

Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Estudio de Vigas Laminadas Piezoeléctricas para
Aplicaciones en Recolección de Energía

Autor: Maria de las Mercedes Matas Roldán

Tutor: Luis Rodríguez de Tembleque Solano

**Dpto. de Mecánica de Medios Continuos y
Teoría de Estructuras
Escuela Técnica Superior de Ingeniería**

Sevilla, 2022



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Estudio de Vigas Laminadas Piezoeléctricas para Aplicaciones en Recolección de Energía

Autor:

Maria de las Mercedes Matas Roldán

Tutor:

Luis Rodríguez de Tembleque Solano

Profesor Titular de Universidad

Dpto. de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2022

Trabajo Fin de Grado: Estudio de Vigas Laminadas Piezoeléctricas para Aplicaciones en Recolección de
Energía

Autor: Maria de las Mercedes Matas Roldán

Tutor: Luis Rodríguez de Tembleque Solano

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2022

El Secretario del Tribunal

A mis padres

Agradecimientos

Con este proyecto cierro una de las etapas más importantes de mi vida académica. Sin duda, ha sido de la que más he disfrutado y aprendido. Por ello, me gustaría dar las gracias a todas las personas que me han acompañado a lo largo de estos años.

En primer lugar, agradecer a mis padres, porque gracias a ellos hoy me encuentro escribiendo estas líneas. Por transmitirme siempre que con esfuerzo y constancia puedo conseguir todas las metas que me proponga.

También me gustaría agradecer a mis amigos, con los que he tenido el placer de compartir estos últimos cuatro años. Ellos son los responsables de que vaya a poder recordar esta etapa con muchísimo cariño.

A mi tutor, Luis, por la atención que me ha dedicado en todo momento, guiándome y ayudándome siempre que lo he necesitado.

Mercedes Matas Roldán

Estudiante del Grado de Ingeniería de Tecnologías Industriales

Sevilla, 2022

Resumen

Los generadores de energía piezoeléctrica presentan un gran interés tecnológico ya que surgen como alternativa a las baterías convencionales. La estructura de dispositivo más utilizada para los generadores de energía piezoeléctrica, es la de una viga en voladizo con una o dos capas de material piezoeléctrico.

En este trabajo, se analiza una viga en voladizo unimorfa sometida a una excitación externa. El principal objetivo de este estudio, es conocer bajo qué parámetros se puede recolectar la máxima energía posible. Para ello se desarrollan una serie de expresiones analíticas que relacionan el desplazamiento del extremo libre del voladizo, el voltaje y la carga generada con la excitación mecánica aplicada. Estas ecuaciones se derivan a partir de las ecuaciones constitutivas de un material piezoeléctrico. A su vez, se realiza un modelo de elementos finitos en el programa comercial ANSYS. Los resultados obtenidos con los modelos teóricos se comparan con los resultados obtenidos con el modelo de elementos finitos. Esto permite verificar que los resultados que se obtienen, fruto de los análisis de influencia paramétrica, son fiables.

Abstract

Piezoelectric power generators are of great technological interest as they are emerging as an alternative to conventional batteries. The most commonly used device structure for piezoelectric power generators, is a cantilever beam with one or two layers of piezoelectric material.

In this project, a unimorph cantilever beam subjected to external excitation is analyzed. The main objective of this study is to know under which parameters the maximum possible energy can be collected. For this purpose, a series of analytical expressions are developed that relate the displacement of the free end of the cantilever, the voltage and the load generated with the applied mechanical excitation. These equations are derived from the constitutive equations of a piezoelectric material. At the same time, a finite element model is performed in the commercial program ANSYS. The results obtained with the theoretical models are compared with the results obtained with the finite element model. This allows verifying that the results obtained from the parametric influence analysis are reliable.

Índice

| | |
|---|-----------|
| Agradecimientos | 9 |
| Resumen | 11 |
| Abstract | 13 |
| Índice | 15 |
| Índice de Tablas | 17 |
| Índice de Figuras | 19 |
| Notación | 21 |
| 1 Introducción | 1 |
| 1.1 <i>Motivación</i> | 1 |
| 1.2 <i>Objetivos</i> | 4 |
| 1.3 <i>Organización del documento</i> | 5 |
| 2 Modelos Teóricos | 7 |
| 2.1 <i>Modelo de viga unimorfa</i> | 8 |
| 2.1.1 <i>Modelo mecánico de viga unimorfa</i> | 10 |
| 2.1.2 <i>Modelo piezoeléctrico de viga unimorfa</i> | 11 |
| 2.2 <i>Modelo laminado</i> | 13 |
| 3 Modelo De Elementos Finitos | 17 |
| 4 Análisis. Comparación de los Modelos Teóricos y MEF | 23 |
| 4.1 <i>Propiedades de los materiales y dimensiones del modelo</i> | 23 |
| 4.2 <i>Análisis respuesta mecánica</i> | 27 |
| 4.2.1 <i>Modelo de laminado</i> | 27 |
| 4.2.2 <i>Modelo de viga unimorfa</i> | 28 |
| 4.2.3 <i>Modelo de elementos finitos</i> | 28 |
| 4.2.4 <i>Comparativa</i> | 30 |
| 4.3 <i>Análisis respuesta piezoeléctrica</i> | 31 |
| 4.3.1 <i>Modelo de viga unimorfa</i> | 31 |
| 4.3.2 <i>Modelo de elementos finitos</i> | 31 |
| 4.3.3 <i>Comparativa</i> | 33 |
| 4.4 <i>Conclusiones</i> | 34 |
| 5 Análisis. Estudio de la Influencia de Parámetros | 35 |
| 5.1 <i>Influencia de la relación de módulo elástico α y la relación de espesores β</i> | 36 |
| 5.2 <i>Influencia de la longitud L</i> | 39 |
| 5.3 <i>Influencia del ancho W</i> | 40 |
| 5.4 <i>Influencia de la relación W/t</i> | 41 |
| 5.5 <i>Conclusiones</i> | 45 |
| 6 Conclusiones Generales y Trabajos Futuros | 46 |
| 6.1 <i>Resumen</i> | 46 |
| 6.2 <i>Conclusiones</i> | 46 |
| 6.3 <i>Trabajos futuros</i> | 47 |

Anexo A. Códigos Ansys

49

Referencias

63

ÍNDICE DE TABLAS

| | | |
|-----------|---|----|
| Tabla 2.1 | Simbolos de las ecuaciones constitutivas de un material piezoeléctrico | 8 |
| Tabla 4.1 | Propiedades del acero inoxidable | 24 |
| Tabla 4.2 | Propiedades del material PZT4 | 24 |
| Tabla 4.3 | Propiedades equivalentes del material PZT4 | 26 |
| Tabla 4.4 | Dimensiones de la viga en voladizo | 26 |
| Tabla 4.5 | Resultados en desplazamientos del análisis de sensibilidad de la malla | 29 |
| Tabla 4.6 | Resultados desplazamiento máximo con cada uno de los modelos | 31 |
| Tabla 4.7 | Resultados en voltaje del análisis de sensibilidad de la malla | 33 |
| Tabla 4.8 | Resultados voltaje máximo generado con cada uno de los modelos | 34 |
| Tabla 5.1 | Dimensiones y propiedades de los materiales para el estudio paramétrico | 35 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1.1 Modelización del efecto piezoeléctrico directo (dcha) y efecto piezoeléctrico inverso (izq) [1] | 2 |
| Figura 1.2 Captación de energía piezoeléctrica [3] | 2 |
| Figura 1.3 Aplicaciones de dispositivos piezoeléctricos [4] | 3 |
| Figura 1.4 Configuración voladizo unimorfo (a) y bimorfo (b) [5] | 4 |
| Figura 2.1 Viga en voladizo unimorfa con carga aplicada en el extremo | 7 |
| Figura 2.2 Modos de operación: (a) d_{33} , (b) d_{31} [7] | 9 |
| Figura 2.3 Laminado piezoeléctrico | 13 |
| Figura 2.4 Representación laminado genérico | 16 |
| Figura 3.1 Representación esquemática del problema | 17 |
| Figura 3.2 Geometría del elemento SOLID186 y SOLID226 de ANSYS | 18 |
| Figura 3.3 Detalle mallado del modelo de elementos finitos realizado con ANSYS | 19 |
| Figura 3.4 Aplicación de la carga distribuida | 20 |
| Figura 3.5 Condiciones de contorno extremo empotrado | 20 |
| Figura 3.6 Modelo de elemtos finitos realizado con ANSYS | 21 |
| Figura 4.1 Esquema de los materiales de la viga en voladizo | 23 |
| Figura 4.2 Resultado desplazamiento vertical máximo obtenido con ANSYS | 28 |
| Figura 4.3 Malla 1 (izq), malla 2 (centro), malla 3 (dcha) | 29 |
| Figura 4.4 Representación del desplazamiento vertical máximo obtenido con cada modelo | 30 |
| Figura 4.5 Resultado voltaje generado obtenido con ANSYS vista superior | 32 |
| Figura 4.6 Resultado voltaje generado obtenido con ANSYS vista 3D | 32 |
| Figura 4.7 Representación del voltaje máximo generado con cada modelo | 33 |
| Figura 5.1 Influencia de la relación de espesor en el voltaje generado | 36 |
| Figura 5.2 Influencia de la relación del módulo elástico en el voltaje generado | 37 |
| Figura 5.3 Influencia de la relación de espesors en la carga generada | 37 |
| Figura 5.4 Influencia de la relación del módulo de elasticidad en la carga generada | 38 |
| Figura 5.5 Influencia de la longitud L en el voltaje generado | 39 |
| Figura 5.6 Influencia de la longitud L en la carga generada | 40 |
| Figura 5.7 Influencia del ancho en el voltaje generado | 40 |
| Figura 5.8 Influencia del ancho en la carga generada | 41 |
| Figura 5.9 Resultado voltaje máximo generado para una relación $W/t = 0,25$ (izq) y $W/t = 0,5$ (dcha) | 42 |
| Figura 5.10 Resultado del voltaje máximo generado para una relación $W/t = 0,75$ (izq) y $W/t = 1$ (dcha) | 42 |
| Figura 5.11 Resultado voltaje máximo generado para una relación $W/t = 2$ (izq) y $W/t = 3,5$ (dcha) | 43 |
| Figura 5.12 Resultado voltaje máximo generado para una relación $W/t = 5$ (izq) y $W/t = 6,5$ (dcha) | 43 |

