Proyecto Fin de Carrera
Ingeniería en Tecnologías Industriales

Juegos no cooperativos aplicados a un enfrentamiento Rusia-OTAN

Autor: Jaime Fidalgo Molina
Tutor: Manuel Ordóñez Sánchez
Inmaculada Ventura Molina

Dpto. Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2022

Proyecto Fin de Carrera

Ingeniería de Tecnologías Industriales

Juegos no cooperativos aplicados a un enfrentamiento Rusia-OTAN

Autor:

Jaime Fidalgo Molina

Tutor:

Manuel Ordóñez Sánchez

Inmaculada Ventura Molina

Dpto. de Matemática Aplicada II

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2022

Proyecto Fin de Carrera: Juegos no cooperativos aplicados a un enfrentamiento Rusia-OTAN

Autor: Jaime Fidalgo Molina

Tutor: Manuel Ordóñez Sánchez
Inmaculada Ventura Molina

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2022

El Secretario del Tribunal

A Dios.

A mis padres y hermanos por inculcarme los valores necesarios para llegar al final de esta etapa.

A mis profesores por mantener despiertas las ganas de formarme.

Y a Don Manuel Ordoñez Sánchez por su ayuda y dedicación.

RESUMEN

En el día a día tienen lugar infinidad de situaciones que se basan en interacciones entre sujetos que deben tomar decisiones para obtener su máximo beneficio. La Teoría de Juegos permite a dichos agentes optar por una estrategia en función de las elegidas por los demás.

Esta herramienta matemática destaca por haber sido aplicada en campos de muy diversas índoles, desde la economía o las ciencias sociales, hasta la política o, por supuesto, la guerra.

Para un mejor entendimiento del alcance del estudio, se introduce al lector los conceptos principales de la Teoría de Juegos, así como su origen y las aplicaciones de los mismos, enfocándose en el aspecto bélico.

De este modo, no se puede eludir el actual conflicto entre Rusia y Ucrania, del que se explicarán los antecedentes, para dar paso al análisis de un hipotético conflicto militar entre la OTAN y Rusia. Este enfrentamiento se abordará desde dos enfoques: El Equilibrio de Nash y los Juegos de Stackelberg.

ABSTRACT

A great deal of situations which are based on interactions among individuals who must make decisions in order to obtain their maximum profit take place on a daily basis. The Game Theory enables these agents to opt for a strategy depending on those selected by the others.

This mathematical tool stands out for having being implemented in a wide range of different fields, from economic or social science ones, to political and, of course, military ones.

For a deeper awareness of the scope of the project, the thesis introduces the reader to the main concepts of the Game Theory, as well as its origins and applications, thrusting into the limelight the belligerent domain.

Thus, the current warfare between Russia and Ukraine cannot be overlooked, whose precedents will be explained, leading to the analysis of a hypothetical armed conflict between the NATO and Russia.

This confrontation will be addressed from two different approaches: The Nash Equilibrium and Stackelberg Games.

ÍNDICE

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE DEFINICIONES

ÍNDICE DE AXIOMAS

ÍNDICE DE EJEMPLOS

1 LA TEORÍA DE JUEGOS.

1.1 Introducción a la teoría de juegos.

"Una sociedad maximiza su nivel de bienestar cuando cada uno de sus individuos acciona a favor de su propio bienestar, pero sin perder de vista el bienestar de los demás integrantes."

John Nash

La Teoría de Juegos, también conocida como Análisis Matemático de Conflictos o Teoría de Decisiones Interactivas, es un área comprendida dentro de las matemáticas aplicadas, que se basa en modelos cuyo objetivo es estudiar, desde el razonamiento estratégico, las distintas interacciones conflictivas entre entidades o personas, también conocidas como jugadores **[*11*]**. Está orientado a predecir cuál será el resultado cierto o más probable de una pugna entre distintos jugadores.

En el día a día se pueden observar contextos de decisiones individuales, en las que un jugador intenta maximizar su ganancia, sin tener en cuenta las decisiones que puedan tomar los otros agentes. Esto ocurre, por ejemplo, de manera muy manifiesta en el sector económico. La determinación del mix de producción óptimo en una empresa o la planificación del aprovisionamiento de una empresa según su inventario pueden ser ejemplos de teoría de decisión individual, que no es más que una simplificación de la realidad en la inmensa mayoría de los casos.

Por el contrario, la Teoría de Juegos realiza una evaluación minuciosa y formal de la realidad para tener en cuenta la influencia que pudieran tener las decisiones de varios agentes en el resultado. Cada tomador de decisiones procurará obtener el máximo beneficio propio a sabiendas de que éste depende de las acciones que escojan los demás.

Este hecho desbanca la utópica visión donde los individuos actúan según el óptimo del conjunto global, dejando a un lado sus propios propósitos.

El valor primordial del estudio de la Teoría de Juegos reside en la opción de desarrollar una herramienta, aplicable a campos de muy diversa índole, para alcanzar la solución óptima en conflictos entre diversos agentes. Esta importancia se ve magnificada en la actualidad, con una sociedad globalizada y cada vez más competitiva, donde hay una pugna constante por los limitados recursos.

Esta teoría tiene gran variedad de aplicaciones en campos muy disímiles, entre los que se pueden destacar fundamentalmente la ciencia económica, con el caso de las subastas, negociaciones o fusiones y adquisiciones, además de la regulación de duopolios u oligopolios; la gestión de empresas o proyectos, entre los que se encuentran la decisión de entrada o salida de un mercado o la gestión de la propia publicidad; juegos de azar como puede ser el caso del póker, conflictos políticos y militares, u otros de naturalezas menos evidentes, como pueden ser los estudios sociales o la filosofía.

1.2 Conceptos de la Teoría de Juegos.

La idea de la Teoría de Juegos surgió por primera vez con autores como James Waldegrave y su estrategia para resolver un juego de dos personas en 1713 o Antoine Cournot y su modelo para regir un duopolio en 1838. Sin embargo, no será hasta el siglo XX, cuando John von Neumann publica obras como *On the Theory of Parlor Games* **[*10*]**, de 1928 y *Theory of games and Economic Behaviour* **[*3*]**, junto con Oskar Morgenstern en el año 1944, cuando este concepto empieza a ser más ampliamente desarrollado.

Esta segunda obra, la cual se centra fundamentalmente en la aplicación de la teoría a aspectos sociales y económicos, motiva el nacimiento de distintos conceptos fundamentales para la comprensión de la Teoría de Juegos. Así, un **juego** queda descrito como una situación en la que una serie de **jugadores racionales**, los cuales tienen conocimiento completo y una comprensión absoluta de las circunstancias que rigen el juego, tienen un conjunto de estrategias y una función de pago que dependerá de las estrategias que sigan los demás jugadores. Esta **interdependencia estratégica** es el planteamiento sobre el que se fundamenta la Teoría de Juegos, dando lugar al **conflicto de intereses** entre los jugadores y a la noción de **riesgo**, al considerar no solo las probabilidades de ocurrencia de una determinada estrategia, sino también las de no ocurrencia. Además, aparte de este conflicto de intereses, la interdependencia estratégica puede dar lugar a propósitos mutuos, lo que llevará a lo que más adelante se llamarán **coaliciones**. **[*11*]**

Asimismo, se desarrolló la teoría de la utilidad esperada. La **función de utilidad** asigna cifras a las preferencias del jugador. Dichas cifras miden la utilidad o bienestar del mismo si se da cierto resultado en el juego. Por tanto, se puede entender por **utilidad** al tratamiento cuantitativo de las preferencias del jugador. **[*17*]**

Además, se planteó y caracterizó el algoritmo para alcanzar las soluciones óptimas en los **juegos de suma cero**, que son aquellos en los que la suma de los beneficios obtenidos por los jugadores en el juego se equilibra con la suma de las pérdidas.

Cabe resaltar otros términos en lo referente a la Teoría de Juegos. Los **resultados del juego** son las distintas condiciones en las que puede finalizar un juego. Cada resultado implicará diferentes consecuencias para todos los jugadores.

El **pago** que recibe el jugador al concluir el juego es la utilidad que éste le otorga al mismo, el valor que el propio jugador le concede a las consecuencias de un cierto resultado del juego.

Por otro lado, la **estrategia de un jugador** se define como el plan de acciones con las que este interviene en el juego.

Existen distintos criterios según los cuales se pueden clasificar los juegos. Los dos principales enfoques se basan en los juegos **cooperativos** o **no cooperativos**.

En el primer grupo se pueden encontrar aquellas situaciones en las que existen mecanismos para que algunos o todos los jugadores intercambien información y colaboren formando las anteriormente mencionadas coaliciones.

Por el contrario, en los no cooperativos no existen estos mecanismos. En este grupo se encuentran otros criterios para caracterizar los juegos, separándolos en juegos estáticos o dinámicos.

Además, según la naturaleza de la situación a abordar, aparecen otros grupos como los juegos *bipersonales* o *Npersonales*, de *suma constante* o *suma variable*, *simétricos* o *asimétricos*, con *información perfecta* o *imperfecta* o juegos con *información completa* o sin ella.

Los **juegos bipersonales**, evidentemente, están compuestos por dos jugadores, mientras que los **Npersonales** están compuestos por N agentes decisores.

Los **juegos de suma constante** son aquellos en los que hay una cantidad de beneficio a repartir y la cuestión principal es cómo se hace el reparto de la misma. Por tanto, lo que gana un agente es lo que pierde otro. Los juegos de suma cero son un caso concreto de este tipo de juegos.

Por otro lado, en los **juegos de suma variable** se produce o destruye utilidad en el conjunto durante el juego. La suma de las utilidades de los agentes es diferente según sea el resultado. En estos casos es imprescindible distinguir entre **equilibrio** y **solución**. Necesariamente, un resultado ha de ser un equilibrio antes de poder ser solución. Si un resultado es equilibrio, ningún jugador puede mejorar su beneficio cambiando de estrategia.

Un juego es **simétrico** si las recompensas por jugar una determinada estrategia dependen solo de las decisiones de las demás y no de quien sea el que la juegue. En estos juegos, la identidad del agente puede intercambiarse sin que se cambie la utilidad de la estrategia. El *dilema del prisionero* es un ejemplo de este tipo de juegos. Por contra, en un juego **asimétrico** no hay conjuntos de estrategias idénticas para los jugadores.

Los **juegos con información completa** son aquellos en los que la función de utilidad de cada jugador es conocida por todos los demás. En los de **información incompleta** al menos un jugador no conoce las utilidades de otro.

Un juego será de **información perfecta** si el jugador que tiene que decidir conoce el historial completo de las decisiones tomadas por los demás, mientras que será de **información imperfecta** si el agente que no conoce el historial completo de decisiones.

Por otro lado, son dos las maneras que predominan a la hora de representar un juego: la **forma normal o estratégica** y la **forma extensiva**.

1.3 Representación de los juegos.

A continuación, se detallarán los principales modos que se emplean para simbolizar los juegos, haciendo hincapié en cómo y cuándo se utiliza cada uno de ellos. Cabe destacar que un mismo juego puede ser expresado de ambos modos.

1.3.1 Juegos en forma normal o estratégica.

Un juego representado en forma estratégica se identifica principalmente por recoger toda la información mediante el uso de una matriz de pagos. Este modelo se utiliza esencialmente para juegos estáticos en el que los agentes deciden simultánea e independientemente.

