ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13

Caracterizando la práctica matemática de demostrar de una investigadora en matemáticas

Characterizing the mathematical proving practice developed by a research mathematician

Aurora **Fernández-León**[*]
ORCID iD 0000-0002-6780-093X
José María **Gavilán-Izquierdo**[**]
ORCID iD 0000-0002-3369-5377

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia que tiene por objeto caracterizar cómo construyen conjeturas y demostraciones matemáticas los investigadores en matemáticas cuando investigan. Desde la filosofía de las matemáticas y la propia educación matemática, son cada vez más numerosas las recomendaciones que sugieren estudiar a estos investigadores y, en concreto, sus prácticas matemáticas, ya que se entiende que un conocimiento adecuado y preciso de las mismas supone una muy valiosa fuente de información para al diseño de la instrucción en matemáticas. Este estudio pone el foco en la práctica matemática de demostrar y tiene como objetivo avanzar en la caracterización de las actividades matemáticas que desarrolla una investigadora en matemáticas cuando construye demostraciones matemáticas. La metodología de este trabajo es cualitativa. Concretamente, este estudio forma parte de un estudio de casos con una investigadora en matemáticas que desarrolla su investigación en análisis matemático. La recogida de datos empíricos se desarrolló durante cuatro entrevistas semiestructuradas, que fueron grabadas. El presente estudio, que se ha llevado a cabo en dos fases, ha permitido mostrar qué usa y qué crea (en términos de RASMUSSEN *et al*., 2005) la informante del caso cuando construye demostraciones matemáticas. Estos hallazgos resaltan el importante papel que juegan los ejemplos en esta práctica matemática y ponen de manifiesto cómo tales ejemplos facilitan la transición entre lo empírico y lo deductivo. Además, los resultados de este trabajo se han utilizado para caracterizar las demostraciones matemáticas basadas en ejemplos genéricos en un contexto de investigación.

Palabras clave: Demostrar. Usar y Crear. Estudio de Caso. Investigador en Matemáticas.

Abstract

This study constitutes part of a wider research project that aims to characterise how research mathematicians construct conjectures and mathematical proofs whilst carrying out research. From the philosophy of mathematics and mathematics education itself, a growing number of recommendations suggest studying the community of mathematics researchers and, in particular, the mathematical practices of these professionals, since it is understood that pertinent and accurate knowledge of these practices forms an essential source of information for the design of mathematics instruction. This paper focuses on the mathematical practice of proving and aims to advance in the characterisation of the mathematical activities undertaken by a research mathematician when constructing mathematical proofs. A qualitative methodology is used herein. Specifically, this work forms part of a case study on a female research mathematician who carries out research in the field of mathematical analysis. The empirical

[*] Licenciada en Matemáticas. Universidad de Sevilla (US). Profesora Contratado Doctor Interino de la Universidad de Sevilla (US), Sevilla, España. E-mail: aurorafl@us.es.
[**] Licenciado en Matemáticas. Universidad de Sevilla (US). Profesor Titular de Universidad de la Universidad de Sevilla (US), Sevilla, España. E-mail: gavilan@us.es.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13

data collection was carried out in this case study via four semi-structured recorded interviews. The present study, which was carried out in two phases, has revealed what the participant in this study uses and creates, in the terms of Rasmussen *et al*. (2005), when constructing mathematical proofs. These findings highlight the essential role examples play in this mathematical practice and show how such examples facilitate the transition between empirical and deductive reasoning. Furthermore, the results of this work have been employed in the characterisation of mathematical proofs based on generic examples in a research context.

Keywords: Proving. Using and Creating. Case Study. Research Mathematician.

1 Introducción

El presente estudio forma parte de una investigación más amplia (comenzada en FERNÁNDEZ-LEÓN; GAVILÁN-IZQUIERDO; TOSCANO, 2021) que pretende caracterizar las prácticas matemáticas de conjeturar y demostrar de los investigadores en matemáticas. Con el término *prácticas matemáticas* se hace, aquí, referencia a las actividades matemáticas que llevan a cabo estos investigadores cuando construyen conocimiento matemático.

El interés de esta investigación por las prácticas matemáticas de los investigadores en matemáticas se justifica por la perspectiva sociocultural de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que adopta la investigación, que no es otra que la participación periférica legítima de Lave y Wenger (1991). Aunque esta perspectiva no es exclusiva de las matemáticas, bajo sus lentes se entiende que un individuo aprende matemáticas cuando se involucra en las tareas profesionales de los investigadores en matemáticas cuando construyen conocimiento matemático. Caracterizar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, en estos términos, invita a poner el foco en esta comunidad de profesionales y, en concreto, en sus prácticas matemáticas.

En las últimas décadas, diferentes colectivos profesionales han destacado la importancia de las prácticas matemáticas. Como se desprende de algunos trabajos sobre filosofía de las matemáticas (ABERDEIN; INGLIS, 2019; ABERDEIN; RITTBERG; TANSWELL, 2021; ERNEST, 2018; HAMAMI; MORRIS, 2020; SRIRAMAN, 2020), el debate sobre el papel y la relevancia de estas prácticas es de actualidad, si bien es cierto que el interés por las prácticas matemáticas desde la filosofía viene de años atrás (LAKATOS, 1976; POLYA, 1945; WILDER, 1952).

Desde la educación matemática, son numerosas las organizaciones estatales – por ejemplo, *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000); *National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers* (CCSSI, 2010) – que ofrecen orientaciones curriculares sobre qué matemáticas se deben aprender y cómo se deben aprender. Estas orientaciones se organizan en *estándares* y, a lo largo de los años, han

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13

ido evolucionando para centrarse no solo en contenidos de tipo conceptual sino, también, en procesos o prácticas de construcción de conocimiento matemático, haciendo, así, explícito el papel relevante de las prácticas matemáticas. Por ejemplo, los estándares recogidos en CCSSI (2010) incluyen un estándar específico para estas prácticas denominado *"Standards for Mathematical Practice"* (CCSSI, 2010, p. 6).

Igualmente, la investigación en educación matemática también destaca la importancia de estudiar las prácticas matemáticas y la justifica por sus implicaciones para la mejora del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (DREYFUS, 1991; JEANNOTTE; KIERAN, 2017; LOCKWOOD; DEJARNETTE; THOMAS, 2019; RASMUSSEN *et al*., 2005; TALL, 1991). Una corriente en educación matemática que está ganando adeptos es la que defiende (en línea con LAVE; WENGER, 1991) que las prácticas matemáticas se deben enseñar y aprender, en las aulas, de forma similar a como los investigadores en matemáticas las desarrollan, siempre con conciencia de que, por las claras diferencias entre los contextos, las aulas no se pueden convertir en réplicas de situaciones reales de investigación (DAWKINS; WEBER, 2017).

