

# Trabajo Fin de Grado Grado en Ingeniería Aeroespacial

## Estudio numérico de la influencia de la convección de Rayleigh-Bernard en flujos giratorios no confinados

Autor: José Juan Gerada Gañán

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

**Dpto. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2022





Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería Aeroespacial

**Estudio numérico de la influencia de la  
convección de Rayleigh-Bernard en flujos  
giratorios no confinados**

Autor:

José Juan Gerada Gañán

Tutor:

Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Profesor Titular

Dpto. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2022



Trabajo Fin de Grado: Estudio numérico de la influencia de la convección de Rayleigh-Bernard en flujos giratorios no confinados

Autor: José Juan Gerada Gañán  
Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:



# Agradecimientos

---

**E**ste trabajo supone el fin de una etapa, a la par que el comienzo de otra. Estos cuatro años que he durado mi estancia en la Universidad de Sevilla, han sido cuatro años de mejora y aprendizaje, de superar retos y de no darme por vencido. Agradecer a mi familia, siempre han sido el motivo por el que he dado todo y más. A mis amigos, por hacer más llevaderas todas las responsabilidades que acarrea la vida del estudiante.

Con respecto a la realización de este trabajo, estoy enormemente agradecido a mi tutor, Miguel Pérez-Saborid, el cual ha estado resolviendo mis dudas desde el momento en el que comencé a realizarlo, así como transmitiéndome su pasión por el problema objeto del estudio.

A todos ellos les dedico este trabajo.





# Resumen

---

**E**l fenómeno físico por el cual se produce la rotura de un vórtice es de gran importancia en diferentes situaciones. Ha sido objeto de estudio desde hace aproximadamente 60 años. Para abordarlo, en este trabajo se afronta primero mediante la resolución de otro fenómeno físico conocido como penacho térmico, que sería análogo al vórtice si tuviera flujo giratorio. Se estudia este fenómeno producido por la existencia de un foco inmerso en el fluido y por una placa caliente, tanto para el enfoque bidimensional como axisimétrico. A continuación se implementa el vórtice mecánico y se estudian los resultados obtenidos, comparándolos con los obtenidos de la literatura. En este trabajo se tiene en cuenta la rotura de tipo burbuja. Finalmente, se le introduce la ecuación de la energía, modelando el aporte de calor en el flujo giratorio mediante un foco. A lo largo de todo el documento se compara el coste computacional, así como la eficiencia, entre el método de diferencias finitas y el método de líneas.



# Abstract

---

The physical phenomenon by which a vortex breakdown occurs is of great importance in different situations. It has been the subject of many investigations for 60 years. To address this, this work is first approached by solving another physical phenomenon known as thermal plume, which would be analogous to the vortex if it had rotating flow. This phenomenon, which is produced by the existence of a focus immersed in the fluid and by a hot plate, is studied, both for the two-dimensional and axisymmetric approach. Then the mechanical vortex is implemented and the results obtained are studied, comparing them with those obtained from the literature. Finally, the energy equation is introduced, modeling the input of heat in the rotating flow by means of a focus. Throughout the whole document, the computational cost as well as efficiency is compared between the finite difference method and the line method.



# Índice

---

<i>Resumen</i>	III
<i>Abstract</i>	V
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Concepto de capa límite y flujo giratorio.	1
1.2 Estructura del trabajo.	4
<b>2 Métodos numéricos empleados.</b>	<b>5</b>
2.1 Diferencias finitas.	5
2.2 Método de líneas.	10
<b>3 Penachos térmicos.</b>	<b>13</b>
3.1 Caso bidimensional	15
3.1.1 Foco de calor.	18
3.1.2 Placa caliente.	23
3.2 Caso axisimétrico.	27
3.2.1 Foco de calor.	29
3.2.2 Placa caliente.	32
<b>4 Vórtice mecánico.</b>	<b>35</b>
<b>5 Vórtice térmico.</b>	<b>45</b>
<b>6 Conclusiones y líneas futuras.</b>	<b>51</b>
<b>Apéndice A Programa para la resolución del vórtice térmico por diferencias finitas.</b>	<b>53</b>
<b>Apéndice B Programa para la resolución del vórtice térmico por el método de líneas.</b>	<b>55</b>
<i>Bibliografía</i>	57



# 1 Introducción

---

## 1.1 Concepto de capa límite y flujo giratorio.

Cuando un objeto se mueve a través de un fluido, o un fluido se mueve sobrepasando un objeto, las moléculas cercanas al objeto son perturbadas y se mueven alrededor de este, generando lo que se conocen como las "fuerzas aerodinámicas" entre el objeto y el fluido. La magnitud de estas fuerzas dependen de la geometría del objeto, la velocidad, la masa del fluido que está en contacto y de otras dos importantes propiedades del fluido: la viscosidad y la compresibilidad.

Las fuerzas aerodinámicas dependen de una manera muy compleja de la viscosidad de un fluido. Cuando un fluido se mueve alrededor de un objeto, las moléculas que están en contacto con la superficie se pegan a ella. Las moléculas que están más próximas a la superficie sin estar en contacto, se frenan debido a la colisión con las moléculas pegadas a la superficie. Este fenómeno ocurre sucesivamente conforme nos alejamos de la superficie del objeto, frenándose las moléculas, pero reduciéndose el efecto de frenado a medida que nos alejamos. Esto genera una fina capa en el fluido, en el que la velocidad varía de un valor relativo nulo en la superficie hasta el valor de la velocidad del flujo libre, en el que no se aprecia la influencia del objeto. Esta fina capa se conoce como capa límite.

El concepto de capa límite fue primero introducido por Ludwig Prandtl en un artículo que presentó en un congreso celebrado en Heidelberg en 1904, debido a que las ecuaciones generales de los fluidos ya eran conocidas pero las soluciones obtenidas no concordaban con las observaciones. Prandtl fue el primero en darse cuenta de que el peso relativo entre las fuerzas de inercia y las de viscosidad variaban desde una pequeña zona muy cercana a la superficie a una región más lejana a ella, es decir, que cerca de los sólidos la viscosidad siempre es importante, por muy pequeña que sea.

Conocer los detalles del flujo interior a la capa límite es muy importante para muchos problemas de la aerodinámica, tales como el desprendimiento de la misma, la resistencia o la transferencia de calor.

Este concepto puede aplicarse para diversos problemas, tales como penachos térmicos, chorros o vórtices, siempre que sus núcleos puedan considerarse esbeltos. De igual manera que para la capa límite de un perfil las partículas se frenan en cadena debido a la viscosidad, para estos problemas las partículas colindantes al núcleo se ven afectadas por el movimiento de éste, que viene impuesto, ya sea por un campo de temperaturas, de velocidades, etc.

Los resultados obtenidos frutos del estudio de este tipo de flujos pueden utilizarse para problemas más complejos. Por ejemplo, con objeto de optimizar la eficiencia aerodinámica de los perfiles aerodinámicos, se busca maximizar la longitud en la que la capa límite se mantiene en régimen laminar. Para esto, se utilizan ranuras de succión o soplado, que pueden ser modeladas numéricamente

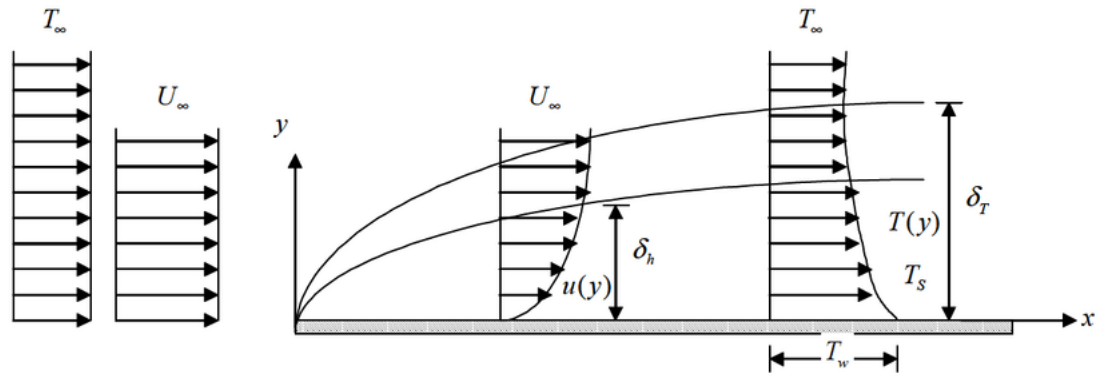


Figura 1.1 Capa límite sobre una placa plana.

como un chorro en el perfil, aportando cantidad de movimiento al flujo que ya circula por el exterior.

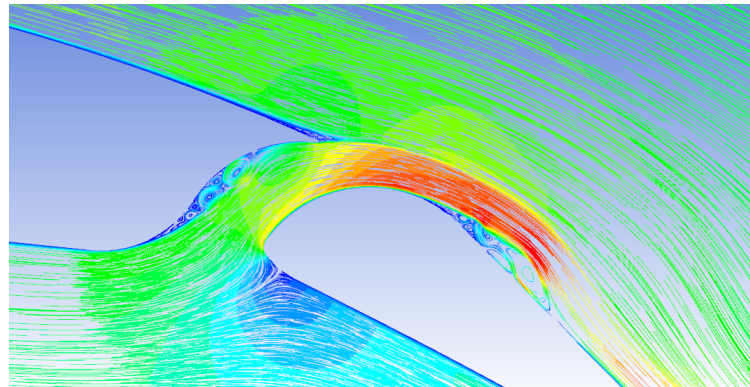


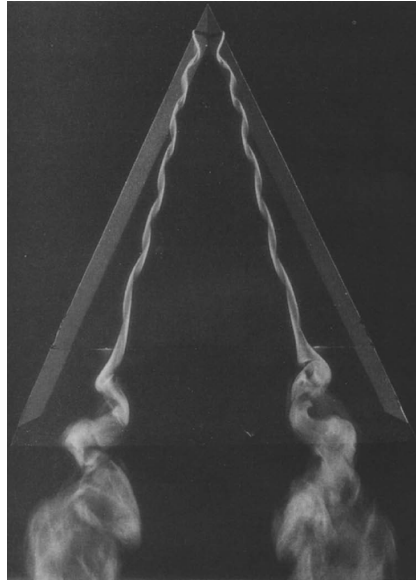
Figura 1.2 Aerodinámica en un flap ranurado.

Por otro lado, los vórtices se forman debido a la separación de la capa límite en flujos tridimensionales, ya que la fina capa de flujo viscoso adherida a la pared se "enrolla", dando lugar a una repentina expansión de este flujo confinado en una fina capa sobre la pared hacia el flujo exterior. Éstos aparecen en diversidad de situaciones, tanto dentro del campo de la aeronáutica como fuera de éste. Por ejemplo, en un ala en flecha o un misil con una alta incidencia, en un chorro que penetra en una corriente transversal o en una cámara de combustión.

Los flujos giratorios a grandes números de Reynolds tienen un gran número de características que son objeto de estudio. Una de ellas, que es objeto de este trabajo, es conocida como *Vortex Breakdown*, que se corresponde por un cambio estructural repentino del flujo en el núcleo del vórtice. Este problema es de gran importancia en muchas situaciones y, por tanto, su predicción y control. En consecuencia, este problema ha sido objeto de estudio desde aproximadamente 1950, tanto de manera experimental como teórica. Estos experimentos se han ejecutado en un tubo, donde el vórtice está confinado, así como en un ambiente donde puede considerarse que el vórtice está libre. La evidencia de los experimentos muestra la existencia de un punto de remanso en la línea central de la estructura del vórtice, lo que es una característica distintiva de la rotura. En la figura 1.3 podemos observar el cambio estructural que sufre el flujo mencionado anteriormente.

Esta rotura, en el caso de alas en flecha, ocurre cuando la incidencia es elevada. La rotura del vórtice principal que viene del vértice del ala ocurre en el propio ala, afectando a la aerodinámica de la misma. Por otro lado, como el *breakdown* no suele producirse en el mismo punto de cada

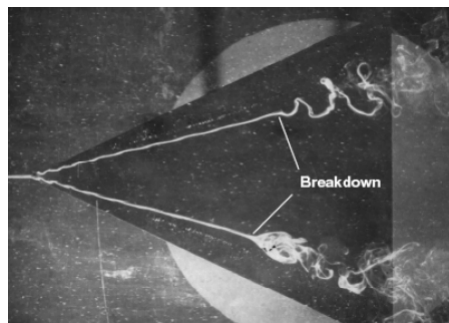




**Figura 1.3** Visualización del *vortex breakdown* en un túnel de agua en un ala delta.

semiala, puede generar una asimetría en las fuerzas generadas que, en consecuencia, pueden generar un momento de alabeo no deseado. El mismo tipo de problema puede afectar al fuselaje de un misil o de una aeronave. Este problema puede sumarse al fenómeno conocido como *wing rock*, por el cual la aeronave tiene un momento de guiñada no deseado.

Realmente, según diversos estudios, parecen existir diferentes tipos de rotura del vórtice, entre las que están las roturas tipo *bubble*, que son las que se van a estudiar en este trabajo, y cuya estructura en la rotura tiene una región de separación casi simétrica, lo que hace que se asemeje a una burbuja. De ahí su nombre. Otro tipo de rotura sería la de tipo espiral (*spiral*), aunque se han llegado a clasificar hasta siete tipos de roturas diferentes. En la figura 1.4 podemos observar en la parte superior una rotura de tipo espiral y en la inferior una rotura tipo *bubble*.



**Figura 1.4** *Vortex breakdown* asimétrico en un ala delta.

Entre la gran cantidad de trabajos sobre la rotura de vórtices libres, cabe destacar el llevado a cabo por Long (1961). En él, utilizó la aproximación cuasi-cilíndrica de las ecuaciones de Navier-Stokes para describir el movimiento de un fluido giratorio, irrotacional y simétrico. Como resultado de la integración numérica, Long caracterizó el comportamiento del vórtice en función del parámetro  $M$  (*flow force*), del que hablaremos en detalle más adelante.

También es de gran relevancia para este estudio el trabajo desarrollado por Burggraf y Foster (1997), quienes resolvieron numéricamente la aproximación cuasi-cilíndrica de las ecuaciones de Navier-Stokes utilizando unas condiciones iniciales para los campos de velocidades. Los resultados

que se obtuvieron respaldaron los resultados obtenidos por Long, demostrando que para un valor del parámetro  $M$  menor a uno crítico se producía la rotura del vórtice.

## **1.2 Estructura del trabajo.**

En este trabajo se va a estudiar el movimiento de un fluido libre en el que se presenta un gradiente de temperatura.

De manera global, van a presentarse dos problemas claramente diferenciados, el de un penacho térmico y el de un vórtice. La manera de abordarlos será obtener la evolución del flujo no giratorio e introducirle el giro. A lo largo de todo el proceso, irán presentándose algunos resultados así como la influencia que la variación de ciertos parámetros tienen en ellos.

En el segundo capítulo se presentan los diferentes métodos numéricos empleados para la resolución de los problemas, el método de las diferencias finitas y el método de líneas.

En el tercer capítulo se presenta una breve introducción al fenómeno físico conocido como penachos térmicos y se introducen las hipótesis simplificadoras. Este capítulo se divide en dos bloques principales, el caso bidimensional y el caso axisimétrico, en el que se presentan las ecuaciones que rigen el problema y se adimensionalizan. A continuación se aplican las condiciones de contorno que modelan dos problemas diferentes, uno en el que hay un foco inmerso en el fluido y otro en el que hay una placa caliente. Finalmente, se muestran los resultados obtenidos para cada caso, así como la influencia de algunos parámetros en la evolución de las magnitudes.

En el cuarto capítulo, se introducen las ecuaciones que rigen el movimiento de un vórtice mecánico, así como las condiciones de contorno. Se adimensionalizan estas ecuaciones definiendo un parámetro que controlará la estructura del vórtice. Finalmente se muestran algunos resultados del campo de velocidades y la influencia de este parámetro en el punto de rotura del vórtice.

En el quinto capítulo se introduce la ecuación de la energía al vórtice mecánico y se estudia la influencia de la temperatura en el punto de rotura de un vórtice a través de un foco. Se adimensionalizan las ecuaciones utilizando las variables adimensionales definidas en [1] y se presentan los resultados para diferentes valores de los parámetros.

Finalmente, en el sexto capítulo va a realizarse una conclusión, así como un análisis de algunas líneas futuras que pueden surgir a raíz de este trabajo.

## 2 Métodos numéricos empleados.

---

La gran mayoría de los modelos matemáticos de los sistemas continuos se basan en ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Ejemplo de ello son las ecuaciones de Navier-Stokes, a las cuales acompañan de manera general valores iniciales y en la frontera (lo que se conocen como condiciones de contorno). Las ecuaciones de Navier-Stokes son ecuaciones diferenciales parciales no lineales de segundo orden, por lo que, menos para algunos casos muy específicos, no tiene solución analítica. Es por ello que se recurre a los métodos numéricos para su resolución, tales como el método de las diferencias finitas o el método de líneas.

En este capítulo se presentarán los dos métodos numéricos utilizados para la resolución de las ecuaciones que gobiernan los problemas que son objeto del estudio. Cabe destacar que en la serie de trabajos en las que se enmarca el mismo, el método utilizado ha sido el de las diferencias finitas. Debido a una diferencia apreciable de las soluciones obtenidas en este trabajo con las soluciones que constan en la literatura, se decidió implementar un método de integración diferente, con el objetivo de aumentar la precisión de los cálculos, el método de líneas. Ambos métodos son explicados en detalle a continuación.

### 2.1 Diferencias finitas.

El método de las diferencias finitas consiste en aproximar las derivadas parciales por expresiones algebraicas con los valores de la variable dependiente en un número finito de puntos escogidos en el dominio. Este número de puntos forma lo que se conoce como el "mallado" del dominio, y pueden ser equidistantes o variar la distancia que hay entre ellos (mallado variable). Esta aproximación da lugar a un número de ecuaciones algebraicas que es equivalente a las ecuaciones diferenciales que describían el problema, en términos de los valores de las variables dependientes en los puntos seleccionados, que se convierten en las incógnitas. La solución del sistema de ecuaciones permite obtener una aproximación de la solución en cada punto seleccionado de la malla.

La principal ventaja de este método es que las ecuaciones algebraicas que resultan de aplicar la aproximación, constituyen un sistema que puede ser expresado de forma matricial de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} * \mathbf{f} = \mathbf{r}$$

donde la matriz  $\mathbf{A}$  es tridiagonal, y esto permite aplicar un algoritmo muy eficiente basado en el procedimiento de la reducción de Gauss. Solo se almacenan los términos no nulos de la matriz pertenecientes a la diagonal principal, la superior y la inferior. Si la matriz  $\mathbf{A}$  tuviese dimensiones  $N \times N$ , resolver el sistema de esta manera requeriría unas  $6N$  operaciones, mientras que resolverlo de manera convencional supondría unas  $N^3$  operaciones.

Para ilustrar el método, considérese la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + p(\xi) \frac{\partial f}{\partial \xi} + q(\xi) f = r(\xi) \quad (2.1)$$

donde las funciones  $p(\xi)$ ,  $q(\xi)$  y  $r(\xi)$  son conocidas. En la integración numérica de (2.1), sujeta a las condiciones de contorno  $f(\xi_{min}) = f_a$  y  $f(\xi_{max}) = f_b$  en un intervalo  $\xi_{min} \leq \xi \leq \xi_{max}$ , nos conformamos con calcular los valores  $f_1 \equiv f_a, \dots, f_j, \dots, f_{N_\xi} = f_b$  en  $N_\xi$  puntos discretos introducidos en el intervalo y que, por simplicidad, se supondrán equiespaciados una distancia  $h$ , donde:

$$h = \frac{\xi_{max} - \xi_{min}}{N_\xi - 1}$$

Los puntos  $\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_{N_\xi}$  constituyen el mallado para la resolución del problema. Como vamos a calcular los valores de la función en los puntos del mallado, se podría calcular su valor en puntos no pertenecientes al mallado mediante interpolación.

Una de las claves de este método es que los valores de la primera y segunda derivada de la función en los diferentes puntos internos del mallado pueden escribirse realizando una aproximación conocida como diferencias finitas centradas:

$$\left. \frac{df}{d\xi} \right|_j = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h} \quad \text{y} \quad \left. \frac{d^2f}{d\xi^2} \right|_j = \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{h^2} \quad (2.2)$$

que puede escribirse de forma matricial (compacta) como:

$$j \rightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \left. \frac{df}{d\xi} \right|_j \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2h} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2h} & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{2h} & 0 & \frac{1}{2h} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2h} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{2h} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_{N_\xi} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$j \rightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \left. \frac{d^2f}{d\xi^2} \right|_j \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_{N_\xi} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Se tiene entonces que:

$$\vec{\frac{df}{d\xi}} = D_1 * \vec{f} \quad \text{y} \quad \vec{\frac{d^2f}{d\xi^2}} = D_2 * \vec{f} \quad (2.5)$$

donde  $D_1$  y  $D_2$  son las matrices introducidas en (2.3) y (2.4) para calcular la primera y segunda respectivamente. Es preciso mencionar que utilizando el valor de la función en más puntos del mallado podría conseguirse una precisión mayor para las derivadas, aunque esto aumentaría la complejidad de la implementación, y como buscamos utilizar un método numérico sencillo, utilizaremos las mostradas en (2.2).