Según recoge Oz Shy en su libro *Industrial Organization: Theory and Applications* **[*14*]** de 1995, para recoger adecuadamente la información del juego se ha de proceder de la siguiente manera:

1. Se listan las posibles estrategias de cada jugador.
2. Colocar las estrategias en una matriz.
3. Las filas corresponden a las estrategias del jugador 1, las columnas a las del jugador 2, aunque pueden recoger más agentes.
4. Los pagos se colocan en las casillas de la matriz.

Un juego representado en forma estratégica quedará totalmente caracterizado mediante tres conjuntos:

- Conjunto de jugadores racionales que buscan su máximo beneficio $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
- Conjunto de estrategias S_n para cada jugador $n \in N$.
- Funciones de utilidad o pagos $U_n(S)$ para cada combinación de estrategias $S = (S_1, \ldots, S_n)$.

Ejemplo 1–1. Dilema del Prisionero en forma estratégica.

A continuación, se representará el famoso *dilema del prisionero* en forma estratégica. En él, se muestran dos prisioneros (P1, P2), cada uno de los cuales tiene únicamente dos posibles estrategias (E_n^j siendo n el jugador y j la estrategia del mismo): confesar (E_1^1, E_2^1) o mentir (E_1^2, E_2^2). Si los dos prisioneros confiesan, el pago será de 8 años de cárcel cada uno (-8). Si uno confiesa pero el otro miente, al que miente le caerá una pena de 10 años (-10) y al que confiesa 0 años. Si ambos mienten, le caerá una pena de 1 año a cada uno (-1).

		Prisionero 2	
		Confiesa	Miente
Prisionero 1	Confiesa	(-8, -8)	(0, -10)
	Miente	(-10, 0)	(-1, -1)

Tabla 1. Dilema del prisionero representado en forma estratégica.

1.3.2 Juegos en forma extensiva.

A diferencia de la forma normal, un juego representado en forma extensiva se reconoce principalmente por recoger toda la información relevante en un árbol de decisión. Se utiliza fundamentalmente para juegos dinámicos o secuenciales.

Un juego modelado según la forma extensiva debe incluir:

- Conjunto de jugadores racionales que buscan su máximo beneficio $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
- Un árbol de juego que está compuesto por:
    a. Nodos, uno para cada jugador y que representan los puntos donde estos intervienen.
    b. Ramas que representan las acciones que puede tomar un jugador en cada uno de sus nodos.
- Información que tiene cada agente en cada punto donde deba tomar una decisión.
- Las estrategias de cada jugador, qué elegir cuando llega a uno de sus nodos.
- Los pagos o utilidad resultantes del juego situados en los nodos finales del árbol.

Se deben seguir una serie de pautas para la correcta modelización de un juego en forma extensiva:

- Todos los nodos son sucesores del inicial. De esta forma, la información que se dispone en cada uno dependerá de este.
- No está permitido que los caminos formados por las estrategias de los jugadores se crucen. Para ello, cada nodo, a excepción del inicial, debe tener un antecesor inmediato.
- Cada rama saliente de un nodo representa una acción diferente del agente.

Ejemplo 1–2. Dilema del Prisionero en forma extensiva.

A continuación, se incluye de nuevo el *dilema del prisionero*, pero esta vez representado en forma extensiva.

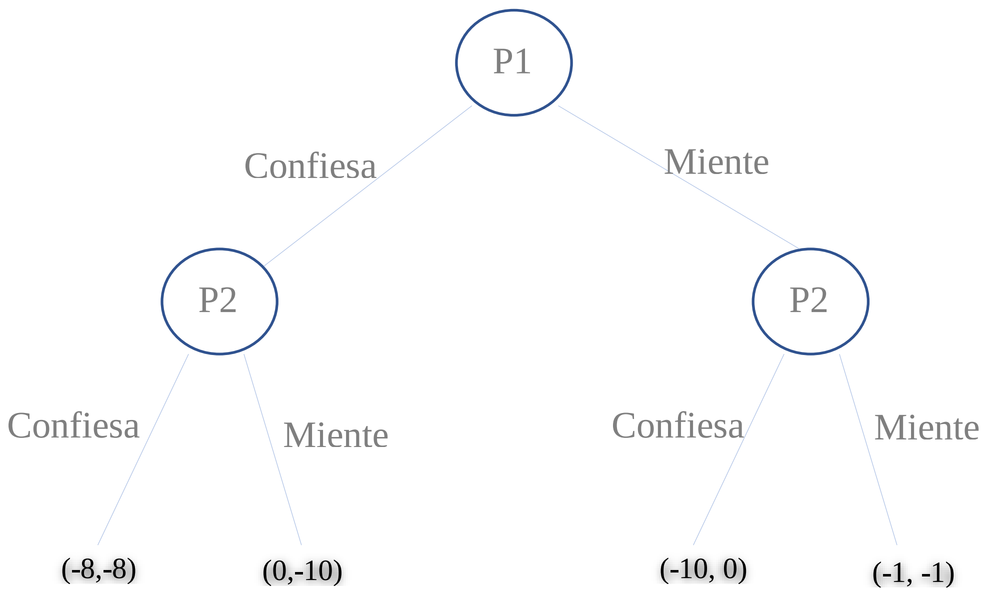

Ilustración 1. Dilema del prisionero representado en forma extensiva.

---

2 Los Juegos Cooperativos.

Como se ha mencionado anteriormente, en este tipo de juegos la interdependencia estratégica puede ocasionar que distintos agentes tengan intereses comunes que, aunque es muy poco probable que dichos objetivos sean idénticos, pueden llevar a coaliciones para orientar las decisiones en una misma dirección. En estas situaciones, la mayor parte de los esfuerzos irán encaminados a estudiar qué coaliciones se formarán y cómo se repartirán las ganancias entre los agentes que las forman.

A continuación, se analiza el enfoque de la Teoría de Juegos para resolver la cuestión relacionada con el reparto de la utilidad.

En primer lugar, cabe destacar la existencia de dos grupos de juegos según el modo en que se pueda repartir el beneficio: **juegos de utilidad transferible** *(UT)* o **juegos de utilidad no transferible**. En el primer caso, la utilidad que consiguen los agentes al colaborar se puede repartir de cualquier manera entre ellos. En los de utilidad no transferible, el beneficio no se puede transmitir entre jugadores, impidiendo que se pueda repartir de cualquier modo y quedando sujeta a las restricciones del juego.

Definición 1. Juegos de Utilidad Transferible.

Un **juego de utilidad transferible** queda caracterizado por el par (N, v), tomando $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ como el conjunto finito de agentes que participan y v, conocida como **función característica**, que representa con un número real $v(S)$ el beneficio acumulado que obtendría, al finalizar el juego, cada subconjunto de jugadores o coalición S, contenido en N. También se puede entender $v(S)$ como el valor de la coalición. Cabe destacar que, para el caso de una coalición vacía, el valor asociado al mismo será nulo: $v(\emptyset) = 0$.

Ejemplo 2–1. Juegos de Utilidad Transferible.

Tres ganaderos, cuyas explotaciones de porcinos se encuentran en el mismo municipio, pretenden reorganizar el transporte de los animales al matadero, puesto que se percatan de que en muchos de sus viajes cabrían más cerdos, por lo que podrían asociarse entre ellos. Al momento de estudiarlo, las posibilidades que se plantean de los costes anuales son las siguientes:

Coalición	{1}	{2}	{3}	{12}	{13}	{23}	{123}
Coste	70	70	70	140	140	140	180

Podemos tratar esta situación como un juego cooperativo de utilidad transferible UT, caracterizado por N = {123} y por la siguiente función característica:

$v(\{1\}) = 0$; $v(\{2\}) = 0$; $v(\{3\}) = 0$

$v(\{12\}) = 0$; $v(\{13\}) = 0$; $v(\{23\}) = 0$; $v(\{123\}) = 30$

En este caso, el beneficio representado por la función característica supone el ahorro que podrán obtener con la coalición, con lo que se obtendría un ahorro de 30 unidades monetarias (u.m.). Es evidente que en este caso resulta favorable el hecho de que se asocien los tres ganaderos y, al tener un coste original igual para todos, sería lógico que el reparto del coste fuera el mismo, es decir, de 60 u.m. cada ganadero, frente a las 70 u.m. en las que incurriría cada uno de no llegar al acuerdo.

Considérese, sin embargo, que los tamaños de las explotaciones son distintos o que, por motivos logísticos, el coste de los ganaderos son distintos y que se tiene la siguiente situación:

Coalición	{1}	{2}	{3}	{12}	{13}	{23}	{123}
Coste	70	62	84	120	138	160	195

Se tiene entonces que:

$v(\{12\}) = 12$; $v(\{13\}) = 16$; $v(\{23\}) = -14$; $v(\{123\}) = 21$

En principio, parecería lógico descartar la coalición {23} ya que supone un coste conjunto mayor al caso en el que cada uno operase por separado. Por otro lado, se podría pensar que lo más ventajoso sería la coalición de los tres, obteniendo un ahorro total de 21 u.m. Sin embargo, podrían surgir ciertas dudas que lleven a conclusiones controvertidas. ¿Cómo se debe distribuir el ahorro? ¿Y el coste? ¿De manera proporcional al coste original? Porque en el caso de ser a partes iguales al ganadero 2 no le interesaría esta coalición, puesto que tiene que pagar más que en el caso de actuar de manera individual. Además, si es a partes iguales a los ganaderos 1 y 3 les interesaría más la opción de asociarse ellos dos únicamente, obteniendo cada uno 8 u.m. de ahorro en lugar de 7.

De esta manera se puede comprobar que, efectivamente, una de las cuestiones principales en este tipo de juegos es la partición de la ganancia obtenida entre las distintas partes del acuerdo.

Definición 2. Juegos Monótonos.

Un juego cooperativo (N, v) es **monótono** cuando al aumentar el número de jugadores que conforman una coalición, no disminuye el beneficio conjunto obtenido. De manera formal se verifica que:

$$v(S) \leq v(T) \qquad \forall\ S \subseteq T \subseteq N$$

Como se puede deducir, esta cualidad lleva a la cooperación entre los distintos agentes.

Definición 3. Juegos Superaditivos y Subaditivos.

Un juego cooperativo (N, v) es **superaditivo** si se cumple que, para todo par de coaliciones, $S, T \subseteq N$, el beneficio obtenido en el caso de formar una coalición entre ellas dos es igual o mayor a la suma del que obtendrían las dos de manera independiente. Por el contrario, si es menor o igual se dice que el juego es **subaditivo**. Es decir:

Superaditivo: $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) \qquad \forall\ S, T \subseteq N\ con\ S \cap T = \emptyset$

Subaditivo: $v(S) + v(T) \geq v(S \cup T) \qquad \forall\ S, T \subseteq N\ con\ S \cap T = \emptyset$

Definición 4. Juegos Convexos y Cóncavos.

Un juego cooperativo (N, v) es **convexo** si se cumple que, para todo par de coaliciones, $S, T \subseteq N$, la suma de la ganancia obtenida por cada una de las coaliciones de manera independiente es menor a la suma del beneficio de la unión y la intersección entre ellas. En el caso de que sea mayor, se dirá que el juego es **cóncavo**. Expresado de manera formal:

Convexo: $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T) \qquad \forall\ S, T \subseteq N$

O lo que es lo mismo:

Convexo: $v(S) + v(T) - v(S \cap T) \leq v(S \cup T) \qquad \forall\, S, T \subseteq N$

Cóncavo: $v(S) + v(T) - v(S \cap T) \geq v(S \cup T) \qquad \forall\, S, T \subseteq N$

Definición 5. Juegos Normalizados (0,1).