Desde esta perspectiva, entender cómo los investigadores en matemáticas desarrollan sus prácticas profesionales supone una fuente muy importante de información para el diseño de la docencia de clases donde los estudiantes se van a involucrar en actividades matemáticas similares (MEJÍA-RAMOS; WEBER, 2020; MORALES-RAMÍREZ; RUBIO-GOYCOCHEA; LARIOS-OSORIO, 2021). Esto ha provocado que los investigadores en matemáticas *per se* se hayan convertido en objeto de estudio de la comunidad en educación matemática, y que sus prácticas matemáticas estén siendo caracterizadas (BURTON, 1998; FERNÁNDEZ-LEÓN; GAVILÁN-IZQUIERDO; TOSCANO, 2021; LOCKWOOD; DEJARNETTE; THOMAS, 2019; MARTÍN-MOLINA; GONZÁLEZ-REGAÑA; GAVILÁN-IZQUIERDO, 2018; MEJÍA-RAMOS; WEBER, 2020).

De hecho, una reciente línea de trabajo consiste en modelar el comportamiento de investigadores en matemáticas a partir de constructos teóricos que permitan interpretar y explicar dicho comportamiento. Según Mejía-Ramos y Weber (2020), estos constructos se podrían utilizar como herramientas para desarrollar marcos teóricos más representativos y para interpretar comportamientos de estudiantes o investigadores en otros estudios.

Por todo lo anterior, y atraídos por el relevante papel que juega la práctica matemática de demostrar en el desarrollo del conocimiento matemático (JEANNOTTE; KIERAN, 2017), este trabajo aborda el problema de investigación de caracterizar cómo los investigadores en matemáticas construyen demostraciones matemáticas.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13

2 Antecedentes teóricos

2.1 La práctica matemática de demostrar

En esta investigación, la práctica matemática de demostrar (en adelante, práctica de demostrar) hace referencia a las actividades matemáticas que llevan a cabo los investigadores en matemáticas cuando construyen demostraciones matemáticas (FERNÁNDEZ-LEÓN; GAVILÁN-IZQUIERDO, 2019). Términos como demostración, prueba, demostración matemática o demostración formal aparecen a menudo en la literatura, y se suelen usar de forma sinónima en matemáticas. Sin embargo, es frecuente que el significado de estos términos en educación matemática no sea exactamente el mismo e, incluso, que un mismo término se use con significados diferentes (BALACHEFF, 2000). La definición de *demostración matemática* que se adopta en este estudio es la propuesta por Weber y Mejia-Ramos (2011), que establece que una demostración matemática es cualquier producto, escrito y socialmente aprobado, que los investigadores en matemáticas construyen para justificar que una conjetura es verdadera.

Por su influencia y relevancia en la construcción del conocimiento matemático, la práctica de demostrar es la práctica matemática más estudiada por la comunidad científica, siendo muchos y muy diferentes los enfoques adoptados para estudiarla. Desde la filosofía de las matemáticas, y que se centren en la práctica de demostrar o en la propia demostración matemática, se destacan el trabajo de Lakatos (1976), el cual propone una dialéctica ficticia entre un profesor y sus estudiantes en un contexto de prueba y refutaciones de conjeturas; el libro de Aberdein e Inglis (2019), donde se emplean métodos empíricos para estudiar, por ejemplo, la idoneidad en demostraciones matemáticas de las inferencias a partir de gráficos; el Handbook de Sriraman (2020), en el que se abordan aspectos de la epistemología social de la demostración matemática o el debate sobre el papel de la demostración formal, de la informal y del rigor en las demostraciones matemáticas (ver también HAMAMI; MORRIS, 2020).

La comunidad en educación matemática ha desarrollado, en las últimas décadas, múltiples investigaciones que versan sobre la demostración matemática y la práctica de demostrar. En dichas investigaciones, los significados de demostración matemática y práctica de demostrar varían, ligeramente, de los adoptados en el presente trabajo, ya que se adaptan al contexto de cada investigación. Algunas de las tendencias más actuales que están dando forma a la investigación sobre esta temática se recogen en los monográficos del ICMI-19 (HANNA; DE VILLIERS, 2012) y del ICME-13 (STYLIANIDES; HAREL, 2018) sobre *proof and proving*.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13

La mayoría de las investigaciones sobre esta temática toman como sujetos de estudio a estudiantes, de diferentes niveles educativos, y ponen el foco en el proceso de construcción de demostraciones matemáticas (APUD; MORENO; MARTÍNEZ, 2018; BUSTOS RUBILAR; ZUBIETA-BADILLO, 2019; FIALLO; GUTIÉRREZ, 2017; HAREL; SOWDER, 1998; JEANNOTTE; KIERAN, 2017; RASMUSSEN; WAWRO; ZANDIEH, 2015; SPORN; SOMMERHOFF; HEINZE, 2021). Con vistas al desarrollo profesional, se han realizado estudios sobre la práctica de demostrar con profesores (por ejemplo, DESLIS; STYLIANIDES; JAMNIK, 2021; DOGAN; WILLIAMS-PIERCE, 2021).

La relevancia de esta práctica matemática también se recoge en muchos documentos curriculares. Por ejemplo, el NCTM (2000) considera cinco procesos diferentes para la práctica matemática, siendo uno de ellos "*Reasoning and Proof*" (NCTM, 2000, p. 56), que incluye el desarrollo de argumentos matemáticos cuando se generan demostraciones matemáticas y la justificación de resultados.

A pesar de que los educadores en matemáticas comparten principios que regulan, de algún modo, la práctica de demostrar en el aula (por ejemplo, que el educador fomente que las demostraciones en el aula se basen en razonamientos deductivos y no en generalizaciones empíricas), no hay consenso entre los educadores en matemáticas sobre cómo se debe enseñar y aprender esta práctica en el aula (DAWKINS; WEBER, 2017). Esta realidad invita a los investigadores del área a seguir desarrollando estudios que aborden esta problemática y, en concreto, a estudiar a los investigadores en matemáticas para, así, caracterizar actividades que estos sujetos realizan en un contexto de demostraciones.

Por ejemplo, Dawkins y Weber (2017) se han basado en varios estudios sobre la demostración matemática para proponer un marco teórico que conceptualiza la demostración matemática en términos de los valores y las normas de los matemáticos sobre la demostración matemática; Fernández-León, Gavilán-Izquierdo y Toscano (2021) han identificado qué actividades matemáticas desarrolla una investigadora en matemáticas cuando construye demostraciones matemáticas, distinguiendo la naturaleza horizontal o vertical de la matematización en cada actividad y, por su parte, Mejía-Ramos y Weber (2020) han utilizado trabajos previos en la literatura para establecer conclusiones acerca de cómo los matemáticos usan los ejemplos en contextos de demostraciones.

En muchas ocasiones, la enseñanza de las matemáticas se basa en creencias acerca de cómo los investigadores en matemáticas desarrollan su profesión, más que en un conocimiento adecuado y preciso de la práctica matemática (WEBER; DAWKINS; MEJÍA-RAMOS, 2020). Por este motivo, este estudio se centra en los investigadores en matemáticas y utiliza, de forma

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13

novedosa, los constructos teóricos *usar* y *crear* descritos en Rasmussen *et al.* (2005) para precisar la labor del investigador en matemáticas cuando construye demostraciones matemáticas.

