

# Proyecto Fin de Grado Ingeniería Aeroespacial

## Modelado y diseño del sistema de control de reentrada en la atmósfera de un vehículo de lanzamiento

Autor: Alberto López Platero

Tutor: Carlos Bordons Alba

**Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2022





Proyecto Fin de Grado  
Ingeniería Aeroespacial

# **Modelado y diseño del sistema de control de reentrada en la atmósfera de un vehículo de lanzamiento**

Autor:

Alberto López Platero

Tutor:

Carlos Bordons Alba

Catedrático de Universidad

Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2022



Proyecto Fin de Grado: Modelado y diseño del sistema de control de reentrada en la atmósfera de un vehículo de lanzamiento

Autor: Alberto López Platero  
Tutor: Carlos Bordons Alba

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:



# Agradecimientos

---

La llegada al final de un camino en ocasiones pedregoso, arduo y empinado es la conclusión de un peregrinaje hacia el conocimiento y la felicidad. Este hito, similar a coronar una montaña de más de 4000 metros, no es más que una etapa en el viaje de la vida. Pese a la persecución de objetivos que se antojan alcanzables únicamente por deidades, siempre he tenido una filosofía clara: *«si tienes un ojo puesto en el destino que esperas alcanzar, sólo te queda otro para que te guíe en el viaje»*. En primer lugar, agradecer a mis padres Antonio y Loreto y a mi hermana Elena, que han sido un elemento fundamental para mantener ese ojo en el camino y disfrutarlo, por haberme ayudado a luchar contra las adversidades que me he encontrado y celebrar las pequeñas victorias que he conseguido. A mis amigos más cercanos, por hacerme feliz y mantenerme motivado. En el ámbito académico, agradecer la confianza puesta en mí desde el colegio, pasando por el instituto, hasta la universidad. Las instituciones públicas educativas han conseguido el reto más complicado al que se enfrentan, la formación a nivel de conocimiento y de raciocinio. También, agradecer a Carlos por su implicación en este trabajo, sin la cual no hubiera salido adelante. Por último, desarrollar este trabajo me ha permitido progresar personalmente gracias a la búsqueda constante de una versión mejor de mí, a la disciplina a lo largo de estos años y a la motivación que me han permitido seguir adelante aún cuando no se vislumbraba atisbo alguno de luz en la más profunda inmensidad. Gracias a todos los que han participado en esta etapa del viaje, sin vosotros no hubiera sido posible.

*Alberto López Platero  
Sevilla, 2022*





# Resumen

---

La irrupción en el sector espacial del concepto de sistemas de lanzamiento reutilizables ha conseguido hacer del espacio un lugar más accesible. Este trabajo se centra en la maniobra de descenso para la recuperación de un vehículo de lanzamiento. En él, se analizan las características del vehículo Falcon 9 en su descenso a tierra mediante el modelado aerodinámico, atmosférico y propulsivo. Con la finalidad de completar un aterrizaje satisfactorio, una vez validado el modelo, se diseñan los sistemas de control necesarios, el control de empuje y el de actitud. Por último se exploran alternativas para optimizar y mejorar tanto modelos como controladores.



# Abstract

---

The irruption of reusable launch vehicles concept in the space sector has turned out to be a more accessible way to reach the space. This project is focused in the descent maneuver for a launch system recovery. The aim of the project is to analyse the characteristics of a Falcon 9 vehicle and its descent to the launch platform by modeling the aerodynamics, propulsion and atmosphere conditions. In order to complete a successful launch, once the model is validated, the needed control systems are designed: thrust control system and attitude control system. Finally, aiming to optimize and improve either the model or controllers different alternatives are explored.



# Índice Abreviado

---

<i>Resumen</i>	III
<i>Abstract</i>	V
<i>Índice Abreviado</i>	VII
<i>Notación</i>	XI
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Historia de la exploración espacial	1
1.2 Objetivos	3
1.3 Estructura	4
<b>2 Lanzadores</b>	<b>5</b>
2.1 Organizaciones gubernamentales	5
2.2 SpaceX	5
2.3 Blue Origin	6
2.4 Virgin	7
2.5 "Cubesats"	7
2.6 ¿Por qué reutilizar los vehículos de lanzamiento?	8
<b>3 Modelización</b>	<b>9</b>
3.1 Modelo de vehículo	9
3.2 Definición del problema	10
3.3 Modelo de atmósfera	12
3.4 Modelo aerodinámico	13
3.5 Modelo propulsivo	16
<b>4 Leyes del movimiento</b>	<b>19</b>
4.1 Sistema de referencia	19
4.2 Ecuaciones del movimiento	23
<b>5 Modelado en Simulink</b>	<b>33</b>
5.1 Estructura	33
5.2 Comportamiento del sistema	36
<b>6 Sistema de control del empuje</b>	<b>45</b>
6.1 Objetivo	45
6.2 Estructura	45
6.3 Resultados	46
<b>7 Sistema de control de la actitud</b>	<b>49</b>
7.1 Objetivo	49

7.2	Estructura	49
7.3	Resultados	55
<b>8</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>61</b>
8.1	Trabajo futuro	62
	<i>Índice de Figuras</i>	63
	<i>Índice de Tablas</i>	65
	<i>Bibliografía</i>	67

# Índice

---

<i>Resumen</i>	III
<i>Abstract</i>	V
<i>Índice Abreviado</i>	VII
<i>Notación</i>	XI
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Historia de la exploración espacial	1
1.1.1 Guerra Fría	1
1.1.2 Décadas de los 80-00	2
1.1.3 Últimos años	3
1.2 Objetivos	3
1.3 Estructura	4
<b>2 Lanzadores</b>	<b>5</b>
2.1 Organizaciones gubernamentales	5
2.2 SpaceX	5
2.2.1 Lanzadores Falcon	6
2.2.2 Dragon	6
2.2.3 Starship	6
2.3 Blue Origin	6
2.3.1 New Shephard	6
2.3.2 New Glenn	6
2.3.3 Blue Moon	7
2.4 Virgin	7
2.4.1 Virgin Orbit	7
2.4.2 Virgin Galactic	7
2.5 "Cubesats"	7
2.6 ¿Por qué reutilizar los vehículos de lanzamiento?	8
<b>3 Modelización</b>	<b>9</b>
3.1 Modelo de vehículo	9
3.1.1 Características	9
3.2 Definición del problema	10
3.2.1 Fases de la reentrada	11
3.3 Modelo de atmósfera	12
3.4 Modelo aerodinámico	13
3.4.1 Derivadas de estabilidad	15
3.5 Modelo propulsivo	16
<b>4 Leyes del movimiento</b>	<b>19</b>
4.1 Sistema de referencia	19

4.1.1	Sistema Inercial Topocéntrico	19
4.1.2	Sistema de ejes horizonte local	19
4.1.3	Sistema de ejes viento	19
4.1.4	Sistema de ejes cuerpo	21
4.2	Ecuaciones del movimiento	23
4.2.1	Ecuaciones dinámicas	23
	Tensores de inercia	24
4.2.2	Ecuaciones cinemáticas de la posición	25
4.2.3	Ecuaciones cinemáticas de la actitud	25
	Ecuaciones cinemáticas de la actitud con ángulos de Euler	25
	Ecuaciones cinemáticas de la actitud con cuaterniones	26
4.2.4	Definición de los dispositivos de control. Fuerzas y momentos	28
	Hipótesis	30
	Ecuaciones del sistema	30
<b>5</b>	<b>Modelado en Simulink</b>	<b>33</b>
5.1	Estructura	33
5.1.1	Fuerzas y Torques	33
5.1.2	Ecuaciones del movimiento	34
5.1.3	Posición y actitud	35
5.2	Comportamiento del sistema	36
5.2.1	Caída libre vertical	37
5.2.2	Encendido de planta propulsora	38
5.2.3	Deflexión de superficie de control 1	39
5.2.4	Deflexión de superficie de control 4	41
5.2.5	Acoplamiento en actitud	43
<b>6</b>	<b>Sistema de control del empuje</b>	<b>45</b>
6.1	Objetivo	45
6.2	Estructura	45
6.3	Resultados	46
<b>7</b>	<b>Sistema de control de la actitud</b>	<b>49</b>
7.1	Objetivo	49
7.2	Estructura	49
7.2.1	Diseño del controlador para el ángulo de asiento	50
7.2.2	Diseño del controlador para el ángulo de trayectoria	52
7.2.3	Diseño de trayectoria para el aterrizaje	54
7.3	Resultados	55
7.3.1	Simulación dentro del rango operacional	55
7.3.2	Simulación fuera del rango operacional	57
<b>8</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>61</b>
8.1	Trabajo futuro	62
	<i>Índice de Figuras</i>	63
	<i>Índice de Tablas</i>	65
	<i>Bibliografía</i>	67



# Notación

---

$h$	Altura
$h_{p0}$	Altura de referencia para presión en modelo atmosférico
$h_{\rho 0}$	Altura de referencia para densidad en modelo atmosférico
$\rho$	Densidad del aire
$\rho_{SL}$	Densidad del aire al nivel del mar
$p$	Presión del aire
$p_{SL}$	Presión del aire al nivel del mar
$T$	Temperatura del aire
$\alpha_T$	Gradiente térmico
$D$	Resistencia
$V$	Velocidad del aire
$S$	Superficie
$C_d$	Coficiente de resistencia aerodinámica
$\alpha$	Ángulo de ataque
$M$ o $Mach$	Número de Mach
$Re$	Número de Reynolds
$C_{D,b}$	Coficiente de resistencia de la base
$C_{D,\delta_f}$	Coficiente de resistencia del <i>grid fin</i>
$Y$	Fuerza lateral
$L$	Momento de balance
$N$	Momento de guiñada
$M$	Momento de cabeceo
$l$	Distancia del <i>grid fin</i> al eje de simetría
$C_{Y_0}$	Coficiente de fuerza lateral sin ángulo de resbalamiento
$C_{Y\beta}$	Coficiente de fuerza lateral en función del ángulo de resbalamiento
$C_{Y\delta_f}$	Coficiente de fuerza lateral en función del ángulo de deflexión del <i>grid fin</i>
$C_{l_0}$	Coficiente de momento de balance sin ángulo de resbalamiento
$C_{l\beta}$	Índice de estabilidad estática lateral
$C_{l\delta_f}$	Coficiente de momento de balance en función del ángulo de deflexión del <i>grid fin</i>
$C_{n_0}$	Coficiente de momento de guiñada sin ángulo de resbalamiento
$C_{n\beta}$	Índice de estabilidad estática direccional
$C_{n\delta_f}$	Potencia de control en guiñada
$C_{m_0}$	Coficiente de momento de cabeceo para ángulo de ataque nulo
$C_{m\alpha}$	Índice de estabilidad estática longitudinal

$C_{m\delta_f}$	Potencia de control en cabeceo
$E$	Empuje
$\dot{m}$	Gasto másico
$V_s$	Velocidad de los gases de salida de la tobera
$A_s$	Área de salida
$p_s$	Presión de salida
$p_a$	Presión atmosférica
$T_0$	Temperatura de remanso
$p_0$	Presión de remanso
$a_0$	Velocidad del sonido de remanso
$\rho_0$	Densidad de remanso
$\gamma$	Coefficiente de dilatación adiabática
$\alpha$	Gradiente térmico
$M_s$	Mach de salida
$\gamma$	Ángulo de asiento de la velocidad
$\xi$	Ángulo de guiñada de la velocidad
$\mu$	Ángulo de balance de la velocidad
$\beta$	Ángulo de resbamiento
$\theta$	Ángulo de asiento
$\psi$	Ángulo de guiñada
$\phi$	Ángulo de balance
$\vec{\omega}$	Vector velocidad angular del vehículo
$\overline{\overline{\Omega}}$	Tensor asociado al vector velocidad angular
$\vec{g}$	Gravedad
$u$	Velocidad en el eje $x_b$
$v$	Velocidad en el eje $y_b$
$w$	Velocidad en el eje $z_b$
$p$	Velocidad angular alrededor del eje $x_b$
$q$	Velocidad angular alrededor del eje $y_b$
$r$	Velocidad angular alrededor del eje $z_b$
$\vec{H}$	Vector momento angular
$\vec{T}$	Vector de momentos

# 1 Introducción

---

Desde tiempos inmemoriales, el ser humano ha asociado la bóveda celeste y los astros que en ella se encuentran, con divinidades y dioses siempre rodeados de misticismo y perfección. Son muchas las civilizaciones antiguas que adoraban a los astros. En la mitología egipcia, el dios Ra es el dios del Sol y del origen de la vida, y de la mitología griega surgieron las constelaciones que conocemos hoy en día. Así, el ser humano ha intentado durante milenios darle forma y vida a un mundo totalmente desconocido e inmenso.

Con el paso de los siglos y la aportación de maestros como Aristóteles, Galileo o Kepler, se fue forjando una concepción cada vez más realista del Universo que nos rodea. Incluso Julio Verne [1], el popular escritor visionario, en 1865, se atrevió a imaginar una expedición hacia los cielos, lugar de las divinidades de las mitologías antiguas, en concreto hacia la Luna en su libro *De la Tierra a la Luna*.

## 1.1 Historia de la exploración espacial

No fue hasta la Segunda Guerra Mundial, donde un mayor desarrollo tecnológico y armamentístico podían inclinar la balanza hacia la victoria, que se dieron los primeros pasos hacia la carrera espacial. El principal artífice de esta visión fue Wernher Von Braun [2], amante de los relatos de aquel visionario escritor francés Julio Verne. Gracias a él, los nazis concibieron el misil balístico V-2, *Vergeltungswaffe-2* (Arma de la venganza-2), destinado a bombardear y realizar el mayor daño posible al enemigo.

El V-2 alemán fue el primer vehículo en abandonar la atmósfera terrestre el 20 de junio de 1944, superando la línea de Karman a más de 100 km de altura. A partir de este hito, unos años más tarde, comenzó la carrera espacial motivada por razones geopolíticas que propició el auge de las tecnologías espaciales.

### 1.1.1 Guerra Fría

La Guerra Fría fue un enfrentamiento entre el bloque occidental-capitalista, liderado por Estados Unidos (EEUU) y el bloque oriental-comunista liderado por la Unión Soviética (URSS). Esta tensión surgió después de la Segunda Guerra Mundial por motivos económicos, políticos, sociales e ideológicos lo que llevó a ambas potencias a participar e influir en conflictos alrededor del mundo. Dicha intrusión por parte de tanto EEUU como la URSS desembocó en guerras como en Vietnam o Afganistán. La tensión constante entre ambos bloques llevó consigo una inversión armamentística y militar sin precedentes, incluida la exploración espacial. En esta época se produce el nacimiento de la carrera espacial [3], la cual merece que se analice cada potencia por separado.

- **Estados Unidos**

Estados Unidos fue pionero en poner en órbita los primeros satélites de comunicaciones. Programas como el *Project Score*, que en 1958 fue el primer satélite de comunicaciones puesto en órbita, el *Syncom 2*, primer satélite en órbita geostacionaria y el *Syncom 3*, que se usó para retransmitir en directo en EEUU las Olimpiadas de 1964 de Tokyo.

Tras las sucesivas conquistas soviéticas en la carrera espacial, Estados Unidos lanzó numerosas misiones para explorar la Luna, *Pioneer*, *Ranger*, *Lunar Orbiter* o *Apollo*. El hito más conocido de la historia de la exploración espacial fue la llegada del hombre a la Luna el 16 de julio de 1969 a bordo del Apollo 11.

- **Unión Soviética**

La URSS logró el 4 de octubre de 1957 lanzar al espacio el primer satélite que orbitó la Tierra, el Sputnik 1. El satélite tenía el tamaño de un balón de baloncesto, pesaba 83 kilogramos y duró 20 días en órbita.

Unos meses más tarde, el 3 de noviembre de 1957, los rusos consiguieron poner en órbita al primer ser vivo a bordo del Sputnik 2. Lamentablemente, la perra Laika no sobrevivió debido a un fallo en el control de temperatura del vehículo. Estos dos hitos al conmocionaron de la Guerra Fría conmocionó a la opinión pública estadounidense.

En la carrera por llegar a la Luna, se desarrolló el programa de exploración *Luna* con el cual consiguieron acercarse a la inmediaciones selenocéntricas e incluso impactar en la Luna. Más adelante en 1961, la Unión Soviética fue de nuevo partícipe de la puesta en órbita del primer ser humano, Yuri Gagarin, a bordo de la Vostok 1. Años más tarde, en 1963 la primera mujer llegó al espacio. Valentina Tereshkova formó parte de una misión que duró 3 días, completando 48 vueltas alrededor de la Tierra.

Por último, tras el gran hito norteamericano de alcanzar la Luna en 1969, los rusos lideraron numerosas misiones interplanetarias entre las que destaca el programa Venera que logró alcanzar Venus en 1970.

El fin de la Guerra Fría tuvo lugar en 1975, simbolizado por el encuentro Apollo-Soyuz, una misión conjunta entre las agencias espaciales de ambos potencias.

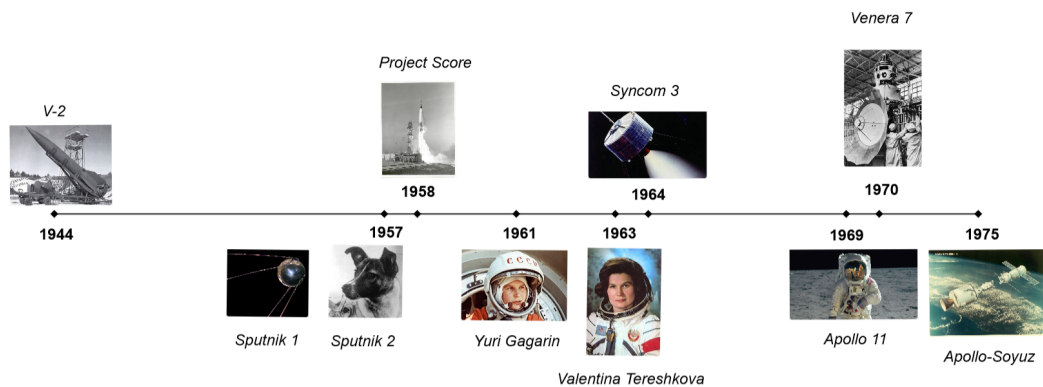


Figura 1.1 Cronograma carrera espacial.

### 1.1.2 Décadas de los 80-00

Una vez acabada la carrera espacial se llevaron a cabo misiones científicas y fueron puestas en órbita numerosas constelaciones de satélites para establecer sistemas de comunicaciones y navegación.

En estos años organizaciones gubernamentales como la NASA, la ESA o la agencia espacial rusa ROS-COSMOS tenían todo el protagonismo en el sector espacial. Las misiones científicas tenían como objetivo el estudio y escudriño del sistema solar y sus astros. Ejemplos [4] como *Galileo*, alcanzando la órbita joviana en 1995; *SOHO*, principal fuente de información del estado del Sol que se encuentra en una órbita Halo en torno al punto de Lagrange L1; *Cassini*, que llegó a Saturno en 2004; o la misión *New Horizons* con destino Plutón siendo el vehículo más rápido jamás lanzado desde la Tierra. También, se llevó a cabo la construcción de la Estación Espacial Internacional en 1998 en una órbita de 350 kilómetros de altura. En ella se han llevado a cabo estudios en muchos ámbitos de la ciencia en un entorno de ingravidez.

Más allá de las misiones científicas, se constituyeron las primeras constelaciones de satélites. Entre ellas destaca la constelación *GPS (Global Positioning System)*, constituida por 31 satélites fue un proyecto del ejército de EE.UU. que permite determinar la posición y velocidad en cualquier punto del globo terráqueo. Por otro lado, Rusia lanzó su propia constelación, *GLONASS* para geolocalización. En el campo de las comunicaciones, constelaciones como *Iridium*, *Inmarsat* o *Globalstar*, con cobertura global, supusieron una mayor seguridad y fiabilidad en sectores como el marítimo y el aéreo. Con el paso de los años el número de satélites en órbita baja (LEO) ha aumentado enormemente y consigo la basura espacial obligando a los satélites a realizar maniobras para evitar colisiones.

### 1.1.3 Últimos años

En las últimas décadas numerosas agencias espaciales se han sumado al sector espacial. Entre ellas la agencia espacial china (CNSA) o la agencia espacial india (ISRO) con constelaciones propias de satélites de navegación, *BeiDou* [5] y *IRNSS* [6]. Por otro lado, la ESA está en proceso de constituir la constelación *Galileo* en vista a sustituir al *GPS*. Sin embargo, la revolución que ha experimentado el sector espacial ha sido causada por la irrupción del sector privado, con empresas como *SpaceX*, *Blue Origin* o *Virgin*.

Los programas espaciales siempre han sido financiados por presupuestos multimillonarios únicamente alcanzables por las agencias gubernamentales. Sin embargo, la reducción del coste en el lanzamiento mediante el uso de vehículos reusables y el aumento de la eficiencia de los mismos ha permitido la explotación privada del espacio. Además, se están realizando satélites cada vez más pequeños denominados nanosatélites cuyo objetivo es reducir la carga de pago enviada al espacio y por lo tanto abaratar el coste del lanzamiento.

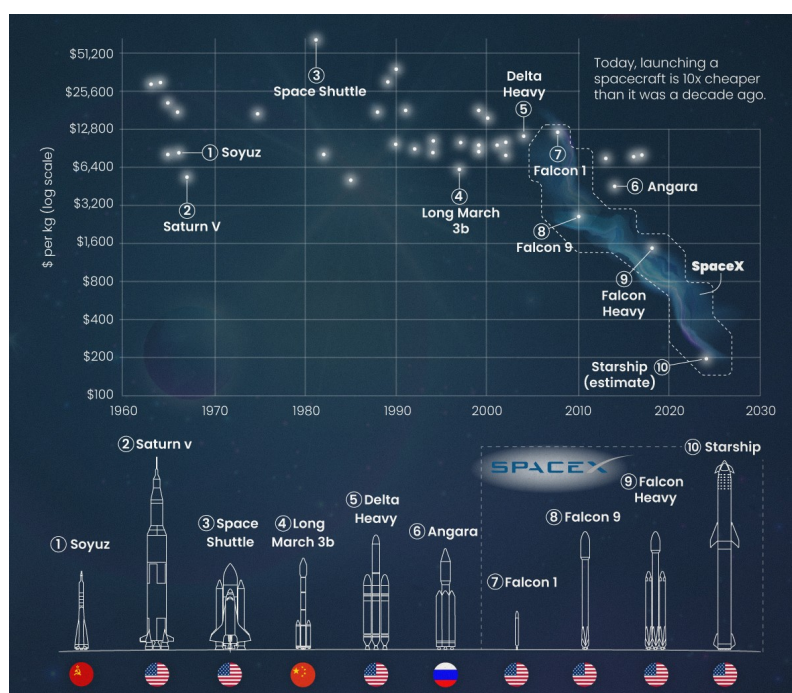


Figura 1.2 Coste de lanzamiento. Fuente (editada):[7].

En capítulos posteriores se describirá el estado actual de esta tecnología así como el potencial que tiene. La accesibilidad al espacio está aumentando y, con ello, la creación de nuevas empresas e incluso el turismo espacial.

## 1.2 Objetivos

El presente trabajo tiene como objetivo principal modelar y diseñar el sistema de control para la reentrada de un vehículo de lanzamiento, con el fin de recuperar íntegramente el vehículo y así reutilizarlo en misiones posteriores.

La línea de trabajo estará enfocada en simplificar el problema de tal manera que se pueda abordar académicamente sin abandonar la cercanía a la realidad que se pretende con este estudio. Se tomarán hipótesis justificadamente para diseñar los modelos con un nivel de profundidad suficiente para el correcto transcurso del problema.

Por otro lado, aún siendo un sistema de 6 grados de libertad no lineales el problema de control se va a acometer con controladores sencillos y sin optimizar como una primera aproximación a un problema mucho más complejo. Parte de la finalidad de este proyecto es también actuar como punto de partida para trabajos futuros a raíz de los resultados o modelos propuestos.

### **1.3 Estructura**

Previamente al planteamiento del problema, se define el estado del arte de los sistemas de lanzamiento, tanto de agencias gubernamentales como de empresas privadas, llegando al por qué de la elaboración de este trabajo y su utilidad futura.

Una vez especificado el motivo del estudio, se analizan las características del vehículo y se elaboran los modelos aerodinámico, propulsivo y de atmósfera con el suficiente grado de profundidad. Acto seguido, para finalizar la construcción del problema se exponen las ecuaciones que rigen el movimiento del vehículo en su descenso hacia la zona de aterrizaje. Un total de 6 grados de libertad gobiernan el vehículo de los cuales algunos son controlados y otros se restringen por simplificación.

Seguidamente, se comprueba la validez del modelo mediante simulaciones donde se analiza el comportamiento frente a las deflexiones de dispositivos de control o la ignición de la planta propulsora. En estas simulaciones es de especial interés cómo se comporta el sistema trabajando en torno a una indeterminación.

Una vez validado el modelo, es hora de diseñar los controladores para su gobierno. En primer lugar, se diseña el control por empuje con un control por relé y se prueba su viabilidad. En segundo lugar el control de actitud, más exigente que el anterior, se diseña mediante controladores proporcionales derivativos y de la misma manera se estudia su comportamiento analizando sus deficiencias.

Por último el modelo con sus sistemas de control incorporados es simulado y analizado para distintos puntos de aterrizaje, lo que permitirá llegar a las conclusiones y trabajos futuros en vista a mejorar el proyecto.

## 2 Lanzadores

---

El presente trabajo tiene como objetivo conseguir aterrizar un vehículo de lanzamiento. Esta tendencia comenzó recientemente con el desarrollo del Falcon 9 y se ha extendido rápidamente. Con este capítulo se pretende dar una visión de mercado de esta tecnología y su potencial. En él, se describirán los numerosos sistemas de lanzamiento utilizados para un amplio rango de misiones, desde misiones interplanetarias al turismo espacial. Además, se analizará el potencial que estos pueden tener en un futuro y la ventaja de reutilizarlos.

### 2.1 Organizaciones gubernamentales

Desde los inicios de la era espacial, las agencias espaciales de algunos países han sido partícipes de los hitos espaciales más relevantes de la humanidad. Actualmente, más países se han unido al progreso espacial como China (CNSA) o la India (ISRO). En esta sección se van a analizar los sistemas de lanzamiento de las organizaciones gubernamentales más importantes.

- **NASA**

La NASA tiene previsto con el *Space Launch System (SLS)* [8] sustituir al transbordador STS. Con un coste estimado de 10000 millones de dólares, una altura de 100 m y una capacidad de carga de hasta 130 toneladas para alcanzar una órbita LEO, será el vehículo con mayor carga de pago que existe. Además, será posible reducir a la mitad o más la duración de misiones interplanetarias hacia las inmediaciones del sistema solar.

- **ESA**

La ESA está desarrollando el lanzador Vega-C [9], un cohete de 35 m de altura capaz de transportar una masa de 2200 kg a una órbita polar de 700 km de altura. Vega-C será el primer cohete que integre el vehículo reusable *Space Rider*[10] que una vez acabada la misión reentrará en la atmósfera terrestre de manera controlada. Este sistema de lanzamiento estará destinado a poner en órbita desde *Cubesats* a grandes satélites.

- **ROSCOSMOS**

Soyuz-2 [11] es un nuevo vehículo de lanzamiento que permitirá en el futuro reemplazar los vehículos de lanzamiento Soyuz-U, Soyuz-FG y Molniya-M. Con una altura de 46,3 m y una masa de 312 000 kg, permitirá lanzar naves espaciales en varios tipos de órbitas: baja, media, altamente elíptica, heliosincrónica, geotransicional y geoestacionaria.

### 2.2 SpaceX

*SpaceX*, fundada por Elon Musk, es sin duda la empresa con proyectos más ambiciosos del sector. SpaceX ha ganado la atención mundial por una serie de hitos históricos. Es la única empresa privada capaz de recuperar una nave espacial desde la órbita terrestre baja, y en 2012 el vehículo *Dragon* se convirtió en la primera nave espacial privada en entregar carga en la Estación Espacial Internacional. También en 2020, se convirtieron en la primera empresa privada en llevar humanos al espacio.

Tal es el éxito, que tiene acuerdos con la NASA y ha visitado 29 veces, hasta la fecha, la Estación Espacial Internacional con la *Dragon Spacecraft*. También tiene previsto participar en el programa *Artemis* de la NASA para volver a la Luna con el vehículo *Starship*.

### 2.2.1 Lanzadores Falcon

El *Falcon 9* es el lanzador escogido para su modelado en este trabajo y sus características serán definidas en detalle en el siguiente capítulo. En cuanto al Falcon Heavy [12], es un vehículo formado por 3 lanzadores Falcon 9 cuyos 27 motores Merlin generan más de 22000 kN de fuerza al despegue, equivalente a dieciocho aviones Boeing-747. Es capaz de transportar una carga de pago de 16800 kg a Marte. Tiene una altura de 70 m y una masa de 1,42 t.