Un juego cooperativo (N, v) se considera normalizado (0,1) si la ganancia de los agentes de manera independiente es nula y el beneficio obtenido con una coalición que aúne todos los jugadores es unitario **[*17*]**. De esta manera:

$v(\{k\}) = 0 \quad \forall\ jugador\ k \in N$

$v(N) = 1$

Como se ha mencionado anteriormente, la cuestión principal en este tipo de situaciones es analizar el reparto de beneficios entre los integrantes de una coalición. Sin embargo, otro asunto a tratar desde el punto de vista del jugador es elegir si formar parte de dicha asociación o no. Para ello habría que analizar el provecho que le ofrecería unirse a la misma, aspecto difícilmente modelable puesto que depende de gran cantidad factores de muy diversa índole, entre ellos algunos muy subjetivos, como puede ser el poder de negociación y persuasión del jugador o condiciones éticas o morales.

2.1 Soluciones en Juegos Cooperativos.

Sea *G = (N, v)* un juego cooperativo de utilidad transferible, se estudiará a continuación cómo repartir el beneficio obtenido por la coalición entre los diferentes jugadores.

Definición 6. Vector de pagos.

El **vector de pagos** es una función empleada para identificar el pago que cada jugador recibirá del pago total del juego cooperativo *v(N)*. Dicho vector se representa como $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde x_k es el pago recibido por el jugador k.

El vector de pagos se caracteriza por una serie de condiciones lógicas que se impondrán al modelar un juego cooperativo de UT:

- Es evidente que los agentes aceptarán el reparto de beneficios si de este modo reciben un pago igual o superior al que obtendrían al jugar de manera independiente. Esto se conoce como **principio de racionalidad individual.**

$$x_k \geq v(\{k\}) \qquad \forall \text{ jugador } k \in N$$

- De la misma forma, existe el **principio de racionalidad de** grupo, también denominado **condición de optimalidad de Pareto**, por el cual un grupo de jugadores requerirá un vector de pagos mayor o igual al valor que recibirían como coalición.

$$\sum_{k \in S} x_k = \mathrm{x}(S) \geq v(S)$$

- El **principio de eficiencia** se satisfará en el caso de que todos los agentes participantes en el juego lleguen a un acuerdo común, formando así la gran coalición. De este modo, la ganancia total será plenamente distribuida entre los jugadores.

$$\sum_{k \in \mathrm{N}} x_k = \mathrm{v(N)}$$

Definición 7. Vector de pagos eficiente.

Los **vectores de pago eficientes**, también denominados **preimputaciones** (PI) para el juego (N, v), será el conjunto de vectores x∈$\mathbb{R}^n$ que satisfacen el principio de eficiencia anteriormente comentado. De manera formal:

$$PI(N, v) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N)\} \text{con} \qquad x(N) = \sum_{k \in N} x_k$$

Si adicionalmente se aplica el principio de racionalidad individual se llega al conjunto de **implicaciones** (I) del juego (N, v).

$$I(N, v) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in PI(N, v) : x_k \geq v(\{k\}), \qquad \forall k \in N\}$$

O lo que es equivalente:

$$I(N, v) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N), x_k \geq v(\{k\}), \;\; \forall k \in N\}$$

En el caso de que I (N, v) = $\emptyset$, el juego es **esencial.**

Una vez definidos y caracterizados los vectores de pago, nace la cuestión de plantear uno concreto que sea aceptado por todos los jugadores. Según las propiedades del juego y los resultados que se esperan obtener, se pueden distinguir dos tipos de soluciones para la obtención de los vectores de pago de los jugadores.

Las soluciones **tipo conjunto** delimitan una región admisible donde se pueden encontrar valores de las posibles soluciones y las de **tipo puntual**, que arrojan un único vector de pagos como resultado.

Por considerarse de mayor importancia, se analizarán el *core* y el *valor de Shapley*.

2.1.1 El core.

Introducido por Donald Bruce Gillies, discípulo de John von Neumann, en 1953, el core de un juego cooperativo (N, v) es una solución de tipo conjunto que se obtiene al imponer el principio de eficiencia, el de racionalidad individual y la condición de optimalidad de Pareto. Cabe destacar que es un conjunto cerrado, acotado y convexo.

De esta forma, el conjunto de vectores de pago que propone el core asegura a cada coalición S un beneficio igual o mayor que el que la coalición podría adquirir por cuenta propia.

Definición 8. El core.

El **core** (C) de un juego (N, v) se define de manera formal como:

$$C(N,v) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N), x(S) \geq v(S), \ \ \forall S \subseteq N\}$$

Ciertas deficiencias surgen alrededor de este tipo de solución puesto que, en ocasiones, puede darse el caso que el core sea un conjunto vacío, por lo que no sería posible extraer un vector de pagos con el que todas las coaliciones fueran beneficiadas.

Con el objetivo de aplacar dichas carencias, Olga Bondareva y Lloyd Shapley centraron sus esfuerzos en la determinación de los juegos con core no vacío. Con el teorema Bondareva-Shapley dieron lugar a los conceptos de colección equilibrada y juego equilibrado. Además, se verificó que todo juego convexo tiene core no vacío.

Definición 9. Colección Equilibrada.

Una colección de subconjuntos $\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ contenidos en N, diferentes y no vacíos, será **equilibrada sobre N** si existen números positivos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m,$ conocidos como pesos, de manera que:

$$\sum_{j:k \in S_j} a_j = 1 \qquad \forall\, k \in N$$

Definición 10. Juego Equilibrado.

Un juego (N, v) es **equilibrado** si para cualquier colección equilibrada sobre N se contrasta que:

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \cdot v(S_j) \leq v(N) \quad \forall\, S \subseteq N$$

Los matemáticos anteriormente mencionados pudieron corroborar que los juegos equilibrados concuerdan con los juegos con core no vacío.

Teorema 2.1. *Juegos de core no vacío.*

Un juego es equilibrado si y solo si el core es no vacío.

Se puede por tanto deducir que el core es una de las ideas más relevantes dentro de la Teoría de Juegos, puesto que acotan las soluciones a una serie de vectores de pago que verifican unas condiciones racionales.

No obstante, en ciertas ocasiones es más oportuno tratar de hallar una solución concreta y para ello se puede hacer uso del anteriormente mencionado *valor de Shapley*.

2.1.2 Valor de Shapley.

En honor a quien lo desarrolló en 1953, Lloyd Shapley, el valor de Shapley se ha erigido como uno de los conceptos primordiales en la resolución de juegos cooperativos de utilidad transferible.

El empleo de este concepto de solución se fundamenta en la búsqueda de una asignación de los pagos de los jugadores única que cumpla una serie de axiomas preestablecidos.

En primer lugar, se debe tener en cuenta que, como se ha mencionado anteriormente, se trata de una solución de tipo puntual. Definiendo Γ^N como el conjunto de todos los juegos de UT sobre N, se puede caracterizar una solución puntual sobre Γ^N como una aplicación de la forma:

$$\varphi: \Gamma^N \to \mathbb{R}^n$$

Siendo $\Gamma^N = \{(N, v): v: 2^N \to \mathbb{R}, v(\emptyset) = 0\}$ que a cada juego $(N, v) \in \Gamma^N$ le atribuye un vector de $\mathbb{R}^n$, donde la componente *k-ésima* del vector representa el pago que recibe el jugador $k \in N$.

La función de asignación de pagos φ (N, v) deberá verificar los siguientes axiomas:

Axioma 1: *Eficiencia.*

La función φ: $\Gamma^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ es **eficiente** si se cumple que:

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(N, v) = v(N) \;\forall\; juego(N, v) \in \Gamma^N$$

Esto es, la función debe repartir entre todos los jugadores el pago total del juego, es decir, el que se podría obtener con la gran coalición.

Axioma 2: *Simetría.*

Un par de jugadores $k, j \in N$ serán simétricos para un juego (N, v) si al unirse a una coalición S contribuyen con el mismo valor.

$$v(S \cup \{k\}) = v(S \cup \{j\}), \qquad \forall S \subseteq N, k, j \notin S$$

Una solución es **simétrica** si se verifica que para todo juego $(N, v) \in \Gamma^N$ y todo par de jugadores $k, j \in N$ simétricos en el juego:

$$\varphi_k(v) = \varphi_j(v)$$

Es decir, los jugadores que realicen misma contribución a la coalición, recibirán mismo pago, evitando así que la solución dependa de las características del jugador.

Axioma 3: *Jugador pasivo.*

La propiedad del **jugador pasivo** establece que, si un jugador no produce valor añadido a los demás agentes, este no recibirá ningún pago coalicional.

$$Si\ v(S \cup \{k\}) = v(S)\ \ \forall S \subseteq N, \qquad se\ dará\ que\ \varphi_k(N, v) = v(\{k\})$$

Axioma 4: *Aditividad.*

La solución será **aditiva** si se verifica que para cualquier par de juegos (N, v) y $(N, w) \in \Gamma^N$:

$$\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$$

Este axioma establece que la función de asignación de pagos no varía sea cual sea la descomposición del juego.

Teorema 2.2. *Valor de Shapley.*

El único valor φ en Γ^N que satisface los cuatro axiomas anteriormente mencionados es el valor de Shapley. De manera formal, el valor de Shapley se puede definir como:

$$\varphi_k(N, v) = \sum_{\substack{k \in S \\ S \subseteq N}} q(s)[v(S) - v(S \backslash k)], \qquad \forall k \in N$$

Con $q(s) = \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}$ donde s = |S| y n = |N| hacen referencia al número de jugadores que hay en la coalición S y en el juego, respectivamente.

Definición 11. Valor de Shapley.

El **valor de Shapley** de un juego (N, v) puede interpretarse como la contribución marginal esperada de cada jugador al entrar en una coalición al azar. En efecto, el valor $v(S) – v(S \setminus k)$ es la contribución marginal efectiva de k al incorporarse a S, mientras que el factor q(s) es la probabilidad de que al jugador k le toque incorporarse precisamente a S. **[*6*]**

Resulta significativo destacar que el valor de Shapley es independiente del core y, al no imponer el principio de racionalidad de grupo, no siempre estará incluido en él. Sí se puede asegurar que cuando el juego es convexo, el valor de Shapley estará comprendido dentro del core.

Teorema 2.3. *Valor de Shapley de un juego convexo.*

En un juego convexo, el valor de Shapley se encontrará dentro del core.

3 Los Juegos No Cooperativos. La Teoría de Nash.

Por otra parte, y como se ha mencionado anteriormente, en los juegos no cooperativos, los agentes no disponen de mecanismos para llegar a acuerdos actuando así de manera independiente. A diferencia de los juegos cooperativos, el objetivo principal de este tipo de juegos es modelar la conducta que debe adoptar el jugador para obtener resultados favorables, es decir, determinar qué estrategias deben asumir los jugadores, apoyándose en el comportamiento que se presume que tendrán los demás agentes.

Concretamente, la teoría de los juegos no cooperativos estipula perfiles de estrategias que se dirigen a un **equilibrio**, donde la estrategia especificada para un jugador debe ser óptima para él cuando los demás jugadores asumen las estrategias que les fueron designadas. De esta manera, los jugadores no verán favorable desviarse de la estrategia que le fue recomendada. A este punto se le denomina **Equilibrio de Nash**. [*Véase el apartado 3.2.*]

Según la evolución en el tiempo del propio juego, se pueden diferenciar dos grandes categorías dentro de los juegos no cooperativos: los juegos estáticos y los dinámicos.