2.2 Marco teórico

Este trabajo utiliza los constructos teóricos *usar* y *crear,* introducidos por Rasmussen *et al*. (2005), para avanzar en la caracterización de la práctica de demostrar de una investigadora en matemáticas. Rasmussen *et al*. (2005) definen el concepto *actividad matemática en progreso* para describir el aprendizaje de los estudiantes, y utilizan los constructos *matematización horizontal* y *matematización vertical* para caracterizar el progreso en estudiantes universitarios cuando construyen algoritmos, representan a través de símbolos y definen.

Aunque por cuestiones de espacio, no se definen aquí estos constructos, se puntualiza que la definición dada por estos autores no coincide, literalmente, con la original de Treffers (1987). Para Rasmussen *et al*. (2005), la matematización horizontal hace referencia a actividades, principalmente, de naturaleza informal (como clasificar, experimentar o detectar patrones), mientras que la matematización vertical se refiere a actividades que se apoyan en otras, de naturaleza horizontal, para crear nuevas realidades matemáticas (por ejemplo, formalizar o generalizar). Para estos autores, estas dos dimensiones de la matematización (la horizontal y la vertical) son una dualidad que caracteriza a este proceso.

Rasmussen *et al*. (2005) se apoyan en los resultados de su estudio para destacar la interrelación que existe entre las acciones *usar* y *crear* que los estudiantes ejecutan de forma reiterada cuando se involucran en tres prácticas matemáticas: construir algoritmos, representar a partir de símbolos y definir. Aunque estos autores observan que los estudiantes usan y crean en las dos dimensiones (horizontal y vertical) de cada una de las tres prácticas, subrayan que el papel que juegan usar y crear en cada una de las dimensiones es muy diferente.

Específicamente, estos autores declaran que los estudiantes, en la dimensión horizontal, crean (algoritmos, definiciones etc.) para apoyar, expresar y comunicar ideas que ya les son más o menos familiares, ideas que están relacionadas con las concepciones previas e informales de los estudiantes; y que los productos creados en esta dimensión son usados dentro del contexto inicial de la situación problemática. Por otra parte, observan que en la dimensión vertical se fomentan movimientos de lo particular a lo más general y, en algunos casos, a lo más formal cuando se usan los productos creados previamente, creándose, así, nuevas realidades matemáticas.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13

Recientemente, Fernández-León y Gavilán-Izquierdo (2019) han propuesto utilizar la dualidad *usar-crear* (RASMUSSEN *et al*., 2005) para avanzar en la caracterización de las prácticas matemáticas de conjeturar y demostrar de una investigadora en matemáticas propuesta en Fernández-León, Gavilán-Izquierdo y Toscano (2021). Concretamente, el presente estudio se centra en la práctica de demostrar y utiliza los constructos teóricos usar y crear (RASMUSSEN *et al*., 2005) para caracterizar dicha práctica matemática. Las preguntas de investigación que determinan los objetivos específicos de este estudio son: ¿cómo puede ayudar la dualidad *usar-crear* (RASMUSSEN *et al*., 2005) en la caracterización de la práctica matemática de demostrar de los investigadores en matemáticas? ¿Qué implicaciones didácticas se pueden deducir de esta caracterización?

3 Metodología

Esta sección se divide en dos subsecciones. En la primera subsección, se describe el contexto del estudio que se presenta en este documento y, en la segunda, el proceso seguido para responder a las preguntas de investigación.

3.1 Contexto de la investigación

Este estudio forma parte de una investigación cualitativa comenzada por Fernández-León, Gavilán-Izquierdo y Toscano (2021). Dicha investigación es un estudio instrumental de casos (STAKE, 1995), ya que el caso estudiado, una investigadora en matemáticas, es un instrumento con el que se pretende ir más allá de la mera comprensión de esa investigadora particular. Hamami y Morris (2020) justifican la pertinencia de este diseño de investigación para estudiar a este colectivo profesional.

La informante de este estudio de casos (también informante del trabajo presentado en FERNÁNDEZ-LEÓN; GAVILÁN-IZQUIERDO; TOSCANO, 2021) es Ana (pseudónimo), una doctora en matemáticas que investiga en el área de análisis matemático y publica sus resultados en revistas de prestigio internacional. Al comenzarse la investigación, Ana llevaba más de diez años trabajando como docente e investigadora en la universidad.

Los datos empíricos de esta investigación se obtuvieron a partir de cuatro entrevistas semiestructuradas, de noventa minutos cada una, que fueron grabadas y, posteriormente, transcritas. Durante estas entrevistas se recogieron, además, copias de algunos documentos de trabajo de la participante y de varios artículos suyos de investigación donde se mostraban parte

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13

de sus logros científicos. Los documentos de trabajo eran cuadernos en los que la investigadora tenía recogidos, de forma manuscrita, los cálculos que realizaba en sus investigaciones, las conjeturas que construía, las razones que motivaban la aparición de esas conjeturas, las demostraciones matemáticas que conseguía construir y los diagramas o dibujos que apoyaban sus razonamientos matemáticos.

Los documentos de trabajo y artículos de la participante que se han utilizado en este estudio son los que permitieron aclarar algunas afirmaciones de la investigadora en las entrevistas sobre ciertos aspectos muy técnicos de su investigación. Por ejemplo, cuando esta se refería a momentos concretos de la construcción de una demostración matemática y no entendíamos alguna cuestión relativa al propio proceso demostrativo o al contenido matemático que utilizaba, ese material auxiliar nos permitía comprender sus afirmaciones y contextualizarlas. Aunque las entrevistas permitieron obtener información genérica de la participante (formación, experiencia profesional etc.), la mayor parte de las preguntas estaban destinadas a obtener información relacionada con su práctica profesional en la investigación y, en particular, información sobre ciertos momentos concretos de la misma.

Por ejemplo, algunas de las preguntas que se le plantearon a Ana fueron: cuando tratas de probar una afirmación, ¿utilizas ejemplos con objetos matemáticos concretos? ¿Con qué propósito?, ¿Has mirado alguna vez otras demostraciones para ayudarte en la construcción de una demostración matemática?, cuando no consigues demostrar matemáticamente una conjetura o tienes la intuición de que la conjetura es falsa, ¿la modificas? ¿La debilitas? ¿Cómo? Las respuestas que resultaron relevantes para construir los resultados de esta investigación fueron las que informaban sobre las actividades matemáticas de la participante que, de algún modo, influían en la construcción de demostraciones matemáticas.