Para los extremos, en caso de que la condición de contorno viniese impuesta a través de un valor de la derivada (por lo que se tendría que hacer uso de un punto externo al mallado), la aproximación vendría dada por diferencias finitas hacia delante (2.6) o hacia atrás (2.7), de manera que:

$$\left. \frac{df}{d\xi} \right|_1 = \frac{f_2 - f_1}{h} \tag{2.6}$$

$$\left. \frac{df}{d\xi} \right|_{N_\xi} = \frac{f_{N_\xi} - f_{N_\xi-1}}{h} \tag{2.7}$$

Asimismo, el término  $q \cdot f$  evaluado en cada punto del mallado  $\xi_j$  puede escribirse de manera compacta como:

$$\begin{pmatrix} q_1 f_1 \\ \vdots \\ q_j f_j \\ \vdots \\ q_{N_\xi} f_{N_\xi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & q_j & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & q_{N_\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_{N_\xi} \end{bmatrix} = M_q * \vec{f} \tag{2.8}$$

y de la misma manera podemos escribir el término  $p_j \cdot \left. \frac{df}{d\xi} \right|_j$ :

$$\begin{pmatrix} p_1 \left. \frac{df}{d\xi} \right|_1 \\ \vdots \\ p_j \left. \frac{df}{d\xi} \right|_j \\ \vdots \\ p_{N_\xi} \left. \frac{df}{d\xi} \right|_{N_\xi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & p_j & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & p_{N_\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left. \frac{df}{d\xi} \right|_1 \\ \vdots \\ \left. \frac{df}{d\xi} \right|_j \\ \vdots \\ \left. \frac{df}{d\xi} \right|_{N_\xi} \end{bmatrix} = M_p * D_1 * \vec{f} \tag{2.9}$$

Por tanto, las ecuaciones en (2.1) pueden reescribirse, haciendo uso de (2.3) y (2.4) como:

$$D_2 * \vec{f} + M_p * D_1 * \vec{f} + M_q * \vec{f} = \vec{r}$$

que a su vez es equivalente a:

$$[D_2 + M_p * D_1 + M_q] * \vec{f} = \vec{r}$$

lo que equivale a un sistema lineal algebraico  $A * \vec{f} = \vec{r}$ , donde  $A = D_2 + M_p * D_1 + M_q$ .

El último paso a realizar para terminar este método es imponer las condiciones de contorno. Para ello, el proceso consiste en modificar la primera y última línea tanto de la matriz del sistema A como del vector de términos independientes r. Hecho esto, ya se podrían obtener los valores de  $\vec{f}$  en los puntos del mallado.

Esto se puede extender fácilmente a las dos dimensiones. Para ello, se supone un campo mallado uniformemente en X-Y como el de la figura 2.1.

Considérese las ecuaciones que gobiernan el flujo sobre una placa plana:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \tag{2.10}$$

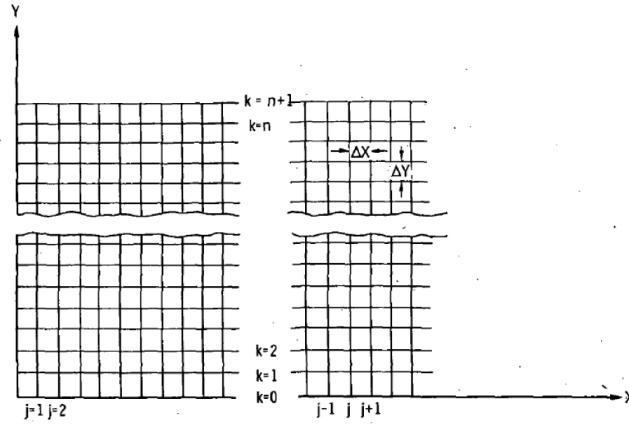


Figura 2.1 Mallado en X-Y, tomado de [3].

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad (2.11)$$

Para resolverlas, lo primero es utilizar las siguientes variables adimensionales:

$$x = L\xi \quad (2.12)$$

$$y = \sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}} \eta \quad (2.13)$$

$$v_x = U_\infty u \quad (2.14)$$

$$v_y = \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{L}} v \quad (2.15)$$

Por lo que las ecuaciones adimensionalizadas tienen la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad (2.16)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \quad (2.17)$$

El método que se va a desarrollar es un método de avance en estaciones, en el que los valores de las magnitudes en la estación  $n$  se obtienen utilizando los valores de la estación  $n-1$ . La primera estación en la que se calculan los valores es la estación 2, ya que las condiciones de contorno fijan los valores de la estación 1.

Para desarrollar el método, considérese primero (2.17) particularizada en cada punto del mallado,  $(\xi_j, \eta_k)$ , que por simplicidad se denominará  $j, k$ .

$$u_j(k) \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{j,k} + v_j(k) \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{j,k} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \Big|_{j,k} \quad (2.18)$$

Y atendiendo a 2.1, puede observarse que, siendo  $\xi$  análogo al eje  $x$  de la figura,

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{j,k} \simeq \frac{u_j(k) - u_{j-1}(k)}{h_\xi} \quad (2.19)$$

Además, se tiene que  $\xi_j$  se mantiene constante en las derivadas respecto de  $\eta$ . Aproximando también

los factores  $u_j(k)$  y  $v_j(k)$  por sus valores en la estación  $j-1$ , se obtiene un sistema lineal de ecuaciones, que tiene la siguiente forma:

$$u_{j-1}(k) \frac{u_j(k) - u_{j-1}(k)}{h_\xi} + v_{j-1}(k) \left. \frac{\partial u_j}{\partial \eta} \right|_k = \left. \frac{\partial^2 u_j}{\partial \eta^2} \right|_k \quad (2.20)$$

Reorganizando términos, puede verse la analogía del resultado obtenido con (2.1):

$$-\left. \frac{\partial^2 u_j}{\partial \eta^2} \right|_k + v_{j-1}(k) \left. \frac{\partial u_j}{\partial \eta} \right|_k + \frac{u_{j-1}(k)}{h_\xi} u_j(k) = \frac{u_{j-1}^2}{h_\xi} \quad (2.21)$$

donde

$$\frac{u_{j-1}^2}{h_\xi} \equiv r(\xi), \quad \frac{u_{j-1}}{h_\xi} \equiv q(\xi), \quad v_{j-1} \equiv p(\xi)$$

Y por lo tanto, (2.20) puede reescribirse de la forma  $A * \vec{u}_j = \vec{r}$ , siendo  $A = -D_2 + M_v * D_1 + M_u$ , y por lo tanto obtener  $\vec{u}_j$  como  $\vec{u}_j = A^{-1} \vec{r}$  tras implementar las condiciones de contorno.

Por otro lado, la velocidad transversal,  $v$ , puede calcularse definiendo un punto ficticio  $k^*$ , que cumpla:

$$\eta_{k^*} = \frac{\eta_k + \eta_{k+1}}{2} \quad (2.22)$$

Evaluando (2.10) en ese punto ficticio, utilizando las variables adimensionales, tendríamos:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|_{j,k^*} = - \left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{j,k^*} \quad (2.23)$$

Y ambas derivadas pueden aproximarse como:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|_{j,k^*} = \frac{v_j(k) - v_j(k-1)}{h} \quad (2.24)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{j,k^*} = \frac{1}{2} \left[ \left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{j,k} + \left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{j,k-1} \right] \quad (2.25)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{j,k} = \frac{u_j(k) - u_{j-1}(k)}{h_\xi} \quad (2.26)$$

Por lo que (2.23) puede escribirse como:

$$v_j(k) = v_j(k-1) - \frac{h}{2} \left[ \frac{u_j(k) - u_{j-1}(k)}{h_\xi} + \frac{u_j(k-1) - u_{j-1}(k-1)}{h_\xi} \right] \quad (2.27)$$

que junto a la condición de contorno  $v(1) = 0$ , define el campo de velocidades transversales para el intervalo.

El hecho de que este mallado sea uniforme afecta a la precisión con la que el método captaría cambios rápidos en las magnitudes con respecto a los ejes en cuestión. Para los análisis realizados en los penachos térmicos, no es necesario. Sin embargo, para estudiar el comportamiento de las ecuaciones en un flujo circulatorio, sería necesario tener un mallado variable con respecto al eje longitudinal. Debido a la complejidad que conlleva, así como el coste computacional, se ha decidido mantener el mallado equidistante en el método de las diferencias finitas. Para observar la diferencia de los resultados utilizando un mallado variable, se ha recurrido a otro método.

## 2.2 Método de líneas.

El método de líneas es un método eficiente y fácil de implementar para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico como las que aparecen en problemas de flujos en capas límites, y en capas delgadas en general. La idea general del método es tener  $N$  líneas paralelas al eje longitudinal del flujo, e ir avanzando con pequeños intervalos a lo largo de todo el eje para calcular la evolución de las magnitudes en esas líneas. Las líneas están separadas una distancia  $h$  entre ellas. Para ilustrarlo, se aplicará sobre la capa límite para una placa plana.

Las ecuaciones que rigen el movimiento en la capa límite para una placa plana están introducidas en (2.10) y (2.11). Para la integración numérica de estas ecuaciones es conveniente, primero, despejar la componente normal de la velocidad  $v$  como función de  $u$  de la ecuación de continuidad (2.10), de manera que (2.11) se puede escribir como:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy = v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad (2.28)$$

A continuación, se aplica la adimensionalización y la ecuación (2.28) quedaría:

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \int_0^\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} d\eta = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \quad (2.29)$$

Como se ha mencionado, para la integración de esta ecuación se discretiza el dominio para  $\xi > 0$  y  $\eta \geq 0$  en un número suficiente de líneas separadas una distancia  $h$ , que será constante. La discretización debe realizarse de manera que las derivadas con respecto de  $\eta$  pueden aproximarse por las expresiones:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{\xi, \eta = \eta_k} \simeq \frac{u_{k+1}(\xi) - u_{k-1}(\xi)}{2h}, \quad (2.30)$$

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right)_{\xi, \eta = \eta_k} \simeq \frac{u_{k+1}(\xi) - 2u_k(\xi) + u_{k-1}(\xi)}{h^2} \quad (2.31)$$

Por otro lado, de acuerdo con la regla de los trapecios, la integral obtenida de despejar  $v$  en función de  $u$  de (2.10) puede aproximarse por:

$$\int_0^{\eta_1} \frac{\partial u}{\partial \xi} d\eta \simeq 0,5h \left( \frac{\partial u_1(\xi)}{\partial \xi} \right) \quad (k=1) \quad (2.32)$$

$$\int_0^{\eta_k} \frac{\partial u}{\partial \xi} d\eta \simeq 0,5h \frac{\partial u_k(\xi)}{\partial \xi} + \sum_{k=1}^{k-1} h \frac{\partial u_k(\xi)}{\partial \xi} \quad (k > 1) \quad (2.33)$$

Como resultado de la discretización, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias compuesto por:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi} = \frac{u_2 - 2u_1}{(1,5u_1 - 0,5u_2)h^2} \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial \xi} = \frac{1}{u_k - 0,25u_{k+1} + 0,25u_{k-1}} \left[ \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} + \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2} \sum_{i=1}^{i-1} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right] \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial u_N}{\partial \xi} = 0 \quad (2.36)$$



donde (2.34) sería para  $k = 1$ , (2.35) para  $2 \leq k \leq N - 1$  y (2.36) para  $k = N$ .

Una vez definido el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que se resolverá en cada intervalo para las diferentes líneas, se introduce el valor del campo de velocidades longitudinales correspondiente a  $\xi = 0$ , que en este caso será:

$$u(\xi = 0, \eta = 0) = 0 \quad (2.37)$$

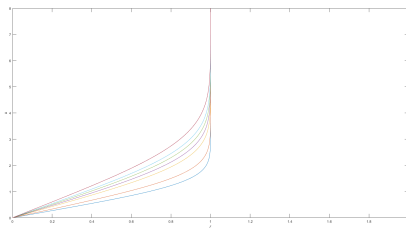
$$u(\xi = 0, \eta > 0) = 1 \quad (2.38)$$

Por último, los intervalos estarán separados una distancia  $h_\xi$  pequeña y constante.

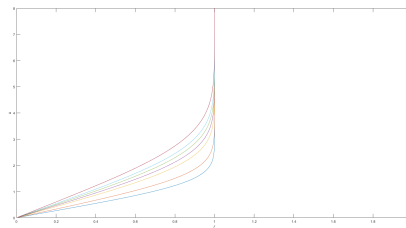
El sistema (2.34) - (2.36) se resolverá mediante el comando ode45 de Matlab. Este comando utiliza un método de Runge-Kutta de cuarto orden de paso variable, en este caso en la variable  $\xi$ . Esto tiene la gran ventaja de que si en nuestro problema se producen variaciones más pronunciadas, el propio comando ode45 elegirá el paso apropiado para la resolución del sistema en ese intervalo.

Implementando esto numéricamente se obtendrían los perfiles de velocidades para diferentes  $\xi$  a lo largo de la placa plana. La velocidad transversal puede calcularse mediante (2.27).

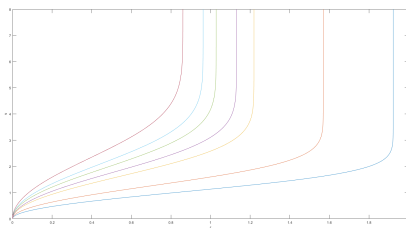
Para finalizar y comprobar que el método funciona, se muestra a continuación una comparación con los perfiles de velocidades obtenidos para una placa plana utilizando el método de las diferencias finitas.



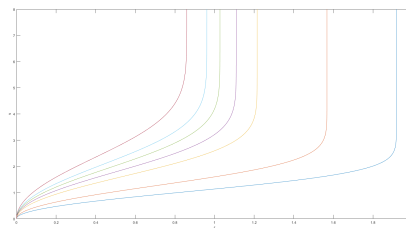
(a) Velocidad longitudinal para el método de líneas.



(b) Velocidad longitudinal para diferencias finitas.



(c) Velocidad transversal para el método de líneas.



(d) Velocidad transversal para diferencias finitas.

**Figura 2.2** Comparación de los resultados entre ambos métodos.

Las gráficas mostradas en la figura 2.2 muestran los perfiles de velocidades, tanto longitudinales como transversales, obtenidos para diferentes puntos  $\xi$  del mallado. Es fácilmente apreciable la gran similitud entre los resultados obtenidos.



### 3 Penachos térmicos.

---

El fenómeno conocido como penacho térmico consiste en una corriente de convección natural debido a un gradiente de temperatura, que hace que el fluido ascienda formando una columna a través del medio debido a la variación que ese gradiente de temperaturas produce en su densidad. Esto se da, por ejemplo, en las diferentes capas de la Tierra. Debido a que el gradiente de temperatura existente entre el núcleo y el manto puede llegar a ser de tres mil grados, se forma una columna ascendente de roca fundida a muy alta temperatura, que llega hacia la superficie y puede provocar la rotura de la misma, así como lo que se conocen como puntos calientes. Otro ejemplo más cotidiano puede encontrarse en una chimenea, en la que el fuego genera un gradiente de temperatura entre el flujo que hay en el hogar con respecto al flujo exterior, lo que hace que se genere una corriente ascendente. El interés de los penachos térmicos en este trabajo se fundamenta en la posterior implementación de la velocidad azimutal, lo que conformaría un vórtice bajo la influencia de un gradiente de temperatura.

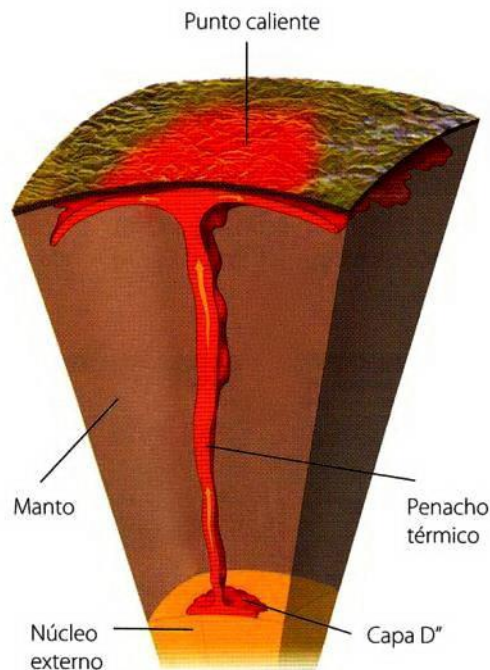


Figura 3.1 Convección natural en el manto terrestre.

Este problema podría modelarse con las ecuaciones de Navier-Stokes, aunque, dada su complejidad,

se introducirán algunas hipótesis para simplificar el problema y poder aplicar los métodos numéricos introducidos en el capítulo 2. Estas hipótesis simplificatorias se basan en los pesos relativos que tendrían los diferentes miembros de las ecuaciones completas de Navier-Stokes, pudiéndose despreciar algunos de ellos.

A partir de ahora, se asumirá que el fluido se encuentra en régimen estacionario, en convección natural y régimen incompresible. Para ello, se definen los siguientes números adimensionales:

$$\text{Mach} \equiv M = \frac{V}{a} \quad (3.1)$$

$$\text{Reynolds} \equiv Re = \frac{vL}{\nu} \quad (3.2)$$

$$\text{Grashof} \equiv Gr = \frac{\beta(T_c - T_\infty)L^3g}{\nu^2} \quad (3.3)$$

$$\text{Richardson} \equiv Ri = \frac{Gr}{Re^2} \quad (3.4)$$

donde  $a$  representa la velocidad del sonido. Y para que se cumplan las hipótesis mencionadas tiene que cumplirse:

$$M^2 < 0.1 \quad (3.5)$$

$$Ri \gg 1 \quad (3.6)$$

y típicamente para un penacho,  $Re \sim 10^2$ , luego se tiene que  $Gr \gg 10^4$ .

Adicionalmente, se aplicará a este problema la aproximación de *Boussinesq*. Esta aproximación se aplica en problemas donde el flujo es impulsado por las fuerzas de flotabilidad, es decir, en problemas de convección natural. Consiste en suponer que la densidad es constante exceptuando aquel término de la densidad que se encuentra multiplicando al término de la gravedad. Para ello, se va a suponer que las variaciones de la densidad dependen únicamente de la temperatura y son pequeñas.

Linealizando en torno a  $T_\infty$  y  $P_\infty$  tendríamos:

$$\rho = \rho_\infty + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{T_\infty} (T - T_\infty) = \rho_\infty \left[ 1 + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{T_\infty} (T - T_\infty) \right], \quad (3.7)$$

donde:

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{T_\infty} < 0$$

y definiendo el coeficiente de expansión térmica del fluido como:

$$\beta = - \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{T_\infty} \quad (3.8)$$

Luego, (3.7) puede escribirse:

$$\rho = \rho_\infty (1 - \beta(T - T_\infty)) \quad (3.9)$$

Este resultado va a modelar el motor del movimiento de nuestro problema, las fuerzas de flotabilidad.

Para analizar el efecto de diferentes parámetros para este problema, se va a modelar de dos maneras. A través de un fluido en reposo en el que situamos un foco de calor, que no interfiere con el flujo y a través de un fluido en reposo sobre una placa caliente. Asimismo, estos problemas se analizarán para el caso bidimensional así como para el caso axisimétrico.

### 3.1 Caso bidimensional

Se va a comenzar el estudio de este fenómeno con el caso bidimensional. Para este problema, la ecuación de cantidad de movimiento se encuentra acoplada a la ecuación de la energía mediante el término correspondiente a la fuerza de flotabilidad, que depende de la temperatura.

Esto se simplifica notablemente aplicando la hipótesis de *Boussinesq* a las ecuaciones de Navier-Stokes, que junto a las hipótesis ya introducidas, dan lugar a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (3.10)$$

$$\rho_\infty V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + \rho_\infty V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) - \rho_\infty (1 - \beta(T - T_\infty)) g \quad (3.11)$$

$$\rho_\infty C_p \left( V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q(x,z) \quad (3.12)$$

Debido a que las variaciones de temperatura son pequeñas, se van a suponer constantes el coeficiente de expansión térmica del fluido  $\beta$ , el calor específico a presión constante, la viscosidad dinámica del fluido y el coeficiente de conductividad térmica  $k$ .