En los **juegos estáticos**, también conocidos como simultáneos, los jugadores tomarán la decisión a la vez, sin tener información acerca de lo que los demás han deliberado, como puede ser el ejemplo del famoso "piedra, papel o tijera".

Los **juegos dinámicos** o secuenciales, son aquellos en los que los jugadores actúan de manera progresiva, uno detrás de otro. De este modo, puede darse el caso que el agente conozca de antemano las decisiones que han tomado los anteriores. Entre otros muchos, se puede destacar el caso del ajedrez.

3.1 John Forbes Nash.

Nacido el 13 de junio de 1928 en Bluefield, West Virginia, Estados Unidos, John Forbes Nash Jr. fue un respetado matemático cuyos trabajos en la Teoría de Juegos y los procesos de negociación le llevó a recibir el Premio Nobel de Economía en 1994 junto a Reinhard Selten y John Harsanyi.

Además de los ámbitos mencionados, sus aportaciones revolucionarias en los campos de la geometría, la topología y las ecuaciones diferenciales parciales han sido trasladadas a innumerables áreas, como la economía de mercado, la biología evolutiva, la política y la estrategia militar, entre otras muchas.

En 1945, tras comenzar sus estudios en Ingeniería Química en el Instituto Tecnológico de Carnegie, en Pittsburgh, Pennsylvania, John Nash decide reorientar su formación hacia las matemáticas.

Al finalizar sus estudios en este instituto, es admitido a cursar el doctorado en cuatro universidades; Harvard, Chicago, Michigan y Princeton, incorporándose a esta última en el año 1948. Esta universidad sobresalía en las matemáticas del siglo XX por tener ilustres personajes como Albert Einstein, John von Neumann o Eugene Wigner.

En el año 1949, Nash publica un artículo titulado *Puntos de equilibrio en juegos de n-personas* **[4]** para la prestigiosa revista *Annals of Mathematics*, donde se exponen las nociones esenciales acerca de los juegos no cooperativos y que más tarde actuarían como base para su tesis. Dicha tesis doctoral, que constaba de únicamente 27 páginas, es publicada en el año 1950 y describe los conceptos básicos de estrategias, acciones y comportamientos de agentes que interactúan entre sí contando con información limitada, dando origen al **Equilibrio de Nash**. **[5]**

Tras haber recibido el Premio Nobel de Economía en 1994, le fue concedido en el año 2015 el Premio Abel, junto con Louis Nirenberg, por sus aportes a la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales y sus aplicaciones al análisis geométrico.

John Nash y su esposa fallecen en Nueva Jersey en un accidente de tráfico el 23 de mayo de 2015.

Ilustración 2. John Forbes Nash (1928-2015)

3.2 Equilibrio de Nash.

Definición 12. Equilibrios de Nash.

Los **equilibrios de Nash** se caracterizan por ser la combinación de estrategias para las cuales los jugadores no tienen aliciente alguno para desviar su elección. Tomando en consideración la decisión de los demás, es la mejor selección de las que dispone un agente puesto que un cambio en ella sólo podría acarrear un resultado más desfavorable si los otros jugadores se ciñen a su estrategia.

Existen ciertas condiciones de racionalidad que se deben tener presentes cuando se trabaja con equilibrios de Nash **[5]**:

- Todos los jugadores buscan **maximizar su pago** esperado de acuerdo a los pagos que describen el juego.
- Los jugadores **ejecutan sus estrategias sin errores**. Esta condición establece que un jugador no se vea imposibilitado a implementar su estrategia una vez elegida.
- Los agentes tienen inteligencia suficiente para deducir sus propios equilibrios y los de los demás. Esto representa la **necesidad de información completa**.
- Los jugadores suponen que el hecho de **cambiar su propia estrategia no provocará desviaciones en las estrategias de otros**.
- Existe un **conocimiento común** tanto de las reglas como de los supuestos de racionalidad.

3.3 Determinación del equilibrio de Nash.

La metodología empleada habitualmente para hallar los equilibrios de Nash se constituye por dos etapas:

1. Para **cada jugador**, **localizar** las estrategias que entrañan **mejores pagos** (mejor respuesta) a cada posible combinación de estrategias del resto de agentes.
2. Concretar, de todas las posibles combinaciones de estrategias, cuáles son **simultáneamente mejores respuestas** para **todos los jugadores**.

Retomando el famoso dilema del prisionero, ejemplo dispuesto en la página *7*, se proyecta la matriz de pagos en la *Tabla 2*:

		Prisionero 2	
		Confiesa	Miente
Prisionero 1	Confiesa	**(-8, -8)**	(0, -10)
	Miente	(-10, 0)	(-1, -1)

Tabla 2. Equilibrio de Nash en el Dilema del Prisionero

Como se puede intuir, en el caso del Prisionero 1 (P1), se deben analizar las posibles elecciones del Prisionero 2 (P2), y de manera inversa en el caso del P2.

Si el P2 confiesa, P2 obtendrá un pago bien de -8 o de 0 y si miente, el pago será de -10 o de -1. En este caso, es evidente que P2 elegirá confesar puesto que le supone una mejor respuesta. Si P2 confiesa, P1 puede obtener un pago bien de -8 si confiesa o de -10 si miente. De este modo, se llega a la conclusión de que P1 también confesará.

Si se analiza la situación inversa, es decir, las estimaciones que puede hacer P2 sobre las estrategias de P1, se puede observar fácilmente que se llega a la misma conclusión, que ambos confiesen. De este modo, que ambos confiesen es el equilibrio de Nash en el dilema del prisionero. Ninguno de los dos agentes tiene interés en cambiar su elección teniendo en cuenta lo que para el otro es racional elegir.

Siempre que exista algún equilibrio de Nash, este facilitará la predicción del resultado en juegos finitos. El equilibrio se puede localizar mediante la eliminación de las estrategias dominadas, herramienta que se basa en la supresión de equilibrios de Nash que no son racionales. [*Véase el apartado 3.4 Dominancia en las estrategias.*]

No obstante, en las circunstancias donde los pagos y la eficiencia puedan ser subjetivos, interviniendo aspectos como el ético o social, por ejemplo, se complica en gran medida la determinación del equilibrio.

3.4 Dominancia en las estrategias.

Definición 13. Estrategia dominante.

Una estrategia es **dominante** si es considerada mejor que otra estrategia sin que influya la decisión de los otros jugadores. En la Teoría de Juegos, se pueden encontrar dos clases de dominio estratégico:

- **Estrategia estrictamente dominante**: aquella que aporta mayor utilidad al jugador, sin tener en consideración la estrategia que sigan los demás agentes. Es decir, es siempre la estrategia con mejor respuesta.
- **Estrategia débilmente dominante**: conlleva una misma utilidad para todas las posibles estrategias del otro agente, y superior en algunos casos.

Un **equilibrio de estrategias dominantes** se alcanza cuando todos los agentes que intervienen en el juego siguen su estrategia dominante.

De manera lógica se puede deducir que un equilibrio de estrategias dominantes es siempre un equilibrio de Nash, puesto que al seguir cada agente su estrategia de mejor respuesta, ninguno tendrá incentivo alguno para cambiar de decisión. Sin embargo, no todos los equilibrios de Nash son equilibrios de estrategias dominantes.

La **eliminación de estrategias dominadas** se emplea frecuentemente para facilitar la evaluación del juego. Esta metodología se fundamenta en eliminar para cada agente decisor aquella estrategia que resulte irracional, reduciendo así considerablemente el número de equilibrios en el juego. Este procedimiento resulta sencillo de implementar en el caso de estrategias estrictamente dominantes, pero en el caso de aquellas débilmente dominantes pueden surgir inconvenientes, derivando en un juego que diste mucho del original desde la perspectiva estratégica.

3.5 Estrategias Mixtas.

"Como encontrará en el cálculo multivariable, a menudo hay varias soluciones para cualquier problema dado"

John Forbes Nash

Las **estrategias mixtas** se analizan en la Teoría de Juegos en las situaciones cuando se encuentran varios equilibrios posibles. Esta circunstancia es muy frecuente en juegos de tipo *coordinación.*

Definición 14. Estrategia mixta.

Una **estrategia mixta** es una distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras. Se puede considerar una estrategia pura a una estrategia mixta *degenerada* que asigna toda la probabilidad a una de las alternativas. **[9]**

Se presenta a continuación una estrategia mixta de manera genérica para el famoso juego de *pares y nones*, en el que el jugador 1 gana si tanto el jugador 1 como el jugador 2 eligen números pares (estrategia P de cada uno) o números impares (estrategia N de cada uno), mientras que el jugador 2 gana si ambos eligen estrategias distintas.

Se denominará p a la probabilidad de que el jugador 1 elija sacar un número par (P) y q a la probabilidad de que el jugador 2 elija la estrategia P. Por tanto, (1-p) y (1-q) serán las probabilidades de que el jugador 1 y el jugador 2 elijan la estrategia N, respectivamente. De este modo:

- El perfil de estrategias mixtas del jugador 1 es $\sigma_1 = (p, 1 - p)$.
- El perfil de estrategias mixtas del jugador 2 es $\sigma_2 = (q, 1 - q)$.

La utilidad esperada por el jugador 1 con su perfil de estrategias actual, teniendo en cuenta el del jugador 2 será:

$$U_1 = pq(1) + p(1-q)(-1) + (1-p)q(-1) + (1-p)(1-q)(1)$$
$$= 4pq - 2p - 2q + 10$$

La estrategia que seguirá el jugador 1 dependerá del valor que asigne a p y a q.

Derivando parcialmente respecto a esta variable se puede ver para qué valores el jugador obtendrá una utilidad positiva:

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial p}\right) = 4q - 2 \begin{cases} > 0, & si\ q > 0.5 \\ = 0, & si\ q = 0.5 \\ < 0, & si\ q < 0.5 \end{cases}$$

De este modo, se podrá expresar la estrategia de mejor respuesta del jugador 1 en función de las posibilidades de que el jugador 2 elija cada una de las estrategias:

$$p = \begin{cases} 1, & si\ q > 0.5 \\ cualquiera, & si\ q = 0.5 \\ 0, & si\ q < 0.5 \end{cases}$$

Representando gráficamente dicho perfil de estrategias:

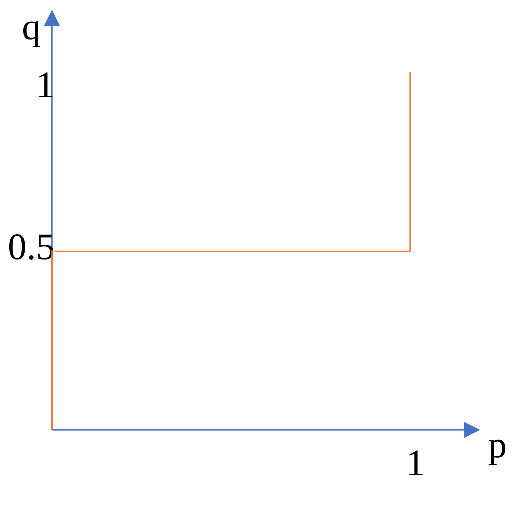

Ilustración 3. Estrategia mejor respuesta del jugador 1

Como se puede interpretar de la *Ilustración 3*, en el caso de que el jugador 1 establezca una probabilidad mayor de 0.5 a que el jugador 2 tome una cierta estrategia, el jugador 1 debería jugar con probabilidad 1 esa misma estrategia, ya que ganará si ambos eligen la P o los dos eligen N. Por otro lado, si piensa que es igual de probable que el jugador 2 elija una estrategia u otra (probabilidad = 0.5), tendrá infinitas respuestas óptimas, esperando la misma utilidad elija la estrategia que elija.

