

Trabajo Fin de Grado

Ingeniería de las Tecnologías Industriales

Modelos de guerra: Aplicación al conflicto Palestino-Israelí

Autor: Alberto Muñoz Liñán

Tutores: Manuel Ordoñez Sánchez

Inmaculada Ventura Molina

Dpto. Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2022



Trabajo Fin de Grado
Ingeniería de las Tecnologías Industriales

Modelos de guerra: Aplicación al conflicto Palestino-Israelí

Autor:

Alberto Muñoz Liñán

Tutor:

Manuel Ordoñez Sánchez

Inmaculada Ventura Molina

Dpto. de Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2022

Trabajo Fin de Grado: Modelos de guerra: Aplicación al conflicto Palestino-Israelí

Autor: Alberto Muñoz Liñán

Tutor: Manuel Ordoñez Sánchez
Inmaculada Ventura Molina

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2022

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mis amigos

A mis profesores

Agradecimientos

A mi familia por apoyarme en todo desde siempre, aconsejarme y animarme cuando había dudas.

A mis amigos por acompañarme y estar durante todos estos años.

A mis profesores por enseñarme todo lo necesario para mi futuro laboral y ayudarme en la realización de este trabajo.

Resumen

En el presente trabajo se ha llevado a cabo una investigación acerca de los diferentes modelos de guerra basados en la teoría de William Lanchester y su estudio de dichos modelos basados en los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales.

Se han estudiado en profundidad los modelos de Fuego Directo y de Fuego Indirecto o en área, y se han explicado las principales características de estos y las diferencias existentes entre ellos.

Además, se ha realizado un apartado basado en el Marco Matemático donde se han expuesto todos los conceptos teóricos necesarios para conocer el comportamiento de las soluciones de los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales que son la base de estudio de este trabajo.

También se ha realizado el análisis cuantitativo y cualitativo de las soluciones de los sistemas, que sirve para conocer el comportamiento de estos sistemas en los puntos de equilibrio, acompañándolo con imágenes gráficas que hacen ver la trayectoria de las curvas solución; además de la inclusión de definiciones y demostraciones necesarias para su comprensión.

Finalmente, se ha incluido un apartado como anexo donde se tratan otros aspectos de menor relevancia para este trabajo en concreto, pero que son de utilidad conocer para ampliar conocimientos relacionados con el tema. En el se han incluido conceptos acerca de los Sistemas Planos Lineales Homogéneos y los Sistemas Planos No Lineales Homogéneos.

Abstract

In this work, an investigation has been carried out about the different war models based on William Lanchester's theory and his study of said models based on Differential Equations Systems.

The Direct Fire and Indirect or Area Fire models have been studied in Depth, and their main characteristics and the differences between them have been explained.

In addition, a section based on the Mathematical Framework has been made where all the theoretical concepts necessary to know the behaviour of the solutions of the Differential Equations Systems that are the basis of study of this work have been exposed.

The quantitative and qualitative analysis of the solutions of the systems has also been carried out, which serves to know the behaviour of these systems at the equilibrium points, accompanying it with graphic images that show the trajectory of the solution curves; in addition to the inclusion of definitions and demonstrations necessary for their understanding.

Finally, a section has been included as an annex where other aspects of lesser relevance for this particular work are discussed, but which are useful to know to broaden knowledge related to the subject. Concepts about Homogeneous Planar Linear Systems and Homogeneous Nonlinear Planar Systems have been included in it.

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Abstract	xiii
Índice	xv
Índice de Tablas	xvii
Índice de Figuras	xix
1 Introducción	1
2 Objetivos	3
3 Descripción de los modelos	6
3.1. <i>Modelo de Fuego Directo - Ley Cuadrada</i>	7
3.2. <i>Modelo de Fuego Indirecto o Fuego en Área - Ley Lineal</i>	8
4 Marco matemático	11
4.1. <i>Generalidades</i>	11
4.2. <i>Sistemas Planos Autónomos Lineales Homogéneos</i>	13
5 Análisis de los modelos	22
5.1. <i>Modelo de Fuego Directo</i>	22
5.2. <i>Modelo de Fuego Indirecto o Fuego en Área</i>	41
6 Análisis del conflicto Palestino-Israelí	54
6.1. <i>Modelo de Fuego Directo con Refuerzos</i>	54
6.2. <i>Modelo de Fuego Directo sin Refuerzos</i>	55
6.3. <i>Modelo de Fuego Indirecto o Fuego en Área sin Refuerzos</i>	56
6.4. <i>Modelo de Fuego Indirecto o Fuego en Área con Refuerzos</i>	57
7 Conclusiones	60
8 Anexos	62
Referencias	72

Índice de Tablas

Tabla 5.1 Relación entre parámetros de manera que el combate termine en empate y $x_{1o} = 2 x_{2o}$	27
Tabla 5.2 Ejército vencedor en función de α manteniendo el resto de parámetros constantes	30
Tabla 5.3 Relación entre parámetros de manera que el combate termine en empate y $x_{1o} = 3 x_{2o}$	31
Tabla 5.4 Situaciones donde se produce empate para $x_{1o} = 3 x_{2o}$	31
Tabla 6.1. Comparativa entre Israel y Palestina en Modelo de Fuego Directo con Refuerzos	54

Índice de Figuras

Figura 4.1. Campo de direcciones, nulclinales y línea de autovectores ejemplo 2.2.1.	20
Figura 4.2. Campo de direcciones, líneas de autovectores y diagrama de fases ejemplo 2.2.1.	20
Figura 4.3. Ejemplo de un punto de silla.	21
Figura 5.1. Representación gráfica de la variación del número de efectivos en cada bando respecto al tiempo cuando hay empate. En modelo de fuego directo con $x_{1o} = 500, x_{2o} = 250, \beta = 0.25$.	27
Figura 5.2 . Situación donde el bando X_1 gana el combate al llegar el número de efectivos de X_2 a cero, siendo $\alpha = 0.6$ y el resto de parámetros como se indica.	28
Figura 5.3 Comparativa de situaciones según $\alpha = 0.7, \alpha = 0.4$ y $\alpha = 0.6$, manteniendo el resto de parámetros constantes. Siempre gana X_1 .	29
Figura 5.4. Comparativa de situaciones según $\alpha = 0.9$ y $\alpha = 1$, manteniendo el resto de parámetros constantes. Siempre gana X_2	29
Figura 5.5 Representación del sistema al introducir manualmente los datos de la tabla 3.4	31
Figura 5.6: Campo de direcciones y diagrama de fases de un modelo de fuego directo.	34
Figura 5.7. Gráfica relacionada con la expresión (3.13)	35
Figura 5.8. Gráfica relacionada con la expresión (3.14)	36
Figura 5.9. Gráfica relacionada con el caso en el que ambos bandos X_1 y X_2 quedan eliminados.	36
Figura 5.10. Gráfica que muestra las tres situaciones que se pueden dar en un enfrentamiento bajo las condiciones de un modelo de fuego directo.	37
Figura 5.11. Campo de direcciones de un sistema de modelo de fuego en área	47
Figura 5.12. Función trayectoria de una situación de modelo de fuego en área donde el bando X_2 es aniquilado y el bando X_1 mantiene pie de fuerza.	48
Figura 5.13. Función trayectoria de una situación de modelo de fuego en área donde el bando X_1 es aniquilado y el bando X_2 mantiene pie de fuerza.	48
Figura 5.14. Función trayectoria de una situación de modelo de fuego en área donde ambos bandos X_1 y X_2 quedan aniquilados.	49
Figura 5.15. Funciones trayectorias de las tres situaciones que se pueden dar en un modelo de fuego en área.	49
Figura 6.1. Gráfica de fuego directo con refuerzos entre Israel y Palestina	55
Figura 6.2. Gráfica de fuego directo sin refuerzos entre Israel y Palestina	56
Figura 6.3. Gráfica de fuego indirecto sin refuerzos entre Israel y Palestina	57
Figura 6.4. Gráfica de fuego indirecto con refuerzos entre Israel y Palestina	58

Figura A.1. Gráfica de un nodo estable	62
Figura A.2. Gráfica de un nodo inestable	63
Figura A.3. Gráfica de un nodo impropio estable	64
Figura A.4. Gráfica de un nodo impropio inestable	64
Figura A.5. Gráfica de un punto de estrella estable	65
Figura A.6. Gráfica de un punto de estrella inestable	66
Figura A.7. Gráfica de un punto espiral estable	68
Figura A.8. Gráfica de un punto espiral inestable	68
Figura A.9. Gráfica de un centro	69

1 INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia han ocurrido una gran cantidad de conflictos armados que han causado graves consecuencias tanto a nivel humano, como social y económico. En todo tipo de conflicto tienen una gran importancia los aspectos matemáticos e ingenieriles, que son claves en el desarrollo y la consecución de dichos conflictos, ya que gracias a estos se trazan estrategias militares adecuadas que optimizan la reducción del gasto presupuestal de la defensa de un país o territorio.

Uno de los modelos de combate militar más conocido hasta la fecha es el modelo de guerras que propuso Frederick William Lanchester (1868 – 1946). Este ingeniero británico realizó un estudio basado en el uso de ecuaciones diferenciales para intentar predecir el resultado de los combates aéreos que se produjeron durante la Primera Guerra Mundial.

El objetivo de este trabajo de investigación no es otro que el de realizar un estudio de los diferentes modelos matemáticos de guerra utilizando las ecuaciones de Lanchester y la demostración de teorías y afirmaciones que no tienen una justificación detallada.

Teniendo en cuenta el objetivo principal de este trabajo, este se desarrolla en tres secciones diferenciadas.

En primer lugar, se hará una presentación de los distintos modelos de guerra estudiados, explicando como surgieron, como se implantaron y finalmente la importancia que estos han tenido a la hora de realizar una estrategia de defensa durante un conflicto.

Seguidamente en un segundo apartado se hace referencia a todos los conceptos matemáticos que son necesarios para llevar a cabo el estudio del modelo de Lanchester y que ayudarán a una mejor comprensión del mismo. Por ello esta sección se centrará exclusivamente en el marco matemático basándose en los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales.

En el tercer capítulo se realiza el análisis en profundidad y por separado de cada uno de los modelos en estudio. Aquí, entre otros temas, se explica el cálculo de las soluciones analíticas a las que se han llegado en cada sistema, además de la estabilidad de estas soluciones, el campo de direcciones y el diagrama de fases. También en este apartado se incluyen demostraciones asociadas a los resultados obtenidos y a las previsiones de final de combate.

Finalmente se hará una aplicación de ejemplo al conflicto Palestino-Israelí.

2 OBJETIVOS

- Conocer la influencia y la importancia de los distintos conceptos matemáticos e ingenieriles en los conflictos armados y como se aplican estos conceptos en el modelo de Lanchester.
- Proponer un marco matemático basado en la teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Comprender cual es la relación existente entre los modelos matemáticos y la determinación del ganador entre las fuerzas de combate en un conflicto armado.
- Comprobar que se cumplen los principios de los modelos de Lanchester respecto al principio de concentración.

3 DESCRIPCIÓN DE LOS MODELOS

En este capítulo se hace una descripción detallada de los dos modelos de guerra en los que se va a centrar este trabajo, modelo de fuego directo y modelo de fuego indirecto o también llamado fuego en área.

Ambos modelos vienen desarrollados por las conocidas ecuaciones de Lanchester, las cuales se vinculan a modelos matemáticos preparados para el estudio de combates bélicos entre dos fuerzas.

Primeramente, se especifican las características que debe tener un enfrentamiento armado para que sea susceptible de ser estudiado y validado por el modelo de Lanchester; ya que, para sacar conclusiones correctas y demostrables del conflicto, este debe cumplir con las peculiaridades que se adaptan a los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales que se analizan en el modelo.

También se reportan las leyes a las cuales conducen las ecuaciones, así como las ventajas e inconvenientes de las mismas.

Según Lepingwell (1987), el interés por encontrar formas de modelar enfrentamientos terrestres viene a raíz de la evolución en el ámbito de la investigación de operaciones militares.

Los encargados de defensa durante los conflictos armados encontraron que el ingeniero Frederick William Lanchester propuso en 1916 dos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que se basaban en combates aéreos ocurridos durante la Primera Guerra Mundial. En ellos se describía la disminución del número de hombres en dos fuerzas armadas y enfrentadas entre sí durante un llamado combate simétrico, es decir, aquel que se produce entre fuerzas armadas de naturaleza similar, y en el que se usan los mismos modelos estratégicos militares.

Gracias a la evolución en el aspecto tecnológico, además de poder planificar un combate armado, se han podido implementar y diseñar otros modelos más complejos de combate convencional entre dos fuerzas, siempre tomando como base las ecuaciones de Lanchester ya que son la forma más sencilla de comprender como se desarrollan este tipo de enfrentamientos (Lepingwell, 1987).

No obstante, esta sencillez en la teoría y la comprensión lógica de los conceptos propuestos por Lanchester han hecho que existan muchos detractores de sus planteamientos puesto que los modelos de Lanchester son modelos de combate analíticos deterministas con cierto grado de abstracción y no cuentan con una justificación sólida científica, además aseguran que tiene lagunas a la hora de tratar el combate moderno, puesto que no considera factores como el humano, el logístico, la táctica, la inteligencia, otros factores externos como la climatología, las enfermedades, el terreno de combate etc. y presentan deficiencias al considerar las fuerzas homogéneas, los coeficientes de aniquilamiento constantes, entre otros (Taylor, 1980).

El hecho de la falta de validez científica lo justifica Taylor (1980), citando a Bonder (1974), aludiendo que esto se debe a la poca información en general acerca de los diferentes conflictos armados que se han sucedido a lo largo de la historia, tal como el tipo y la cantidad de armas usadas o el número de hombres.

Sin embargo, hay evidencias que sí que demuestran la validez e importancia de los modelos de Lanchester a pesar de la falta de información, sobre todo en enfrentamientos ocurridos durante la primera y la segunda Guerra Mundial, como son los casos de Iwo Jima y de Panzers Ruso-Germana de Kursk donde se han obtenido resultados muy favorables basados en las ecuaciones de Lanchester (Romero, 2011).

Para llevar a cabo la descripción de los modelos se parte de un conflicto armado entre dos grandes fuerzas a las que se les llamará X_1 y X_2 , que se encuentran en un combate en el cual ninguno de los bandos puede aumentar su pie de fuerza durante el enfrentamiento. El número de efectivos de la fuerza X_1 viene definido por $x_1(t) = x_1$ en cualquier instante de tiempo, mientras que análogamente el número de efectivos de la fuerza X_2 viene definido por $x_2(t) = x_2$ en cualquier instante de tiempo.

Por otra parte, es necesario definir el número de impactos acertados durante un intervalo de tiempo por cada efectivo de cada bando. Este concepto está dado por el coeficiente de aniquilamiento. De manera que el coeficiente de aniquilamiento del ejército X_1 es β mientras que el del ejército X_2 es α . El cálculo de los coeficientes de aniquilamiento depende de factores como la economía, la calidad de las armas, la preparación del ejército etc (Ochoa, 2009).

3.1. Modelo de Fuego Directo - Ley Cuadrada

Lanchester partió de diversas premisas que supuso que se presentarían durante un combate moderno. De ese modo realizó las siguientes consideraciones:

1. El fuego es directo, ambos bandos apuntan y concentran su fuego sobre objetivos previamente seleccionados y el fuego se distribuye uniformemente sobre los objetivos.
2. Los objetivos deben ser visibles y accesibles.
3. Las secuencias de fuego deben ser determinables de manera que tras desactivar un objetivo el fuego se cambiará inmediatamente a un nuevo objetivo.
4. Cada fuerza está formada por fuerzas homogéneas, es decir, cada unidad efectiva tiene el mismo tipo de arma y eficiencia en el combate.

Teniendo en cuenta estas suposiciones, Lanchester (1916) considera que en un enfrentamiento bélico entre los ejércitos X_1 y X_2 , la pérdida de efectivos por parte del ejército X_1 será proporcional al número de efectivos del ejército X_2 (x_2), siendo esa constante de proporcionalidad el coeficiente de aniquilamiento del ejército X_2 (α). Análogamente para la tasa de pérdidas del ejército X_2 .

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\beta x_1 \end{cases}$$

Estas ecuaciones, según Lanchester, citado por Lepingwell (1987), llevan a la Ley Cuadrada, la cual establece que lo que mide realmente la capacidad militar de un ejército, fuerza combativa, es el coeficiente de aniquilamiento multiplicado por el cuadrado de su fuerza numérica. La Ley Cuadrada deduce que el ganador del combate es el ejército que tiene una mayor capacidad militar o fuerza combativa. Si ambos bandos tuvieran la misma fuerza combativa ninguno ganaría. Adicionalmente, esta ley permitió a Lanchester justificar cuantitativamente el principio de concentración (Lepingwell, 1987).

3.2. Modelo de Fuego Indirecto o Fuego en Área - Ley Lineal

Contrariamente a la Ley Cuadrada, según Lanchester, la ley lineal no contempla la concentración de fuego durante un enfrentamiento, ya que en este caso de fuego indirecto las armas utilizadas no permiten que los efectivos de un bando ataquen a la vez un mismo objetivo. En el combate moderno la ley lineal cobra sentido cuando se asumen las siguientes suposiciones:

1. El fuego es indirecto, de manera que al disparar no se cuenta con una línea de visión directa entre el arma y el objetivo ya que no se conocen las posiciones del adversario.
2. El fuego se distribuye uniformemente a lo largo de una zona.
3. Ningún ejército tiene información sobre el daño que ha producido por el fuego y por tanto no cambia a un nuevo objetivo cuando este es desactivado.
4. Cada fuerza está formada por fuerzas homogéneas, es decir, cada unidad efectiva tiene el mismo tipo de arma y eficiencia en el combate.

En este caso Lanchester (1916) aduce que en los combates que tengan estas características, la tasa de pérdida de un bando además de depender del número de efectivos del oponente y su coeficiente de aniquilamiento, también dependerá del número de efectivos propios que estén en el área de fuego en ese momento. Matemáticamente:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_2 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\beta x_1 x_2 \end{cases}$$

En este caso se puede deducir que el hecho de aumentar el número de efectivos, por un lado ayudará a reducir las fuerzas enemigas, pero a su vez también se reducirán las propias.

Estas ecuaciones conducen a la ley lineal, la cual indica que la fuerza combativa de un grupo armado es igual al coeficiente de aniquilamiento multiplicada por su fuerza numérica. De la misma forma que en la Ley Cuadrada se deduce que el ganador del combate es el ejército que tiene una mayor fuerza combativa y si dos fuerzas son iguales en esta medida, ninguna de las partes ganará. A diferencia de la ley cuadrada, en la ley lineal el principio de concentración no es aplicable para ningún bando bajo este modelo (Lepingwell, 1987).

Cabe destacar que en ambos modelos los sistemas de ecuaciones planteados modelan combates convencionales donde cada bando conoce a su oponente y el lugar donde se desarrolla el conflicto, de forma que el enfrentamiento sea transparente.

4 MARCO MATEMÁTICO

Para llevar a cabo el estudio de los modelos de guerra introducidos en el apartado anterior, es necesario partir de unos conceptos teóricos matemáticos básicos que facilitarán la comprensión del análisis que se realizará más adelante de cada uno de los modelos.

De esta manera los modelos estudiados se consideran Sistemas Planos Autónomos (SPA); y más específicamente, y teniendo en cuenta las características de los modelos, el estudio se centra en los Sistemas Planos Autónomos Lineales Homogéneos (SPALH) y los Sistemas Planos Autónomos No Lineales Homogéneos (SPANLH), además de conceptos teóricos de álgebra para el estudio de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales. Sin embargo, en este apartado no se incluye cierta información acerca de los SPANLH ya que únicamente se incluye lo necesario para comprender el análisis de los modelos y no se tiene una teoría para realizar el cálculo de las soluciones analíticas de Sistemas No Lineales.

Este capítulo estará dividido en dos apartados; en el primero de ellos se tratarán los aspectos más generales de los Sistemas Planos Autónomos (SPA), mientras que el segundo apartado tendrá un enfoque más concreto sobre el estudio y resolución de los Sistemas Planos Autónomos Lineales Homogéneos (SPALH) además de la solución de un SPALH No Degenerado ligado a los autovalores reales distintos de la matriz de coeficientes constantes del sistema y el comportamiento de los distintos tipos de soluciones de este, vinculado a los autovalores reales distintos de signos opuestos.

4.1. Generalidades

Para empezar, se definirá lo que se conoce como Sistema Plano Autónomo. Un SPA es aquel sistema de ecuaciones que está formado por dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en las que no aparece explícitamente la variable independiente (t).

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.1)$$

Siendo x_1 y x_2 funciones desconocidas con una única variable independiente t .

De igual modo la expresión (2.1) se escribir en forma de notación vectorial:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

Siendo los vectores

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

La solución de un SPA vendrá dada por dos funciones de clase C^1 $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que cumplen el sistema (2.2) en un mismo intervalo denominado I .

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix}$$

De esta manera, el objetivo es realizar un estudio del comportamiento de las soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ a lo largo del tiempo. Así se podrá observar que para cada instante de tiempo t habrá un único vector solución $\mathbf{x}(t)$ que formará una **curva solución o trayectoria** γ en el plano \mathbb{R}^2 dado por los puntos $x_1(t)$, $x_2(t)$. El conjunto de todas las curvas solución o trayectorias se conoce como **diagrama de fases**, que será el que indique el tipo de comportamiento del sistema.