| | |
|--|----|
| Figura 5.13 Resultado voltaje máximo generado para una relación $W/t = 8$ y $W/t = 10$ | 43 |
| Figura 5.14 Resultados voltaje máximo generado para distintos valores de la relación W/t | 44 |

Notación

| | |
|----------------------|--|
| A_i | Área de la sección transversal de cada capa |
| B | Constante que contiene la relación de espesores y de módulos elásticos |
| C | Capacitancia |
| D | Desplazamiento de carga dieléctrica |
| D_{ij} | Terminos de la matriz de comportamiento |
| D_{ij}^* | Elementos inversos de la matriz de comportamiento |
| D_3 | Densidad de carga eléctrica |
| E_i | Módulo de Young de cada capa |
| E | Intensidad de campo eléctrico |
| E_3 | Fuerza del campo magnético |
| E_b | Módulo de Young de la capa base |
| E_p | Módulo de Young de la capa piezoeléctrica |
| F | Fuerza aplicada |
| F_0 | Fuerza por unidad de longitud |
| L | Longitud de la viga |
| M | Momento a lo largo de la coordenada x |
| Q | Carga generada |
| $Q_{ij}^{(k)}$ | Tensiones reducidas en el plano |
| S | Deformación mecánica |
| T | Tensión mecánica |
| U | Energía total de la viga en voladizo |
| V | Voltaje a través del electrodo |
| W | Ancho de la viga |
| d | Coefficientes de carga piezoeléctrica |
| d_{31} | Constante piezoeléctrica en el modo 31 |
| k | Curvatura |
| s^E | Tensor de compliancia |
| t | Espesor de la viga |
| t_b | Espesor de la capa base |
| t_p | Espesor de la capa piezoeléctrica |
| ε | Permitividad eléctrica |
| ε_1 | Deformación a lo largo del eje 1 |
| ε_{33}^T | Permitividad del piezoeléctrico a tensión constante |
| σ_1 | Tensión a lo largo del eje 1 |
| s_{11}^E | Constante de conformidad elástica de la capa piezoeléctrica |
| s_b | Constante de conformidad elástica de la capa base |

| | |
|----------|---|
| w | Desplazamiento vertical |
| α | Relación de módulo elástico |
| β | Relación de espesores |
| ρ_b | Densidad de la capa base |
| ρ_p | Densidad de la capa piezoléctrica |
| ν_p | Coficiente de Poisson de la capa piezoeléctrica |
| ν_b | Coficiente de Poisson de la capa base |

1 INTRODUCCIÓN

El gran motor del cambio es la tecnología.

- Alvin Toffler -

A lo largo de este capítulo, se van a presentar los aspectos motivacionales de este proyecto. Además, se incluirá una revisión bibliográfica del estado del arte, así como los objetivos que se desean alcanzar. Por último, se añadirá un resumen de la organización del documento.

1.1 Motivación

En los últimos años, la tecnología inalámbrica ha sufrido grandes avances. Es por ello, por lo que el aprovechamiento de energías disponibles en el entorno, como las vibraciones mecánicas, el calor, los flujos de fluidos y la radiación electromagnética en forma de luz pueden suministrar energía limpia para el funcionamiento de diversos dispositivos electrónicos, como pueden ser las redes de sensores sin cables, la electrónica móvil y los dispositivos biomédicos implantables. Convencionalmente, estos dispositivos han sido alimentados por baterías electroquímicas. El principal inconveniente, es que dichas baterías presentan una vida útil limitada y a menudo más corta que la de los dispositivos electrónicos, por lo que su recarga o sustitución supone un coste adicional. En el caso de los dispositivos biomédicos, hay que realizar cirugías adicionales para sustituir las pilas lo que supone un mayor riesgo de infección para los pacientes y un mayor coste para las instituciones sanitarias. Otro inconveniente, es que las pilas son voluminosas y suelen dominar el peso y tamaño de los dispositivos electrónicos, por lo que los avances en la miniaturización de dichos dispositivos se ven dificultados. Teniendo en cuenta estos aspectos, la captación de energía se ha convertido en una alternativa a la tecnología convencional y ha atraído una gran atención como fuente de energía para una amplia gama de dispositivos electrónicos inalámbricos. La captación de energía engloba una serie de métodos que hacen referencia a la transformación de energía de procedencia ambiental en otras formas de energía mediante el empleo de pequeños dispositivos. [1].

A pesar de que existen numerosas formas de recolectar energía, los dispositivos piezoeléctricos son muy prometedores [2]. Los materiales piezoeléctricos tienen la capacidad de producir carga eléctrica cuando se deforman, esto se llama efecto piezoeléctrico directo. Por otro lado, estos materiales se deforman cuando se les aplica un campo eléctrico, lo que se denomina efecto piezoeléctrico inverso. Esta propiedad se utiliza para convertir la energía vibratoria en energía eléctrica, que puede almacenarse y utilizarse como fuente de energía alternativa a las baterías convencionales [2].

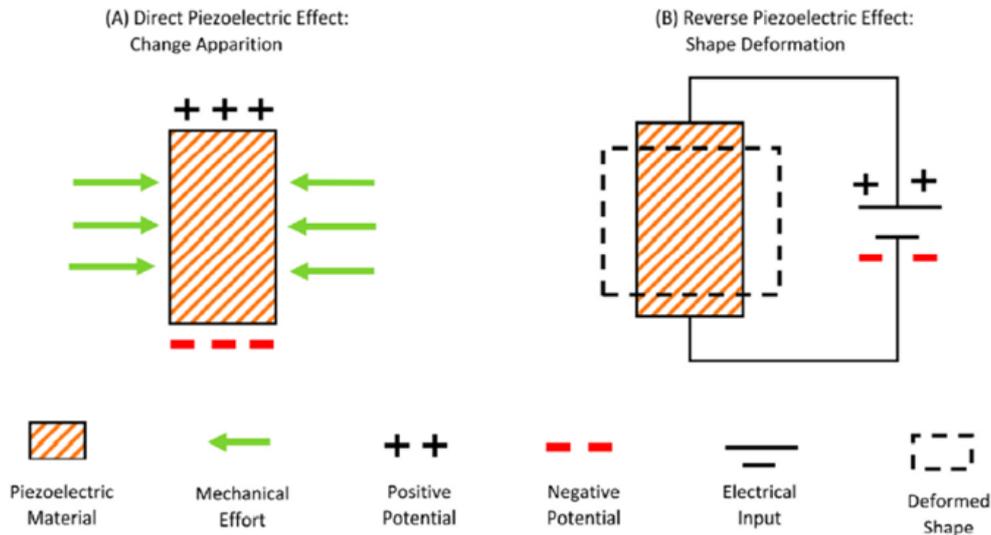


Figura 1.1 Modelización del efecto piezoeléctrico directo (dcha) y efecto piezoeléctrico inverso (izq) [1]

La captación de energía piezoeléctrica es un mecanismo muy útil para capturar energía mecánica del entorno y convertirla en energía eléctrica, debido a que el efecto piezoeléctrico se basa únicamente en la polarización intrínseca del material y no requiere de una fuente de tensión independiente, un campo magnético como es el caso de la captación de energía electrostática y electromagnética respectivamente [1]. Además, los dispositivos piezoeléctricos son duraderos y pueden fabricarse con dimensiones reducidas y compactas, lo que hace que se puedan integrar con facilidad en sistemas microelectrónicos. [3]