Al tratarse de un problema en el que el núcleo es esbelto, la longitud característica en el eje longitudinal (para nuestro problema será el eje  $Z$ ) es mucho mayor que la longitud característica en el eje transversal. Esto se traduce en que se pueden despreciar las variaciones de las magnitudes con respecto al eje longitudinal en los términos viscosos y convectivos de las ecuaciones (3.11) y (3.12). Por tanto, se pueden reescribir estas ecuaciones como sigue:

$$V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial(P + \rho_\infty g z)}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \beta(T - T_\infty) g \quad (3.13)$$

$$V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho_\infty C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q(x,z)}{\rho_\infty C_p} \quad (3.14)$$

Se puede hacer la suposición de que el término correspondiente a la presión tiene aproximadamente el mismo valor que en el exterior del fluido, es decir, fuera del núcleo. Por tanto, despejando este término de la ecuación (3.13) evaluada en el exterior, se obtendría su valor. Debido a que en el exterior el fluido está en reposo y la temperatura tendría el valor  $T_\infty$ , se tiene:

$$-\frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial(P + \rho_\infty g z)}{\partial z} \Big|_{Penacho} \simeq -\frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial(P + \rho_\infty g z)}{\partial z} \Big|_{exterior} \simeq 0 \quad (3.15)$$

Y finalmente, el conjunto de ecuaciones que modelan el problema bidimensional tendría la siguiente forma:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (3.16)$$

$$V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \beta(T - T_\infty) g \quad (3.17)$$

$$V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho_\infty C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q(x,z)}{\rho_\infty C_p} \quad (3.18)$$

Una vez definidas las ecuaciones que se van a implementar, se procede a la adimensionalización del problema. Para ello, lo primero es tomar ordenes de magnitud en las diferentes ecuaciones. De

la ecuación de continuidad (3.16) se obtiene:

$$V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} \sim V_{xc} \frac{\Delta_x V_z}{\Delta x} \sim V_{xc} \frac{V_{zc}}{x_c} \quad (3.19)$$

$$V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \sim V_{zc} \frac{\Delta_z V_z}{\Delta z} \sim V_{zc} \frac{V_{zc}}{z_c} \quad (3.20)$$

$$\frac{V_{xc}}{x_c} = \frac{V_{zc}}{z_c} \quad (3.21)$$

Como el motor del movimiento son las fuerzas de flotabilidad, de (3.17):

$$\beta(T - T_\infty)g \sim \beta(T_c - T_\infty)g \quad (3.22)$$

$$\frac{V_{zc}^2}{z_c} = \beta(T_c - T_\infty)g \quad (3.23)$$

Por estar en la capa límite, el término convectivo es del orden del viscoso:

$$\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} \sim \frac{\Delta_x V_z}{\Delta x^2} \sim \frac{V_{zc}}{x_c^2} \quad (3.24)$$

$$\frac{V_{zc}^2}{z_c} = \nu \frac{V_{zc}}{x_c^2} \quad (3.25)$$

El número de Grashof, parámetro adimensional que representa el peso relativo entre las fuerzas de flotación y las fuerzas viscosas que actúan en un fluido, tiene la siguiente expresión:

$$Gr = \frac{\beta(T_c - T_\infty)z_c^3 g}{\nu^2} \quad (3.26)$$

Por último, para el caso del foco, el calor total generado debe de ser del orden de magnitud del flujo convectivo de calor a través de una superficie horizontal, o lo que es lo mismo:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\infty C_p V_z (T - T_\infty) dx \quad (3.27)$$

$$Q \sim \rho_\infty C_p V_{zc} (T_c - T_\infty) x_c \quad (3.28)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (3.21), (3.23), (3.25), (3.26) y (3.28) podemos despejar las variables características en función de  $z_c$  y el número de Grashof:

$$x_c = \frac{z_c}{Gr^{\frac{1}{4}}} \quad (3.29)$$

$$V_{xc} = \frac{\nu}{z_c} Gr^{\frac{1}{4}} \quad (3.30)$$

$$V_{zc} = \frac{\nu}{z_c} \sqrt{Gr} \quad (3.31)$$

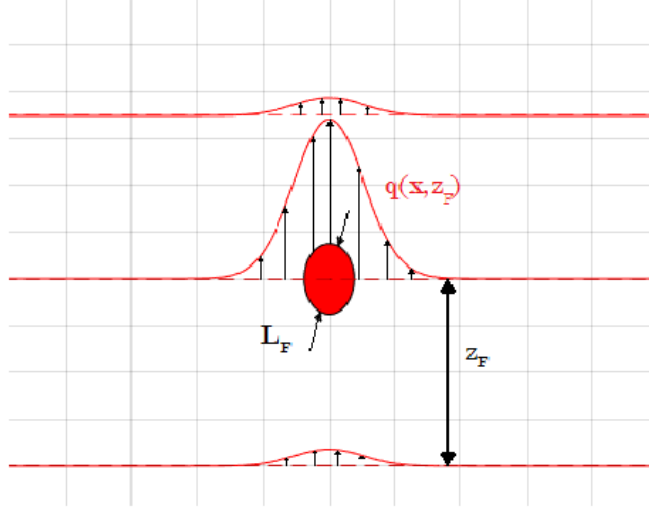
$$T_c - T_\infty = \frac{Gr \nu^2}{\beta z_c^3 g} \quad (3.32)$$

$$Q = \frac{\rho_\infty C_p \nu^3}{\beta z_c^3 g} Gr^{\frac{5}{4}} \quad (3.33)$$

Por otro lado, el aporte de calor para el problema del foco se va a modelar como una fuente de calor de longitud  $L_F$  situada en un punto  $(0, z_F)$ , cuya distribución del calor generado por unidad de

volumen tiene la expresión:

$$q(x,z) = A \cdot Qe^{-\frac{x^2+(z-z_F)^2}{L_F^2}} \quad (3.34)$$



**Figura 3.2** Esquema de la implementación del foco en el fluido.

"A" representa una constante, la cual se obtiene ya que el calor total por unidad de longitud generado por el foco tiene que ser igual a la integral de la distribución (3.34) en X-Z. Resolviendo la siguiente integral:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} q(x,z) dz dx \quad (3.35)$$

se llegaría a que:

$$A = \frac{1}{\pi L_F^2} \quad (3.36)$$

La integral (3.35) tiene como límite inferior para el eje Z el valor 0 ya que se hace la hipótesis de que  $z_F \gg L_F$ , es decir, que el tamaño del foco es mucho menor que la posición que toma en el eje Z, por lo que el calor aportado en el intervalo de menos infinito hasta cero es despreciable.

Una vez obtenidos los valores característicos de las variables que cubren el problema, procedemos a adimensionalizar haciendo uso de ellas. Las variables adimensionales que se van a utilizar son:

$$x = \xi \cdot x_c = \xi \frac{z_c}{Gr^{\frac{1}{4}}} \quad (3.37)$$

$$z = \zeta \cdot z_c \quad (3.38)$$

$$V_x = u \cdot V_{xc} = u \frac{v}{z_c} Gr^{\frac{1}{4}} \quad (3.39)$$

$$V_z = w \cdot v_{zc} = w \frac{v}{z_c} \sqrt{Gr} \quad (3.40)$$

$$T - T_{\infty} = \theta(T_c - T_{\infty}) = \theta \frac{Gr v^2}{\beta z_c^3 g} \quad (3.41)$$

Se tomará la variable característica en el eje longitudinal como la posición del foco,  $z_F$ , con el objetivo de poder variar el cociente entre esta distancia y la longitud del foco, siempre manteniendo que sea mucho mayor que la unidad.

Aplicando estas variables a las ecuaciones (3.16), (3.17) y (3.14), resultan en:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0 \quad (3.42)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial \xi} + w \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \theta \quad (3.43)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial \theta} + w \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \left( \frac{z_F}{L_F} \right)^2 \frac{1}{\pi Gr^{\frac{1}{4}}} e^{-\left( \frac{z_F}{L_F} \right)^2 \left[ \frac{\xi^2}{\sqrt{Gr}} + (\zeta - 1)^2 \right]} \quad (3.44)$$

donde Grashof es el número de Prandtl, un parámetro adimensional que representa el cociente entre la velocidad de difusión de la cantidad de movimiento y la difusividad térmica.

Ahora quedarían las condiciones de contorno, que dependen esencialmente de como modelamos el problema.

### 3.1.1 Foco de calor.

Se supone un fluido en reposo, con un número de Prandtl asociado, en el cual se encuentra un foco que transmite calor y que provoca un movimiento ascendente en este.

A pesar de encontrarse el fluido en reposo, para evitar problemas numéricos a la hora de implementar el programa, se va a imponer un valor de la velocidad inicial mayor que cero, buscando que el valor sea mucho menor que la unidad.

Por lo tanto, las condiciones de contorno para el problema bidimensional modelando la diferencia de temperatura con el foco de calor quedarían, utilizando las variables adimensionales:

$$V_x(0, z) = 0 \quad \rightarrow \quad u(0, \zeta) = 0 \quad (3.45)$$

$$V_x(x, 0) = 0 \quad \rightarrow \quad u(\xi, 0) = 0 \quad (3.46)$$

$$V_z(x, 0) = U_\infty \quad \rightarrow \quad w(\xi, 0) = w_\infty \quad (3.47)$$

$$V_z(x \rightarrow \infty, z) = U_\infty \quad \rightarrow \quad w(\xi \rightarrow \infty, \zeta) = w_\infty \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial x}(0, z) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial \xi}(0, \zeta) = 0 \quad (3.49)$$

$$T(x, 0) = T_\infty \quad \rightarrow \quad \theta(\xi, 0) = 0 \quad (3.50)$$

$$T(x \rightarrow \infty, z) = T_\infty \quad \rightarrow \quad \theta(\xi \rightarrow \infty, \zeta) = 0 \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, z) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(0, \zeta) = 0 \quad (3.52)$$

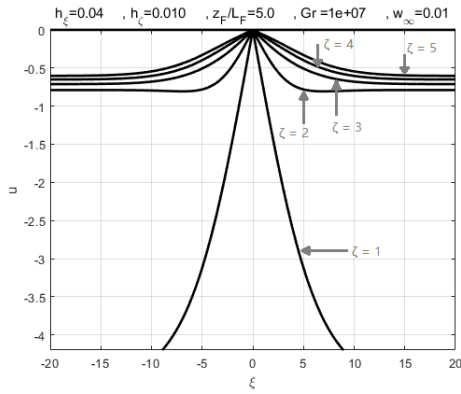
Definidas las condiciones de contorno, así como las ecuaciones, podemos resolver el problema numéricamente utilizando los métodos presentados en el capítulo 2. Primero, se obtendrá el valor de las velocidades longitudinales para la estación o intervalo que se esté calculando de (3.43). A continuación, de (3.42) se obtendrá el campo de velocidades transversales. Se utilizará el proceso descrito en (2.22), tomando un punto ficticio en el mallado del eje transversal, para ambos métodos numéricos. Finalmente, conociendo el campo de velocidades completo en esa estación o intervalo, se calcula el campo de temperaturas resolviendo (3.44).

Con este procedimiento, se puede avanzar a lo largo del eje  $\zeta$  obteniendo la distribución tanto de las velocidades como de la temperatura.

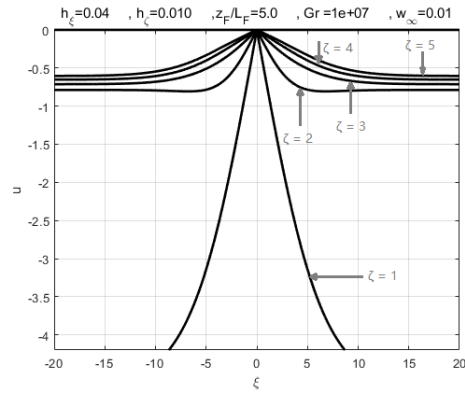
A continuación se muestran los resultados obtenidos para diferentes puntos del eje longitudinal, tanto para el método de diferencias finitas como el método de líneas.

Observando las figuras 3.3, 3.4 y 3.5 se puede apreciar que los resultados a simple vista son prácticamente idénticos. Comparándolos numéricamente, se puede apreciar una diferencia despreciable entre ambos, difiriendo a partir del tercer decimal. Esto se debe a que este problema



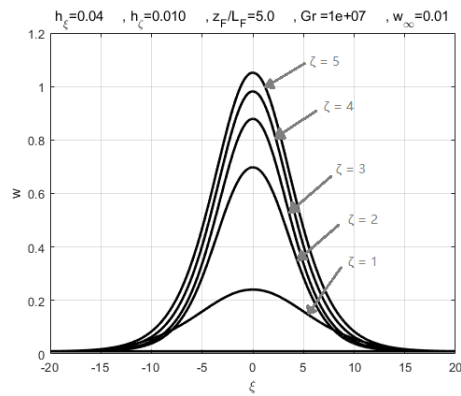


(a) Diferencias finitas.

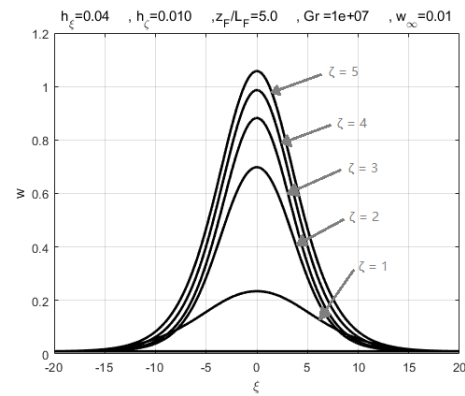


(b) Método de líneas.

Figura 3.3 Comparación de los resultados obtenidos para la velocidad transversal entre ambos métodos.

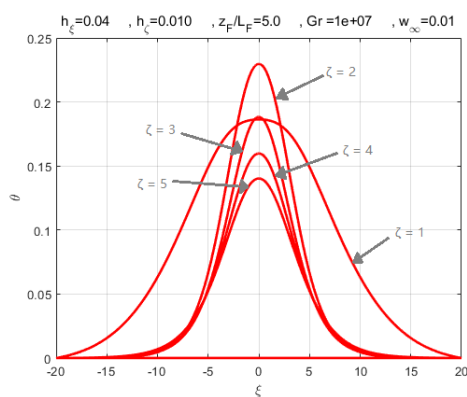


(a) Diferencias finitas.

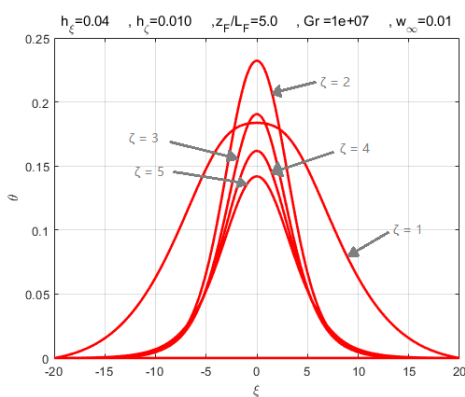


(b) Método de líneas.

Figura 3.4 Comparación de los resultados obtenidos para la velocidad longitudinal entre ambos métodos.



(a) Diferencias finitas.



(b) Método de líneas.

Figura 3.5 Comparación de los resultados obtenidos para la temperatura entre ambos métodos.

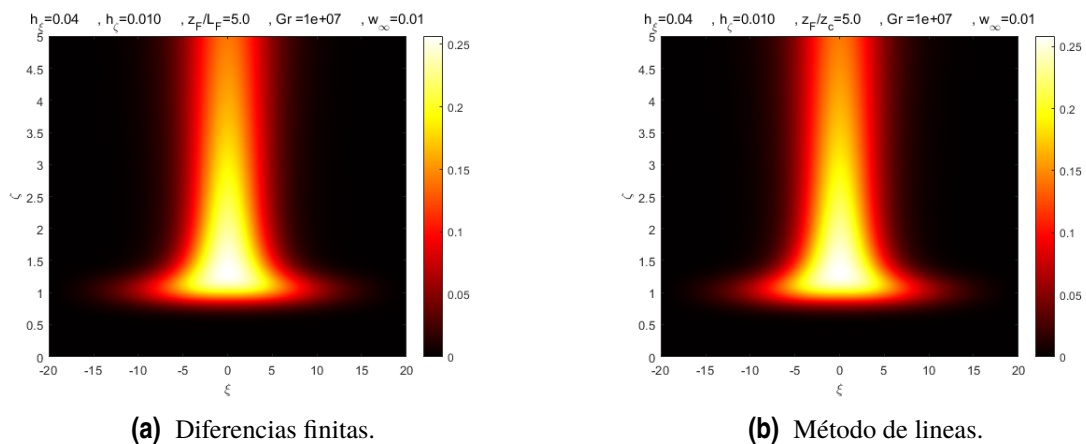
no tiene un cambio pronunciado de ninguna magnitud en el eje longitudinal, por lo que un malla equidistante proporciona buenos resultados.

Por otro lado, se puede notar el superior coste computacional del método de líneas con respecto al método de diferencias finitas. Esto se debe a que para estación (o intervalo) en el método de líneas tienen que resolverse dos ecuaciones diferenciales, mientras que en diferencias finitas se resuelve un sistema de ecuaciones.

Para el caso mostrado, en diferencias finitas se ha mallado el problema para  $\xi$  entre cero y veinte y  $\zeta$  entre cero y cinco, con los incrementos y parámetros mostrados en la parte superior de la figura 3.5a. El programa desarrollado para solventar este problema ha tardado en finalizar 1,67 segundos. En el método de líneas se han utilizado 500 líneas y los mismos límites del mallado que para diferencias finitas, junto a los parámetros mostrados en la parte superior de la figura 3.5b. Este programa ha tardado prácticamente 14 minutos en finalizar.

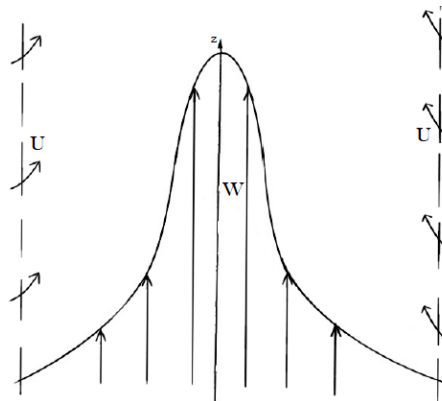
Puede observarse como, para el mismo refinado del mallado, el método de líneas ha tardado quinientas veces más en resolver el mismo problema que el método de diferencias finitas.

A continuación se muestra un mapa de la temperatura en todos los puntos del mallado. Puede observarse claramente la posición del foco, punto que emite el calor en el mallado.



**Figura 3.6** Comparación de los resultados obtenidos para el campo de temperaturas entre ambos métodos.

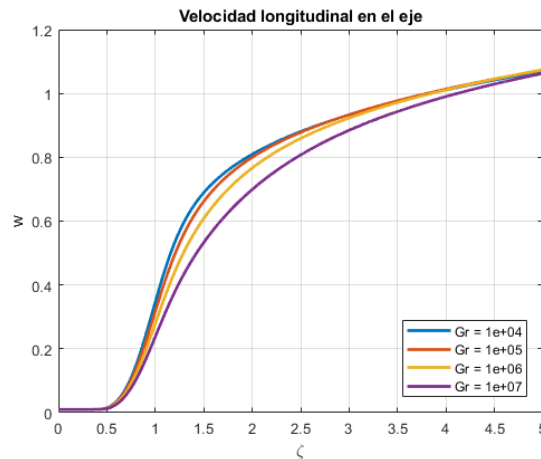
En cuanto a los resultados, se ajustan con bastante precisión a lo que se esperaba. El hecho de que se le introduzca energía al fluido en reposo mediante un foco de calor, genera un movimiento ascendente en el mismo, de manera que pasa a comportarse como un chorro bidimensional. Al contrario que en el problema del chorro, la velocidad longitudinal va aumentando debido a esa energía introducida por el foco, que genera una fuerza que acelera el fluido. El fluido que asciende



**Figura 3.7** Campo de velocidades típico del penacho térmico.

paralelo al eje de simetría transporta el calor aguas arriba, lo cual se ve reflejado en la figura 3.6. Por otro lado, al aumentar la velocidad longitudinal, la velocidad transversal tiene que ser negativa, según (3.42). Luego, la velocidad en el penacho tiene que tener la forma mostrada en la figura 3.7.

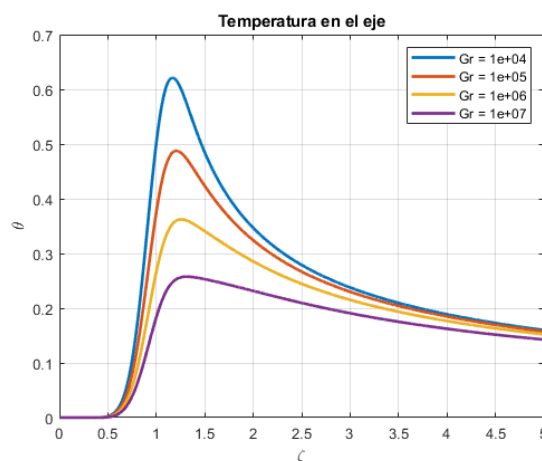
Es interesante observar para el caso bidimensional como afecta la variación del número de Grashof, que es equivalente a variar el peso de las fuerzas de flotabilidad en el movimiento. Para esto, mantendremos el fluido en "reposo", el número de Prandtl del aire ( $Pr = 0.73$ ) y un mallado mas fino que el anterior, lo que supondrá una mayor precisión en los resultados sin suponer un gran aumento en el tiempo para resolver el problema. Este estudio se realizará con el método de las diferencias finitas, pues queda demostrado el menor coste computacional de este método, obteniendo unos resultados suficientemente precisos para este problema.



**Figura 3.8** Evolución de la velocidad en el eje para diferentes números de Grashof.

En la figura 3.8 puede apreciarse que el comportamiento del fluido a mayor número de Grashof es el de aumentar mas lentamente su velocidad longitudinal. A pesar de esto, se observa como para todos los números de Grashof, la velocidad adimensional tiende a aproximadamente un mismo valor cuando estamos lejos del foco. Obsérvese, sin embargo, que la velocidad física aumenta como  $\sqrt{Gr}$ , de acuerdo con (3.40).