Los datos empíricos obtenidos a partir de las entrevistas se analizaron, inicialmente, utilizando los constructos teóricos matematización horizontal y matematización vertical (RASMUSSEN *et al*., 2005). En ese primer análisis, se identificaron categorías de actividades matemáticas, de naturaleza tanto horizontal como vertical, que caracterizan cómo la participante construye conjeturas y demostraciones matemáticas en su investigación. Las características de este primer análisis de los datos empíricos, así como la descripción de cada una de las categorías identificadas, pueden encontrarse en Fernández-León, Gavilán-Izquierdo y Toscano (2021).

3.2 Fases del estudio

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13

El presente estudio avanza en la caracterización de la práctica de demostrar de la informante del estudio de casos, identificando *qué usa* y *qué crea* (RASMUSSEN *et al*., 2005) esta investigadora cuando construye demostraciones matemáticas en cada una de las dimensiones de esta práctica matemática. En el proceso seguido para responder a las preguntas de investigación se pueden distinguir dos fases. En la primera fase, se realizó un estudio teórico de las categorías relativas a la práctica de demostrar de la participante, poniendo el foco en los constructos teóricos *usar* y *crear*.

Es decir, se utilizaron las descripciones teóricas de las citadas categorías de actividades (FERNÁNDEZ-LEÓN; GAVILÁN-IZQUIERDO; TOSCANO, 2021) para inferir qué usa y qué crea la participante al desarrollar las actividades matemáticas horizontales y verticales descritas en dichas categorías. Posteriormente, en la segunda fase, se usaron los datos empíricos de la investigación para validar las inferencias teóricas que se habían realizado a través de las categorías en la primera fase.

Por razones de espacio, este trabajo ofrece una breve descripción teórica de cada una de estas categorías de actividades, distinguiendo la naturaleza (horizontal o vertical) de las mismas (para una descripción más detallada véase FERNÁNDEZ-LEÓN; GAVILÁN-IZQUIERDO; TOSCANO, 2021).

3.2.1 Demostrar-matematización horizontal

Detectar técnicas o herramientas dentro de demostraciones. Esta categoría de actividades incluye las labores de análisis y de estudio de las características de algunas demostraciones matemáticas cuando se quieren encontrar (detectar) en dichas demostraciones técnicas o herramientas que puedan ser útiles para la construcción de una nueva demostración. Por ejemplo, hablaríamos de actividades matemáticas propias de esta categoría cuando un investigador, que quiere construir una demostración matemática de una conjetura en teoría de números, estudia las demostraciones de algunos teoremas del campo en busca de técnicas (como descomponer en factores primos, sacar factor común etc.) que le puedan servir en la nueva demostración.

Detectar patrones en ejemplos. Esta categoría hace referencia a las actividades matemáticas que se realizan con objetos matemáticos concretos (vectores, puntos etc.) que satisfacen las hipótesis de una conjetura para experimentar, hacer cálculos y, en consecuencia, detectar patrones que se puedan extender, después, a un contexto más general. Por ejemplo, esta categoría aparece cuando se quiere demostrar la conjetura de Goldbach y se considera como

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13

objeto matemático al número 24 (que satisface las hipótesis de la conjetura) para tratar de, a través de la experimentación numérica, observar alguna estructura o patrón en esa experimentación que pueda ser, después, extendida al resto de los números pares.

3.2.2 Demostrar-matematización vertical

Seleccionar y aplicar métodos de demostración. Aquí se incluyen las actividades de selección y aplicación de métodos concretos que permiten construir una demostración: por contraposición, por inducción, por reducción al absurdo etc.

Usar técnicas o herramientas de demostración encontradas en otras demostraciones. Esta categoría incluye las actividades de uso y aplicación de técnicas o herramientas de demostración encontradas en otras demostraciones. Por ejemplo, aquí se incluiría el uso, en una nueva demostración matemática, de técnicas, como descomponer en factores primos o sacar factor común, observadas en la revisión de otras demostraciones.

Aplicar resultados conocidos. Esta categoría de actividades aparece cuando se aplican resultados conocidos (lemas, propiedades, teoremas etc.) para construir cadenas de implicaciones lógicas al elaborar demostraciones.

Formalizar experimentaciones con ejemplos. Esta categoría hace referencia a las actividades de extensión, generalización y formalización de los cálculos y experimentaciones realizados con objetos matemáticos concretos que satisfacen las hipótesis de una conjetura.

4 Resultados

Esta sección se divide en dos subsecciones. En la primera subsección, se muestra *qué usa* y *qué crea* la informante de este estudio de casos cuando desarrolla actividades horizontales de la práctica de demostrar. En la segunda, se describen estas dos acciones en la dimensión vertical de esta práctica matemática. Para ello, en ambas subsecciones se muestran, primero, las inferencias teóricas que se han realizado en la primera fase de este estudio y, posteriormente, se muestran varios fragmentos de las entrevistas con los que se ejemplifica el proceso de validación de estas inferencias llevado a cabo en la segunda fase de este estudio.

4.1 Usar y crear – matematización horizontal

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13

La descripción de la categoría Detectar técnicas o herramientas dentro de demostraciones informa del *uso* de demostraciones matemáticas de resultados conocidos. Estas demostraciones son usadas cuando la investigadora en matemáticas intenta detectar técnicas o herramientas, dentro de esas demostraciones, que la guíen en la construcción de una demostración de una afirmación matemática.

Por otro lado, la categoría horizontal Detectar patrones en ejemplos pone de manifiesto el *uso* de objetos matemáticos concretos que verifican las hipótesis de una afirmación matemática que se quiere demostrar. Este uso se produce cuando la investigadora en matemáticas trata de detectar un patrón o cierta regularidad, en la experimentación con dichos objetos, que se pueda generalizar para elaborar una demostración de esa afirmación.

Si ponemos, ahora, el foco en qué se crea en esta dimensión, la categoría Detectar patrones en ejemplos nos permite, además, inferir que la investigadora *crea* ejemplos concretos de una propiedad matemática (ya sea la enunciada en la conjetura u otra diferente) cuando esta es verificada por objetos matemáticos que cumplen las hipótesis de la conjetura que se quiere demostrar.

Los dos fragmentos de las entrevistas que se muestran a continuación (Fragmentos 1 y 2) ejemplifican la validación, realizada con los datos empíricos, de las inferencias teóricas del párrafo anterior. El primer fragmento es representativo de la categoría de actividades Detectar técnicas o herramientas dentro de demostraciones y el segundo fragmento de la categoría Detectar patrones en ejemplos.

> *Fragmento 1: Cuando planteamos la conjetura [añadiendo una nueva hipótesis al problema abierto planteado por Eldred y Veeramani (2006)], estudiamos en detalle la prueba del resultado en espacios uniformemente convexos, ya que queríamos ver qué esquema de prueba se había seguido en ese caso. Después de estudiar esa prueba, nos dimos cuenta de que el hecho de imponer convexidad estricta en los espacios era una condición bastante natural en ese tipo de contextos.*
> (Transcripciones de las entrevistas con Ana, 2017).