Si, de manera análoga, se analiza la estrategia a seguir por el jugador 2 se obtiene:

$$q = \begin{cases} 0, & si\ p > 0.5 \\ cualquiera, & si\ p = 0.5 \\ 1, & si\ p < 0.5 \end{cases}$$

Estrategia que se puede ver representada en la *Ilustración 4*:

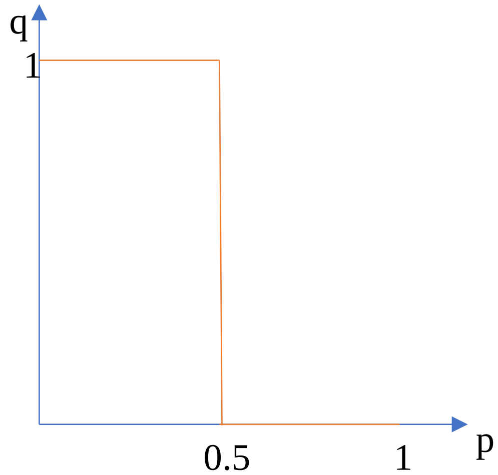

Ilustración 4. Estrategia mejor respuesta del jugador 2

Teniendo las dos estrategias de mejor respuesta, se podrá evaluar si existen o no equilibrios de Nash en estrategias mixtas:

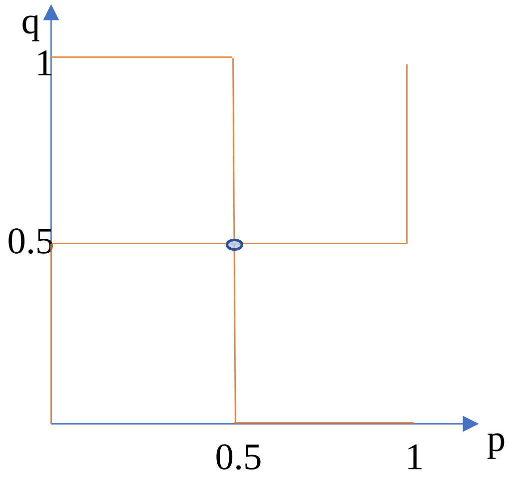

Ilustración 5. Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas

En la *Ilustración 5* se puede observar que existe un equilibrio cuando ambos jugadores otorgan a las dos estrategias puras una misma probabilidad (0.5). De este modo, se podría decir que ambos jugadores están actuando de manera imprevisible.

Un popular ejemplo donde se han de emplear estrategias mixtas es la *guerra de los sexos*.

Ejemplo 3–1. Estrategias Mixtas.

Juan y Paloma son una pareja que está debatiendo acerca de lo que hacer en el fin de semana. Ella prefiere ir al cine en lugar de ir a hacer senderismo, al contrario que Juan. Sin embargo, los dos coinciden en que desean estar juntos.

La matriz de pagos del juego resulta:

		Paloma	
		Cine	Senderismo
Juan	Cine	(1, 2)	(0, 0)
	Senderismo	(0, 0)	(2, 1)

Tabla 3. Matriz de pagos Guerra de los Sexos

En este caso hay dos equilibrios de Nash, que se encuentran subrayados en la matriz de pagos. La manera de abordar este tipo de situaciones es a través de las estrategias mixtas, en las que habrá que estudiar la probabilidad de que el otro jugador escoja cada una de las opciones, y valorar el pago que nosotros recibiríamos ponderándolo con esa probabilidad.

Por un lado, se estima que Paloma elegirá el cine con una probabilidad *r* y el senderismo (1-*r*) y Juan tendrá una probabilidad *q* de elegir el cine y (1-*q*) el senderismo. De este modo, las probabilidades de cada escenario resultan:

- Cine-Cine: qr
- Senderismo-Cine: (1-q)r
- Cine-Senderismo: q(1-r)
- Senderismo-Senderismo: (1-q)(1-r)

Las probabilidades de que Juan elija ir de senderismo serán 2r, que no es más que el producto del pago por la probabilidad y de que se decida por ir al cine es 1-r. Igualando ambas expresiones para ver la frontera entre una estrategia y otra, se deduce que r =1/3.

De manera equivalente, se opera para Paloma y se observa que q =2/3.

Ahora, ambos deben considerar qué valores darle a *q* y *r*. Paloma debe considerar qué voluntad tendrá Juan de valorar su felicidad por encima de la de Paloma. Si le otorga a *r* un valor mayor de 1/3, entonces ambos irán al senderismo, yendo al cine si *r* es menor de 1/3. Si *r* es igual a 1/3, cualquiera de los escenarios podría darse.

El hombre debe estimar q de la misma forma. De este modo, si $q>2/3$, irán al cine; si $q<2/3$, entonces irán de senderismo y si $q=2/3$, podría darse cualquiera.

Por tanto, como se puede observar, es fundamental la correcta estimación de *r* y *q* por parte de ambos.

3.6 Interpretación del equilibrio de Nash como concepto de solución.

La metodología que emplea el equilibrio de Nash como solución a un juego requiere que **las expectativas de cada jugador sobre la conducta del resto de agentes sean correctas**. Dado que los juegos en estudio son de naturaleza estática, no tiene lugar el conocimiento previo de unos jugadores sobre otros. Por tanto, para garantizar que las predicciones de los jugadores coincidan con las estrategias finalmente elegidas por los demás, los agentes pueden hacer uso de diferentes aspectos en los que basar sus pronósticos:

- La **experiencia acumulada** de haberse encontrado en circunstancias de interdependencia estratégica, que pudieran ser semejantes, con otros jugadores, o la información otorgada por otros agentes que se han visto envueltos en esa situación.
- **Comunicación previa** al juego.

En lo que respecta a la comunicación previa al juego, se puede dar la situación en la que los agentes puedan negociar entre ellos. En tal caso, si pactan una cómo se han de comportar de manera colectiva, la estrategia acordada debería ser un equilibrio de Nash para que, de este modo, los agentes involucrados no tengan incentivo alguno de seguir otra estrategia.

No obstante, en la gran mayoría de los juegos, se adoptará como hipótesis básica que las predicciones de los jugadores se fundamentan en la experiencia previa acumulada. Resulta interesante que el agente base sus anticipaciones sobre lo que un competidor convencional decidiría en un contexto de ese tipo, no sobre cómo actuarían oponentes concretos. De este modo, el equilibrio de Nash se puede interpretar como un **estado estacionario** en el que, si todos los agentes intervinientes actúan según la *normal social estable* descrita para sus predicciones, nadie tendrá alicientes para diferir.

Para poder asumir una combinación de estrategias como **solución estable,** ésta debe ser equilibrio de Nash ya que, en caso contrario, se debería examinar el hecho de que, al menos un jugador no estaría aplicando su mejor respuesta según las estrategias de los demás.

Teorema 3.1. *Solución estable de un juego.*

Para ser solución estable a un juego, ésta debe ser un equilibrio de Nash, pero ser equilibrio de Nash no es condición suficiente para que sea solución del juego.

3.7 Existencia del equilibrio de Nash. Unicidad y selección de equilibrios.

Teorema 3.2. *Teorema de Nash.*

Todo juego finito (N, v), en forma normal tiene, al menos, un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Como se ha mencionado anteriormente, es frecuente que un juego tenga más de un equilibrio de Nash, reafirmando así que ser equilibrio de Nash no es una condición suficiente para asumir un conjunto de estrategias como solución a un juego. En esta situación, se pueden encontrar dos importantes enfoques para la elección de la solución:

1. **Incluir conocimiento complementario al recopilado en el juego.** Para abordar un juego, los agentes que intervienen se apartan del contexto real, ignorando así datos que puedan considerarse valiosos para la selección de la solución del juego. Entre otros muchos ejemplos, caben destacar las condiciones éticas o morales, o la experiencia adquirida en situaciones pasadas.
2. **Refinamientos del equilibrio de Nash.** Se pueden aplicar ciertas restricciones adicionales para dar lugar a la *perfección en subjuegos* o el *equilibrio secuencial*.

4 EL EQUILIBRIO DE NASH APLICADO AL POSIBLE CONFLICTO RUSIA-OTAN.

4.1 El conflicto Rusia-Ucrania.

El 24 de febrero de 2022 Rusia emprende acciones militares en diversos territorios ucranianos, entre los que se incluye su capital, Kiev. Se trata de la consecuencia de una prolongada tensión cuya génesis se remonta a 2013 cuando, el entonces presidente prorruso de Ucrania Victor Yanukóvich, frena un pacto de asociación con la Unión Europea (UE) debido a las presiones de Rusia.

El conocimiento de esta decisión generó un malestar general entre la población ucraniana, llevando a manifestaciones violentas que en numerosas ocasiones se saldaron con centenares de víctimas. La intensificación de las protestas y la agitación de los ucranianos condujeron a la huida de Yanukóvich. Mientras, prorrusos y defensores de la unidad de Ucrania se enfrentaban en Crimea, al tiempo que militares rusos camuflados y agentes de la KGB penetraban en la región para imponer su anexión a Rusia.

Ilustración 6. Protestas en contra del líder ucraniano Yanukóvich

El 16 de febrero de 2014 se celebró un referéndum en Crimea, donde venció la opción prorrusa con más del 97% de los votos. Dos días después, el líder del Kremlin firmó la integración de Crimea a su territorio, lo que la comunidad internacional no reconoció. Además, la OTAN paralizó su cooperación con Rusia, y los EEUU y la UE impusieron sanciones. **[*15*]**

En mayo de ese mismo año, lo ocurrido en Crimea se replica en la región ucraniana del Donbás donde, grupos paramilitares prorrusos exigen la integración en Rusia de los territorios de Donetsk y Lugansk, conflicto que no se zanja y acrecienta la tensión entre los dos países de manera considerable durante varios años más.

Ilustración 7. Mapa político de Ucrania.

En mayo de 2019 llega a la presidencia del gobierno de Ucrania Volodímir Zelenski, quien inicia negociaciones con el presidente ruso para reanudar el proceso de paz, llegando a efectuarse medidas como ciertos canjes de prisioneros.

En enero de 2021, Rusia moviliza tropas a sus fronteras con Ucrania y Crimea en lo que, el secretario general de la OTAN, Jens Stoltenberg calificó como *"la mayor acumulación de tropas rusas desde la anexión de Crimea".*

Como muestra de intervencionismo en el conflicto, se firma en agosto de 2021 en Kiev la Plataforma de Crimea, en la que 46 Estados y organizaciones, incluyendo la OTAN, exigen a Rusia la devolución de la península a Ucrania.

A finales del mismo año, las movilizaciones de la milicia rusa en las fronteras con Ucrania se intensifican, con hasta 175.000 soldados según la inteligencia estadounidense.

"La expansión de la OTAN y el desarrollo militar de Ucrania por parte de la Alianza es inaceptable para Rusia", manifestaba Vladimir Putin, lo que muestra que el ataque ruso poco tiene que ver con la protección de la zona del Donbás, sino que existe un trasfondo geopolítico de mayor peso. Los expertos coinciden en señalar que el control sobre Ucrania es vital para la seguridad de Rusia, "*quien no consentiría el acercamiento de la OTAN y la UE al territorio ucraniano, contrario a su objetivo estratégico de neutralizar la soberanía de Ucrania*" señalaba Adriano Bosoni, miembro de la consultora especializada en pronósticos geopolíticos *Rane*.