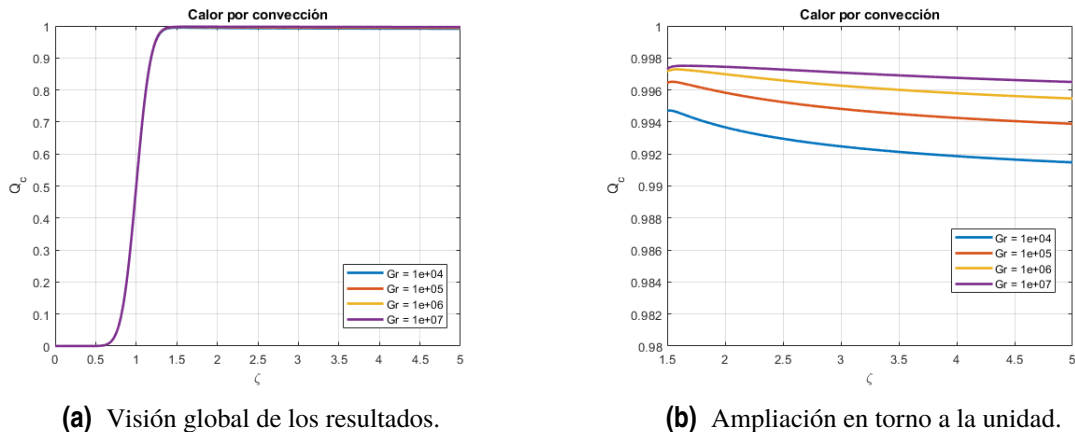
En cuanto al campo de temperaturas, la simulación arroja los siguientes resultados:



**Figura 3.9** Evolución de la temperatura en el eje para diferentes números de Grashof.

Puede apreciarse en  $\zeta \simeq 1.2$  que a mayor número de Grashof, menor es la temperatura adimensional

que tiene el fluido. Sin embargo, según (3.41), puede observarse que la temperatura física será mayor para un mayor Gr.



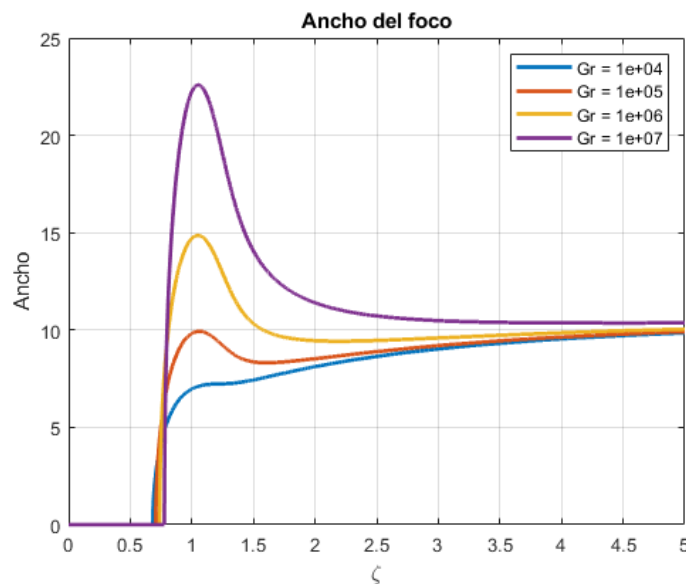
(a) Visión global de los resultados.

(b) Ampliación en torno a la unidad.

**Figura 3.10** Comparación del calor por convección para diferentes números de Grashof.

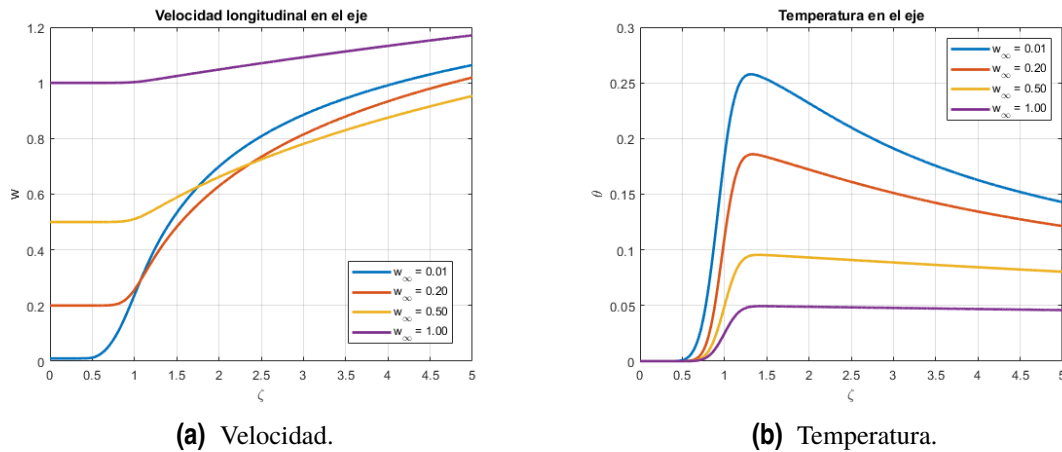
Por otro lado, para los diferentes análisis se obtiene cómo el calor por convección es prácticamente uno, sin ser apreciable a simple vista una diferencia entre los resultados. Sin embargo, ampliando los ejes en torno a la unidad, puede observarse que a mayor Grashof, mayor calor por convección en el fluido.

Algo que también puede esclarecer la influencia de Grashof en el fluido en reposo, es el ancho del foco. Para representarlo, se supondrá que el ancho del foco vendrá determinado por la zona del eje transversal cuyo valor de  $\theta$  sea mayor de 0.05. A continuación se muestran los resultados.



**Figura 3.11** Comparación del ancho del foco para diferentes números de Grashof .

Por último, y de cara al análisis que se llevará a cabo para el vórtice, es interesante ver la influencia de la velocidad del flujo circundante sobre la transmisión de calor, así como la influencia del foco en la velocidad del fluido conforme avanzamos en el eje. Para la realización de estos análisis, se ha mantenido constante el valor del número de Grashof a  $10^7$ , y se ha variado la velocidad en el infinito. Los resultados obtenidos se presentan a continuación.



**Figura 3.12** Evolución de las magnitudes del problema plano para diferentes velocidades.

En vista de los resultados, se puede deducir que al aumentar la velocidad circundante del fluido, la convección natural pierde fuerza por lo que el incremento de velocidad a lo largo del eje es menor conforme mayor es la velocidad del fluido, como puede verse en la figura 3.12a. La temperatura, a su vez, es menor.

### 3.1.2 Placa caliente.

En este apartado, vamos a realizar un análisis análogo al presentado en la sección anterior pero modelando el gradiente de temperatura a través de una placa que se encuentra a una temperatura superior a la del ambiente. Por esto, las ecuaciones de conservación de la masa (3.42) y de cantidad de movimiento (3.43) las podríamos utilizar tal y como se presentan, pero de la ecuación de la energía (3.44) tendríamos que eliminar el término de generación de calor, ya que ahora es la diferencia de temperaturas el motor del movimiento.

Entonces, las ecuaciones quedarían:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0 \tag{3.53}$$

$$u \frac{\partial w}{\partial \xi} + w \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \theta \tag{3.54}$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + w \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \tag{3.55}$$

También hay que tener en cuenta que al utilizar las ecuaciones de la capa límite térmica, si imponemos una condición de contorno en dos de las tres magnitudes a calcular, la otra variable no es arbitraria. Es decir, se va a imponer la temperatura en la primera estación y la velocidad transversal. Por ello, la velocidad longitudinal vendrá impuesta haciendo uso de las ecuaciones (3.53), (3.54) y (3.55). En caso de que no se hiciera, las primeras estaciones o avances realizados en el método serán inestables y acabarán convergiendo a una solución coherente, pero estas primeras inestabilidades modificarán la solución aguas arriba de una manera significativa.

Esto, en las condiciones de contorno se refleja de la siguiente manera:

$$V_x(0,z) = 0 \quad \rightarrow \quad u(0,\zeta) = 0 \quad (3.56)$$

$$V_x(x,0) = 0 \quad \rightarrow \quad u(\xi,0) = 0 \quad (3.57)$$

$$V_z(x,0) = U(x) \quad \rightarrow \quad w(\xi,0) = w(\xi) \quad (3.58)$$

$$V_z(x \rightarrow \infty, z) = U_\infty \quad \rightarrow \quad w(\xi \rightarrow \infty, \zeta) = w_\infty \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial x}(0,z) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial \xi}(0,\zeta) = 0 \quad (3.60)$$

$$T(x,0) = T(x) \quad \rightarrow \quad \theta(\xi,0) = \theta(\xi) \quad (3.61)$$

$$T(x \rightarrow \infty, z) = T_\infty \quad \rightarrow \quad \theta(\xi \rightarrow \infty, \zeta) = 0 \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,z) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(0,\zeta) = 0 \quad (3.63)$$

donde, se supondrá el fluido en reposo imponiendo una velocidad pequeña para evitar problemas numéricos.

Analizaremos esta situación imponiendo dos tipos de condiciones de contorno diferentes. En la primera, supondremos tanto el campo de temperaturas como la velocidad longitudinal constante, suponiendo que la placa se encuentra a la temperatura máxima y el fluido está casi en reposo. Como se ha mencionado, estas condiciones de contorno harán que el problema sea inestable en las primeras estaciones, estabilizándose rápidamente. A pesar de esto, cualitativamente permitirá ver como se comporta el fluido. De nuevo, el problema se resolverá por el método de las diferencias finitas y por el método de líneas, para comparar resultados.

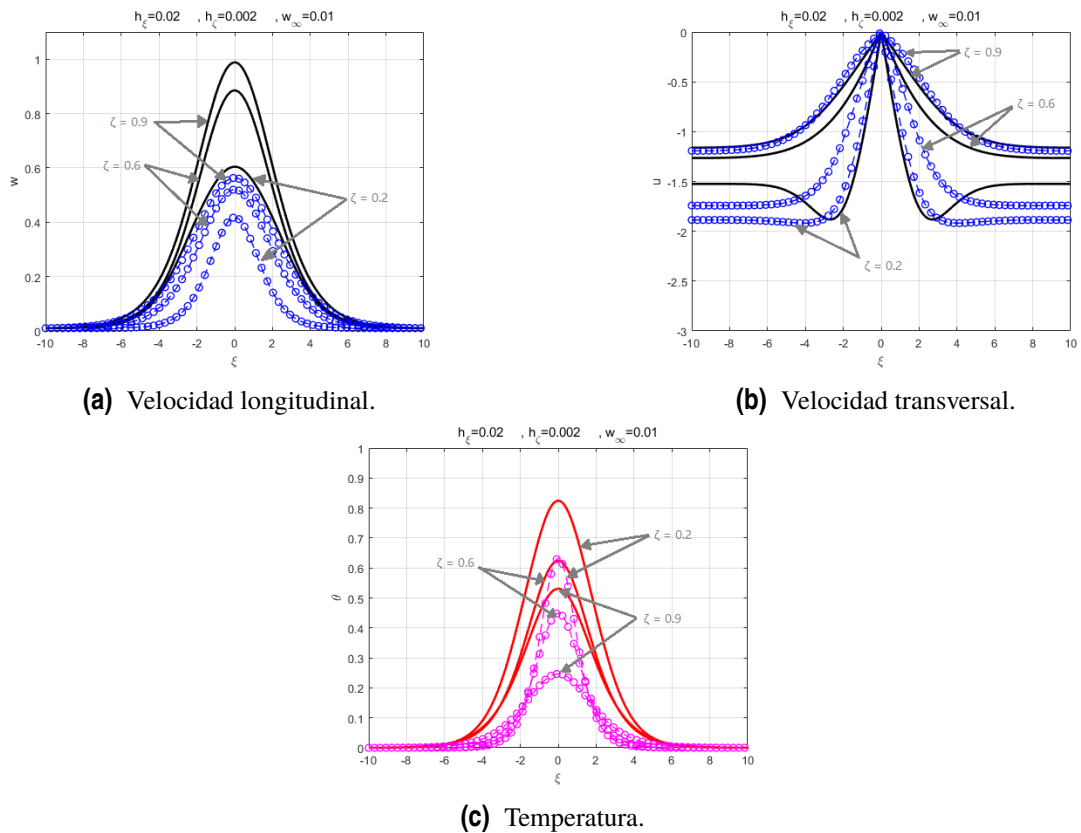
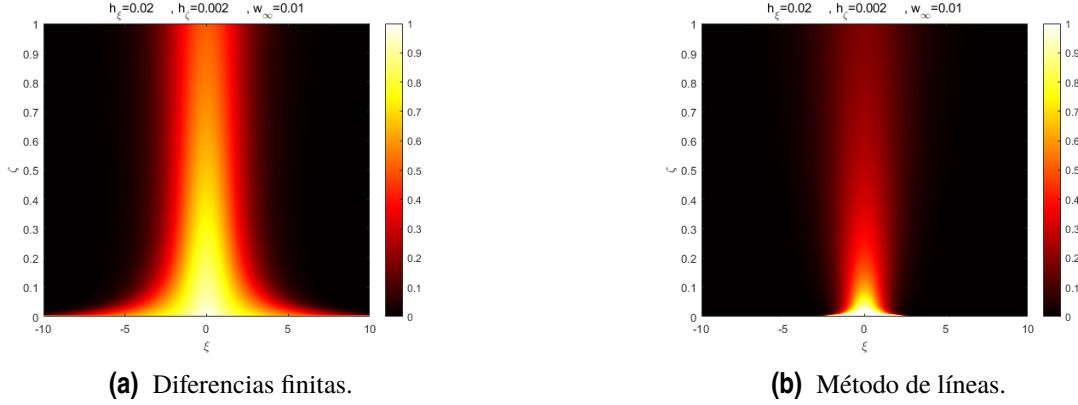


Figura 3.13 Comparación de los resultados obtenidos utilizando ambos métodos para resolver el problema.

Se observa una clara discrepancia entre la resolución de ambos métodos. Esta discrepancia entre ambos métodos se debe a que las condiciones iniciales se han impuesto sin cumplir las ecuaciones (3.42), (3.43) y (3.44). También es visible la diferencia de estos resultados en el campo de temperaturas en el mallado.



**Figura 3.14** Comparación de los resultados obtenidos para el campo de temperaturas entre ambos métodos.

A pesar de la diferencia, ambos métodos parten del mismo punto. Cuantificando el coste computacional de cada uno, para esta situación se ha decidido utilizar el mismo mallado en ambos métodos. Esto ha hecho que la resolución de este problema para el método de líneas sea de 7 minutos y 8 segundos, mientras que para el método de diferencias finitas ha tardado algo más de un segundo.

A continuación, vamos a imponer una condición de contorno para la temperatura análoga a la expresión del foco. Es decir:

$$T(x,0) = T_\infty + (T_{max} - T_\infty)e^{-x^2/x_c^2} \quad \rightarrow \quad \theta(\xi,0) = e^{-\xi^2} \quad (3.64)$$

Esto implica que la velocidad longitudinal ya no puede ser constante. Buscaremos un perfil de velocidades longitudinales adimensional de la forma

$$w(\xi,0) = w_\infty \left(1 + Ae^{-\xi^2}\right), \quad (3.65)$$

que tendrá una distribución parecida a las mostradas en la figura 3.13a, con el objetivo de evitar la inestabilidad de las primeras estaciones. Utilizando las ecuaciones que rigen el movimiento para hallar la constante A, imponiendo adicionalmente que la velocidad transversal en la primera estación es nula, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} &= -\frac{\partial u_0}{\partial \xi} = 0, \\ u_0 \frac{\partial w_0}{\partial \xi} + w_0 \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} + \theta_0, \end{aligned}$$

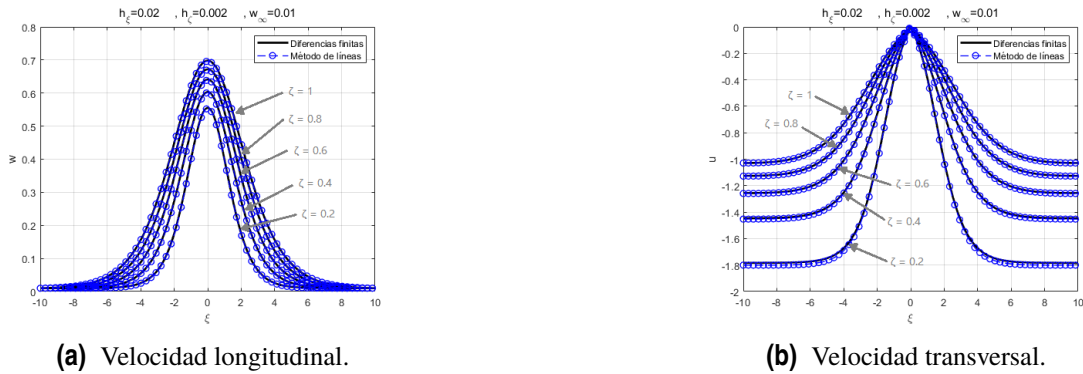
donde el subíndice cero indica que son los valores iniciales. Por lo tanto, utilizando (3.64) y (3.65), tendríamos que:

$$\begin{aligned} 2Aw_\infty e^{-\xi^2} [2\xi^2 - 1] &= e^{-\xi^2}, \\ 2Aw_\infty [2\xi^2 - 1] &= 1, \end{aligned}$$

y aproximando  $\xi_c$  como 1

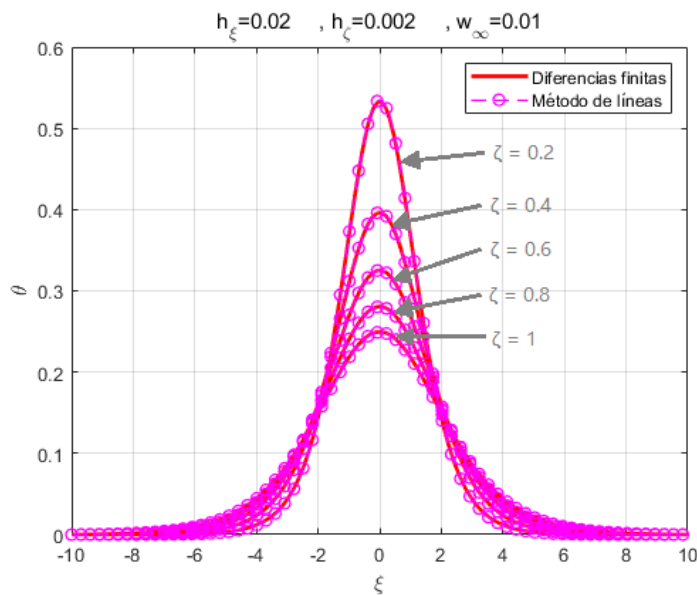
$$A \sim \frac{1}{2w_\infty}$$

Por tanto, definidas las nuevas condiciones de contorno, se obtienen los siguientes resultados:



**Figura 3.15** Comparación de los resultados obtenidos utilizando ambos métodos para resolver el problema.

Es clara la diferencia entre estos resultados y los presentados en la figura 3.13. Puede verse la influencia directa de las condiciones de contorno con el resultado obtenido, si las condiciones de contorno no son congruentes con el problema. Los campos de velocidades y temperaturas se han presentado para el mismo valor de  $\zeta$  en ambos métodos, siendo visible la concordancia. Obsérvese como el método de líneas es menos sensible a la variación de las condiciones de contorno iniciales.



**Figura 3.16** Temperatura.

Por la adimensionalización utilizada, ahora el número de Grashof no es un parámetro que controle el problema. Por lo tanto, podemos ver la influencia del número de Grashof en los resultados.

A mayor Grashof, mayor capacidad tiene el fluido para transmitir la cantidad de movimiento que calor, lo que se traduce en que si aumentamos su valor, el ancho del foco se hará cada vez más pequeño, teniendo la temperatura más concentrada y una mayor velocidad axial.

Con esto, cerramos el apartado bidimensional y procedemos a realizar un análisis análogo



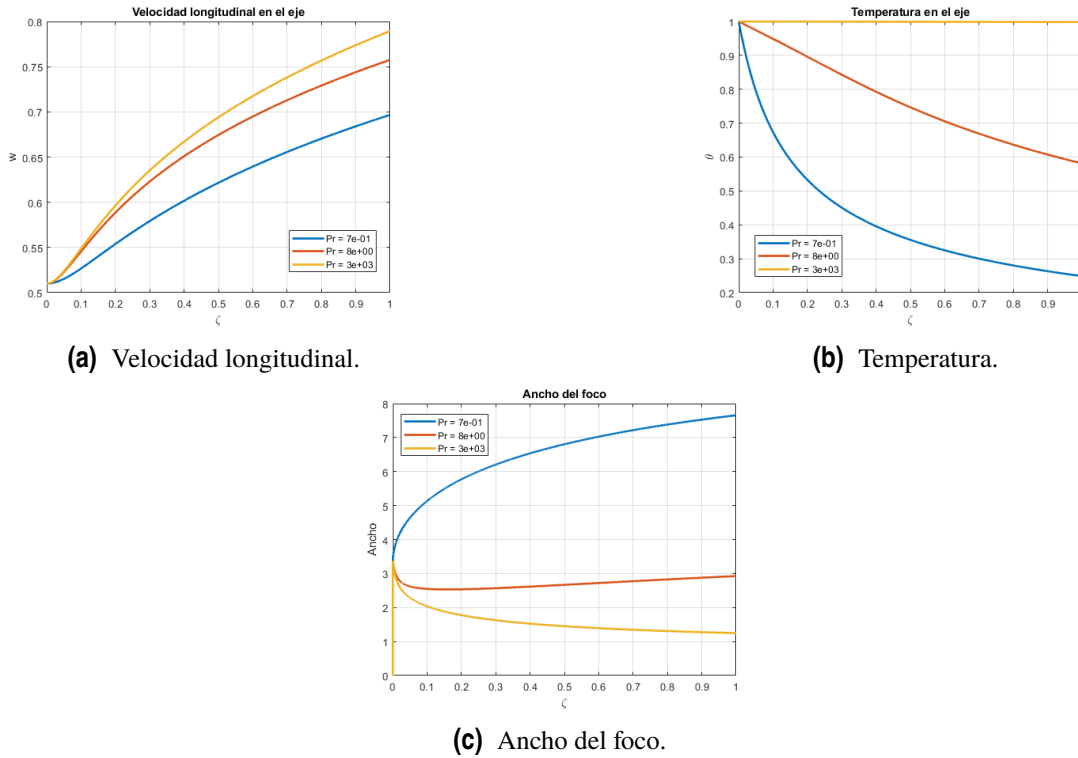


Figura 3.17 Comparación de diferentes magnitudes en el eje para diferentes Grashof.

para el problema axisimétrico. Se espera un comportamiento del fluido bastante parecido frente a variaciones de los mismos parámetros, con la influencia correspondiente a un fluido tridimensional, que hará que el avance de las magnitudes sea menos pronunciado.