Las trayectorias pueden ser de diversos tipos: curvas cerradas simples, curvas abiertas simples o puntos de equilibrio.

La curva cerrada simple es aquella que no tiene puntas sueltas o finales y que no se corta a sí misma. La solución asociada a esta trayectoria es una solución periódica, es decir, para un período de tiempo $T > 0$ la solución del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ será una $\mathbf{x}(t)$ tal que $\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t)$ para cualquier valor de t .

Una curva abierta simple es aquella que tiene puntas sueltas o finales y que no se corta a sí misma. Esta curva admite una parametrización inyectiva.

Un punto de equilibrio (\bar{x}_1, \bar{x}_2) es aquel que se encuentra cuando el vector solución del sistema está compuesto por funciones constantes $x_1(t) = \bar{x}_1$, $x_2(t) = \bar{x}_2$. En este caso la solución $\mathbf{x}(t)$ es una solución estacionaria. Solo pasará una única trayectoria por cada punto del diagrama de fases.

A partir de este punto es necesario definir un punto de equilibrio no degenerado. Un punto de equilibrio no degenerado ocurre cuando la matriz jacobiana del sistema en ese punto es no singular. Además, se cumple que los puntos de equilibrio no degenerados son también aislados, es decir, no existen otros puntos críticos distintos a su alrededor.

Un SPALH es no degenerado si existe un punto de equilibrio no degenerado (\bar{x}_1, \bar{x}_2) y por tanto ese punto de equilibrio es el único punto de equilibrio y tiene valor $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0,0)$. En los SPANLH no degenerados puede haber más de un punto de equilibrio, pero todos son no degenerados.

Con la intersección de las llamadas **nulclinales** se pueden determinar los puntos de equilibrio de un sistema. La nulclinal x_1 en el sistema (2.2) son todos los puntos $(x_1(t), x_2(t))$, en los que la función $f_1(x_1, x_2)$ es cero, y la nulclinal x_2 son los puntos $(x_1(t), x_2(t))$ donde $f_2(x_1, x_2)$ es cero. Las nulclinales además dividen el plano en diferentes zonas donde el vector tangente tiene la misma dirección y sentido.

A su vez se puede hacer una clasificación de los puntos de equilibrio aislados. Estos pueden ser estables, inestables o asintóticamente estables.

Un punto de equilibrio aislado \bar{x} se considera estable si una trayectoria γ que al principio está próxima a \bar{x} se mantiene próxima a \bar{x} a lo largo del tiempo.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \bar{x}_1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \bar{x}_2$$

Por el contrario, un punto de equilibrio aislado \bar{x} es inestable si una trayectoria γ que en el inicio se encuentra próxima a \bar{x} se aleja de este a lo largo del tiempo.

Si el punto de equilibrio aislado \bar{x} además de ser estable cumple con que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_2(t) - \bar{x}_2}{x_1(t) - \bar{x}_1}$ existe o bien, el resultado de este es $+\infty$ ó $-\infty$, entonces el punto de equilibrio aislado será asintóticamente estable.

Por ello la trayectoria de todas las soluciones que empiecen suficientemente próximas a un punto asintóticamente estable, a lo largo del tiempo deben converger al equilibrio \bar{x} además de permanecer cerca de este.

Anotación: Los SPALH se clasifican en estables, inestables o asintóticamente estables, sin embargo, en los SPANLH los que se clasifican así son los puntos de equilibrio.

Es necesario definir la **ecuación diferencial de las trayectorias**: $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$. Esta ecuación es la que satisfacen aquellas curvas solución que no son constantes a lo largo del tiempo, es decir que no son puntos de equilibrio. Por tanto, para este tipo de trayectorias, además de poder obtener explícitamente las soluciones, estas también se podrán obtener resolviendo esta ecuación diferencial.

Por último, también hay que definir un **campo de direcciones**. Siendo D un conjunto de \mathbb{R}^2 , un campo de direcciones sobre \mathbb{R}^2 es una función G que asigna a cada punto (\bar{x}_1, \bar{x}_2) de D un vector bidimensional $G(x)$ tangente a la curva solución en ese punto. Siendo $G(x) = x'(t)$.

Una vez definidos los conceptos básicos necesarios de los SPALH y los SPANLH, el siguiente apartado se centrará en el estudio de los SPALH no degenerados.

4.2 Sistemas Planos Autónomos Lineales Homogéneos

En primer lugar, para abordar el estudio de los SPALH, será necesario definir un SPAL.

Un sistema plano autónomo se dice que es lineal cuando las funciones f_1 y f_2 de la expresión (2.1) son lineales en x_1 y x_2 .

De forma que un SPAL de primer orden se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x_1' = a_1x_1 + a_2x_2 + b_1 \\ x_2' = a_3x_1 + a_4x_2 + b_2 \end{cases} \quad (2.3)$$

Siendo a_1, a_2, a_3, a_4, b_1 y b_2 números reales.

En el caso en el que $b_1 = b_2 = 0$, entonces el sistema plano autónomo lineal también será homogéneo (SPALH).

Para facilitar el manejo de las expresiones que se utilizarán en este capítulo se usará la notación matricial, quedando la expresión anterior como:

$$x' = Ax \quad (2.4)$$

Donde A es la matriz de coeficientes definida como $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$.

Y x es el vector de variables dependientes definido como $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Antes de introducir las explicaciones correspondientes a la búsqueda de una solución general para un SPALH, es necesario definir varios conceptos.

Una **matriz fundamental de soluciones** ϕ es aquella que está formada por un conjunto fundamental de soluciones de un sistema (2.4) en un intervalo I . Siendo un conjunto fundamental de soluciones cualquier conjunto de dos vectores $x_1(t)$ y $x_2(t)$ soluciones linealmente independientes del sistema en el intervalo.

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} \quad \phi = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

La matriz exponencial de una matriz $A_{2 \times 2}$ se define como:

$$e^A = I_2 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \quad (2.5)$$

Incluyendo el tiempo t , se expresa:

$$e^{tA} = I_2 + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots \quad (2.6)$$

de manera que para cada t , e^{tA} es una matriz 2×2 .

Esta matriz e^{tA} es una matriz fundamental de soluciones del sistema (2.4) y la solución general de este sistema es:

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{c} \quad (2.7)$$

siendo \mathbf{c} un vector cualquiera de dos componentes.

A continuación se realizará una demostración del punto anterior en cuestión.

Demostración: En primer lugar será necesario demostrar que $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$; para ello es conveniente derivar la expresión (2.6)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tA} &= \frac{d}{dt} \left(I_2 + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots \right) \\ &= A + \frac{tA^2}{1!} + \frac{t^2 A^3}{2!} + \frac{t^3 A^4}{3!} + \dots \\ &= A \left(I_2 + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots \right) \end{aligned}$$

Por tanto se puede confirmar que $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$; y por ello e^{tA} es una matriz fundamental de soluciones del sistema (2.4).

El siguiente paso a cumplir relacionado con e^{tA} es que sus columnas deben ser linealmente independientes, es decir, $\det(e^{tA}) \neq 0$ para cualquier instante t .

Proposición: Siendo A una matriz cualquiera, $n \times n$ y t un escalar cualquiera, se obtiene:
 $e^{tA} e^{-tA} = I_n$

Por tanto se puede saber que la inversa de e^{tA} es e^{-tA} .

Particularizando en el caso para la ecuación (2.4), $n=2$, se tiene: $e^{tA} e^{-tA} = I_2$.

Se aplica determinante en ambos lados de la igualdad y sabiendo que el determinante de un producto es el producto de los determinantes y que $\det(I_n) = 1$:

$$\det(e^{tA} e^{-tA}) = \det(I_2) \qquad \det(e^{tA}) \det(e^{-tA}) = 1$$

Llegados a esta expresión se puede asegurar que $\det(e^{tA}) \neq 0$ para cualquier instante t .

Finalmente, y teniendo en cuenta esta conclusión junto a la anterior de que todas las columnas de e^{tA} son soluciones de (2.4); se puede afirmar que e^{tA} es una matriz fundamental de soluciones de

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Por ello la solución general del sistema será: $\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{c}$ siendo \mathbf{c} un vector cualquiera de \mathbb{R}^2 cuyas componentes quedan definidas con las condiciones iniciales.

Un **problema de valor inicial** para el sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, es aquel cuya forma:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{b} \qquad (2.8)$$

siendo

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

con $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Existencia y unicidad de las soluciones: Considerando A una matriz cuadrada, 2×2 , asociada al sistema de ecuaciones diferenciales y tomando \mathbf{b} como un vector de componentes constantes (b_1, b_2) que se corresponden con las condiciones iniciales del sistema, tendremos que la única solución posible del problema de valor inicial (2.8) es:

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}} \mathbf{b}$$

Llegados a este punto, ahora se llevará a cabo la definición, el cálculo y la clasificación de los autovalores y autovectores asociados a la matriz A de (2.4) cuando este es No Degenerado (caso de estudio). En segundo lugar, a partir de la clasificación de los autovalores se calculará la forma de la solución general de dicho sistema y se determinará el comportamiento de las soluciones sobre los puntos de equilibrio según el tipo de autovalor y el signo.

Un **autovector** asociado a la matriz A es todo aquel vector \mathbf{v} no nulo $\in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \qquad (2.9)$$

donde λ es un número real o complejo llamado **autovalor** de la matriz A asociado al vector \mathbf{v} .

A partir de (2.9) se obtiene con las propiedades de las matrices:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda \mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad (2.10)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda(\mathbf{I}\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad (2.11)$$

con

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

A partir de esta ecuación (2.11) se calculan los autovectores de λ .

Por tanto (2.11) equivale a:

$$(a_1 - \lambda) v_1 + a_2 v_2 = 0$$

$$a_3 v_1 + (a_4 - \lambda) v_2 = 0 \qquad (2.12)$$

De la expresión (2.12) se deduce que es un sistema homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas (v_1, v_2), cuya solución nunca puede ser (0,0) ya que el vector \mathbf{v} debe ser no nulo.

El sistema (2.11) tendrá una solución distinta de cero si y solo si:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \qquad (2.13)$$

La ecuación (2.13) es la llamada **ecuación característica** de A , cuyo resultado da lugar al llamado **polinomio característico** de A .

Además se puede comprobar que si \mathbf{v} es un autovector asociado a λ , también lo será cualquier múltiplo del vector \mathbf{v} ($c\mathbf{v}$).

A continuación se realiza de demostración de la afirmación anterior, partiendo de $A(\mathbf{c}\mathbf{v})$.

$$A(\mathbf{c}\mathbf{v}) = \mathbf{c}(A\mathbf{v})$$

Por el hecho de ser autovector λ , se cumple también que:

$$\mathbf{c}(A\mathbf{v}) = \mathbf{c}(\lambda\mathbf{v})$$

$$\mathbf{c}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{c}\mathbf{v})$$

Finalmente:

$$A(\mathbf{c}\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{c}\mathbf{v})$$

Por tanto todos los vectores que pasan por \mathbf{v} y el origen son también autovectores de λ y se les llama **línea de autovectores** de λ .

Se define λ como **autovalor** de A a todo λ que cumple:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \quad (2.14)$$

es decir, los autovalores de A son las raíces de (2.13) que es la ecuación característica.

Hay que tener en cuenta que una matriz tendrá tantos autovalores como dimensión n tenga. En este caso A es una matriz 2×2 , por tanto tendrá 2 autovalores.

En el siguiente punto se llevará a cabo la clasificación de los autovalores, que nos servirá para conocer la solución general de un SPALH y el comportamiento de las distintas soluciones del sistema. Únicamente, para el análisis de los casos que son de interés en este trabajo, se estudiarán más a fondo aquellos en los que los autovalores sean reales distintos y con signos opuestos.

Clasificación de los autovalores.

En primer lugar, es necesario definir la **traza** de una matriz A como $tr(A) = a_{11} + a_{22}$.

De forma que reformulando (2.14) se obtiene:

$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0$$

Por tanto, resolviendo con la fórmula típica para la resolución de ecuaciones de segundo grado, las soluciones de la ecuación serían:

$$\frac{1}{2} \left(tr(A) \pm \sqrt{(tr(A))^2 - 4 \det(A)} \right)$$

Según el signo del discriminante d , se pueden estudiar tres posibilidades:

$$d = (tr(A))^2 - 4 \det(A)$$

- Si $d > 0$, las soluciones de la ecuación se corresponderán con dos **Autovalores Reales Distintos** ($\lambda_1 \neq \lambda_2$).
- Si $d < 0$, las raíces de la ecuación se corresponden con dos números complejos conjugados y se les llama **Autovalores Complejos**. ($\lambda = a \pm ib$).
- Si $d = 0$, existirá una raíz doble real que dan lugar a los llamados **Autovalores Reales Dobles**. ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$)

A partir de los autovalores y conociendo los conceptos del álgebra lineal, se puede definir la **matriz diagonal D** como una matriz del mismo tamaño que A (2×2), caracterizada de la siguiente forma:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Es necesario saber que al tener A dos autovalores reales y distintos (λ_1 y λ_2) y cuyos autovectores asociados son independientes linealmente, se puede considerar que A es diagonalizable y por ello tiene una matriz diagonal asociada D .

Definiendo V como una matriz que tiene sus columnas formadas por autovectores linealmente independientes de A , se tiene que:

$$D = V^{-1}AV$$

A continuación, se enseña la demostración correspondiente de que $A^n = VD^nV^{-1}$.

Demostración:

- Probando con $n = 1$.

Al ser D y A matrices semejantes (mismo tamaño)

$$D = V^{-1}AV$$

Si se multiplican ambos miembros de la igualdad por V (por izquierda) y después por V^{-1} (por derecha) respectivamente, se obtiene

$$VD = VV^{-1}AV$$

$$VD = AV$$

$$VDV^{-1} = A$$

Se comprueba que para $n = 1$ se cumple la igualdad.

- **Hipótesis de Inducción.**

Se supone $n = k$.

$$A^k = VD^kV^{-1}$$

- Probando con $n = k+1$.

Multiplicando en ambos lados de la igualdad por A (por derecha):

$$A^k A = VD^kV^{-1}A$$

$$A^{k+1} = VD^kV^{-1}(VDV^{-1})$$

$$A^{k+1} = VD^k(V^{-1}V)DV^{-1}$$

$$A^{k+1} = V(D^kD)V^{-1}$$

$$A^{k+1} = VD^{k+1}V^{-1}$$

Por tanto la igualdad se cumple para todo n .

$$A^n = VD^nV^{-1}$$

Una vez que se ha reformulado A , se introduce en la expresión (2.6) y queda:

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= I_2 + t(VDV^{-1}) + \frac{t^2(VD^2V^{-1})}{2!} + \frac{t^3(VD^3V^{-1})}{3!} + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k(VD^kV^{-1})}{k!} \\
&= V\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k D^k}{k!}\right)V^{-1}
\end{aligned}$$

De aquí se llega a:

$$e^{tA} = Ve^{tD}V^{-1} \quad (2.15)$$

Además de esto se sabe que e^{tA} es una matriz fundamental de soluciones de (2.4), pero también lo serán las matrices halladas a partir de un conjunto fundamental de soluciones. Por ejemplo, a partir de los autovectores v_1 y v_2 asociados a los autovalores λ_1 y λ_2 respectivamente, ya que estos autovectores son linealmente independientes.

Dicho esto, tomando $V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$; la expresión $e^{tA}V$ también será matriz fundamental de soluciones del sistema (2.4).

Multiplicando cada miembro de la igualdad (2.15) por V (por la derecha) quedará:

$$e^{tA}V = (Ve^{tD}V^{-1})V$$

$$e^{tA}V = Ve^{tD}(V^{-1}V)$$

$$e^{tA}V = Ve^{tD}$$

Finalmente, desarrollando la expresión:

$$e^{tA}V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

$$e^{tA}V = \begin{pmatrix} v_{11}e^{\lambda_1 t} & v_{12}e^{\lambda_2 t} \\ v_{21}e^{\lambda_1 t} & v_{22}e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

Siguiendo la definición de matriz fundamental de soluciones

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$$

forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema (2.4), y se llega a la solución general de un SPALH cuando la matriz A tiene autovalores reales y distintos será:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 \quad (2.16)$$

Siendo c_1 y c_2 constantes arbitrarias.

Estas dos soluciones $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ son llamadas de línea recta, y están situadas en el plano de fases sobre dos rectas claramente distinguidas que tienen unas trayectorias dirigidas hacia el origen de coordenadas si $\lambda < 0$; y se alejan del (0,0) si $\lambda > 0$.

A continuación se explicará un ejemplo resolutivo de lo anterior.

Ejemplo 1: Dado un SPALH de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Se calculan los autovalores y autovectores asociados a $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ a partir de las ecuaciones (2.13) y (2.11).

$$\det \left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 1) = 0$$

Por tanto los autovalores de la matriz son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 1$.

Ahora habrá que hallar el autovector asociado a cada autovalor.

- Autovector de $\lambda_1 = 4$.

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right) \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2v_{11} + 2v_{21} \\ v_{11} - v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí sale un sistema de ecuaciones con dos incógnitas que serán las componentes del autovector (v_{11}, v_{21}) .

$$-2v_{11} + 2v_{21} = 0$$

$$v_{11} - v_{21} = 0$$

Por tanto, $v_{11} = v_{21}$. Esto significa que cualquier vector donde sus componentes sean iguales serán autovectores de $\lambda_1 = 4$.

Por ejemplo $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para el cálculo del autovector asociado a $\lambda_2 = 1$, se realizará el mismo método, llegando finalmente a un sistema definido por:

$$v_{12} + 2v_{22} = 0$$

$$v_{12} + 2v_{22} = 0$$

Por ello, $v_{12} = -2v_{22}$. Esto quiere decir que será autovector de $\lambda_2 = 1$ todo vector cuya primera

componente valga el doble de la segunda y además tenga distinto signo.

Por ejemplo $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Por último se introducen los autovalores y autovectores calculados en la ecuación (2.16) y se obtiene la solución general del sistema

$$x(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se puede mostrar ahora el campo de direcciones.

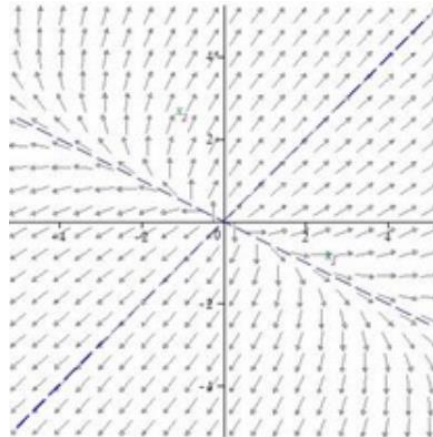


Figura 4.1: Campo de direcciones, nulclinales y línea de autovectores ejemplo 2.2.1.

En esta imagen se puede observar que el plano queda dividido en cuatro regiones, que son cada uno de los cuadrantes, ya que las nulclinales coinciden con los ejes.

Además, las líneas de autovectores son las que se observan en el primer y tercer cuadrante, correspondiente a $\lambda_1 = 4$; y en el segundo y cuarto cuadrante para $\lambda_2 = 1$.

En la imagen que aparece a continuación, se observan además de lo anterior, las trayectorias de ambas soluciones que se van alejando del origen como se indicó en la teoría previa al ejemplo, ya que ambos autovalores son > 0 .

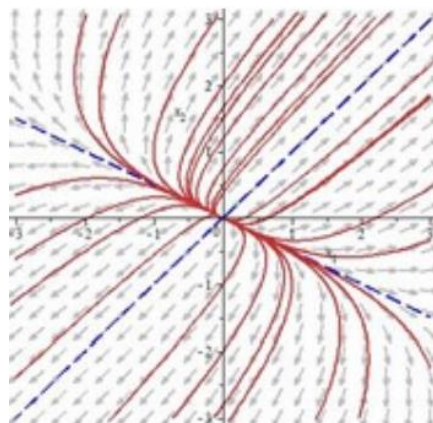


Figura 4.2: Campo de direcciones, líneas de autovectores y diagrama de fases ejemplo 2.2.1.

En este ejemplo realizado, los autovalores hallados son positivos reales y distintos y se ha llegado a unas soluciones típicas de los SPALH llamadas soluciones de línea recta. El signo de dichos autovalores es importante para conocer el comportamiento de este tipo de soluciones y por ende predecir y comprender el comportamiento del resto de posibles soluciones de un SPALH cualquiera.

En este tipo de sistemas se sabe que las curvas solución son curvas abiertas simples y tienen puntos de equilibrio simples, sin embargo en casos donde los autovalores sean de signos opuestos aparecerán puntos de silla (figura 2.3).

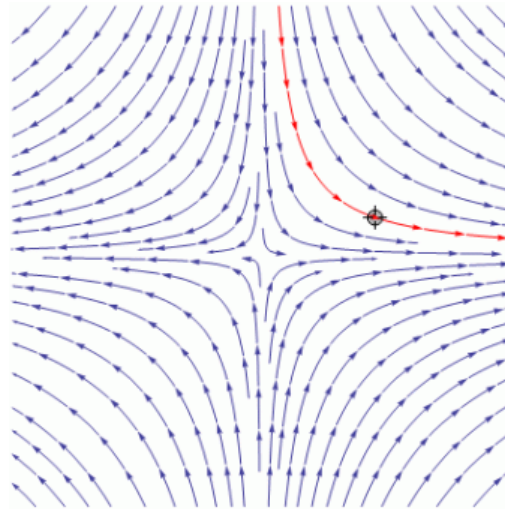


Figura 4.3: Ejemplo de un punto de silla.