En el Fragmento 1, Ana describe los primeros pasos que dio su grupo de investigación cuando decidieron tratar de demostrar una conjetura que habían construido a partir de un problema abierto propuesto por Eldred y Veeramani (2006). Ese problema abierto planteaba el estudio de la existencia de puntos de mejor aproximación para contracciones cíclicas en ciertos espacios de Banach. El concepto de punto de mejor aproximación surge en matemáticas para extender la idea de proximidad entre un punto x y su imagen $T(x)$ por una aplicación T cuando no tiene sentido plantearse la existencia de puntos fijos en esa aplicación.

En concreto, el problema abierto citado cuestionaba la existencia de puntos de mejor aproximación en contracciones cíclicas cuando los subconjuntos A y B sobre los que se define

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13

la aplicación son subconjuntos no vacíos, cerrados y convexos de un espacio de Banach reflexivo. La existencia de puntos de mejor aproximación para contracciones cíclicas ya se había demostrado en espacios de Banach uniformemente convexos (ver Teorema 3.10 en ELDRED; VEERAMANI, 2006), que son espacios también reflexivos. Las entrevistas (de las que el Fragmento 1 es parte) muestran que Ana estudió los pasos de esa demostración con el objetivo de demostrar la conjetura construida, que cuestionaba la existencia de puntos de mejor aproximación en espacios reflexivos y estrictamente convexos.

Ese estudio minucioso de los pasos de esa demostración permitió a Ana confirmar que ciertas implicaciones lógicas que aparecían en dicha demostración eran difícilmente extensibles al caso más general de los espacios únicamente reflexivos si no se imponía alguna condición extra sobre los espacios de Banach. Concretamente, el Fragmento 1 muestra cómo Ana se convenció de haber impuesto sobre el espacio la hipótesis adicional de ser estrictamente convexo, condición más débil para un espacio de Banach que la convexidad uniforme.

A partir del Fragmento 1, se puede inferir que la participante *usa* la demostración de un resultado, ya publicada en un trabajo reciente, antes de comenzar a construir la demostración de una conjetura. En particular, la investigadora estudia minuciosamente la demostración del Teorema 3.10 en Eldred y Veeramani (2006). Al estudiar la demostración de ese resultado, la investigadora observó que una condición natural para que las ideas generales de esa demostración se pudieran extender a contextos más generales es que las bolas (B(a,r)) de los espacios fueran convexas, por lo que parecía coherente haber impuesto la convexidad estricta a los espacios sobre los que se definían las contracciones cíclicas.

Con el Fragmento 2 se termina de ejemplificar la validación de las inferencias teóricas obtenidas en la dimensión horizontal de la práctica de demostrar.

> *Fragmento 2: En un artículo que acababan de publicar, preguntaban si cualquier espacio CAT(0) cumplía la propiedad (Q_4). Intuíamos que era muy fuerte ese resultado, por eso intentamos demostrar una conjetura más débil, que era que cualquier CAT(0) de curvatura constante sí la verificase [la propiedad (Q_4)]. Para demostrar esa conjetura hicimos la prueba [los cálculos] en el espacio hiperbólico y después extendimos por isometría el resultado a los demás espacios.*
> (Transcripciones de las entrevistas con Ana, 2017).

En el Fragmento 2, la participante justifica la construcción de una conjetura nueva, que, además, enuncia y, posteriormente, describe cómo demostró esa conjetura. La investigadora comienza haciendo referencia a una pregunta abierta: *cualquier espacio CAT(0) cumple la propiedad (Q_4)* (llamada aquí conjetura C). Sospechar que C era demasiado fuerte, invitó a la participante y a otros miembros de su equipo de investigación a formular una nueva conjetura más débil (C1 en adelante): *cualquier espacio CAT(0) de curvatura constante satisface la*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13

propiedad (Q_4). Con vistas a demostrar C1, comprobaron, inicialmente, que el espacio hiperbólico (que es un espacio CAT(0) de curvatura constante igual a -1) sí verificaba la propiedad (Q_4).

Después, detectaron que los cálculos realizados para esa comprobación no dependían directamente del valor numérico concreto de la curvatura negativa de ese espacio. Este hecho permitió generalizar dichos cálculos a cualquier espacio con curvatura constante negativa, demostrándose C1. Por último, es relevante mencionar que el Fragmento 2 constituye una muestra más, en la literatura, de la indisoluble relación entre la práctica matemática de conjeturar y la de demostrar en el desarrollo del conocimiento matemático.

El Fragmento 2 ha permitido inferir que estos investigadores *usan*, inicialmente, un objeto matemático concreto, el espacio hiperbólico, que cumple las hipótesis de la conjetura C1 que querían demostrar (ser CAT(0) y de curvatura constante). Por otro lado, los datos también han permitido deducir que los investigadores *crean* un ejemplo concreto de la propiedad matemática (Q_4) (mencionada en la conjetura C1) cuando esta es verificada por un espacio (el hiperbólico) que cumple las hipótesis de C1.

La *creación* de este ejemplo de la propiedad (Q_4) a partir del *uso* del espacio hiperbólico ha permitido que los investigadores detecten patrones en los cálculos que se puedan extender o generalizar al resto de los espacios considerados en las hipótesis de la conjetura C1, demostrándose, así, (a partir de isometrías) esta conjetura. Para poder realizar las inferencias anteriores, también nos apoyamos en un artículo de investigación publicado por los investigadores, en el que describen sus cálculos realizados para *crear* el ejemplo que *usa* el espacio hiperbólico. Como en ese artículo no aparecen todos los detalles matemáticos de la demostración de C1, también utilizamos un cuaderno de notas de la participante para entender cómo los investigadores habían generalizado, por isometrías, los cálculos en el espacio hiperbólico al resto de espacios CAT(0) de curvatura constante.

4.2 Usar y crear – matematización vertical

La categoría Seleccionar y aplicar métodos de demostración informa del *uso* de métodos de demostración conocidos (reducción al absurdo, inducción etc.) para construir demostraciones de afirmaciones matemáticas. Como su propio nombre indica, la categoría Usar técnicas o herramientas de demostración encontradas en otras demostraciones pone de manifiesto el *uso* de técnicas o herramientas detectadas previamente por la investigadora en otras demostraciones. En general, el *uso* de estas técnicas o herramientas conlleva una

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13

adaptación de las mismas al nuevo contexto matemático en el que se quiere desarrollar la construcción de una demostración matemática.

La categoría Aplicar resultados conocidos informa del *uso* de resultados matemáticos ya conocidos cuando se elabora una demostración. La investigadora *usa* resultados matemáticos que ya conoce cuando trata de construir cadenas de implicaciones lógicas que le permitan demostrar afirmaciones matemáticas. Finalmente, la categoría Formalizar experimentaciones con ejemplos pone de manifiesto el *uso* de ejemplos concretos de una afirmación matemática (creados en la dimensión horizontal) cuando se emplean para guiar la construcción de una demostración de dicha afirmación.