### 3.2 Caso axisimétrico.

Para el caso axisimétrico, se realizarán los mismos pasos previos que para el caso bidimensional para acondicionar el problema para su resolución. Comenzamos aplicando las mismas simplificaciones a las ecuaciones de Navier-Stokes, que para este caso serían:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \tag{3.66}$$

$$\rho_\infty V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \rho_\infty V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] - \rho_\infty (1 - \beta(T - T_\infty)) g \tag{3.67}$$

$$\rho_\infty C_p \left( V_r \frac{\partial T}{\partial r} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + q(r, z) \tag{3.68}$$

Se va a tener en cuenta el término de generación de calor para el desarrollo, pudiendo no tenerse en cuenta simplemente despreciando ese término.

Llevando a cabo un proceso totalmente análogo al realizado para el caso bidimensional, se llegan a las ecuaciones simplificadas de Navier-Stokes:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (3.69)$$

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + g\beta(T - T_\infty) \quad (3.70)$$

$$V_r \frac{\partial T}{\partial r} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho_\infty C_p} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{q(r,z)}{\rho_\infty C_p} \quad (3.71)$$

Se toman órdenes de magnitud y se hace la hipótesis, para el caso en el que haya una generación de calor, de que el calor generado debe de ser del orden de magnitud del flujo convectivo a través de una superficie horizontal, que en el caso axisimétrico, se traduce en:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \rho_\infty C_p V_z (T - T_\infty) r dr d\theta = 2\pi \rho_\infty C_p \int_0^\infty V_z (T - T_\infty) r dr \quad (3.72)$$

Este desarrollo da lugar al uso de las siguientes variables adimensionales:

$$r = \tau \cdot r_c = \tau \frac{z_c}{Gr^{\frac{1}{4}}} \quad (3.73)$$

$$z = \zeta \cdot z_c \quad (3.74)$$

$$V_r = u \cdot V_{rc} = u \frac{v}{z_c} Gr^{\frac{1}{4}} \quad (3.75)$$

$$V_z = w \cdot v_{zc} = w \frac{v}{z_c} \sqrt{Gr} \quad (3.76)$$

$$T - T_\infty = \theta(T_c - T_\infty) = \theta \frac{Grv^2}{\beta z_c^3 g} \quad (3.77)$$

Como para el caso bidimensional, se tomará como longitud característica del eje longitudinal la posición del foco, lo que será indiferente para el problema de la placa térmica y permitirá modelar el problema de la fuente de calor.

Ahora, vamos a imponer que el término de generación de calor tenga la siguiente expresión:

$$q(r,z) = A \cdot Qe^{-\frac{r^2 + (z-z_F)^2}{L_F^2}} \quad (3.78)$$

Donde la constante "A" se obtiene resolviendo la siguiente integral, la cual representa que el calor total por unidad de longitud tiene que ser igual al generado por la fuente. Para la resolución de esta integral, se volverá a hacer la hipótesis de que  $z_F \gg L_F$ .

$$Q = 2\pi \int_0^\infty \int_0^\infty q(r,z) r dz dr \quad (3.79)$$

Resolviendo esta integral se llegaría a que para este problema la constante tomaría el siguiente valor:

$$A = \frac{1}{\pi^{3/2} L_F^3} \quad (3.80)$$

Luego, aplicando las variables definidas así como la expresión de la fuente de calor, las ecuaciones (3.69), (3.70) y (3.71) quedarían:

$$\frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} (\tau u) + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0 \quad (3.81)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial \tau} + w \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \tau \frac{\partial w}{\partial \tau} \right) + \theta \quad (3.82)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + w \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \tau \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right) \frac{1}{Pr} + \frac{2}{\pi^{1/2} Gr^{1/2}} \left( \frac{z_F}{L_F} \right)^3 e^{-\left(\frac{z_F}{L_F}\right)^2 \left(\frac{\tau^2}{\sqrt{Gr}} + (\zeta - 1)^2\right)} \quad (3.83)$$

Finalmente, una vez definidas las ecuaciones que rigen el problema axisimétrico, se imponen las condiciones de contorno que modelan cada problema y se obtienen los resultados. Como se ha comentado, para el caso de la placa térmica las ecuaciones serían las mismas despreciando el término de la generación de calor en la ecuación (3.83)

### 3.2.1 Foco de calor.

Para el caso del problema axisimétrico de la fuente de calor inmersa en un fluido, las condiciones de contorno son análogas a las del caso bidimensional, resultando en:

$$V_r(0, z) = 0 \quad \rightarrow \quad u(0, \zeta) = 0 \quad (3.84)$$

$$V_r(r, 0) = 0 \quad \rightarrow \quad u(\tau, 0) = 0 \quad (3.85)$$

$$V_z(r, 0) = U_\infty \quad \rightarrow \quad w(\tau, 0) = w_\infty \quad (3.86)$$

$$V_z(r \rightarrow \infty, z) = U_\infty \quad \rightarrow \quad w(\tau \rightarrow \infty, \zeta) = w_\infty \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial r}(0, z) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial \tau}(0, \zeta) = 0 \quad (3.88)$$

$$T(r, 0) = T_\infty \quad \rightarrow \quad \theta(\tau, 0) = 0 \quad (3.89)$$

$$T(r \rightarrow \infty, z) = T_\infty \quad \rightarrow \quad \theta(\tau \rightarrow \infty, \zeta) = 0 \quad (3.90)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(0, z) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau}(0, \zeta) = 0 \quad (3.91)$$

Imponiendo estas condiciones de contorno, junto a las ecuaciones (3.81), (3.82) y (3.83), se obtienen los siguientes resultados, comparando ya los obtenidos utilizando el método de las diferencias finitas frente al método de líneas.

Puede verse la similitud de los resultados presentados para diferentes estaciones, siendo también bastante notable la diferencia en el tiempo invertido para la resolución de cada método: casi dos segundos para diferencias finitas y doce minutos para el método de líneas, utilizando el mismo mallado en ambos.

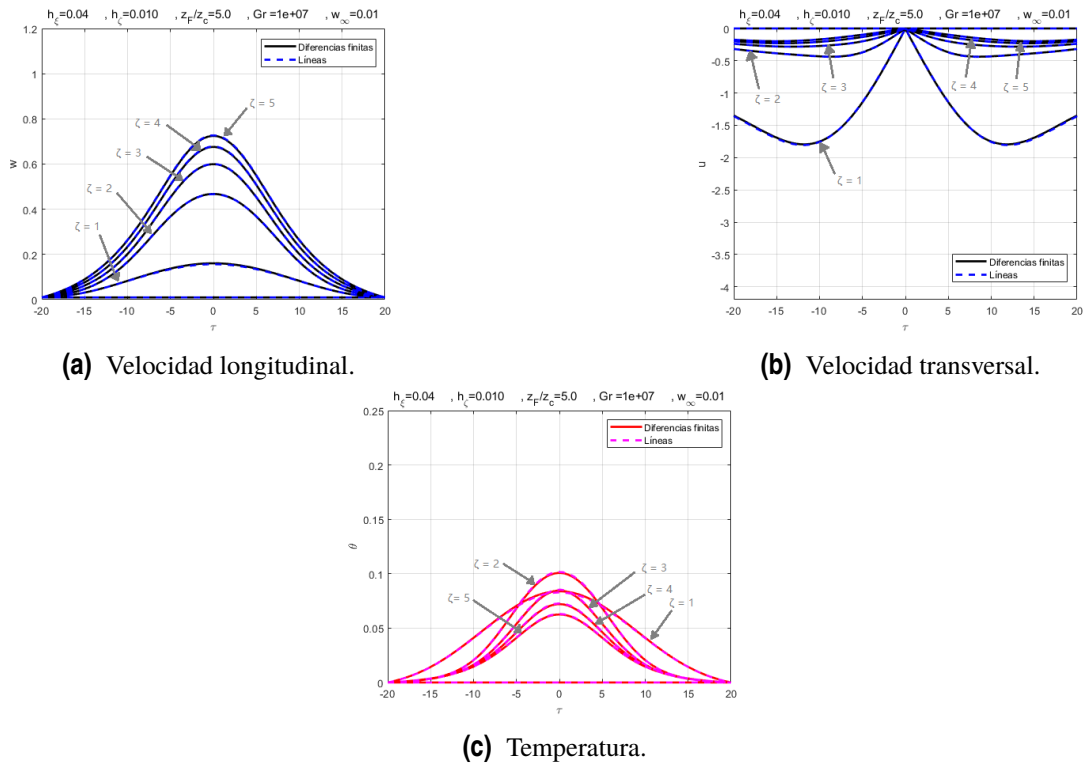
Así mismo, comparando estos resultados con los presentados para el caso bidimensional, se aprecia como el hecho de que el problema sea axisimétrico produce que la velocidad adimensional sea menor. Esto se ve reflejado también en la distribución de temperaturas en el mallado.

Para el flujo tridimensional, se espera el mismo comportamiento que para el bidimensional cuando variamos el número de Grashof, es decir, a un bajo Grashof, la velocidad aumenta más lentamente, menor es la temperatura que tiene el fluido en su eje y mayor es el ancho del penacho.

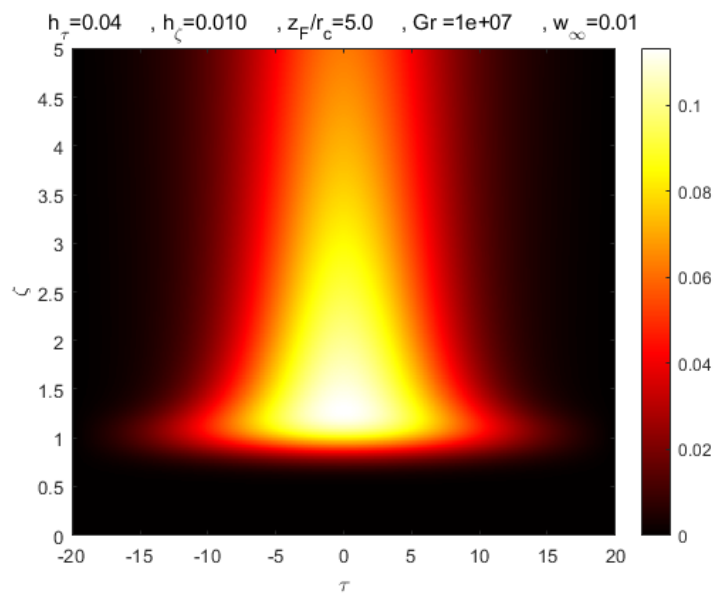
Por otro lado, lo mismo se espera de su variación respecto a la velocidad del fluido circundante. A mayor velocidad, menor peso tiene la transmisión de calor por convección en el fluido, es decir, menor gradiente de velocidad y menor temperatura en el fluido.

Todos estos resultados se verían afectados por esa "resistencia" adicional de la tridimensionalidad.

Otro resultado que puede resultar importante en el estudio sobre los penachos térmicos es el de su variación respecto al número de Grashof, como se ha hecho para el caso bidimensional. Se



**Figura 3.18** Comparación de los resultados obtenidos utilizando ambos métodos para resolver el problema.



**Figura 3.19** Campo de temperaturas obtenido.

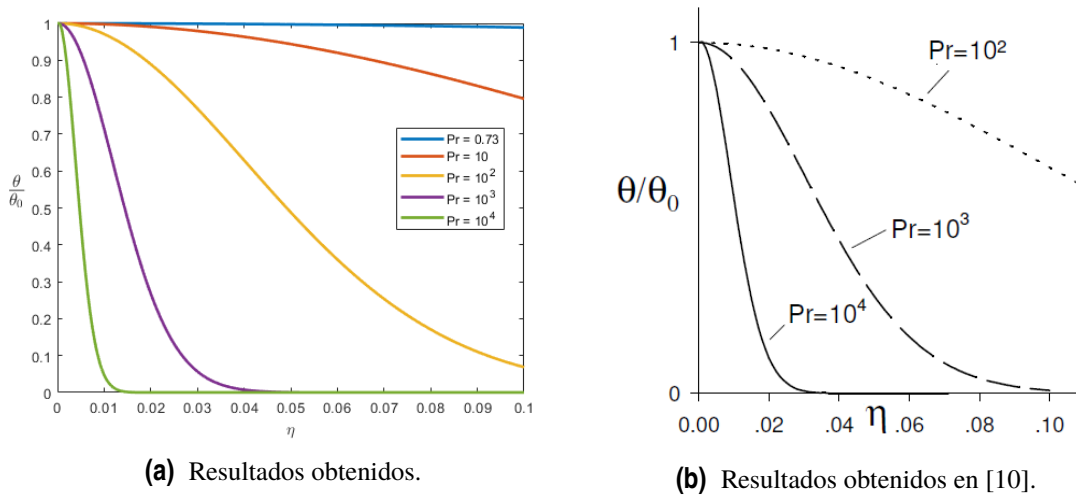
aprovecharán los resultados obtenidos en [10], artículo en el que se hace un estudio detallado de la influencia del número de Grashof en los penachos térmicos, para poder relacionar este resultado con las plumas electrohidrodinámicas. Se compararán estos resultados con los obtenidos mediante el método de diferencias finitas. Para poder compararlos, tendremos que expresar los resultados en las variables de semejanza que utilizan para resolver el problema. Esto se consigue aprovechando las variables adimensionales introducidas en (3.73) - (3.77).

$$\eta = Gr^{\frac{1}{4}} \frac{r}{z} = \frac{\tau}{\zeta} \tag{3.92}$$

$$\frac{f'}{\eta} = \frac{V_z z}{\nu Gr^{\frac{1}{2}}} = w\zeta \tag{3.93}$$

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{\nu^2 Gr} \beta g z^3 = \theta \zeta^3 \tag{3.94}$$

Para aplicar esto, la solución tiene que ser en el "infinito", para lo que se coge un valor en el eje Z bastante alto. Así mismo, se aumenta considerablemente el mallado, debido a que como vimos para el caso de la placa térmica bidimensional, al aumentar el número de Grashof, la capa límite térmica se estrecha y por tanto necesitamos mayor precisión en torno al eje. También, se observa que a medida que aumentamos el parámetro  $z_F/L_F$ , el calor se concentra alrededor del eje. Por lo tanto, para conseguir simular lo más idénticamente posible el problema planteado en [10], este parámetro tiene que ser muy alto, de manera que el calor esté emitido por un "punto". Con todo esto en cuenta, se obtienen los siguientes resultados.



**Figura 3.20** Comparación de los resultados obtenidos frente a los teóricos.

Vemos un comportamiento análogo, con ciertas diferencias que puede deberse a que se ha considerado el método de avance en estaciones, mientras que en [10] se ha resuelto el problema mediante variables de semejanza.

## 3.2.2 Placa caliente.

Para finalizar el estudio de los penachos térmicos, se hará un análisis para el problema de la placa caliente. En vista de que las condiciones de contorno tienen que cumplir las ecuaciones que rigen el problema, tendríamos lo siguiente:

$$V_r(0,z) = 0 \quad \rightarrow \quad u(0,\zeta) = 0 \quad (3.95)$$

$$V_r(r,0) = 0 \quad \rightarrow \quad u(\tau,0) = 0 \quad (3.96)$$

$$V_z(r,0) = U(r) \quad \rightarrow \quad w(\tau,0) = w(\tau) \quad (3.97)$$

$$V_z(r \rightarrow \infty, z) = U_\infty \quad \rightarrow \quad w(\tau \rightarrow \infty, \zeta) = w_\infty \quad (3.98)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial r}(0,z) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial \tau}(0,\zeta) = 0 \quad (3.99)$$

$$T(r,0) = T(r) \quad \rightarrow \quad \theta(\tau,0) = \theta(\tau) \quad (3.100)$$

$$T(r \rightarrow \infty, z) = T_\infty \quad \rightarrow \quad \theta(\tau \rightarrow \infty, \zeta) = 0 \quad (3.101)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(0,z) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau}(0,\zeta) = 0 \quad (3.102)$$

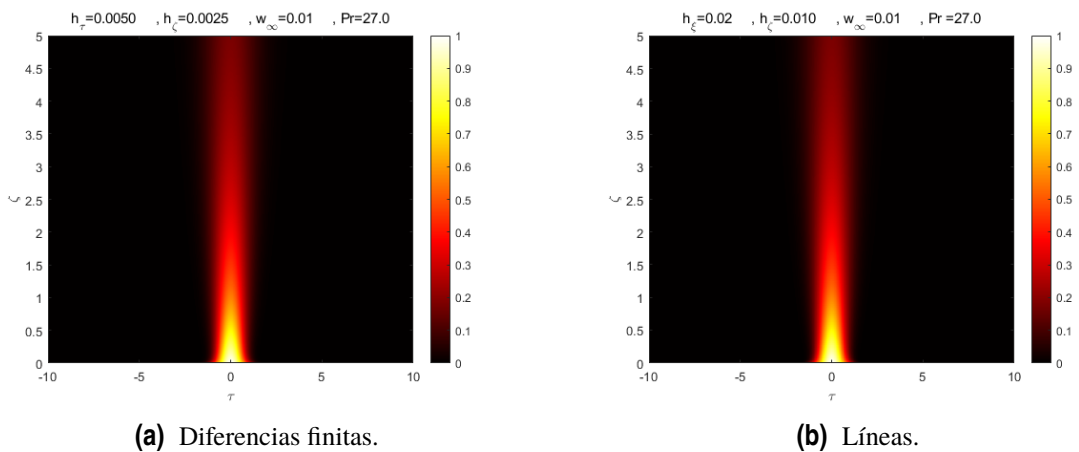
donde

$$\theta(\tau) = e^{-\tau^2} \quad (3.103)$$

$$w(\tau) = w_\infty \left( 1 + A e^{-\tau^2} \right) \quad (3.104)$$

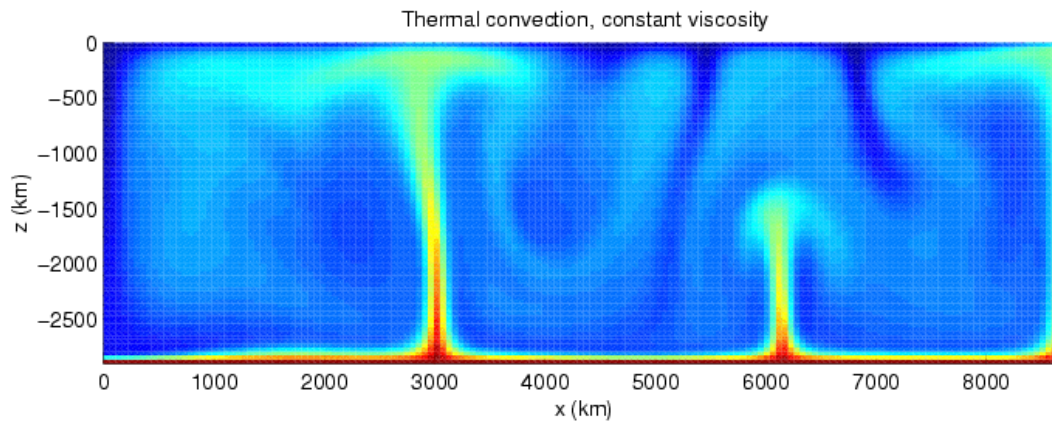
$$A \simeq \frac{1}{4w_\infty} \quad (3.105)$$

Teniendo ya modelado las condiciones de contorno del problema, obtener los resultados es inmediato. Se presenta únicamente el campo de temperaturas, que es suficiente para observar la influencia de la tridimensionalidad en este problema, así como la semejanza entre las soluciones obtenidas para los diferentes métodos de resolución empleados. Utilizaremos un número de Grashof alto, para poder comparar nuestros resultados con los obtenidos para el manto terrestre.



**Figura 3.21** Comparación de los resultados obtenidos.

Es apreciable la semejanza de los resultados obtenidos mediante ambos métodos. A continuación se muestran los resultados obtenidos mediante una simulación de lo que ocurre en el manto terrestre, viendo como cerca de la superficie caliente el penacho es análogo.



**Figura 3.22** Convección del manto terrestre obtenida de [11].

Con esto, se da por finalizado el estudio de los penachos térmicos. Las conclusiones que se pueden deducir de los resultados obtenidos serán de gran utilidad a la hora de modelar y estudiar este mismo problema introduciendo una velocidad azimutal.





## 4 Vórtice mecánico.

Para poder estudiar la influencia de la temperatura en un flujo giratorio, es importante tener las ecuaciones que modelan la mecánica del movimiento bien definidas. Es por ello que el primer paso para llevar a cabo el mencionado estudio, primero hay que definir las ecuaciones y las condiciones de contorno del problema.