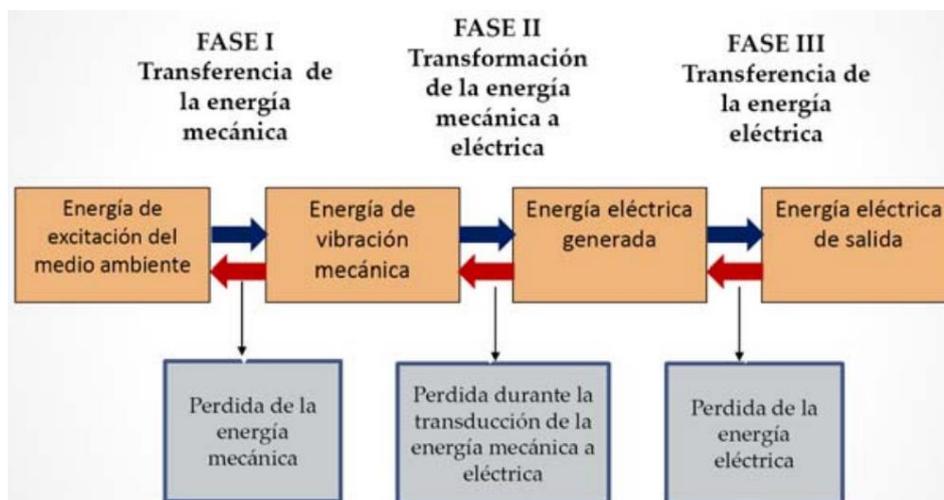


Figura 1.2 Captación de energía piezoeléctrica [3]

Por todo lo expuesto anteriormente, los dispositivos piezoeléctricos son la forma más prometedora de captación de energía, a la que se le han encontrado aplicaciones en muchos campos como las estructuras, el transporte, la electrónica inalámbrica, los sistemas microelectromecánicos, los dispositivos biomédicos, etc. El principal campo de aplicación de los dispositivos piezoeléctricos son las redes de sensores inalámbricos. Por ejemplo, la presión de un neumático puede controlarse mediante la comunicación inalámbrica de sensores alimentados por recolectores de energía piezoeléctrica. Otra aplicación, es la predicción de fallos de los rodamientos de las ruedas de los trenes mediante la comunicación inalámbrica de sensores piezoeléctricos que convierten la vibración del material rodante en energía eléctrica. Las energías in vivo como los latidos del corazón, el movimiento de los pulmones o el estiramiento de los músculos también son captadas por los generadores piezoeléctricos para así alimentar dispositivos biomédicos como marcapasos cardiacos o audífonos [1]. [4]

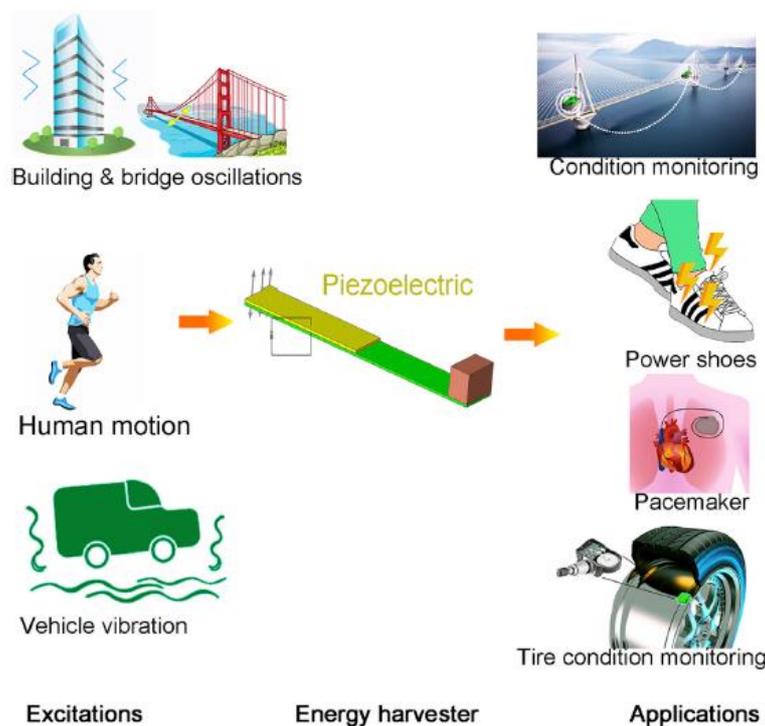


Figura 1.3 Aplicaciones de dispositivos piezoeléctricos [4]

Debido a esto la recolección de energía piezoeléctrica ha recibido un interés creciente en todo el mundo. Las tareas de investigación y desarrollo de materiales piezoeléctricos han permitido ampliar los campos de aplicación de la tecnología piezoeléctrica [1].

La configuración general de un generador piezoeléctrico basado en las vibraciones es la de una viga en voladizo con una o dos capas de material piezoeléctrico. Es la estructura de dispositivo más utilizada para los generadores de energía piezoeléctrica, ya que puede producir una gran tensión mecánica durante la vibración. Los voladizos piezoeléctricos constan de una capa piezoeléctrica unida a una capa no piezoeléctrica, esto es lo que se conoce como voladizo unimorfo. También existen los que se denominan voladizos bimorfos, los cuales constan de dos capas piezoeléctricas unidas con o sin una capa no piezoeléctrica en el medio. Este proyecto se va a centrar en el estudio de voladizos piezoeléctricos unimorfos. El generador piezoeléctrico de una viga en voladizo tiene grandes ventajas, ya que es una estructura simple, el volumen es pequeño, la energía es elevada y además de esto es económico [1]. [5]

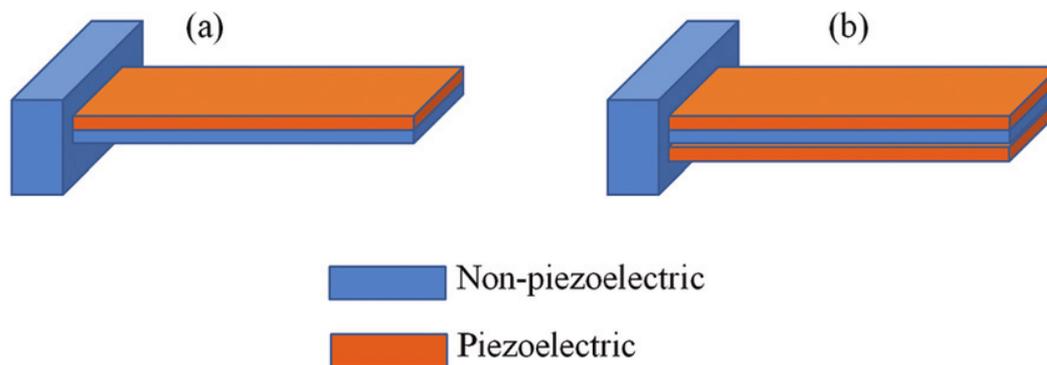


Figura 1.4 Configuración voladizo unimorfo (a) y bimorfo (b) [5]

A lo largo de los años, se han hecho numerosas investigaciones sobre el análisis de las características de los materiales y de los parámetros estructurales que perjudican la capacidad de generación de energía. Para optimizar la producción de energía eléctrica del generador piezoeléctrico es necesario investigar en detalle alguno de los parámetros que influyen en la energía generada. Durante estos años, se han propuesto numerosos modelos matemáticos para tratar de dar solución al problema de la recolección. De esta forma, dadas unas condiciones de excitación se podría predecir la energía eléctrica que podría obtenerse para así diseñar un generador piezoeléctrico para unas determinadas variables mecánicas y eléctricas que permitan optimizar la recolección de energía [1].

1.2 Objetivos

El presente proyecto persigue estudiar el comportamiento de un voladizo piezoeléctrico unimorfo sometido a una carga puntual en el extremo libre. Para ello, se desarrollarán modelos teóricos donde se definen las ecuaciones constitutivas del material y con los que se analiza la respuesta mecánica y piezoeléctrica de la estructura. Asimismo, se modelizará la viga mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF) usando el software comercial ANSYS. Esto permitirá realizar una comparativa de los modelos teóricos y MEF. Mediante esta comparativa se persigue validar los modelos desarrollados.

Contar con modelos analíticos y numéricos (basados en elementos finitos) permite realizar un estudio de la influencia que presentan algunos parámetros en la energía generada. Los parámetros de interés en este estudio son: la influencia de la relación de las propiedades de los materiales, el efecto de la relación de espesores, la importancia de la longitud de la viga y la influencia del ancho de la sección de la viga.

De esta forma, se pretende que los modelos desarrollados, una vez validados, puedan servir para analizar cuáles serían los parámetros óptimos de un generador piezoeléctrico.

1.3 Organización del documento

El documento consta de 6 capítulos donde se desarrollan los contenidos de este trabajo. A continuación se describe brevemente el contenido de cada capítulo.

- **Capítulo 1: Introducción.**

En este primer capítulo, se incluye la descripción general del tema del proyecto, con una explicación de qué es un material piezoeléctrico y sus diversas aplicaciones. También, se recogen nociones sobre la motivación y los objetivos del análisis, que se extenderán más adelante.