Por otro lado, las cuatro categorías de actividades que caracterizan la dimensión vertical de la práctica de demostrar informan de la *creación* de una demostración matemática (o de parte de la misma). Cada una de estas cuatro categorías ofrece información de diferente naturaleza relativa a *qué se crea* de la demostración. Por un lado, al Seleccionar y aplicar métodos de demostración se sientan las bases para *crear* una demostración de una afirmación matemática, dotando a dicha demostración de estructura (la que hereda fruto de la aplicación de diferentes métodos de demostración).

Por otro lado, al Usar técnicas o herramientas de demostración encontradas en otras demostraciones se pueden *crear* pasos en una demostración de una afirmación matemática adaptando, al contexto matemático de esa afirmación, las técnicas o herramientas encontradas en esas demostraciones. La categoría Aplicar resultados conocidos informa, particularmente, de la *creación* de cadenas de implicaciones lógicas en las demostraciones y al extender y Formalizar experimentaciones con ejemplos se *crean* pasos de una demostración matemática.

Cabe señalar que esta generalización conlleva separar los ejemplos concretos de los pasos de la demostración, haciendo que estos últimos no dependan de la estructura particular de los objetos matemáticos que se han utilizado para construir tales ejemplos (recordemos que esos objetos matemáticos verifican las hipótesis y la tesis de la afirmación matemática que se quiere demostrar).

A continuación, se muestran los cuatro fragmentos de las entrevistas (Fragmentos 3, 4, 5 y 6) que se van a utilizar para ejemplificar la validación de las inferencias teóricas obtenidas en la dimensión vertical de la práctica de demostrar. Cada uno de estos cuatro fragmentos es representativo de una categoría diferente de actividades.

> *Fragmento 3: Como en el caso de los espacios uniformemente convexos, que es un caso menos general, utilizamos un método directo. En la prueba del resultado conocido aparecía también, puntualmente, el método de reducción al absurdo; sin embargo, nosotros no lo usamos en el caso más general.*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13

(Transcripciones de las entrevistas con Ana, 2017).

En el Fragmento 3, Ana explicita el método de demostración escogido para construir una demostración de una conjetura (la descrita en el Fragmento 1). Concretamente, Ana señala haber escogido un método directo para demostrar esa conjetura, y no el método de demostración por *reducción al absurdo* que sí había sido utilizado para demostrar la misma tesis en espacios uniformemente convexos.

En el Fragmento 3, Ana escoge y *usa* un método de demostración, dotando de estructura a la demostración que construye. Así, da el primer paso en la *creación* de una demostración.

El Fragmento 4 de las entrevistas permite mostrar otro ejemplo más de la validación realizada en la segunda fase de este estudio.

> *Fragmento 4: Como observamos después de estudiar la prueba en el caso uniformemente convexo, el punto de mejor aproximación se había encontrado como límite de una sucesión de Cauchy. Nosotros, sin embargo, para el caso más general, tratamos de encontrar [y se encontró finalmente] el punto de mejor aproximación como un punto en la intersección de subconjuntos cerrados, [acotados], convexos y no vacíos. Seguimos esta estrategia [técnica] después de buscar y estudiar, en varios artículos, cómo suelen trabajar los investigadores en espacios geodésicos más generales [sin estructura lineal]. Vimos que este método se usa bastante en este contexto.*
> (Transcripciones de las entrevistas con Ana, 2017).

En el Fragmento 4, Ana señala que, tras realizar una búsqueda en diversos trabajos publicados en su área de investigación, decidieron utilizar una técnica que aparecía en muchos de esos trabajos para demostrar una conjetura que habían planteado (ver Fragmento 1). Concretamente, esa técnica consiste en encontrar un punto de mejor aproximación de una aplicación cíclica como un punto en la intersección de subconjuntos cerrados, acotados, convexos y no vacíos de un espacio métrico geodésico. La existencia de ese punto de mejor aproximación en la intersección de esos conjuntos estaba garantizada por las hipótesis que se habían impuesto en la conjetura sobre el espacio métrico.

El Fragmento 4 permite inferir que la participante, para construir una demostración, *usa* una técnica que encuentra en las demostraciones de ciertos resultados conocidos. Como la participante indicó en otros momentos de la entrevista, el *uso* de esa técnica en espacios métricos sin estructura lineal justificaba la consideración de las hipótesis sobre la estructura del espacio métrico. Revisando un artículo científico firmado por Ana, pudimos inferir, además, que el *uso* de esa técnica en la demostración de la conjetura permite *crear* uno de los pasos más importantes de dicha demostración.

El Fragmento 5 permite mostrar otras características de la dualidad usar-crear de la práctica de demostrar.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13

> *Fragmento 5: Para demostrar la conjetura [ver Fragmento 1], tuvimos que utilizar un resultado que también se había demostrado en ese artículo [Eldred y Veeramani (2006)]. Concretamente, usamos esta proposición [Proposición 3.3 en Eldred y Veeramani (2006)]. Si no teníamos que las órbitas estaban acotadas, no podíamos asegurar que esas bolas contuviesen un número infinito numerable de iteradas de la aplicación T. Necesitábamos eso para encontrar el punto de acumulación.*
> (Transcripciones de las entrevistas con Ana, 2017).

En el Fragmento 5, Ana describe porqué utilizó, para demostrar una conjetura (ver Fragmento 1), la Proposición 3.3 demostrada en Eldred y Veeramani (2006). Ana justifica el uso de esta proposición en su demostración, haciendo referencia a la necesidad de tener un número infinito numerable de iteradas de la aplicación T en bolas centradas en puntos de la imagen de T. Sin ese conjunto infinito de iteradas dentro de las bolas, no podía garantizar la existencia de punto de mejor aproximación para T.

A partir del Fragmento 5 y de un artículo firmado por Ana donde se demuestra la conjetura, se puede inferir que Ana *usa* un resultado conocido (la Proposición 3.3 de ELDRED; VEERAMANI, 2006) para asegurar la existencia de punto de mejor aproximación para T. Por otro lado, también se observa cómo se *crea* un eslabón en la cadena de implicaciones lógicas que, finalmente, demuestra la conjetura.

El Fragmento 6, extraído de las entrevistas (relacionado con el Fragmento 2), se utiliza para terminar de ejemplificar la validación de las inferencias teóricas realizadas en la primera fase del estudio. Aunque el Fragmento 2 también podría usarse para ejemplificar las mismas características, se incluye este nuevo fragmento por ser más ilustrativo.

> *Fragmento 6: Extendimos los cálculos de este ejemplo [refiriéndose a los cálculos realizados para confirmar que el espacio hiperbólico tenía la propiedad (Q_4)] a casos más generales y probamos la conjetura. De hecho, lo que hicimos fue primero escribir con detalle la prueba [que es el propio ejemplo] en el espacio hiperbólico y después describir muy brevemente qué hacer en el caso general. Esta simplificación es muy común en nuestros artículos cuando la extensión a casos más generales es muy fácil y trivial.*
> (Transcripciones de las entrevistas con Ana, 2017).