### 2.2.2 Dragon

La nave espacial *Dragon* [13] es capaz de transportar hasta 7 pasajeros hacia la órbita terrestre y más allá. Es la única nave espacial actualmente en vuelo que es capaz de devolver cantidades significativas de carga a la Tierra, y es la primera nave espacial privada que lleva humanos a la estación espacial.

### 2.2.3 Starship

El vehículo espacial *Starship* [14] y el cohete *Super Heavy* de SpaceX (denominados colectivamente como Starship) representan un sistema de transporte totalmente reutilizable diseñado para transportar tanto a la tripulación como a la carga a la órbita terrestre, la Luna, Marte y más allá. Starship será el vehículo de lanzamiento más poderoso del mundo jamás desarrollado, con la capacidad de transportar más de 100 toneladas métricas a la órbita terrestre y con una altura de 100 m.

Starship está diseñado para llevar satélites más lejos y a un costo marginal por lanzamiento más bajo que los vehículos Falcon actuales. Su capacidad de carga es tal que crea posibilidades para nuevas misiones, incluidos telescopios espaciales más grandes que el James Webb.

Además, se tiene previsto que Starship participe en misiones hacia la Luna y Marte. De hecho, en 2023, el empresario japonés Yusaku Maezawa y la tripulación de *dearMoon* [15] se convertirán en los primeros pasajeros civiles en una misión lunar del Starship, con un sobrevuelo de la Luna durante su viaje de una semana. Este vuelo es un paso importante para permitir el acceso de las personas que sueñan con viajar al espacio.

## 2.3 Blue Origin

Blue Origin fue fundada por Jeff Bezos con la visión de permitir un futuro donde millones de personas estén viviendo y trabajando en el espacio con el objetivo de beneficiar a la Tierra. Al igual que Space X, esta empresa defiende el reuso de sus vehículos de lanzamiento. Además, no descarta explotar los recursos que el Sistema Solar ofrece.

### 2.3.1 New Shepard

Nombrado en honor al astronauta de Mercury Alan Shepard, el primer estadounidense en ir al espacio, New Shepard [16] es un sistema de lanzamiento suborbital reutilizable diseñado para llevar a los astronautas y cargas útiles de investigación más allá de la línea de Kármán, el límite del espacio reconocido internacionalmente. Con New Shepard, Blue Origin tiene como objetivo hacer del espacio un lugar más accesible para las personas y explotar el turismo espacial.

### 2.3.2 New Glenn

Nombrado en honor al astronauta pionero John Glenn, New Glenn [17] es un vehículo de lanzamiento de carga pesada de configuración única capaz de transportar personas y cargas útiles de forma rutinaria a la órbita terrestre y más allá. Tiene una capacidad de transportar 13 toneladas métricas a una órbita estacionaria. Después de la separación de la primera etapa, esta vuela de regreso a la Tierra y aterriza en un barco en movimiento incluso con estados de mar gruesa.



### 2.3.3 Blue Moon

Blue Moon [18] es un módulo de aterrizaje flexible que entrega una amplia variedad de cargas útiles pequeñas, medianas y grandes a la superficie lunar. Ya sea carga o tripulación, su capacidad para proporcionar aterrizajes suaves y precisos permitirá una presencia humana sostenida en la Luna.

Para llevar a cabo esta misión será necesario el diseño del sistema de control para un correcto y seguro aterrizaje del módulo de aterrizaje. Es por eso que el estudio de la entrada de vehículos y su aterrizaje en otros planetas como Marte o la Luna tiene un gran potencial en futuras misiones.

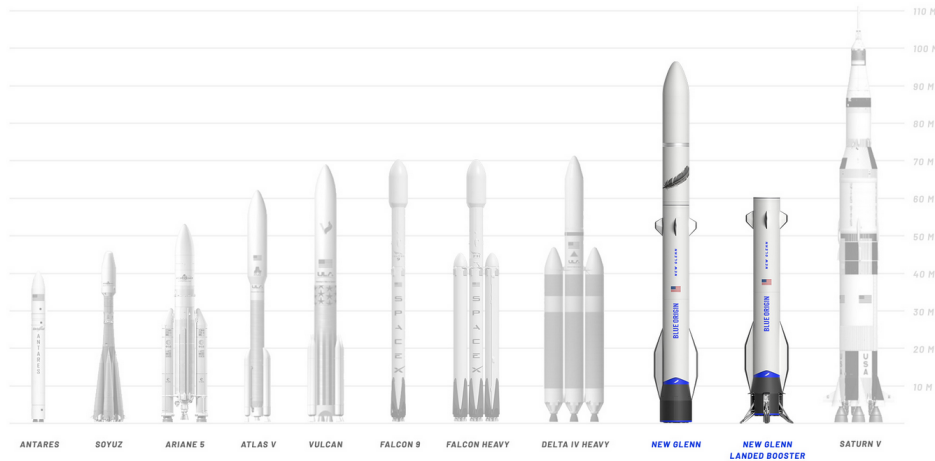


Figura 2.1 Lanzadores actuales. Fuente:[17].

## 2.4 Virgin

Virgin Group es un conglomerado multinacional fundado por Richard Branson. Este conglomerado tiene dos filiales llamadas Virgin Orbit y Virgin Galactic, con una visión prometedora hacia el sector aeroespacial.

### 2.4.1 Virgin Orbit

Más capaces que nunca, los satélites pequeños necesitan proveedores de lanzamiento que sean tan ágiles como las propias naves espaciales. Para satisfacer las necesidades de los fabricantes y operadores de satélites de hoy en día, Virgin Orbit ha desarrollado *LauncherOne*, el servicio de lanzamiento más flexible del mundo para satélites comerciales y construidos por el gobierno. Desde pequeñas empresas hasta grupos universitarios, Virgin Orbit está eliminando barreras al hacer que el espacio sea más accesible.

Estos servicios "low-cost" están en resonancia con la tendencia actual de reducir el tamaño de satélites a cubos de 10 cm de lado permitiendo utilizar lanzadores más pequeños. Virgin utiliza un Boeing 747 modificado para transportar el sistema de lanzamiento en sus alas para así una vez en el aire, realizar el lanzamiento.

### 2.4.2 Virgin Galactic

La filial Virgin Galactic está destinada a proporcionar vuelos suborbitales tripulados tanto para misiones científicas como para turismo espacial. El sistema de lanzamiento utilizado difiere de los actualmente vistos ya que se ha diseñado una aeronave para realizar el vuelo suborbital.

Esta aeronave está constituida a su vez por dos etapas, la primera etapa se asemeja a un avión convencional y realiza el vuelo en la atmósfera baja hasta una cierta altitud. Una vez alcanzada dicha altitud se desprende la segunda etapa, una aeronave supersónica que proyecta a los pasajeros a una altitud de 82 km para realizar un vuelo suborbital.

## 2.5 "Cubesats"

Tendemos a pensar en los satélites como enormes naves espaciales que se elevan sobre los ingenieros que los construyen. Considerando *Envisat*, *SOHO* y *GOCE*: todos los satélites de la ESA son similares en tamaño



## 3 Modelización

Para llevar a cabo la simulación de la maniobra de descenso del Falcon 9, en primer lugar, es necesario realizar una modelización del problema. Para ello se definirán los modelos de atmósfera, de planta propulsora o la aerodinámica del vehículo. Se establecerán ciertas hipótesis para simplificar el problema siempre y cuando no supongan el abandono del grado de realismo que se busca.

### 3.1 Modelo de vehículo

El vehículo seleccionado para este trabajo es el Falcon 9 diseñado por SpaceX, que consiguió ser la primera nave reusable en la historia espacial. Sin embargo, no se va a modelar el cohete en su totalidad, si no que sólo la primera etapa y la etapa intermedia (*first stage e interstage* en la figura 3.1).

En cuanto a la estructura, las paredes del tanque de combustible de la primera etapa de los vehículos Falcon están hechas de una aleación de aluminio y litio. También, los tanques se fabrican con soldadura por fricción y agitación, la técnica de soldadura más confiable y de mayor resistencia disponible. Un domo común separa los tanques LOX (*Liquid Oxygen*) y RP-1 (*Rocket Propellant*), y un tubo de transferencia de doble pared transporta LOX a través del centro del tanque RP-1 hasta la sección del motor. Además, cuatro *grid fins* cerca de la parte superior de la primera etapa junto con cuatro patas desplegables en la base son activadas para apoyar las operaciones de recuperación.

Estos *grid fins* serán el sistema de control principal del vehículo para el guiado hacia la zona de aterrizaje, los cuales modifican la actitud de la nave en su descenso. Su localización se encuentra en la base de la etapa intermedia (*interstage*).

La etapa intermedia de los vehículos Falcon, que conecta la primera y la segunda etapa, es una estructura de material compuesto que consta de un núcleo con patrón hexagonal de aluminio rodeado por capas frontales de fibra de carbono. La etapa intermedia actúa como carenado de la planta motora de la segunda etapa y se desprende junto con la primera etapa.

#### 3.1.1 Características

Las características principales de la primera etapa del Falcon 9 extraídas del manual de usuario [21], se encuentran en la tabla 3.1. Sin embargo, la información extraída del manual de usuario no es suficiente para modelar el problema en su totalidad, por lo que, en la descripción de los modelos aerodinámico y propulsivo se proporcionarán más características del vehículo.

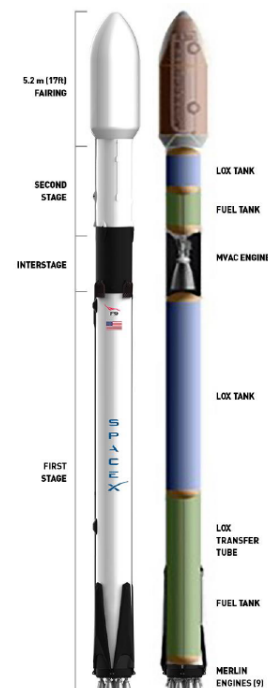
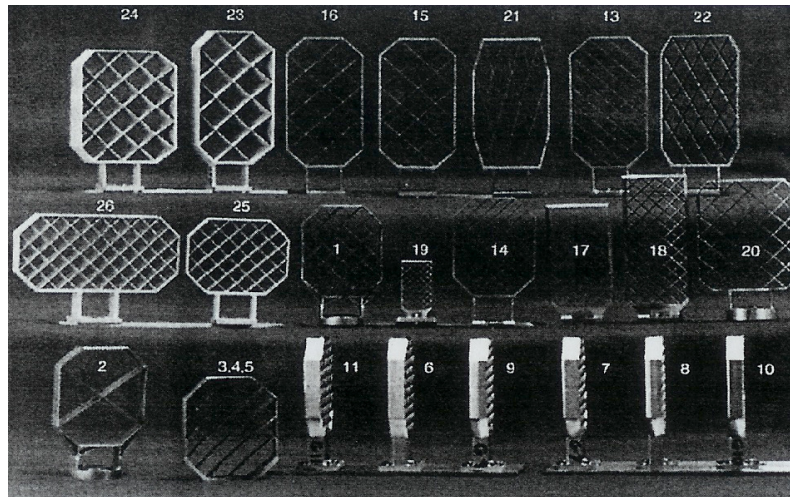


Figura 3.1 Falcon 9 [21].

- **Uso de *grid fins* para el guiado aerodinámico**

Normalmente para el guiado aerodinámico de un vehículo se utilizan sistemas donde se deflectan pequeños alerones que cambian la actitud del mismo, en adelante se referirán a estos como sistemas convencionales.

El Falcon 9, sin embargo utiliza los llamados *grid fins* para controlar su actitud. A continuación se verán las ventajas y desventajas de utilizar este sistema frente al convencional.



**Figura 3.2** Ejemplos de distintos mallados en *grid fins*. Fuente [22].

El diseño de estos *grid fins* permite un control aerodinámico efectivo sin aumentar las dimensiones totales.

El mallado de la aleta proporciona un ratio fuerza-peso elevado comparado con las aletas convencionales que pueden llegar a ser grandes. Como consecuencia, los *grid fins* poseen un coeficiente de momento menor y una mayor efectividad de control tanto a velocidades supersónicas como subsónicas. Otro atractivo de este control es que no entra en pérdida a elevados ángulos de ataque como ocurre con los sistemas convencionales.

Por otro lado, este sistema de control aumenta la resistencia comparado con el convencional. No obstante, para este problema es una característica positiva.

### 3.2 Definición del problema

El objetivo de este estudio es conseguir con éxito el aterrizaje de la primera etapa de un vehículo lanzador. La maniobra de descenso comienza con la separación de la primera etapa a 70 km de altura. A partir de este punto el vehículo sigue una trayectoria balística donde dada la gran velocidad y la ausencia casi total de atmósfera, hacen que siga ascendiendo. Durante esta trayectoria, donde se alcanzan los 135 km de altura, el cohete realiza una maniobra llamada *flip maneuver* que reorienta al vehículo para la reentrada. Acto seguido, se encienden 3 de los motores de la planta de potencia para modificar la trayectoria hacia la zona de aterrizaje a la vez que disminuye su velocidad. Conforme va descendiendo el vehículo y entrando en la atmósfera se despliegan los dispositivos de control *grid fins* para el guiado aerodinámico para que finalmente se produzca el último encendido donde el cohete se posa en el suelo. Las fases iniciales están regidas por la dinámica espacial y la mecánica orbital, a las que se les debería dedicar un estudio en exclusivo para alcanzar un grado de realismo aceptable. Por este motivo, en el presente trabajo se va a estudiar el problema por debajo de los 60 km de altura donde el vuelo atmosférico adquiere una mayor presencia (*entry burn* en la figura 3.3). Esta fase estará caracterizada por maniobras de frenado mediante la ignición de la planta propulsora y por el guiado aerodinámico.

Tabla 3.1 Parámetros del motor cohete.

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidad
Longitud primera etapa	$l_1$	47.14	m
Longitud etapa intermedia	$l_2$	9.76	m
Longitud total	$l$	56.9	m
Diámetro	$d$	3.66	m
Superficie frontal <sup>a</sup>	$S_b$	10.52	$m^2$
Superficie del <i>grid fin</i>	$S_f$	1	$m^2$
Superficie lateral	$S_{lat}$	208.254	$m^2$
Masa estructural <sup>b</sup>	$m_0$	19000	kg
Masa del propulsante <sup>c</sup>	$m_p$	8500	kg
Masa total	$m_t$	27 500	kg
Empuje a nivel del mar <sup>d</sup>	$E _{SL}$	7 607	kN
Empuje en vacío <sup>d</sup>	$E _V$	8 227	kN

<sup>a</sup> Superficie frontal de la base

<sup>b</sup> No está especificada en el manual de usuario pero se ha realizado una estimación

<sup>c</sup> Estimación en base al tiempo de encendido durante el descenso

<sup>d</sup> Empuje de los 9 motores

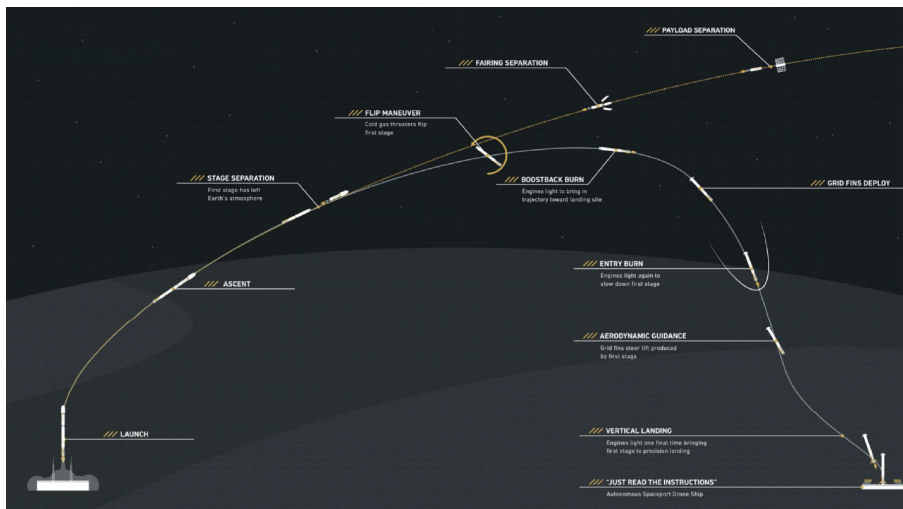


Figura 3.3 Trayectoria de reentrada del Falcon 9. Fuente: [21].

### 3.2.1 Fases de la reentrada

Una vez acotado el problema, este constará de varias fases.

- **Fase 1** Con los *grid fins* desplegados, se realiza otro encendido para disminuir la velocidad del vehículo. Esta fase comienza a 54 km de altura y dura aproximadamente 20 segundos.
- **Fase 2** Una vez reducida la velocidad, se utilizan los *grid fins* para controlar y guiar la nave hacia la zona de aterrizaje. El vehículo sigue disminuyendo de velocidad y atraviesa el régimen transónico, parte crítica de la misión, donde aparecen vibraciones y una elevada resistencia. Sin embargo las vibraciones y la integridad estructural de tanto la nave como de los *grid fins* no se van a tener en cuenta en este trabajo. Esta fase abarca alturas desde los 33 km hasta los 4 km.
- **Fase 3** Por último, ya en régimen subsónico, se realiza el encendido del motor número 9 en la figura 3.10 con el objetivo de disminuir la velocidad. Además con el control de los *grid fins* se garantiza la estabilidad y el seguimiento de la trayectoria del vehículo.

### 3.3 Modelo de atmósfera

El modelado de la atmósfera es un parámetro realmente difícil de simular. Esto es debido a la complejidad de establecer cuál es la esfera de influencia de la atmósfera que, como consecuencia, afecta a la reentrada balística de vehículos, dejando como incógnita el punto exacto del aterrizaje hasta instantes antes de que ocurra [23]. En función de que la atmósfera comience a friccionar con el vehículo antes o después, cambiará su trayectoria durante la reentrada. Además, las corrientes de aire en altura pueden superar los 180 km/h como ocurre en el fenómeno conocido como *Jet Stream* [24]. Por ello se realizarán diversas hipótesis con el objeto de simplificar la resolución del problema.

- **Hipótesis 1:** *Atmósfera en calma*

Como aproximación inicial del problema se van a obviar las corrientes de aire existentes en la atmósfera.

- **Hipótesis 2:** *Atmósfera exponencial*

Si bien en aviación es ampliamente utilizado el modelo ISA (*International Standard Atmosphere*) [25], este se extiende hasta una altura de 20 km. No obstante, el problema aquí planteado abarca altitudes iniciales de 54 km, lo que todavía se considera vuelo atmosférico. Está ampliamente aceptado que el límite de la atmósfera se encuentra en la línea de Karman a 100 km de altura [26]. Sin embargo, como se ha comentado anteriormente este límite es difícil de modelar ya que incluso a 200 km existe resistencia atmosférica que termina por modificar los elementos orbitales de un vehículo.

Ya que la mayor parte de la trayectoria del vehículo es atmosférica, este comportamiento no afectará en gran medida al modelado. Además, por simplicidad, se va a emplear un modelo de atmósfera exponencial

$$p(h) = p_{SL} e^{-\frac{h}{h_{p0}}} \quad (3.1)$$

$$\rho(h) = \rho_{SL} e^{-\frac{h}{h_{\rho 0}}} \quad (3.2)$$

donde  $p_{SL} = 101325 Pa$  y  $\rho_{SL} = 1.225 kg/m^3$ .

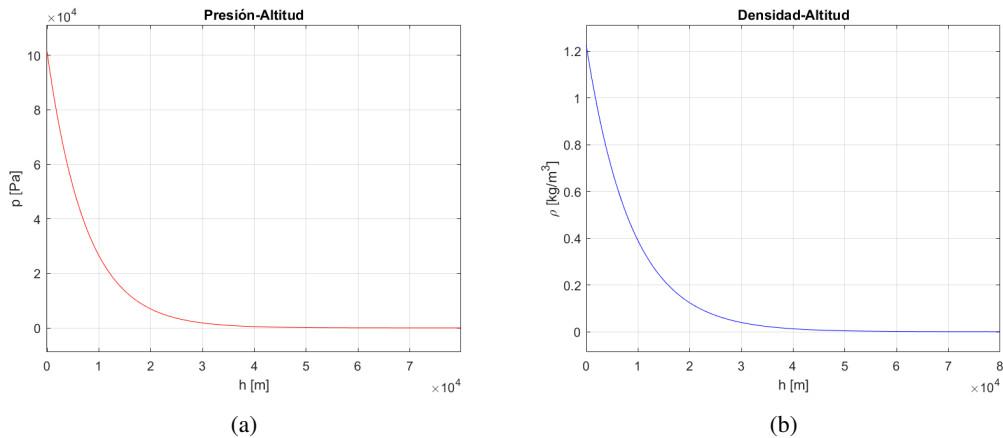


Figura 3.4 Modelo de atmósfera exponencial.

A la hora de seleccionar las altitudes de referencia  $h_{p0}$  y  $h_{\rho 0}$  se han tomado los valores de [27], donde "se minimiza la integral del error cuadrático respecto del modelo atmosférico de la NASA [28], a lo largo de los primeros 80 km" [27]. Los valores obtenidos son  $h_{p0} = 7461 m$  y  $h_{\rho 0} = 8725 m$ .

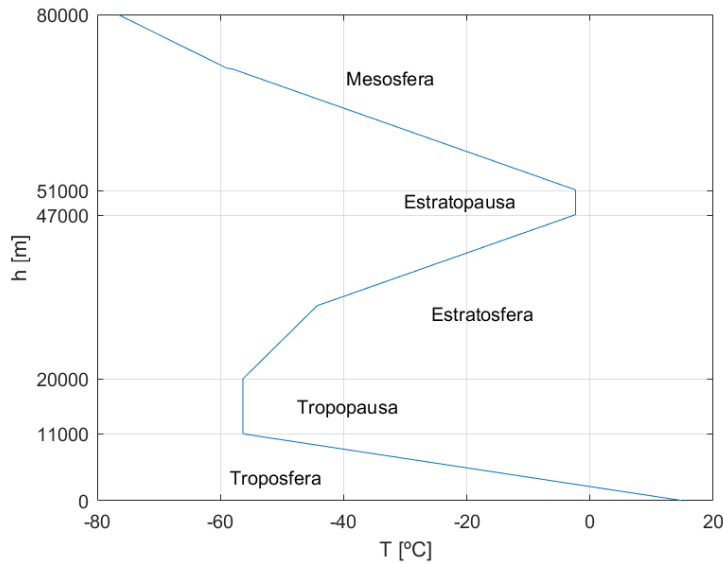
Por último, para definir la temperatura, no es posible seguir un modelo de atmósfera exponencial ya que, dependiendo en qué capa de la atmósfera se encuentre el vehículo experimentará gradientes positivos o negativos de temperatura. Este comportamiento se debe a la radiación en capas altas atmosféricas que aumentan su temperatura. El caso más evidente es la presencia de la capa de ozono en la estratosfera que

capta la radiación UV que provoca un gradiente positivo de temperatura en esa zona. Para el modelado de la temperatura se va a utilizar la Atmósfera Estándar Internacional (ISA).

$$T_n(h) = T_{n-1} + (h_n - h_{n-1})\alpha_{n-1} \quad (3.3)$$

**Tabla 3.2** Atmósfera Estándar Internacional.

Capa	Altura [m]	Gradiente Térmico [K/m]	Temperatura base [K]
Troposfera	0	-6.5	288.15
Tropopausa	11000	0	216.65
Estratosfera	20000	1	216.65
Estratosfera	32000	2.8	228.65
Estratopausa	47000	0	270.65
Mesosfera	51000	-2.8	270.65
Mesosfera	71000	-2	214.65



**Figura 3.5** Temperatura-Altitud.

### 3.4 Modelo aerodinámico

Durante la trayectoria de descenso, el vehículo deberá trabajar en régimen supersónico, transónico y subsónico. Para modelar la aerodinámica del vehículo, se define el coeficiente de resistencia  $C_d$  a partir de la expresión,

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D \quad (3.4)$$

Mediante análisis dimensional se obtiene la siguiente dependencia funcional,

$$C_D = C_D(\alpha, M, Re) \quad (3.5)$$

Este coeficiente dependerá del ángulo de ataque, el número de Mach y el número de Reynolds.

Así, el problema aerodinámico se puede dividir en dos partes. Una primera parte, donde se modela la resistencia de la base del vehículo y otra parte donde se modela la resistencia de los *grid fins*. Para ello se han propuesto las siguientes hipótesis:

- **Hipótesis 3:**  $C_D$  constante para  $Mach \in [0, 0.6]$

- **Hipótesis 4:**  $C_{D,b}$  constante para  $Mach > 3$
- **Hipótesis 5:**  $C_{D,f}$  constante para  $Mach > 2$

Estas hipótesis se han tomado para simplificar el problema aerodinámico en cierto grado sin obviar el régimen transónico y en base a resultados experimentales. Una vez tomadas dichas hipótesis queda modelar la transición del régimen subsónico al supersónico donde se produce un aumento puntual de la resistencia.

1. **Base:** De [29] se obtienen los siguientes resultados en función del número de Mach.

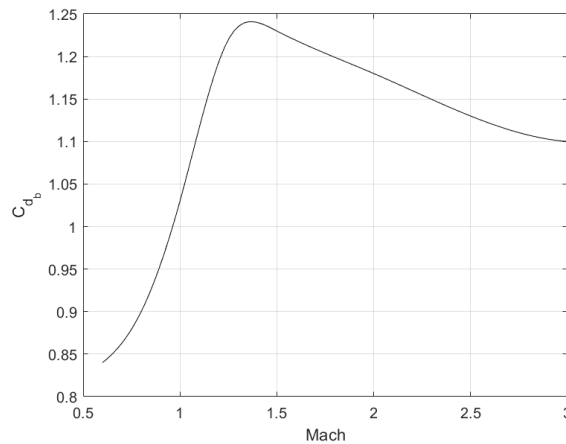
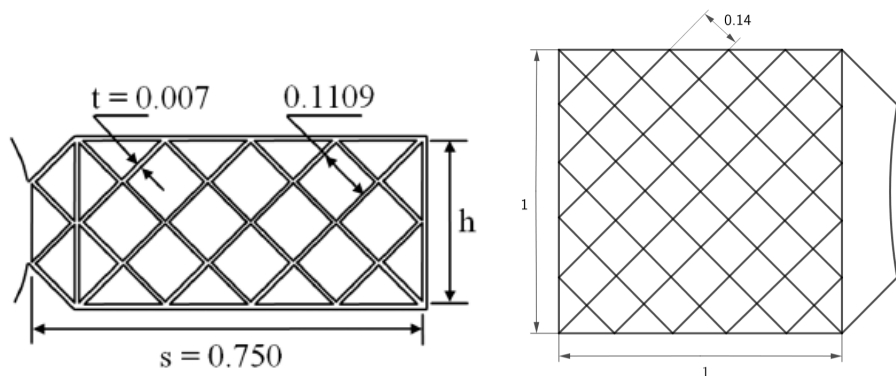


Figura 3.6 Coeficiente de resistencia de la base en función de Mach.

2. **Grid fins:** Si se observa la figura 3.2 existe una gran variedad de *grid fins* con mallado distinto. Una mayor densidad de mallado proporciona un coeficiente de momentos mayor (mayor potencia de control) y un aumento de resistencia. En este problema interesa que ambos valores sean altos. No obstante, un coeficiente de momentos mayor, requiere que el actuador trabaje bajo momentos más exigentes. También, una mayor resistencia pone en juego la integridad estructural del sistema de control. El mallado escogido es el del propio vehículo Falcon 9 [21].

Para definir la función del coeficiente de resistencia del *grid fin* respecto al Mach se parte de [30], con la geometría estudiada representada en la figura 3.7a. Sin embargo, véase la diferencia entre el *grid fin* del estudio y el que se utiliza en el vehículo en la figura 3.7. La razón por la que se ha utilizado estos resultados es que al coeficiente de resistencia es adimensional con la superficie, por lo que la diferencias de superficie no afectan. Lo único que afecta es la densidad del mallado, el cual guarda una gran similitud con la superficie de control de referencia.



(a) Geometría del *grid fin* del estudio. Fuente [30]. (b) Geometría del *grid fin* del vehículo.

Figura 3.7



La evolución del coeficiente de resistencia del *grid fin* sigue la misma tendencia, como cabe esperar, que la base. La gráfica representada en la figura 3.8 es relativa a una única superficie de control.

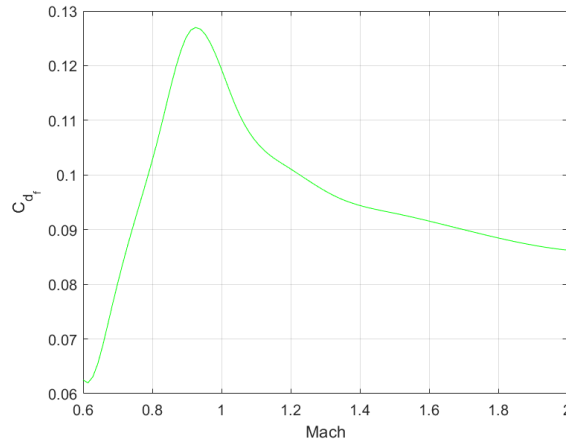


Figura 3.8 Coeficiente de resistencia del *grid fin* en función de Mach.