- **Capítulo 2: Modelos Teóricos.**

A continuación, el segundo capítulo se centra en el estudio de modelos teóricos. Se analiza por separado la respuesta mecánica de un modelo teórico de laminado y un modelo teórico unimorfo. Además, se estudia la respuesta piezoeléctrica del modelo teórico unimorfo, al mismo tiempo que se desarrollan las ecuaciones constitutivas del material piezoeléctrico, de las que se extraerán las constantes elásticas, piezoeléctricas y dieléctricas del material.

- **Capítulo 3: Modelo de Elementos Finitos**

En este apartado se describe el modelo realizado en el programa comercial de elementos finitos ANSYS. Se detallan los pasos llevados a cabo para la realización del modelo.

- **Capítulo 4: Análisis. Comparación de los Modelos Teóricos y MEF.**

Este cuarto capítulo, se lleva a cabo una validación de los modelos realizados en los capítulos anteriores mediante la comparación de los resultados obtenidos con los diferentes modelos.

- **Capítulo 5: Análisis. Estudio de la influencia de parámetros.**

En el quinto capítulo se realiza un estudio para analizar como influyen las variaciones de algunos parámetros en el total de energía recolectada. En concreto los parámetros que se estudian son: la influencia de la relación de las propiedades de los materiales, el efecto de la relación de espesores, la importancia de la longitud de la viga y la influencia del ancho de la sección de la viga.

- **Capítulo 6: Conclusiones Generales y Trabajos Futuros.**

En este capítulo se resumen las actividades llevadas a cabo en este trabajo, se exponen las conclusiones extraídas a la vista de los resultados obtenidos, y se proponen líneas futuras de trabajo encaminadas a mejorar los resultados de recolección de energía obtenidos.

2 MODELOS TEÓRICOS

En este capítulo se van a desarrollar los modelos teóricos de una viga en voladizo con una carga puntual aplicada en el extremo. En primer lugar, se desarrolla el modelo de laminado y a continuación el modelo de viga unimorfa.

Una solución exacta de un problema es aquella que satisface las ecuaciones de gobierno en cada punto del dominio y las condiciones iniciales y de contorno del problema. Mientras que una solución numérica, es aquella que se obtiene satisfaciendo las ecuaciones de gobierno y las condiciones de contorno de forma aproximada. Para poder establecer que las soluciones numéricas obtenidas con el programa comercial ANSYS son válidas se han llevado a cabo dos modelos teóricos con los que se comprobará que el modelo de elementos finitos se corresponde con el problema que se desea estudiar.

Para introducir este capítulo se presenta a continuación la disposición típica de una viga en voladizo unimorfa. El modelo analítico propuesto para este trabajo se comporta como una viga en voladizo de longitud L , ancho W y espesor total t a la que se le aplica una carga en el extremo libre F . La viga esta compuesta por una base de material metálico en cuya parte superior se sitúa el material piezoeléctrico. Este piezoeléctrico se encarga de realizar la transformación de energía procedente de la deformación sufrida en un voltaje, lo que se conoce como efecto piezoeléctrico directo.

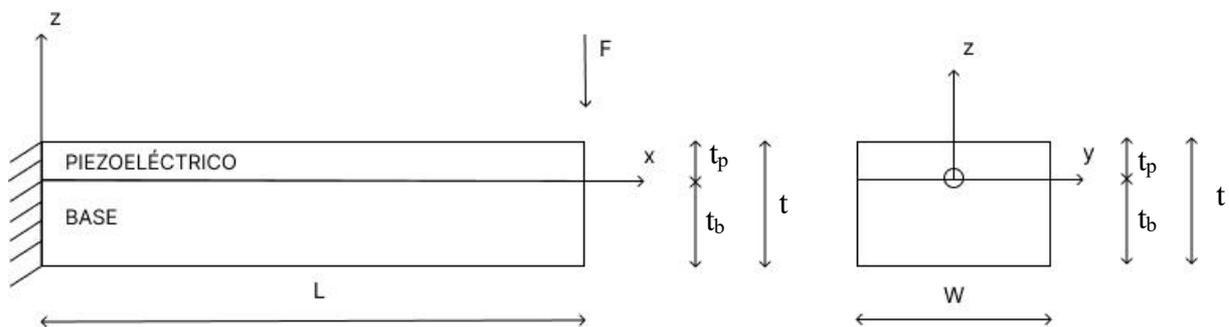


Figura 2.1 Viga en voladizo unimorfa con carga aplicada en el extremo

Existen dos tipos de problemas. El problema mecánico y el problema piezoeléctrico que engloba el problema mecánico y el eléctrico. Mediante el modelo de viga unimorfa se obtendrá tanto la solución analítica del problema mecánico como del problema piezoeléctrico. Por otro lado, con el modelo de laminado se obtendrá la solución analítica del problema mecánico.

2.1 Modelo de viga unimorfa

El modelo que se presenta a continuación es el modelo de viga unimorfa. En un modelo unidimensional que asume comportamiento isotrópico del material. Este modelo teórico se ha llevado a cabo haciendo uso del artículo “Modelling and analysis of a piezoelectric unimorph cantilever for energy harvesting application” de la revista Materials Technology [6].

Las ecuaciones constitutivas de un material piezoeléctrico son:

$$\begin{Bmatrix} S \\ D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S^E & d^T \\ d & \varepsilon^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ E \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

Cuyos símbolos se explican a continuación:

Tabla 2.1 Símbolos de las ecuaciones constitutivas de un material piezoeléctrico

| Símbolo | Dimensión | Unidad | Descripción |
|----------------------|-----------|-------------------|---------------------------------------|
| S | 6x1 | N/m ² | Deformación mecánica |
| D | 3x1 | m/m | Desplazamiento de carga dieléctrica |
| T | 6x1 | N/C | Tensión mecánica |
| E | 3x1 | C/m ² | Intensidad de campo eléctrico |
| s^E | 6x6 | m ² /N | Tensor de compliancia |
| d | 3x6 | C/N | Coefficientes de carga piezoeléctrica |
| ε | 3x3 | F/m | Permitividad eléctrica |

Teniendo en cuenta que para realizar el modelo se ha tenido en cuenta que el material es transversalmente isotrópico las matrices que componen dichas ecuaciones son:

- Tensor de compliancia (S^E)

$$S^E = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11} - s_{12}) \end{bmatrix}$$

Definido bajo la condición de campo eléctrico constante producido por la deformación generada por una tensión unitaria. En dicho tensor es donde se pueden identificar las constantes ingenieriles.

- Matriz de permitividad piezoeléctrica (ε^T)

$$\varepsilon^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Representa la permitividad absoluta. Se define como el desplazamiento dieléctrico por unidad de campo eléctrico producido por una tensión constante.

- Matriz de coeficientes de carga piezoeléctrica (d)

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Relaciona la carga eléctrica y la tensión mecánica.

Debido a la dirección entre el campo eléctrico aplicado y la tensión-deformación producida se definen dos modos de operación en una viga unimorfa. Estos modos son el modo transversal, conocido como modo d_{33} y el modo longitudinal o lo que es lo mismo modo d_{31} . En el modo d_{31} , el material piezoeléctrico se polariza a lo largo del eje 1 y los electrodos se colocan en las superficies perpendiculares al eje 3. Se supone que solo existen vibraciones a lo largo del eje 3 y, por lo tanto, el material piezoeléctrico experimentará un estado de tensión de tracción a lo largo del eje 1. Bajo este estado de tensión, los electrodos de la capa piezoeléctrica superior están conectados para tener un campo eléctrico positivo. El modo d_{33} , corresponde a aquellos dispositivos cuya dirección de polarización es a lo largo del eje 3, y la carga eléctrica se mueve en la misma dirección, o en otras palabras, que los electrodos están dispuestos en las caras normales al eje 3. En este estudio se considera que el modo de operación de la viga unimorfa es el modo d_{31} . [7]

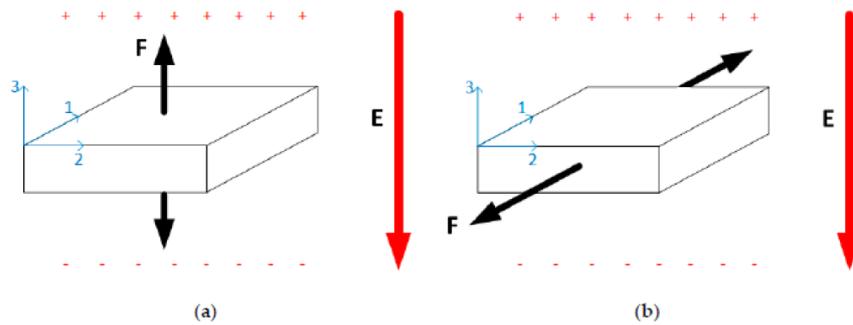


Figura 2.2 Modos de operación: (a) d_{33} , (b) d_{31} [7]

De esta forma, las ecuaciones constitutivas de para un material piezoeléctrico lineal en forma matricial reducida son:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = s_{11}^E \sigma_1 - d_{31} E_3 \\ D_3 = -d_{31} \sigma_1 + \varepsilon_{33}^T E_3 \end{cases} \quad (2.2)$$

donde ε_1 es la deformación a lo largo del eje 1, σ_1 es la tensión, s_{11}^E es la constante de conformidad elástica, d_{31} es la constante piezoeléctrica en el modo 31, E_3 es la fuerza del campo magnético, ε_{33}^T es la permitividad del piezoeléctrico a tensión constante y D_3 es la densidad de carga eléctrica.