En el Fragmento 6, Ana describe, detalladamente, cómo extendieron a todos los espacios CAT(0) de curvatura constante la propiedad (Q_4) que ya habían comprobado que se cumplía en el espacio hiperbólico. Concretamente, Ana señala que ella y su compañero escribieron en su artículo la comprobación de la propiedad (Q_4) en el espacio hiperbólico y, después, dada la similitud de los cálculos para un espacio CAT(0) con curvatura constante cualquiera $k < 0$, dejaron indicadas brevemente las diferencias en la demostración para ese caso más general. De ese modo, dejaban al lector del artículo el posible trabajo de reescribir la demostración formal (los cálculos) utilizando el parámetro $k < 0$ que representaba la curvatura constante del espacio. Según Ana, este *modus operandi* es muy común en su área de investigación.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13

Este último fragmento permite inferir que Ana *usa* un ejemplo concreto (los cálculos que ponen de manifiesto que el espacio hiperbólico tiene la propiedad (Q_4)) de una afirmación matemática (en este caso *cualquier espacio CAT(0) de curvatura constante satisface la propiedad (Q_4)*) como guía para *crear*, extendiendo los cálculos a cualquier curvatura $k < 0$, los pasos de una demostración que prueba esa afirmación matemática.

5 Discusión y conclusiones

Este estudio da un paso más en la caracterización de la práctica de demostrar de una investigadora en matemáticas, continuando los trabajos de Fernández-León y Gavilán-Izquierdo (2019) y Fernández-León, Gavilán-Izquierdo y Toscano (2021). Concretamente, aquí se identifica *qué usa* y *qué crea* (en términos de RASMUSSEN *et al*., 2005) dicha investigadora cuando construye demostraciones matemáticas durante su investigación.

Los ejemplos que *crea* y que *usa* la participante de este estudio al construir demostraciones matemáticas suponen otra muestra más, en la literatura, del relevante papel que juegan los ejemplos en esta práctica matemática (LYNCH; LOCKWOOD, 2019; MEJÍA-RAMOS; WEBER, 2020), que va más allá de aumentar el valor epistémico de las afirmaciones que se quieren demostrar.

Por ejemplo, los Fragmentos 2 y 6 de la sección anterior ponen de manifiesto cómo la investigadora utiliza un ejemplo genérico (BALACHEFF, 2000; DOGAN; WILLIAMS-PIERCE, 2021) para demostrar una conjetura matemática (llamada C1), haciendo referencia explícita al *uso* del espacio hiperbólico (como objeto matemático), a la *creación* de un ejemplo de la propiedad (Q_4) en ese espacio y a los razonamientos empleados para extender dicha propiedad a otros espacios.

Estos hallazgos han permitido caracterizar, desde una perspectiva novedosa, los ejemplos genéricos, complementando, así, investigaciones como la de Balacheff (2000). Aquí, se considera la acepción de ejemplo genérico más ligada a la comunidad matemática, en la que son necesarios la *conciencia de generalidad* y el *razonamiento matemático* que Reid y Vallejo Vargas (2018) describen en su estudio para la validez de razonamientos genéricos como demostraciones. Esta caracterización de los ejemplos genéricos se puede complementar si se hace también referencia a las categorías de actividades inferidas en Fernández-León, Gavilán-Izquierdo y Toscano (2021).

Concretamente, la categoría horizontal *Detectar patrones en ejemplos* implica utilizar objetos matemáticos concretos y realizar con ellos cálculos y razonamientos matemáticos (que crean ejemplos concretos) sobre los cuales se tenga *conciencia de generalidad*, pues de otro modo no se detectaría una estructura concreta, en dichos ejemplos, que permitiera dar el salto después a la dimensión vertical de la práctica de demostrar. Dicho salto, que permite superar la discontinuidad epistemológica entre lo empírico y lo deductivo (FIALLO; GUTIÉRREZ, 2017), se caracteriza por la generalización y *Formalización de las experimentaciones con los ejemplos*, lo que conlleva expresar las *razones matemáticas* que justifican que el patrón detectado en la estructura del ejemplo se puede extrapolar a otros casos.

Como han reconocido diversos autores, quedarse en el trabajo puramente empírico (con ejemplos concretos) o incluso en la dimensión horizontal de esta práctica matemática, donde ya se incluye al menos la consciencia de generalidad, no permite justificar la veracidad de una afirmación matemática, aunque en muchas ocasiones sí tenga poder explicativo (DOGAN; WILLIAMS-PIERCE, 2021). Las actividades de naturaleza horizontal no deben cambiar el valor epistémico de una afirmación matemática a verdadera, aunque sí pueden suponer un primer paso para llegar a producir razonamientos deductivos (DOGAN; WILLIAMS-PIERCE, 2021; FIALLO; GUTIÉRREZ, 2017), ayudando a explicar el movimiento de lo empírico a lo deductivo. En resumen, la articulación de dos categorías de actividades de naturaleza diferente, una de matematización horizontal (Detectar patrones en ejemplos) y otra de matematización vertical (Formalizar experimentaciones con ejemplos), es la que confiere el carácter genérico al ejemplo concreto.

Por otro lado, la *creación* y el *uso* de ejemplos que se observa en este trabajo pueden facilitar el diseño de una instrucción en matemáticas que, yendo desde actividades horizontales hasta las verticales, ayude a los estudiantes a reflexionar sobre los objetivos epistémicos que obtienen al hacer matemáticas. El docente debe asegurar, desde edades tempranas, que el valor epistémico de verdad de las afirmaciones matemáticas estudiadas no se adquiera de forma errónea (mediante razonamientos empíricos) ni de forma impuesta, sino siempre a través de la experiencia (DAWKINS; WEBER, 2017).

La investigación aquí presentada es de naturaleza exploratoria. La *heterogeneidad* de la práctica matemática y el *problema de la identificación de la comunidad matemática* (WEBER; DAWKINS; MEJÍA-RAMOS, 2020) motivan el estudio de otros investigadores en matemáticas que permitan refinar lo observado en este trabajo y aumentar, así, su valor descriptivo y explicativo.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13

Referencias

APUD, E. M. L.; MORENO, L. D.; MARTÍNEZ, J. A. H. ¿Qué estructuras deductivas usan alumnos ingresantes a la universidad? **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 802-824, 2018.

ABERDEIN, A.; INGLIS, M. (ed.). **Advances in experimental philosophy of logic and mathematics**. London: Bloomsbury Academic, 2019.

ABERDEIN, A.; RITTBERG, C. J.; TANSWELL, F. S. Virtue theory of mathematical practices: an introduction. **Synthese**, Dordrecht, v. 199, n. 3-4, p. 10167-10180, 2021.

BALACHEFF, N. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas**. Bogotá: Una Empresa Docente, 2000.

BURTON, L. The practices of mathematicians: what do they tell us about coming to know mathematics? **Educational Studies in Mathematics**, Heidelberg, v. 37, n. 2, p. 121-143, 1998.