Para el autovalor con signo negativo las trayectorias se acercan al origen, mientras que para el autovalor positivo se alejan de él. Además, las trayectorias hiperbólicas se acercan asintóticamente al espacio vectorial de los autovalores cuando $t \rightarrow \infty$, en el caso del autovalor > 0 , y cuando $t \rightarrow -\infty$, en el caso del autovalor < 0 . Es importante notificar que los puntos de silla siempre son **inestables**.

En resumen, es importante incidir en el hecho de que según el signo de los autovalores se podrá conocer cómo se comportan las soluciones del sistema cuando $t \rightarrow \infty$ o $t \rightarrow -\infty$; alejándose del punto de equilibrio las trayectorias cuando $\lambda > 0$ y viceversa.

5 ANÁLISIS DE LOS MODELOS

En este capítulo se analizará en profundidad cada uno de los modelos de guerra de Lanchester propuestos en este trabajo, a saber, el modelo de fuego directo y el modelo de fuego indirecto.

En primer lugar, se calcularán analíticamente las soluciones de los sistemas correspondientes y estas se mostrarán gráficamente durante el estudio del modelo de fuego directo, para poder estudiar los distintos casos particulares y comprobar la relación existente entre los coeficientes de aniquilamiento, el número de efectivos y el resultado final del combate armado.

Para el modelo de fuego indirecto se mostrará una demostración de esa relación existente.

Más adelante, en cuanto al estudio cualitativo de los modelos, será necesario el cálculo de los puntos de equilibrio. Para el caso de fuego directo se seguirá la teoría explicada en el anterior capítulo, mientras que para el fuego en área, al ser SPANLH Degenerado, se observará su campo de direcciones para hallar la estabilidad del punto de equilibrio.

Finalmente, se estudiarán casos particulares que verifican el principio de concentración y se hará una demostración.

5.1 Modelo de Fuego Directo

Recordando el capítulo **3. Descripción de los modelos**, se sabe que en un modelo de fuego directo el número de efectivos caídos de un bando durante el combate es directamente proporcional al número de efectivos en el bando contrario. Siguiendo el sistema de ecuaciones diferenciales dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\beta x_1 \end{cases}$$

Este sistema será un SPALH, si se toman dos condiciones iniciales que en este caso serán $x_1(0) = x_{10}$ y $x_2(0) = x_{20}$, siendo estas el número de efectivos de cada bando al inicio del combate.

Como se ha visto en el capítulo anterior, para el estudio de este tipo de sistemas será necesario en primer lugar hallar la solución general del mismo $x_1(t)$ y $x_2(t)$, y para ello se ha de realizar el cálculo de estas condiciones iniciales $x_1(0) = x_{10}$ y $x_2(0) = x_{20}$.

A continuación, se realizará el cálculo de autovalores asociados a la matriz de coeficientes del sistema que involucra las variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Siendo $x_1(t)$ y $x_2(t)$ el número de efectivos del ejército X_1 y X_2 respectivamente en cada instante de tiempo t .

Quedando así el sistema de forma matricial:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Tras realizar los pasos pertinentes se llega a la ecuación característica

$$\lambda^2 - \alpha\beta = 0$$

Dando lugar a los autovalores $\lambda_1 = \sqrt{\alpha\beta}$ y $\lambda_2 = -\sqrt{\alpha\beta}$.

Ahora en el cálculo de los autovectores:

- Autovector de $\lambda_1 = \sqrt{\alpha\beta}$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha\beta} \end{pmatrix} \right) \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha\beta} & -\alpha \\ -\beta & -\sqrt{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\sqrt{\alpha\beta}v_{11} - \alpha v_{21} = 0$$

$$-\beta v_{11} - \sqrt{\alpha\beta}v_{21} = 0$$

resolviendo se llega a una relación de:

$$\frac{-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} v_{11} = v_{21}$$

Cualquier vector que cumpla esa relación será autovector de $\lambda_1 = \sqrt{\alpha\beta}$. Por ejemplo :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \end{pmatrix}$$

- Autovector de $\lambda_2 = -\sqrt{\alpha\beta}$

De la forma análoga para λ_1 , se obtiene:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \end{pmatrix}$$

Como se observa, los autovalores son reales distintos y de signos opuestos, y la solución general del sistema sería

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\sqrt{\alpha\beta}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \end{pmatrix} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \end{pmatrix}$$

con c_1 y c_2 constantes que quedan definidas con las condiciones iniciales.

Finalmente, han quedado definidas $x_1(t)$ y $x_2(t)$ con la solución general como

$$x_1(t) = c_1 e^{\sqrt{\alpha\beta}t} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha\beta}t}$$

$$x_2(t) = c_1 e^{\sqrt{\alpha\beta}t} \left(\frac{-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \right) + c_2 e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} \left(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \right)$$

Aplicando las condiciones de contorno, es decir sabiendo que $x_1(0) = x_{1o}$ y $x_2(0) = x_{2o}$

$$x_1(0) = c_1 + c_2 = x_{1o}$$

$$x_2(0) = c_1 \left(\frac{-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \right) + c_2 \left(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \right) = x_{2o}$$

Haciendo las cuentas pertinentes y despejando:

$$c_1 = \frac{1}{2} \left(x_{1o} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2o} \right)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \left(x_{1o} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2o} \right)$$

Por tanto reescribiendo las variables de estado una vez calculado el valor de c_1 y c_2 se tendrían las siguientes expresiones:

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \left(x_{1o} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2o} \right) e^{\sqrt{\alpha\beta}t} + \frac{1}{2} \left(x_{1o} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2o} \right) e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} \quad (3.1)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} \left(x_{1o} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2o} \right) e^{\sqrt{\alpha\beta}t} \left(\frac{-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \right) + \frac{1}{2} \left(x_{1o} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2o} \right) e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} \left(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \right) \quad (3.2)$$

A partir de aquí se introducirá el término de terminación de combate, considerando que el conflicto fuera simple y finalizara cuando uno de los bandos fuera completamente aniquilado, o los dos en caso de que se considere un empate. Con esto es posible determinar cuando acaba el combate.

Llamando $x_1(t_f) = x_{1f}$ al número de efectivos del ejército X_1 al final de combate y de la misma forma para el ejército X_2 , se pueden dar tres escenarios diferentes:

- I. X_1 es vencedor; $x_{1f} > 0$ y $x_{2f} = 0$.
- II. X_2 es vencedor; $x_{2f} > 0$ y $x_{1f} = 0$.
- III. Empate; $x_{1f} = 0$ y $x_{2f} = 0$.

➤ Para determinar cuando acaba el combate, es decir, t_f , en el caso I. se sustituye en la expresión (3.2) para $x_2(t_f) = 0$ y se despeja t_f .

$$0 = \frac{1}{2} \left(x_{1o} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2o} \right) e^{\sqrt{\alpha\beta}t_f} \left(\frac{-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \right) + \frac{1}{2} \left(x_{1o} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2o} \right) e^{-\sqrt{\alpha\beta}t_f} \left(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \right)$$

$$0 = \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\alpha\beta}t_f} \left(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \right) \left[- \left(x_{1o} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2o} \right) e^{2\sqrt{\alpha\beta}t_f} + \left(x_{1o} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2o} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
0 &= -\left(x_{10} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{20}\right) e^{2\sqrt{\alpha\beta}t_f} + \left(x_{10} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{20}\right) \\
\left(x_{10} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{20}\right) e^{2\sqrt{\alpha\beta}t_f} &= \left(x_{10} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{20}\right) \\
e^{2\sqrt{\alpha\beta}t_f} &= \frac{x_{10} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{20}}{x_{10} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{20}} \\
2\sqrt{\alpha\beta}t_f &= \ln \left| \frac{x_{10} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{20}}{x_{10} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{20}} \right| \\
t_f &= \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \ln \left| \frac{x_{10} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{20}}{x_{10} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{20}} \right| \tag{3.3}
\end{aligned}$$

- Para determinar cuando acaba el combate, es decir, t_f , en el caso II. se sustituye en la expresión (3.1) para $x_1(t_f) = 0$ y se despeja t_f al igual que en el anterior caso.

$$0 = \frac{1}{2} \left(x_{10} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{20}\right) e^{\sqrt{\alpha\beta}t_f} + \frac{1}{2} \left(x_{10} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{20}\right) e^{-\sqrt{\alpha\beta}t_f}$$

Hasta llegar a

$$t_f = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \ln \left| \frac{-x_{10} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{20}}{x_{10} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{20}} \right| \tag{3.4}$$

- Sin embargo para el caso III cuando el combate termina en empate; dado que Lepingwell (1987) afirma que las fuerzas iniciales en cada bando se consideran iguales, los primeros términos de las variables $x_1(t)$ y $x_2(t)$ se anulan quedando

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \left(x_{10} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{20}\right) e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} \tag{3.5}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} \left(x_{10} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{20}\right) e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} \left(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\right) \tag{3.6}$$

En este caso no se puede conocer el t_f porque no hay una solución exacta. Por ello lo que se hará es calcular el tiempo transcurrido desde el inicio del conflicto cuando los ejércitos tienen un número m de efectivos.

- Para X_1 :

$$m_1 = \frac{1}{2} \left(x_{1o} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2o} \right) e^{-\sqrt{\alpha\beta}t}$$

$$e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} = \frac{2m_1}{x_{1o} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2o}}$$

$$-\sqrt{\alpha\beta}t = \ln \left| \frac{2m_1}{x_{1o} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2o}} \right|$$

$$t = -\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \left| \frac{2m_1}{x_{1o} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2o}} \right|$$

- Para X_2 : Con el mismo procedimiento se llega a

$$m_2 = \frac{1}{2} \left(x_{1o} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2o} \right) e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} \left(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \right)$$

$$t = -\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \left| \frac{2\sqrt{\alpha}m_2}{\sqrt{\beta}x_{1o} + \sqrt{\alpha}x_{2o}} \right|$$

El siguiente objetivo que se nos presenta es el de deducir la relación que hay entre los bandos combatientes X_1 y X_2 durante una guerra y que según afirma Lepingwell (1987) es lo que puede hacer predecir el resultado final de la misma.

Para ello se hace un estudio gráfico con la ayuda del programa GeoGebra, donde se van variando los coeficientes de aniquilamiento y el número de efectivos por bando en el momento de inicio del combate.

Para que sea más fácil el estudio gráfico, se tomarán valores del coeficiente de aniquilamiento en un intervalo entre 0 y 1, y los valores de los números de efectivos por bando en el momento inicial tendrán una relación de números enteros entre ellos. Por ejemplo $x_{1o} = 2 x_{2o}$ ó $x_{1o} = 3 x_{2o}$.

En primer lugar se fijará un valor para β y se irán probando valores de α hasta observar cuando ocurre el empate entre fuerzas; y entonces poder conocer, cambiando α , cuando un ejército gana o pierde.

- Primer caso: $x_{1o} = 2 x_{2o}$

Partimos de $x_{1o} = 500$, $x_{2o} = 250$, $\beta = 0.25$. Modificando los valores de α , se da el empate cuando $\alpha = 1$. De manera que gráficamente quedaría:

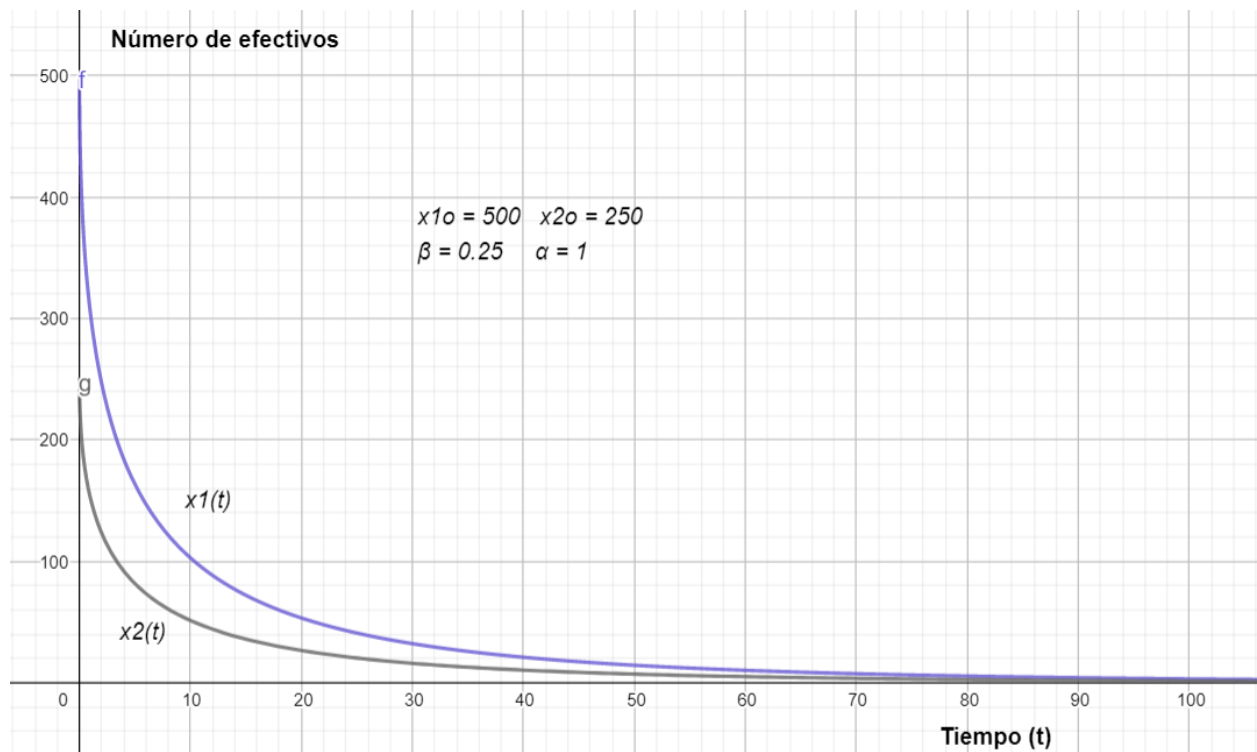


Figura 5.1. Representación gráfica de la variación del número de efectivos en cada bando respecto al tiempo cuando hay empate. En modelo de fuego directo con $x_{1o} = 500$, $x_{2o} = 250$, $\beta = 0.25$.

Al no cortar ninguna de las dos funciones con el eje del tiempo, esto significaría que el combate sería infinito, pero evidentemente este terminaría cuando ambos ejércitos quedaran sin efectivos en sus filas.

Cambiando los parámetros x_{1o} , x_{2o} , β pero manteniendo la relación $x_{1o} = 2 x_{2o}$ y siguiendo el supuesto de que el combate terminara en empate saldrían los siguientes resultados.

x_{1o}	β	x_{2o}	α
500	0.25	250	1
350	0.2	175	0.8
200	0.15	100	0.6
160	0.1	80	0.4

Tabla 5.1 Relación entre parámetros de manera que el combate termine en empate y $x_{1o} = 2 x_{2o}$.

Se puede observar que en estos casos donde el número de efectivos en el bando X_1 es el doble que en X_2 , también se cumple en todos los casos que α , que es el coeficiente de aniquilamiento del ejército X_2 , tiene que ser cuatro veces mayor que β , que es el coeficiente de aniquilamiento del ejército X_1 , para que haya empate.

Esto hace que se llegue a la conclusión de que si el ejército que tiene el doble de efectivos tiene un coeficiente de aniquilamiento $\beta > 0.25$, entonces siempre será el ejército que se proclame ganador del combate, puesto que para un supuesto empate el coeficiente de aniquilamiento del otro bando

tendría que ser cuatro veces mayor es decir $\alpha > 1$, y esto en cualquier caso es imposible ya que el coeficiente de aniquilamiento como mucho podrá valer 1 según el caso estudiado.

El ejército X_2 será vencedor del enfrentamiento cuando su coeficiente de aniquilamiento α sea mayor que el valor de este mismo para el cual se da el empate entre ambos bandos.

Y al revés, X_1 será el ganador del conflicto cuando el valor de α sea menor que el valor de este mismo para el cual se produce el empate.

A continuación, se expondrán distintos casos, según varíe α , para determinar que bando sale victorioso y cuanto tiempo duraría el conflicto bélico.

Tomando los valores de los parámetros en la segunda fila de la Tabla 3.1. se llega a la siguiente representación gráfica.

x_{1o}	β	x_{2o}	α
350	0.2	175	0.8

➤ Para valores de $0 < \alpha < 0.8$

- Se toma $\alpha = 0.6$.

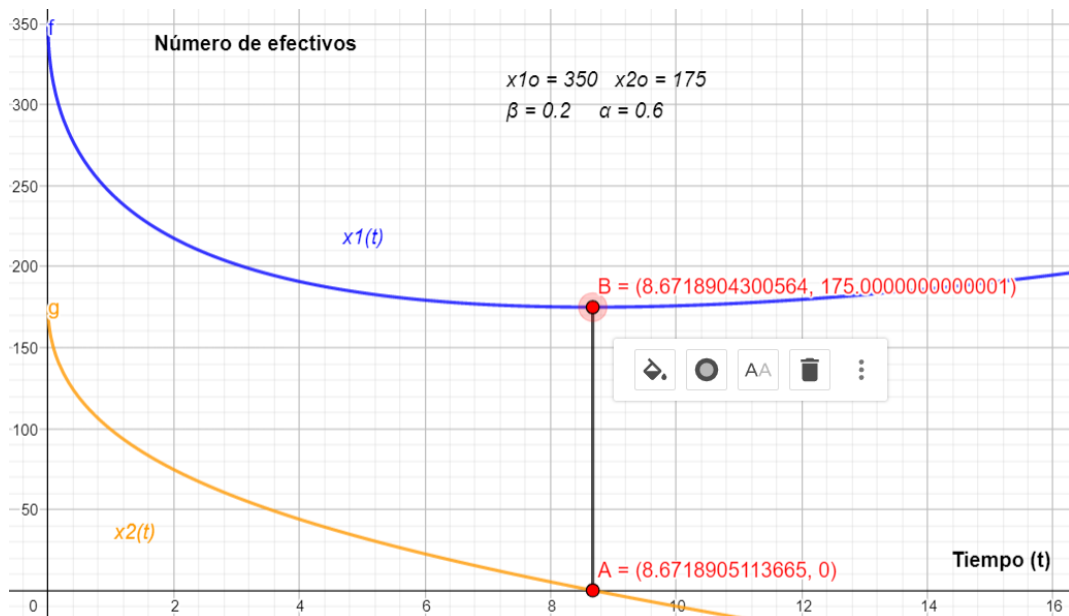


Figura 5.2 . Situación donde el bando X_1 gana el combate al llegar el número de efectivos de X_2 a cero, siendo $\alpha = 0.6$ y el resto de parámetros como se indica.

En este caso se puede observar que, como se ha comentado anteriormente, al ser $\alpha < 0.8$ (situación de empate) el bando ganador será el de mayor número de efectivos, X_1 , que finaliza el enfrentamiento con 175 efectivos (punto B); y el perdedor, que se queda sin efectivos, será X_2 .

Además, se puede apreciar que en el mismo instante de tiempo en el que el bando perdedor se queda sin efectivos, el bando ganador alcanza el mínimo de efectivos en sus filas, lo cual es lógico.

No hay que tener en cuenta la gráfica una vez finalizado el enfrentamiento.

- Se toma $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.4$ y comparamos con $\alpha = 0.6$ del ejemplo anterior.

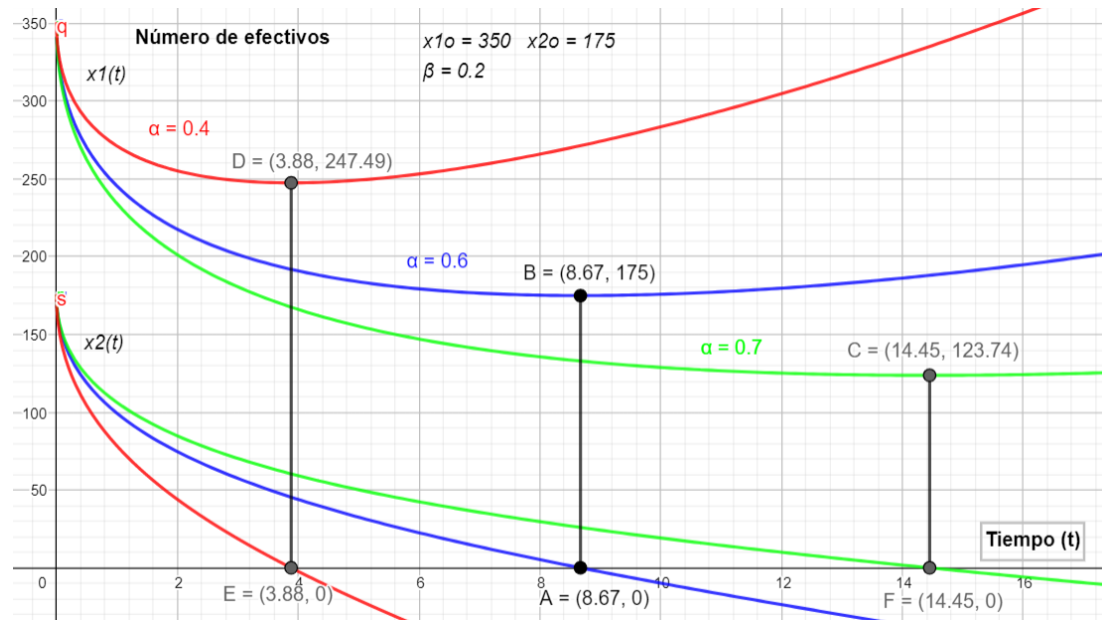


Figura 5.3 Comparativa de situaciones según $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.4$ y $\alpha = 0.6$, manteniendo el resto de parámetros constantes. Siempre gana X_1 .