### 3.4.1 Derivadas de estabilidad

Una vez definido el coeficiente de resistencia del vehículo, el parámetro más importante del problema aerodinámico, es necesario definir los coeficientes aerodinámicos relativos a fuerzas transversales y momentos del vehículo. Estos coeficientes son denominados derivadas de estabilidad y por lo general se utilizan potentes softwares de CFD. No obstante, se ajustarán los valores empíricamente, en función a la evolución del sistema en la simulación o en base a ciertos estudios. Obsérvese que las derivadas de estabilidad dependen fuertemente de la geometría e inercia del vehículo.

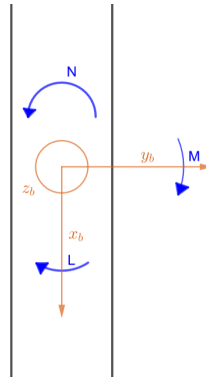


Figura 3.9 Momentos en ejes cuerpo.

Sean  $Y$  una fuerza transversal y  $L$ ,  $M$  y  $N$  los momentos respecto al eje  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivamente (figura 3.9), se obtienen los siguientes coeficientes adimensionalizados,

$$C_Y = \frac{Y}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} \quad C_l = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S l} \quad C_n = \frac{N}{\frac{1}{2}\rho V^2 S l} \quad C_m = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho V^2 S l} \quad (3.6)$$

Si expresamos las ecuaciones de fuerzas y momentos,

$$(C_Y)_A = C_{Y_0} + C_{Y_\beta} \beta + C_{Y_{\delta_f}} \delta_f \quad (3.7)$$

$$(C_l)_A = C_{l_0} + C_{l_\beta} \beta + C_{l_{\delta_f}} \delta_f \quad (3.8)$$

$$(C_n)_A = C_{n_0} + C_{n_\beta} \beta + C_{n_{\delta_f}} \delta_f \quad (3.9)$$

$$(C_m)_A = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_{\delta_f}} \delta_f \quad (3.10)$$

El estudio de todas las derivadas de estabilidad se sale fuera de los límites de este trabajo, a continuación se van a definir las derivadas más importantes,

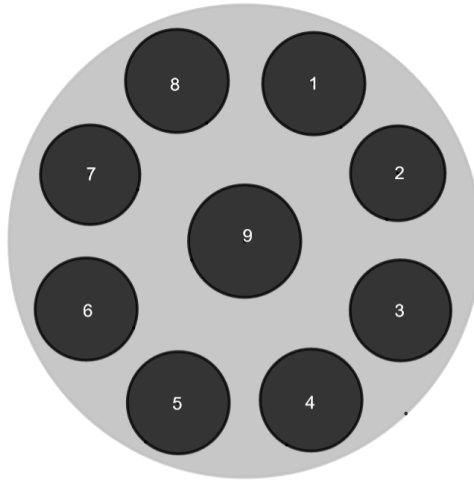
$$\begin{aligned} C_{Y_0} &= 0 & C_{Y_\beta} &= 1.5 & C_{Y_{\delta_f}} &= 0 \\ C_{l_0} &= 0 & C_{l_\beta} &= 0 & C_{l_{\delta_f}} &= 0 \\ C_{n_0} &= 0 & C_{n_\beta} &= 0.0012 & C_{n_{\delta_f}} &= 0.095^1 \\ C_{m_0} &= 0 & C_{m_\alpha} &= -0.0012 & C_{m_{\delta_f}} &= -0.095^1 \end{aligned}$$

En primer lugar, al ser un vehículo simétrico:  $C_{Y_0} = C_{l_0} = C_{n_0} = 0$ .  $C_{Y_\beta}$  se obtiene de [31] donde dada la geometría del vehículo se ha basado este coeficiente a la resistencia que ofrece un cilindro. Por otro lado en lo respecto al momento  $L$  no se ha contemplado ningún acoplamiento respecto a las superficies de control o ángulo de resbalamiento para este trabajo. En cuanto al índice de estabilidad estática direccional y longitudinal,  $C_{n_\beta}$  y  $C_{m_\alpha}$ , se han tomado los valores empíricamente en función de la evolución del sistema durante la simulación. Para que el vehículo sea estable, en todo momento,  $C_{n_\beta} > 0$  y  $C_{m_\alpha} < 0$ .

Por último, las derivadas de control  $C_{n_{\delta_f}}$  y  $C_{m_{\delta_f}}$  se obtienen de la relación  $S_{fin}/S$ . No obstante, a la hora de la definición de las ecuaciones se verá con más detalle las derivadas de control y su sentido.

### 3.5 Modelo propulsivo

El vehículo está compuesto por 9 motores *Merlin 1D* cuya distribución en planta se puede observar en la figura (3.10) y usan como combustible oxígeno líquido y queroseno RP-1 [21].



**Figura 3.10** Distribución de la planta motora.

La ecuación que define el empuje proporcionado por una tobera es

$$E = \dot{m}V_s + A_s(p_s - p_a) \quad (3.11)$$

<sup>1</sup> Estos valores no se utilizan en las ecuaciones del problema pero son cualitativos para analizar la estabilidad el vehículo y su potencia de control

Dada esta ecuación, el empuje del motor cohete depende en mayor medida de las condiciones de los gases en la cámara de combustión siendo indiferente la velocidad de vuelo. Si bien, la presión atmosférica afecta negativamente al empuje. A continuación, se han tomado una serie de hipótesis con el objetivo de simplificar el modelo.

- **Hipótesis 6:** *Gasto másico constante*

El gasto másico se define como  $\dot{m} = \rho(s)V(s)A(s)$  donde  $s$  es el parámetro que define la sección de la tobera.

- **Hipótesis 7:** *Evolución isentrópica dentro de la tobera*

Dada una evolución isentrópica se cumple:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_s^2 \quad (3.12)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_s^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.13)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_s^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (3.14)$$

Como consecuencia de la isentropía, las magnitudes de remanso son constantes en toda la tobera. Reformulando la ecuación del gasto másico y utilizando las ecuaciones (3.12) y (3.14):

$$\dot{m} = \rho_0 a_0 M(s) A(s) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M(s)^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (3.15)$$

Si tomamos como referencia la sección de salida, con el gasto másico, el coeficiente de dilatación adiabático y las magnitudes de remanso constantes, en la ecuación (3.15), da lugar a un Mach de salida constante. A su vez, según las ecuaciones (3.12), (3.13) y (3.14), la temperatura, presión y densidad a la salida también serán constantes.

Dadas las hipótesis 8 y 9, si las condiciones en la cámara de combustión son constantes, entonces el Mach, temperatura, presión y densidad de salida son constantes.

- **Hipótesis 8:** *Tobera adaptada a nivel del mar ( $p_s = p_a|_{SL}$ )*

Tomadas estas hipótesis es posible definir los parámetros que caracterizan al motor cohete a partir de los datos [21]. Además, de la ecuación (3.11) se deduce que el único parámetro que varía el empuje es la presión atmosférica que a su vez dependerá de la altitud. En la figura (3.11) el empuje varía desde 914 kN a nivel del mar a 982 kN a medida que la altitud es mayor.

**Tabla 3.3** Parámetros del motor cohete.

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidad
Empuje a nivel del mar	$E _{SL}$	914	kN
Empuje en vacío	$E _V$	982	kN
Impulso específico en vacío	$I_{sp} _V$	310	s
Área de salida	$A_s$	0.6799	m <sup>2</sup>
Gasto másico	$\dot{m}$	300.5857	kg/s
Velocidad de salida	$V_s$	3041.0998	m/s
Presión de salida	$p_s$	101325	Pa

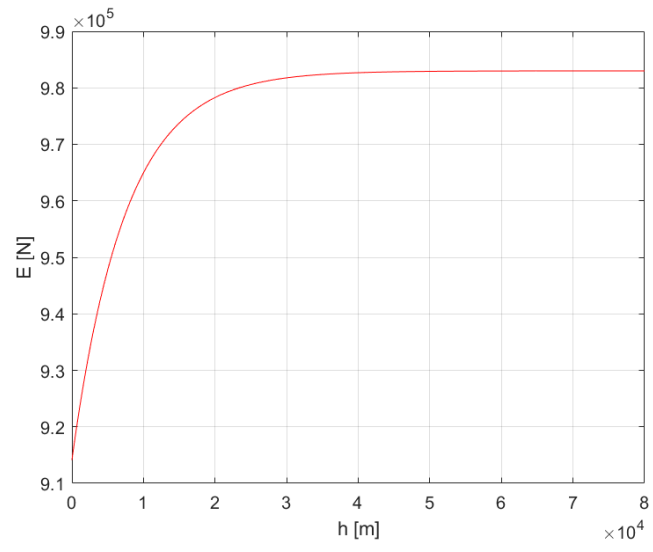


Figura 3.11 Empuje-Altitud.

## 4 Leyes del movimiento

---

Es hora de plantear las leyes del movimiento que caracterizan al sistema. Sin embargo, antes de comenzar con su planteamiento, es necesario establecer los sistemas de referencia que se utilizarán en el problema: el sistema inercial topocéntrico, el sistema de ejes horizonte local, el sistema de ejes viento y el sistema de ejes cuerpo. Todo ello, para determinar la actitud del vehículo y su movimiento a lo largo de su trayectoria. Una vez definidos los sistemas de referencia, se plantearán las ecuaciones que rigen el movimiento del vehículo: ecuaciones dinámicas, ecuaciones cinemáticas de la posición y ecuaciones cinemáticas de la actitud. Un total de 6 ecuaciones, con 6 incógnitas: las velocidades en cada eje y los ángulos de Euler.

### 4.1 Sistema de referencia

Para abordar las ecuaciones que afectan al vehículo es necesario establecer los distintos sistemas de referencia que van a participar en el problema. En primer lugar se definen los sistemas de referencia inerciales donde a partir de los cuales se definirá el sistema de referencia relativo al viento y al vehículo.

#### 4.1.1 Sistema Inercial Topocéntrico

Para la definición de este sistema de referencia  $T(O, x, y, z)$  se toma la hipótesis de Tierra plana. Con ello, la superficie terrestre es plana y cualquier sistema de referencia fijado en ella (topocéntrico) es inercial, los ejes se definen como:

- $O$  (origen): cualquier punto de la superficie.
- Eje  $x$ : Dirección Norte.
- Eje  $y$ : Dirección Este.
- Eje  $z$ : Completa un triedro a derechas (dirigido hacia abajo).

#### 4.1.2 Sistema de ejes horizonte local

El Sistema de ejes horizonte local  $H(O_h, x_h, y_h, z_h)$  surge de la translación del Sistema Inercial Topocéntrico al centro de masas del vehículo. Los ejes de horizonte local también forman un sistema inercial ya que su orientación coincide en todo momento con los ejes  $T(O, x, y, z)$ .

- $O_h$  (origen): Centro de masas del vehículo.
- Eje  $x_h$ : Dirección Norte.
- Eje  $y_h$ : Dirección Este.
- Eje  $z_h$ : Completa un triedro a derechas (dirigido hacia abajo).

#### 4.1.3 Sistema de ejes viento

El sistema de ejes viento  $W(O_w, x_w, y_w, z_w)$  es solidario con el movimiento del vehículo respecto al aire.

- $O_w$  (origen): Centro de masas del vehículo.

- Eje  $x_w$ : Tiene la misma dirección y sentido que el vector velocidad aerodinámica  $\vec{V}$ .
- Eje  $z_w$ : Contenido en el plano de simetría del vehículo y dirigido hacia abajo para un ángulo de asiento ( $\gamma$ ) nulo.
- Eje  $y_w$ : Completa un triedro a derechas.

La orientación de los ejes viento con respecto a los ejes de horizonte local se puede definir a través de 3 ángulos:

1. Ángulo de asiento de velocidad ( $\gamma$ ): es el ángulo formado por el vector velocidad aerodinámica  $\vec{V}$  y el plano del horizonte local. Se considera positivo cuando el vector apunta hacia abajo, a diferencia del criterio de signos utilizado en la literatura [32], [33], debido a que, por conveniencia, es más intuitivo trabajar en este problema con un ángulo de asiento apuntando hacia abajo (véase figura 4.1).
2. Ángulo de guiñada de velocidad ( $\chi$ ): es el ángulo formado por la proyección del vector velocidad aerodinámica  $\vec{V}$  sobre el plano horizonte local con la dirección norte. Se considera positivo hacia el este (sentido horario).
3. Ángulo de balance o alabeo de velocidad ( $\mu$ ): es el ángulo que forma el eje  $y_w$  con el plano horizonte local. Para el criterio de signo ver figura (4.2)

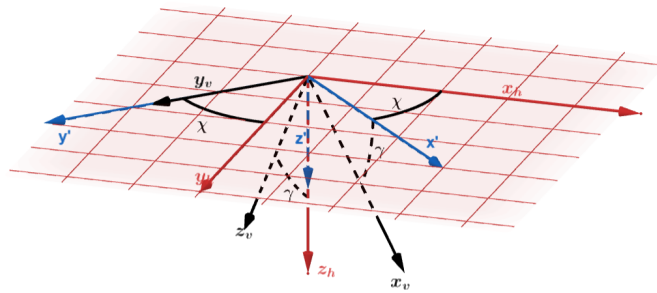


Figura 4.1 Sistema de ejes horizonte local y ejes viento I.

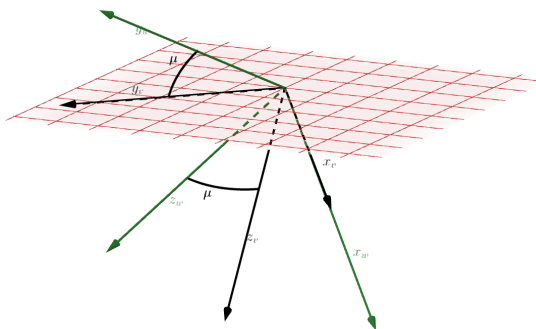


Figura 4.2 Sistema de ejes horizonte local y ejes viento II.

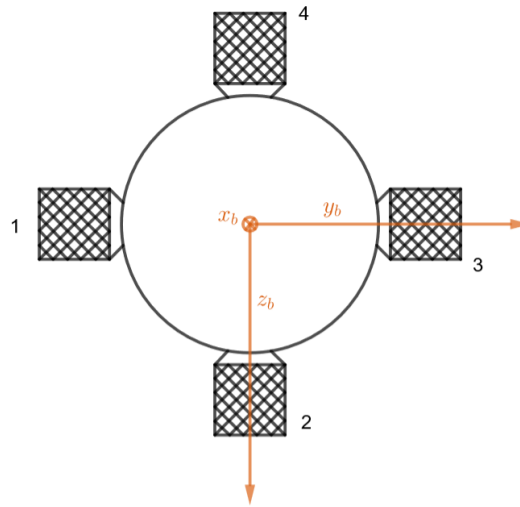
Para la formulación de las ecuaciones será necesaria una matriz de giro que permita transformar magnitudes de un sistema a otro. La transformación  $H \rightarrow W$ , se obtiene a partir de los ejes horizonte local mediante una rotación de ángulo  $\chi$  alrededor del eje  $z_h$ , seguida de una rotación de ángulo  $\gamma$  alrededor del eje  $y'$ , seguida de otra rotación de ángulo  $\mu$  alrededor del eje  $x''$ .

$$\begin{aligned}
[T]^{WH} &= [T]^{WX''} \cdot [T]^{X''X'} \cdot [T]^{X'H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\mu & \sin\mu \\ 0 & -\sin\mu & \cos\mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\gamma & 0 & \sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\chi & \sin\chi & 0 \\ -\sin\chi & \cos\chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\chi & \cos\gamma\sin\chi & \sin\gamma \\ -\cos\mu\sin\chi - \sin\mu\sin\gamma\cos\chi & \cos\mu\cos\chi - \sin\mu\sin\gamma\sin\chi & \sin\mu\cos\gamma \\ \sin\mu\sin\chi - \cos\mu\sin\gamma\cos\chi & -\sin\mu\cos\chi - \cos\mu\sin\gamma\sin\chi & \cos\mu\cos\gamma \end{pmatrix} \quad (4.1)
\end{aligned}$$

#### 4.1.4 Sistema de ejes cuerpo

El sistema de ejes cuerpo  $B(O_b, x_b, y_b, z_b)$  se mueve solidariamente con el vehículo, se define como:

- $O_b$  (origen): Centro de masas del vehículo.
- Eje  $x_b$ : En la misma dirección que el eje de simetría del vehículo.
- Eje  $z_b$ : Contenido en el plano de simetría del vehículo y dirigido hacia abajo para un ángulo de asiento ( $\gamma$ ) nulo.
- Eje  $y_b$ : Completa un triedro a derechas.



**Figura 4.3** Vista de planta del vehículo (a escala).

La orientación de los ejes cuerpo con los ejes viento se puede definir mediante dos ángulos.

1. Ángulo de resbalamiento ( $\beta$ ): es el ángulo formado por el vector velocidad aerodinámica  $\vec{V}$  con el plano  $x_b z_b$ , positivo cuando el aire entra por la derecha.
2. Ángulo de ataque ( $\alpha$ ): es el ángulo formado por la proyección del vector velocidad aerodinámica  $\vec{V}$  sobre el plano  $x_b z_b$  y el eje  $x_b$ .

La transformación  $W \rightarrow B$ , se obtiene a partir de los ejes viento mediante una rotación de ángulo  $\beta$  alrededor del eje  $z_w$ , seguida de una rotación de ángulo  $\alpha$  alrededor del eje  $y_b$ , quedando la matriz de transformación,

$$[T]^{BW} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \sin\beta & -\cos\alpha \cos\beta & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha \cos\beta & -\sin\alpha \sin\beta & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

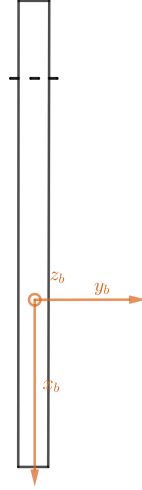


Figura 4.4 Vista de alzado del vehículo (a escala).

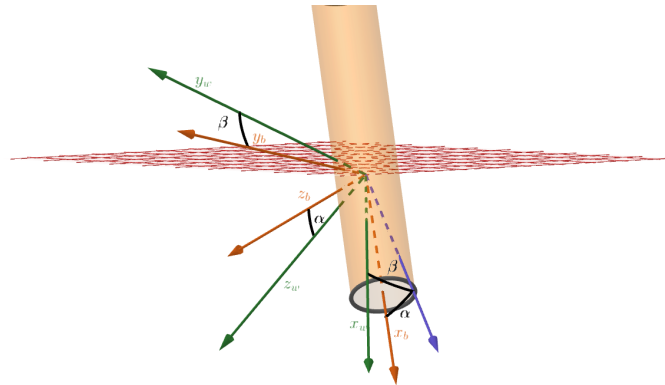


Figura 4.5 Sistema de ejes viento y ejes cuerpo.

Por otro lado la orientación de los ejes cuerpo con respecto a los ejes horizonte local está dada por tres ángulos.

1. Ángulo de asiento, o *pitch angle* ( $\theta$ ): ángulo que forma el eje  $x_b$  con el plano horizonte local, positivo hacia abajo. De la misma manera que anteriormente este criterio de signos, diferente de la literatura se ha escogido para un mayor sentido físico. Se cumple la relación  $\theta = \alpha + \gamma$
2. Ángulo de guiñada, o *yaw angle* ( $\psi$ ): ángulo que forma la proyección de  $x_b$  sobre el plano horizonte local con la dirección norte, positivo hacia el este. Se cumple la relación  $\psi = \beta + \chi$
3. Ángulo de balance, o *roll angle* ( $\phi$ ): es el ángulo formado entre  $y_b$  y el plano horizonte local, positivo hacia la derecha.



La transformación  $H \rightarrow B$ , se obtiene a partir de los ejes horizonte local mediante una rotación de ángulo  $\psi$  alrededor del eje  $z_h$ , seguida de una rotación de ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $y'$ , seguida de otra rotación de ángulo  $\phi$  alrededor del eje  $x''$ .

$$[T]^{BH} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & \sin\theta \\ -\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\theta\sin\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\psi - \cos\phi\sin\theta\cos\psi & -\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\sin\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

## 4.2 Ecuaciones del movimiento

A la hora de obtener las ecuaciones escalares del movimiento es necesario proyectar las ecuaciones vectoriales en forma matricial en un sistema de ejes determinado. Más adelante, para la determinación de las ecuaciones dinámicas, resultará necesario proyectar vectores definidos por un producto vectorial. Así, dado un vector  $\vec{\omega}$  y un tensor asociado  $\overline{\overline{\Omega}}$ ,

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad \overline{\overline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

que permite escribir  $\vec{A} = \vec{\omega} \times \vec{a} = \overline{\overline{\Omega}} \cdot \vec{a}$

Además, se han tomado ciertas hipótesis para formular las leyes del movimiento que rigen sobre el vehículo.

- **Hipótesis 9: Tierra plana**

En primer lugar, se ha mencionado de manera discreta esta hipótesis a la hora de definir el sistema topocéntrico inercial. Además, el problema comienza a menos de 60 km de altura y se estudia exclusivamente el vuelo atmosférico, desatendiendo la trayectoria orbital que ha seguido antes de llegar al punto de inicio de este problema. De hecho, esta etapa de descenso es en mayor parte vertical, por tanto, la hipótesis de Tierra plana es viable.

- **Hipótesis 10: Gravedad constante**

La gravedad solamente disminuye un 1.55 % a una altura de 60 km por lo que también es una buena aproximación inicial.

- **Hipótesis 11: Posición del centro de gravedad constante**

Si bien se tiene en cuenta la disminución del peso debida a la combustión del combustible, a la hora de plantear las ecuaciones dinámicas no se tendrá en cuenta el cambio de posición del centro de gravedad.

### 4.2.1 Ecuaciones dinámicas

En primer lugar se va llevar a cabo la formulación del equilibrio de fuerzas del sistema. Se parte de la formulación matricial,

$$m \left( \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_I = (\vec{F}_{A,T})_B + m(\vec{g})_I \quad (4.5)$$

Para obtener las ecuaciones dinámicas escalares se hará uso del siguiente resultado de la Mecánica del Sólido Rígido. Sea un sistema de referencia fijo F y otro móvil M, la relación entre las derivadas temporales viene dada por

$$\left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_F = \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_M + \vec{\omega}_{MF} \times \vec{A} \quad (4.6)$$

Este resultado aplicado a la velocidad en el sistema de ejes cuerpo y el sistema topocéntrico se obtiene

$$\left( \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_I = \left( \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_B + \vec{\omega}_{BI} \times (\vec{V})_B \quad (4.7)$$

y sustituyendo en (4.5)

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_B + \vec{\omega}_{BI} \times (\vec{V})_B = \frac{1}{m}(\vec{F}_{A,T})_B + (\vec{g})_I \quad (4.8)$$

Ahora definiendo las velocidades lineales y angulares en ejes cuerpo como

$$(\vec{V})_B = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (\vec{\omega})_{BI} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

proyectando en ejes cuerpo y despejando, obtenemos el siguiente resultado

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} F_{A,T} + mg \cdot \sin\theta \\ F_{A,T} + mg \cdot \sin\phi \cos\theta \\ F_{A,T} + mg \cdot \cos\phi \cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot v - q \cdot w \\ p \cdot w - r \cdot u \\ q \cdot u - p \cdot v \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Una vez realizado el análisis de fuerzas, queda realizar el equilibrio de momentos. Dada la simetría del vehículo, el momento angular viene dado por la expresión,

$$(\vec{H})_B = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Dada la geometría del vehículo, con simetría radial, la matriz de tensores de inercia se simplifica teniendo en cuenta que  $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ . Teniendo en cuenta que la derivada del momento angular respecto a los ejes inerciales da lugar a los momentos aplicados sobre el vehículo y aplicando además la expresión (4.6) se obtiene,

$$\vec{T} = (\dot{\vec{H}})_I = (\dot{\vec{H}})_B + (\vec{\omega})_{BI} \times (\vec{H})_B \quad (4.12)$$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx}\dot{p} + qr(I_{zz} - I_{yy}) \\ I_{yy}\dot{q} + pr(I_{xx} - I_{zz}) \\ I_{zz}\dot{r} + pq(I_{yy} - I_{xx}) \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Despejando las componentes diferenciales del vector de velocidades angulares  $\vec{\omega}_{BI}$  queda,

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (L - qr(I_{zz} - I_{yy}))/I_{xx} \\ (M - pr(I_{xx} - I_{zz}))/I_{yy} \\ (N - pq(I_{yy} - I_{xx}))/I_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

### Tensores de inercia

Para la definición de las componentes del tensor de inercia se ha supuesto el vehículo como un cilindro macizo. A la hora de calcular la integral, se ha utilizado el siguiente cambio de variable que parametriza el cilindro.

$$\begin{pmatrix} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \\ z = z \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

$$I_{xx} = \int_{\tau} \rho(x^2 + y^2) d\tau = \rho \int_0^h \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 d\theta dr dz = \frac{\rho h R^4 \pi}{2} \quad (4.16)$$

$$I_{yy} = \int_{\tau} \rho(y^2 + z^2) d\tau = \rho \int_0^h \int_0^R \int_0^{2\pi} r(r^2 \sin^2\theta + z^2) d\theta dr dz = \frac{\rho h R^4 \pi}{4} + \frac{\rho h^3 R^3 \pi}{3} \quad (4.17)$$

$$I_{zz} = \int_{\tau} \rho(x^2 + z^2) d\tau = \rho \int_0^h \int_0^R \int_0^{2\pi} r(r^2 \cos^2\theta + z^2) d\theta dr dz = \frac{\rho h R^4 \pi}{4} + \frac{\rho h^3 R^3 \pi}{3} \quad (4.18)$$

Definiendo la densidad como

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 h} \quad (4.19)$$

quedan las siguientes expresiones de los tensores de inercia,

$$I_{xx} = \frac{MR^2}{2} \quad (4.20)$$

$$I_{yy} = \frac{MR^2}{2} + \frac{Mh^2}{3} \quad (4.21)$$

$$I_{zz} = \frac{MR^2}{2} + \frac{Mh^2}{3} \quad (4.22)$$

#### 4.2.2 Ecuaciones cinemáticas de la posición

Las ecuaciones cinemáticas definen la trayectoria del cohete en función del tiempo. Para la definición de las ecuaciones cinemáticas escalares se parte de la formulación matricial en ejes inerciales (horizonte local),

$$\left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)_I \right]^I = [V]^I \quad (4.23)$$

No obstante una vez integrada la ecuación 4.10 se obtendrán las componentes de la velocidad en ejes cuerpo. Por tanto para la proyección en ejes horizonte local se tendrá que hacer uso de la matriz de transformación  $B \rightarrow H$ , siendo esta la matriz traspuesta a 4.3

$$[V]^W = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \rightarrow [V]^I = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = [T]^{HB} \cdot [V]^B \quad (4.24)$$

a partir de la igualdad (4.24) y teniendo en cuenta que el eje vertical  $z_h$  apunta hacia abajo y por tanto  $h = -z$  se obtienen las ecuaciones cinemáticas:

$$\frac{dx}{dt} = (\cos\theta\cos\psi)u + (-\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\sin\theta\cos\psi)v + (\sin\phi\sin\psi - \cos\phi\sin\theta\cos\psi)w \quad (4.25)$$

$$\frac{dy}{dt} = (\cos\theta\sin\psi)u + (\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\theta\sin\psi)v + (-\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\sin\theta\sin\psi)w \quad (4.26)$$

$$\frac{dh}{dt} = -[(\sin\theta)u + (\sin\phi\cos\theta)v + (\cos\phi\cos\theta)w] \quad (4.27)$$

Hay que tener en cuenta que en el sistema de referencia inercial el eje  $z$  apunta hacia abajo para definir la evolución temporal de la altura en la ecuación 4.27. Es por esa razón que la expresión va precedida de un signo negativo.

#### 4.2.3 Ecuaciones cinemáticas de la actitud

Hasta ahora se ha analizado el caso de la posición, donde las ecuaciones cinemáticas relacionan el vector posición con el vector velocidad, y las ecuaciones dinámicas, en las que se relacionan el vector velocidad con el vector fuerza.

Para el caso de la actitud, las ecuaciones diferenciales cinemáticas relacionan la representación de la actitud con la velocidad angular  $\vec{\omega}$ . En el sistema de navegación inercial, los giróscopos nos darán  $\vec{\omega}$ , y habrá que integrar las ecuaciones para calcular la actitud. Existen varias formas de representar las ecuaciones dinámicas de la actitud: matriz de cosenos directores, ángulos de Euler y cuaterniones, de las cuales se van a utilizar los cuaterniones. No obstante, antes de abordar los cuaterniones se explicará la representación a través de los ángulos de Euler, ya que es más intuitiva y los resultados serán expresados mediante estos ángulos.