Como se ha mencionado, nos basaremos en las ecuaciones cuasi-cilíndricas para flujos laminares definidas en [1], que a su vez se basan en [4]. Para el problema mecánico, la ecuación de la energía está desacoplada del movimiento y por tanto no se tendrá en cuenta. Entonces, se tiene:

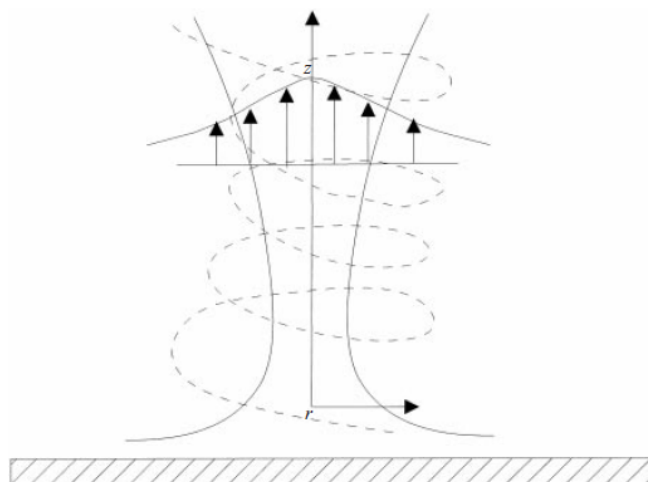
$$\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rV_z) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{V_\theta^2}{r} \quad (4.2)$$

$$V_r \frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) + V_z \frac{\partial}{\partial z}(rV_\theta) = vr \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) \right) \quad (4.3)$$

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial P}{\partial z} \quad (4.4)$$

Donde  $P$  representa la presión efectiva  $p/\rho + gz$  y por otro lado  $V_z$ ,  $V_r$  y  $V_\theta$  representan la velocidad longitudinal, radial y acimutal respectivamente.



**Figura 4.1** Esquema del flujo giratorio, obtenido de [8].

A estas ecuaciones le acompañan las condiciones de contorno:

$$V_r = V_\theta = \frac{\partial V_\theta}{\partial r} = \frac{\partial V_z}{\partial r} = 0 \quad \text{para } r = 0 \quad (4.5)$$

$$V_\theta \sim \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad V_z \rightarrow 0 \quad \text{para } r \rightarrow \infty \quad (4.6)$$

Para caracterizar las condiciones de contorno en la estación inicial del problema, primero debemos entender la estructura general del problema. A continuación se muestra un esquema global, en el que se distinguen diferentes zonas características.

Las ecuaciones cuasi-cilíndricas modelarían el flujo ubicado en la región IV, que se correspondería con lo que se conoce como *vortex jet*. Por otro lado, la región I se corresponde con un flujo ideal asociado a un vórtice potencial. La región II sería una capa límite que aporta una cantidad de masa hacia el núcleo del vórtice (región IV) mediante la región III. Por último, la región V se correspondería con la rotura del vórtice, que en este problema a estudiar sería la burbuja.

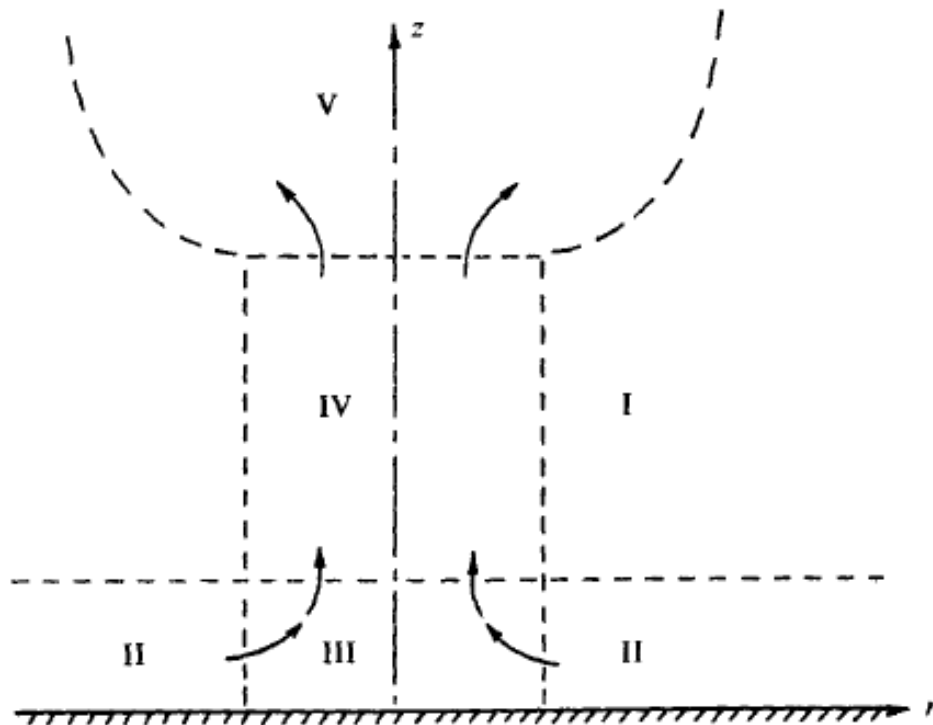


Figura 4.2 Diferentes regiones del vórtice a estudiar, obtenido de [1].

Por lo tanto, la estación inicial se correspondería con la base de la región IV. Para definir los campos de velocidades en esta estación, se recurre a observaciones realizadas en experimentos o en la naturaleza, así como de asumir que lo que *Long* define en [7] como la transferencia del momento cinético, es constante con  $z$ . Este parámetro, que se denominará fuerza del flujo en este documento, se define como:

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (P - P_\infty + V_z^2) r dr d\phi = 2\pi \int_0^\infty (P - P_\infty + V_z^2) r dr \quad (4.7)$$

En [1] se demuestra que integrando (4.4) en el núcleo, se obtiene

$$\frac{d}{dz} \int_0^\infty r(P + V_z^2) dr = 0 \quad (4.8)$$

confirmando que la transferencia de momento cinético es constante. Ahora, teniendo en cuenta la condición de contorno (4.6), de la ecuación (4.2) se obtiene que para  $r \rightarrow \infty$

$$P \sim P(\infty) - \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 r^2} \quad (4.9)$$

y por otro lado, como  $J$  tiene que estar acotado,

$$V_z \sim \frac{\Gamma}{2^{3/2}\pi r} \quad \text{para } r \rightarrow \infty \quad (4.10)$$

y finalmente se eligen los siguientes campos de velocidades

$$V_{\theta_i} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left( 1 - e^{-\left(\frac{r}{\delta}\right)^2} \right) \quad (4.11)$$

$$V_{z_i} = \frac{\Gamma}{2^{3/2}\pi r} \left( 1 - e^{-\left(\frac{r}{\delta}\right)^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( V_{z_0} - \frac{\Gamma}{2^{3/2}\pi\delta} \right) e^{-\left(\frac{r}{\delta}\right)^2} \quad (4.12)$$

Puede observarse como (4.12) decae exponencialmente a (4.10) y que en el eje toma el valor  $V_{z_0}$ . Asimismo, se tiene que  $\delta$  es el ancho característico del perfil de velocidades del vórtice.

Por último, para la obtención del campo de velocidades radiales, en vez de definirlo de manera independiente se obtiene aplicando la teoría de la capa límite, mediante las ecuaciones (4.1) - (4.4) que junto a (4.11) y (4.12) darían  $V_{r_i}(r)$ . Por lo tanto, resolviendo la siguiente ecuación diferencial, se obtendría el último elemento con el que se caracteriza la estación inicial.

$$\begin{aligned} & \left[ V_{z_i} V_{z_i}'' + \frac{1}{r^2} V_{z_i}^2 - \frac{1}{r} V_{z_i} V_{z_i}' - \frac{2V_{\theta_i}}{r^2} (rV_{\theta_i})' \right] V_{r_i} - \frac{V_{z_i}^2}{r} (V_{r_i}' + rV_{r_i}'') \\ & = \nu \left[ V_{z_i}''' V_{z_i} + \frac{1}{r} V_{z_i} V_{z_i}'' - \frac{1}{r^2} V_{z_i} V_{z_i}' - \frac{2}{r} V_{\theta_i} V_{\theta_i}'' - \frac{2}{r^2} V_{\theta_i} V_{\theta_i}' + \frac{2}{r^3} V_{\theta_i}^2 \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Con esto, ya estaría definido el problema a resolver. Para afrontar el problema, utilizamos las variables adimensionales definidas en [1]

$$r = \tau \delta \quad (4.14)$$

$$z = \zeta \frac{K\delta}{\nu} \quad (4.15)$$

$$V_r = u \frac{\nu}{\delta} \quad (4.16)$$

$$V_{\theta} = v \frac{K}{\delta} \quad (4.17)$$

$$V_z = w \frac{K}{\delta} \quad (4.18)$$

donde  $K = \Gamma / 2 \pi$  representa el parámetro de circulación,  $\delta$  el ancho característico del vórtice y  $\nu$  la viscosidad cinemática del fluido. Adicionalmente, realizando un análisis dimensional en la ecuación (4.2), se define la presión adimensional  $\hat{p}$  como

$$P - P_{\infty} = \hat{p} \frac{K^2}{\delta^2} \quad (4.19)$$

Introduciendo este resultado junto a las variables adimensionales mencionadas en (4.7)

$$J = 2\pi \int_0^{\infty} (P - P_{\infty} + V_z^2) r dr = K^2 2\pi \int_0^{\infty} (\hat{p} + w^2) \tau d\tau \quad (4.20)$$

puede definirse la fuerza de flujo adimensional a través de

$$M = \frac{J}{K^2} = 2\pi \int_0^\infty (\hat{p} + w^2) \tau d\tau. \quad (4.21)$$

A continuación, aplicando estas variables a las ecuaciones, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\tau u) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(\tau w) = 0 \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \tau} = \frac{v^2}{\tau} \quad (4.23)$$

$$u \frac{\partial}{\partial \tau}(\tau v) + w \frac{\partial}{\partial \zeta}(\tau v) = \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau}(\tau v) \right) \quad (4.24)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \tau \frac{\partial w}{\partial \tau} \right) - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \zeta} \quad (4.25)$$

junto a las condiciones de contorno

$$u = 0, v = 0, \frac{\partial w}{\partial \tau} = 0 \quad \text{para } \tau = 0 \quad (4.26)$$

$$v \sim \frac{1}{\tau}, w \sim \frac{1}{\sqrt{2}\tau}, \hat{p} \sim -\frac{1}{2\tau^2} \quad \text{para } \tau \rightarrow \infty \quad (4.27)$$

Para la estación inicial, se define el parámetro

$$\alpha = \frac{2V_{z_0} \pi \delta}{\Gamma} \quad (4.28)$$

que caracterizará el comportamiento del vórtice. Entonces se tiene

$$v_i = \frac{1}{\tau} (1 - e^{-\tau^2}) \quad (4.29)$$

$$w_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{\tau} (1 - e^{-\tau^2})^{1/2} + (\sqrt{2}\alpha - 1) e^{-\tau^2} \right] \quad (4.30)$$

y por otro lado, para obtener la componente radial se resuelve la siguiente ecuación por el método de diferencias finitas

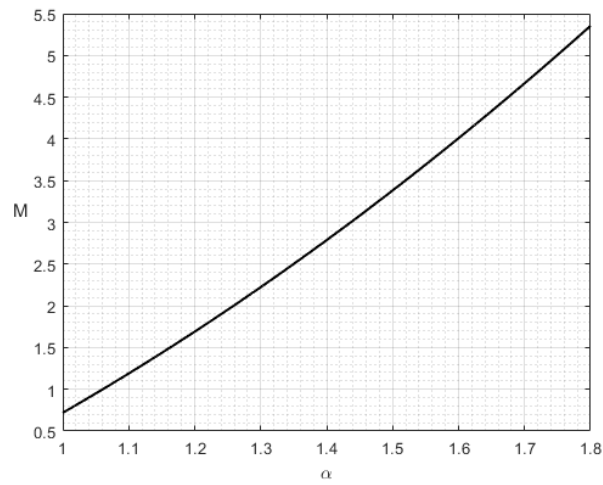
$$\begin{aligned} & \left[ w_i w_i'' + \frac{1}{\tau^2} w_i^2 - \frac{1}{\tau} w_i w_i' - \frac{2v_i}{\tau^2} (\tau v_i)' \right] u_i - \frac{w_i^2}{\tau} (u_i' + \tau u_i'') \\ & = \left[ w_i''' w_i + \frac{1}{\tau} w_i w_i'' - \frac{1}{\tau^2} w_i w_i' - \frac{2}{\tau} v_i v_i'' - \frac{2}{\tau^2} v_i v_i' + \frac{2}{\tau^3} v_i^2 \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

Una vez se tiene el problema definido en variables adimensionales, se procede a su resolución. Como se ha hecho en los anteriores apartados, se resolverá tanto con el método de diferencias finitas como con el método de líneas, para comparar los resultados obtenidos.

La manera de resolverlo será obtener en primer lugar  $v'$ , que se corresponde con  $\tau v$  y a continuación obtener  $v$  (ecuación (4.24)). Con esto, se obtiene la presión (ecuación (4.23)), y tras esto obtenemos  $w$  (ecuación (4.25)). Finalmente, se obtiene  $u\tau$  y en consecuencia  $u$ . Para la obtención de todas las variables se utilizan las condiciones de contorno mencionadas anteriormente. En los anexos A y B se presenta el avance en estaciones implementado para las ecuaciones mecánicas junto a la de la energía utilizando ambos métodos. Para el caso mecánico, se omite la ecuación de la energía.

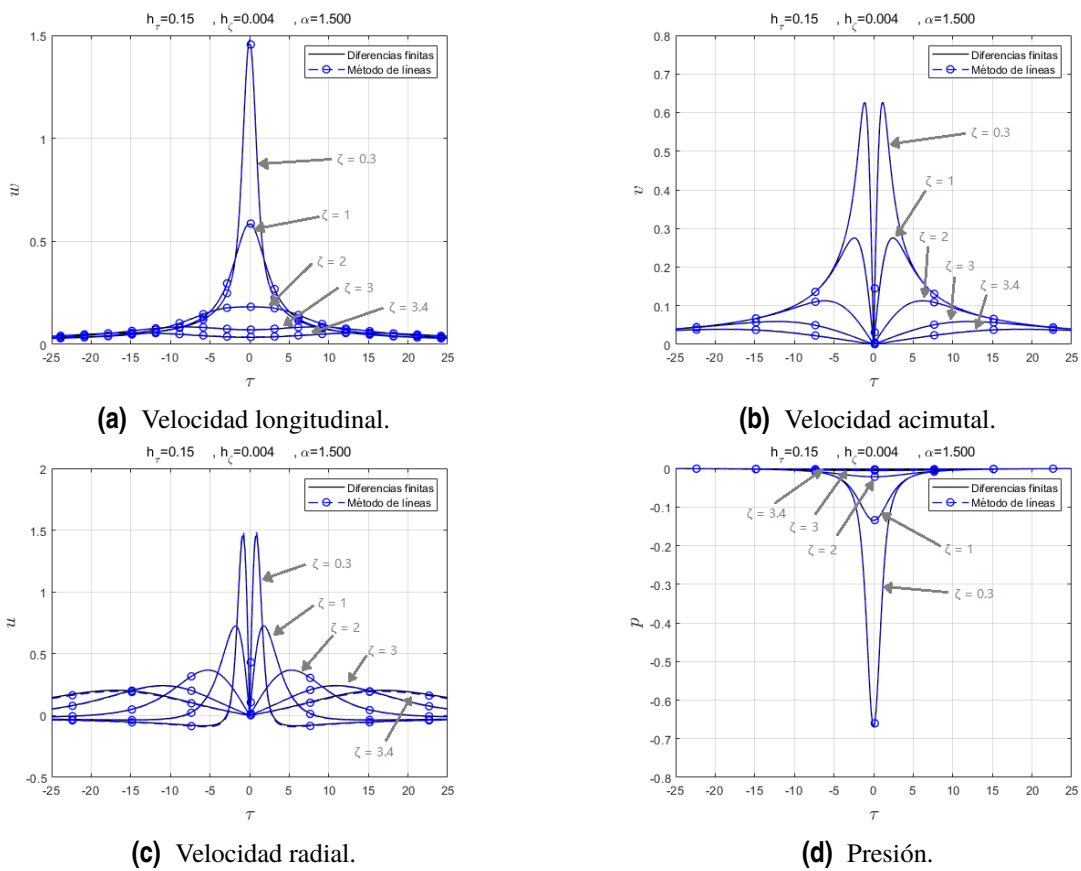
A continuación se presenta la relación existente entre la fuerza del flujo adimensional y el

parámetro  $\alpha$ , que será útil para el análisis y comparación de los resultados. De (4.21) se deduce que para cada valor de  $\alpha$  hay asociado un único valor de  $M$  y, por tanto, también define la estructura del flujo.



**Figura 4.3** Relación entre  $M$  y  $\alpha$ .

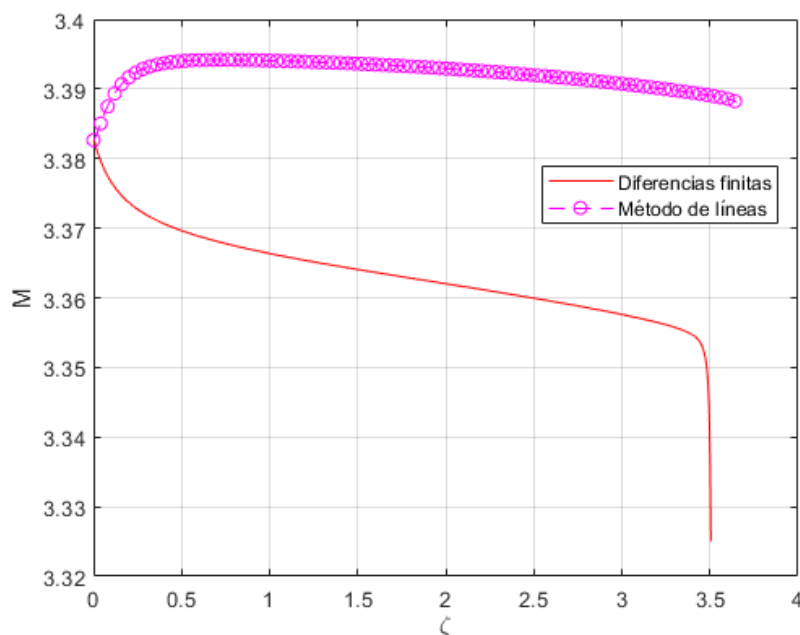
Teniendo todo lo anterior en cuenta, se muestran los valores obtenidos para las diferentes magnitudes adimensionales que abarca el problema utilizando un valor de  $\alpha$  de 1.5.



**Figura 4.4** Comparación de resultados obtenidos por el método de líneas y el de diferencias finitas.

Se aprecia la convergencia de los resultados obtenidos mediante ambos métodos. Asimismo, se observa como a lo largo de las diferentes estaciones el flujo se frena longitudinalmente, sufriendo una deceleración cada vez menor, que causa que la velocidad radial sea positiva y vaya reduciéndose. A su vez, cuando el flujo llega a un punto cercano al de rotura, el flujo longitudinal en el eje tiende a cero de una manera rápida, mientras que en consecuencia, la velocidad radial aumenta. Por otro lado, la presión adimensional es menor en el eje del vórtice que en el resto del mallado y va aumentando para mayores estaciones. Mientras tanto, la velocidad acimutal decrece a lo largo de las estaciones sin verse afectada significativamente por la rotura del vórtice.

A pesar de esto, existe una diferencia notable en la evolución del *flow force* a lo largo de las diferentes estaciones en los resultados obtenidos por ambos métodos. En [7], Long establece que la fuerza de flujo debe mantenerse constante a lo largo del eje  $z$  hasta el punto de rotura. Sin embargo, debido a la acumulación de errores numéricos a lo largo de la integración numérica, se produce cierta variación.



**Figura 4.5** Comparación del *flow force* y del punto de rotura.

En la figura 4.5 se aprecian estas diferencias así como esta variación. Obsérvese cómo para diferencias finitas,  $M$  disminuye conforme aumenta  $\zeta$  de una manera aproximadamente lineal hasta que se produce la rotura del vórtice, en el que se produce un cambio brusco de las variables. Por otro lado, el método de líneas sufre una variación menor del *flow force*, aumentando hasta cierto punto a partir del cual decrece de una manera casi lineal. Cerca del punto de rotura, el método de líneas, al adaptarse a la rápida variación de las magnitudes, puede verse como no sufre un decrecimiento brusco.

Asimismo, puede observarse como en el flujo estudiado por el método de líneas el *vortex breakdown* se produce más tarde. Para detectar numéricamente en que punto se produce, se han implementado dos condiciones diferentes, una para cada método. En diferencias finitas, el criterio aplicado es análogo al que se aplica para la rotura de la capa límite, es decir, que la velocidad longitudinal en el eje sea negativa. En el método de líneas, la velocidad longitudinal llega a un valor muy cercano a cero pero no llega a ser negativa. En consecuencia, para detectar la rotura del vórtice se observa el comportamiento del flujo. Instantes antes de que se produzca la rotura, la velocidad longitudinal en el eje tiende rápidamente a cero. La velocidad transversal, por otro lado, aumenta

rápidamente. Se impone, entonces, que la rotura se produce cuando la velocidad longitudinal máxima no se encuentra en el eje y la velocidad transversal supera un valor característico, estudiado para diferentes valores de  $\alpha$ .

