 96$)	16
5.4	Error de la divergencia en norma dos, $\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)\ _{L^2}$, para distintos valores del parámetro λ	17
6.1	Convergencia del error en la velocidad u frente al número de subdivisiones, n	19
6.2	Convergencia del error en la presión p frente al número de subdivisiones, n	20
6.3	Evolución del máximo error (arriba, error en velocidad u ; abajo, error en presión p) y el tiempo de computación para distintos valores del parámetro λ de las presiones para diferentes mallados ($n = 6, 12, 24, 48$)	20
6.4	Error de la divergencia en norma dos, $\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)\ _{L^2}$, para distintos valores del parámetro λ	21
7.1	Convergencia del error en la velocidad u frente al número de subdivisiones, n	24
7.2	Convergencia del error en la presión p frente al número de subdivisiones, n	25
7.3	Evolución del máximo error (arriba, error en velocidad u ; abajo, error en presión) y el tiempo de computación para distintos valores del parámetro λ de las presiones para diferentes mallados ($n = 3, 6, 12, 24$).	25
7.4	Error de la divergencia en norma dos, $\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)\ _{L^2}$, para distintos valores del parámetro λ	26

Bibliografía

- [1] Jochen Alberty, Carsten Carstensen, and Stefan A Funken, *Remarks around 50 lines of matlab: short finite element implementation*, Numerical algorithms **20** (1999), no. 2, 117–137.
- [2] Michael A Case, Vincent J Ervin, Alexander Linke, and Leo G Rebholz, *A connection between scott–vogelius and grad-div stabilized taylor–hood fe approximations of the navier–stokes equations*, SIAM Journal on Numerical Analysis **49** (2011), no. 4, 1461–1481.
- [3] Javier de Frutos, Bosco García-Archilla, and Julia Novo, *Fully discrete approximations to the time-dependent navier–stokes equations with a projection method in time and grad-div stabilization*, Journal of Scientific Computing **80** (2019), no. 2, 1330–1368.
- [4] Leopoldo P Franca and Thomas JR Hughes, *Two classes of mixed finite element methods*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **69** (1988), no. 1, 89–129.
- [5] Bosco García-Archilla, *El método de elementos finitos I y II. Métodos matemáticos avanzados en IC*, Departamento de Matemática Aplicada II. Universidad de Sevilla (2020).
- [6] Johnny Guzmán and Ridgway Scott, *The scott-vogelius finite elements revisited*, arXiv preprint arXiv:1705.00020 (2017).
- [7] Volker John et al., *Finite element methods for incompressible flow problems*, vol. 51, Springer, 2016.
- [8] Claes Johnson, *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Courier Corporation, 2012.
- [9] Jinshui Qin, *On the convergence of some low order mixed finite elements for incompressible fluids*, The Pennsylvania State University, 1994.
- [10] Endre Süli, *Lecture notes on finite element methods for partial differential equations*, Mathematical Institute, University of Oxford (2012).