##### Ecuaciones cinemáticas de la actitud con ángulos de Euler

Dado el vector velocidad angular en ejes cuerpo  $\vec{\omega}_{BI}$  definido en 4.28, expresándolo en función de los ángulos de Euler se obtiene,

$$\vec{\omega}_{BI} = p\vec{i}_b + q\vec{j}_b + r\vec{k}_b = \dot{\phi}\vec{i}_b + \dot{\theta}\vec{j}_{x'} + \dot{\psi}\vec{k}_h \quad (4.28)$$

siendo  $\vec{j}_{x'}$  la dirección  $y'$  de los ejes intermedios  $X'$  que se obtienen al girar los ejes H el ángulo  $\psi$  alrededor del eje  $z_h$ . Por tanto, para conseguir relacionar las componentes de la velocidad angular  $p, q$  y  $r$  con la representación de la actitud  $\phi, \theta$  y  $\psi$  es necesario proyectar la ecuación 4.28 en ejes cuerpo,

$$\vec{\omega}_{BI} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

$$\vec{\omega}_{BI} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Despejando los ángulos de Euler de la ecuación 4.30 obtenemos la ecuación cinemática de la actitud para los ángulos de Euler,

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi\cos\theta \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Obsérvese que se trata de 3 ecuaciones diferenciales no lineales con multitud de funciones trigonométricas. Sin embargo, estas ecuaciones poseen una singularidad para  $\theta = \pm 90^\circ$ . Precisamente si en este problema  $\theta = 90^\circ$ , si se retrocede a la figura 4.1 (se puede interpretar  $\gamma = \theta$  si los ejes  $W(0_w, x_w, y_w, z_w)$  coinciden con los ejes  $B(0_b, x_b, y_b, z_b)$ ), se deduce que la configuración correspondiente a la singularidad coincide con posición vertical del cohete. Teniendo en cuenta que en la trayectoria a estudiar en este trabajo el cohete recorre la trayectoria en entornos de  $\theta \in [85^\circ, 90^\circ]$ , es decir, una trayectoria con el cohete casi vertical, no es posible utilizar estas ecuaciones basadas en los ángulos Euler. Esta singularidad ocurre debido a que para  $\theta = 90^\circ$  se pierde un grado de libertad y el sistema pasa de 3 grados de libertad en actitud a 2 grados de libertad.

Por otro lado, pese a ser un sistema con sentido físico e intuitivo, la presencia de funciones trigonométricas y la duplicidad de soluciones que ello conlleva introduce un nivel de ambigüedad al problema importante. Además, se verá más adelante que la precisión con respecto al uso de cuaterniones es menor.

#### Ecuaciones cinemáticas de la actitud con cuaterniones

La imposibilidad de utilizar la representación de Euler para definir la actitud del vehículo lleva a la definición de los cuaterniones. Los cuaterniones, una creación de Hamilton (siglo XIX), son una extensión de los números complejos a "4 dimensiones".

Un cuaternión se define como [34] un objeto de cuatro dimensiones:  $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$  donde  $q_0, q_1, q_2$  y  $q_3$  son números reales (elementos del espacio  $\mathcal{R}^4$ ),  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  son unidades imaginarias definidas por medio de un sistema de igualdades tal que,

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -1, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = -1, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = -1 \quad (4.32)$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -1 \quad (4.34)$$

Para expresar la actitud con cuaterniones se parte de su representación mediante el eje y ángulo de Euler,  $\underline{e}, \theta$ .

**Teorema 4.2.1 (Teorema de Euler)** *El movimiento más general posible de un sólido con un punto fijo es una rotación alrededor de un único eje.*

Por tanto la actitud se puede representar con un vector unitario en la dirección de dicho eje (Eje de Euler) como  $\underline{e}$  y la magnitud de la rotación (Ángulo de Euler) como  $\theta$ . Se define el cuaternión de la siguiente manera,

$$q = \begin{pmatrix} q_0 \\ \vec{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \vec{e} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

Obsérvese que si un cuaternión representa actitud entonces su norma es la unidad,

$$\|q\|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) = 1 \quad (4.36)$$

En el problema, es necesario trabajar con los ángulos de Euler o con su matriz de cosenos directores (4.6). No obstante, para trabajar con las ecuaciones cinemáticas de la actitud es necesario hacerlo con cuaterniones. Por tanto, una vez definidos los cuaterniones para la actitud se va a introducir la fórmula de Euler-Rodrigues para pasar de la matriz de cosenos directores a cuaterniones y viceversa. Para ello se introduce el operador  $\bar{q}$ ,

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

• Paso de matriz de giro  $C$  a cuaterniones

$$q_0 = \frac{\sqrt{1 + \text{Tr}(C)}}{2}, \quad \bar{q} = \frac{1}{4q_0} (C^T - C) \quad (4.38)$$

• Paso de cuaterniones a matriz de giro  $C$

$$C = (q_0^2 - \vec{q}^T \vec{q})I + 2\vec{q}\vec{q}^T - 2q_0\bar{q} \quad (4.39)$$

A lo largo del problema se deberán utilizar ambas fórmulas, 4.38 y 4.39, ya que no tiene sentido representar la actitud en cuaterniones ya que carecen de sentido físico, pero es necesario trabajar con ellos para la actitud a la hora de evitar indeterminaciones y buscar mayor precisión.

Una vez definidos los cuaterniones y su relación con los ángulos de Euler queda definir las ecuaciones diferenciales cinemáticas de la actitud.

En primer lugar se muestran las ecuaciones diferenciales cinemáticas para el ángulo y el eje de Euler como,

$$\dot{\theta} = \vec{e}^T \vec{\omega}_{BI} \quad (4.40)$$

$$\dot{\vec{e}} = \frac{1}{2} \left[ + \frac{1}{\tan \theta / 2} (I - \vec{e}\vec{e}^T) \right] \vec{\omega}_{BI} \quad (4.41)$$

Ahora las ecuaciones diferenciales cinemáticas para los cuaterniones son,

$$\dot{q}_0 = -\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \dot{\theta} \quad (4.42)$$

$$\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{e}} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \vec{e} \cos \frac{\theta}{2} \dot{\theta} \quad (4.43)$$

Sustituyendo los resultados de 4.40 y 4.41, se obtiene,

$$\dot{q}_0 = -\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \vec{e}^T \vec{\omega}_{BI} = -\frac{1}{2} \vec{q}^T \vec{\omega}_{BI} \quad (4.44)$$

$$\dot{\vec{q}} = \frac{1}{2} \left( \vec{e} + \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} (I - \vec{e}\vec{e}^T) \right) \vec{\omega}_{BI} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \vec{e} \cos \frac{\theta}{2} \vec{e}^T \vec{\omega}_{BI} = \frac{1}{2} \bar{q} \vec{\omega}_{BI} + \frac{1}{2} q_0 \vec{\omega}_{BI} \quad (4.45)$$

Poniéndolo en forma matricial queda de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

Son cuatro ecuaciones diferenciales, bilineales, sin singularidades. Además no es necesario realizar ningún tipo de operación trigonométrica, todo son multiplicaciones matriciales. Una vez se resuelve numéricamente la ecuación diferencial cinemática de la actitud 4.46, eventualmente los errores numéricos provocarán que el módulo del cuaternión resultante difiera de la unidad. Esto se soluciona mediante la renormalización. Esto consiste en dividir el cuaternión por su norma para que su módulo vuelva a ser la unidad.

#### 4.2.4 Definición de los dispositivos de control. Fuerzas y momentos

La naturaleza de las fuerzas y momentos que experimenta el vehículo es propulsiva y aerodinámica, por lo que, antes de llevar a cabo el análisis de fuerzas y momentos, es necesario describir los dispositivos de control del vehículo.

En primer lugar, a nivel propulsivo, se encuentra la planta motora cuyo modelo se expuso en el capítulo anterior. En la fase de estudio del problema solamente se utiliza una de las 9 toberas disponibles y el empuje siempre está alineado con el eje  $x_b$  apuntando en sentido contrario.

Por otro lado, cerca de la parte superior se encuentran los *grid fins*. Estos dispositivos, se utilizan como parte del frenado aerodinámico y, en mayor medida, para controlar la actitud del vehículo. El principio de funcionamiento es simple. Para generar momento, uno de los *grid fins* rota, esto provoca que el área efectiva que contribuye a la resistencia disminuya. El desequilibrio de fuerzas debido a esa disminución de la resistencia provoca un momento que hace rotar al vehículo.

Obsérvese que la numeración de los *grid fins* está especificada en la figura 4.3. Estos dispositivos de control constituidos por 4 variables de control ( $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  y  $\mu_4$ ), 1 variable por cada *grid fin*, permiten actuar sobre 2 grados de libertad, la rotación del vehículo alrededor de  $z_b$  y de  $y_b$ . En esta situación es indiferente hacia que sentido gire la superficie por lo que se considera únicamente un sentido de giro, antihorario. las deflexiones de los *grid fins* serán de entre  $0^\circ$  y  $45^\circ$ .

A su vez, el control de la rotación alrededor de  $x_b$  no se ha implementado en el problema ya que aumentaría aún más la complejidad y se escapa de la proyección de este trabajo. A diferencia de los *grid fins*, este dispositivo de control utiliza la propulsión a chorro para controlar esta variable restante y evitar que el vehículo rote de manera descontrolada. En el problema se supondrá que el vehículo dispone de este sistema de control pero no se implementará a la hora de definir el modelo.

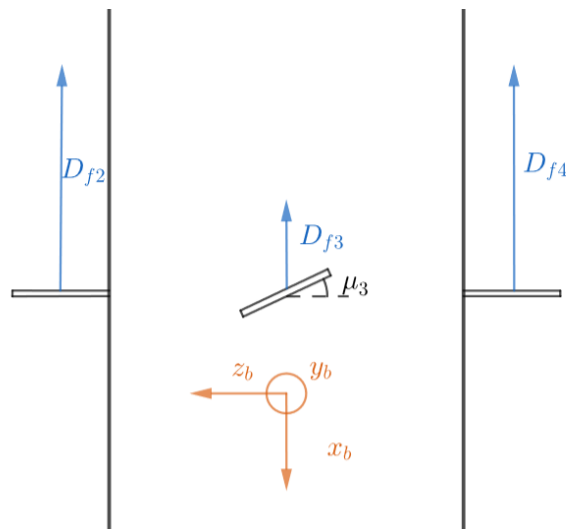


Figura 4.6 Funcionamiento de los *grid fins* (I).

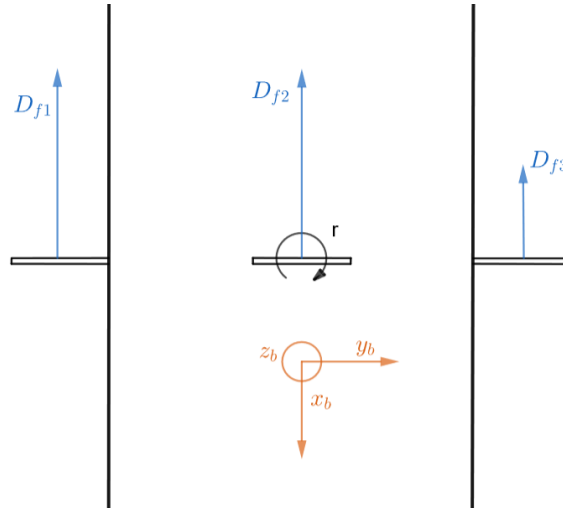


Figura 4.7 Funcionamiento de los *grid fins* (II).

Ahora sólo queda definir las fuerzas y momentos que se ejercen sobre el sistema. Para las fuerzas en ejes cuerpo se tiene,

$$F_x^{A,T} = -T - \left[ \frac{1}{2} \rho V^2 S_{base} C_{Db} - \frac{1}{2} \rho V^2 S_{fin} C_{Df} (\cos \mu_1 + \cos \mu_2 + \cos \mu_3 + \cos \mu_4) \right] \frac{u}{V} \quad (4.47)$$

$$F_y^{A,T} = \frac{1}{2} \rho V^2 S_{lat} C_{Y\beta} \frac{v}{V} \quad (4.48)$$

$$F_z^{A,T} = \frac{1}{2} \rho V^2 S_{lat} C_{Y\beta} \frac{w}{V} \quad (4.49)$$

donde la resistencia  $D$  viene expresada en función de su variable adimensional  $C_{Db}$  y  $C_{Df}$  definida en la ecuación 3.4. En cuanto a las ecuaciones de momentos se tiene,

$$L = 0 \quad (4.50)$$

$$M = \frac{1}{2} \rho V^2 S_{fin} C_{Df} (\sin \mu_4 - \sin \mu_2) \frac{u}{V} + \frac{1}{2} \rho V^2 S_{fin} C_{m\alpha} \alpha \quad (4.51)$$

$$N = \frac{1}{2} \rho V^2 S_{fin} C_{Df} (\sin \mu_3 - \sin \mu_1) \frac{u}{V} + \frac{1}{2} \rho V^2 S_{fin} C_{n\beta} \beta \quad (4.52)$$

donde la velocidad aerodinámica del vehículo es

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (4.53)$$

Para evitar trabajar con 4 variables de control para controlar 2 grados de libertad se han tomado las siguientes consideraciones. Las variables  $\mu_1$  y  $\mu_3$ , y por otro lado,  $\mu_2$  y  $\mu_4$  están relacionadas entre sí. Para que se produzca un momento, cuando una variable de control es accionada (por ejemplo  $\mu_1$ ) su opuesta debe permanecer en su posición nominal ( $\mu_3$ ), de lo contrario el control no sería efectivo. Dada esta restricción es posible reducir el número de variables a solamente dos. Utilizando  $\lambda$  como nueva variable, las ecuaciones 4.54 y 4.55 quedan como,

$$M = \frac{1}{2} \rho V^2 S_{fin} C_{df} \sin \lambda_1 \frac{u}{V} + \frac{1}{2} \rho V^2 S_{fin} C_{m\alpha} \alpha \quad (4.54)$$

$$N = \frac{1}{2} \rho V^2 S_{fin} C_{df} \sin \lambda_2 \frac{u}{V} + \frac{1}{2} \rho V^2 S_{fin} C_{n\beta} \beta \quad (4.55)$$

Con el siguiente criterio de signos,

$$\lambda_1 > 0 \longrightarrow |\lambda_1| = \mu_4$$

$$\lambda_1 < 0 \longrightarrow |\lambda_1| = \mu_2$$

$$\lambda_2 > 0 \longrightarrow |\lambda_2| = \mu_3$$

$$\lambda_2 < 0 \longrightarrow |\lambda_2| = \mu_1$$

A su vez, aplicando las propiedades del coseno a la ecuación 4.47 se obtiene,

$$F_x^{A,T} = -T - \left[ \frac{1}{2} \rho V^2 S_{base} C_{db} - \rho V^2 S_{fin} C_{df} (\cos \lambda_1 + \cos \lambda_2) \right] \frac{u}{V} \quad (4.56)$$

Por otro lado, el consumo de combustible debido al uso de la tobera se cuantifica según la ecuación:

$$\dot{m} = -300.5857 \quad (4.57)$$

donde el valor del gasto másico fue definido en el modelo propulsivo.

Para finalizar se van a resumir todas las hipótesis y las ecuaciones alcanzadas en este capítulo.

## Hipótesis

- **Hipótesis 1:** *Atmósfera en calma*
- **Hipótesis 2:** *Atmósfera exponencial*
- **Hipótesis 3:**  $C_{db}$  y  $C_{df}$  constantes para  $Mach \in [0, 0.6]$
- **Hipótesis 4:**  $C_{db}$  constante para  $Mach > 3$
- **Hipótesis 5:**  $C_{df}$  constante para  $Mach > 2$
- **Hipótesis 6:** *Gasto másico constante*
- **Hipótesis 7:** *Evolución isentrópica dentro de la tobera*
- **Hipótesis 8:** *Tobera adaptada a nivel del mar ( $p_s = p_a|_{SL}$ )*
- **Hipótesis 9:** *Tierra plana*
- **Hipótesis 10:** *Gravedad constante*
- **Hipótesis 11:** *Posición del centro de gravedad constante*

## Ecuaciones del sistema

### 1. Ecuaciones dinámicas

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} F_{A,T} + mg \cdot \sin \theta \\ F_{A,T} + mg \cdot \sin \phi \cos \theta \\ F_{A,T} + mg \cdot \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot v - q \cdot w \\ p \cdot w - r \cdot u \\ q \cdot u - p \cdot v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (L - qr(I_{zz} - I_{yy}))/I_{xx} \\ (M - pr(I_{xx} - I_{zz}))/I_{yy} \\ (N - pq(I_{yy} - I_{xx}))/I_{zz} \end{pmatrix}$$



## 2. Ecuaciones cinemáticas de la posición

$$\frac{dx}{dt} = (\cos\theta\cos\psi)u + (-\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\sin\theta\cos\psi)v + (\sin\phi\sin\psi - \cos\phi\sin\theta\cos\psi)w$$

$$\frac{dy}{dt} = (\cos\theta\sin\psi)u + (\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\theta\sin\psi)v + (-\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\sin\theta\sin\psi)w$$

$$\frac{dh}{dt} = -[(\sin\theta)u + (\sin\phi\cos\theta)v + (\cos\phi\cos\theta)w]$$

## 3. Ecuaciones cinemáticas de la actitud

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

## 4. Ecuaciones de fuerzas y momentos

$$F_x^{A,T} = -T - \left[ \frac{1}{2}\rho V^2 S_{base} C_{db} - \rho V^2 S_{fin} C_{df} (\cos\lambda_1 + \cos\lambda_2) \right] \frac{u}{V}$$

$$F_y^{A,T} = \frac{1}{2}\rho V^2 S_{lat} C_{Y\beta} \frac{v}{V}$$

$$F_z^{A,T} = \frac{1}{2}\rho V^2 S_{lat} C_{Y\beta} \frac{w}{V}$$

$$L = 0$$

$$M = \frac{1}{2}\rho V^2 S_{fin} C_{df} \sin\lambda_1 \frac{u}{V} + \frac{1}{2}\rho V^2 S_{fin} C_{m\alpha} \alpha$$

$$N = \frac{1}{2}\rho V^2 S_{fin} C_{df} \sin\lambda_2 \frac{u}{V} + \frac{1}{2}\rho V^2 S_{fin} C_{m\beta} \beta$$

$$\dot{m} = -300.5857$$



# 5 Modelado en Simulink

Una vez establecidas las ecuaciones que rigen el movimiento del vehículo, es hora de implementarlo en Simulink. En este capítulo, se va a describir el procedimiento seguido para implementarlo en la herramienta. Además se analizará el comportamiento del sistema para distintas configuraciones antes de abordar el problema de control.

## 5.1 Estructura

Dadas las ecuaciones desarrolladas en el capítulo anterior, para su implementación en Simulink, se va a seguir la estructura definida en el diagrama de bloques de la figura 5.1. Dentro de los bloques, la estructura es similar, integrando las ecuaciones definidas para cada uno. A continuación, se describirá el contenido de cada bloque y su función.

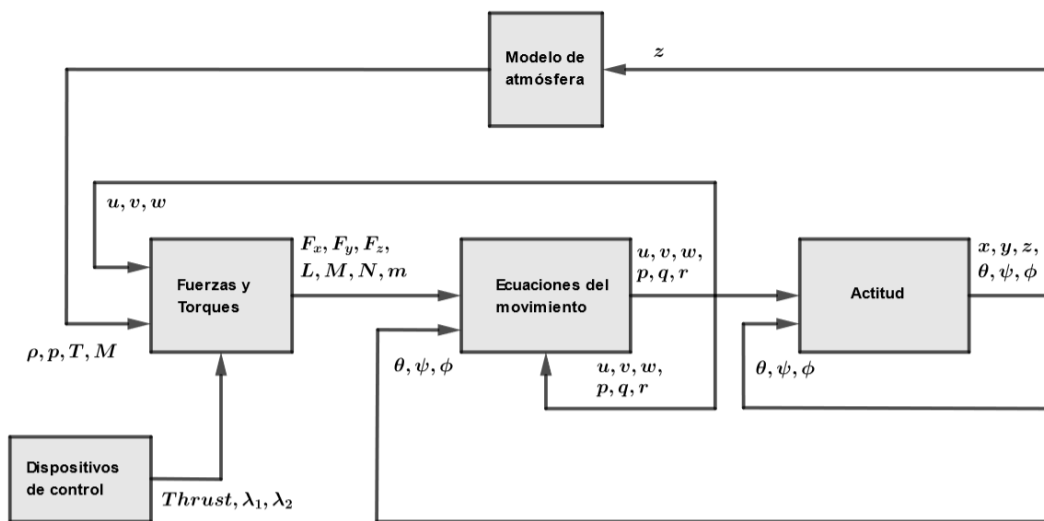


Figura 5.1 Diagrama de bloques.

Por ahora el bloque *Dispositivos de control* no está realimentado por la actitud del vehículo porque todavía no se han definido el control de estas variables. Se ha incluido de esta manera para poder realizar pruebas con valores determinados de las variables de control para analizar cómo responde el sistema y su comportamiento.

### 5.1.1 Fuerzas y Torques

Los parámetros que recibe este bloque son las componentes de la velocidad en ejes cuerpo  $u, v, w$  y las variables atmosféricas  $\rho, p, T, M$ . También, en este bloque actuarán los dispositivos de control del empuje y

de la actitud, modificando las fuerzas y momentos del vehículo y por tanto las velocidades y ángulos del mismo.

La función de este bloque será por tanto calcular las fuerzas y momentos del cohete según las ecuaciones 4.47, 4.48, 4.49, 4.50, 4.54, 4.55, y 4.57.

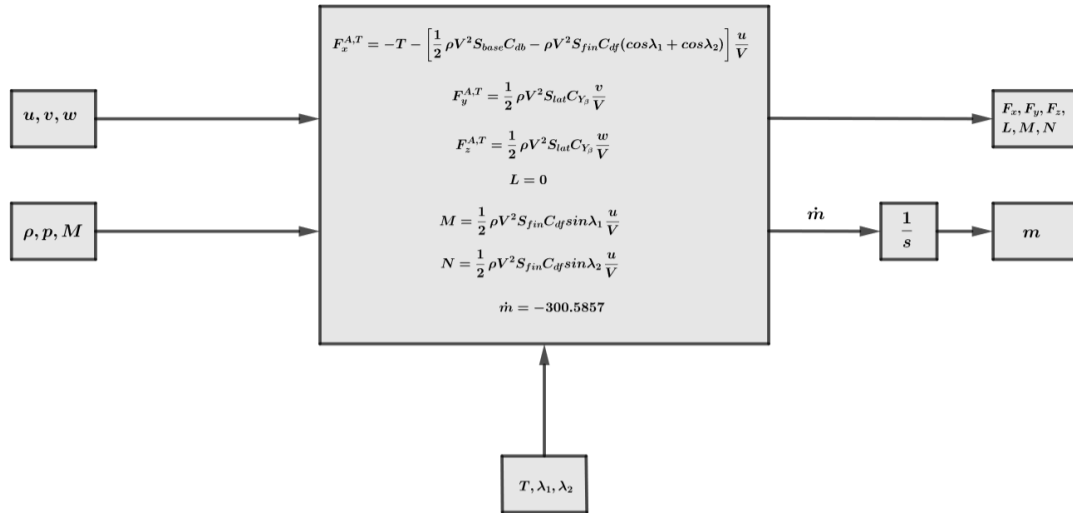


Figura 5.2 Fuerzas y torques.

### 5.1.2 Ecuaciones del movimiento

Los parámetros recibidos por este bloque son las velocidades lineales y angulares en ejes cuerpo  $u, v, w, p, q, r$ , la actitud del vehículo a través de los ángulos de Euler  $\theta, \psi, \phi$  y las fuerzas y momentos  $F_x, F_y, F_z, L, M, N, m$ .

Siguiendo las ecuaciones dinámicas 4.10, 4.14 se obtienen  $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ . A continuación se integra con el bloque *integrator* que tiene Simulink y se obtienen los valores  $u, v, w, p, q, r$ .

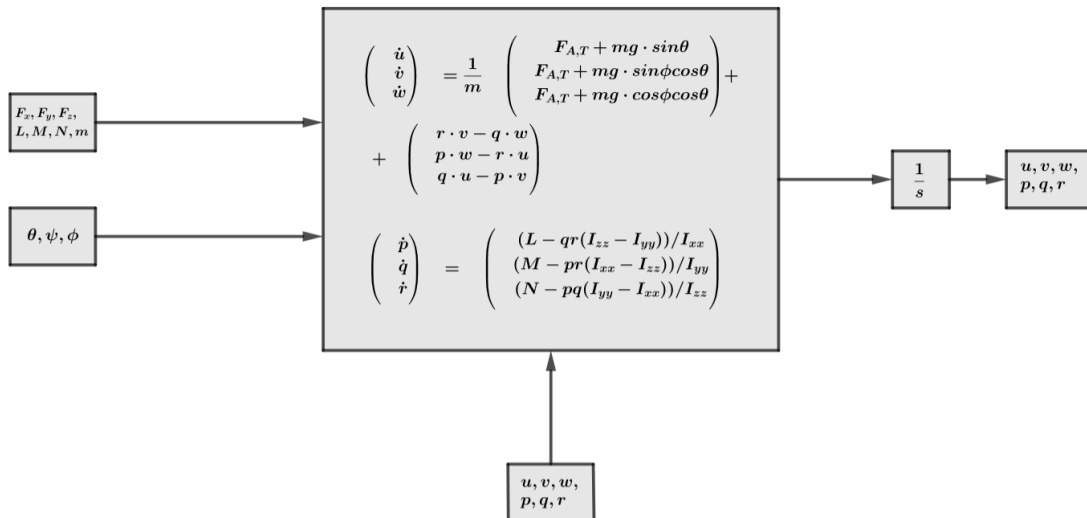


Figura 5.3 Ecuaciones del movimiento.

5.1.3 Posición y actitud

Una vez calculadas las componentes de la velocidad y velocidad angular en ejes cuerpo  $u, v, w, p, q, r$  queda determinar la posición en ejes horizonte local  $x, y, z$  y la actitud del vehículo  $\theta, \psi, \phi$ . No obstante, en este problema es necesario trabajar con cuaterniones por lo que habrá que realizar conversiones de ángulos de Euler ( $\theta, \psi, \phi$ ) a cuaterniones y viceversa.

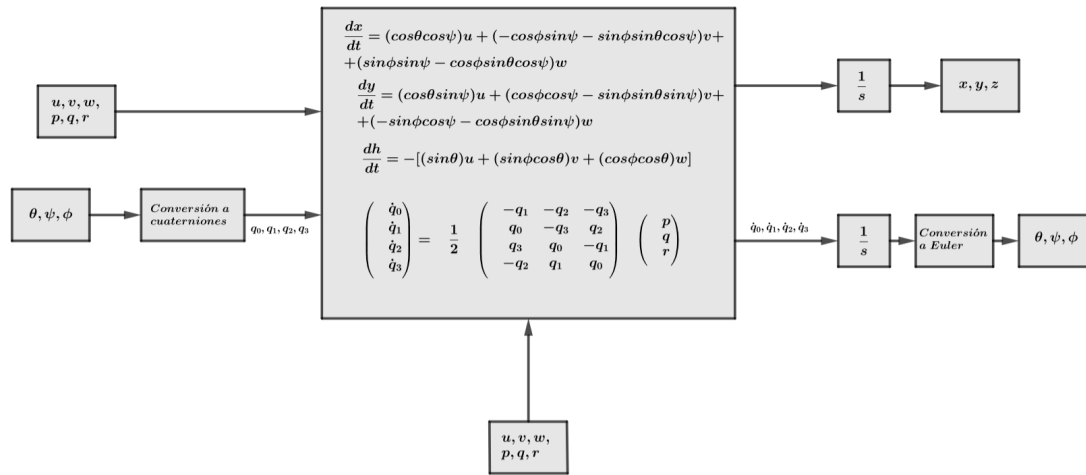


Figura 5.4 Posición y actitud.

Para la conversión de ángulos de Euler a cuaterniones se construye la matriz de giro siguiendo la estructura de 4.3. Una vez definida la matriz de giro se aplica la ecuación 4.38 de donde se obtienen los cuatro componentes del cuaternión  $q_0, q_1, q_2, q_3$ .

Por otro lado, el método inverso no es tan trivial debido al carácter dual de las funciones trigonométricas. Siguiendo la fórmula de Euler-Rodrigues para el paso de cuaterniones a la matriz de giro 4.39, se obtiene la matriz que tiene como estructura la definida en 4.3. Además, es necesario tener en cuenta el caso de  $\theta = 90^\circ$  donde se produce la pérdida de un grado de libertad, razón principal por la que se ha escogido trabajar con cuaterniones.