Como se puede ver en esta última imagen, a medida que el coeficiente de aniquilamiento del bando X_2 (α) aumenta, más costosa será la victoria del ejército X_1 y por tanto más efectivos caerán en este bando y más tardará la guerra en concluir.

Cuando $\alpha = 0.4$, el ejército X_1 ganará más fácilmente y por tanto el conflicto finaliza antes ($t = 3.88$) y el bando ganador acaba con más efectivos (247) que en los otros casos donde el coeficiente de aniquilamiento de X_2 es mayor ($\alpha = 0.6$, $\alpha = 0.7$) donde X_1 finaliza el combate con 175 y 123 efectivos respectivamente.

- Para valores de $0.8 < \alpha \leq 1$.

- Se toma $\alpha = 0.9$ y $\alpha = 1$

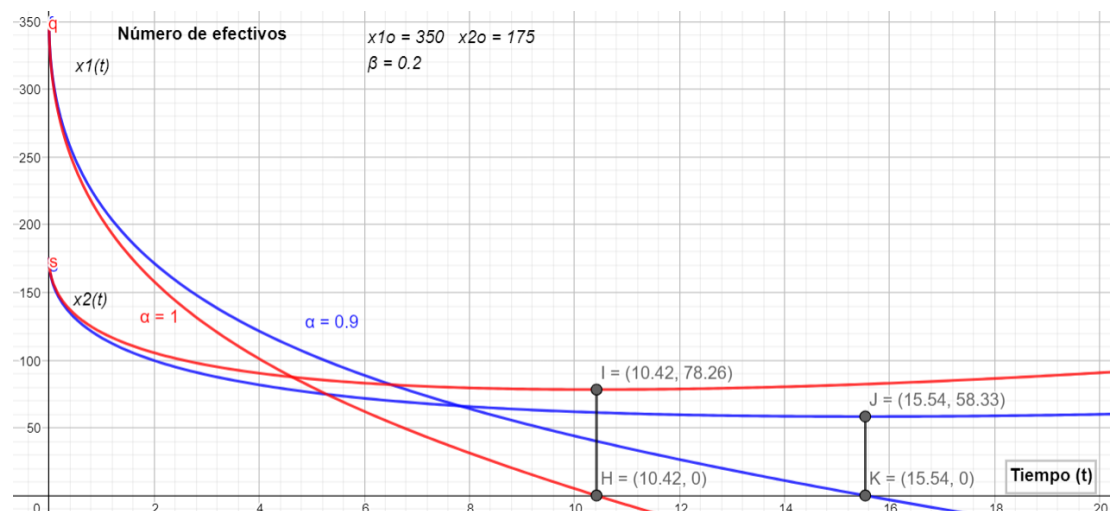


Figura 5.4. Comparativa de situaciones según $\alpha = 0.9$ y $\alpha = 1$, manteniendo el resto de parámetros constantes. Siempre gana X_2

En este caso se puede apreciar que al ser los coeficientes de aniquilamiento de X_2 mayor que 0.8 (caso de empate), se da la victoria de este bando aunque empiece en inferioridad numérica.

Se observan en la imagen además el número de efectivos con los que acaba el bando ganador y el tiempo que dura el conflicto. Estos datos al igual que antes están reflejados en los puntos I, H, J y K que están sobre las curvas.

A continuación, se muestra una tabla resumen con los diferentes casos que se pueden dar cuando $x_{1o} = 2 x_{2o}$.

x_{1o}	β	x_{2o}	α	Vencedor
500	0.25	250	< 1	Bando X_1
350	0.2	175	< 0.8	Bando X_1
350	0.2	175	> 0.8	Bando X_2
200	0.15	100	< 0.6	Bando X_1
200	0.15	100	> 0.6	Bando X_2
160	0.1	80	< 0.4	Bando X_1
160	0.1	80	> 0.4	Bando X_2

Tabla 5.2 Ejército vencedor en función de α manteniendo el resto de parámetros constantes.

Finalmente, como se ha comentado antes y según los datos de la Tabla 3.1 y Tabla 3.2, siendo $x_{1o} = 2 x_{2o}$ se da:

- ✓ Si $\alpha = 4\beta$, se produce un empate.
- ✓ Si $\alpha < 4\beta$, gana el ejército X_1 .
- ✓ Si $\alpha > 4\beta$, gana el ejército X_2 .

El siguiente caso de estudio será el caso en el que un ejército tenga el triple de unidades inicialmente que el otro bando.

- Segundo caso: $x_{1o} = 3 x_{2o}$

Se parte de la siguiente tabla de datos y se hace un estudio análogo al anterior, buscando los valores de α para que se produzca el empate.

x_{1o}	β	x_{2o}	α
----------	---------	----------	----------

300	0.1	100	0.9
180	0.01	60	0.09

Tabla 5.3 Relación entre parámetros de manera que el combate termine en empate y $x_{1o} = 3 x_{2o}$.

De esta tabla se puede deducir, siguiendo el mismo razonamiento que en el caso $x_{1o} = 2 x_{2o}$, que habrá empate entre las fuerzas cuando $\alpha = 9\beta$.

Para comprobar que esto se cumple siempre, se van a demostrar gráficamente las situaciones reflejadas en la siguiente tabla, que varían los parámetros pero siempre manteniendo la relación de empate $\alpha = 9\beta$.

x_{1o}	β	x_{2o}	α
150	0.04	50	0.36
600	0.07	200	0.63

Tabla 5.4 Situaciones donde se produce empate para $x_{1o} = 3 x_{2o}$.

Introduciendo manualmente los datos en Geogebra quedaría la siguiente gráfica.

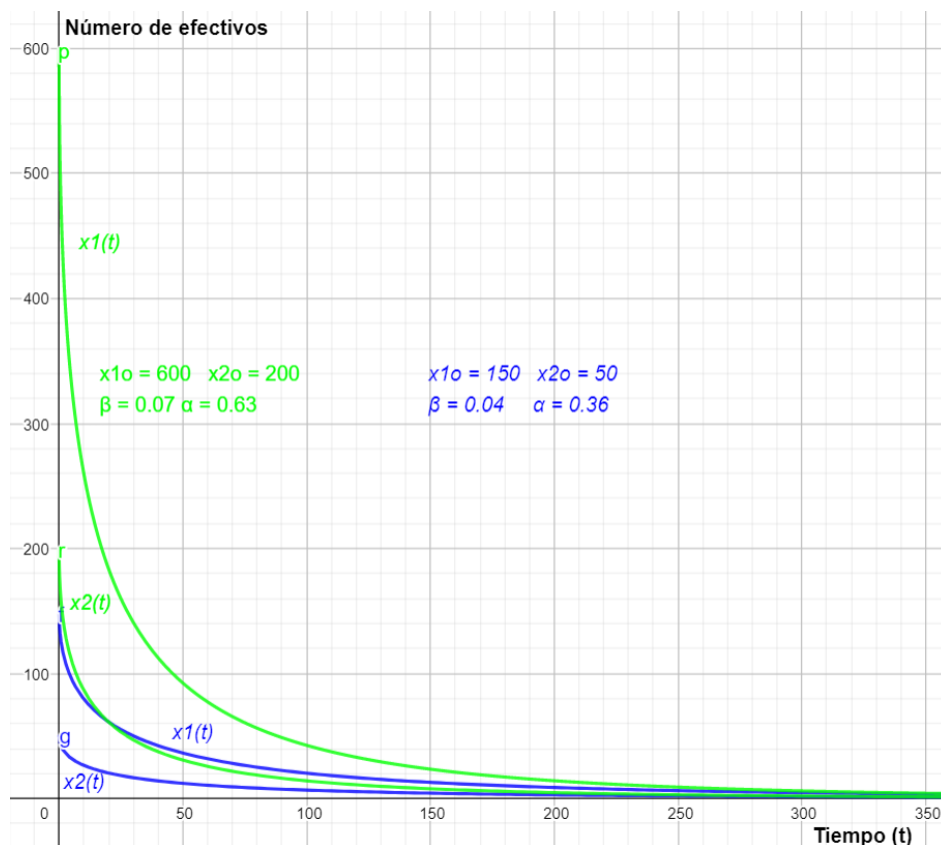


Figura 5.5 Representación del sistema al introducir manualmente los datos de la tabla 3.4

Como se puede apreciar en la figura 3.5, en ambos casos se da el empate entre las fuerzas combatientes, ya que ambas quedan con sus bandos aniquilados con el paso del tiempo y no habría vencedor.

En resumen, se puede llegar a la conclusión de que cuando un ejército tiene inicialmente el triple de efectivos que el otro, se producirá el empate solo si el coeficiente de aniquilamiento del ejército en

superioridad numérica es la novena parte del coeficiente de aniquilamiento del bando en inferioridad numérica.

Dicho esto las conclusiones a las que se llegan, son:

- ✓ Si $\alpha = 9\beta$, se produce un empate.
- ✓ Si $\alpha < 9\beta$, gana el ejército X_1 .
- ✓ Si $\alpha > 9\beta$, gana el ejército X_2 .

Con estos dos casos de estudio y con los resultados obtenidos, se puede afirmar que:

Dado $x_{10} = k x_{20}$, siendo k un número racional positivo cualquiera, ocurre que en un enfrentamiento entre dos fuerzas X_1 y X_2 .

- ✓ Si $\alpha = k^2\beta$, se produce un empate.
- ✓ Si $\alpha < k^2\beta$, gana el ejército X_1 .
- ✓ Si $\alpha > k^2\beta$, gana el ejército X_2 .

Despejando k de $x_{10} = k x_{20}$, queda en función de los parámetros iniciales, $k = \frac{x_{10}}{x_{20}}$, se concluye que:

- El ejército X_1 ganará el enfrentamiento si la fuerza combativa de X_1 es mayor que el de X_2 .
 $\alpha x_{20}^2 < \beta x_{10}^2$
- El ejército X_2 ganará el enfrentamiento si la fuerza combativa de X_2 es mayor que el de X_1 .
 $\alpha x_{20}^2 > \beta x_{10}^2$
- Si la fuerza combativa en ambos bandos es igual entonces habrá empate. $\alpha x_{20}^2 = \beta x_{10}^2$

A continuación, se realizará una demostración de las afirmaciones anteriores a través de la ecuación de trayectorias, que viene dada por la expresión:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\beta x_1}{\alpha x_2}$$

Esto da lugar a una integral que se puede resolver por partes.

$$\beta \int_{x_{10}}^{x_1} x_1 dx_1 = \alpha \int_{x_{20}}^{x_2} x_2 dx_2$$

$$\beta(x_1^2 - x_{10}^2) = \alpha(x_2^2 - x_{20}^2)$$

$$\beta x_1^2 - \alpha x_2^2 = \beta x_{10}^2 - \alpha x_{20}^2 \quad (3.7)$$

Esta última expresión indica que la diferencia entre las fuerzas combativas de ambos bandos es constante e igual a la diferencia de las fuerzas combativas en el momento inicial.

Una vez explicado esto se procede a la demostración de los enunciados expuestos anteriormente.

- **1º Enunciado:** El ejército X_1 ganará el enfrentamiento si la fuerza combativa de X_1 es mayor que el de X_2 . $\alpha x_{20}^2 < \beta x_{10}^2$

Considerando la expresión (3.7) y que de $\alpha x_{20}^2 < \beta x_{10}^2$ se llega a: $0 < \beta x_{10}^2 - \alpha x_{20}^2$, se deduce que se cumple $\alpha x_2^2 < \beta x_1^2$ (3.8) para todo instante de tiempo.

$$\text{Y por tanto } \alpha x_{2f}^2 < \beta x_{1f}^2. \quad (3.9)$$

Teniendo en cuenta esto, se pueden dar tres escenarios diferentes al término del enfrentamiento.

1. Si X_2 es el vencedor del combate, entonces X_1 será completamente eliminado.
 $\beta x_{1f}^2 = 0$.

De manera que con (3.9) se tiene que $\alpha x_{2f}^2 < 0$. Sin embargo esta expresión carece de sentido y no se puede dar nunca ya que el coeficiente de aniquilamiento toma siempre valores entre 0 y 1, $0 < \alpha < 1$ y $x_{2f} > 0$ por el hecho de que ganaría el combate.

Por tanto esto hace saber que nunca se puede dar en este enunciado la victoria del ejército X_2 .

2. Si se produce un empate, los dos ejércitos serían aniquilados al cabo del tiempo.

$$\beta x_{1f}^2 = 0 = \alpha x_{2f}^2$$

Lo que tampoco se puede dar puesto que no cumple (3.9).

Por todo esto la única opción es la que se indica en el enunciado, es decir, el ejército X_1 ganará el enfrentamiento si la fuerza combativa de X_1 es mayor que el de X_2 . (Escenario 3).

- **2º Enunciado:** El ejército X_2 ganará el enfrentamiento si la fuerza combativa de X_2 es mayor que el de X_1 . $\alpha x_{2_0}^2 > \beta x_{1_0}^2$

$$\text{Siguiendo el mismo procedimiento que antes se llega a que } \alpha x_{2f}^2 > \beta x_{1f}^2 \quad (3.10).$$

Se dan por tanto otros tres escenarios posibles al finalizar el combate.

1. Si X_1 es el vencedor del combate, entonces X_2 será completamente eliminado.
 $\alpha x_{2f}^2 = 0$.

Con la expresión (3.10) se llega a $0 > \beta x_{1f}^2$; esto es imposible porque tanto β como x_{1f} tienen que ser mayores de cero. En conclusión, X_1 no puede ser el vencedor del combate.

2. Si se produce un empate, los dos ejércitos serían aniquilados al cabo del tiempo.

$$\beta x_{1f}^2 = 0 = \alpha x_{2f}^2$$

Lo que tampoco se puede dar puesto que no cumple (3.10).

Por todo esto la única opción es la que se indica en el enunciado, es decir, el ejército X_2 ganará el enfrentamiento si la fuerza combativa de X_2 es mayor que el de X_1 . (Escenario 3).

- **3º Enunciado:** Si la fuerza combativa en ambos bandos es igual entonces habrá empate.
 $\alpha x_{2_0}^2 = \beta x_{1_0}^2$

$$\text{Como antes, se llega a la conclusión de que } \alpha x_{2f}^2 = \beta x_{1f}^2 \quad (3.11)$$

Una vez más se distinguen tres escenarios distintos al acabar la batalla.

1. Si X_1 es el vencedor del combate, entonces X_2 será completamente eliminado.
 $\alpha x_{2f}^2 = 0$.

Con (3.11) se obtiene $0 = \beta x_{1f}^2$, lo que no se podría dar ya que se tiene que dar que $\beta > 0$ y $x_{1f} > 0$ si X_1 es el vencedor del combate.

Por ello este escenario no es posible.

2. Si X_2 es el vencedor del combate, entonces X_1 será completamente eliminado. $\beta x_{1f}^2 = 0$.

Con (3.11) se obtiene $\alpha x_{2f}^2 = 0$, lo que no se podría dar ya que se tiene que dar que $\alpha > 0$ y $x_{2f} > 0$ si X_2 es el vencedor del combate.

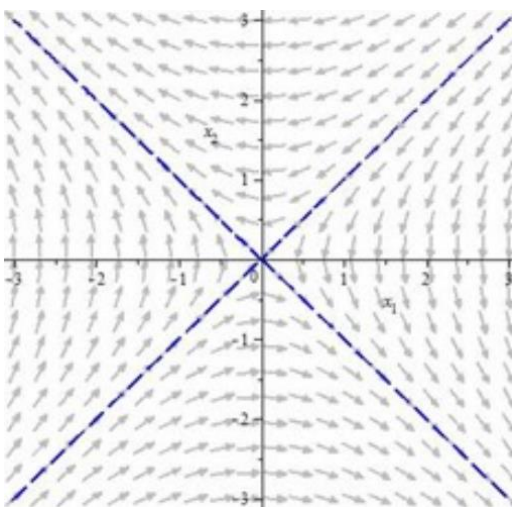
Entonces este escenario tampoco se puede dar, por lo que el único escenario posible es el del empate. (Escenario 3)

Con esta demostración se ha comprobado que la afirmación realizada por Lepingwell (1987) es cierta, es decir, el ejército que tenga al inicio del combate una fuerza combativa mayor será el vencedor del enfrentamiento, y si las fuerzas combativas iniciales son iguales el resultado final del combate será el empate entre bandos.

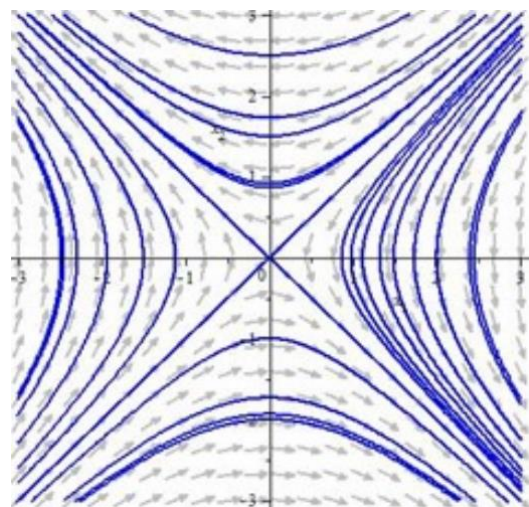
También se llega a la conclusión de que, dado que el sistema es lineal homogéneo no degenerado, el origen, punto $(0,0)$, es el único punto de equilibrio del sistema. Esto quiere decir que el número de efectivos de ambas fuerzas no variará cuando estos no tengan pie de fuerza.

Además, este punto de equilibrio será un punto de silla ya que los autovalores del sistema son reales distintos y de signo opuesto, y será inestable ya que las trayectorias ubicadas en los cuadrantes uno y tres, en donde se encuentra la solución de línea recta que está situada sobre la línea de autovectores asociada al autovalor $-\sqrt{\alpha\beta}$, se acercan al punto de equilibrio, mientras que las trayectorias ubicadas en los cuadrantes dos y cuatro, donde se halla la solución de línea recta que está situada sobre la línea de autovectores asociada al autovalor $\sqrt{\alpha\beta}$ se alejan del punto de equilibrio.

A continuación, se muestran unas gráficas correspondientes al campo de direcciones y al diagrama de fases de un modelo de fuego directo.



1. Campo de direcciones de modelo de fuego directo.



2. Diagrama de fases de un modelo de fuego directo.

Figura 5.6: Campo de direcciones y diagrama de fases de un modelo de fuego directo.

Una vez que se conocen los distintos casos de soluciones del sistema y de cómo varía el número de efectivos de cada bando con el tiempo, se está en disposición de continuar con el estudio a partir de la ecuación de las trayectorias, únicamente considerando el primer cuadrante puesto que los ejes se refieren al tiempo (eje X) y al número de efectivos (eje Y) y no tiene sentido hablar de cantidades negativas en ninguno de los casos.

De la expresión $\beta x_1^2 - \alpha x_2^2 = \beta x_{1_0}^2 - \alpha x_{2_0}^2$ (3.7) se puede llegar a:

$$\frac{\beta x_1^2}{\beta x_{1_0}^2 - \alpha x_{2_0}^2} - \frac{\alpha x_2^2}{\beta x_{1_0}^2 - \alpha x_{2_0}^2} = 1 \quad (3.12)$$

De esta expresión se puede concluir que si la fuerza combativa al inicio de X_2 es superior a la de X_1 , entonces el denominador en ambos términos de la expresión (3.12) será negativo y quedaría la expresión:

$$\frac{x_2^2}{x_{2_0}^2 - \frac{\beta}{\alpha} x_{1_0}^2} - \frac{x_1^2}{\frac{\alpha}{\beta} x_{2_0}^2 - x_{1_0}^2} = 1 \quad (3.13)$$

que se corresponde con un hipérbola de centro (0,0) y eje real x_2 , como se observa en la siguiente gráfica.

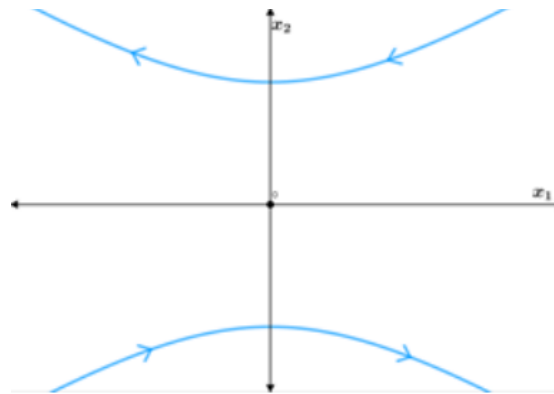


Figura 5.7. Gráfica relacionada con la expresión (3.13)

Los vértices de la hipérbola son los puntos donde esta corta con el eje x_2 , solo se tendrá en cuenta el valor positivo ya que es el que se encuentra en el primer cuadrante y es en este cuadrante donde se va a centrar el estudio como se dijo anteriormente.