2.1.1 Modelo mecánico de viga unimorfa

El momento a lo largo de la coordenada x de la viga puede expresarse como:

$$M = F(L - x) = \int T(\sigma(x, z), E_3) z dz \quad (2.3)$$

Teniendo en cuenta que la superficie neutra puede ser calculada usando la siguiente expresión:

$$z_a = \frac{\sum z_i E_i A_i}{\sum E_i A_i} = \frac{z_1 E_1 A_1 - z_2 E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \quad (2.4)$$

donde A_i es el área de la sección transversal de cada capa, E_i es el módulo de Young de cada capa y z_i se mide desde la referencia arbitraria al centro del área i . Los subíndices 1 y 2 hacen referencia a la capa superior (piezoeléctrico) y a la capa inferior (base) respectivamente.

Definiendo $\alpha = \frac{E_b}{E_p}$ y $\beta = \frac{t_b}{t_p}$ la superficie neutra queda:

$$z_a = \frac{t_p(1 - \alpha\beta^2)}{2(1 + \alpha\beta)} \quad (2.5)$$

donde E_b y E_p son los módulos de Young, t_b y t_p son el grosor de la capa base y de la capa piezoeléctrica respectivamente.

De esta forma se puede escribir la deformación en términos de curvatura (κ) como:

$$\varepsilon_1 = -\kappa(Z - z_a) \quad (2.6)$$

Al sustituir la ecuación (2.6) en la ecuación (2.2) se obtiene la tensión en la capa piezoeléctrica:

$$\sigma_p = \frac{1}{s_{11}^E} (-\kappa(Z - z_a) + d_{31}E_3) \quad (2.7)$$

Para la capa base la relación tensión-deformación queda:

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{E_b} \sigma_1 = -s_b \sigma_1 \quad (2.8)$$

Por lo que despejando de la ecuación anterior se obtiene la tensión en la capa base:

$$\sigma_b = \frac{1}{s_b} (-\kappa(Z - z_a)) \quad (2.9)$$

donde s_b es la constante de conformidad elástica de la capa base.

Sustituyendo en la ecuación (2.3) las ecuaciones (2.8) y (2.9):

$$M = \int_0^{t_p} \int_0^W \sigma_p z dy dz + \int_{-t_b}^0 \int_0^W \sigma_b z dy dz \quad (2.10)$$

Integrando se obtiene:

$$M = \frac{-\kappa W \alpha^2 E_p^3 B}{12(1 + \alpha\beta)t_p} + \frac{d_{31} t_p^2 (1 + \beta) \alpha \beta W E_p}{2(1 + \alpha\beta)} \quad (2.11)$$

donde:

$$B = \frac{t_p^4}{\alpha^2 E_p^2} (1 + 4\alpha\beta + 6\alpha\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \alpha^2\beta^4)$$

De esta forma se puede definir el radio de curvatura como:

$$\kappa = -\frac{12(1 + \alpha\beta)t_p(L - x)}{\alpha^2 E_p^3 B W} F + \frac{6d_{31} t_p^3 (1 + \beta)\beta}{\alpha E_p^2 B} E_3 \quad (2.12)$$

Se conoce que la curvatura es la derivada segunda de la flecha. Por lo que imponiendo que no existe acoplamiento entre el campo eléctrico y el campo mecánico e integrando la expresión de la curvatura se obtiene la expresión del desplazamiento máximo. Por lo tanto:

$$\kappa = \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\frac{12(1 + \alpha\beta)t_p(L - x)}{\alpha^2 E_p^3 B W} F \quad (2.13)$$

Integrando:

$$w_{max} = -\frac{4FL^3 \left(1 + \frac{E_b t_b}{E_p t_p}\right)}{WE_p t_p^3 \left(1 + 4\frac{E_b t_b}{E_p t_p} + 6\frac{E_b t_b^2}{E_p t_p^2} + 4\frac{E_b t_b^3}{E_p t_p^3} + \frac{E_b^2 t_b^4}{E_p^2 t_p^4}\right)} \quad (2.14)$$

Por lo que quedaría resuelto el problema mecánico con el modelo de viga unimorfa.

2.1.2 Modelo piezoeléctrico de viga unimorfa

Una vez conocido cual es el desplazamiento máximo que se puede dar en función de la carga aplicada, los materiales que se deseen y las condiciones geométricas que se consideren, se va a analizar cual es el valor máximo de energía generada. La energía generada en la capa piezoeléctrica es la suma de la energía mecánica y la energía inducida por el campo eléctrico. La energía generada en la capa base es únicamente energía mecánica. Por lo tanto la energía total en el voladizo es la suma de las energías en cada capa.

- Capa piezoeléctrica

$$dU_p = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \sigma_1 + \frac{1}{2} D_3 E_3 = \frac{1}{2} (s_{11}^E \sigma_1 - d_{31} E_3) \sigma_1 + \frac{1}{2} (-d_{31} \sigma_1 + \varepsilon_{33}^T E_3) E_3 \quad (2.15)$$

- Capa base

$$dU_b = \frac{1}{2} s_b \sigma_1^2 \quad (2.16)$$

Usando la ecuación (2.7) la energía de un volumen diferencial de cada una de las capas puede expresarse como:

$$\begin{cases} dU_p = -\frac{1}{2} s_{11}^E \left(\frac{-\kappa(z-z_a) + d_{31}E_3}{s_{11}^E} \right)^2 - d_{31} \left(\frac{1}{s_{11}^E} (-\kappa(z-z_a) + d_{31}E_3) \right) E_3 + \frac{1}{2} \varepsilon_{33}^T E_3^2 \\ dU_b = \frac{1}{2} (s_b s_{11}^E) s_{11}^E = \frac{1}{2} s_b (-\kappa(z-z_a))^2 \end{cases} \quad (2.17)$$

Integrando se obtiene la energía total de la viga en voladizo.

$$\begin{aligned} U &= \int_0^L \int_0^W \int_0^{t_p} du_p dz dy dx + \int_0^L \int_0^W \int_{-t_p}^0 du_p dz dy dx \\ U &= \frac{2(1+\alpha\beta)s_{11}^E{}^3 t_p L^3}{\alpha^2 B W} F^2 - 3 \frac{d_{31}\beta(1+\beta)s_{11}^E{}^2 t_p^3 L^2}{\alpha B} E_3 F \\ &\quad + \frac{\varepsilon_{33}^T W L t_p}{2} \left[1 + \left(\frac{3\beta^2(1+\beta)^2 t_p^4 s_{11}^E{}^2}{(1+\alpha\beta)B} - 1 \right) \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T} \right] E_3^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

La energía eléctrica se describe como una carga eléctrica multiplicada por la tensión. La carga generada puede calcularse derivando la energía total respecto a la tensión. Definiendo el campo eléctrico como:

$$E_3 = \frac{V}{t_p} \quad (2.19)$$

donde V es el voltaje a través del electrodo.

Sustituyendo la ecuación (2.19) en la (2.18) y derivando se obtiene expresión de la carga generada:

$$Q = \frac{dU}{dV} = -3 \frac{d_{31}\beta(1+\beta)s_{11}^E{}^2 t_p^3 L^2}{\alpha B} F + \frac{\varepsilon_{33}^T W L t_p}{2} \left[1 + \left(\frac{3\beta^2(1+\beta)^2 t_p^4 s_{11}^E{}^2}{(1+\alpha\beta)B} - 1 \right) \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T} \right] V \quad (2.20)$$

Si queremos obtener la carga generada únicamente por la fuerza aplicada:

$$Q = -3 \frac{d_{31}\beta(1+\beta)s_{11}^E{}^2 t_p^3 L^2}{\alpha B} F \quad (2.21)$$

La capacitancia se define como:

$$C = \frac{\varepsilon_{33}^T W L}{t_p} \left[1 + \left(\frac{3\beta^2(1+\beta)^2 t_p^4 s_{11}^{E^2}}{(1+\alpha\beta)B} - 1 \right) \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T} \right] \quad (2.22)$$

Por lo tanto sabiendo que el voltaje se define como la carga entre la capacitancia se obtiene que:

$$V = -3 \frac{d_{31}\beta(1+\beta)s_{11}^{E^2} t_p^3 L}{\varepsilon_{33}^T W t_p B \left[1 + \left(\frac{3\beta^2(1+\beta)^2 t_p^4 s_{11}^{E^2}}{(1+\alpha\beta)B} - 1 \right) \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T} \right]} F \quad (2.23)$$

Por lo que quedaría resuelto el problema piezoeléctrico con el modelo de viga unimorfa. De esta forma se puede conocer cual es el valor de el voltaje que se genera cuando se aplica un determinado valor de carga.