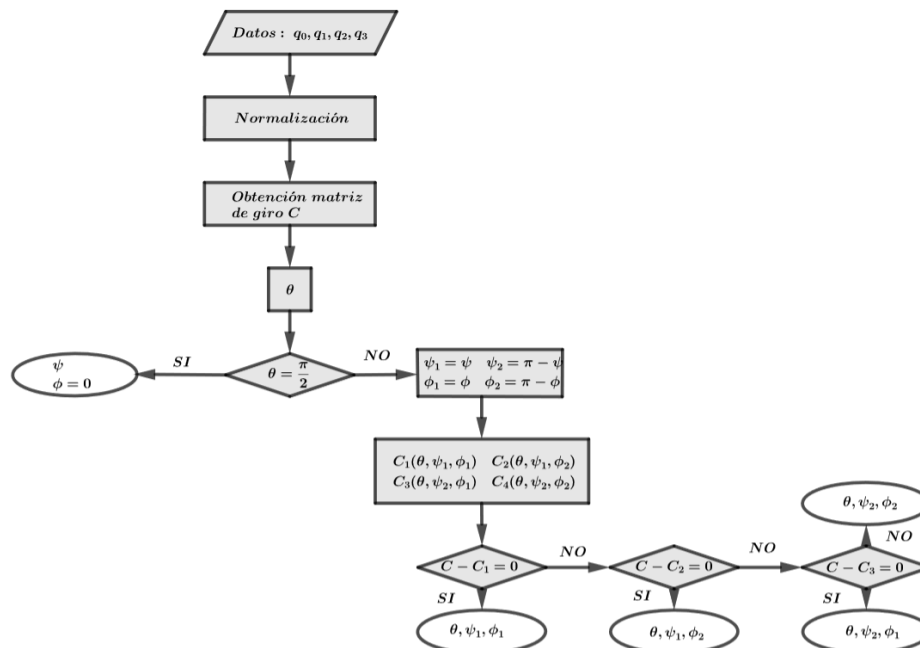


Figura 5.5 Diagrama de flujo para conversión a ángulos de Euler.

Si se denota la as filas y columnas de la matriz de giro 4.3 como,

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

es inmediato deducir el valor de  $\theta$ ,

$$\theta = \arcsin(C) \quad (5.2)$$

Una vez obtenido el valor de  $\theta$ , siguiendo el esquema 5.5, pueden existir dos casos

- $\theta \neq 90^\circ$

se pueden obtener  $\psi$  y  $\phi$  de forma inmediata como,

$$\psi_1 = \frac{\arcsin(B)}{\cos\theta} \quad (5.3)$$

$$\phi_2 = \frac{\arcsin(F)}{\cos\theta} \quad (5.4)$$

Sin embargo para el arco seno de un ángulo existen 2 soluciones por lo que habrá que calcular las soluciones restantes,

$$\psi_2 = \pi - \psi_1 \quad (5.5)$$

$$\phi_2 = \pi - \phi_1 \quad (5.6)$$

Para conocer cual de las soluciones es la correcta, hace falta construir una matriz de giro para cada combinación de las soluciones posibles y compararla con la matriz de giro  $C$  calculada mediante la fórmula de Euler-Rodrigues. Por tanto se construirán  $C_1(\theta, \psi_1, \phi_1)$ ,  $C_2(\theta, \psi_1, \phi_2)$ ,  $C_1(\theta, \psi_2, \phi_1)$ ,  $C_1(\theta, \psi_2, \phi_1)$ . Una vez construidas las matrices, aquella que cumpla  $C - C_i = 0$  será la solución y por consiguiente los ángulos de Euler ( $\theta, \psi, \phi$ ).

Sin embargo, la existencia de error numérico a lo largo del proceso hace que  $C - C_i = 0$  se cumpla con menos frecuencia. Por tanto, es más fiable comparar las normas de las diferencias y escoger la menor de ellas, es decir,  $\min(C - C_i)$ .

- $\theta = 90^\circ$

Con esta configuración no se pueden calcular los ángulos  $\psi$  y  $\phi$  según 5.3 y 5.4. La pérdida de un grado de libertad conlleva la existencia de una relación entre  $\psi$  y  $\phi$ . Si desarrollamos el término D de la matriz de giro  $C$  para  $\theta = 90^\circ$ , se obtiene,

$$D = -\cos\phi \sin\psi - \sin\phi \cos\psi = -\sin(\phi + \psi) \quad (5.7)$$

Desarrollando igualmente los términos E, G, y H de la matriz de giro  $\overline{C}$  se obtiene el mismo resultado. Tomando  $\phi = 0$ ,

$$\psi = \arcsin(-D) \quad (5.8)$$

## 5.2 Comportamiento del sistema

Una vez modelado el sistema en Simulink, se va a analizar el comportamiento del vehículo para distintas configuraciones para verificar que efectivamente el modelo tiene sentido físico y está bien implementado. Además, también servirá para entender su evolución a la hora de la implementación del control automático que más tarde se va a llevar a cabo. Las condiciones iniciales se deducen de [35]. La posición inicial es ( $x_0 = 0 \text{ m}$ ,  $y_0 = 0 \text{ m}$ ,  $z_0 = 54000 \text{ m}$ ), la actitud inicial ( $\theta_0 = 90^\circ$ ,  $\psi_0 = 0^\circ$ ,  $\phi_0 = 0^\circ$ ) y la velocidad inicial ( $u_0 = 1389 \text{ m/s}$ ,  $v_0 = 0 \text{ m/s}$ ,  $w_0 = 0 \text{ m/s}$ ).

### 5.2.1 Caída libre vertical

En primer lugar, se simulará el caso más simple, donde los *grid fins* no son accionados ni tampoco la planta propulsora. El objetivo de esta simulación es analizar cómo evoluciona la altura y la presión dinámica ( $1/2\rho \cdot U^2$ ) a la que se ve sometida el vehículo. Además, es necesario comprobar que en ausencia de perturbaciones, el sistema partiendo de su posición de equilibrio no sale de ella y se descontrola a lo largo de la trayectoria de descenso hacia tierra. Será interesante observar cómo varía la velocidad sin ignición alguna en la planta propulsora para analizar el papel de la atmósfera en la cinemática del vehículo.

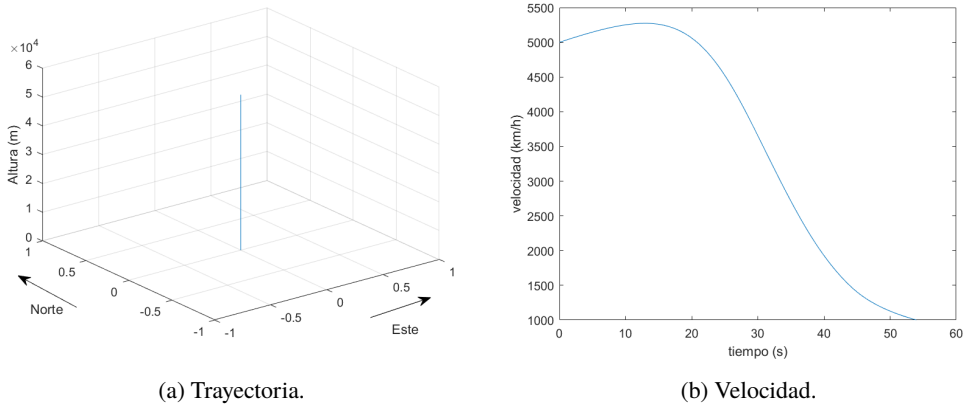


Figura 5.6

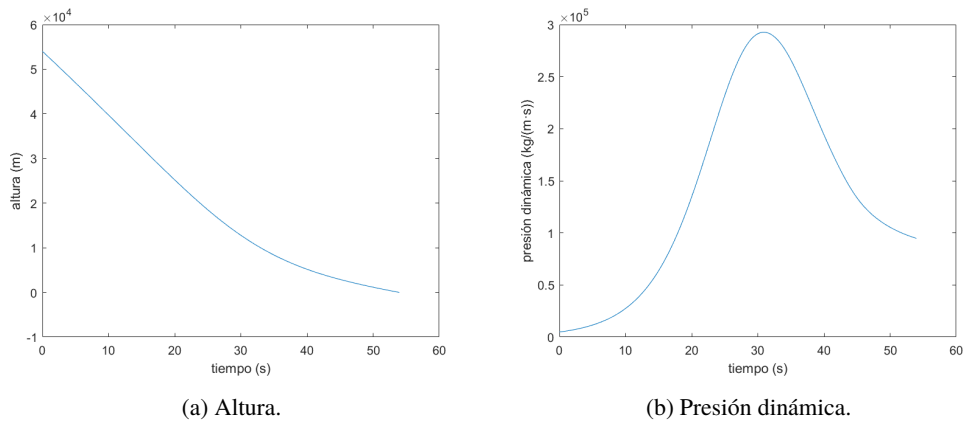


Figura 5.7 Evolución en caída libre.

El parámetro más crítico se encuentra en la figura 5.7b donde la presión dinámica ( $q = 1/2\rho \cdot U^2$ ) toma un valor máximo de  $292000 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$  a una altura de  $12000 \text{ m}$ . Este valor se alcanza en la tropopausa donde la presencia de la atmósfera se hace evidente. Para un análisis más completo del tramo de descenso es necesario realizar un estudio estructural del vehículo para conocer los esfuerzos, las temperaturas o las vibraciones límite a las que se puede ver sometido el vehículo. No obstante, este campo de estudio se sale fuera de los límites de este trabajo. Dada la ausencia del análisis estructural se va a tomar la evolución seguida en una operación real con este vehículo de [35] que se especificará en la siguiente subsección.

Por otro lado, como cabe esperar, los ángulos que definen la actitud no sufren modificación alguna. Este resultado es una señal de la robustez del modelo pues con una ligera modificación de  $\theta$ , existiría un salto en las variables  $\psi$  y  $\phi$  como se verá en análisis posteriores.

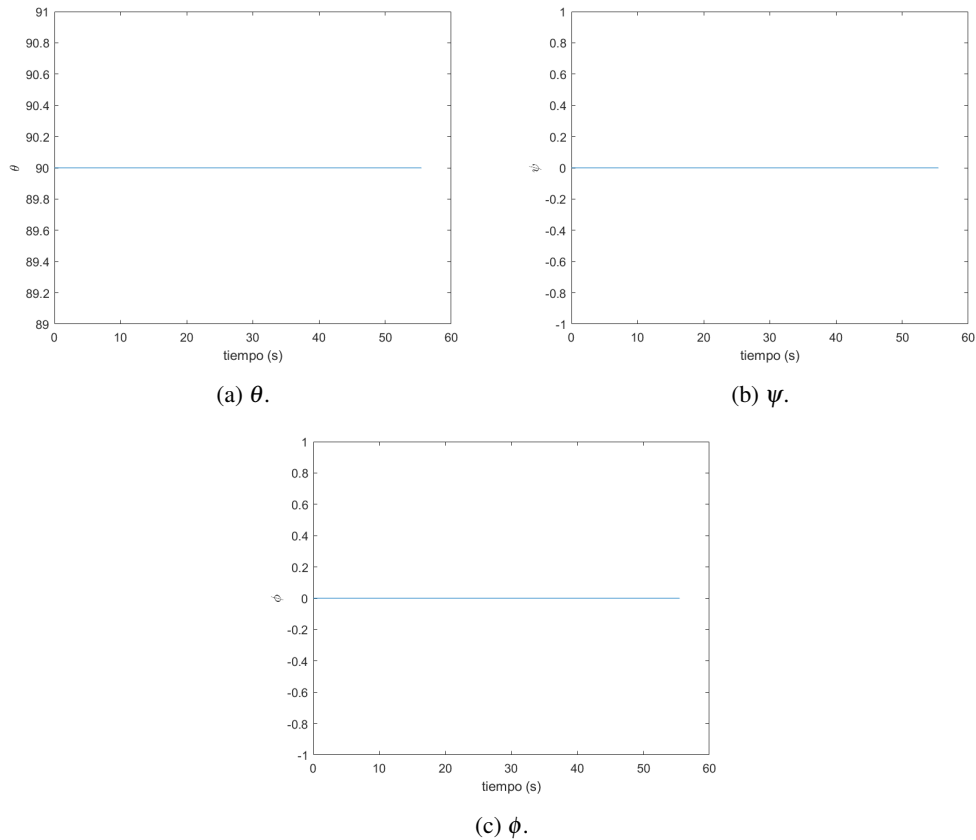


Figura 5.8 Actitud.

Por último, obsérvese en la figura 5.6b que aumenta ligeramente la velocidad del vehículo dada la escasez de la atmósfera inicial. Conforme sigue el descenso la velocidad disminuye considerablemente ligado a una mayor presencia de la atmósfera. En el tramo final, atraviesa el régimen transónico para impactar contra el suelo a una velocidad de  $960 \text{ km/h}$ .

## 5.2.2 Encendido de planta propulsora

Uno de los objetivos principales durante el descenso es reducir la presión dinámica a la que se ve sometido el vehículo. La manera de reducirla es disminuir la velocidad por lo que será necesario activar la planta propulsora durante un intervalo de tiempo. Para ello se debe llevar a cabo un proceso de optimización para conseguir una trayectoria con la mínima presión dinámica. Sin embargo, en lugar de eso se ha estimado de [35] la duración del encendido inicial  $19.3 \text{ s}$ . Durante el encendido de la planta propulsora sólo se activará la tobera 9 (obsérvese la figura 3.10).

En primer lugar remarcar la similitud del modelo con la realidad. En la operación real del vehículo [35] tras el apagado del motor el cohete se encuentra a una altitud de  $33500 \text{ m}$  y a una velocidad de  $2702 \text{ km/h}$ . En el modelo, tras el apagado del motor el cohete se encuentra a una altitud de  $33012 \text{ m}$  y a una velocidad de  $2700 \text{ km/h}$ , una variación media del  $0.76\%$ . Si se analiza más adelante, en el sistema real a una altitud de  $8000 \text{ m}$  se tiene una velocidad de  $1428 \text{ km/h}$ , mientras que para la simulación se tiene una velocidad de  $1470 \text{ km/h}$ , una variación del  $2.94\%$ .

La consecuencia más evidente del encendido de la planta propulsora durante casi 20 segundos en la fase inicial del descenso se encuentra en la presión dinámica. El pico máximo se reduce a  $95260 \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$  dado a una altitud de  $12390 \text{ m}$ , un  $67.4\%$  menos. Obsérvese la figura 5.9b para apreciar la reducción de magnitud.



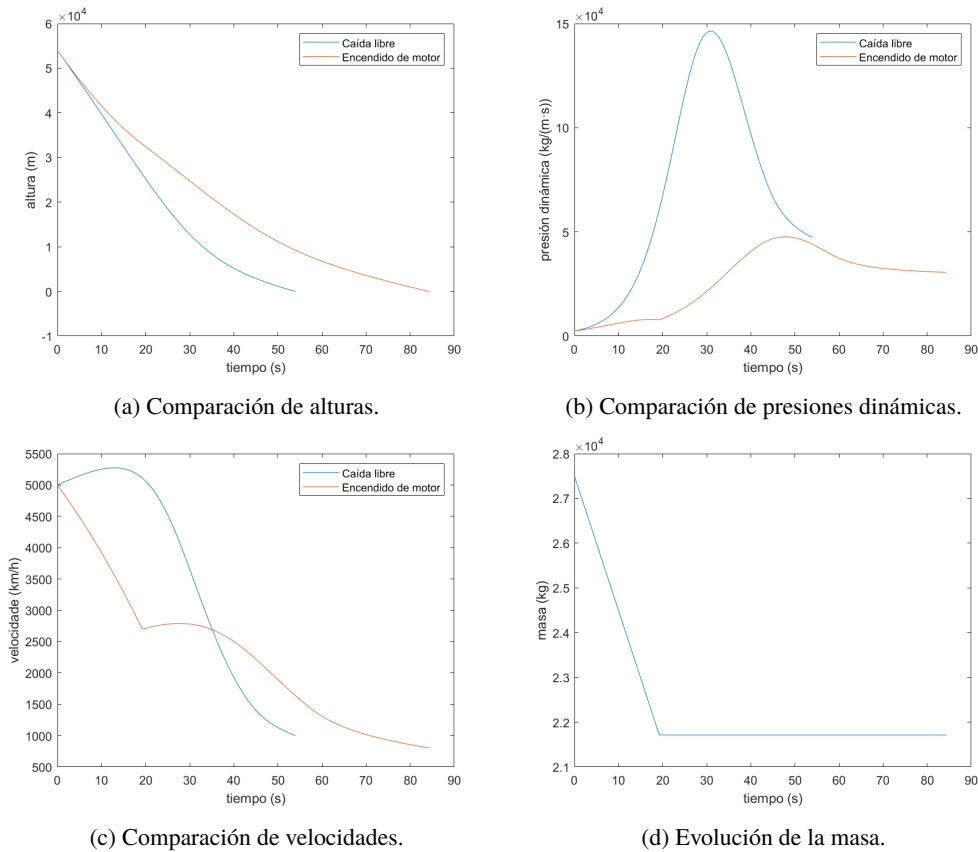


Figura 5.9 Comparación.

Por otro lado, la duración del aterrizaje aumenta hasta superar los 80 segundos y la evolución de la velocidad no es tan abrupta, por lo que las aceleraciones que experimentará el cohete serán menores. También tener en cuenta que debido al encendido de la planta propulsora la masa disminuye y por tanto también los momentos de inercia. Esta disminución se traduce en una mayor facilidad para producir un momento en el vehículo mediante los *grid fins*.

Por último es necesario un último encendido al final del descenso para aterrizar de forma segura pero ello se analizará en el siguiente capítulo. La deflexión de los *grid fins* se realizará una vez se produzca el primer apagado a 33000 m de altura.

### 5.2.3 Deflexión de superficie de control 1

Una vez realizada la maniobra de frenado del vehículo a 33000 m se lleva a cabo el guiado aerodinámico del cohete hacia el punto de aterrizaje. Para analizar el comportamiento de las superficies aerodinámicas o *grid fins*, se va a realizar una simulación partiendo de las mismas condiciones iniciales impuestas al principio. La prueba consistirá en desplegar 30° el *grid fin* 1, ver figura 5.10, durante 5 segundos una vez que la etapa de encendido inicial ha finalizado. El objetivo de la prueba es analizar cómo responde el modelo al salir de  $\theta = 90^\circ$  y su evolución.

En primer lugar, al deflectar la superficie de control 1 se produce un momento alrededor del eje  $z_b$ , en sentido positivo (véase la figura 5.10). Una vez que el cohete abandona la configuración vertical y se inclina, genera una fuerza de resistencia lateral de manera que el vehículo se desplaza a lo largo de  $y_b$ , en sentido contrario. obsérvese que con una deflexión de tan sólo 5 segundos, se ha conseguido un desplazamiento de poco más de 50 metros (figuras 5.11a y 5.11b). Este resultado da a entender que el rango de operación de esta misión no debería de sobrepasar los 60 metros.

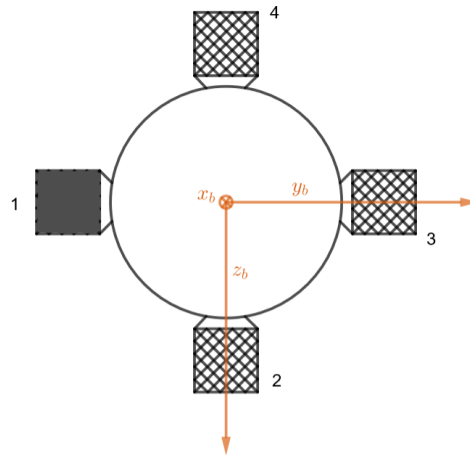
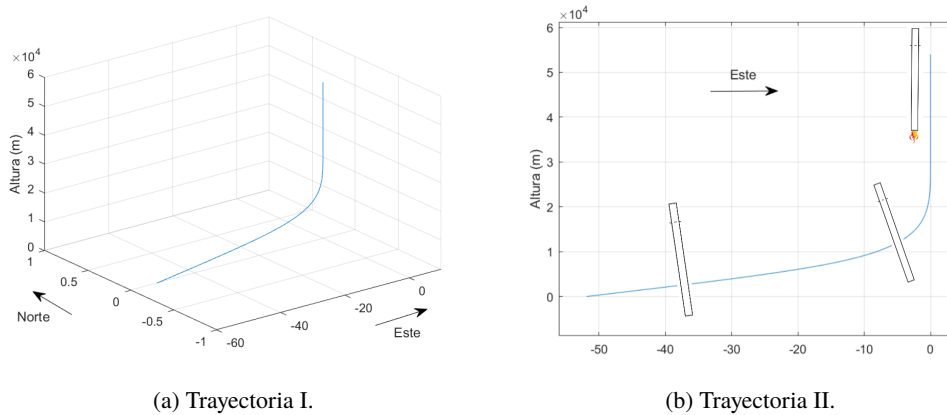


Figura 5.10 Deflexión de la superficie de control 1.



(a) Trayectoria I.

(b) Trayectoria II.

Figura 5.11 Evolución.

Por otro lado, es importante analizar cómo cambia la actitud, especialmente el momento en el que se abandona la configuración de  $\theta = 90^\circ$ . Una vez que finaliza el frenado mediante el encendido de la planta propulsora, alrededor del segundo 22, el accionamiento del *grid fin 1* provoca una variación como es de esperar en  $\theta$  (figura 5.12a). Nótese que la deflexión de la superficie es de 5 segundos, no obstante, el vehículo continúa disminuyendo el ángulo de asiento hasta que finalmente se revierte esta tendencia. El motivo de este comportamiento es que, una vez proporcionado un momento al cohete, la inercia del mismo hace que este siga girando. Sin embargo, la presencia de atmósfera, y consigo la fricción del aire, hace que el giro del vehículo vaya remitiendo y volviendo a la posición de equilibrio de  $\theta = 90^\circ$ . En cuanto a la evolución del sistema, es bastante lento. Nótese que la mayor parte de la variación del ángulo de asiento se produce una vez que la superficie aerodinámica se encuentra en su posición nominal. Es por ello necesario que el ángulo de asiento  $\theta$  no se aleje demasiado de los  $90^\circ$  ya que dada la lentitud de respuesta del sistema será complicado finalizar la maniobra completamente recto.

Asimismo, los ángulos  $\psi$  y  $\phi$  (figuras 5.12b y 5.12c) si bien no tan importantes como  $\theta$  son necesarios para entender el correcto funcionamiento del modelo. Una vez que el vehículo abandona su posición inicial, se produce un salto en ambos ángulos. Obsérvese que la suma de  $\phi$  y  $\psi$  dan  $360^\circ$ . Para analizar la actitud del cohete, en primer lugar, seguir el criterio de signos y ángulos definidos para los ejes cuerpo. Se parte de  $\theta = \psi = \phi = 0^\circ$ , es decir, el vehículo está horizontal apuntando al Norte. Para alcanzar la actitud actual se gira  $\psi = 90^\circ$  (apuntando al este),  $\theta = 89.9^\circ$ , y  $\phi = 270^\circ$  (para que en planta tenga la misma orientación que en la figura 5.10). Además, se mantienen invariantes a lo largo de la trayectoria. Por tanto, la evolución del sistema al abandonar la posición de  $\theta = 90^\circ$  es como cabe de esperar.

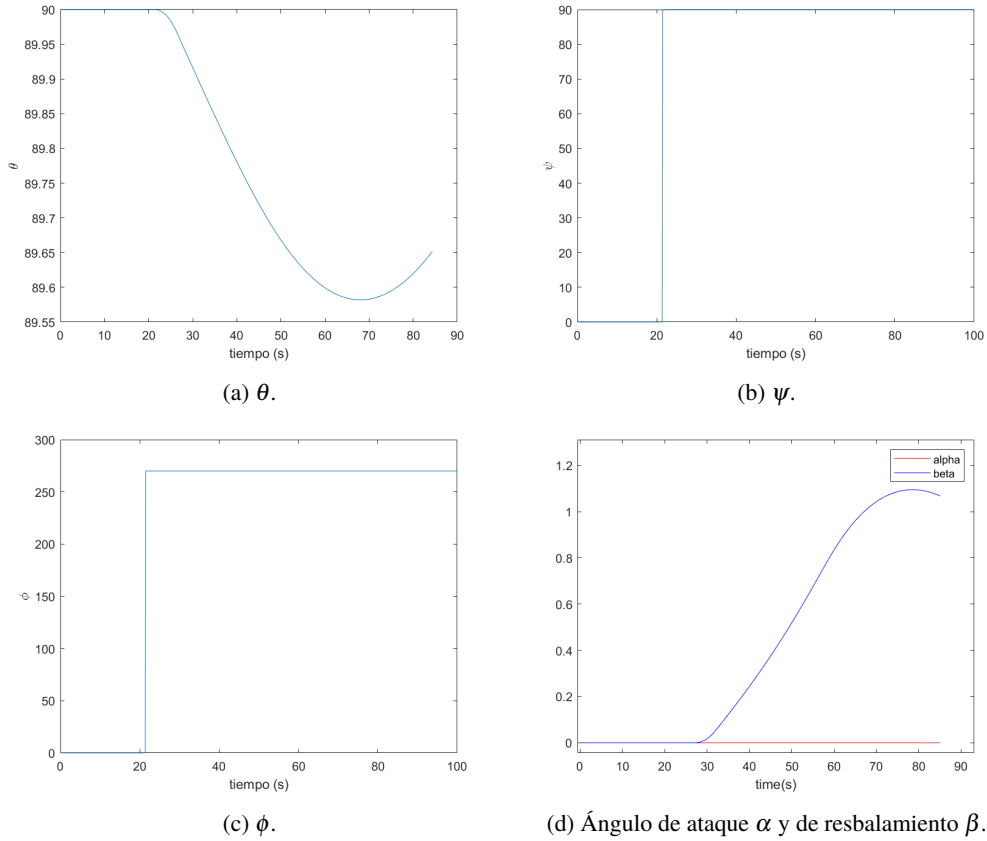


Figura 5.12 Ángulos.

Por último, durante la maniobra de descenso el ángulo de resbalamiento no sufre grandes modificaciones, algo que no es deseable ya que se perdería potencia de control en los *grid fins*. Además, interesa finalizar la maniobra con ángulo de ataque o resbalamiento nulo para considerar el aterrizaje como exitoso. Por otro lado, el ángulo de ataque es nulo porque se trabaja en todo momento en el plano Este-Oeste.

5.2.4 Deflexión de superficie de control 4

Para conocer que el comportamiento del modelo es coherente para una configuración diferente se va a llevar a cabo la deflexión de  $30^\circ$  del *grid fin* 4, ver figura 5.15d, durante 5 segundos una vez que la etapa de encendido inicial ha finalizado, bajo las mismas condiciones iniciales.

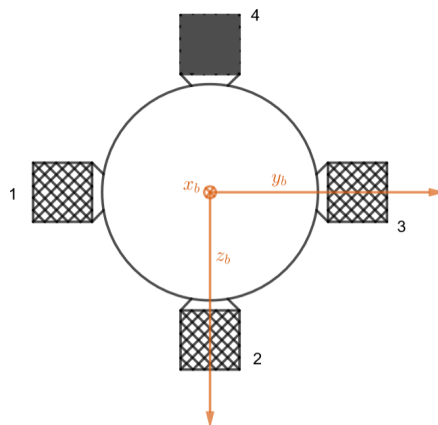


Figura 5.13 Deflexión de la superficie de control 4.

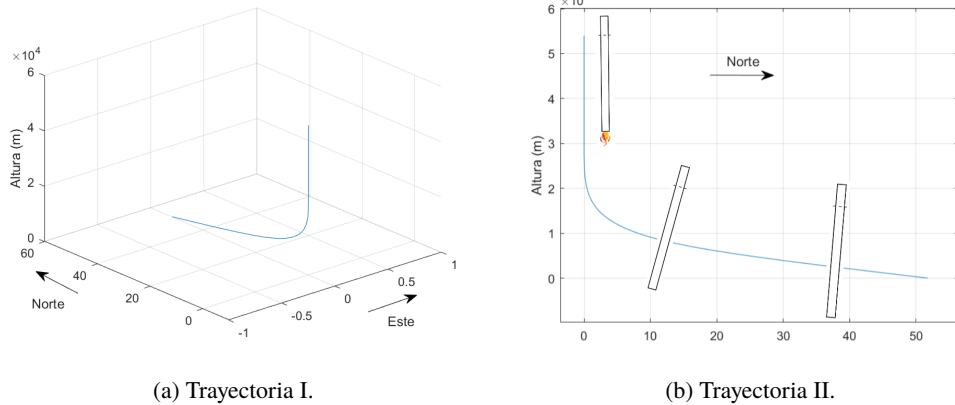


Figura 5.14 Evolución.