En cuanto a coste computacional, la diferencia vuelve a ser notable. Resolver este problema mediante diferencias finitas, ha tardado 3 segundos, mientras que mediante el método de líneas el tiempo ronda los 5 minutos.

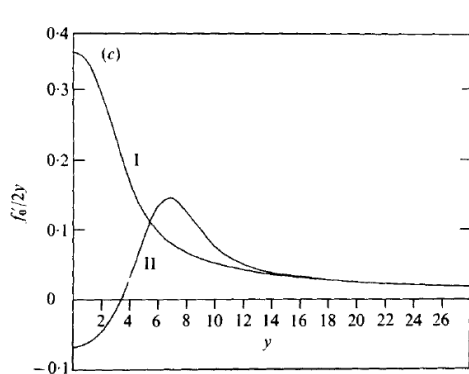
Para comprobar la validez de los resultados, se procede a comparar los resultados obtenidos con las soluciones de semejanza obtenidas en [1]. Hay que tener en cuenta que en [1] se trabaja con  $M$  como referencia, mientras que el parámetro de control del flujo en el programa implementado es  $\alpha$ . Por ello, es necesario saber a que valor de  $\alpha$  corresponde cada valor de  $M$ . Para esto, se recurre a la figura 4.3. Una vez obtenidos los valores de  $\alpha$ , se procede a realizar el cambio de variables pertinente:

$$y = \frac{Kr}{2^{1/2}v_z} = \frac{\tau}{w^{1/2}\zeta} \quad (4.32)$$

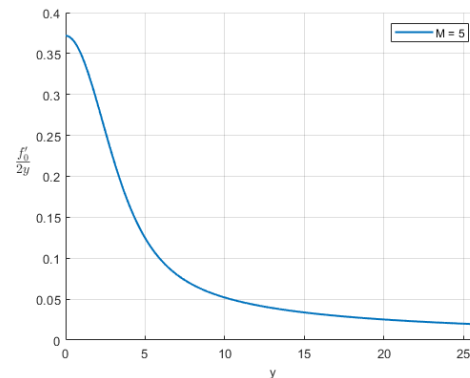
$$w = \frac{K}{2^{1/2}r}f'_0(y) \rightarrow f'_0(y) = 2^{1/2}w\tau \quad (4.33)$$

$$\frac{f'_0(y)}{2y} = w\zeta \quad (4.34)$$

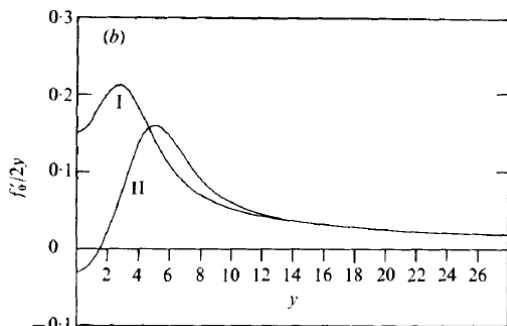
Y se obtiene:



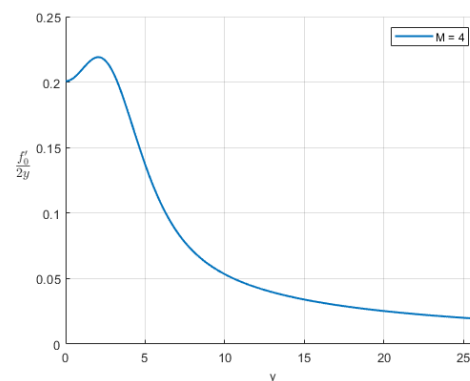
(a) Solución para  $M=5$ , obtenido de [1].



(b) Solución de semejanza obtenida numéricamente.



(c) Solución para  $M=4$ , obtenido de [1].



(d) Solución de semejanza obtenida numéricamente.

**Figura 4.6** Comparación entre los resultados obtenidos y los obtenidos en [1].

Obsérvese en la figura 4.6a que hay dos soluciones para un mismo valor del *flow force*. Estas dos soluciones representarían la solución de semejanza para el caso en el que se produjera la rotura (II) y para el caso en el que no (I). Para el valor mostrado, no se produce la rotura del vórtice, por lo que la solución obtenida para  $M=5$  y  $M=4$  debe parecerse a la solución denominada como I.

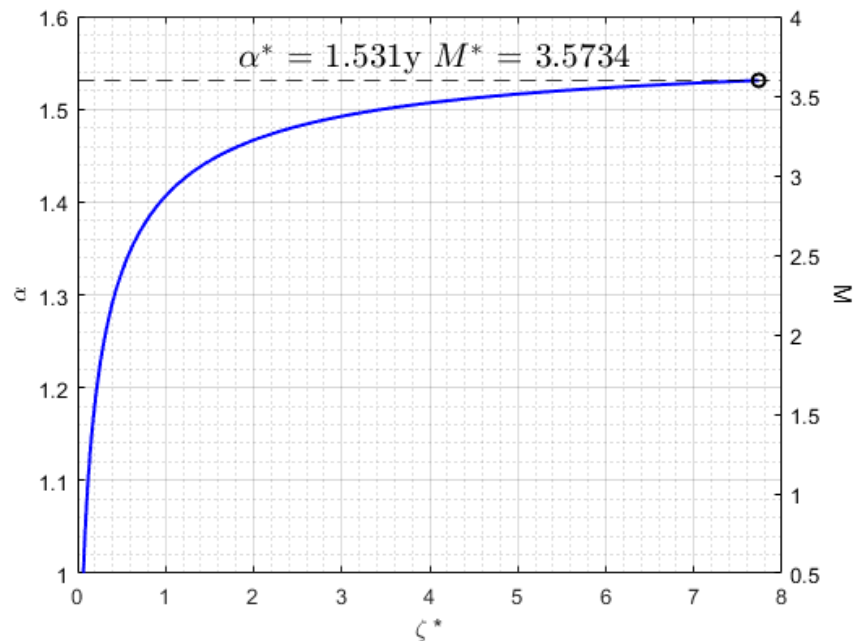
Quedando demostrada la validez del programa implementado, se procede a calcular el *flow force* crítico, que representa el valor a partir del cual no se produce la rotura del vórtice. Se observa como varía con respecto a los obtenidos por *Long* en [7] y *Burggraf y Foster* en [1], pudiéndose deber a las diferencias entre los métodos empleados.

**Tabla 4.1** Comparación de los valores de  $M^*$  obtenidos con la literatura.

	<i>Long</i>	<i>Burggraf y Foster</i>	Diferencias finitas	Método de líneas
$M^*$	3.65	3.75	3.57	3.54

Por otro lado, para los resultados obtenidos en [1] mediante avance en estaciones, para un  $M = 4$  se produce una reducción de 0.16 del *flow force* hasta  $z = 8$ , mientras que para ese mismo valor en el programa implementado se produce una reducción de 0.035 para diferencias finitas y de 0.015 para el método de líneas. Es decir, los errores numéricos que hacen que  $M$  no sea constante a lo largo de  $z$  son menores en los métodos empleados.

También puede resultar interesante ver como afecta el parámetro  $\alpha$  al punto de rotura del vórtice. En la figura 4.7 se presenta este resultado. Por tener el menor coste computacional, se ha realizado utilizando el método de diferencias finitas.



**Figura 4.7** Evolución de  $\zeta^*$  frente a  $\alpha$  y  $M$ .

Obsérvese como a medida que aumenta  $\alpha$ , y en consecuencia el *flow force*, se retrasa la rotura, como era de esperar. Asimismo, a mayor valor de  $\alpha$ , mas sensible se vuelve el punto de rotura a la variación de éste. En los resultados obtenidos en [1] se tiene que para un  $M = 1.7$  ( $\alpha = 1.2$ ),  $z^* = 0.202$ , pudiéndose observar en la figura 4.7 que para ese mismo valor de  $M$ , se tiene un  $z^* = 0.22$ .

Para finalizar este capítulo, se comparan los resultados obtenidos con las observaciones de un tornado que tuvo lugar en 1957 en *Dallas*. Las observaciones recogidas en [1] datan que



aproximadamente, la velocidad máxima vertical del tornado era de 70 m/s a una altura de 45 m sobre el suelo. El valor de la velocidad acimutal estaba entorno a los 58 m/s en un radio de 37 m. Estos valores proporcionan un valor de  $K = 2137 \text{ m}^2/\text{s}$ . Por lo tanto, el parámetro  $\alpha$  tomaría un valor aproximado de 1.2. También se deduce en [1] que  $K/v = 100$ .

Realizar la comparación de las observaciones del tornado con las soluciones numéricas no es trivial ya que no se observó ningún punto en el que se cumplieran las condiciones iniciales. Por lo tanto, para poder comparar las observaciones, se sabe que para una altura de 45 metros comenzó la rotura de la estructura del flujo. Definiendo este punto como aquel en el que la velocidad longitudinal máxima no se encuentra en el eje, numéricamente se obtiene que este valor se corresponde a  $\zeta = 0.1601$ . Conociendo estos datos, se pueden relacionar las variables adimensionales y las dimensionales a través de la siguiente ecuación:

$$z^* - 45 = \left( \frac{K\delta}{v} \right) (\zeta^* - 0.1601) \quad (4.35)$$

En esta ecuación,  $\zeta^*$  representaría la distancia adimensional a la que rompe el vórtice y  $z^*$  la altura a la que ocurriría. Numéricamente se obtiene que  $\zeta^* = 0.2162$  y, despejando, se obtiene que  $z^* = 252$  m. Las observaciones sitúan la rotura del vórtice a una altura de unos 259 metros, luego es una buena aproximación.



## 5 Vórtice térmico.

---

Teniendo correctamente definida la parte mecánica del movimiento, se está en condición de implementar la influencia de la temperatura a las ecuaciones. En este capítulo, se añade el término de la temperatura al problema a través de la ecuación de la energía y, de manera análoga al caso de los penachos térmicos, se aplica la aproximación de *Boussinesq*. Asimismo, para modelar el gradiente de temperatura que impulsa el flujo, se utilizará un foco de calor inmerso en el fluido (figura 3.2), y se estudiará como afecta a las diferentes magnitudes.

Las ecuaciones que gobiernan este problema se obtienen de [4], artículo en el que se estudia detalladamente la estructura de los núcleos de los vórtices. Esto implica que a las ecuaciones (4.1) - (4.4) se le añade la ecuación de la energía:

$$\rho C_P \left( u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q(r,z) \quad (5.1)$$

donde  $k$  representa la conductividad térmica.

Ahora, como se está aplicando la aproximación *Boussinesq*, la densidad puede suponerse constante en todos los términos exceptuando aquel en el que esté involucrada la temperatura. Llamando a la presión efectiva para el problema térmico  $P'$ , se tiene:

$$P' = \frac{1}{\rho} (P_{\text{hidrostática}} + P_{\text{mecánica}}) \simeq \frac{\rho g z}{\rho_\infty} + \frac{P}{\rho_\infty} \simeq \frac{P}{\rho_\infty} (1 - \beta(T - T_\infty)) g z \quad (5.2)$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial P'}{\partial r} = \frac{\cancel{\partial P'_h}}{\cancel{\partial r}} + \frac{\partial P'_m}{\partial r} = \frac{v^2}{r} = \frac{\partial P}{\partial r} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial P'}{\partial z} = \frac{\partial P'_m}{\partial z} + (1 - \beta(T - T_\infty)) g = \frac{\left( \frac{P}{\rho_\infty} + g z \right)}{\partial z} - \beta(T - T_\infty) g = \frac{\partial P}{\partial z} - \beta(T - T_\infty) g \quad (5.4)$$

observando la relación existente con la presión efectiva definida para el problema mecánico

$$P = \frac{P}{\rho_\infty} + g z \quad (5.5)$$

Aplicando esto a las ecuaciones (4.1) - (4.4) se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial}{\partial z}(rw) = 0 \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{v^2}{r} \quad (5.7)$$

$$u \frac{\partial}{\partial r}(rv) + w \frac{\partial}{\partial z}(rv) = vr \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) \right) \quad (5.8)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{\partial P}{\partial z} + \beta(T - T_\infty)g \quad (5.9)$$

y junto a la ecuación (5.1) conformaría el conjunto de ecuaciones que gobiernan el problema a resolver.

Este problema se resolverá con las condiciones de contorno utilizadas en el problema mecánico, añadiéndose, para la temperatura:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{para } r = 0 \quad (5.10)$$

$$T = T_\infty \quad \text{para } r \rightarrow \infty \quad (5.11)$$

$$T = T_\infty \quad \text{para } z = 0 \quad (5.12)$$

Como se ha mencionado, se modelará la fuente de calor como el foco mostrado en la figura 3.2 para el caso axisimétrico, cuya ecuación se corresponde con

$$q(r,z) = A Q e^{-\frac{(z-z_F)^2 + r^2}{L_F^2}} \quad (5.13)$$

donde ya se calculó que

$$A = \frac{1}{\pi^{3/2} L_F^2} \quad (5.14)$$

El conjunto de las ecuaciones y condiciones de contorno definen el problema a resolver. Para poder afrontarlo, se procede a utilizar la misma adimensionalización que para el caso mecánico. Haciendo un análisis dimensional, se tiene que:

$$T_c - T_\infty = \frac{Q}{2\pi\rho_\infty C_p w_c \delta^2} \quad (5.15)$$

donde  $T_c$  es la temperatura característica del flujo, y definiendo el número de Grashof para el problema como:

$$Gr = \frac{\beta(T_c - T_\infty)g\delta^3}{\nu K} \quad (5.16)$$

se llega a

$$T_c - T_\infty = \frac{\nu K Gr}{\beta g \delta^3} \quad (5.17)$$

$$Q = 2\pi\rho_\infty C_p \frac{\nu K^2 Gr}{\beta g \delta^2} \quad (5.18)$$

Finalmente, se define la variable adimensional

$$T - T_\infty = \theta(T_c - T_\infty) = \theta \frac{\nu K Gr}{\beta g \delta^3} \quad (5.19)$$

y aplicándola a las ecuaciones resultan

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\tau u) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(\tau w) = 0 \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \tau} = \frac{v^2}{\tau} \quad (5.21)$$

$$u \frac{\partial}{\partial \tau}(\tau v) + w \frac{\partial}{\partial \zeta}(\tau v) = \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau}(\tau v) \right) \quad (5.22)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \tau \frac{\partial w}{\partial \tau} \right) - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \zeta} + Gr \theta \quad (5.23)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \tau \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right) + \frac{Re}{\pi^{3/2}} \left( \frac{\delta}{L_F} \right)^3 e^{-\left(\frac{\delta}{L_F}\right)^2 \left[ (\zeta - \zeta_F)^2 \left(\frac{Re}{2\pi}\right)^2 + \tau^2 \right]} \quad (5.24)$$

y por tanto las condiciones de contorno

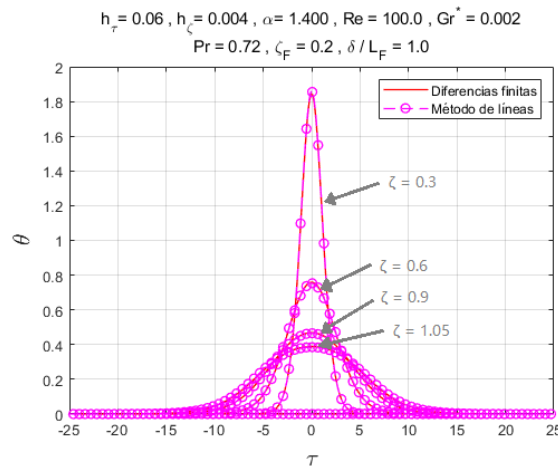
$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0 \quad \text{para } \tau = 0 \quad (5.25)$$

$$\theta = 0 \quad \text{para } \tau \rightarrow \infty \quad (5.26)$$

$$\theta = 0 \quad \text{para } \zeta = 0 \quad (5.27)$$

Definidas las ecuaciones que gobiernan el problema mecánico y térmico asociado a un flujo giratorio, se está en condiciones de resolverlas mediante ambos métodos. En los anexos A y B se muestra la parte del código empleado asociada al avance en estaciones.

A continuación se muestran los resultados obtenidos de implementar estas ecuaciones junto a las condiciones de contorno únicamente para el campo de temperaturas en diferentes  $\zeta$ , comparando entre los resultados obtenidos por el método de líneas y diferencias finitas. Los diferentes campos de velocidades tienen una forma análoga a los mostrados en el capítulo anterior.



**Figura 5.1** Comparación de la distribución de  $\theta$  obtenido por los diferentes métodos.

Obsérvese como la temperatura adimensional tiene un comportamiento análogo al caso de los penachos térmicos. Cuando el flujo se va acercando al foco, su temperatura aumenta mientras que conforme se va alejando la temperatura decrece. Esto se debe debido a que el calor por convección es constante. En cuanto al resto de magnitudes, el incremento de temperatura aumenta la velocidad longitudinal y disminuye la radial, tal y como se observó de los resultados obtenidos en el capítulo 3. Esto se contrapone a la tendencia natural del vórtice en un punto cercano a la rotura, que es reducir

su velocidad longitudinal y aumentar la radial rápidamente. En consecuencia, se puede retrasar o incluso evitar el *vortex breakdown*.

Para ilustrar como afecta el aporte de calor en el flujo, se muestran diferentes campos de velocidades evaluados en la misma estación, para el caso mecánico ( $Gr = 0$ ) y el caso térmico ( $Gr \neq 0$ ).

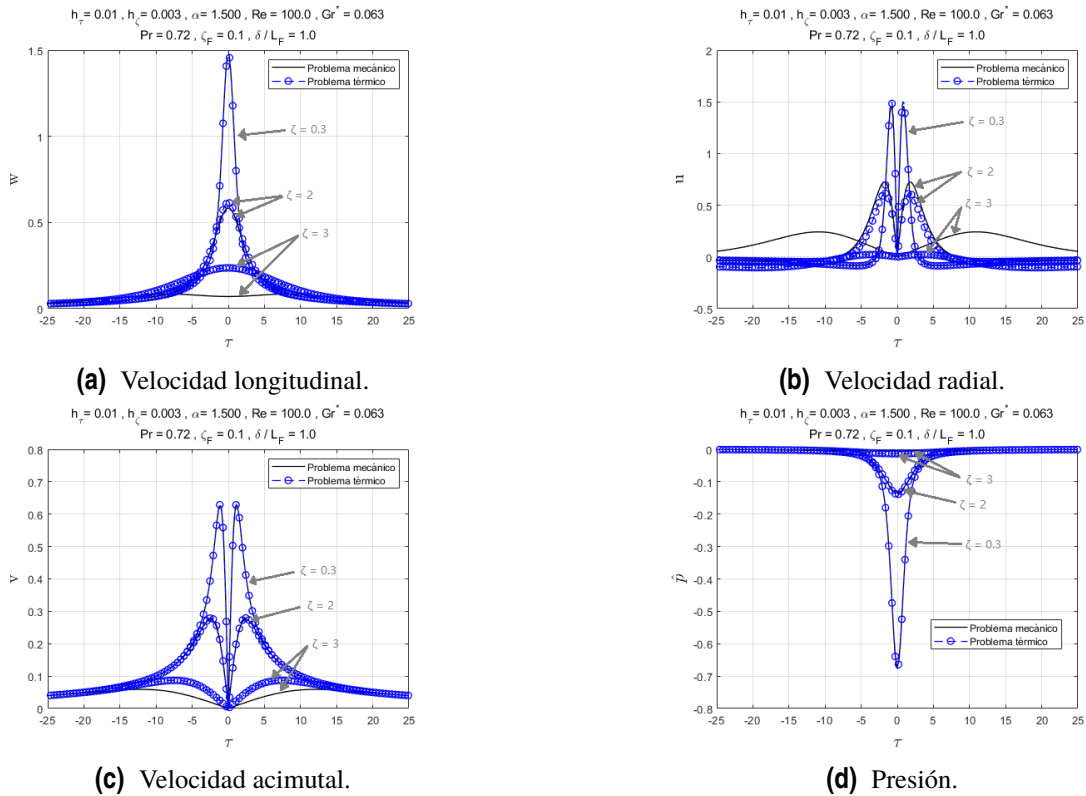


Figura 5.2 Comparación de las variables obtenidas para el problema mecánico y térmico.