Por último, destacar que para validar este modelo de viga unimorfa se han utilizado otros artículos referenciados al final de este documento para así comprobar que las expresiones que se han aportado son correctas.

2.2 Modelo laminado

El modelo laminado se ha desarrollado haciendo uso del libro “Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells” del autor J.N. Reddy [8]. Este modelo de laminado se tiene en cuenta para validar la respuesta mecánica del modelo de viga unimorfa anteriormente descrito.

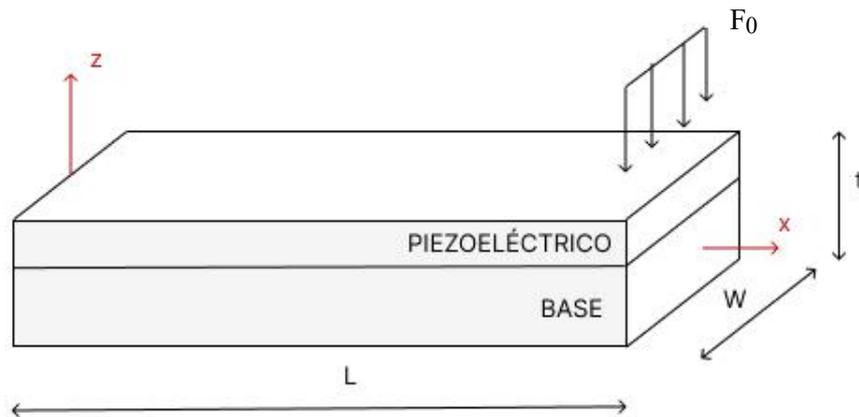


Figura 2.3 Laminado piezoeléctrico

Cuando la anchura W de una placa laminada es muy pequeña en comparación con su longitud L y la carga F_0 es una carga por unidad de longitud, siendo $F_0 = F/W$, de forma que los desplazamientos son función de una única coordenada se tiene un problema unidimensional en el que la placa puede ser tratada como una viga. Concretamente, es un problema de tensión plana en el que se puede hacer uso de la teoría de vigas laminadas.

Para realizar este modelo se ha impuesto que no existe acoplamiento entre el campo eléctrico y el campo mecánico. Es decir, tendríamos un material no piezoeléctrico. De esta forma se resolverá el problema mecánico y se obtendrá el desplazamiento máximo en el extremo.

Las ecuaciones constitutivas de la teoría clásica de placas laminadas para laminados simétricos, en ausencia de fuerzas en el plano:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{zz} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

de forma inversa:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{zz} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

dónde D_{ij}^* son los elementos inversos de la matriz D_{ij}

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} D_{11}^* &= \frac{D_{22}D_{66} - D_{26}D_{26}}{D^*} \\ D^* &= D_{11}D_1 + D_{12}D_2 + D_{16}D_3 \\ D_1 &= D_{22}D_{66} - D_{26}D_{26} \\ D_2 &= D_{16}D_{26} - D_{16}D_{66} \\ D_3 &= D_{12}D_{26} - D_{22}D_{16} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Suponiendo que la viga laminada es lo suficientemente larga para poder despreciar los efectos de Poisson y de cizalladura. Por lo que la deformación transversal puede ser considerada función exclusivamente de la coordenada a lo largo de la longitud de la viga (coordenada x) y del tiempo t .

$$w_0 = w_0(x, t) \quad (2.27)$$

Por lo que la ecuación de comportamiento queda:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = -D_{11}^* M_{xx} \quad (2.28)$$

Usando la forma convencional usada en la teoría de vigas de Euler-Bernoulli la expresión queda:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = -\frac{M}{E_{xx}^b I_{yy}} \quad (2.29)$$

siendo:

$$\begin{aligned} E_{xx}^b &= \frac{12}{t^3 D_{11}^*} \\ I_{yy} &= \frac{Wt^3}{12} \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde W es el ancho de la viga y t el espesor de la misma.

La relación tensión-deformación de una lámina ortótropa en un estado de tensión plana en un laminado k se pueden expresar como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (2.31)$$

Dicha relación se da para cualquier laminado y esta definida por la matriz \bar{Q}_{ij} . siendo:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \sin \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2.32)$$

En la siguiente figura se representa un laminado genérico, siendo x, y, z es el sistema de coordenadas físicas de la placa y x_1, x_2, x_3 es el sistema de coordenadas respecto del cual se definen las propiedades del material.

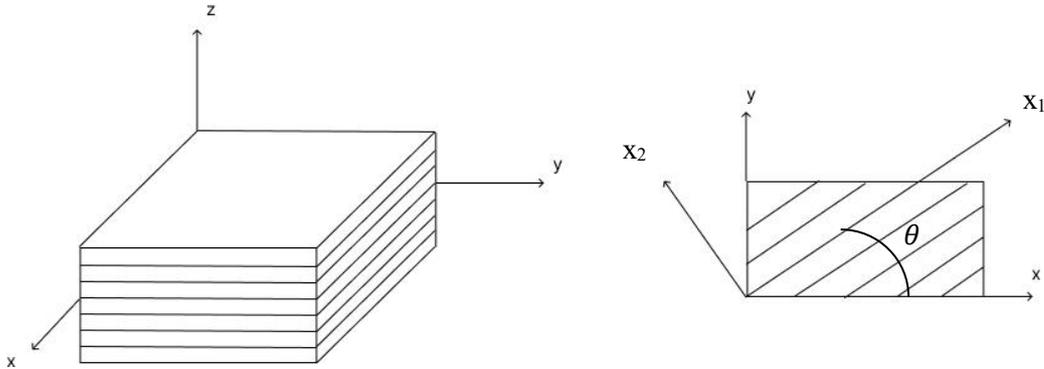


Figura 2.4 Representación laminado genérico

$Q_{ij}^{(k)}$ son las tensiones reducidas en el plano y están relacionadas con las constantes ingenieriles de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Q_{11}^{(k)} &= \frac{E_1^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} & Q_{12}^{(k)} &= \frac{\nu_{12}^{(k)} E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} & Q_{22}^{(k)} &= \frac{E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} \\ Q_{66}^{(k)} &= G_{12}^{(k)} & Q_{44}^{(k)} &= G_{23}^{(k)} & Q_{55}^{(k)} &= G_{13}^{(k)} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Por último, integrando en cada laminado k se obtienen los términos de la matriz de comportamiento. Los que nos interesan son los términos de la matriz D .

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}(z^2) dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(z^2) dz \\ D_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Con los términos de la matriz D se puede conocer D_{11}^* para así mediante la siguiente expresión conocer el desplazamiento máximo del extremo libre del voladizo.

$$w_{max} = \frac{1}{3} \frac{FL^3}{E_{xx}^b I_{yy}} \quad (2.35)$$

De esta forma quedaría resuelto el problema mecánico del modelo laminado.

3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Una vez desarrollados los modelos teóricos, se va a introducir el modelo definido en el programa comercial de elementos finitos ANSYS. Con este modelo se simulará el comportamiento de una viga en voladizo unimorfa con una carga aplicada en el extremo. En este capítulo se presentará el desarrollo seguido para la implementación del modelo. El objetivo es comparar este modelo con los modelos teóricos presentados en el capítulo anterior para así poder validarlos y realizar estudios paramétricos.

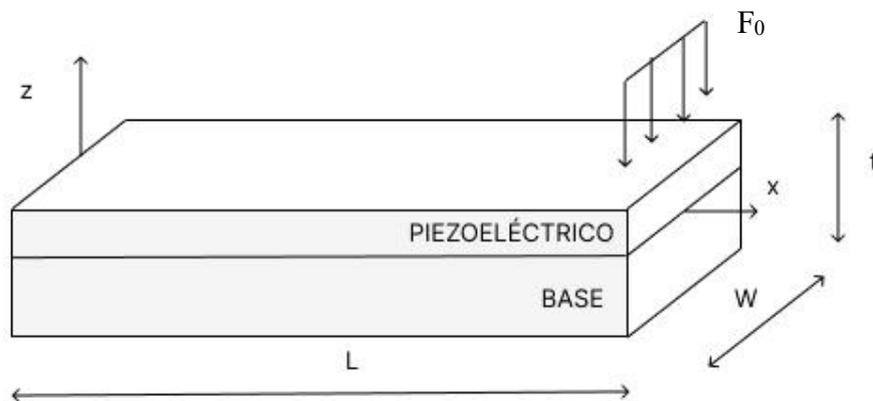


Figura 3.1 Representación esquemática del problema

El modelo de elementos finitos se trata de un modelo tridimensional. Se ha realizado haciendo uso de dos elementos SOLID. Para modelizar la base de acero se ha utilizado el elemento SOLID 186 mientras que para modelizar el piezoeléctrico situado en la parte superior se ha utilizado el elemento SOLID 226.

A continuación se presentan las características de cada uno de ellos:

- SOLID226

Es un elemento de 20 nodos con hasta seis grados de libertad por nodo. Las capacidades piezoeléctricas incluyen los efectos piezoeléctricos directos e inversos. Se ha elegido este tipo de elemento ya que permite poder asignarle al sólido las propiedades piezoeléctricas, necesarias para el análisis.