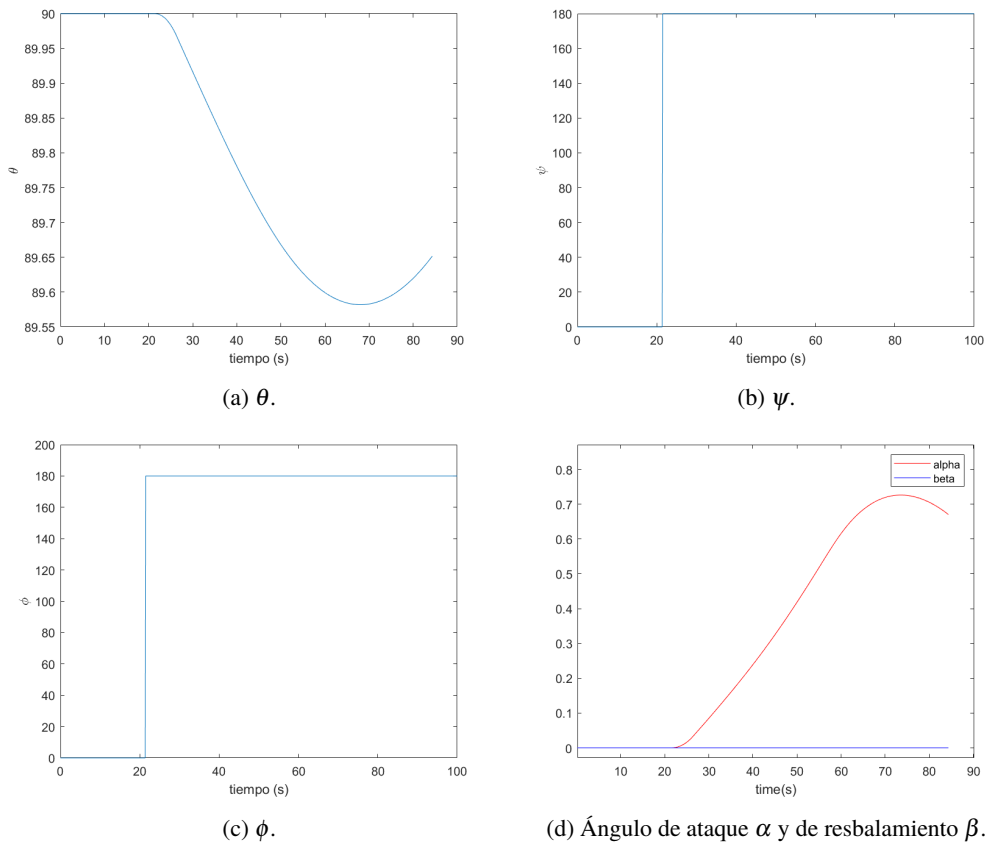


Figura 5.15 Ángulos.

En primer lugar, el accionamiento de la superficie de control induce un momento en el vehículo alrededor del eje  $y_b$ , en sentido negativo (véase la figura 5.15d). Como cabe de esperar, el comportamiento del sistema es análogo a la situación anterior. La inclinación del vehículo genera una fuerza de resistencia lateral que lo desplaza hacia el Norte alcanzando una distancia horizontal de poco más de 50 metros.

En cuanto a la evolución de la actitud, el ángulo de asiento  $\theta$  sigue el mismo patrón que con la configuración anterior de manera que se consigue la coherencia esperada por el modelo. La diferencia se encuentra a la hora de analizar  $\psi$  y  $\phi$ . Obsérvese que la suma de ambas da  $360^\circ$ . Partiendo de  $\theta = \psi = \phi = 0^\circ$ , para alcanzar la actitud actual se gira  $\psi = 180^\circ$  (apuntando al sur),  $\theta = 89.9^\circ$  y  $\phi = 180^\circ$  (para que en planta tenga la misma orientación que en la figura 5.15d). Además, dichos ángulos se mantienen invariantes a lo largo de la

trayectoria, una vez es accionada la superficie de control. También al cambiar al plano Norte-Sur, es el ángulo de ataque  $\alpha$  el que aumenta al cambiar la actitud del vehículo. No obstante, dada la simetría del vehículo y a las derivadas de estabilidad establecidas sea  $\alpha$  o  $\beta$  es mero tecnicismo, la influencia en la cinemática es la misma. Por tanto, la evolución del sistema es como cabe de esperar.

5.2.5 Acoplamiento en actitud

Por último, con el objetivo de analizar el comportamiento del vehículo en 3 dimensiones se va a llevar a cabo otra simulación en la que se va a deflectar el *grid fin 2* durante 5 segundos y acto seguido deflectar el *grid fin 1* durante otros 5 segundos.

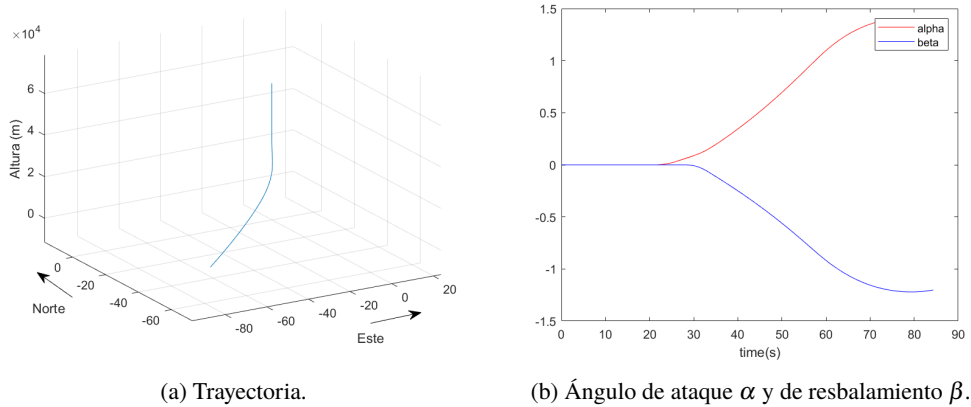


Figura 5.16 Evolución.

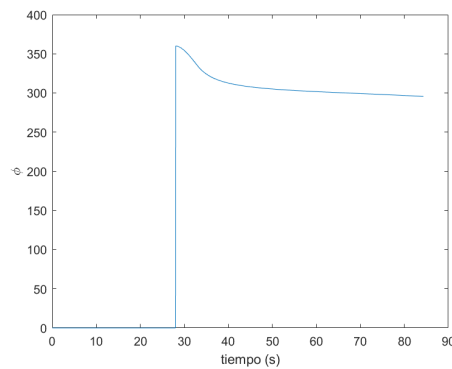
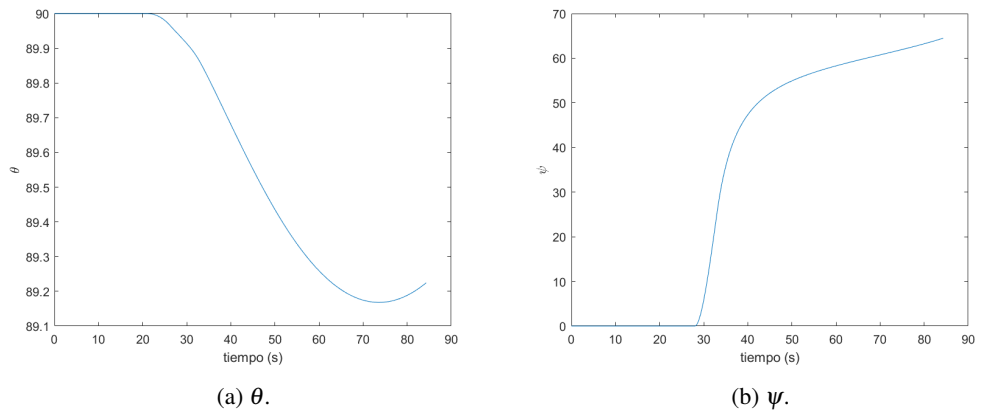


Figura 5.17 Actitud.

La primera diferencia respecto a las dos simulaciones anteriores se hace evidente en la figura 5.16a donde el cohete se desvía aproximadamente 45 grados hacia el suroeste. Por otro lado tanto el ángulo de ataque como de resbalamiento varía de la misma forma ya que al modelar la aerodinámica no se ha tenido en cuenta el factor de la guiñada adversa que acopla el movimiento en ambos planos. No obstante, estos efectos son pequeños y pueden ser tenidos en cuenta si se realiza un estudio aerodinámico más avanzado.

Si se observa la figura 5.17 es evidente el acoplamiento de los movimientos, es decir, si se trabaja fuera del plano, la deflexión de un actuador conlleva la modificación de los tres ángulos que definen la actitud:  $\theta$ ,  $\psi$  y  $\phi$ . A la hora de abordar el problema de control este acoplamiento va a suponer un grado de complejidad grande. Además, tal y como está propuesto el problema no se puede controlar al ángulo de balance. Por ello, en lo que sigue, se va a estudiar el problema de control en un plano.

## 6 Sistema de control del empuje

Es hora de diseñar la arquitectura de un sistema de control que permitirá al vehículo alcanzar la plataforma de aterrizaje a una velocidad segura. Esta maniobra se realizará con un único encendido, por lo que es importante que la ignición se produzca en el momento correcto para que el descenso concluya satisfactoriamente. En este capítulo se describirá su arquitectura y se analizarán los resultados obtenidos.

### 6.1 Objetivo

El objetivo principal es conseguir que la velocidad del cohete cuando este tome tierra (a una altura de 0 m) sea  $0 \text{ m/s}$  con un solo encendido de la planta propulsora. Para que el aterrizaje sea satisfactorio la ignición debe ocurrir en el momento justo. El control consistirá en un relé que se activará una vez la velocidad alcance un determinado valor ajustado de forma empírica mediante sucesivas simulaciones. Teniendo en cuenta que durante la maniobra de descenso se va operar con el cohete casi vertical ( $\theta$  cercano a  $90^\circ$ ), el comportamiento en el descenso va a ser muy similar independientemente del control que se lleve a cabo siempre y cuando no sobrepase ciertos límites. Sin embargo, el cálculo del momento en el que se debe encender la planta propulsora es un problema que se puede abordar de forma más compleja mediante el control óptimo [36] o [37], no obstante, como primera iteración se ha propuesto una solución muy simple, el control por relé.

### 6.2 Estructura

La arquitectura seguida a la hora del diseño del control del empuje es un sistema en bucle cerrado con un control por relé. El control por relé es un sistema de control sencillo que tiene dos estados posibles. Una vez se alcanza un valor determinado, el relé se activa y se produce la ignición de la planta propulsora (véase la figura 6.1).

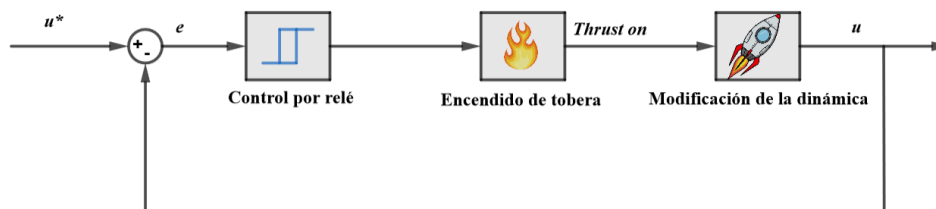


Figura 6.1 Diagrama de bloques del control de empuje.

La sistema en bucle cerrado recibe la señal  $u^*$ , velocidad deseada, de una función de la velocidad con respecto a la altura. Dicha función ha sido definida mediante simulaciones en las que se ha ajustado el momento de ignición de la planta propulsora para minimizar la velocidad de impacto con el suelo. La misión

del sistema de control será pues seguir dicha evolución de la velocidad. Si se observa la figura 6.2, aparecen dos "picos". Estos, son los puntos donde se encuentra la transición entre tobera encendida y apagada. En primer lugar, entre los 54000 m y 33000 m se produce el primer encendido descrito en el capítulo anterior. A continuación el vehículo evoluciona libremente hasta que a una altitud de aproximadamente 2100 m se produce el último encendido.

Para ello, el controlador del relé recibe la diferencia entre la velocidad deseada  $u^*$  y la velocidad del sistema  $u$ . Si la diferencia es menor que 0, es decir, la velocidad del vehículo es mayor que la deseada, la salida del relé adquiere el valor 1. Si por el contrario la diferencia es mayor que 5, es decir, la velocidad del vehículo es ligeramente menor que la deseada, la salida del relé será entonces de valor 0 (véase la figura 6.3). Acto seguido el controlador de la tobera recibe la salida del control por relé, siendo el valor 1 encendido y 0 apagado.

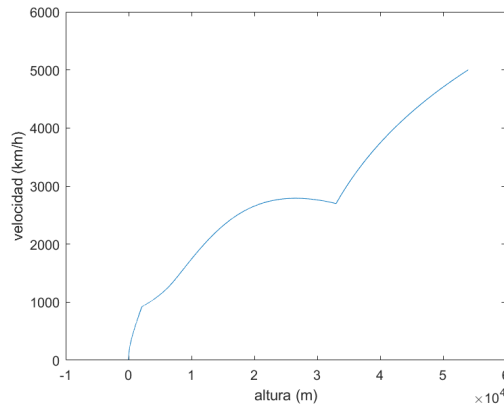


Figura 6.2 Diagrama de bloques del control de empuje.

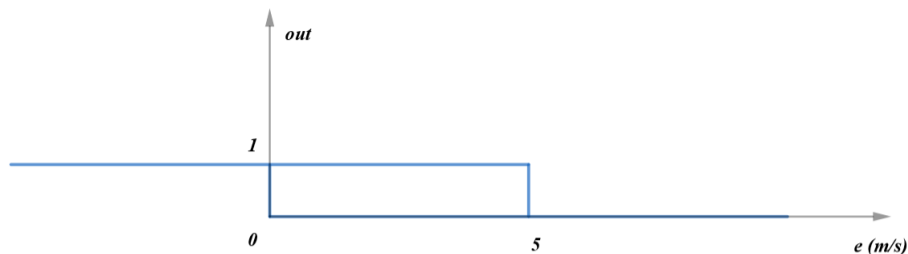


Figura 6.3 Arquitectura del relé.

La complejidad de este sistema de control no es elevada, no obstante, se ha priorizado que la ignición de la planta propulsora se produzca una sola vez antes del contacto con el suelo. Para llevarlo a cabo es necesario que la velocidad deseada  $u^*$  y el margen establecido en el controlador tengan una precisión tal que se consiga la evolución deseada. De lo contrario, el relé estaría continuamente encendiéndose y apagándose, algo válido y quizás más preciso en la práctica, pero que se aleja de un comportamiento real del cohete. En el sistema real cuantos más encendidos y apagados existan la probabilidad de fallo aumenta y la precisión disminuye porque existe un período de transición entre la ignición y el punto de operación de la tobera, hecho que no se contempla en el control por relé.

### 6.3 Resultados

A continuación se van a exponer los resultados obtenidos, partiendo de unas condiciones iniciales tales que la posición inicial es ( $x_0 = 0$  m,  $y_0 = 0$  m,  $z_0 = 54000$  m), la actitud inicial ( $\theta_0 = 90^\circ$ ,  $\psi_0 = 0^\circ$ ,  $\phi_0 = 0^\circ$ ) y la



velocidad inicial ( $u_0 = 1389 \text{ m/s}$ ,  $v_0 = 0 \text{ m/s}$ ,  $w_0 = 0 \text{ m/s}$ ). Dichas condiciones no difieren de las definidas en el capítulo anterior.

Siguiendo las especificaciones de los motores de [21], los cuales tienen capacidad de regular el empuje desde un 100% hasta un 43% del empuje máxima operacional de la tobera, se ha decidido trabajar en el encendido final al 43% de su capacidad máxima. La razón principal se debe a que con un empuje menor se consigue una desaceleración del vehículo menor. La ventaja que proporciona es la existencia de un mayor margen en el momento de ignición de la tobera en el caso de que se produjera un adelanto o retraso en la ignición. Si la desaceleración fuera elevada, un retraso de 0.5 segundos podría suponer que la velocidad de contacto con el suelo fuera 50 km/h más elevada de la esperada porque el sistema evoluciona más rápidamente y por tanto la pendiente de la velocidad es más acuciada. Otra razón por la cuál se ha disminuido la potencia en el tramo final es para seguir fielmente el comportamiento del sistema real de [35].

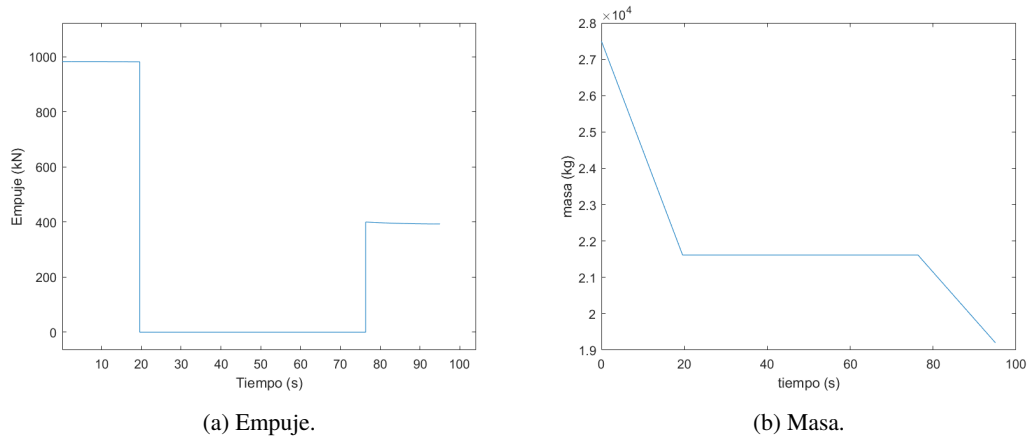


Figura 6.4 Control del empuje.

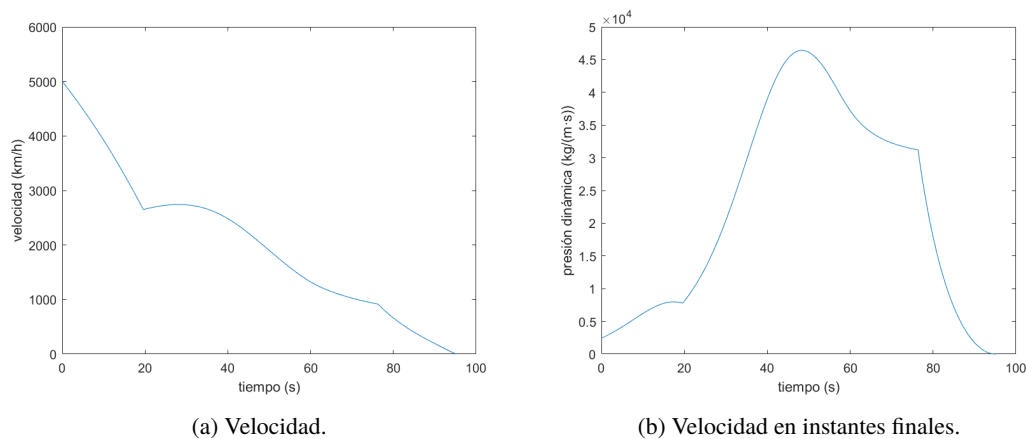


Figura 6.5 Evolución de la velocidad.

En primer lugar, el empuje y la masa del vehículo representados en las figuras 6.4a y 6.4b reflejan lo que se ha mencionado anteriormente. En el primer encendido, se trabaja con el empuje máxima operacional, mientras que en el segundo encendido al 43% de la potencia máxima. También se aprecia con el combustible consumido, donde en el segundo encendido se aprecia una variación de la masa frente al tiempo más suave que en la primera ignición. Por otro lado, al modelizar la planta propulsora, se tuvo en cuenta la presencia de atmósfera y la disminución del empuje disponible con el aumento de la presión atmosférica, no obstante, esta no afecta en gran medida al empuje que, a grandes escalas, parece constante. Además, la masa restante es cercana a la masa estructural del vehículo de 19000 kg por lo que se utiliza el combustible justo y necesario para la maniobra de descenso.

En el diseño del sistema de control se ha priorizado la existencia de una sola etapa de ignición final. Si

bien se aprecia un encendido y apagado en el instante final, la evolución del empuje es satisfactoria. No obstante comparando con el caso real de [35], la ignición final se produce a 4100 *m* de altura, mientras que en la simulación la ignición se produce a 2100 *m*. Esto puede ser debido a que el modelo propulsivo escogido no se comporta fielmente como lo hace en el sistema real, ya que hasta antes de la ignición las velocidades de tanto el real como el simulado son muy parecidas. Este retraso en la ignición durante la simulación indica que la potencia de que se dispone es mayor que en el vehículo real.

En cuanto a la evolución de la velocidad, obsérvese los dos "picos" que aparecen en la figura 6.5a que se relacionan con el encendido y apagado de la planta propulsora. También véase en la figura 6.5b cómo disminuye la velocidad de 900 *km/h* a 3 *km/h* en 18 segundos. Además, es apreciable el apagado y la pequeña ignición final en la velocidad. Tras varias pruebas intentando evitar este rápido encendido y apagado no ha sido posible mejorar la evolución del sistema. Los instantes finales son críticos y este resultado es en el que se ha conseguido una velocidad de impacto mínima.

Por último, una vez que se produce el encendido de la tobera, la presión dinámica disminuye rápidamente por la desaceleración a la que se ve sometida el vehículo y la curva de la altura frente al tiempo se suaviza.

Por tanto, el control por relé implementado para llevar a cabo la tarea de aterrizar el vehículo de forma segura es satisfactorio, considerando una velocidad de contacto con el suelo de 10 *km/h* como segura. Es un buen resultado teniendo en cuenta la sencillez del controlador y la complejidad del sistema ya que un segundo de adelante o de retraso pueden suponer velocidades de impacto considerables o que el vehículo no llegue a tocar el suelo y vuelva a ascender.

# 7 Sistema de control de la actitud

---

Para completar la maniobra de descenso queda diseñar el piloto automático para la actitud. A diferencia del control por relé, este sistema de control estará formado por dos controladores proporcionales derivativos PD en cascada. A lo largo del capítulo se explicará la estructura del sistema, los valores para su sintonización y su comportamiento. Asimismo, se diseñará una trayectoria adecuada para guiar al vehículo en su descenso. Por último se analizarán los resultados de las simulaciones comentando las limitaciones, deficiencias y los logros.

## 7.1 Objetivo

El objetivo principal es conseguir el seguimiento de una trayectoria diseñada con el fin de llegar al punto de aterrizaje. Dada la complejidad del sistema se han centrado los esfuerzos en el estudio de un sistema de control para el problema bidimensional. Reduciendo el problema a dos dimensiones, se utilizan dos de los cuatro *grid fins* mediante una variable de control ( $\lambda_1$  o  $\lambda_2$ ), modificando así el ángulo de asiento y consigo el ángulo de trayectoria.

No obstante, el vehículo no puede alcanzar el punto de aterrizaje de cualquier manera. Además, hay que tener en cuenta que la ignición de la planta propulsora con un ángulo de asiento distinto de  $90^\circ$  puede causar un aumento indeseado de la velocidad horizontal y afectar notablemente a la precisión del sistema de aterrizaje.

## 7.2 Estructura

Antes de analizar la arquitectura que se va a seguir para el diseño del controlador es necesario profundizar en el concepto de ángulo de asiento  $\theta$  y ángulo de trayectoria  $\gamma$ . En primer lugar el ángulo de asiento es el ángulo que forma el eje de simetría del vehículo con el plano horizontal y el ángulo de trayectoria se define como el ángulo formado por el vector velocidad con el plano horizontal, véase la figura 7.1.

La arquitectura seguida para el diseño del piloto automático se caracteriza por la implementación de dos controladores PD en cascada, el controlador para el ángulo de asiento ( $PD_1$ ) y el controlador para el ángulo de trayectoria ( $PD_2$ ). Para seguir la trayectoria definida, el sistema recibe el ángulo de trayectoria deseado el controlador  $PD_2$  calcula el ángulo de asiento adecuado y el controlador  $PD_1$  calcula la deflexión necesaria de la superficie de control, véase la figura 7.2.

Para la construcción de la arquitectura propuesta, se va a diseñar, en primer lugar, el controlador para el ángulo de asiento y acto seguido el controlador para el ángulo de trayectoria que completa el piloto automático.

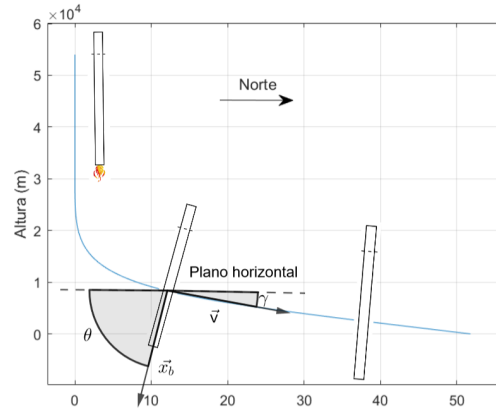


Figura 7.1 Ángulo de trayectoria  $\gamma$  y ángulo de asiento  $\theta$ .

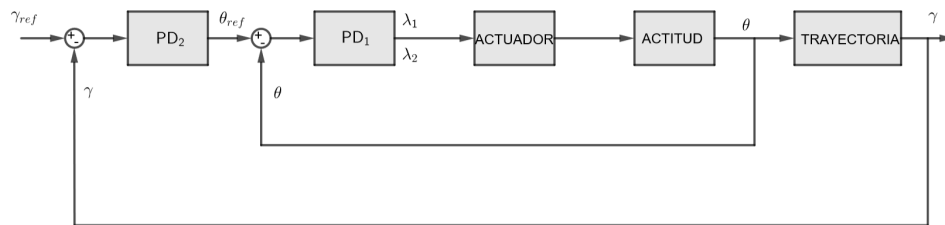


Figura 7.2 Arquitectura del piloto automático.

### 7.2.1 Diseño del controlador para el ángulo de asiento

El objetivo de este controlador es alcanzar el ángulo de asiento deseado con la menor sobreoscilación y el menor error posibles. Para el diseño del controlador se trabajará en el plano  $xz$ , es decir, en la orientación Norte-Sur aunque es igualmente aplicable para el plano  $yz$ , orientación Este-Oeste.

En primer lugar, es necesario conocer cómo están definidos los ángulos de Euler. El ángulo de asiento varía entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , mientras que el ángulo de guiñada  $\psi$  toma valores de  $0^\circ$  si el vehículo apunta hacia el Norte o  $180^\circ$  si apunta hacia el Sur. Sin embargo, el controlador solo trabaja con la variable  $\theta$  y para los mismo valores de  $\theta$  existen dos casos, que el vehículo esté apuntando hacia el Norte o hacia el Sur, véase la figura 7.3a. Para hacer posible el control de esta variable se va a redefinir el ángulo de asiento. Este tomará valores entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$  con el criterio de signos tomado en la figura 7.3b. Al tomar esta nueva definición del ángulo de asiento, si bien pierde algo de sentido físico, permite al controlador trabajar en el plano  $xz$  prescindiendo de la variable  $\psi$  y aumentando el intervalo de trabajo de  $\theta$ .

Una vez realizados los cambios necesarios, es hora de sintonizar el controlador. En primer lugar, este sistema se caracteriza por evolucionar lentamente, además de tener una gran inercia, sobretudo en las capas altas atmosféricas (por encima de los 20000 m) debido a la escasez de aire. Por tanto el controlador no debe tener sobreoscilación y debe de tener un carácter predictivo que le permita anticiparse a los momentos de inercia del vehículo. Es por esta razón por la que se va a trabajar con un controlador proporcional derivativo ( $PD_1$ ) que se caracteriza por:

- Incorporar predicción de la tendencia del error
- Aumentar el valor de  $T_d$  puede aumentar la estabilidad estática relativa (disminuir la sobreoscilación) y permitir aumentar la velocidad de respuesta del sistema
- Valores grandes de  $T_d$  amplifican el ruido con efectos negativos sobre los actuadores
- Aumentar el valor proporcional P aumenta la velocidad de la respuesta, aumenta la sobreoscilación y disminuye el error en permanente

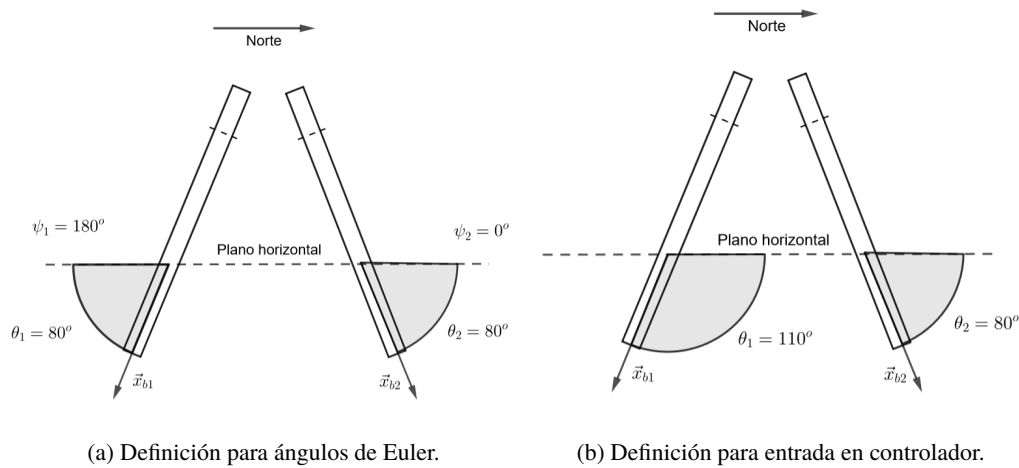


Figura 7.3 Criterio de signos.