El valor de dicho vértice será

$$\left(0, \sqrt{x_{2_0}^2 - \frac{\beta}{\alpha} x_{1_0}^2} \right)$$

que representa el número de efectivos con el que finaliza el combate el ejército X_2 mientras el bando X_1 es completamente eliminado.

El otro caso de estudio se da cuando la fuerza combativa al inicio de X_1 es superior a la de X_2 , entonces el denominador en ambos términos de la expresión (3.12) será positivo y quedaría la expresión:

$$\frac{x_1^2}{x_{1_0}^2 - \frac{\alpha}{\beta} x_{2_0}^2} - \frac{x_2^2}{\frac{\beta}{\alpha} x_{1_0}^2 - x_{2_0}^2} = 1 \quad (3.14)$$

Análogamente a la gráfica anterior, en este caso la expresión (3.14) se corresponde con una hipérbola de centro el punto (0,0) y eje real x_1 .

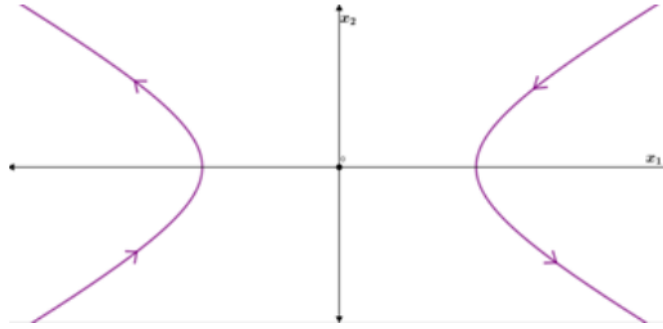


Figura 5.8. Gráfica relacionada con la expresión (3.14)

De la misma forma se obtiene que el vértice de la hipérbola en el primer cuadrante viene dado por

$$\left(\sqrt{x_{1_0}^2 - \frac{\alpha}{\beta} x_{2_0}^2}, 0 \right)$$

que indica el número de efectivos con los que finaliza el enfrentamiento el bando X_1 frente al bando X_2 que queda eliminado completamente.

Por último, se estudia el caso en el que ambas fuerzas combativas son iguales inicialmente. De la expresión (3.7) se obtiene

$$\beta x_1^2 = \alpha x_2^2$$

de donde se llega a $x_2 = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} x_1$. Esto es una función lineal cuya gráfica en el primer cuadrante viene dada por:

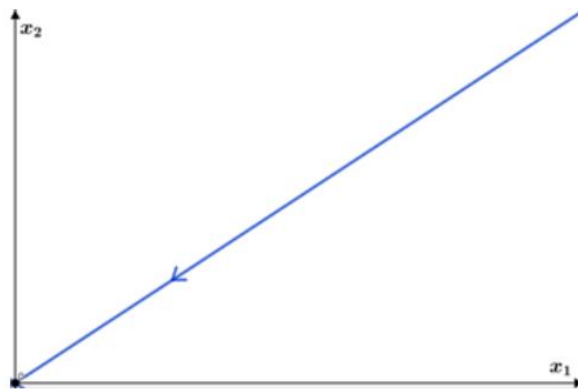


Figura 5.9. Gráfica relacionada con el caso en el que ambos bandos X_1 y X_2 quedan eliminados.

Por tanto, se pueden mostrar a continuación en una misma gráfica las tres diferentes trayectorias que se pueden dar según sea el caso de estudio, es decir, si la fuerza combativa inicialmente de X_2 es superior a la de X_1 , si la fuerza combativa inicialmente de X_1 es superior a la de X_2 o si ambas fuerzas combativas fueran iguales. Únicamente se muestra la parte de las gráficas referidas al primer cuadrante.

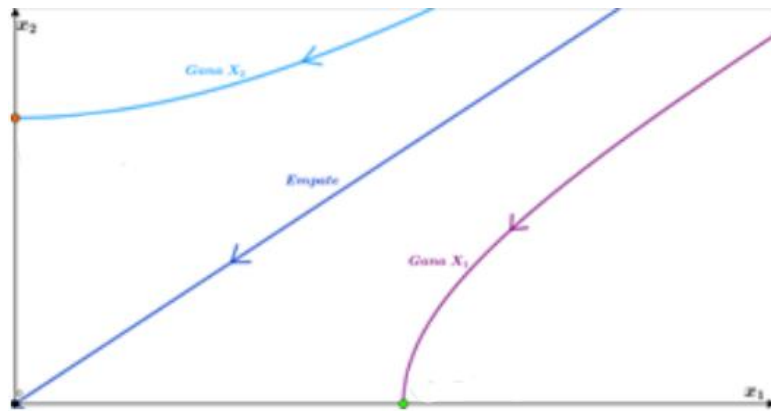


Figura 5.10. Gráfica que muestra las tres situaciones que se pueden dar en un enfrentamiento bajo las condiciones de un modelo de fuego directo.

El siguiente punto del estudio del modelo de fuego directo, se va a centrar en confirmar que el principio de concentración es aplicable a este modelo, como asegura Lanchester en su estudio.

El principio de concentración afirma que es recomendable que cada ejército reúna sus fuerzas combativas a la hora de enfrentarse a su rival en un solo combate. Por tanto a continuación, se va a analizar qué ocurre cuando el ejército vencedor, cuando se da un solo combate, se divide en n partes iguales y se producen n enfrentamientos entre ambos bandos en los que batallan la n -ésima parte del ejército dividido con el número de efectivos restante del bando contrario, y teniendo en cuenta que cada combatiente mantiene constante su coeficiente de aniquilamiento en cada uno de los n enfrentamientos.

Partiendo de $x_{10} = kx_{20}$ y $\alpha = p\beta$ siendo k y p números racionales positivos y asumiendo que la fuerza combativa de X_1 sea mayor que la de X_2 ; esto significaría la victoria del ejército X_1 en el caso de un solo combate, sin embargo, se va a estudiar si hay alguna situación en el que saliera vencedor el bando X_2 al dividir X_1 en n partes iguales y atacarlo secuencialmente.

De (3.7) se obtiene

$$\beta x_{10}^2 - \alpha x_{20}^2 = \beta x_{1f}^2 - \alpha x_{2f}^2 \quad (3.15)$$

▪ **Escenario 1: Al dividir X_1 en dos partes iguales**

La fuerza combativa de X_1 vendrá dada por

$$\beta \left(\frac{x_{10}}{2} \right)^2 = \frac{\alpha}{p} \left(\frac{kx_{20}}{2} \right)^2 \quad (3.16)$$

Sustituyendo en (3.15) para el primer combate

$$\frac{\alpha}{p} \left(\frac{kx_{20}}{2} \right)^2 - \alpha x_{2_0}^2 = \beta x_{1_{f1}}^2 - \alpha x_{2_{f1}}^2$$

Si X_2 sale vencedor en los dos enfrentamientos, se supone que X_1 acaba en ambos combates completamente eliminado, por tanto, su fuerza combativa al finalizar estos es cero.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{p} \left(\frac{kx_{20}}{2} \right)^2 - \alpha x_{2_0}^2 &= -\alpha x_{2_{f1}}^2 \\ \alpha x_{2_0}^2 \left(\frac{k^2}{4p} - 1 \right) &= -\alpha x_{2_{f1}}^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Para que esto se cumpla debe ocurrir que $\frac{k^2}{4p} - 1 < 0$ y, por tanto

$$k^2 < 4p$$

Finalmente, X_2 ganará el primer combate si esta expresión se cumple.

Para saber si X_2 gana también el segundo enfrentamiento, habrá que hallar el pie de fuerza con el que finalizó el primer combate, $x_{2_{f1}}$.

Despejando de (3.17)

$$x_{2_{f1}} = \sqrt{1 - \frac{k^2}{4p}} x_{20} \quad (3.18)$$

Reemplazando (3.18) y (3.16) en (3.15)

$$\frac{\alpha}{p} \left(\frac{kx_{20}}{2} \right)^2 - \alpha \left(\sqrt{1 - \frac{k^2}{4p}} x_{20} \right)^2 = \beta x_{1_{f2}}^2 - \alpha x_{2_{f2}}^2$$

De igual manera

$$\alpha x_{2_0}^2 \left(\frac{k^2}{4p} - 1 + \frac{k^2}{4p} \right) = -\alpha x_{2_{f2}}^2$$

Llegando a

$$k^2 < 2p \quad (3.19)$$

Se llega entonces a la conclusión de que, al cumplirse esta desigualdad, X_2 será vencedor del combate y X_1 será aniquilado.

▪ **Escenario 2: Al dividir X_1 en tres partes iguales**

La fuerza combativa de X_1 vendrá dada por

$$\beta \left(\frac{x_{10}}{3} \right)^2 = \frac{\alpha}{p} \left(\frac{kx_{20}}{3} \right)^2 \quad (3.20)$$

De manera análoga a la situación anterior

$$\frac{\alpha}{p} \left(\frac{kx_{20}}{3} \right)^2 - \alpha x_{2_0}^2 = -\alpha x_{2_{f1}}^2$$

$$\alpha x_{2_0}^2 \left(\frac{k^2}{9p} - 1 \right) = -\alpha x_{2_{f1}}^2 \quad (3.21)$$

Para que esto se cumpla debe ocurrir que $\frac{k^2}{9p} - 1 < 0$ y, por tanto

$$k^2 < 9p$$

Finalmente, X_2 ganará el primer combate si esta expresión se cumple.

Para saber si X_2 gana también el segundo enfrentamiento, habrá que hallar el pie de fuerza con el que finalizó el primer combate, $x_{2_{f1}}$.

$$x_{2_{f1}} = \sqrt{1 - \frac{k^2}{9p}} x_{2_0} \quad (3.22)$$

Por tanto

$$\frac{\alpha}{p} \left(\frac{kx_{2_0}}{3} \right)^2 - \alpha \left(\sqrt{1 - \frac{k^2}{9p}} x_{2_0} \right)^2 = \beta x_{1_{f2}}^2 - \alpha x_{2_{f2}}^2$$

De igual manera

$$\begin{aligned} \alpha x_{2_0}^2 \left(\frac{k^2}{9p} - 1 + \frac{k^2}{9p} \right) &= -\alpha x_{2_{f2}}^2 \\ \alpha x_{2_0}^2 \left(\frac{2k^2}{9p} - 1 \right) &= -\alpha x_{2_{f2}}^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Llegando a

$$k^2 < \frac{9p}{2}$$

Se llega entonces a la conclusión de que, al cumplirse esta desigualdad, X_2 será vencedor del segundo combate y comienza el tercero con el siguiente número de efectivos.

$$x_{2_{f2}} = \sqrt{1 - \frac{2k^2}{9p}} x_{2_0}$$

Al igual que antes y reemplazando en las expresiones correspondientes

$$\frac{\alpha}{p} \left(\frac{kx_{2_0}}{3} \right)^2 - \alpha \left(\sqrt{1 - \frac{2k^2}{9p}} x_{2_0} \right)^2 = \beta x_{1_{f3}}^2 - \alpha x_{2_{f3}}^2$$

Así se llega a

$$\begin{aligned} \alpha x_{2_0}^2 \left(\frac{k^2}{9p} - 1 + \frac{2k^2}{9p} \right) &= -\alpha x_{2_{f3}}^2 \\ \alpha x_{2_0}^2 \left(\frac{3k^2}{9p} - 1 \right) &= -\alpha x_{2_{f3}}^2 \end{aligned}$$

Llegando a

$$k^2 < 3p \quad (3.24)$$

Por tanto, si se cumple esta condición, se puede afirmar que el ejército X_2 será el ganador de la batalla y X_1 quedará completamente eliminado.

En resumen, teniendo en cuenta las expresiones a las que se ha llegado en las dos situaciones analizadas, se puede afirmar que dado $x_{10} = kx_{20}$ y $\alpha = p\beta$ siendo k y p números racionales positivos y asumiendo que X_1 sea el bando ganador en un solo combate; entonces se sabe que X_2 será el vencedor y eliminará al ejército X_1 en el combate n -ésimo si X_2 divide el número de efectivos de X_1 en n partes iguales y se cumple la expresión

$$\beta x_{1_0}^2 < n\alpha x_{2_0}^2 \quad (3.25)$$

Esta afirmación es una hipótesis puesto que solo se han comprobado dos situaciones diferentes de las infinitas que habría, por ello se va a proponer una demostración de lo anterior a continuación.

Demostración:

Si no se diera el caso de que X_2 ganara el combate en el enfrentamiento n -ésimo y en este eliminara completamente a X_1 , entonces significaría que sería X_1 el vencedor del combate y eliminaría a X_2 en el enfrentamiento n -ésimo o este terminaría en empate. Por tanto, se llegaría a la conclusión de que en ese supuesto la fuerza combativa inicial de X_1 sería mayor a la de X_2 o estas serían iguales, en caso de empate. Lo que se resume en la expresión siguiente

$$\beta x_{1_0}^2 \geq n\alpha x_{2_0n}^2$$

Se sabe que el pie de fuerza inicial de X_2 en este enfrentamiento es igual al pie de fuerza final del enfrentamiento anterior, por ello

$$\beta \left(\frac{x_{10}}{n}\right)^2 \geq \alpha \left(\sqrt{x_{2_0}^2 \left(1 - \frac{k^2(n-1)}{n^2 p}\right)}\right)^2$$

Sabiendo que α , β y n son positivos se llega a

$$\beta \left(\frac{x_{10}}{n}\right)^2 \geq \alpha x_{2_0}^2 - \frac{\alpha x_{2_0}^2 k^2 (n-1)}{n^2 p}$$

$$p\beta x_{1_0}^2 \geq n^2 p \alpha x_{2_0}^2 - \alpha x_{2_0}^2 k^2 (n-1)$$

$$p\beta x_{1_0}^2 \geq n^2 p \alpha x_{2_0}^2 - \alpha x_{2_0}^2 k^2 n + \alpha x_{2_0}^2 k^2$$

Sabiendo que $x_{10} = kx_{20}$ y $\alpha = p\beta$, se tiene

$$\alpha x_{1_0}^2 \geq \frac{n^2 \alpha^2 x_{2_0}^2}{\alpha} - \alpha x_{1_0}^2 n + \alpha x_{1_0}^2$$

$$\alpha x_{1_0}^2 n \geq \frac{n^2 \alpha^2 x_{2_0}^2}{\alpha}$$

$$\beta x_{1_0}^2 \geq n\alpha x_{2_0}^2 \quad (3.26)$$

Sin embargo, esta expresión no se puede cumplir puesto que no concuerda con la (3.25), por tanto, se llega a la conclusión de que la hipótesis es cierta y X_2 aniquila a X_1 por completo en el combate n -ésimo.

Finalmente, se puede decir que en un combate en circunstancias de un modelo de fuego directo, el bando que tenga una mayor fuerza combativa será el bando ganador si el combate se disputa en un solo enfrentamiento, mientras que el ejército que saldría derrotado en este caso puede cambiar el resultado del combate si logra dividir al bando que saldría vencedor en n partes iguales de forma que la fuerza combativa al inicio fuera mayor que la n -ésima parte de la fuerza combativa de su adversario y lo atacara secuencialmente en n batallas.

5.2 Modelo de Fuego Indirecto o Fuego en Área

La principal diferencia de este modelo respecto al modelo de fuego directo es que el número de efectivos de cada bando además de disminuir según el pie de fuerza del adversario, también lo va a hacer dependiendo del número de efectivos del propio bando que se encuentren en el área de fuego.

El sistema que describe este modelo es el siguiente

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_2 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\beta x_1 x_2 \end{cases}$$

Este sistema será un SPANLH, si se toman dos condiciones iniciales que en este caso serán $x_1(0) = x_{10}$ y $x_2(0) = x_{20}$, siendo estas el número de efectivos de cada bando al inicio del combate.

Al ser un SPANLH, la manera de calcular la solución analítica del sistema será con la ecuación de las trayectorias.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\int_{x_{10}}^{x_1} \beta dx_1 = \int_{x_{20}}^{x_2} \alpha dx_2$$

$$\beta(x_{10} - x_1) = \alpha(x_{20} - x_2)$$

$$\beta x_{10} - \alpha x_{20} = \beta x_1 - \alpha x_2 \quad (3.27)$$

$$c_1 = \beta x_1 - \alpha x_2 \quad (3.28)$$

siendo $c_1 = \beta x_{10} - \alpha x_{20}$.

Si se despeja de la igualdad (3.28) el término x_2 , quedaría

$$x_2 = \frac{\beta}{\alpha} x_1 - \frac{c_1}{\alpha}$$

Introduciendo esto en la primera ecuación del sistema se obtiene

$$\frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_1 \left(\frac{\beta}{\alpha} x_1 - \frac{c_1}{\alpha} \right)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -\beta x_1^2 + c_1 x_1$$

$$\frac{dx_1}{-\beta x_1^2 + c_1 x_1} = dt$$

$$\frac{dx_1}{x_1(c_1 - \beta x_1)} = dt$$

Con fracciones parciales

$$\frac{A}{x_1} + \frac{B}{c_1 - \beta x_1} = 1$$

$$\frac{A(c_1 - \beta x_1) + Bx_1}{x_1(c_1 - \beta x_1)} = \frac{1}{x_1(c_1 - \beta x_1)}$$

$$A(c_1 - \beta x_1) + Bx_1 = 1$$

$$-A\beta x_1 + Ac_1 + Bx_1 = 1$$

$$x_1(B - A\beta) + Ac_1 = 1$$

siendo $A = \frac{1}{c_1}$ y $B = \frac{\beta}{c_1}$, se tiene que

$$\frac{1}{c_1} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{\beta}{c_1 - \beta x_1} \right) = \frac{1}{x_1(c_1 - \beta x_1)}$$

$$\int_{x_{10}}^{x_1} \frac{1}{c_1} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{\beta}{c_1 - \beta x_1} \right) dx_1 = \int_{t_0}^t dt$$

$$\frac{1}{c_1} \int_{x_{10}}^{x_1} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{\beta}{c_1 - \beta x_1} \right) dx_1 = t$$

$$\frac{1}{c_1} \left[\int_{x_{10}}^{x_1} \frac{1}{x_1} dx_1 + \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{\beta}{c_1 - \beta x_1} dx_1 \right] = t$$

$$\frac{1}{c_1} [(\ln x_1 - \ln(c_1 - \beta x_1)) - (\ln x_{10} - \ln(c_1 - \beta x_{10}))] = t$$

$$\frac{1}{c_1} \left[\ln \left(\frac{\frac{x_1}{c_1 - \beta x_1}}{\frac{x_{10}}{c_1 - \beta x_{10}}} \right) \right] = t$$

$$\frac{\frac{x_1}{c_1 - \beta x_1}}{\frac{x_{1_0}}{c_1 - \beta x_{1_0}}} = e^{c_1 t}$$

Despejando x_1

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{x_{1_0}}{c_1 - \beta x_{1_0}} \right) e^{c_1 t} (c_1 - \beta x_1) \\ x_1 + \beta x_1 \left(\frac{x_{1_0}}{c_1 - \beta x_{1_0}} \right) e^{c_1 t} &= c_1 \left(\frac{x_{1_0}}{c_1 - \beta x_{1_0}} \right) e^{c_1 t} \\ x_1 \left(1 + \frac{\beta x_{1_0} e^{c_1 t}}{c_1 - \beta x_{1_0}} \right) &= \frac{c_1 x_{1_0} e^{c_1 t}}{c_1 - \beta x_{1_0}} \\ x_1 &= \frac{\frac{c_1 x_{1_0} e^{c_1 t}}{c_1 - \beta x_{1_0}}}{1 + \frac{\beta x_{1_0} e^{c_1 t}}{c_1 - \beta x_{1_0}}} \\ x_1 &= \frac{c_1 x_{1_0}}{e^{-c_1 t}(c_1 - \beta x_{1_0}) + \beta x_{1_0}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

En esta expresión se puede ver que si $c_1 = 0$, x_1 quedaría indeterminado. Por ello se ha de diferenciar cuando $c_1 = 0$ y cuando $c_1 \neq 0$.