El 21 de febrero de 2022, el líder ruso firma la adhesión de las regiones de Donetsk y Lugansk y congrega gran parte de las tropas en esta zona, lo que es condenado por EEUU y la UE, que comienzan a orquestar una serie de importantes sanciones a Rusia.

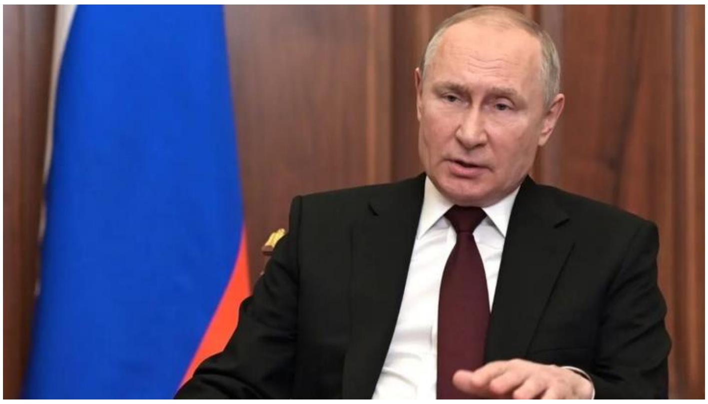

Ilustración 8. Discurso de Vladimir Putin el 21 de febrero de 2022 tras la firma de la adhesión de las regiones del Donbás.

El 24 de febrero, Vladimir Putin anuncia una *"operación militar especial"* en la región del Donbás. Inmediatamente después del discurso, se registran grandes explosiones en el este de Ucrania. Comienza así la invasión de Rusia contra Ucrania.

4.2 Posible enfrentamiento Rusia-OTAN.

Se analizará a continuación una situación hipotética en la que las tensiones existentes entre la nación rusa y la OTAN se ven considerablemente acrecentadas tras el enfrentamiento ruso-ucraniano, llegando a un conflicto entre ambas partes.

4.2.1 Escenario y planteamiento del juego.

En este contexto se supondrá que Rusia, tras la guerra con Ucrania, quisiera anexionar sus antiguos territorios europeos y que dirige un despliegue de su milicia en la frontera con éstos. La OTAN, en respuesta, actúa de manera análoga en las fronteras occidentales de dichos países. Resulta fundamental destacar que, en el caso de que se produzca un ataque por alguno de los bandos, no será este armamento fronterizo el que se utilizará, sino el que cada parte tiene en su reserva.

Una vez detectada la presencia del ejército ruso en la frontera de los países en cuestión, la OTAN puede tomar tres estrategias diferentes:

- **Ignorar** provisionalmente la situación y permitir al ejército ruso permanecer en la frontera.
- Tomar una **medida preventiva** para evitar la llegada de nuevos efectivos rusos hasta que se resuelva la tensión.
- Utilizar armamento y **atacar** con el objetivo de destruir el armamento de Rusia en la frontera.

Se analizan a continuación los diferentes **escenarios posibles**:

1. Si la OTAN decide **ignorar la situación** y permitir la presencia de soldados en la frontera, Rusia tendría dos opciones: atacar a la OTAN en Europa del Este o seguir acumulando tropas para reforzar su fuerza militar, pero sin atacar inmediatamente a la OTAN. Estos escenarios se darán en los casos que más adelante se denotarán como **(R6, O6)** y **(R7, O7)**, haciendo referencia a la elección de Rusia y la OTAN.

2. En caso de que la decisión de la OTAN sea realizar una **medida preventiva** para evitar la llegada de más armamento a la frontera, Rusia podría: atacar directamente a la OTAN para impedir la llegada de más fuerzas, negociar para resolver la situación o hacer caso a las exigencias y retirar las fuerzas de la frontera. Serán los casos **(R3, O3)**, **(R4, O4)**, **(R5, O5).**

3. Por último, si la OTAN opta por **atacar** a Rusia, esta podría responder a esos ataques comenzando así una guerra, o por el contrario retirarse del conflicto al no responder y desmantelar las armas que tiene en la frontera. Se observa en los escenarios **(R1, O1)**, **(R2, O2).**

La opción de negociar tan solo se incluye como respuesta a una medida preventiva ya que, tras un ataque de la OTAN, ya no habría posibilidad de negociar. Además, si la OTAN decide ignorar la situación y permitir la presencia de efectivos rusos en la frontera, a Rusia en ningún caso le interesaría negociar, puesto que optaría por reforzar su presencia. Por último, si ambos se ignoran no harían falta las negociaciones.

4.2.2 Costos y beneficios en cada situación.

A continuación, se detalla el precio y la ganancia que podrían plantearse para cada una de las partes en los distintos contextos.

1. **(O1, R1):** Si la **OTAN ataca** y **Rusia responde al ataque**, la OTAN incurriría en un costo **C1** por atacar sin negociar, **C2** por mover el ejército y **C3** por tomar la iniciativa armamentística en el conflicto. También incurriría en un costo de **C4** por el ataque a su territorio y solo se beneficiaría del hecho de mantener su ejército de la frontera intacto **B1**. Rusia sólo tendría costos **C2** por mover al ejército, **C5** por la acumulación de tropas en la frontera y **C4** por un ataque a su territorio.
2. **(O2, R2):** Si la **OTAN ataca** y **Rusia se retira**, la OTAN incurriría en un costo **C1** por atacar sin negociar, y **C3** por tomar la iniciativa armamentística en el conflicto y solo se beneficiaría del hecho de mantener su ejército en la frontera **B1**. Rusia obtendrá **B2** por no responder al ataque y evitar una guerra, pero por el mismo motivo, debido a la pasividad de la decisión, sufrirá **C6.** Además, habrá retirado a sus efectivos de la frontera con un coste **C7** y su país tendría que asumir las consecuencias del ataque a su propio territorio **C4**.
3. **(O3, R3):** Si la **OTAN** toma una **medida preventiva** y **Rusia responde atacando**, la OTAN tendrá un beneficio **B3** por tomar una decisión acorde a la situación y **B1** por mantener su ejército de la frontera intacto, pero sufrirá un coste **C4** por el ataque recibido. Por otro lado, Rusia asumiría costes por una decisión precipitada **C1** y por ser el primero en atacar **C3**, con un beneficio **B1** por tener su ejército intacto. Tendría además un coste **C8** debido al posible contraataque de la OTAN.

4. **(O4, R4):** En caso de que la **OTAN** tome una **medida preventiva** y **Rusia quiera negociar**, la OTAN obtiene un beneficio de **B3** por tomar una decisión acorde a la situación y **B1** por mantener su ejército de la frontera intacto, mientras que Rusia únicamente obtendrá **B1** por mantener su ejército intacto en la frontera.
5. **(O5, R5):** Si la **OTAN** toma **medidas preventivas** y **Rusia se retira**, la primera obtiene los mismos beneficios que en el caso anterior y Rusia paga por amedrentarse y por retirar sus efectivos de la frontera **C9** y **C10**.
6. **(O6, R6):** Si la **OTAN ignora** la situación y **Rusia ataca**, la OTAN tendrá un costo por pasividad **C6** y **C4** al recibir el ataque, y obtendrá **B1** por mantener a su ejército en la frontera. Rusia tendría un coste **C3** por iniciar el ataque y **C8** por la posible réplica o contraataque. Conseguirá **B1** por mantener el ejército fronterizo.
7. **(O7, R7):** Si la **OTAN ignora** la situación y **Rusia no ataca**, la OTAN conseguirá **C6** y **B1** por los mismos motivos que en el caso anterior pero no recibiendo el ataque y Rusia obtendrá **B1** por conseguir mantener su ejército fronterizo.

Resumen costos y beneficios:

- C1: coste por atacar sin sopesarlo o sin negociar
- C2: coste por movilizar y usar al ejército.
- C3: coste por tomar la iniciativa del ataque.
- C4: coste por el ataque al propio territorio.
- C5: coste por la acumulación de tropas al atacar.
- C6: coste por pasividad en la acción.
- C7: coste por pérdida del ejército de la frontera.
- C8: coste por posible contraataque.
- C9: coste por amedrentarse.
- C10: coste por retirar los efectivos de la frontera.
- B1: beneficio por conservar el ejército de la frontera.
- B2: beneficio por no responder a un ataque. Al igual que en el caso del beneficio 3, esta es una estrategia encaminada a la no guerra.
- B3: beneficio por tomar una decisión acertada. No entrar en guerra siempre es una decisión acertada. Al ser Rusia la postura iniciadora de la tensión, en ningún caso podrá obtener este beneficio.

Se pueden observar las diferentes situaciones de manera resumida en forma estratégica en la *Tabla 4*:

Costos y Beneficios	**OTAN**	**RUSIA**
(O1, R1) – OTAN ataca y Rusia responde	-C1-C2-C3-C4+B1	-C2-C4-C5
(O2, R2) – OTAN ataca y Rusia se retira	-C1-C3+B1	-C4-C6-C7+B2
(O3, R3) – OTAN med. prev. y Rusia ataca	-C4+B1+B3	-C1-C3-C8+B1
(O4, R4) – OTAN med. prev. y Rusia negocia	B1+B3	B1
(O5, R5) – OTAN med. prev. y Rusia se retira	B1+B3	-C9-C10
(O6, R6) – OTAN ignora y Rusia ataca	-C4-C6+B1	-C1-C3-C8+B1
(O7, R7) – OTAN ignora y Rusia no ataca	-C6+B1	B1

Tabla 4. Tensión Rusia-OTAN en forma estratégica.

4.2.3 Equilibrios de Nash en el conflicto Rusia-OTAN

1. Si la **OTAN** decide **atacar**, que es el caso de los escenarios (O1, R1) y (O2, R2), Rusia obtendría distintos pagos en función de su decisión. En el caso de que Rusia decida responder al ataque, incurriría en el coste por usar el ejército, el ataque al propio territorio y el coste de la acumulación de las tropas. Sin embargo, si decide retirarse, sufrirá el ataque al propio territorio, el coste por pasividad y el coste por el debilitamiento de la frontera, pero obtendrá el beneficio de no responder al ataque. Parece evidente que, en cualquier caso, esta segunda opción es más rentable que el hecho de entrar en guerra, debido a su debilidad social y económica. Por ello, **Rusia** decidiría **retirarse**.

Si se valorasen principalmente los ***costes bélicos***, de nuevo **Rusia,** se decantaría por la **retirada**, ya que en ambos contextos se encontrará con un pago C4, pero atacando sufriría también C2.

Una valoración fundamentada en los *costes y beneficios de seguridad* no sería suficiente para tomar una decisión sin acudir al resto de categorías, puesto que en ambos contextos se vería debilitada la frontera, no pudiendo obtener B1.

2. Suponiendo que la **OTAN** opte por una **medida preventiva**, Rusia debe elegir entre los pagos de las **situaciones (O3, R3), (O4, R4) y (O5, R5)**. Independientemente de la valoración que haga de los costes y beneficios, **Rusia** elegirá siempre ***negociación*** para obtener el pago del contexto 4. De esta forma, obtiene B1 y evita los costes bélicos o de imagen internacional que podría sufrir en las hipótesis (O3, R3) y (O5, R5).