Por lo tanto, a la hora de sintonizar el controlador para el ángulo de asiento se tendrá el compromiso de aumentar la velocidad de la respuesta con la menor sobreoscilación y ruido posibles. Los valores obtenidos tras la sintonización del controlador son,

$$P = 170 \quad D = 750 \quad (7.1)$$

Además a fin de no exceder las limitaciones mecánicas de los actuadores se ha impuesto una saturación al controlador de  $\pm\pi/4$ .

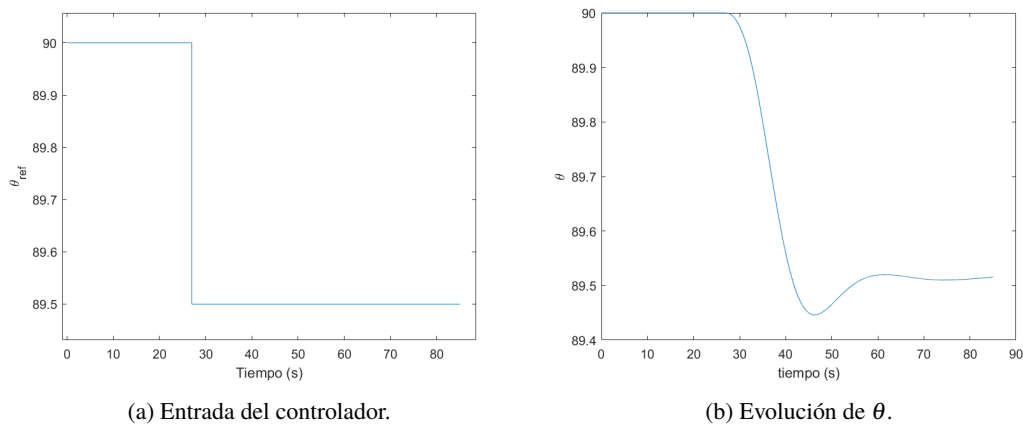


Figura 7.4

El sistema se encuentra en equilibrio para un ángulo de asiento de  $90^\circ$ . Para una entrada en escalón como la de la figura 7.4a, se obtiene una respuesta rápida, si bien con algo de sobreoscilación y un pequeño error en régimen permanente. Es inmediato intuir que un aumento en valor derivativo del controlador disminuirá la sobreoscilación y por tanto se alcanzará antes el régimen permanente. Sin embargo, se ha preferido no aumentarlo ya que ello puede provocar la aparición de ruido en el controlador.

Por otro lado obsérvese la respuesta del controlador en la figura 7.5a. En ella no aparece ruido, aún siendo el valor derivativo del controlador elevado. También señalar que aunque se esté controlando una única variable,  $\lambda_1$ , a la hora de trasladar los resultados al movimiento de las superficies del vehículo los *grif fins* 2 y 4 girarán según las gráficas 7.5b y 7.5c. Remarcar que se han tomado que todos los actuadores giran en el mismo sentido.

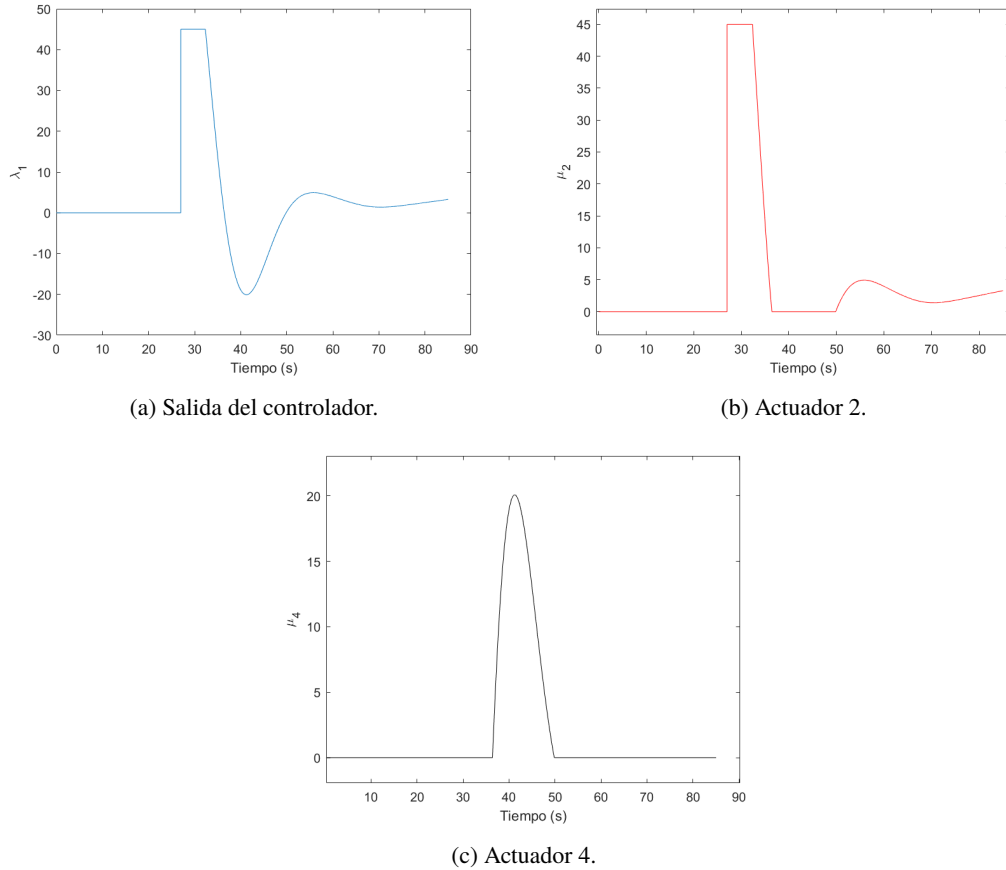


Figura 7.5 Respuesta del controlador para el ángulo de asiento.

Aunque la salida del controlador sea un única variable  $\lambda_1$ , es posible traducir esta respuesta al sistema diseñado en el problema donde se controla la actitud en un plano con dos actuadores. Tal y como está definido el problema, la parte positiva de la gráfica corresponderá al actuador 2 y la parte negativa al actuador 4. A partir de este punto, se representarán las gráficas referentes a los actuadores 2 y 4 para un mayor sentido físico. Tener en cuenta que en todo momento la salida del controlador es solo una,  $\lambda_1$ .

## 7.2.2 Diseño del controlador para el ángulo de trayectoria

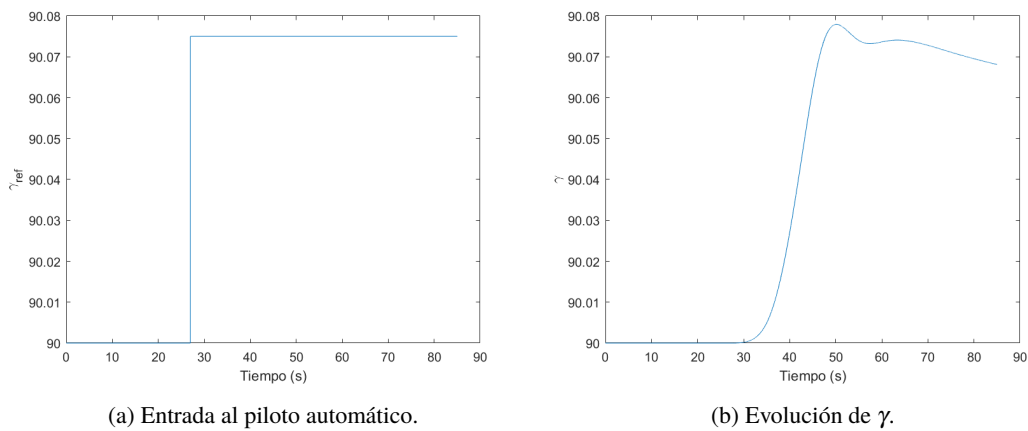
Una vez el ángulo de asiento  $\theta$  está bajo control, queda diseñar el controlador para el ángulo de trayectoria que completa el piloto automático (figura 7.2). La evolución del ángulo de trayectoria en este sistema tiene unas características muy similares la evolución antes estudiada del ángulo de asiento. Es necesario incorporar una predicción de la tendencia del error, además de una respuesta rápida y precisa. Es por eso, que se va a utilizar un controlador proporcional derivativo  $PD_2$ , cuyos valores tras la sintonización son,

$$P = 10 \quad D = 30 \quad (7.2)$$

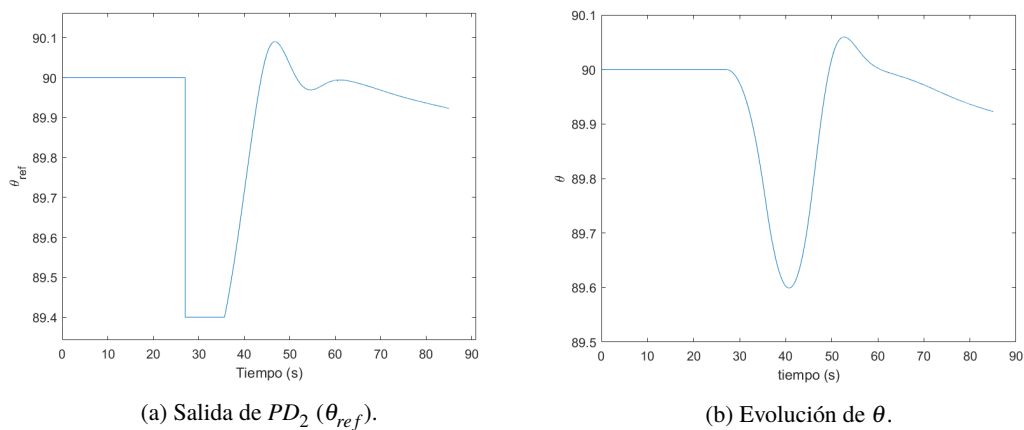
Además se ha introducido una saturación de  $\pm 0.6^\circ$  ya que dada la evolución lenta del sistema, una variación superior del ángulo de asiento aumentaría el tiempo de respuesta hasta situaciones en las que el tiempo de simulación sea inferior al tiempo de respuesta.

Al igual que con el ángulo de asiento, el ángulo de trayectoria se encuentra en equilibrio para  $\gamma = 90^\circ$ , por lo que la función escalón de entrada comienza en ese valor hasta el salto a  $\gamma = 90,75^\circ$ . Puede parecer un ángulo pequeño pero es debido a la gran velocidad de caída del vehículo. Si se quisieran ángulos de trayectoria mayores, el ángulo de asiento  $\theta$  se alejaría aún más de su posición nominal de  $90^\circ$ . Ello complicaría finalizar la maniobra con  $\gamma = \theta = 90^\circ$  pues habría más error en régimen permanente y el tiempo de respuesta aumentaría.

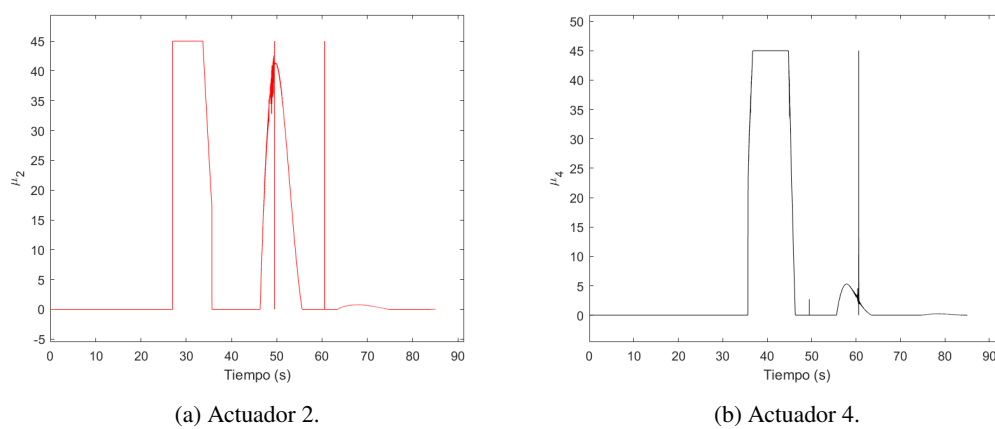
Obsérvese en la figura 7.6b la evolución de  $\gamma$ . Experimenta una pequeña sobreoscilación y un error en régimen permanente que se podrían mitigar con valores mayores tanto del valor proporcional como del derivativo, no obstante, a fin de evitar la aparición de ruido se han mantenido los valores de 7.2.



**Figura 7.6** Respuesta del controlador para el ángulo de trayectoria.



**Figura 7.7** Evolución de  $\theta$ .



**Figura 7.8** Actuadores.

En las figuras 7.7a y 7.7b es posible ver cómo el vehículo no responde muy fielmente a cambios bruscos en el ángulo de asiento. Sin embargo para cambios progresivos en  $\theta_{ref}$  el vehículo puede seguir correctamente su evolución.

Por otro lado, es apreciable la aparición de algo de ruido en la respuesta del controlador para el ángulo de asiento ( $PD_1$ ) tanto en el actuador 2 como en el actuador 4. Es un ruido que no aparece a la hora de sintonizar el controlador con la entrada en escalón de  $\theta_{ref}$  pero que, sin embargo, sí que aparece una vez que el vehículo debe de seguir una evolución específica de  $\theta_{ref}$ .

Existen varias opciones para reducir el ruido, disminuyendo el valor del término derivativo o aumentando el valor del término integral. No obstante, la disminución del término derivativo empeora notablemente la respuesta del controlador al igual que introduciendo un valor integral que inhibe la predicción de la tendencia del error que se pretende conseguir. Por tanto, la señal de salida del  $PD_1$  debe ser tratada adecuadamente.

Además, un valor más alto tanto en el término proporcional como en el derivativo del controlador del ángulo de trayectoria  $PD_2$  mejoraría el error en régimen permanente y reduciría la sobreoscilación respectivamente. Sin embargo, incrementando el término derivativo de  $PD_2$  aumenta también el ruido a la salida de  $PD_1$  es decir, las figuras 7.7a y 7.7b tendrían más ruido.

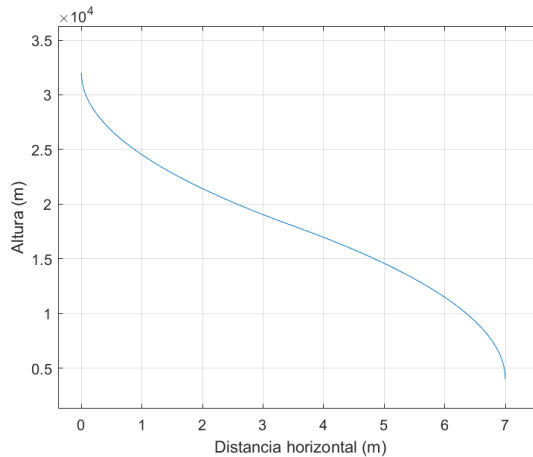
### 7.2.3 Diseño de trayectoria para el aterrizaje

Para la construcción de la trayectoria es esencial tener en cuenta varios factores:

- El sistema evoluciona lentamente por lo que debe ser una trayectoria poco brusca y suave
- Antes de la última ignición el vehículo debe estar vertical ( $\theta = 90^\circ$ ) para que cuando se produzca el encendido este no se desvíe del punto de aterrizaje y pierda precisión
- Antes de la última ignición la velocidad horizontal debe de ser nula, es decir,  $\gamma = 90^\circ$

Tomando estos factores para la elaboración de la trayectoria esta tendrá lugar entre los 32000m y los 4000m de altura. La última ignición se activa alrededor de los 2100m, por lo que el sistema tiene un margen para alcanzar el régimen estacionario y alcanzar los 2100m con  $\theta = \gamma = 90^\circ$  justo encima del punto de aterrizaje.

Si se observa la figura 7.9, está compuesta por dos parábolas cuyos máximos se encuentran en los 32000m y 4000m respectivamente.



**Figura 7.9** Trayectoria a seguir (para una distancia de aterrizaje de 7 m).

Si definimos la altura inicial  $h_0$ , la altura final  $h_f$  y la distancia horizontal final  $x_f$  podemos definir la trayectoria de manera que, siendo la altura el eje  $z$  y la distancia horizontal, el eje  $x$ ,

$$x_1(z) = az^2 + bz + c \quad [x'_1(h_0) = 0 \quad x_1(h_0) = 0 \quad x_1(h_m) = x_m] \quad (7.3)$$

$$x_2(z) = dz^2 + fz + g \quad [x'_2(h_f) = 0 \quad x_2(h_f) = x_f \quad x_2(h_m) = x_m] \quad (7.4)$$

siendo  $h_m$  y  $x_m$  la altura y la distancia media respectivamente. Planteando un sistema de ecuaciones para calcular los términos de las parábolas se obtienen,



$$\begin{pmatrix} 2h_0 & 1 & 0 \\ h_0^2 & h_0 & 1 \\ h_m^2 & h_m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_m \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

$$\begin{pmatrix} 2h_f & 1 & 0 \\ h_f^2 & h_f & 1 \\ h_m^2 & h_m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_f \\ x_m \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

Una vez obtenidos los coeficientes, el ángulo de trayectoria se calcula de la siguiente forma.

$$\gamma = \arctan(2az + b) \quad h_0 > z > h_m \quad (7.7)$$

$$\gamma = \arctan(2dz + f) \quad h_m > z > h_f \quad (7.8)$$

Para el caso de  $h_0 = 32000 \text{ m}$ ,  $h_f = 4000 \text{ m}$  y  $x_f = 7 \text{ m}$  el ángulo de trayectoria necesario será el representado en la figura 7.10. En las sucesivas simulaciones  $h_0$  y  $h_f$  se mantendrán con esos valores.

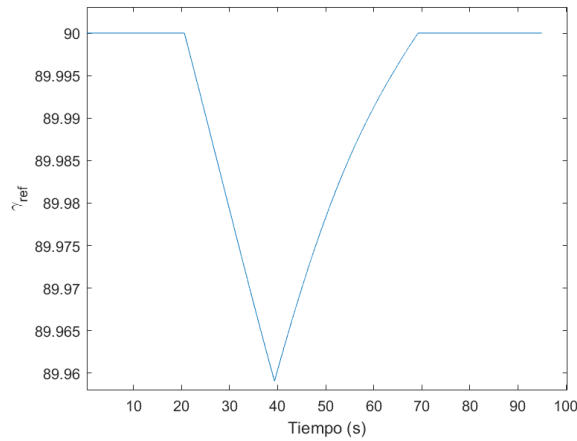


Figura 7.10 Ángulo de trayectoria a seguir (para una distancia de aterrizaje de 7 m).

## 7.3 Resultados

Constituido el sistema de piloto automático con los controladores del ángulo de asiento y del ángulo de trayectoria y calculada la trayectoria en función de la distancia que se quiera alcanzar, es hora de llevar a cabo la simulación de la maniobra de aterrizaje.

El objetivo de las simulaciones que se van a llevar a cabo es comprobar que el vehículo aterriza en el punto indicado a una velocidad inferior a 5 km/h. Para ello en todo el recorrido estará activado el control de empuje y por debajo de los 33000m estará activado el control de actitud. La razón por la que no se activa antes es debida a que a mayores altitudes la atmósfera es muy tenue por lo que el guiado aerodinámico es poco efectivo.

### 7.3.1 Simulación dentro del rango operacional

Se ha establecido una distancia límite por encima de la cual no se garantiza que la precisión con la que llega al punto de aterrizaje sea lo suficientemente baja. Dicha distancia límite es 14 m.

La limitación es debida al hecho de que si antes de la última ignición el vehículo no cumple con  $\theta = \gamma = 90^\circ$  (el vehículo está vertical y la velocidad horizontal es nula), cuando se encienda la planta propulsora este se desviará del punto deseado. Por lo tanto si las distancias no son muy grandes el vehículo podrá alcanzar el régimen permanente más fácilmente y por tanto tener la precisión suficiente.

Para la simulación que se va a llevar a cabo, a posición inicial es ( $x_0 = 0 \text{ m}$ ,  $y_0 = 0 \text{ m}$ ,  $z_0 = 54000 \text{ m}$ ), la actitud inicial ( $\theta_0 = 90^\circ$ ,  $\psi_0 = 0^\circ$ ,  $\phi_0 = 0^\circ$ ) y la velocidad inicial ( $u_0 = 1389 \text{ m/s}$ ,  $v_0 = 0 \text{ m/s}$ ,  $w_0 = 0 \text{ m/s}$ ). Son las mismas condiciones iniciales que se han utilizado anteriormente.

La maniobra de descenso consistirá en un encendido inicial de la planta propulsora para disminuir la velocidad de reentrada, a lo que le sigue el control de actitud para redirigir el vehículo hacia el punto de aterrizaje deseado para que en los instantes finales se produzca la ignición final que permitirá al vehículo aterrizar con la mínima velocidad posible. La distancia horizontal a la que se encuentre el punto de aterrizaje será de 5 m ( $x_f = 5 m$ ).

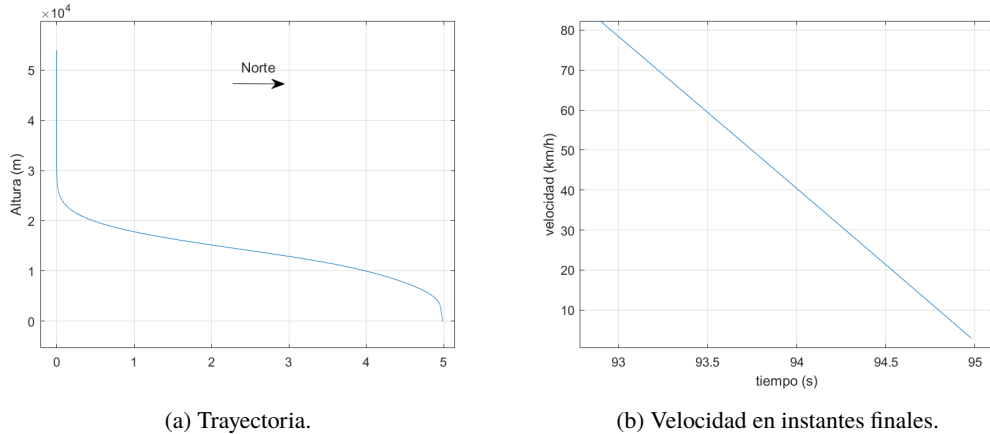


Figura 7.11 Resultados de la simulación.

En vista de los resultados de las figuras 7.11a y 7.11b la simulación es satisfactoria. Aterriza a una velocidad de 3 km/h y alcanza una distancia horizontal de 4,97 m.

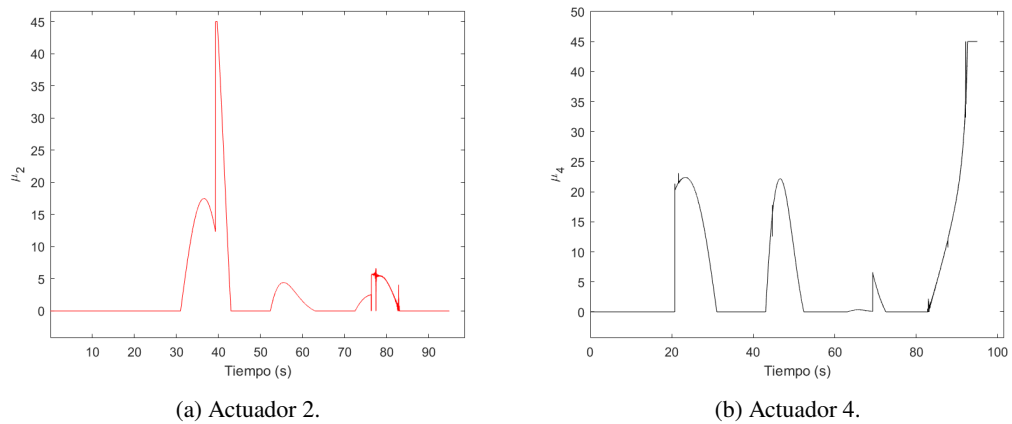
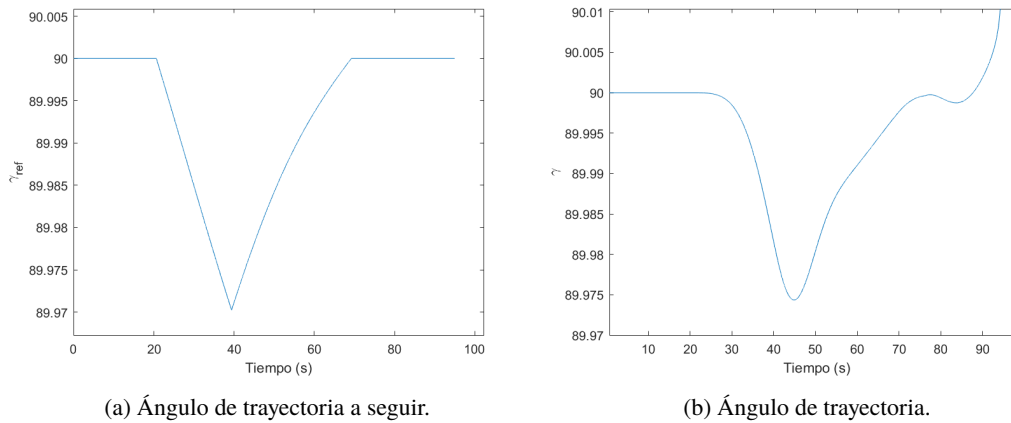
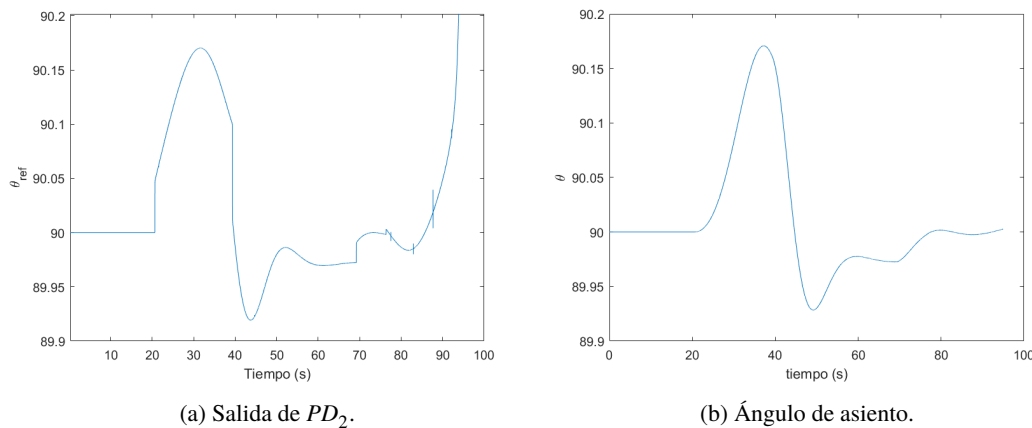


Figura 7.12 Actuadores.

Como se ha mencionado anteriormente se está trabajando en el plano  $xz$  o plano Norte-Sur por lo que los *grid fins* que entran en juego son el 2 y 4, siguiendo el criterio de la figura 4.3. Obsérvese en las figuras 7.12a y 7.12b la evolución de ambos actuadores. Anteriormente, al sintonizar los controladores para el diseño del piloto automático, se decidió mantener un elevado término derivativo a costa de la aparición de algo de ruido. En esta simulación es posible apreciar dicho ruido si bien no afecta en gran medida a la dinámica del problema. Es inmediato pensar que una disminución del término derivativo o incluso la implementación de un término integral disminuirá el ruido. No obstante, la respuesta del sistema empeora de manera que se hace difícil mantener la precisión que se ha conseguido.

Figura 7.13 Comportamiento de  $PD_2$ .Figura 7.14 Comportamiento de  $PD_1$ .

A continuación, analizando el comportamiento tanto del controlador del ángulo de asiento ( $PD_1$ ) como del controlador del ángulo de trayectoria ( $PD_2$ ), es evidente que  $PD_1$  es capaz de seguir la evolución de  $\theta_{ref}$ , mientras que  $PD_2$  es más impreciso a la hora de seguir los ángulos de trayectoria establecidos. Estos resultados tienen relación directa con los valores dados en 7.1 y 7.2. Observando la figura 7.13b sería necesario aumentar la velocidad de respuesta y mitigar la sobreoscilación en  $PD_2$  aumentando los valores de P y D. Sin embargo, esto aumentaría el ruido en la señal de los actuadores.

Por otro lado, se consigue el objetivo propuesto de que en el momento de la última ignición (alrededor del segundo 76) tanto  $\gamma$  como sobretodo  $\theta$  son aproximadamente de  $90^\circ$ . Aún siendo el ángulo de asiento muy cercano a  $90^\circ$ , el ángulo de trayectoria varía de manera considerable al final del aterrizaje sin tener un gran impacto en el resultado final.

### 7.3.2 Simulación fuera del rango operacional

Una vez analizada la evolución del sistema para una distancia horizontal final de 5 m y su aplicabilidad hasta un rango máximo de 14 m, es hora de estudiar qué sucede cuando se intenta aterrizar a una distancia fuera del rango.