Si $c_1 \neq 0$, se tiene la expresión (3.29), pero si $c_1 = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\beta x_1^2 \\ \int_{x_{1_0}}^{x_1} \frac{1}{-\beta x_1^2} dx_1 &= \int_{t_0}^t dt \\ \frac{1}{\beta x_1} - \frac{1}{\beta x_{1_0}} &= t \\ \frac{1}{\beta x_1} &= \frac{t\beta x_{1_0} + 1}{\beta x_{1_0}} \\ x_1 &= \frac{x_{1_0}}{t\beta x_{1_0} + 1} \end{aligned}$$

En definitiva $x_1(t)$ queda definida como una función a trozos de la forma:

$$x_1(t) = \begin{cases} \frac{x_{1_0}}{t\beta x_{1_0} + 1}, & c_1 = 0 \\ \frac{c_1 x_{1_0}}{e^{-c_1 t}(c_1 - \beta x_{1_0}) + \beta x_{1_0}}, & c_1 \neq 0 \end{cases}$$

También al despejar x_1 de (3.28) queda

$$\beta x_1 = c_1 - \alpha x_2$$

$$x_1 = \frac{c_1}{\beta} + \frac{\alpha x_2}{\beta}$$

Al introducir esta expresión en la segunda ecuación del sistema se tiene

$$\frac{dx_2}{dt} = -\beta x_2 \left(\frac{c_1}{\beta} + \frac{\alpha x_2}{\beta} \right)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\alpha x_2^2 - c_1 x_2$$

De manera que al igual que antes hay que diferenciar los casos para $c_1 = 0$ y para $c_1 \neq 0$, puesto que cuando $c_1 = 0$ se produce una indeterminación.

Si $c_1 \neq 0$, siguiendo un procedimiento análogo al cálculo de x_1 , se llega a

$$x_2 = \frac{c_1 x_{2_0} e^{-c_1 t}}{c_1 - \alpha x_{2_0} e^{-c_1 t} + \alpha x_{2_0}}$$

pero si $c_1 = 0$, entonces

$$x_2 = \frac{x_{2_0}}{t \alpha x_{2_0} + 1}$$

En definitiva $x_2(t)$ queda definida como una función a trozos de la forma:

$$x_2(t) = \begin{cases} \frac{x_{2_0}}{t \alpha x_{2_0} + 1}, & c_1 = 0 \\ \frac{c_1 x_{2_0} e^{-c_1 t}}{c_1 - \alpha x_{2_0} e^{-c_1 t} + \alpha x_{2_0}}, & c_1 \neq 0 \end{cases}$$

Analizando las funciones tanto de $x_1(t)$ como de $x_2(t)$, se puede observar que ambas tienen asíntotas horizontales en $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ respectivamente. Esto hace imposible que se pueda saber con seguridad cuando finaliza el combate, sin embargo, si se puede obtener el tiempo de algún momento puntual de la batalla a partir del número de efectivos que tienen los bandos en ese mismo instante.

Llamando n_1 al pie de fuerza del bando X_I en el instante de tiempo que se quiere conocer, se obtiene:

Si $c_1 \neq 0$,

$$n_1 = \frac{c_1 x_{1_0}}{e^{-c_1 t} (c_1 - \beta x_{1_0}) + \beta x_{1_0}}$$

$$-n_1 c_1 e^{-c_1 t} + n_1 \beta x_{1_0} e^{-c_1 t} = n_1 \beta x_{1_0} - c_1 x_{1_0}$$

$$e^{-c_1 t} = \frac{n_1 \beta x_{1_0} - c_1 x_{1_0}}{n_1 \beta x_{1_0} - n_1 c_1}$$

$$t = -\frac{1}{c_1} \ln \left| \frac{n_1 \beta x_{1_0} - c_1 x_{1_0}}{n_1 \beta x_{1_0} - n_1 c_1} \right|$$

Si $c_1 = 0$,

$$n_1 = \frac{x_{1_0}}{t \beta x_{1_0} + 1}$$

$$t \beta x_{1_0} + 1 = \frac{x_{1_0}}{n_1}$$

$$t \beta x_{1_0} = \frac{x_{1_0} - n_1}{n_1}$$

$$t = \frac{x_{1_0} - n_1}{n_1 \beta x_{1_0}}$$

De igual forma para X_2 , llamando n_2 al pie de fuerza que se mantiene en combate, el tiempo que ha transcurrido se batalla será:

Si $c_1 \neq 0$,

$$n_2 = \frac{c_1 x_{2_0} e^{-c_1 t}}{c_1 - \alpha x_{2_0} e^{-c_1 t} + \alpha x_{2_0}}$$

$$n_2 (c_1 + \alpha x_{2_0}) = c_1 x_{2_0} e^{-c_1 t} + n_2 \alpha x_{2_0} e^{-c_1 t}$$

$$e^{-c_1 t} = \frac{n_2 (c_1 + \alpha x_{2_0})}{c_1 x_{2_0} + n_2 \alpha x_{2_0}}$$

$$t = -\frac{1}{c_1} \ln \left| \frac{n_2 (c_1 + \alpha x_{2_0})}{c_1 x_{2_0} + n_2 \alpha x_{2_0}} \right|$$

Si $c_1 = 0$,

$$n_2 = \frac{x_{2_0}}{t \alpha x_{2_0} + 1}$$

$$t \alpha x_{2_0} + 1 = \frac{x_{2_0}}{n_2}$$

$$t = \frac{x_{2_0} - n_2}{n_2 \alpha x_{2_0}}$$

Dado que las funciones que definen las variables de estado están definidas a trozos, la exploración gráfica de estas variables no es válida para deducir la relación entre las fuerzas de cada ejército, que determinaría el vencedor de la batalla. Por ello se va a realizar una demostración de la afirmación propuesta por Lepingwell acerca de la relación de las fuerzas combativas de cada bando y el resultado final de a batalla.

Como afirma Lepingwell, en un combate en condiciones de fuego indirecto entre los ejércitos X_1 y

X_2 , ocurre que:

- X_1 es el vencedor de la batalla si $\alpha x_{2_0} < \beta x_{1_0}$.
- X_2 es el ganador de la batalla si $\alpha x_{2_0} > \beta x_{1_0}$.
- El resultado del combate es empate si $\alpha x_{2_0} = \beta x_{1_0}$.

Demostración:

Se sigue un razonamiento parecido al realizado en el modelo de fuego directo, de manera que para las tres afirmaciones citadas se tiene:

- **1° Enunciado:** X_1 ganará la batalla si $\alpha x_{2_0} < \beta x_{1_0}$.

De este enunciado y de la expresión $\beta x_{1_0} - \alpha x_{2_0} = \beta x_{1_1} - \alpha x_{2_1}$ (3.27) se llega a

$$\beta x_{1_1} > \alpha x_{2_1}$$

En el momento final de combate será

$$\beta x_{1_f} > \alpha x_{2_f} \quad (3.30)$$

Por tanto, se cumple el enunciado propuesto, si al inicio del combate la fuerza combativa de X_1 es mayor, también lo es al final y por tanto gana la batalla.

- **2° Enunciado:** X_2 es el ganador de la batalla si $\alpha x_{2_0} > \beta x_{1_0}$.

Al igual que antes, de (3.27) se obtiene que

$$\beta x_{1_1} < \alpha x_{2_1}$$

Y al final será

$$\beta x_{1_f} < \alpha x_{2_f}$$

Se cumple lo afirmado, si al inicio del combate la fuerza combativa de X_2 es mayor, también lo es al final y por tanto gana la batalla.

- **3° Enunciado:** El resultado del combate es empate si $\alpha x_{2_0} = \beta x_{1_0}$.

De la expresión (3.27) y de la igualdad especificada se obtiene

$$\beta x_{1_1} = \alpha x_{2_1}$$

Al final del combate también serán iguales las fuerzas combativas de ambos bandos

$$\beta x_{1_f} = \alpha x_{2_f}$$

Por ello se puede concluir que el enunciado se cumple, es decir, si ambos bandos tienen fuerzas combativas iguales, el resultado será empate.

Llegados a este punto se ha demostrado que lo afirmado por Lepingwell se cumple en los tres casos propuestos. Ganará la batalla aquel ejército que tenga una mayor fuerza combativa al inicio de la batalla, y en caso de que las fuerzas combativas iniciales sean iguales el resultado final será de empate.

Además, se sabe que los puntos de equilibrio de este sistema son los que cumplen $-\alpha x_2 x_1 = 0$ y $-\beta x_1 x_2 = 0$, es decir, los que son de la forma $(\bar{x}_1, 0)$ y $(0, \bar{x}_2)$.

También es necesario utilizar la matriz jacobiana del sistema asociado al modelo de fuego indirecto y

evaluarla en cada punto de equilibrio para saber qué puntos son no degenerados.

$$Df = \begin{pmatrix} -\alpha x_2 & -\alpha x_1 \\ -\beta x_2 & -\beta x_1 \end{pmatrix}$$

Si se evalúa esta matriz en los puntos de equilibrio de la forma $(\bar{x}_1, 0)$, el determinante de esta queda:

$$|Df(\bar{x}_1, 0)| = \begin{vmatrix} 0 & -\alpha\bar{x}_1 \\ 0 & -\beta\bar{x}_1 \end{vmatrix} = 0$$

Si ahora se evalúa la misma matriz en los puntos de equilibrio que cumplen $(0, \bar{x}_2)$, el determinante es:

$$|Df(0, \bar{x}_2)| = \begin{vmatrix} -\alpha\bar{x}_2 & 0 \\ -\beta\bar{x}_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, se puede decir que, siguiendo la teoría expuesta en el marco matemático, todos los puntos de equilibrio son degenerados y por consiguiente el sistema también lo será.

Igualmente, todos los puntos de equilibrio son no aislados por lo que todas las conclusiones sacadas surgen de la observación gráfica y no serán resultado de una teoría general.

Como se puede observar en la siguiente figura los puntos de equilibrio ubicados que están en los ejes positivos son estables, ya que el sentido de los vectores tangentes a las órbitas cerca a cada punto de equilibrio señala a cada uno de estos, mientras que los puntos de equilibrio que se sitúan en los ejes negativos son inestables, debido a que en todos estos los vectores tangentes a al menos una de las curvas solución cerca a cada punto de equilibrio señala en sentido opuesto al punto.

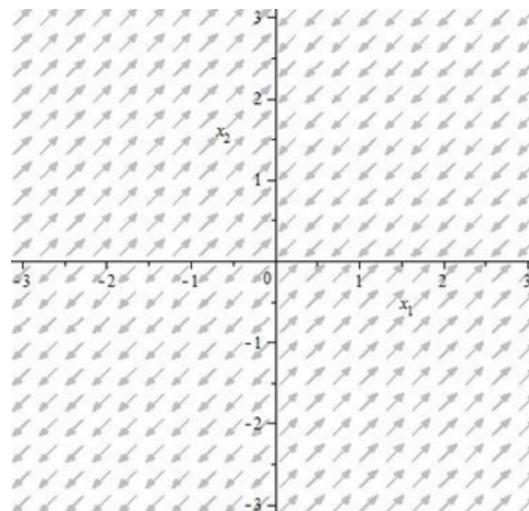


Figura 5.11. Campo de direcciones de un sistema de modelo de fuego en área

El siguiente paso es mostrar en una gráfica las trayectorias del sistema, para ello se despeja x_2 de (3.27).

$$x_2 = \frac{\beta}{\alpha} x_1 - \frac{c}{\alpha} \quad (3.31)$$

siendo $c = \alpha x_{2_0} - \beta x_{1_0}$.

Teniendo la expresión (3.31), se puede observar que es una función de pendiente $\frac{\beta}{\alpha}$ y ordenada en el origen $\frac{c}{\alpha}$.

En este caso si el ejército X_1 es el vencedor, porque tenga mayor fuerza combativa inicialmente que el bando X_2 , entonces $\frac{c}{\alpha} < 0$. Esto implica que la gráfica de la situación tenga un punto de corte, en el

primer cuadrante, con el eje que representa x_1 en el punto $(-\frac{c}{\beta}, 0)$, lo que indica la cantidad de efectivos con los que finaliza el ejército X_1 cuando X_2 es aniquilado.

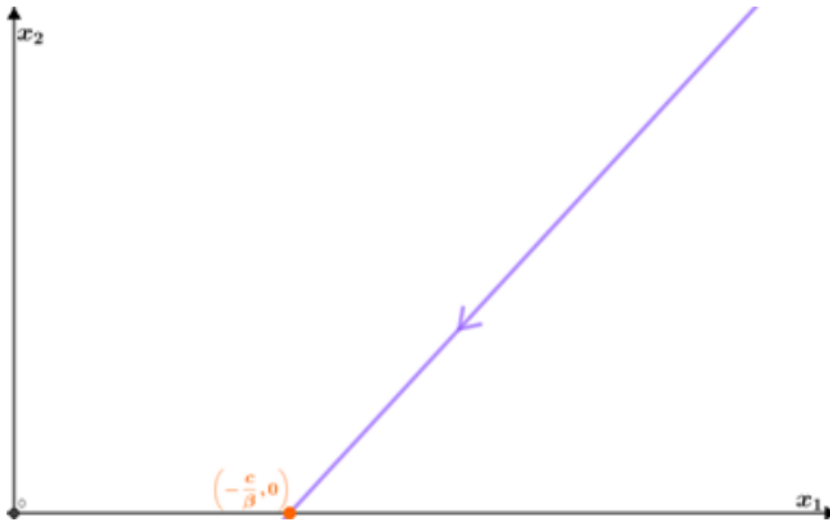


Figura 5.12. Función trayectoria de una situación de modelo de fuego en área donde el bando X_2 es aniquilado y el bando X_1 mantiene pie de fuerza.

Por otro lado, si el ganador del combate resultara ser el ejército X_2 , por lo que tendría mayor fuerza combativa inicial que X_1 , entonces $\frac{c}{\alpha} > 0$, lo que implica que la gráfica resultante de esta situación mostraría un punto de corte en el eje x_2 en el punto $(0, \frac{c}{\alpha})$, que al igual que antes se refiere al pie de fuerza que mantiene el bando ganador, en este caso X_2 , mientras el bando perdedor es totalmente aniquilado, en este caso X_1 .

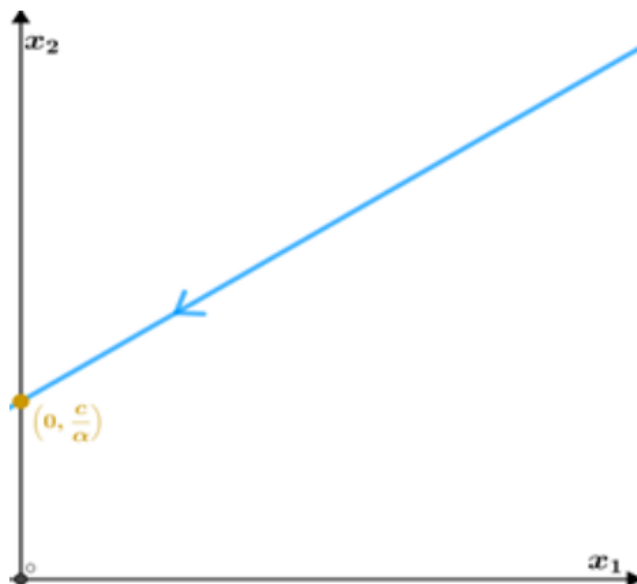


Figura 5.13. Función trayectoria de una situación de modelo de fuego en área donde el bando X_1 es aniquilado y el bando X_2 mantiene pie de fuerza.

El otro caso posible es que se diera un empate entre ambos ejércitos, lo que significaría que ambas fuerzas combativas son iguales al inicio quedando $\frac{c}{\alpha} = 0$. Esto da lugar a una función que tiene un punto de corte en el origen $(0,0)$, de manera que ambos ejércitos quedan aniquilados.

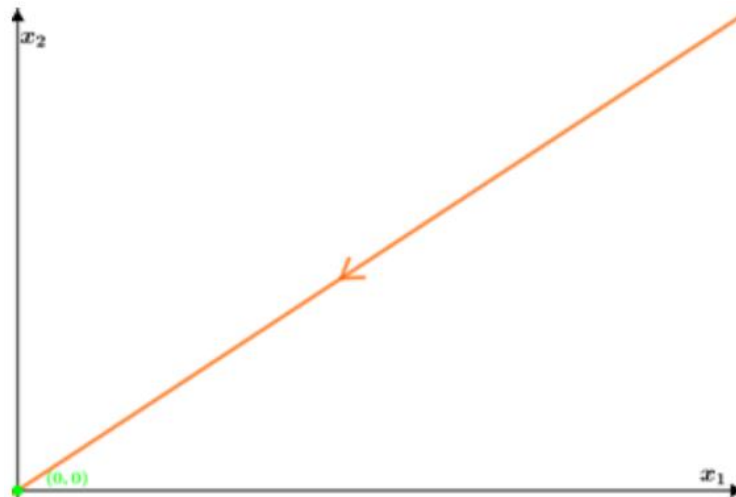


Figura 5.14. Función trayectoria de una situación de modelo de fuego en área donde ambos bandos X_1 y X_2 quedan aniquilados.

Finalmente representando en una misma gráfica las tres trayectorias que se pueden dar en las tres situaciones analizadas, quedaría la siguiente figura.

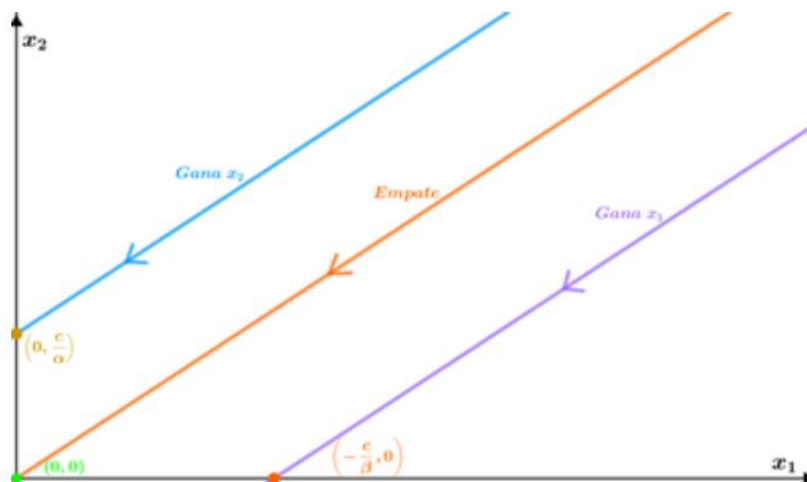


Figura 5.15. Funciones trayectorias de las tres situaciones que se pueden dar en un modelo de fuego en área.

El siguiente punto por tratar en el análisis de este modelo de fuego indirecto o fuego en área, es la comprobación de la afirmación de Lanchester que asegura que en este modelo no es posible aplicar el principio de concentración.

Se realizará un procedimiento análogo al realizado en este apartado para el modelo anterior.

Partiendo de $x_{10} = kx_{20}$ y $\alpha = p\beta$ siendo k y p números racionales positivos y asumiendo que la fuerza combativa de X_1 sea mayor que la de X_2 ; esto significaría la victoria del ejército X_1 en el caso de un solo combate, sin embargo, se va a estudiar si hay alguna situación en el que saliera vencedor el bando X_2 al dividir X_1 en n partes iguales y atacarlo secuencialmente y teniendo en cuenta que cada combatiente mantiene constante su coeficiente de aniquilamiento en cada uno de los n enfrentamientos.

De la expresión (3.27) se obtiene

$$\beta x_{1_0} - \alpha x_{2_0} = \beta x_{1_f} - \alpha x_{2_f} \quad (3.32)$$

Se contemplan dos posibles escenarios:

▪ **Escenario 1: Al dividir X_I en dos partes iguales**

La fuerza combativa de X_I vendrá dada por

$$\beta \frac{x_{10}}{2} = \frac{\alpha}{p} \left(\frac{kx_{20}}{2} \right) \quad (3.33)$$

Sustituyendo en (3.32) para el primer combate

$$\frac{\alpha}{p} \left(\frac{kx_{20}}{2} \right) - \alpha x_{20} = \beta x_{1f1} - \alpha x_{2f1}$$

Si X_2 sale vencedor en los dos enfrentamientos, se supone que X_I acaba en ambos combates completamente eliminado, por tanto, su fuerza combativa al finalizar estos es cero.

$$\frac{\alpha}{p} \left(\frac{kx_{20}}{2} \right) - \alpha x_{20} = -\alpha x_{2f1}$$

$$\alpha x_{20} \left(\frac{k}{2p} - 1 \right) = -\alpha x_{2f1} \quad (3.34)$$

Para que esto se cumpla debe ocurrir que $\frac{k}{2p} - 1 < 0$ y, por tanto

$$k < 2p$$

Finalmente, X_2 ganará el primer combate si esta expresión se cumple.

Para saber si X_2 gana también el segundo enfrentamiento, habrá que hallar el pie de fuerza con el que finalizó el primer combate, x_{2f1} .

Despejando de (3.34)

$$x_{2f1} = \left(1 - \frac{k}{2p} \right) x_{20} \quad (3.35)$$

Reemplazando (3.35) y (3.33) en (3.32)

$$\frac{\alpha}{p} \left(\frac{kx_{20}}{2} \right) - \alpha \left(\left(1 - \frac{k}{2p} \right) x_{20} \right) = \beta x_{1f2} - \alpha x_{2f2}$$

De igual manera

$$\alpha \left(\frac{k}{p} - 1 \right) x_{20} = -\alpha x_{2f2}$$

Llegando a

$$k < p \quad (3.36)$$

Se llega entonces a la conclusión de que, al cumplirse esta desigualdad, X_2 será vencedor del combate y X_I será aniquilado.