Como se ha mencionado, puede observarse como para estaciones lejanas al foco, la influencia de la temperatura produce un menor decremento en la velocidad longitudinal. Para la velocidad radial, la influencia del foco hace que se reduzca más que para el problema mecánico, llegando a tomar valores incluso negativos. Por otro lado, la velocidad acimutal se ve afectada en menor medida y por ende la presión, cuyos valores en estaciones lejanas son parecidos para el caso mecánico y térmico. Esto resulta el siguiente campo de temperaturas del mallado:

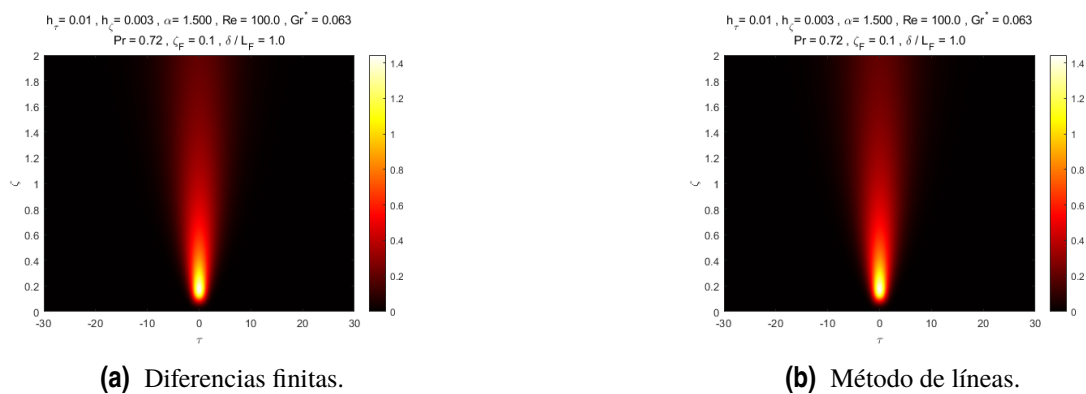
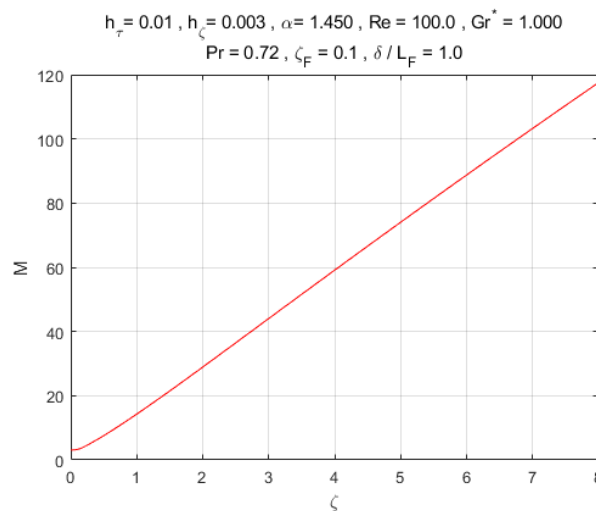


Figura 5.3 Campo de temperaturas obtenido por ambos métodos.

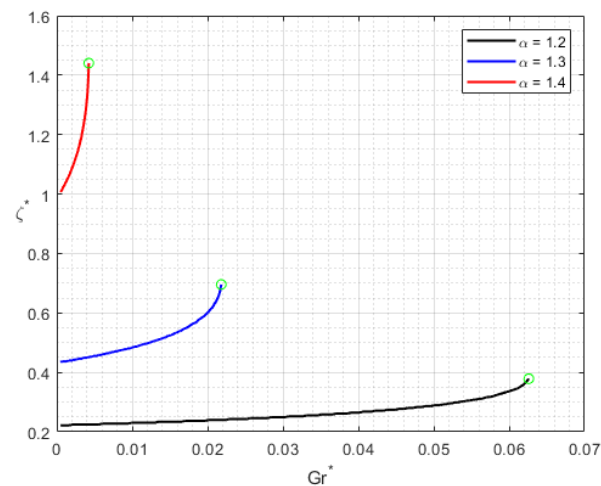
Ahora, al estar el número de Grashof referido a la longitud característica transversal y estar en un flujo esbelto, tomará un valor notablemente inferior al que toma para los penachos térmicos, donde estaba referido para la longitud característica a lo largo del eje longitudinal.

Para los resultados mostrados, en el flujo asociado al vórtice térmico no se ha producido la rotura, mientras que analizando el comportamiento para el mismo valor de  $\alpha$  para el vórtice mecánico se obtiene que  $\zeta^* \simeq 0.94$ . Obsérvese como, la presencia de un foco de calor inmerso, puede retrasar o incluso evitar la rotura. Para observar la influencia que tiene en el *flow force*, se muestra el siguiente resultado:



**Figura 5.4** Evolución del *flow force* .

Obsérvese como aumenta de manera lineal debido al aporte de energía térmica que realiza el foco. A continuación, se muestra un análisis más detallado sobre la influencia del número de Grashof en el punto de rotura para una posición del foco dada:

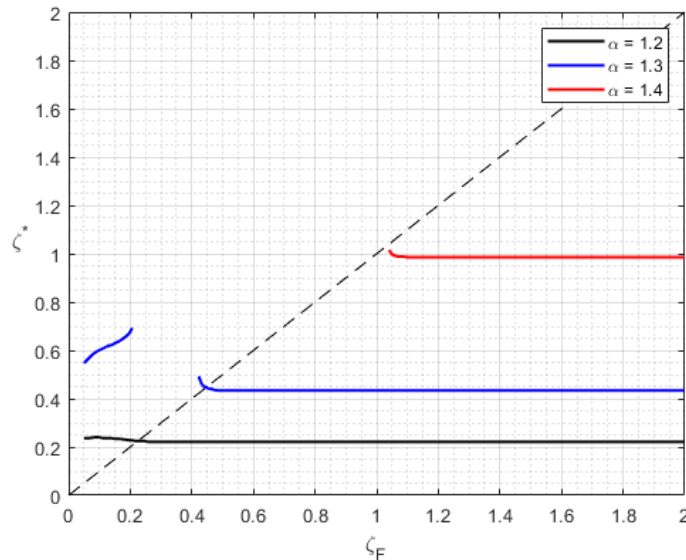


**Figura 5.5** Evolución de  $\zeta^*$  frente a  $Gr$ .

En esta figura se muestra la evolución del punto de rotura frente a  $Gr$  para una posición del foco constante, donde  $\alpha$  toma los valores de 1.2, 1.3 y 1.4. Se ve como el punto de rotura aumenta de manera creciente con  $Gr$  hasta un valor máximo a partir del cual ya no se produce el *vortex*

*breakdown*. Obsérvese, de igual manera, como para mayores valores de  $\alpha$ , menor es la cantidad de calor necesario para evitar la rotura del vórtice. Analizando en detalle como evoluciona la estructura interna del fluido en el núcleo del vórtice, se observa que para un valor de  $Gr$  tal que no se produce la rotura, la estructura del vórtice comienza su rotura, que se ve mermada debido a que el calor aportado supone incremento de la velocidad longitudinal y en consecuencia una reducción de la velocidad transversal. Al mismo tiempo que se equilibran el aumento y el decremento de la velocidad longitudinal y transversal, la velocidad radial se frena, resultando en la no rotura del vórtice y la estabilización del flujo.

Como afecta la posición del foco al punto de rotura se muestra en la siguiente figura.



**Figura 5.6** Influencia de la posición del foco en el punto de rotura del vórtice.

Estos resultados se han obtenido para un número de  $Gr$  de 0.02. En esta figura se muestran los diferentes puntos de rotura, manteniendo  $Gr$  constante, cuando se varía la posición del foco, así como los puntos tales que el foco se sitúa en el punto de rotura del problema mecánico. Teniendo en cuenta los resultados mostrados en la figura 5.5, si para un  $\alpha$  se introduce una cantidad de calor tal que puede evitarse la rotura del vórtice, se observan dos zonas diferenciadas de la posición del foco en las que se produce la rotura. La primera, situada en azul y a la izquierda en la figura 5.6, representa la zona en la que el foco está situado previo al  $\zeta^*$  para el problema mecánico. En esta zona, el foco no evita la entrada en pérdida pero sí la retrasa. La segunda zona, situada a la derecha, representa la zona en la cual el vórtice rompe sin llegar a percibir la influencia del foco. Entre estas zonas, representadas en azul, se situaría la posición del foco que evitaría el *breakdown*. Por otro lado, si el calor que está aportando el foco es tal que evita la rotura del vórtice holgadamente ( $\alpha$  está más cerca del valor crítico), el único requisito para evitar la rotura es que el foco se sitúe previo al  $\zeta^*$  del problema puramente mecánico, como puede verse para  $\alpha = 1.4$ . Y por último, si el calor aportado es mucho menor al que necesita la estructura del flujo para evitar la rotura, el *vortex breakdown* se produce independientemente de la posición del foco, retrasándose un poco si se coloca antes del  $\zeta^*$  asociado al problema mecánico, como puede observarse para  $\alpha = 1.2$ .

Como conclusión tras el análisis del problema y posterior estudio de sus resultados, cuanto más cerca esté la fuerza del flujo de su valor crítico, menor es el calor a aportar para evitar la rotura del flujo, siendo de gran importancia la posición en la que se encuentra el foco de calor.



## 6 Conclusiones y líneas futuras.

---

A lo largo de este trabajo se han presentado multitud de resultados interesantes. En este último capítulo se intentan recopilar de manera general algunos de ellos.

Para el modelo numérico del fenómeno físico conocido como penachos térmicos, tanto para el caso bidimensional como axisimétrico, se ha obtenido como para mayor número de *Grashof*, partiendo del reposo, el fluido experimenta un mayor gradiente tanto de temperatura como de velocidad longitudinal. Asimismo, a mayor *Gr*, mayor ancho tiene el penacho en las cercanías del foco. Por otro lado, también se ha comprobado como, al aumentar la velocidad del fluido circundante, se reduce el efecto de la convección natural. También se ha observado que para fluidos con un mayor número de *Prandtl* tienen una capa límite térmica más estrecha. Se ha visto la importancia de la concordancia de las condiciones de contorno iniciales con las ecuaciones que gobiernan el problema.

En cuanto a los vórtices, se ha partido del modelo definido en [1] y se ha implementado para el método de diferencias finitas y el método de líneas, encontrándose como el valor del "*flow force*" se mantiene aproximadamente constante. Se obtienen unos valores críticos inferiores a los obtenidos en [1] y [7].

Añadiendo el término de la temperatura al vórtice mecánico, se ha obtenido que, tanto el calor aportado por el foco como la posición en la que se encuentra este foco influyen de una manera significativa en el punto de rotura del vórtice. El aporte de calor retrasa la rotura del vórtice en función de la posición del foco. Para diferentes posiciones del foco y un valor de  $Gr^*$  dado, puede darse el caso de que simplemente retrase la rotura del vórtice, de que consiga evitarla o de que no afecte en absoluto.

A lo largo de todo el documento se ha hecho una comparación del coste computacional, así como la precisión de ambos métodos. Puede decirse que el método de diferencias finitas ofrece unos buenos resultados para un coste computacional muy bajo. Por otro lado, el método de las diferencias finitas ofrece unos resultados más precisos, respondiendo mejor a cambios bruscos en las magnitudes que el de diferencias finitas, pero teniendo como desventaja un mayor coste computacional.

Por último, en cuanto a líneas futuras, este trabajo puede servir de punto de partida para la implementación de la transición a flujo turbulento, tanto en el problema de los penachos térmicos como de los vórtices.



# Apéndice A

## Programa para la resolución del vórtice térmico por diferencias finitas.

---

```
1 %% Entramos en el avance de estaciones:
2 vprimanml = vnml.*tau;
3 for n = 2:Nzeta
4     %% Calculamos vprima:
5     % Implementamos las matrices del sistema de ecuaciones
6     Mutau = spdiags((unml+1./(tau+10^(-12)))',0,Ntau,Ntau);
7     Mwnml = spdiags(wnml',0,Ntau,Ntau)/hzeta;
8     Avprima = -D2 + Mutau*D1 + Mwnml;
9     rvprima = wnml.*vprimanml/hzeta;
10    % Imponemos las CC:
11    Avprima(1,:) = 0; Avprima(1,1) = 1; rvprima(1) = 0;
12    Avprima(Ntau,:) = 0; Avprima(Ntau,Ntau) = 1; rvprima(Ntau) = 1;
13    % Resolvemos el sistema:
14    vpriman = (Avprima\rvprima)';
15    % Calculamos v:
16    vn = vpriman./(tau+10^(-12));
17    vn(1) = 0;
18    %% Calculamos p:
19    pn(Ntau) = -1/2/taumax^2;
20    for i = Ntau-1:-1:1
21        pn(i) = pn(i+1) - htau/2*(vn(i+1)^2/(tau(i+1)+10^(-12))+...
22            vn(i)^2/(tau(i)+10^(-12)));
23    end
24    %% Calculamos w:
25    % Implementamos las matrices del sistema de ecuaciones
26    Mumtau = spdiags((unml-1./(tau+10^(-12)))',0,Ntau,Ntau);
27    Awn = -D2+Mumtau*D1+Mwnml;
28    rw = wnml.^2/hzeta-(pn-pnml)/hzeta+Grast*thetanml;
29    % Imponemos las CC:
30    Awn(1,:) = 0; Awn(1,1) = 1; Awn(1,2) = -1; rw(1) = 0;
31    Awn(Ntau,:) = 0; Awn(Ntau,Ntau) = 1; rw(Ntau) = 1/(sqrt(2)*taumax);
32    % Resolvemos el sistema:
33    wn = (Awn\rw)';
34    % Imponemos la condicion del vortex breakdown:
35    if wn(1) <= 0
36        nast = n-1;
37        break
38    end
39    %% Calculamos uprima:
40    unprima(1) = 0;
```

```

41   dwdzeta = (wn-wnm1)/hzeta;
42   for i = 2:Ntau
43       unprima(i) = unprima(i-1) - htau/2*(tau(i)*dwdzeta(i)+...
44           tau(i-1)*dwdzeta(i-1));
45   end
46   % Calculamos u:
47   un = unprima./(tau+10^(-12));
48   %% Calculamos theta:
49   Mumpr = spdiags((un-1./(Pr*(tau+10^(-12))))',0,Ntau,Ntau);
50   Mwn = spdiags((wn)',0,Ntau,Ntau)/hzeta;
51   rtheta = wn.*thetanm1/hzeta + Re*ΔpLf^3*exp(-(ΔpLf^2*((zeta(n)-...
52       zetaF)^2*(Re/2/pi)^2+tau.^2))/pi^(3/2);
53   Atheta = -1/Pr*D2+Mumpr*D1+Mwn;
54   % Imponemos las CC:
55   Atheta(1,:) = 0; Atheta(1,1) = 1; Atheta(1,2) = -1; rtheta(1) = 0;
56   Atheta(Ntau,:) = 0; Atheta(Ntau,Ntau) = 1; rtheta(Ntau) = 0;
57   % Obtenemos thetan
58   thetan = (Atheta\rtheta)';
59   %% Calculamos M:
60   M(n) = 2*pi*trapz(tau,tau.*(pn+wn.^2));
61   %% Actualizamos los valores para la proxima estacion
62   unm1 = un;
63   vprimanm1 = vpriman;
64   wnm1 = wn;
65   pn1 = pn;
66   thetanm1 = thetan;
67   T(n,:) = thetan;
68 end

```

## Apéndice B

# Programa para la resolución del vórtice térmico por el método de líneas.

---

```
1 %% Avance en estaciones
2 vprimanml = vnml.*tau;
3 for n = 1:Nzeta
4     %% Definimos el intervalo n
5     zeta0 = (n-1)*hzeta;
6     zetaf = n*hzeta;
7     %% Calculamos vprima
8     [zetav,vprimasol] = ode45(@(zeta,vprima) ...
9         odevprima(zeta,vprima,N,h,tau,unml,wnml),zetaspan,vprimanml);
10    Niv = length(zetav);
11    vpriman = vprimasol(Niv,:);
12    % Calculamos v
13    vn = vpriman./tau;
14    vn(1) = 0;
15    %% Calculamos la presion
16    pn(N) = -1/2/taumax^2;
17    for i = N-1:-1:1
18        pn(i) = pn(i+1) - h/2*(vn(i+1)^2/(tau(i+1)+10^(-12))+...
19            vn(i)^2/(tau(i)+10^(-12)));
20    end
21    %% Calculamos w
22    dpdzeta = (pn-pnml)/hzeta;
23    [zetaw,wsol] = ode45(@(zeta,w) odew(zeta,w,N,h,tau,dpdzeta,...
24        thetanml,Grast),zetaspan,wnml);
25    Niw = length(zetaw);
26    wn = wsol(Niw,:);
27    %% Calculamos uprima
28    dwdzeta = (wn-wnml)/hzeta;
29    upriman(1) = 0;
30    for i = 2:N
31        upriman(i) = upriman(i-1) - h/2*(tau(i)*dwdzeta(i)+...
32            tau(i-1)*dwdzeta(i-1));
33    end
34    un = upriman./tau;
35    un(1) = 0;
36    %% Calculamos theta
37    [zetatheta,thetasol] = ode45(@(zeta,...
38        theta) odetheta(zeta,theta,tau,h,N,Re,Pr,un,wn,deltaL_f,zetaF),...
39        zetaspan,thetanml);
40    Nitheta = length(zetatheta);
```

```

41   thetan = thetasol(Nitheta,:);
42   %% Imponemos el criterio del vortex breakdown:
43   if wn(1) < max(wn) && max(un) ≥ 2
44       nast = n-1;
45       break
46   end
47   %% Calculamos el flow force
48   M(n) = 2*pi*trapz(tau,tau.*(pn+wn.^2));
49   %% Actualizamos los valores para el siguiente intervalo
50   unml = un;
51   vprimanml = vpriman;
52   wnml = wn;
53   pnml = pn;
54   thetanml = thetan;
55   T(n,:) = thetan;
56 end
57 %% Definimos las ecuaciones diferenciales:
58 function dvprimadzeta = odevprima(zeta,vprima,N,h,tau,unml,wnml)
59 dvprimadzeta(1) = 0;
60 for i = 2:N-1
61     dvprimadtau = (vprima(i+1)-vprima(i-1))/2/h;
62     d2vprimadtau = (vprima(i+1)-2*vprima(i)+vprima(i-1))/h^2;
63     dvprimadzeta(i) = (dvprimadtau*(-unml(i)-1/tau(i))+...
64         d2vprimadtau)/(wnml(i)+10^(-12));
65 end
66 dvprimadzeta(N) = 0;
67 dvprimadzeta = dvprimadzeta';
68 end
69
70 function dwdzeta = odew(zeta,w,N,h,tau,dpdzeta,thetanml,Grast)
71 dwdzeta(1) = (2*(w(2)-w(1))/h^2-dpdzeta(1)+...
72     Grast*thetanml(1))/(w(1)+10^(-12));
73 suma = 0;
74 for i = 2:N-1
75     dwdtau = (w(i+1)-w(i-1))/2/h;
76     d2wdtau = (w(i+1)-2*w(i)+w(i-1))/h^2;
77     den = w(i) - 0.5*h*dwdtau;
78     dwdzeta(i) = (dwdtau/(tau(i)+10^(-12))+d2wdtau-dpdzeta(i)...
79         +Grast*thetanml(i)+dwdtau/tau(i)*suma)/(den+10^(-12));
80     suma = suma + h*tau(i)*dwdzeta(i);
81 end
82 dwdzeta(N) = 0;
83 dwdzeta = dwdzeta';
84 end
85
86 function dthetadzeta = odetheta(zeta,theta,tau,h,N,Re,Pr,u,w,deltaL_f,zetaF)
87 dthetadzeta(1) = (2*(theta(2)-theta(1))/h^2/Pr+...
88     Re/pi^(3/2)*deltaL_f^3*exp(-deltaL_f^2*((zeta-zetaF)^2*...
89     (Re/2/pi)^2+tau(1)^2))/w(1);
90 for i = 2:N-1
91     dthetadtau = (theta(i+1)-theta(i-1))/2/h;
92     d2thetadtau = (theta(i+1)-2*theta(i)+theta(i-1))/h^2;
93     dthetadzeta(i) = ((dthetadtau/tau(i)+d2thetadtau)/Pr+...
94         Re/pi^(3/2)*deltaL_f^3*exp(-deltaL_f^2*((zeta-zetaF)^2*...
95         (Re/2/pi)^2+tau(i)^2))-u(i)*dthetadtau)/w(i);
96 end
97 dthetadzeta(N) = 0;
98 dthetadzeta = dthetadzeta';
99 end

```

# Bibliografía

---

- [1] Odus R Burggraf and MR Foster, *Continuation or breakdown in tornado-like vortices*, Journal of Fluid Mechanics **80** (1977), no. 4, 685–703.
- [2] Jean M Delery, *Aspects of vortex breakdown*, Progress in Aerospace Sciences **30** (1994), no. 1, 1–59.
- [3] Gabino Daniel Díaz Reina, *Métodos numéricos sencillos para el cálculo de chorros y penachos térmicos laminares*, (2016).
- [4] MG Hall, *The structure of concentrated vortex cores*, Progress in Aerospace Sciences **7** (1966), 53–110.
- [5] Miguel Ángel Herrada Gutiérrez, *Estudio teórico y experimental de vórtices*, (2000).
- [6] Antonio Carrillo Ledesma, Karla Ivonne González Rosas, and Omar Mendoza Bernal, *Introducción al método de diferencias finitas y su implementación computacional*, Bernal, Facultad de Ciencias, UNAM (2015).
- [7] Robert R Long, *A vortex in an infinite viscous fluid*, Journal of Fluid Mechanics **11** (1961), no. 4, 611–624.
- [8] M Pérez-Saborid, MA Herrada, A Gómez-Barea, and A Barrero, *Downstream evolution of unconfined vortices: mechanical and thermal aspects*, Journal of Fluid Mechanics **471** (2002), 51–70.
- [9] Antonio Barrero Ripoll and Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor, *Fundamentos y aplicaciones de la mecánica de fluidos*, McGraw-Hill, 2005.
- [10] PA Vázquez, AT Perez, and A Castellanos, *Thermal and electrohydrodynamic plumes. a comparative study*, Physics of Fluids **8** (1996), no. 8, 2091–2096.
- [11] Wikipedia, *Manto terrestre — wikipedia, la enciclopedia libre*, 2022, [Internet; descargado 19-junio-2022].
- [12] Andrew W Woods, *Turbulent plumes in nature*, Annual Review of Fluid Mechanics **42** (2010), 391–412.