Las condiciones iniciales serán las mismas que para la simulación anterior, es decir, la posición inicial ( $x_0 = 0 \text{ m}$ ,  $y_0 = 0 \text{ m}$ ,  $z_0 = 54000 \text{ m}$ ), la actitud inicial ( $\theta_0 = 90^\circ$ ,  $\psi_0 = 0^\circ$ ,  $\phi_0 = 0^\circ$ ) y la velocidad inicial ( $u_0 = 1389 \text{ m/s}$ ,  $v_0 = 0 \text{ m/s}$ ,  $w_0 = 0 \text{ m/s}$ ). La distancia horizontal donde se sitúe el lugar de aterrizaje será de 25 m ( $x_f = 25 \text{ m}$ ).

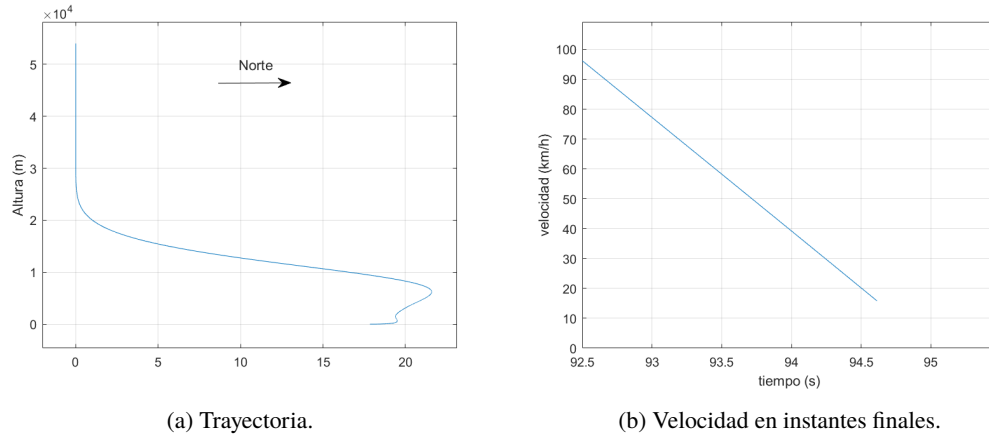


Figura 7.15 Resultados de la simulación.

En primer lugar, obsérvese en las figuras 7.15a y 7.15b la evolución del vehículo. La trayectoria seguida es irregular en los instantes finales alejándose claramente del objetivo de 25 m impuesto. Además la velocidad de aterrizaje se ha incrementado a 15 km/h. Los malos resultados de esta simulación justifican la razón por la cual se está operando fuera de rango. A continuación se van a analizar las causas por las que no se ha conseguido alcanzar el objetivo.

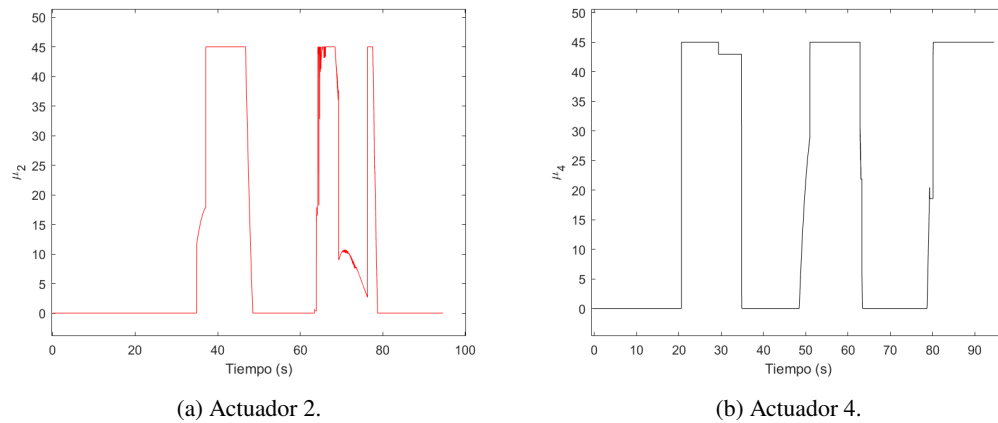


Figura 7.16 Actuadores.

En cuanto a los actuadores, se sigue apreciando la presencia de ruido. Sin embargo lo más llamativo de este resultado es que los actuadores están trabajando en torno a sus niveles de saturación lo que indica que están respondiendo a variaciones bruscas del ángulo de asiento para satisfacer la trayectoria que se le ha proporcionado. Este comportamiento es síntoma de una falta de potencia de control para cambios más exigentes en el ángulo de asiento.

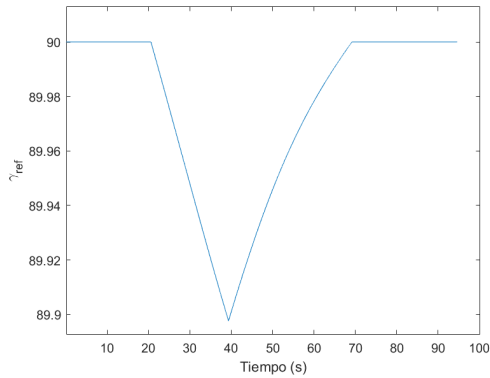
Para analizar más profundamente lo que ocurre con los actuadores es necesario fijarse en las figuras 7.17 y 7.18. En primer lugar, al situarse el punto de aterrizaje a 25 m el ángulo de trayectoria necesario es más acusado. En esta simulación son más evidentes las carencias del controlador  $PD_2$  respecto a los valores dados en 7.2. Al igual que anteriormente, la sobreoscilación y la falta de precisión hacen necesario un aumento del término derivativo en detrimento del ruido que aparece en el sistema.

Por otro lado, véase en la figura 7.18 que el ángulo de asiento de referencia trabaja en regiones cercanas a la saturación impuesta en el controlador. Este comportamiento es síntoma de que la trayectoria a seguir es exigente. Ello sumado a la aparición de sobreoscilaciones, inevitablemente ligadas a variaciones mayores de las entradas en controladores, impide que el vehículo alcanza la altura de la última ignición con la condición de  $\gamma = \theta = 90^\circ$ .

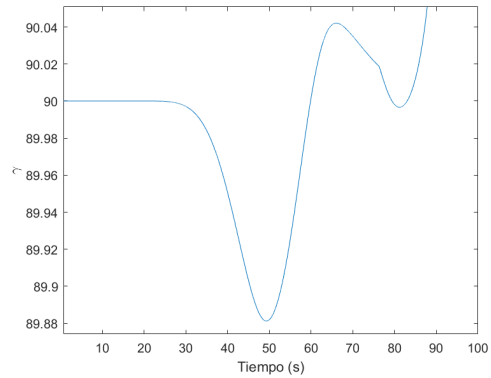
De hecho en la figura 7.15a es visible la irregularidad del último tramo debido al encendido final para el aterrizaje. Si bien, el sistema de control consigue que aterrice sin que se des controle, el punto donde aterrice

será una incógnita.

Por tanto, la limitación del rango operacional viene marcado en mayor medida por la potencia de control de los actuadores que impiden una evolución más rápida de la dinámica. También, aunque en menor medida, las deficiencias (sobre todo en  $PD_2$ ) para alcanzar el régimen permanente para una trayectoria con ángulos mayores afectan a la precisión del aterrizaje.

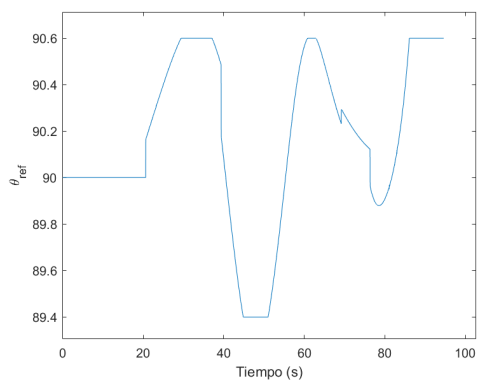


(a) Ángulo de trayectoria a seguir.

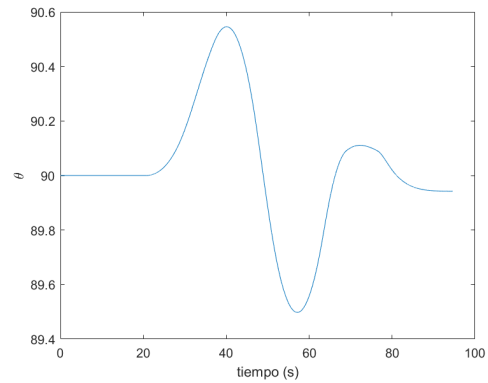


(b) Ángulo de trayectoria.

**Figura 7.17** Comportamiento de  $PD_2$ .



(a) Salida del  $PD_1$ .



(b) Ángulo de asiento.

**Figura 7.18** Comportamiento de  $PD_1$ .



## 8 Conclusiones

---

La filosofía seguida a lo largo de todo el estudio ha sido seguir una línea de trabajo por la cual el problema sea accesible y lo suficientemente simple como para abordarlo de forma académica siempre y cuando no se aleje del comportamiento real. Dada la popularidad que ha adquirido a lo largo de los años SpaceX, se ha escogido para este trabajo su vehículo más emblemático, el Falcon 9. Acorde con la aspiración comparativa de este estudio con la realidad, parte de las conclusiones se basan en el análisis de [35]. Además serán expuestas las deficiencias y características tanto del vehículo como de los sistemas de control diseñados.

En primer lugar, la definición del modelo aerodinámico es el primer paso crítico a la hora de definir el problema. Además de las variables típicas como el coeficiente de resistencia  $C_D$ , existen multitud de derivadas de estabilidad así como derivadas de control que dependen exclusivamente del vehículo. Este trabajo carece del estudio conveniente de dichos coeficientes aerodinámicos aunque algunos de ellos se han estimado como el  $C_{n\beta}$  o el  $C_{m\alpha}$  siguiendo criterios de estabilidad. Analizando la evolución real del vehículo en [35] de tanto la velocidad como la altitud, se observa una variación con la simulación de entre un 0.76 % a un 2.94 % lo cual indica que tanto el coeficiente de resistencia  $C_D$  como el modelado atmosférico son los suficientemente realistas.

Por otro lado la evidente falta potencia de control que limita las actuaciones del vehículo más allá de los 14 m puede ser resuelta mediante la modificación de los dispositivos actuadores llamados *grid fins*. Si bien, son las aletas que más potencia de control ofrecen si las comparamos con las convencionales (aleros), su potencia de control puede ser aumentada mediante un mayor mallado del dispositivo o una superficie mayor. No obstante, tanto el aumento del mallado como el de superficie deben de estar sujetos a un estudio estructural y de temperaturas.

En cuanto al modelo propulsivo, dada la escasez de información con respecto al modelo de motor utilizado en el Falcon 9, el Merlin, se han tomado varias hipótesis para su modelado, entre ellas la incapacidad para variar el empuje que proporciona la tobera una vez que esta se enciende. Existen dos encendidos de la planta propulsora, acordes con [35], de los cuales el primero es reproducido por la simulación con fidelidad mientras que el último encendido difiere en un 50%. Ello indica que el modelado difiere de la planta propulsora real del Falcon 9, pudiendo ser el origen de la diferencia la ausencia de la capacidad para modificar el empuje durante la maniobra.

Pese al margen de mejora que puedan tener los modelos, dada la estructura que tiene el modelo de Simulink (ver figura 5.1) es sencillo implementar una aerodinámica o propulsión más compleja. Las ecuaciones del movimiento y actitud son siempre las mismas, por lo que únicamente cambiado el bloque de *Fuerzas y Torques* es posible modelar un sistema más complejo para su análisis.

En cuanto al controlador del empuje, en primer lugar, tiene dos estados: encendido o apagado por lo que no es posible variar el empuje proporcionado por la tobera y por lo tanto llevar a cabo una maniobra de descenso más controlada. El control por relé mediante el encendido y apagado del sistema es capaz de aterrizar el vehículo. Sin embargo el encendido y apagado constante no es viable en la realidad por lo que la función de entrada proporcionada ha sido diseñada para que, como se ha visto en las simulaciones, se produzcan dos únicos encendidos. Además dada la simpleza del controlador, si el vehículo realiza maniobras más allá de las esperadas, la velocidad final diferirá de la esperada.

Por otro lado, el piloto automático diseñado para el control de la actitud del vehículo tiene mejores prestaciones que el controlador de empuje. Sin embargo, existen deficiencias que merecen ser mejoradas. Primeramente, la complejidad para sintonizar los controladores ha derivado en una falta de precisión que limita el rango operacional del vehículo (unido a la falta de potencia de control). Dado que el sistema

se caracteriza por tener una evolución lenta con inercias elevadas y una potencia de control limitada es necesario un control con carácter anticipativo, sin sobreoscilaciones. No obstante, en un afán de perseguir esas características se entra en conflicto con otra variable, el ruido. Así pues el ruido ha sido el factor limitante en la sintonización de los controladores. Pese a las dificultades encontradas, ha sido posible conseguir el aterrizaje de forma controlada del vehículo llegando a la plataforma de aterrizaje con un margen de error de alrededor del 1% a una velocidad que ronda entre los 2  $km/h$  y los 6  $km/h$  dentro del rango operacional de 14m de distancia horizontal.

Finalmente, este trabajo ha sacado a la luz la necesidad de concurrencia de muchos campos de la ingeniería. Por un lado las características aerodinámicas, propulsivas o estructurales, la mecánica del sólido rígido, mecánica orbital y por supuesto la ingeniería de sistemas. Para que en proyecto de esta magnitud salga adelante es esencial la concurrencia de todos los departamentos. En este estudio existirán carencias en algunos campos más que en otros e incluso la inexistencia de los mismos. A lo largo del trabajo se ha intentado abarcar los campos esenciales con la mayor profundidad posible dentro de las limitaciones propias de un trabajo de fin de carrera. En vista de los resultados, la búsqueda de un trabajo en línea con los sucesos reales ha sido llevada a cabo con éxito, sin dejar de lado su margen de mejora.

## 8.1 Trabajo futuro

La versatilidad que proporciona la estructura del modelo abre muchas puertas para la implementación de nuevos estudios aerodinámicos, propulsivos o controles más óptimos y precisos.

En primer lugar, en buena parte de la maniobra de aterrizaje, el vehículo trabaja en régimen supersónico lo cual tiene consecuencias aerodinámicas evidentes. Las ondas de choque generadas por el vuelo supersónico del vehículo generan una variación de presión, temperatura, densidad y velocidad del aire. Además, a la resistencia existente se le añade la resistencia de onda. Por otro lado la velocidad aerodinámica que experimentan los actuadores podría ser distinta a la del vehículo por las razones expuestas anteriormente. Un estudio aerodinámico futuro con CFDs implementando la geometría del vehículo y sus dispositivos de control proporcionará un modelo aerodinámico más preciso.

Al igual que para el modelo aerodinámico, en vista al modelo propulsivo, existe un campo de estudio relativo al diseño de un motor cohete adecuado para la misión a realizar. Sin embargo, más allá del margen de mejora de los modelos, es interesante ver de qué manera se puede optimizar la maniobra de reentrada del vehículo hasta su punto de aterrizaje. De todas las técnicas globales de optimización, los métodos basados en inteligencia de enjambre (swarm intelligence, SI) se están volviendo cada vez más populares debido a su velocidad y precisión [38]. Este método está inspirado por fenómenos naturales como el comportamiento de una colonia de hormigas o una bandada de pájaros. El Particle Swarm Optimization (PSO) evita los cálculos que precisan las aproximaciones analíticas convencionales usando una solución existente para un problema específico e intentando encontrar otras posibles trayectorias para otros objetivos de interés. Este campo proporciona una gran variedad de métodos para la optimización del problema, la cual ha sido omitida en este trabajo. Incluso, con la integración de un nuevo modelo aerodinámico se podría simular el lanzamiento de un misil o de un cohete que daría lugar al estudio de trayectorias óptimas para problemas multifase [39], como lo puede ser el lanzamiento de un cohete.

Asimismo, existen muchas opciones para el diseño del piloto automático. Si bien ha sido posible su control mediante controles sencillos como relé o proporcionales derivativos, cabe mencionar que el estudio de controles LPV (Linear parameter-varying control) [40], LQR (Linear-quadratic-regulator) de horizonte finito[37] o el control predictivo [36] es muy interesante dada la dinámica del problema. El uso de un controlador LPV para el control de la posición y actitud de un vehículo espacial con 6 grados de libertad no lineales presenta ventajas frente a un sistema lineal invariante con el tiempo. Un sistema LPV está definido como un sistema lineal cuya dinámica depende de una variable externa cuyos valores son desconocidos a priori pero pueden ser calculados a medida que el sistema avanza.

Por otro lado, existen campos con los que no se ha contado por su complejidad o extensión. Un ejemplo de ello es el estudio estructural y de vibraciones. Los esfuerzos debido a la resistencia del aire, la diferencia de presión y temperatura y las aceleraciones a las que se ve sometido el vehículo a lo largo de la trayectoria, son parámetros a tener en cuenta a la hora tanto del diseño del cohete como la selección de materiales. Además el paso por el régimen transónico trae consigo un aumento de las vibraciones del vehículo por lo que habría que tener en cuenta que la frecuencia natural del cohete no coincide con la del sistema.



# Índice de Figuras

---

1.1	Cronograma carrera espacial	2
1.2	Coste de lanzamiento. Fuente (editada):[7]	3
2.1	Lanzadores actuales. Fuente:[17]	7
2.2	CubeSats. Fuente:[19]	8
3.1	Falcon 9 [21]	9
3.2	Ejemplos de distintos mallados en <i>grid fins</i> . Fuente [22]	10
3.3	Trayectoria de reentrada del Falcon 9. Fuente: [21]	11
3.4	Modelo de atmósfera exponencial	12
3.5	Temperatura-Altitud	13
3.6	Coefficiente de resistencia de la base en función de Mach	14
3.7		14
3.8	Coefficiente de resistencia del <i>grid fin</i> en función de Mach	15
3.9	Momentos en ejes cuerpo	15
3.10	Distribución de la planta motora	16
3.11	Empuje-Altitud	18
4.1	Sistema de ejes horizonte local y ejes viento I	20
4.2	Sistema de ejes horizonte local y ejes viento II	20
4.3	Vista de planta del vehículo (a escala)	21
4.4	Vista de alzado del vehículo (a escala)	22
4.5	Sistema de ejes viento y ejes cuerpo	22
4.6	Funcionamiento de los <i>grid fins</i> (I)	28
4.7	Funcionamiento de los <i>grid fins</i> (II)	29
5.1	Diagrama de bloques	33
5.2	Fuerzas y torques	34
5.3	Ecuaciones del movimiento	34
5.4	Posición y actitud	35
5.5	Diagrama de flujo para conversión a ángulos de Euler	35
5.6		37
5.7	Evolución en caída libre	37
5.8	Actitud	38
5.9	Comparación	39
5.10	Deflexión de la superficie de control 1	40
5.11	Evolución	40
5.12	Ángulos	41
5.13	Deflexión de la superficie de control 4	41
5.14	Evolución	42
5.15	Ángulos	42
5.16	Evolución	43

5.17	Actitud	43
6.1	Diagrama de bloques del control de empuje	45
6.2	Diagrama de bloques del control de empuje	46
6.3	Arquitectura del relé	46
6.4	Control del empuje	47
6.5	Evolución de la velocidad	47
7.1	Ángulo de trayectoria $\gamma$ y ángulo de asiento $\theta$	50
7.2	Arquitectura del piloto automático	50
7.3	Criterio de signos	51
7.4		51
7.5	Respuesta del controlador para el ángulo de asiento	52
7.6	Respuesta del controlador para el ángulo de trayectoria	53
7.7	Evolución de $\theta$	53
7.8	Actuadores	53
7.9	Trayectoria a seguir (para una distancia de aterrizaje de 7 m)	54
7.10	Ángulo de trayectoria a seguir (para una distancia de aterrizaje de 7 m)	55
7.11	Resultados de la simulación	56
7.12	Actuadores	56
7.13	Comportamiento de $PD_2$	57
7.14	Comportamiento de $PD_1$	57
7.15	Resultados de la simulación	58
7.16	Actuadores	58
7.17	Comportamiento de $PD_2$	59
7.18	Comportamiento de $PD_1$	59

# Índice de Tablas

---

3.1	Parámetros del motor cohete	11
3.2	Atmósfera Estándar Internacional	13
3.3	Parámetros del motor cohete	17



# Bibliografía

---

- [1] P. G. Martín, «Julio Verne, el escritor visionario,» *National Geographic*, 2019. dirección: [https://historia.nationalgeographic.com.es/a/julio-verne-escritor-visionario\\_13488](https://historia.nationalgeographic.com.es/a/julio-verne-escritor-visionario_13488).
- [2] J. M. Sadurní, «Wernher Von Braun, el artífice de la conquista a la Luna,» *National Geographic*, 2020. dirección: [https://historia.nationalgeographic.com.es/a/wernher-von-braun-artifice-conquista-luna\\_15168](https://historia.nationalgeographic.com.es/a/wernher-von-braun-artifice-conquista-luna_15168).
- [3] H. Rodríguez, «La carrera espacial paso a paso,» *National Geographic*, 2019. dirección: [https://www.nationalgeographic.com.es/llegada-del-hombre-a-la-luna/carrera-espacial-paso-a-paso\\_14369](https://www.nationalgeographic.com.es/llegada-del-hombre-a-la-luna/carrera-espacial-paso-a-paso_14369).
- [4] R. V. Valenzuela, *Transparencias de Mecánica Orbital y Vehículos Espaciales*. Escuela Técnica Superior de Ingeniería, 2021.
- [5] «BEIDOU navigation and positioning satellites,» *China National Space Administration (CNSA)*, dirección: <http://www.cnsa.gov.cn/english/n6465715/n6465716/c6480954/content.html>.
- [6] «Indian Regional Navigation Satellite System (IRNSS) : NavIC,» *Indian Space Research Organisation (ISRO)*, dirección: <https://www.isro.gov.in/irnss-programme>.
- [7] B. Venditti. «The Cost of Space Flight Before and After Space X.» (), dirección: <https://www.visualcapitalist.com/the-cost-of-space-flight/>.
- [8] «Space Launch System,» *NASA*, dirección: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20160014576/downloads/20160014576.pdf>.
- [9] «Vega-C,» *ESA*, dirección: [https://www.esa.int/Enabling\\_Support/Space\\_Transportation/Launch\\_vehicles/Vega-C](https://www.esa.int/Enabling_Support/Space_Transportation/Launch_vehicles/Vega-C).
- [10] «Space Rider,» *ESA*, dirección: [https://www.esa.int/Enabling\\_Support/Space\\_Transportation/Space\\_Rider](https://www.esa.int/Enabling_Support/Space_Transportation/Space_Rider).
- [11] «Soyuz-2,» *ROSCOSMOS*, dirección: <http://en.roscosmos.ru/468/>.
- [12] «Falcon Heavy,» *Space X*, dirección: <https://www.spacex.com/vehicles/falcon-heavy/>.
- [13] «Dragon,» *Space X*, dirección: <https://www.spacex.com/vehicles/dragon/>.
- [14] «Starship,» *Space X*, dirección: <https://www.spacex.com/vehicles/starship/>.
- [15] «dearMoon,» dirección: <https://dearmoon.earth/>.
- [16] «New Shepard,» *Blue Origin*, dirección: <https://www.blueorigin.com/new-shepard/>.
- [17] «New Glenn,» *Blue Origin*, dirección: <https://www.blueorigin.com/new-glenn>.
- [18] «Blue Moon,» *Blue Origin*, dirección: <https://www.blueorigin.com/blue-moon/lunar-transport>.
- [19] «CubeSats,» *ESA*, dirección: [https://www.esa.int/Enabling\\_Support/Preparing\\_for\\_the\\_Future/Discovery\\_and\\_Preparation/CubeSats](https://www.esa.int/Enabling_Support/Preparing_for_the_Future/Discovery_and_Preparation/CubeSats).
- [20] «Payload Mass to Orbit,» *BryceTech*,
- [21] *Falcon user's guide*, *SpaceX*, 2020. dirección: <https://www.spacex.com/vehicles/falcon-9/>.
- [22] K. S. Orthner, «Aerodynamic Analysis of Lattice Grid Fins in Transonic Flow,» *AIR FORCE INSTITUTE OF TECHNOLOGY*, 2004. dirección: <https://scholar.afit.edu/etd/3916>.

- [23] «Preguntas frecuentes sobre la reentrada de Tiangong 1,» *ESA*, dirección: [https://www.esa.int/Space\\_in\\_Member\\_States/Spain/Preguntas\\_frecuentes\\_sobre\\_la\\_reentrada\\_de\\_Tiangong\\_1](https://www.esa.int/Space_in_Member_States/Spain/Preguntas_frecuentes_sobre_la_reentrada_de_Tiangong_1).
- [24] P. Koteswaram, «The Easterly Jet Stream in the Tropics,» *Tellus*, págs. 43-57, 1958. dirección: <https://doi.org/10.3402/tellusa.v10i1.9220>.
- [25] A. Tewari, *Atmospheric and Space Flight Dynamics. Modeling and Simulation with MATLAB and Simulink*. Birkhauser, 2007, págs. 223-224, ISBN: 0-8176-4437-7.
- [26] J. C. McDowell, «The edge of space: Revisiting the Karman Line,» *Acta Astronáutica*, vol. 151, págs. 668-677, 2018. dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094576518308221>.
- [27] R. Q. Campos, «Planificación y guiado óptimos de la trayectoria de ascenso a órbita de un vehículo lanzador sometida a perturbaciones y errores de modelado,» 2021, págs. 15-16. dirección: <https://idus.us.es/handle/11441/128180>.
- [28] «Earth Atmosphere Model - Metric Units,» *NASA*, 2021. dirección: <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/atmosmet.html>.
- [29] J. S. R. George E. Hansche, «Air Drag on Cubes at Mach Numbers 0.5 to 3.5,» *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, págs. 83-84, dirección: <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/8.2166>.
- [30] M. D. Yan Zeng Jinsheng Cai, «Numerical Study on Drag Reduction for Grid-Fin Configurations,» *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 2009. dirección: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2009-1105>.
- [31] J. M. Macha, «Drag of Circular Cylinders at Transonic Mach Numbers,» *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, vol. 14, n.º 6, pág. 606, 1977.
- [32] D. R. Rivas, *Mecánica de Vuelo*. Escuela Técnica Superior de Ingeniería, 2016, págs. 5-14.
- [33] R. V. Valenzuela, *Fundamentos de Navegación Aérea*, ép. Sistemas de referencia. Actitud. Ecuaciones de la navegación. Escuela Técnica Superior de Ingeniería, 2020, págs. 23-49.
- [34] A. Markelov, «Uso de Cuaterniones para Representar Rotaciones,» *Repositorio Institucional de la Universidad Tecnológica de Panamá*, págs. 1-2, 2022. dirección: <http://revistas.utp.ac.pa/index.php/tecnologia-hoy/article/view/628>.
- [35] «SpaceX Launch: OTV5 / X-37B : SpaceX Landing of first stage Falcon 9.» (2018), dirección: [https://www.youtube.com/watch?v=\\_eEPOYWD4WU&t=559s](https://www.youtube.com/watch?v=_eEPOYWD4WU&t=559s).
- [36] M. Morari, C. E. Garcia y D. M. Prett, «Model predictive control: Theory and practice,» *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 21, n.º 4, págs. 1-12, 1988.
- [37] A. Grancharova y T. A. Johansen, «Survey of explicit approaches to constrained optimal control,» *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 3355, págs. 47-97, 2005.
- [38] A. Rahimi, K. D. Kumar y H. Alighanbari, «Particle Swarm Optimization Applied to Spacecraft Reentry Trajectory,» *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 36, n.º 1, 2013. dirección: <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.56387>.
- [39] M. A. Patterson y A. V. Rao, «A MATLAB Software for Solving Multiple-Phase Optimal Control Problems Using hp-Adaptive Gaussian Quadrature Collocation Methods and Sparse Nonlinear Programming,» *University of Florida*, vol. 41, n.º 1, 2014. dirección: <http://dx.doi.org/10.1145/2558904>.
- [40] A. S. Ghersin y R. S. S. Peña, «LPV Control of a 6-DOF Vehicle,» *Universidad de Sevilla*, 2002. dirección: <https://ieeexplore.ieee.org/document/1058058>.
- [41] «Updates,» *Space X*, dirección: <https://www.spacex.com/updates/#starship-moon-announcement>.
- [42] «About Blue Origin,» *Blue Origin*, dirección: <https://www.blueorigin.com/about-blue>.
- [43] «Opening Space for good,» *Virgin Orbit*, dirección: <https://www.virgin.com/virgin-companies/virgin-orbit>.
- [44] «Virgin Galactic,» *Virgin Galactic*, dirección: <https://www.virgingalactic.com/>.
- [45] J. S. Shamma y J. R. Cloutier, «Gain-Scheduled Missile Autopilot Design Using Linear Parameter Varying Transformations,» *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 16, n.º 2, 1993. dirección: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/3.20997>.