- SOLID186

Elemento sólido tridimensional de 20 nodos de orden superior que presenta un modelo de desplazamiento cuadrático. Tiene tres grados de libertad por nodo, que se corresponden a las traslaciones en las tres direcciones del espacio. Esta disponible como sólido estructural homogéneo y como sólido estructural estratificado. Para este análisis se ha elegido la opción de sólido estructural homogéneo ya que permite representar la capa base mediante una única capa homogénea.

Las geometrías de ambos elementos son idénticas y se muestran a continuación. La diferencia es que el elemento SOLID186 presenta una configuración más sencilla ya que no permite asignarle efectos térmicos, piezoresistivos o piezoeléctricos entre otros.

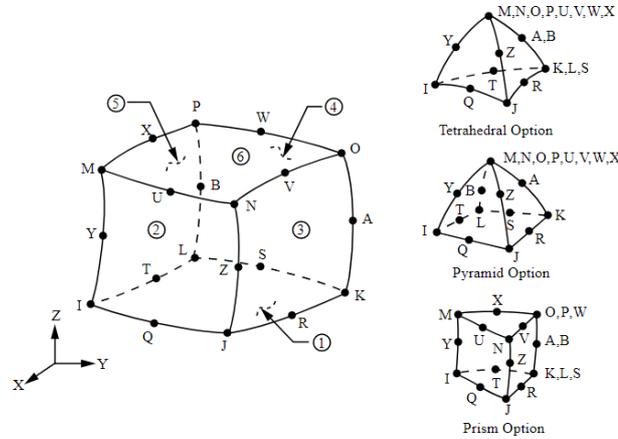


Figura 3.2 Geometría del elemento SOLID186 y SOLID226 de ANSYS

A la hora de asignarle las propiedades piezoeléctricas al elemento SOLIS226 hay que tener en cuenta que el programa comercial de elementos finitos ANSYS no trabaja con las ecuaciones constitutivas presentadas en el capítulo anterior (2.1), si no con unas equivalentes a éstas.

$$\begin{Bmatrix} T \\ D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^E & -e^T \\ e & \epsilon^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S \\ E \end{Bmatrix} \tag{3.1}$$

siendo:

$$\begin{aligned} [S^E] &= [C^E]^{-1} \\ [e] &= [d][c^E] \\ [\epsilon^S] &= [\epsilon^T] - [d][e]^T \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por lo tanto para definir en ANSYS las propiedades del material piezoeléctrico se introducirán las siguientes matrices. Teniendo en cuenta que el material es transversalmente isótropo:

- Matriz de coeficientes elásticos (C^E)

$$C^E = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(c_{11} - c_{12})}{2} \end{bmatrix}$$

- Matriz piezoeléctrica (e)

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz dieléctrica (ϵ^S)

$$\epsilon^S = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Una vez definidas las propiedades del material piezoeléctrico, se han definido las propiedades del material metálico de la base. Con esto quedarían definidas las propiedades de los dos materiales que componen el modelo.

Para realizar la geometría se han utilizado puntos clave, para luego generar un volumen y se ha realizado un mallado con elementos hexaédricos.

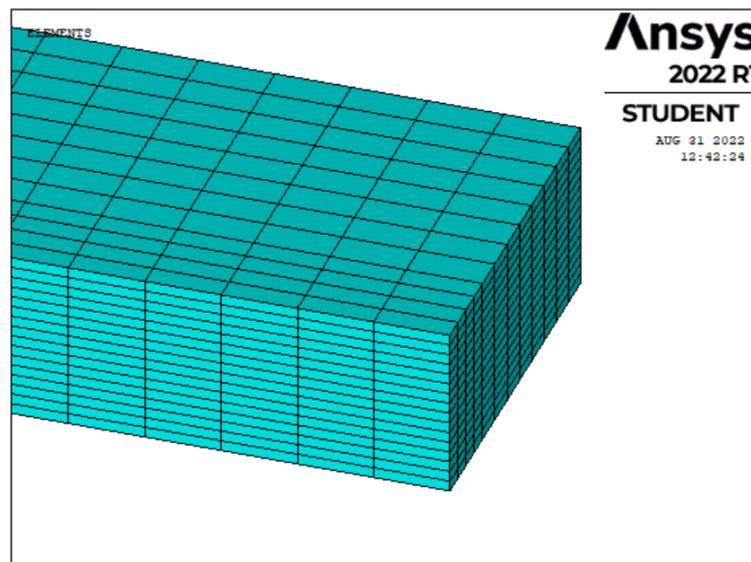


Figura 3.3 Detalle mallado del modelo de elementos finitos realizado con ANSYS

Al tratarse de un modelo tridimensional, se ha aplicado una carga distribuida a lo largo del ancho del extremo libre. De tal forma que se tiene:

$$F_0 = \frac{F}{W}$$

Sin embargo, la forma en la que se ha aplicado dicha carga en el modelo de ANSYS es la siguiente. En los nodos centrales con más área de influencia se aplica una fuerza de valor f , mientras que en los nodos extremos se aplica $f/2$. De forma que se obtiene que f es igual a la fuerza total aplicada F entre el número de divisiones.

$$f = \frac{F}{\text{Numero de divisiones}}$$

Como en el modelo de elementos finitos no se trabaja con elementos lineales si no que se utilizan elementos cuadráticos, hay que tener en cuenta que en cada arista existe un nodo, por lo que la fuerza total se divide entre dos veces el número de divisiones. En la *Figura 3.4* se esquematiza la aplicación de la carga distribuida

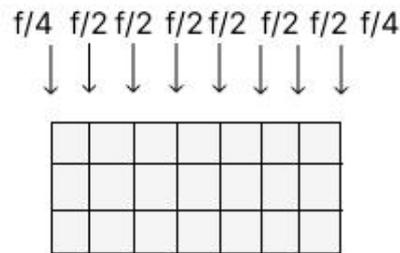


Figura 3.4 Aplicación de la carga distribuida

Por último, las condiciones de contorno que se desean aplicar es que exista un extremo empotrado. En vez de aplicar dicho empotramiento a toda el área se ha aplicado de la siguiente forma. En toda el área del extremo empotrado, se ha impuesto que el desplazamiento en x sea cero. Esto es el área coloreada en azul en la *Figura 3.5*. En la arista vertical que se encuentra en la parte central y que corresponde a las coordenadas $x=0$ y $y=W/2$ se ha impuesto que el desplazamiento en y sea cero. Esto es la arista en color verde. Por último, en la arista inferior que se corresponde con las coordenadas $x=0$ $z=-t_p$ se ha impuesto que el desplazamiento en z sea igual a cero. Se corresponde con la arista en color rojo. También se ha impuesto voltaje cero en la cara superior de la viga para modelizar la conexión a tierra.

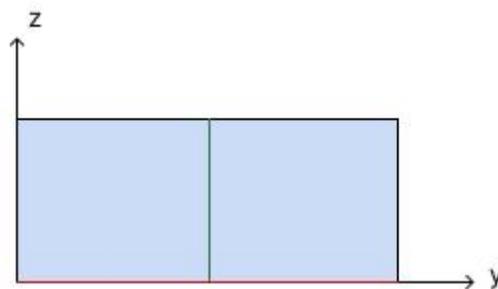


Figura 3.5 Condiciones de contorno extremo empotrado

De esta forma, queda definido el modelo de elementos finitos en el programa comercial ANSYS, tal y como se muestra en la *Figura 3.6*. En los próximos capítulos, se realizarán diferentes estudios con dicho modelo. En primer lugar, se han llevado a cabo una serie de análisis para validar los modelos desarrollados en este capítulo. En concreto, se han realizado dos tipos de análisis distintos, uno para la validación del problema mecánico y otro para la validación del problema piezoeléctrico. Tras validar los modelos, se ha realizado un estudio de la influencia de parámetros.