BUSTOS RUBILAR, Á. S.; ZUBIETA BADILLO, G. Desarrollo y cambios en las maneras de justificar matemáticamente de estudiantes cuando trabajan en un ambiente sociocultural. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 37, n. 3, p. 129-148, 2019.

DAWKINS, P. C.; WEBER, K. Values and norms of proof for mathematicians and students. **Educational Studies in Mathematics**, Heidelberg, v. 95, n. 2, p. 123-142, 2017.

DESLIS, D.; STYLIANIDES, A. J.; JAMNIK, M. Primary school teachers' mathematical knowledge for Lakatos-style proof instruction. *En*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 44., 2021, Khon Kaen. **Proceedings [...]** Khon Kaen: PME, 2021. p. 209-217. v. 4.

DOGAN, M. F.; WILLIAMS-PIERCE, C. The role of generic examples in teachers' proving activities. **Educational Studies in Mathematics**, Heidelberg, v. 106, n. 1, p. 133-150, jan. 2021.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. *En*: TALL, D. (ed.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 25-41.

ELDRED, A. A.; VEERAMANI, P. Existence and convergence of best proximity points. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, New York, v. 323, n. 2, p. 1001-1006, 2006.

ERNEST, P. **The philosophy of mathematics education today**. Cham: Springer, 2018.

FERNÁNDEZ-LEÓN, A.; GAVILÁN-IZQUIERDO, J. M. Avanzando en la caracterización de las prácticas matemáticas de conjeturar y probar de los matemáticos profesionales. *En*: SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 23., 2019, Valladolid. **Actas [...]** Valladolid: SEIEM, 2019. p. 283-292.

FERNÁNDEZ-LEÓN, A.; GAVILÁN-IZQUIERDO, J. M.; TOSCANO, R. A case study of the practices of conjecturing and proving of research mathematicians. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 52, n. 5, p. 767-781, 2021.

FIALLO, J.; GUTIÉRREZ, A. Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. **Educational Studies in Mathematics**, Heidelberg, v. 96, n. 2, p. 145-167, 2017.

HAMAMI, Y.; MORRIS, R. L. Philosophy of mathematical practice: a primer for mathematics educators. **ZDM**, Karlsruhe, v. 52, n. 6, p. 1113-1126, 2020.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13

HANNA, G.; DE VILLIERS, M. **Proof and proving in mathematics education**: the 19th ICMI study. Dordrecht: Springer, 2012.

HAREL, G.; SOWDER, L. Students' proof schemes: results from exploratory studies. *En*: SCHOENFELD, A. H.; KAPUT, J.; DUBINSKY, E. (ed.). **Research in collegiate mathematics education III**. Washington, DC: American Mathematical Society, 1998. p. 234-283.

JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Heidelberg, v. 96, n. 1, p. 1-16, 2017.

LAKATOS, I. **Proof and refutations**: the logic of mathematical discovery. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 1976.

LAVE, J.; WENGER, E. **Situated learning**: legitimate peripheral participation. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 1991.

LOCKWOOD, E.; DEJARNETTE, A. F.; THOMAS, M. Computing as a mathematical disciplinary practice. **Journal of Mathematical Behavior**, New Brunswick, v. 54, p. 1-18, 2019.

LYNCH, A. G.; LOCKWOOD, E. A comparison between mathematicians' and students' use of examples for conjecturing and proving. **Journal of Mathematical Behavior**, New Brunswick, v. 53, p. 323-338, 2019.

MARTÍN-MOLINA, V.; GONZÁLEZ-REGAÑA, A.; GAVILÁN-IZQUIERDO, J. M. Researching how professional mathematicians construct new mathematical definitions: A case study. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 49, n. 7, p. 1069-1082, 2018.

MEJÍA-RAMOS, J. P.; WEBER, K. Using task-based interviews to generate hypotheses about mathematical practice: mathematics education research on mathematicians' use of examples in proof-related activities. **ZDM**, Karlsruhe, v. 52, n. 6, p. 1099-1112, 2020.

MORALES RAMÍREZ, G.; RUBIO GOYCOCHEA, N.; LARIOS OSORIO, V. Tipificación de argumentos producidos por las prácticas matemáticas de alumnos del nivel medio en ambientes de geometría dinámica. **Bolema**, Rio Claro, v. 35, n. 70, p. 664-689, 2021.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS - NCTM. **Principles and standards for school mathematics**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

NATIONAL GOVERNORS ASSOCIATION CENTER FOR BEST PRACTICES AND COUNCIL OF CHIEF STATE SCHOOL OFFICERS - CCSSI. **Common core state standards for mathematics**. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010.

POLYA, G. **How to solve it**: a new aspect of mathematical method. Princeton: Princeton University Press, 1945.

RASMUSSEN, C.; WAWRO, M.; ZANDIEH, M. Examining individual and collective level mathematical progress. **Educational Studies in Mathematics**, Heidelberg, v. 88, n. 2, p. 259-281, 2015.

RASMUSSEN, C.; ZANDIEH, M.; KING, K.; TEPPO, A. Advancing mathematical activity: a practice-oriented view of advanced mathematical thinking. **Mathematical Thinking and Learning**, London, v. 7, n. 1, p. 51-73, 2005.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13

REID, D.; VALLEJO VARGAS, E. When is a generic argument a proof? *En*: STYLIANIDES, A. J.; HAREL, G. (ed.). **Advances in mathematics education research on proof and proving**. Cham: Springer International Publishing, 2018. p. 239-251.

SPORN, F.; SOMMERHOFF, D.; HEINZE, A. Beginning university mathematics students' proof understanding. *En*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 44., 2021, Khon Kaen. **Proceedings [...]** Khon Kaen: PME, 2021. p. 102-110. v. 4.

SRIRAMAN, B. **Handbook of the history and philosophy of mathematical practice**. Cham: Springer, 2020.

STAKE, R. E. **The art of case study research**. Thousand Oaks: Sage Publications, 1995.

STYLIANIDES, A. J.; HAREL, G. (ed.). **Advances in mathematics education research on proof and proving**. Cham: Springer, 2018.

TALL, D. (ed.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991.

TREFFERS, A. **Three dimensions.** A model of goal and theory description in mathematics education: the Wiskobas project. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1987.

WEBER, K.; DAWKINS, P.; MEJÍA-RAMOS, J. P. The relationship between mathematical practice and mathematics pedagogy in mathematics education research. **ZDM**, Karlsruhe, v. 52, n. 6, p. 1063-1074, 2020.

WEBER, K.; MEJIA-RAMOS, J. P. Why and how mathematicians read proofs: an exploratory study. **Educational Studies in Mathematics**, Heidelberg, v. 76, n. 3, p. 329-344, 2011.

WILDER, R. L. The cultural basis of mathematics. *En:* INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS, 1., 1950, Cambridge, MA. **Proceedings […]** Providence: American Mathematical Society, 1952. p. 258-271. v. 1.

Submetido em 11 de Novembro de 2021.
Aprovado em 18 de Julho de 2022.