▪ **Escenario 2: Al dividir X_I en tres partes iguales**

La fuerza combativa de X_I vendrá dada por

$$\beta \frac{x_{10}}{3} = \frac{\alpha}{p} \left(\frac{kx_{20}}{3} \right) \quad (3.37)$$

De manera análoga a la situación anterior

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{p} \left(\frac{kx_{20}}{3} \right) - \alpha x_{20} &= -\alpha x_{2f1} \\ \alpha x_{20} \left(\frac{k}{3p} - 1 \right) &= -\alpha x_{2f1} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Para que esto se cumpla debe ocurrir que $\frac{k}{3p} - 1 < 0$ y, por tanto

$$k < 3p$$

Finalmente, X_2 ganará el primer combate si esta expresión se cumple.

Para saber si X_2 gana también el segundo enfrentamiento, habrá que hallar el pie de fuerza con el que finalizó el primer combate, x_{2f1} .

$$x_{2f1} = \left(1 - \frac{k}{3p} \right) x_{20} \quad (3.39)$$

Por tanto, siguiendo un procedimiento similar al realizado en el escenario anterior se obtiene

$$\alpha x_{20} \left(\frac{2k}{3p} - 1 \right) = -\alpha x_{2f2} \quad (3.40)$$

Llegando a

$$k < \frac{3p}{2}$$

Se llega entonces a la conclusión de que, al cumplirse esta desigualdad, X_2 será vencedor del segundo combate y comienza el tercero con el siguiente número de efectivos.

$$x_{2f2} = \left(1 - \frac{2k}{3p} \right) x_{20}$$

Al igual que antes y reemplazando en las expresiones correspondientes

$$\alpha x_{20} \left(\frac{k}{p} - 1 \right) = -\alpha x_{2f3}$$

Llegando a

$$k < p \quad (3.41)$$

Por tanto, si se cumple esta condición, se puede afirmar que el ejército X_2 será el ganador de la batalla y X_1 quedará completamente eliminado.

En el análisis de estos dos escenarios se puede observar que independientemente del número de partes iguales en las que el bando X_2 divida a X_1 , siempre que se cumpla la condición de $k < p$, X_2 será el vencedor de la batalla, es decir, siempre que $\beta x_{10} < \alpha x_{20}$.

Sin embargo, esto no se puede dar ya que siempre se va a cumplir $\beta x_{10} > \alpha x_{20}$ debido a que se supuso que el ganador en un único enfrentamiento sería el ejército X_1 .

Como conclusión se puede afirmar entonces que, en enfrentamientos susceptibles de ser modelados

bajo condiciones de fuego en área, no es posible que el ejército perdedor en un solo enfrentamiento pueda ganar si divide al otro bando en partes iguales y lo atacara secuencialmente en varios enfrentamientos. Es decir, no se cumple el principio de concentración.

Demostración:

Si se diera el caso de que el bando X_2 ganara la batalla en el enfrentamiento n -ésimo y en este aniquilara por completo a X_1 después de haberlo dividido en n partes iguales y atacarlo secuencialmente, entonces significaría que en este enfrentamiento n la fuerza combativa inicial de X_2 sería mayor a la de X_1 . Lo que se resume en la expresión siguiente

$$\alpha x_{2f(n-1)} > \frac{\beta x_{1_0}}{n}$$

Se sabe que la cantidad de efectivos inicial de X_2 en este enfrentamiento es igual al pie de fuerza final del enfrentamiento anterior, por ello

$$\alpha x_{2_0} \left(1 - \frac{(n-1)k}{np} \right) > \frac{\beta x_{1_0}}{n}$$

Sabiendo que α , β y n son positivos se llega a

$$\frac{np\alpha x_{2_0} - \alpha x_{2_0}(n-1)k}{np} > \frac{\beta x_{1_0}}{n}$$

$$np\alpha x_{2_0} - \alpha x_{2_0}(n-1)k > p\beta x_{1_0}$$

Sabiendo que $x_{1_0} = kx_{2_0}$ y $\alpha = p\beta$, se tiene

$$\frac{n\alpha^2 x_{2_0}}{\beta} - \alpha x_{1_0} n + \alpha x_{1_0} > \alpha x_{1_0}$$

$$\frac{n\alpha^2 x_{2_0}}{\beta} > \alpha x_{1_0} n$$

$$\alpha x_{2_0} > \beta x_{1_0}$$

Sin embargo, esta expresión no se puede cumplir puesto que no concuerda con el hecho de que X_1 es el ganador en una batalla a un solo enfrentamiento. Dicho esto, se puede afirmar que aún dividiendo el bando X_2 a X_1 en n partes iguales y combatiéndolo en n enfrentamientos secuencialmente, este nunca ganaría la batalla sea cual sea n .

Finalmente, se puede decir que en un combate en circunstancias de un modelo de fuego indirecto o en área, el bando que tenga una mayor fuerza combativa será el bando ganador sea cual sea el número de enfrentamientos que se den durante la batalla.

6 ANÁLISIS DEL CONFLICTO PALESTINO-ISRAELÍ

A continuación, se realizará un análisis de ejemplo basado en el conflicto entre Palestina e Israel donde se introducen nuevas variables que serán comentadas más adelante.

6.1 Modelo de Fuego Directo con Refuerzos

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = P - \alpha x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = Q - \beta x_1 \end{cases}$$

En este caso se han incluido tropas de refuerzo en ambos bandos.

Siendo:

$x_1 = x_1(t)$ el número de individuos de X_1 en un instante de tiempo t .

$x_2 = x_2(t)$ el número de individuos de X_2 en un instante de tiempo t .

P = número de tropas de refuerzo que el bando X_1 puede llevar a la zona de combate en unidad de tiempo.

Q = número de tropas de refuerzo que el bando X_2 puede llevar a la zona de combate en unidad de tiempo.

α = coeficiente de eficiencia del bando X_2 sobre el bando X_1 por unidad de tiempo.

β = coeficiente de eficiencia del bando X_1 sobre el bando X_2 por unidad de tiempo.

Además de los valores iniciales.

x_{10} = número inicial de individuos del bando X_1 .

x_{20} = número inicial de individuos del bando X_2 .

ISRAEL	PALESTINA
$x_{10} = 187.000$	$x_{20} = 96.000$
$P = 752.000$ reservistas	$Q = 10.000$ reservistas
$\beta = 8$	$\alpha = 2$

Tabla 6.1. Comparativa entre Israel y Palestina en Modelo de Fuego Directo con Refuerzos

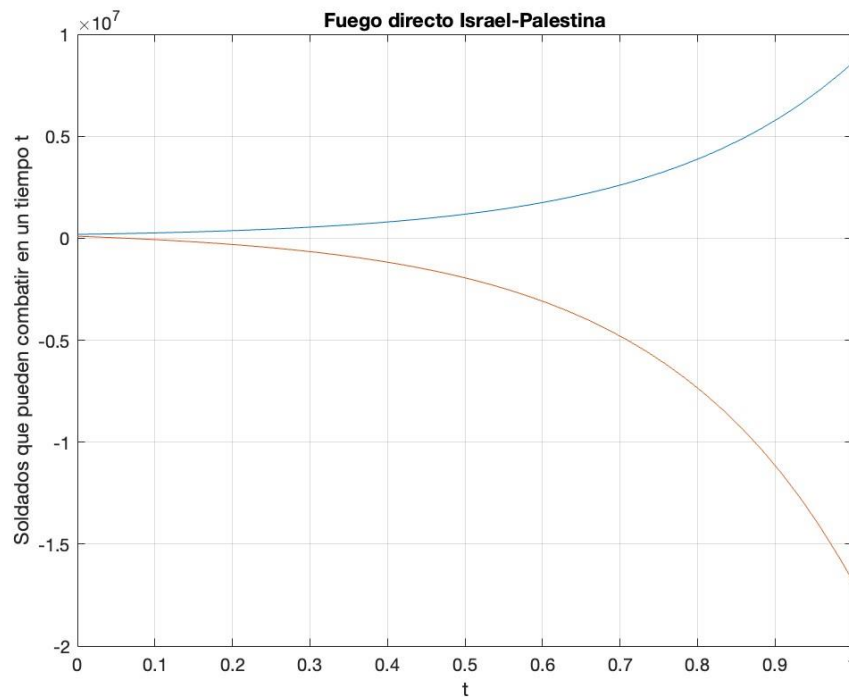


Figura 6.1. Gráfica de fuego directo con refuerzos entre Israel y Palestina

Si trasladamos este ejemplo a un enfrentamiento entre dos bandos, se observa que el vencedor del conflicto sería el bando X_1 , ya que posee más tropas que el otro bando y, además, la tasa de bajas sobre el enemigo por unidad de tiempo de las unidades del bando X_1 sobre el X_2 es mayor. De modo que, respecto a las unidades del bando X_2 , pese a tener refuerzos, se podría afirmar que no serían capaces de ganar este enfrentamiento.

6.2 Modelo de Fuego Directo sin Refuerzos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\beta x_1 \end{array} \right.$$

En este caso no se contempla la inclusión de refuerzos.

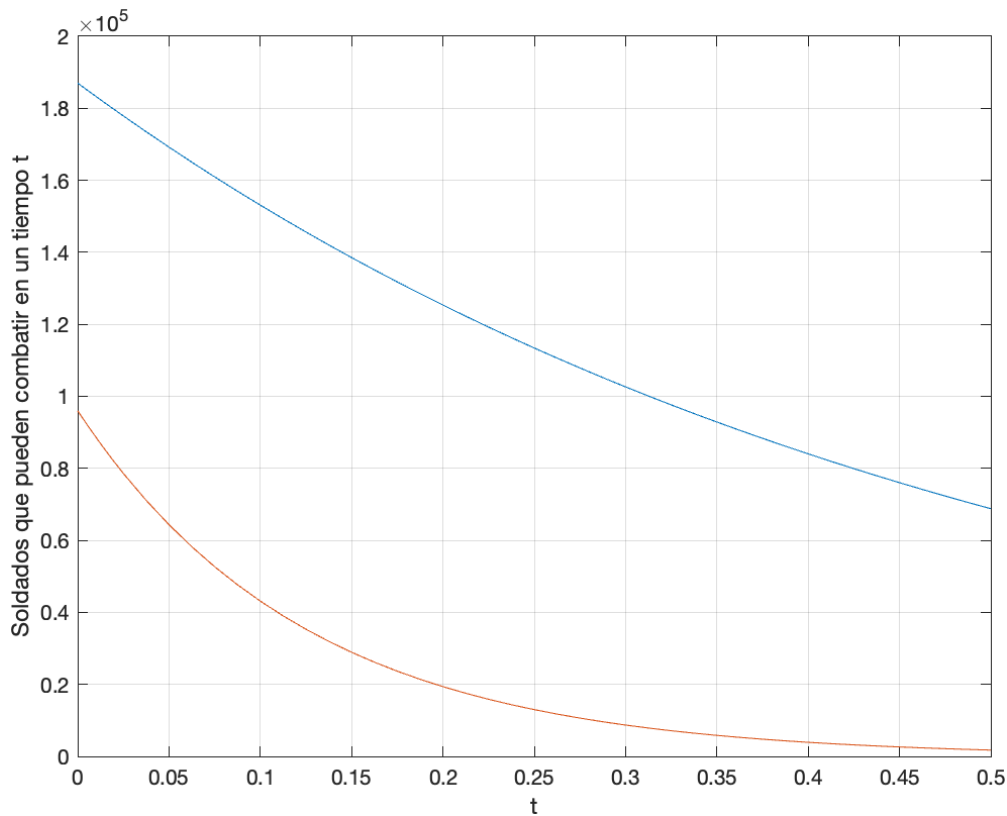


Figura 6.2. Gráfica de fuego directo sin refuerzos entre Israel y Palestina

En este caso Israel tiene bajas importantes pero los palestinos pierden sus efectivos completamente.

6.3 Modelo de Fuego Indirecto o Fuego en Área sin Refuerzos

El segundo sistema por analizar se trata de un modelo no lineal correspondiente a la primera ley de Lanchester. En este caso, se considera un ataque sorpresa, de modo que se desconoce por dónde va a atacar el bando contrario. Al igual que en el anterior, los parámetros α y β (tasas de bajas sobre el enemigo por unidad de tiempo de cada bando) son mayores que cero. El sistema será

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\beta x_1 x_2 \end{cases}$$

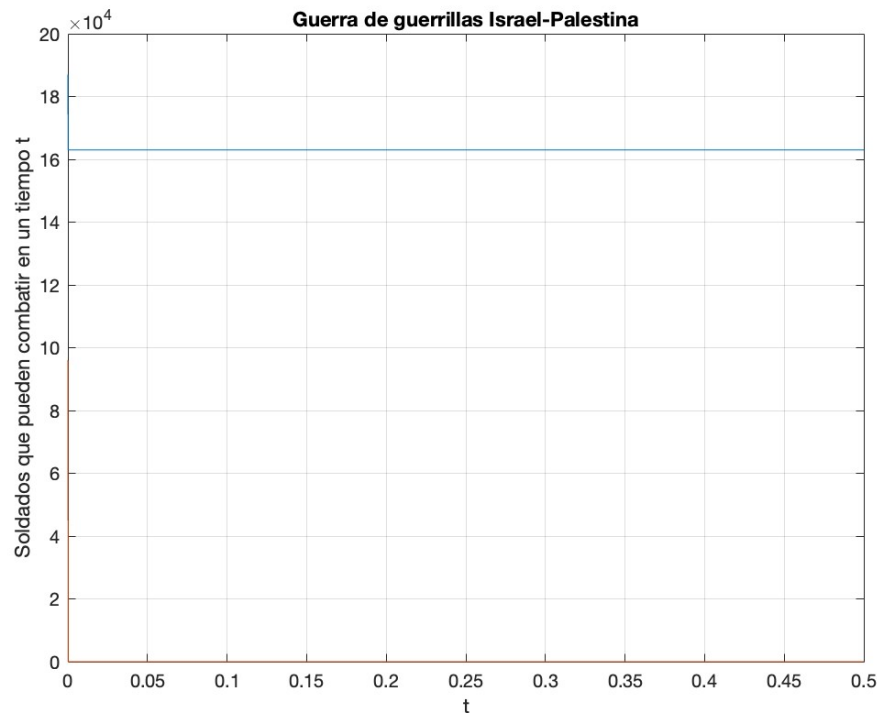


Figura 6.3. Gráfica de fuego indirecto sin refuerzos entre Israel y Palestina

Esta situación aún es peor ya que Israel tiene bien defendidas sus fronteras y sus incursiones causan muchas bajas a Palestina. Por el contrario, Palestina pierde con rapidez sus efectivos.

6.4 Modelo de Fuego Indirecto o Fuego en Área con Refuerzos

En este caso que se estudiará a continuación, se usará el sistema estudiado en el punto anterior con la diferencia de que se le añadirán los parámetros P y Q . Estos nos indican los refuerzos que pueden recibir los bandos X_1 y X_2 en cada unidad de tiempo. En primer lugar, se hará el estudio del diagrama de fase para analizar el comportamiento de la solución y, de esta manera, se pueden hacer predicciones del resultado del conflicto. Además, se añadirá la solución del sistema hallada por método numérico para tener una aproximación de las soluciones mediante un ejemplo. Además, se ha de tener en cuenta que los parámetros del sistema P , Q , α y β son todos mayores que cero. Dicho sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = P - \alpha x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = Q - \beta x_1 x_2 \end{cases}$$

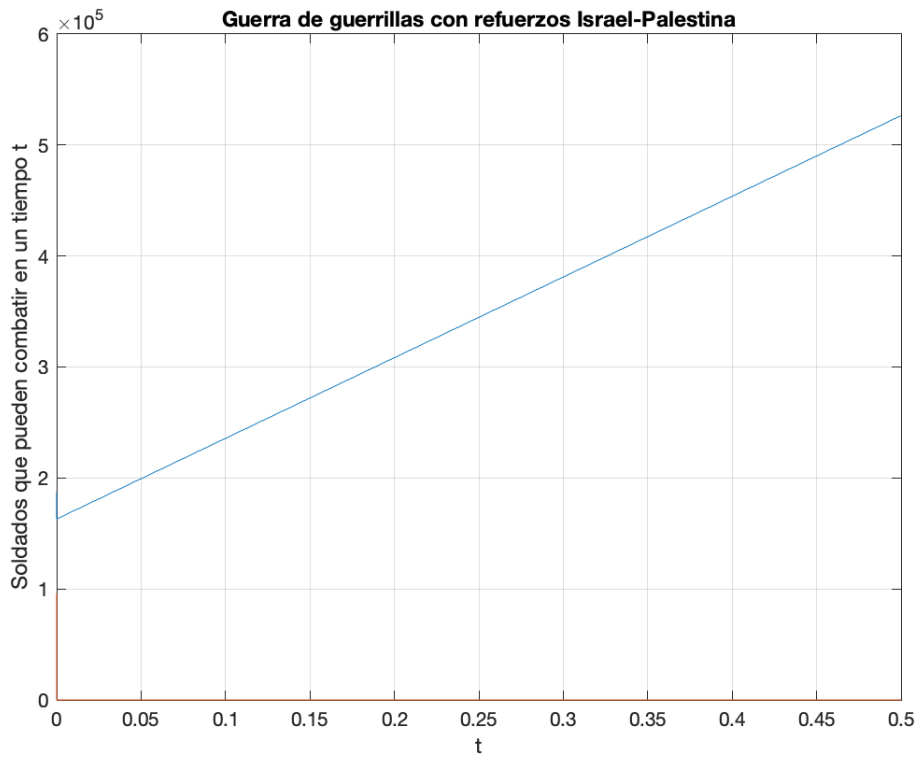


Figura 6.4. Gráfica de fuego indirecto con refuerzos entre Israel y Palestina

La situación es idéntica. Realmente Israel no necesita refuerzos ya que lo que hace, debido a su superioridad, es acumular hombres.

7 CONCLUSIONES

Con la realización de este Trabajo de Fin de Grado, al haber profundizado en un tema como es el de los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales, se han incrementado mis conocimientos acerca de los conceptos relacionados con este tema, que ha sido muy recurrente durante las asignaturas de Matemáticas cursadas durante la carrera.

Asimismo, haber podido incluir en el Marco Matemático todos los conceptos necesarios para el conocimiento de los distintos puntos de interés como por ejemplo el comportamiento de los sistemas alrededor de los puntos de equilibrio, ha hecho que a la hora de entrar en el análisis de dichos conceptos teóricos se haga más fácil interpretar las curvas solución de los modelos.

Otro punto que destacar es el haber conocido la relación que tienen las fuerzas combativas con el resultado final de la batalla, donde en el modelo de Fuego Directo la solución es una función continua y en el modelo de Fuego en Área es un sistema definido a trozos, por lo que se pierde información en el análisis de este último. Además, se ha podido comprobar la importancia de las fuerzas combativas en el principio de concentración propuesto por Lanchester y que lo verifican matemáticamente.

También se ha comprobado la importancia de la exploración y de la observación en el mundo de las Matemáticas al realizar el estudio basado en la exploración gráfica e ir complementándolo con la teoría establecida.

Se ha hecho una simulación sobre el conflicto Israelí-Palestino. Los modelos abordados dan a Israel una aplastante victoria en cualquiera de ellos.

Finalmente, la realización de este trabajo ha hecho dar cuenta, aún más si cabe, de que durante un conflicto armado solo se producen consecuencias negativas respecto a lo social, económico y humano, y que en todos ellos siempre va a haber pérdidas de vidas humanas sea cual sea el vencedor de la guerra.

8 ANEXOS

El objetivo de este apartado no es otro que el de presentar un complemento del marco matemático descrito en el segundo apartado de este trabajo.

Como no toda la información relacionada con los sistemas de ecuaciones diferenciales era necesaria para la comprensión de la teoría de los diferentes modelos de guerra, en este anexo se completará esa información para clarificar los conceptos y las posibles soluciones de los SPALH y los SPANLH.

En primer lugar, se estudiarán los distintos tipos de soluciones de un SPALH.

Clasificación de autovalores

- **Autovalores reales y distintos**

Si los autovalores tienen el mismo signo, el punto de equilibrio es un **nodo**.

Si ambos autovalores son negativos se da un **nodo estable** en el origen, ya que todas las trayectorias van en dirección a este cuando $t \rightarrow \infty$. ($\lambda_1, \lambda_2 < 0$).

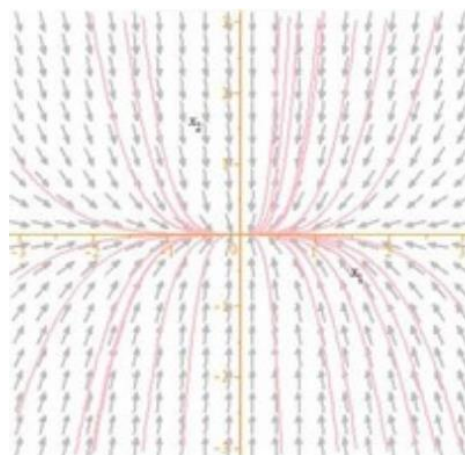


Figura A.1. Gráfica de un nodo estable.

Si por el contrario ambos autovalores son positivos, entonces da lugar a un **nodo inestable** en el origen, ya que todas las trayectorias se alejan de este cuando $t \rightarrow \infty$. ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$).