3. Por último, si la **OTAN** opta por ***ignorar*** los acontecimientos, Rusia tomará su decisión en función de la valoración que haga de los pagos en los **sucesos (O6, R6) y (O7, R7)**. Ya sea el caso en el que se le otorga mayor importancia a los costes bélicos que a los de imagen internacional, como al inverso, se observa que los costes bélicos son muy considerables en el escenario **(O6, R6)**, siendo ninguno en el (O7, R7).

En el escenario (O6, R6), Rusia sufre el coste de usar el arsenal sin sopesarlo, el de comenzar la guerra primero, el coste por el posible contraataque, pero consigue beneficios por mantener su ejército, no encontrando resistencia y mantener sus fronteras, por lo que parece lógico pensar que el líder ruso se decantaría por esta situación. Esto se vería fuertemente apoyado por la historia, que es una prueba fehaciente del éxito que tuvieron campañas similares en el pasado.

Sin embargo, la situación política es distinta a la dispuesta en aquellos contextos históricos, puesto que la OTAN ha consolidado su identidad y unión, convirtiéndose en un bloque realmente fuerte y haciendo, de este modo, que el contraataque esté asegurado. Las fronteras de los países de la OTAN más poderosos están lejos del alcance del Kremlin y estos parecen dispuestos a no permitírselo. Se entraría en un conflicto de magnitudes mundiales con una cantidad insostenible de pérdidas, tanto poblacionales como económicas.

Además, analizando los costes y beneficios de seguridad del escenario (O7, R7), se observa que se obtiene igualmente el pago de B1. De este modo, si la OTAN ignora los acontecimientos, **Rusia** se decantará por **reforzar su frontera sin atacar**, evitando así los grandes costes en los que incurriría en la situación (O6, R6).

4.2.4 Conclusión conflicto Rusia-OTAN.

En primer lugar, se puede observar que Rusia seguirá siempre el mismo perfil de estrategias, independientemente de la categoría de costes y beneficios a la que le otorgue mayor valor. Si la OTAN ataca, se retirará; si la OTAN realiza una medida preventiva, se abrirá a negociaciones; si la OTAN ignora lo ocurrido, no atacará.

Tras analizar qué decisiones serían las más idóneas para Rusia en cada caso, la decisión entre los tres caminos que pudiera elegir la OTAN se reduce en la elección entre tres únicas situaciones: **(O2, R2), (O4, R4) y (O7, R7)** ya que Rusia replicaría en la misma medida.

La OTAN nunca podrá tomar una decisión valorando únicamente los *costes y beneficios de seguridad*, pues en todos los pagos recibe **B1** y nunca sufre **C10**. Sin embargo, como se puede observar fácilmente en la *Tabla 4*, de seleccionar la estrategia (O2, R2), incurriría en una mayor cantidad de costes. Parece que sus situaciones favorables son, por tanto, la (O4, R4) y la (O7, R7). Ninguna de estas situaciones contempla que, al acabar el juego, las tropas de la OTAN hayan sido retiradas por lo que se deben valorar también otro tipo de costes y beneficios.

Prestando atención a los ***costes bélicos***, ninguno de los tres pagos posibles destaca por encima del resto, pues en ninguna de las tres situaciones la OTAN recibe un ataque primero, ni se arriesga especialmente a un futuro ataque. Sin embargo, en el escenario (O7, R7) se sufre un coste por pasividad en la acción, el cual no tiene lugar de darse el contexto (O4, R4). Parece entonces evidente que como se obtendrían más beneficios es con el **escenario (O4, R4)**.

Teniendo todo esto en cuenta, el equilibrio final del juego será siempre **[Prevención, Negociación]** con pagos **[B1+B3, B1]**.

5 JUEGOS DE STACKELBERG APLICADO AL POSIBLE CONFLICTO RUSIA-OTAN.

5.1 Competencia de Stackelberg.

El modelo económico de liderazgo de Stackelberg se caracteriza por ser un tipo de juego no cooperativo y de competencia imperfecta. Este modelo fue por primera vez descrito en 1934 por el economista alemán Heinrich Freiherr von Stackelberg en su obra *Marktform und Gleichgewicht (Estructura de Mercado y Equilibrio).*

Ilustración 9. Heinrich Freiherr von Stackelberg.

Supone un cambio de paradigma en lo referente al análisis de las estructuras de mercado, fundamentalmente de los duopolios ya que se fundamenta en hipótesis iniciales distintas a los modelos anteriores de Cournot o de Bertrand, llegando también a conclusiones diferentes. Por tanto, la competencia de Stackelberg se centra en juegos bipersonales con dos empresas de bienes homogéneos. Sin embargo, este modelo se ha extendido a una serie de campos donde se mantiene la relación líder-seguidor.

El juego de Stackelberg es de tipo secuencial existiendo en él la figura de un *líder* que, por tener una mejor posición en el mercado o por tener mayor poder, decidirá qué cantidad q_1 ofertará en primer lugar y la de un *seguidor*, cuya estrategia a seguir se basará en la elegida por el otro, optando por ofertar q_2. Resulta importante destacar que el líder es consciente de que el seguidor tendrá en cuenta sus decisiones y además, tiene conocimiento de cómo actuará el seguidor sea cual sea su elección.

Definición 15. Duopolio de Stackelberg en base a la cantidad.

De manera formal se puede definir un **juego de Stackelberg** en base a la cantidad de la siguiente manera:

1. La empresa 1 (líder) ofrece una cantidad $q_1 \geq 0$.
2. La empresa 2 (seguidor) analiza q_1 y entonces ofrece una cantidad $q_2 \geq 0$.
3. Los beneficios de la empresa *i* vendrán dados por la siguiente función:

$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i[P(Q) - c]$$

teniendo en cuenta que $P(Q) = a - b \cdot Q$ es el precio de equilibrio del mercado tomando, siendo a y b constantes positivas y el cociente $\frac{a}{b}$ representa la cantidad máxima que demanda el mercado. Por otro lado, $Q = q_1 + q_2$ y c el coste marginal de producción, que se asumirá igual para las dos empresas.

5.2 Equilibrio en un juego de Stackelberg.

Para encontrar un equilibrio en el juego se debe recurrir a la *inducción hacia atrás*, al igual que en cualquier juego secuencial, es decir, analizando en primer lugar la decisión del seguidor.

Es lógico que la elección de q_2 por parte del seguidor será aquella que maximice sus pagos teniendo en cuenta q_1, lo que sería la estrategia de mejor respuesta del jugador 2, $R_2(q_1)$, para la elección dada del líder.

Si se maximiza la función de beneficio de la empresa 2 se obtiene que la mejor respuesta del seguidor es:

$$MR_2(q_1) = \left[\frac{a-c}{2b} - \frac{q_1}{2}\right]$$

Ahora el líder, anticipando la mejor respuesta del seguidor, procurará maximizar sus beneficios.

Maximizando ahora la función beneficio del jugador 1, con $q_2 = MR_2$, se llega a que la cantidad óptima a producir por la empresa líder es:

$$q_1^* = \frac{a-c}{2b}$$

De este modo, la respuesta óptima, y por tanto el valor en el equilibrio de la cantidad a producir por la empresa seguidora es:

$$q_2^* = \frac{a-c}{4b}$$

El equilibrio perfecto del juego es el **equilibrio de Stackelberg.** Resulta evidente que la empresa líder obtiene mejores resultados que la seguidora, ya que puede manipularla estratégicamente. De este modo, el beneficio obtenido por cada una de las empresas será:

$$\pi_1^{eq} = \frac{(a-c)^2}{8b} \quad \pi_2^{eq} = \frac{(a-c)^2}{16b}$$

5.3 Posible enfrentamiento Rusia-OTAN.

5.3.1 Escenario y planteamiento.

Supóngase que, al igual que en el caso anterior, los agentes que intervienen en el juego son el país ruso y la OTAN. Rusia, que tomará el rol de *líder*, plantea una serie de requisitos económicos y territoriales para detener cualquier acción armada:

1. **Ucrania rechazaría** todos los objetivos de ingresar a cualquier **bloque**.
2. Se debería reconocer a **Crimea como territorio ruso**.
3. Reconocer que Donetsk y Lugansk son estados independientes.

5.3.2 Análisis de los escenarios y equilibrio.

En lo que respecta al segundo requisito, **el reconocimiento de Crimea como territorio ruso**, se debe evaluar la trascendencia que pudiera tener en la economía de Europa. Los mercados europeos podrían sufrir pérdidas modestas y pasajeras por el enfriamiento de las relaciones con Moscú, dados los estrechos lazos comerciales. El país alemán sería el más afectado puesto que cuenta con más de 6000 empresas operando en Rusia.

Sin embargo, los economistas prevén que dichos efectos serán limitados. Un analista de Berenberg[1], Holger Schmieding, estima que el golpe para el crecimiento económico de Alemania sería, a lo sumo, del 0.1% a 0.2% en los próximos 12 meses, suponiendo que la crisis se limite a Crimea. Esto no afectaría en absoluto a la recuperación de Europa.

[1] Berenberg Bank: Institución financiera multinacional alemana centrada en la banca privada y de inversión

En cuanto al tercero de los requisitos, **reconocer que Donetsk y Lugansk son estados independientes**, los ministros de Defensa de la OTAN concluyeron que el reconocimiento de la independencia de las regiones separatistas de Donetsk y Lugansk, en el este de Ucrania, por parte de Rusia, supondría otra violación flagrante de la integridad territorial y la soberanía del país.

Ante la propuesta de Rusia, la OTAN opta por aceptar el primer requisito, **no llegando a incorporarse Ucrania al bloque**, pero no accede a los restantes. De hecho, este primer requisito podría no interesar a la OTAN por el conflicto latente con Rusia que se originaría y prolongaría en el tiempo.

Por la parte del bando ruso, el coste económico resultaría muy considerable. Hay ciertas interpretaciones que indican que esta región del este de Ucrania puede ser la razón del conflicto entre ambos países. Otras señalan que simplemente es una zona industrializada sin mayor valor económico, y otros consideran que es un enclave estratégico que tiene su importancia en un posible corredor con salida al mar de Azov. Mientras que, según algunos estudiosos, su población es prorrusa, para otros, aunque el ruso sea el idioma mayoritario, se trata de una población en mayor medida a favor de la entrada de Ucrania en la OTAN y de un acercamiento a la Unión Europea.

Se considera que una situación de equilibrio sería que Ucrania, en su totalidad, fuese un país independiente que pudiese comerciar libremente con ambos bloques. Esto es factible debido a la riqueza en el sector primario que tiene. Además, ambos bloques podrían comprometerse a una modernización del país, aumentando así su calidad de vida y haciéndole competitivo frente a otras economías. El coste de esta situación de equilibrio se denotará por **P**.

Evidentemente, esto conllevará un coste marginal tanto para el bloque ruso como para la OTAN, al que se le llamará **c**. De este modo, el coste de cada uno de los bandos será:

- Rusia: $q_1(P-c)$
- OTAN: $q_2(P-c)$

Tomando $P(q_1, q_2) = a-b(q_1+q_2)$ se llegaría al equilibrio perfecto del juego:

$$\pi_1^{eq} = \frac{(a-c)^2}{8b} \quad \pi_2^{eq} = \frac{(a-c)^2}{16b}$$

A continuación, se describirá el procedimiento empleado para asignar valores a las demás variables.

1. ¿Cuánto le costaría a **Rusia**?

Según un informe realizado por la CESCE[2], empresa de gestión de riesgo comercial, las dos provincias del Donbás suponen más del 10% del PIB del país ucraniano.