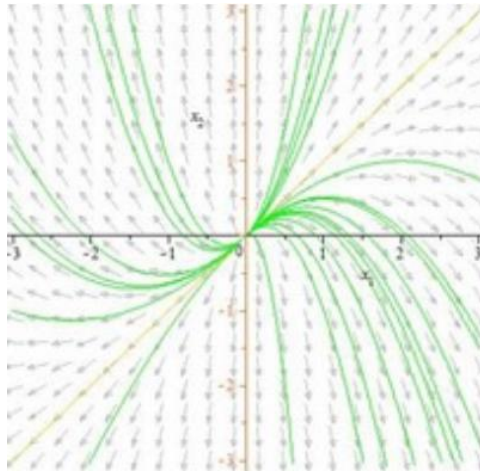


Figura A.2. Gráfica de un nodo inestable

- **Autovalores reales dobles**

Teniendo una matriz $A_{2 \times 2}$ con autovalor λ de multiplicidad algebraica dos y multiplicidad geométrica uno. Con $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}$ autovector asociado a λ , existe $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ llamado **autovector generalizado** de A tal que:

$$(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$$

Para hallar la solución general de un sistema con estas características se hará la siguiente suposición.

Siendo V una matriz de columnas \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 , se tiene: $J = V^{-1}AV$ donde J es la forma canónica de Jordan de A . $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

De esta expresión multiplicando a izquierda y derecha respectivamente por V y V^{-1} se llega a

$$VJV^{-1} = VV^{-1}AVV^{-1}$$

$$VJV^{-1} = (VV^{-1})A(VV^{-1})$$

$$A = VJV^{-1}$$

Con un procedimiento similar al realizado para autovalores reales y distintos se obtiene

$$A^k = VJ^kV^{-1}$$

Y reemplazando en (2.6)

$$e^{tA} = Ve^{tJ}V^{-1}$$

$$e^{tA}V = Ve^{tJ}$$

$$e^{tA}V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

$$e^{tAV} = \begin{pmatrix} v_{11}e^{\lambda t} & v_{11}te^{\lambda t} + v_{12}e^{\lambda t} \\ v_{21}e^{\lambda t} & v_{21}te^{\lambda t} + v_{22}e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Por definición:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{\lambda t} (t\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$$

forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema. Por tanto, la solución de un SPALH con estas condiciones es

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda t} (t\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \quad (\text{A.1})$$

con c_1 y c_2 constantes.

Si $\lambda < 0$, el punto de equilibrio en el origen es un **nodo impropio estable**, todas las trayectorias se dirigen al origen cuando $t \rightarrow \infty$.

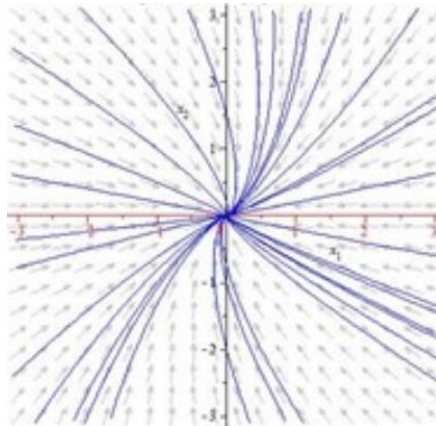


Figura A.3. Gráfica de un nodo impropio estable

Si $\lambda > 0$, el punto de equilibrio en el origen es un **nodo impropio inestable**, todas las trayectorias se alejan del origen cuando $t \rightarrow \infty$.

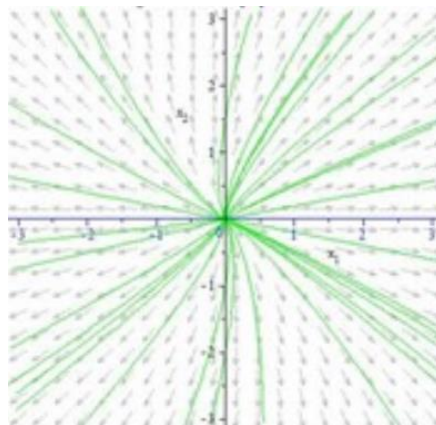


Figura A.4. Gráfica de un nodo impropio inestable

Si por otro lado λ tiene multiplicidad algebraica dos y multiplicidad geométrica dos, A será

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Siendo $a = \lambda$, se tiene que $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ son los autovalores linealmente independientes de λ . Por ello todo vector no nulo será autovector de λ .

Al igual que antes se tiene que

$$e^{tAV} = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$$

$$e^{tAV} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$$

$$e^{tAV} = \begin{pmatrix} v_{11}e^{\lambda t} & v_{12}e^{\lambda t} \\ v_{21}e^{\lambda t} & v_{22}e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Por definición:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}_2$$

forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema. Por tanto, la solución de un SPALH con estas condiciones es

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda t} \mathbf{v}_2 \quad (\text{A.2})$$

con c_1 y c_2 constantes.

Si $\lambda < 0$, el punto de equilibrio en el origen se denomina **punto de estrella estable**, todas las trayectorias se dirigen al origen cuando $t \rightarrow \infty$.

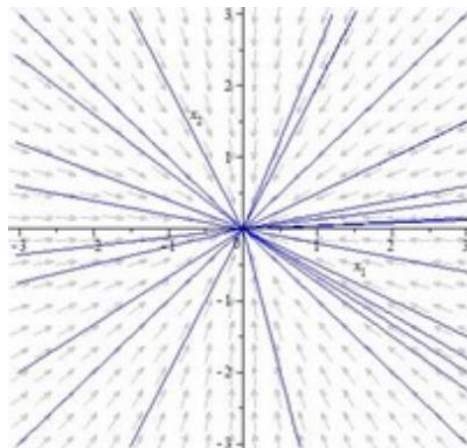


Figura A.5. Gráfica de un punto de estrella estable

Si $\lambda > 0$, el punto de equilibrio en el origen es un **punto de estrella inestable**, todas las trayectorias se alejan del origen cuando $t \rightarrow \infty$.

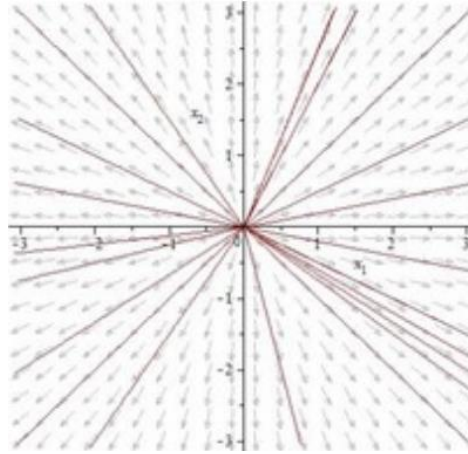


Figura A.6. Gráfica de un punto de estrella inestable.

- **Autovalores complejos conjugados**

Dados los autovalores $\lambda_1 = a + ib$ y $\lambda_2 = a - ib$ de una matriz A , los autovectores asociados son también conjugados. De forma que teniendo $\mathbf{v}_1 = \mathbf{B}_1 + i\mathbf{B}_2$ autovector asociado a λ_1 , se sabe que existe $\mathbf{v}_2 = \mathbf{B}_1 - i\mathbf{B}_2$ autovector asociado a λ_2 , siendo \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 vectores de dos componentes $\in \mathbb{R}^2$.

Demostración:

Por definición de autovector se conoce que

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$$

$$A(\mathbf{B}_1 + i\mathbf{B}_2) = (a + ib)(\mathbf{B}_1 + i\mathbf{B}_2)$$

Aplicando las propiedades básicas de las matemáticas

$$A\mathbf{B}_1 + Ai\mathbf{B}_2 = a\mathbf{B}_1 + ai\mathbf{B}_2 + bi\mathbf{B}_1 - b\mathbf{B}_2$$

$$A\mathbf{B}_1 + Ai\mathbf{B}_2 = (a\mathbf{B}_1 - b\mathbf{B}_2) + i(a\mathbf{B}_2 + b\mathbf{B}_1)$$

Como dos números complejos son iguales solo si sus partes reales e imaginarias son iguales entonces

$$A\mathbf{B}_1 = (a\mathbf{B}_1 - b\mathbf{B}_2) \quad (\text{A.3})$$

$$Ai\mathbf{B}_2 = i(a\mathbf{B}_2 + b\mathbf{B}_1) \quad (\text{A.4})$$

Si se multiplica (A.4) por -1 queda

$$-Ai\mathbf{B}_2 = -i(a\mathbf{B}_2 + b\mathbf{B}_1) \quad (\text{A.5})$$

Sumando las expresiones (A.3) y (A.5)

$$A\mathbf{B}_1 - Ai\mathbf{B}_2 = (a\mathbf{B}_1 - b\mathbf{B}_2) - i(a\mathbf{B}_2 + b\mathbf{B}_1)$$

$$A(\mathbf{B}_1 - i\mathbf{B}_2) = \mathbf{B}_1(a - ib) - \mathbf{B}_2(a - ib)$$

$$A(\mathbf{B}_1 - i\mathbf{B}_2) = (a - ib)(\mathbf{B}_1 - i\mathbf{B}_2)$$

Reemplazando

$$A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$$

Por tanto, se puede afirmar que $\mathbf{v}_2 = \mathbf{B}_1 - i\mathbf{B}_2$ es autovector asociado a λ_2 ya que λ_2 es autovalor de A .

Para hallar la solución general asociada al sistema, se sigue el mismo modelo que para autovalores reales distintos.

Sabiendo que la solución general es del tipo

$$\mathbf{x}_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 \quad y \quad \mathbf{x}_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 \quad (\text{A.6})$$

Los autovalores son de la forma

$$\lambda_1 = a + ib$$

$$\lambda_2 = a - ib$$

Y por tanto se tiene

$$e^{\lambda_1 t} = e^{(a+ib)t}$$

$$e^{\lambda_2 t} = e^{(a-ib)t}$$

$$e^{\lambda_1 t} = e^{at} e^{ibt}$$

$$e^{\lambda_2 t} = \frac{e^{at}}{e^{ibt}}$$

Con la fórmula de Euler se llega a

$$e^{\lambda_1 t} = e^{at} (\cos bt + i \operatorname{sen} bt) \quad (\text{A.7})$$

$$e^{\lambda_2 t} = \frac{e^{at}}{\cos bt + i \operatorname{sen} bt}$$

Si se multiplica por el conjugado la segunda expresión

$$\begin{aligned} e^{\lambda_2 t} &= \frac{e^{at}}{\cos bt + i \operatorname{sen} bt} \frac{(\cos bt - i \operatorname{sen} bt)}{(\cos bt - i \operatorname{sen} bt)} = \\ &= \frac{e^{at} (\cos bt - i \operatorname{sen} bt)}{(\cos bt + i \operatorname{sen} bt)(\cos bt - i \operatorname{sen} bt)} \end{aligned}$$

De aquí se llega a

$$e^{\lambda_2 t} = e^{at} (\cos bt - i \operatorname{sen} bt) \quad (\text{A.8})$$

Si se introduce (A.7) y (A.8) en (A.6)

$$\mathbf{x}_1(t) = c_1 e^{at} (\cos bt + i \operatorname{sen} bt) (\mathbf{B}_1 + i\mathbf{B}_2)$$

$$\mathbf{x}_2(t) = c_2 e^{at} (\cos bt - i \operatorname{sen} bt) (\mathbf{B}_1 - i\mathbf{B}_2)$$

Además, si estas dos expresiones se suman se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t) &= c_1 e^{at} (\cos bt + i \operatorname{sen} bt)(\mathbf{B}_1 + i\mathbf{B}_2) + c_2 e^{at} (\cos bt - i \operatorname{sen} bt)(\mathbf{B}_1 - i\mathbf{B}_2) \\ &= e^{at} \{(c_1 + c_2)[\mathbf{B}_1 \cos bt - \mathbf{B}_2 \operatorname{sen} bt] + i(c_1 - c_2)[\mathbf{B}_1 \operatorname{sen} bt + \mathbf{B}_2 \cos bt]\} \end{aligned}$$

Finalmente, la solución general cuando la matriz tiene autovalores complejos queda de la forma

$$\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t) = k_1 e^{at} (\mathbf{B}_1 \cos bt - \mathbf{B}_2 \operatorname{sen} bt) + k_2 e^{at} (\mathbf{B}_1 \operatorname{sen} bt + \mathbf{B}_2 \cos bt)$$

Donde se ha tomado $k_1 = (c_1 + c_2)$ y $k_2 = i(c_1 - c_2)$.

Respecto a las representaciones gráficas de las distintas posibles soluciones se tiene que:

Si la parte real de los autovalores es distinta de cero ($a \neq 0$) el punto de equilibrio se denomina **foco** o **punto espiral**.

Si $a < 0$, el punto de equilibrio es un **foco estable**, todas las trayectorias se dirigen al origen cuando $t \rightarrow \infty$.

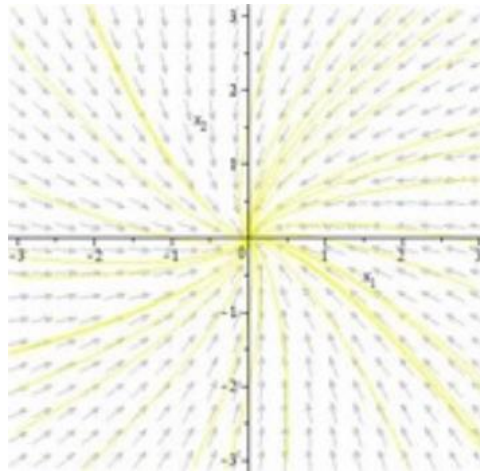


Figura A.7. Gráfica de un punto espiral estable

Si $a > 0$, el punto de equilibrio es un **foco inestable**, todas las trayectorias se alejan del origen cuando $t \rightarrow \infty$.

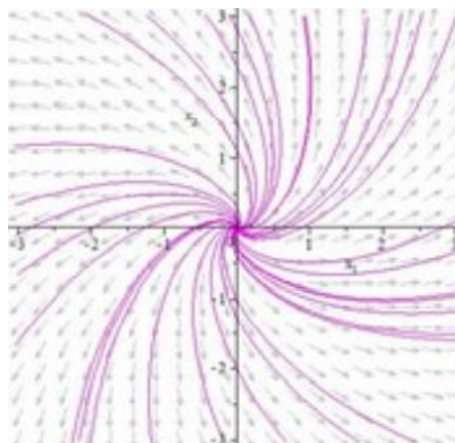


Figura A.8. Gráfica de un punto espiral inestable.

Si la parte real de los autovalores es igual a cero ($a = 0$) el punto de equilibrio se denomina **centro**.

Las trayectorias en este caso son curvas cerradas que rodean al origen, no tienden a el cuando $t \rightarrow \infty$ o $t \rightarrow -\infty$. El punto de equilibrio es estable.

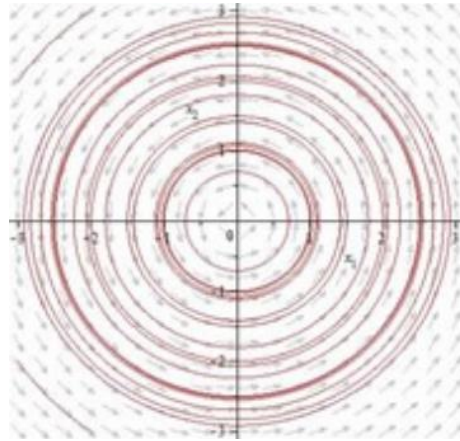


Figura A.9. Gráfica de un centro.

Otra forma de estudiar la estabilidad del sistema es a través de la traza $tr(A)$ y el determinante $det(A)$ de la matriz de coeficientes constantes A .

Siendo A una matriz de orden dos, y el sistema $x' = Ax$ se tiene que:

- Si $det(A) < 0$ o $tr(A) > 0$, el sistema es inestable.
- Si $det(A) > 0$ y $tr(A) < 0$, el sistema es asintóticamente estable.
- Si $det(A) = 0$ y $tr(A) < 0$ o $det(A) > 0$ y $tr(A) = 0$, el sistema es estable pero no asintóticamente estable.
- Si $det(A) = 0$ y $tr(A) = 0$, el sistema puede ser estable o inestable.

Sistema Plano Autónomo No Lineal Homogéneo

Como se afirmó en el capítulo **4. Marco Matemático**, no se pueden analizar las soluciones de los SPANLH al no ser estos lineales. Sin embargo, se puede desarrollar el comportamiento de dichas soluciones en los puntos de equilibrio del sistema haciendo uso de la teoría de los SPALH y linealizando el SPANLH en esos puntos.

En primer lugar, se definirán los conceptos necesarios para el análisis de las soluciones de un SPANLH.

Definición: Se dice que un sistema plano autónomo es no lineal si al menos una de las funciones f_1 y f_2 del sistema es no lineal en las variables x_1 y x_2 .

El objetivo principal de linealizar un SPANLH es conseguir un sistema lineal que permita conocer las soluciones del sistema no lineal en sus puntos de equilibrio aislados, de manera que las soluciones del sistema no lineal y del sistema una vez linealizado sean muy cercanas entre sí.

En primer lugar, se hallarán los puntos de equilibrio, tanto el origen como aquellos que no pertenezcan al origen.

Los puntos de equilibrio que no sean el origen se tendrán que trasladar al origen teniendo en cuenta las variables que se muestran a continuación.

$$u_1 = x_1 - a \quad (\text{A.9})$$

$$u_2 = x_2 - b \quad (\text{A.10})$$

Siendo (a, b) el punto de equilibrio distinto del origen.

Derivando respecto del tiempo se tiene que

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{d(x_1 - a)}{dt}$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{d(x_2 - b)}{dt}$$

Como la derivada de una constante es cero y la derivada de una diferencia es la diferencia de las derivadas con (A.9) y (A.10) se llega a

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt}$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{dx_2}{dt}$$

Despejando de (A.9) y (A.10)

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{du_1}{dt} = f_1(u_1 + a, u_2 + b)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{du_2}{dt} = f_2(u_1 + a, u_2 + b) \quad (\text{A.11})$$

Este sistema tendrá un punto de equilibrio en el origen.

Ahora es necesario recordar que la linealización de una función vectorial $f(x, y)$ en un punto (x_0, y_0) viene definida por:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Particularizando (A.11) en la anterior expresión, siendo el origen $(0, 0)$ el punto de equilibrio se obtiene:

$$f_1(u_1 + a, u_2 + b) = f_1(0, 0) + \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(0, 0)(u_1 - 0) + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(0, 0)(u_2 - 0)$$

$$f_2(u_1 + a, u_2 + b) = f_2(0, 0) + \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(0, 0)(u_1 - 0) + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(0, 0)(u_2 - 0)$$

Como $(0, 0)$ es el punto de equilibrio, entonces

$$f_1(u_1 + a, u_2 + b) = \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(0, 0) u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(0, 0) u_2$$

$$f_2(u_1 + a, u_2 + b) = \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(0, 0) u_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(0, 0) u_2$$

Finalmente, el sistema ya linealizado en ese punto sería

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(0,0) u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(0,0) u_2$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(0,0) u_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(0,0) u_2$$

Por tanto, ya se puede analizar el comportamiento de las soluciones en el punto de equilibrio aplicando la teoría de los Sistemas Planos Lineales.

Se toma

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad Df(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(0,0) \end{pmatrix}$$

Y queda el sistema linealizado escrito en forma matricial de la siguiente manera

$$\mathbf{u}' = Df(0,0)\mathbf{u}$$

Donde la matriz de coeficientes A obtenida anteriormente es la Matriz Jacobiana.

Finalmente es necesario saber que el análisis de las soluciones del sistema una vez linealizado se realiza a través de la clasificación de los puntos de equilibrio desarrollados en el anterior apartado, además de la necesidad de conocer los casos donde las soluciones se comportan de manera distinta cerca del punto de equilibrio.

REFERENCIAS

- [1] T. Apóstol, «Sistema de Ecuaciones Diferenciales,» de *Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades*, vol. 2, Vélez, 2002, pp. 244-273. de <http://www.webdelprofesor.ula.ve/nucleotrujillo/armandom/apostolv2.pdf>.
- [2] P. D. R. L. y H. G. R. Blanchard, «Sistemas Lineales,» de *Ecuaciones diferenciales*, México, International Thomson Editores S.A., 1998, p. 258.
- [3] S. I. y F. J. J. Grossman, «Forma Canónica de Jordan,» de *Álgebra lineal*, México, McGraw-Hill., 2012, pp. 615,617.
- [4] F. W. Lanchester, « The Principle of Concentration. The N-Square Law.,» de *Aircraft in Warfare the Dawn of the Fourth Arm.*, Londres, Inglaterra., 1916. de <https://archive.org/details/aircraftinwarfar00lancrich/page/n23/mode/2up>
- [5] J. W. R. Lepingwell, «The Laws of Combat? Lanchester Reexamined.,» de *International Security*, 12, 1987, pp. 89-134.
- [6] J. G. Taylor, Lanchester-Type Models of Warfare., 1980. de <https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a090842.pdf>
- [7] J. L. Romero, Simulación y Modelos, El Tigre, Venezuela, 2011.
- [8] G. H. Ochoa, Aplicación del Modelo de Lanchester de Fuego Dirigido en los enfrentamientos del Estado en Contra del Narcotráfico, Universidad Nacional Autónoma de México, 2009. de ochoavilla.unam.mx
- [9] C. A. Pinedo, Caracterización de la guerra asimétrica en el contexto de las relaciones internacionales, Universidad Militar Nueva Granada, 2013. de <http://hdl.handle.net/10654/9376>