Acorde con lo dispuesto en los datos macroeconómicos del periódico *Expansión*, el PIB de Ucrania en 2020 se situaba en 136,272 miles de M€.

De este modo, se puede suponer que el coste, o lo que dejaría de ganar Rusia, si esta región siguiera perteneciendo a Ucrania sería de alrededor de **14 mil M€/año**.

2. ¿Cuánto le costaría a la **OTAN**?

Según lo dispuesto por la OTAN, la contribución de los países miembros se establece de acuerdo a una fórmula basada en el Ingreso Nacional Bruto (INB) de la nación.

El INB de Ucrania se sitúa en 159.545,80 M€ según el *Banco Mundial*, organización multinacional especializada en finanzas y asistencia. En este caso, el país miembro con un INB más cercano al ucraniano es Hungría, con 151.620,68M€, siendo el de Ucrania un 5.227% mayor.

El presupuesto anual de la OTAN es en torno a 2500 M€. Si de ello, según se recoge en la página web oficial de la organización, Hungría aporta un 0.7595% del presupuesto, se podría estimar el aporte de Ucrania en el 0.7992% del presupuesto anual, siendo esto unos 19.98M€/año.

[2] CESCE (Compañía Española de Seguros de Crédito a la Exportación)

Además, todos los miembros deben aportar a la Defensa del bloque, cuyo objetivo está estipulado en un 2% del PIB de cada país, siendo aproximadamente 2,725 miles de M€ para el caso ucraniano.

De este modo, el total que le supondría a la OTAN el no ingreso de la nación ucraniana al bloque sería en torno a **2,74498 miles M€/año**.

Por consiguiente, se estipulan unos valores de **q1=14 y q2=2,7** (en miles de millones de euros al año).

Para el cálculo del valor de **a** se debe analizar el poder económico de Ucrania en el caso de la situación de equilibrio (país independiente). En 2020, Ucrania fue la economía número 55 del mundo en términos de PIB, el número 46 en exportaciones totales, el número 47 en importaciones totales, el número 123 economía en términos de PIB per cápita y el número 42 en economía más compleja según el Índice de Complejidad Económica (ECI).

Las principales **exportaciones** de Ucrania son aceite de girasol, algodón, trigo y materiales férreos. De dichas exportaciones[3], gran parte tienen como destino China (7,1 miles de M€ a fecha de 2020), Rusia (2,706 MM€), y países de la OTAN, como Polonia (3,273 MM€), Turquía (2,436 MM€), Alemania (2,072 MM€), Italia (1,929 MM€), Holanda (1,802 MM€), Hungría (1,263 MM€), España (1,260 MM€), Estados Unidos (1,114 MM€), Rumanía (0,932 MM€), República Checa (0,878), Eslovaquia (0,864 MM€), Bélgica (0,604 MM€), Reino Unido (0,584 MM€), Francia (0,541 MM€). Esto, sumado a lo importado al resto de países miembros da un valor de 20,176 MM€. Esto, sumado a lo proveniente de Rusia, determina un valor de **a** de **22,882 MM€**.

[3] Datos de 2020 ofrecidos por el Ministerio de Industria, Comercio y Turismo español.

El valor de **c** será el coste medio de la producción de los principales productos exportados: aceite (2,33€/l), algodón (1,4€/h), trigo (2,8€/h), férreos (1,125€/t).

$$\boldsymbol{c} = \frac{2{,}33 + 1{,}4 + 2{,}8 + 1{,}125}{4} = \mathbf{1{,}91}$$

El cociente $\frac{a}{b}$ representa la cantidad máxima que demanda el mercado. Por tanto, en este caso, se considerará **b = 1**.

De este modo: $P(Q) = a - b \cdot Q = 22{,}882 - (14 + 2{,}7) = 6{,}182$

Los costes actuales de cada bloque serían:

$$\boldsymbol{\pi_{Rusia}} = 14 \cdot (6{,}182 - 1{,}91) = \mathbf{59{,}81}\boldsymbol{MM}\text{€}/\boldsymbol{a}\text{ñ}\boldsymbol{o}$$

$$\boldsymbol{\pi_{OTAN}} = 2{,}7 \cdot (6{,}182 - 1{,}91) = \mathbf{11{,}53}\ \boldsymbol{MM}\text{€}/\boldsymbol{a}\text{ñ}\boldsymbol{o}$$

En el equilibrio, las pérdidas de cada bloque serían:

$$\boldsymbol{\pi^{eq}_{Rusia}} = \frac{(22{,}882 - 1{,}91)^2}{8 \cdot 1} = \mathbf{54{,}98}\ \boldsymbol{MM}\text{€}/\boldsymbol{a}\text{ñ}\boldsymbol{o}$$

$$\boldsymbol{\pi^{eq}_{OTAN}} = \frac{(22{,}882 - 1{,}91)^2}{16 \cdot 1} = \mathbf{27{,}49}\ \boldsymbol{MM}\text{€}/\boldsymbol{a}\text{ñ}\boldsymbol{o}$$

En este caso, **Rusia perdería 54,98 MM€** y la **OTAN** la mitad, **27,49 MM€.** Se puede apreciar indiscutiblemente que al bloque de la OTAN no le interesaría cambiar la situación actual en la que, por poder de influencia y por los estrechos lazos con Ucrania, goza de ventajas económicas. No es así el caso de Rusia, al que le interesaría llegar al nuevo equilibrio para poder así ahorrar cerca de 5 MM€.

A este costo económico se le suman otros intereses ideológicos y estratégicos que deberían también tenerse en cuenta, así como los conflictos territoriales ya existentes que podrían desencadenar en decisiones no tomadas desde la lógica del juego.

6 CONCLUSIÓN

La cuestión principal que puede inferirse de la memoria es si realmente existe una herramienta que pueda evitar un conflicto bélico. Concretamente, se ha analizado un posible conflicto entre Rusia y la OTAN, tras el actual enfrentamiento entre el país ucraniano y el Kremlin.

Es evidente que prevenir dichas pugnas no está en poder de una teoría, sino en el comportamiento que puedan tener los agentes involucrados. No obstante, la Teoría de Juegos facilita medios a cada una de las partes para determinar un perfil de estrategias más racional, con el que procurar impedir que las repercusiones del conflicto resulten en la devastación.

Según lo abordado en el primero de los casos, del juego se extraen tres distintos equilibrios de Nash. Realizando un análisis de los costes y beneficios de seguridad y de los costes bélicos se llega a la conclusión que la situación más favorable para ambos bloques sería la de ***tomar medidas preventivas*** por parte de la **OTAN** y la de ***entrar en negociaciones*** por parte del **bloque ruso**. De este modo, la **OTAN** obtendría un pago de **B1+B3** y **Rusia** obtendría **B1**, siendo B1 el beneficio de la seguridad de mantener el ejército fronterizo y B3 el obtenido por tomar la decisión acertada de no entrar en guerra.

En el segundo de los casos, tras analizar tres distintos escenarios respecto a la soberanía de Ucrania, el juego de Stackelberg lleva a un equilibrio en el que este **país** es **independiente** tanto de Rusia como de la OTAN. En este equilibrio, el bando ruso tendría unos costes de **54,98 MM€** y la **OTAN** la mitad, **27,49 MM€.**

En este contexto resulta evidente que, si no se van tomando medidas encaminadas a la negociación, la destrucción mutua parece ineludible.

En este sentido la Teoría de Juegos ha proporcionado unas directrices que, de manera lógica, están dirigidas a evitar una catástrofe. Sin embargo, no se ha entrado en detalle en las actitudes que pudieran tener los dirigentes de ambos bloques que, movidas por sentimientos patrióticos o emociones, pudieran tomar decisiones que estuvieran lejos de la racionalidad.

7 REFERENCIAS.

1. DESWANN, A. Coalition Theory and Cabinet Formations. San Francisco: Jossey- Bass, 1973, No. 347, p. 23.

2. MCKELVEY, R.D., ORDESHOOK, P., WINNER, M. The Competitive Solution for n-Person Games without Transferable Utility with an Application to Committee Games. En: *American Political Science Review*. 1978, Vol.72, No.2, pp. 599-615.

3. MORGENSTERN, O., VON NEUMANN, J. *Theory of games and economic behavior (*2nd rev. ed.*)*. Princeton university press, 1947.

4. NASH, J. Equilibrium points in N-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences* USA, 1950, Vol. 36, pp. 48–49.

5. NASH, J. Non-cooperative games. En: *Annals of Mathematics,* 1951, Vol. 54, No. 2, pp. 286-295.

6. NASH, J., SHAPLEY L.S., BOHNENBLUST, H.F. *A simple three-person poker game*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1950.

7. SCHOFIELD, N. The Bargaining Set in Voting Games. En: *Behavioral Science*. Colchester, Inglaterra. 1980, Vol. 25, No. 2, pp. 120-129.

8. VANEGAS DE MEDINA, M., PASCAL PINILLO J. *Equilibrio de Nash y resolución de conflictos.* En: *Revista de Ciencias Sociales*. 2014, Vol. 20, No. 4.

9. WEIBULL J. *Evolutionary Game Theory*. En: MIT Press, 1995.

10. Von Neumann, J., & Morgenstern, O. (1928). *On the Theory of Parlor Games* [Ebook] (2nd ed., pp. 730-761). American Economic

Association. Accedido el 5 de marzo de 2022, en https://www.jstor.org/stable/2729025?origin=JSTOR-pdf.

11. Enric Ricart, J. (1988). *Una Introducción a la Teoría de Juegos* [Ebook] (pp. 6-17). Universidad de Navarra. Accedido el 9 de marzo de 2022, en https://media.iese.edu/research/pdfs/DI-0138.pdf.

12. Faraldo Jarillo, J. (2022). *El conflicto entre Rusia y Ucrania explicado con sencillez*. The Conversation. Accedido el 7 de marzo de 2022, en https://theconversation.com/el-conflicto-entre-rusia-y-ucrania-explicado-con-sencillez-177857.

13. Gómez-Esteban, P. (2011). *Teoría de juegos XXIV – La guerra de sexos (y II) | El Cedazo*. Eltamiz. Accedido el 20 de marzo de 2022, en https://eltamiz.com/elcedazo/2011/04/25/teoria-de-juegos-xxiv-la-guerra-de-sexos-y-ii/#footnote_0_11128.

14. Shy, O. (1995). *Industrial Organization: Theory and Applications* [Ebook] (pp. 219-294). Massachusetts Institute of Technology. Accedido el 26 de marzo de 2022, en https://kupdf.net/download/oz-shy-industrial-organization-theory-and-applications_5af6961ce2b6f5ea7d83b044_pdf.

15. EL PAÍS INTERNACIONAL (2022). *¿Cuál es el origen del conflicto entre Rusia y Ucrania? Fechas clave de la guerra*. EL PAÍS. Accedido el 15 de marzo de 2022, en https://elpais.com/internacional/2022-03-01/origen-del-ataque-de-rusia-a-ucrania.html.

16. Mizokami, K. (2022). *¿Por qué Rusia ha declarado la guerra a Ucrania?*. Esquire. Accedido el 18 de marzo de 2022, en https://www.esquire.com/es/tecnologia/a38474372/por-que-rusia-invadir-ucrania-guerra/.

17. Stokel-Walker, C. (2015). *¿Qué es exactamente la teoría de juegos? - BBC News Mundo*. BBC News Mundo. Accedido el 7 de marzo de 2022, en https://www.bbc.com/mundo/noticias/2015/02/150220_teoria_de_juegos_que_es_finde_dv.