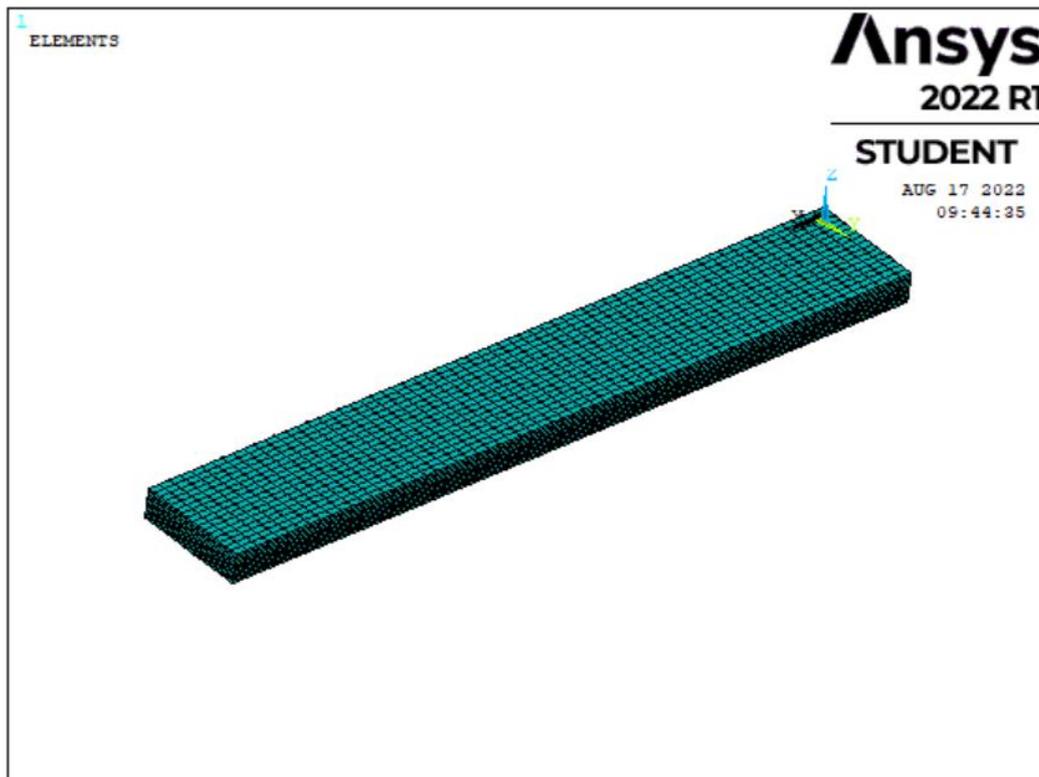


Figura 3.6 Modelo de elementos finitos realizado con ANSYS

4 ANÁLISIS. COMPARACIÓN DE LOS MODELOS TEÓRICOS Y MEF

En este capítulo, se va a realizar un análisis comparativo de las soluciones que se obtienen con los modelos teóricos y con el modelo de elementos finitos realizado en el programa comercial ANSYS. El objetivo, es validar los modelos desarrollados anteriormente para así realizar un estudio de la influencia que presentan algunos parámetros en la cantidad de energía recolectada.

Para comenzar, se van a indicar las dimensiones de la viga en voladizo que se desea estudiar, así como las propiedades de los materiales elegidos. Se va a realizar un análisis para validar el problema mecánico y otro para validar el problema piezoeléctrico. Finalmente, se expondrán las conclusiones extraídas de dichos análisis.

4.1 Propiedades de los materiales y dimensiones del modelo

El modelo que se desea estudiar como ya se ha detallado en capítulos anteriores es el de una viga en voladizo.



Figura 4.1 Esquema de los materiales de la viga en voladizo

Tal y como se observa en la *Figura 4.1*, la viga está compuesta por dos materiales. En primer lugar, tiene una capa base de material metálico. En la parte superior de esta capa base se sitúa el piezoeléctrico. Existen diferentes tipos de materiales piezoeléctricos. Para el estudio se ha decidido utilizar el denominado como PZT4. Para la capa base se ha optado por usar acero inoxidable.

A continuación, se resumen las propiedades de cada material extraídas de un artículo de la revista *Smart Materials and Structures* [9].

Tabla 4.1 Propiedades del acero inoxidable

| Símbolo | Unidad | Valor |
|----------|-------------------|-------|
| E_b | GPa | 195 |
| ν_b | | 0,3 |
| ρ_b | Kg/m ³ | 7750 |

Tabla 4.2 Propiedades del material PZT4

| Símbolo | Unidad | Valor |
|--------------------------------|-------------------|------------------------|
| C_{11} | GPa | 139 |
| C_{12} | GPa | 77,8 |
| C_{13} | GPa | 74,3 |
| C_{22} | GPa | 139,0 |
| C_{23} | GPa | 74,3 |
| C_{33} | GPa | 115,0 |
| C_{44} | GPa | 25,6 |
| C_{55} | GPa | 25,6 |
| C_{66} | GPa | 30,6 |
| ρ_p | Kg/m ³ | 7495 |
| $e_{31} = e_{32}$ | N/mV | -5,20 |
| e_{33} | N/mV | 15,1 |
| $e_{15} = e_{24}$ | N/mV | 12,7 |
| $\epsilon_{11}^S / \epsilon_0$ | | 763 |
| $\epsilon_{22}^S / \epsilon_0$ | | 763 |
| $\epsilon_{33}^S / \epsilon_0$ | | 658 |
| ϵ_0 | Fm ⁻¹ | $8,854 \cdot 10^{-12}$ |

Conocidas estas propiedades del material piezoeléctrico PZT4, se pueden montar las siguientes matrices:

- Matriz de coeficientes elásticos (C^E)

$$C^E = \begin{bmatrix} 139 & 77,8 & 74,3 & 0 & 0 & 0 \\ 77,8 & 139 & 74,3 & 0 & 0 & 0 \\ 74,3 & 74,3 & 115 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30,6 \end{bmatrix} \cdot 10^9$$

- Matriz piezoeléctrica (e)

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 12,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12,7 & 0 & 0 \\ -5,20 & -5,20 & 15,1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz dieléctrica (ε^S)

$$(\varepsilon^S) = \begin{bmatrix} 763 & 0 & 0 \\ 0 & 763 & 0 \\ 0 & 0 & 658 \end{bmatrix}$$

Para poder hacer el análisis de la respuesta piezoeléctrica hay que realizar a las propiedades del material PZT4 que proporciona el fabricante, una conversión. Siguiendo la expresión (3.2) se calcula la inversa de la matriz C^E para así obtener la matriz S^E . Se obtiene:

$$S^E = \begin{bmatrix} 0,1231 & -0,0403 & -0,0535 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0403 & 0,1231 & -0,0535 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0535 & -0,0535 & 0,1561 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3906 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3906 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3268 \end{bmatrix} \cdot 10^{-10}$$

Multiplicando la matriz S^E por la matriz e se obtiene la matriz d :

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4961 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4961 & 0 & 0 \\ -0,1238 & -0,1238 & 0,2913 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-9}$$

Por último con la última ecuación de la expresión (3.2) se obtiene:

$$(\varepsilon^T) = \begin{bmatrix} 763 & 0 & 0 \\ 0 & 763 & 0 \\ 0 & 0 & 658 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, sabiendo que:

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{s_{11}^E} \\ \nu_p &= -s_{12} E_p \\ \varepsilon_{33}^T &= \varepsilon_{33} \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

De esta forma, se obtienen las propiedades del piezoeléctrico. Faltaría por calcular el factor de acoplamiento k_{31} que se calcula mediante la siguiente expresión:

$$k_{31} = \sqrt{\frac{d_{31}^2}{\varepsilon_{33} \varepsilon_0 s_{11}^E}} \quad (4.2)$$

En la siguiente tabla, se resumen las propiedades equivalentes a las que proporciona el fabricante.

Tabla 4.3 Propiedades equivalentes del material PZT4

| Símbolo | Unidad | Valor |
|-------------------|------------------|-----------------------|
| E_p | GPa | 81 |
| ν_p | | 0,32 |
| ϵ_{33}^T | | $5,82 \cdot 10^{-9}$ |
| k_{31} | | 0,46 |
| d_{31} | C/m ² | $-124 \cdot 10^{-12}$ |

Por último, se muestra a continuación una tabla con las dimensiones de la viga que se desea estudiar y el valor de la fuerza aplicada.

Tabla 4.4 Dimensiones de la viga en voladizo

| Símbolo | Unidad | Valor |
|----------------------|---------------|--------------|
| L | cm | 10 |
| W | cm | 0,36 |
| t | cm | 0,8 |
| t_b | cm | 0,6 |
| t_p | cm | 0,2 |
| F | N | 350 |

4.2 Análisis respuesta mecánica

4.2.1 Modelo de laminado

El modelo de laminado realizado siguiendo el libro de J.N Reddy [8], indica que cuando la anchura de la placa laminada W es muy pequeña en comparación con la longitud L y la carga F es tal que los desplazamientos son función de una única coordenada, el problema se puede tratar como un problema de viga laminada. Dadas las dimensiones establecidas en el apartado anterior, se puede tratar el problema de estudio como una viga laminada por lo tanto se hará uso de las expresiones expuestas en el capítulo dos.

Para conocer el valor del desplazamiento máximo, hay que calcular la matriz D haciendo uso de la expresión (2.34). Para ello, hay que tener en cuenta que el modelo de modelo teórico de J.N Reddy [8] situa los ejes en el centro de la sección. Desarrollando la expresión (2.34) para dos laminados se obtiene:

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= \frac{1}{3} \left[\bar{Q}_{11}^{(1)} (z_2^3 - z_1^3) + \bar{Q}_{11}^{(2)} (z_3^3 - z_2^3) \right] \\
 D_{22} &= \frac{1}{3} \left[\bar{Q}_{22}^{(1)} (z_2^3 - z_1^3) + \bar{Q}_{22}^{(2)} (z_3^3 - z_2^3) \right] \\
 D_{66} &= \frac{1}{3} \left[\bar{Q}_{66}^{(1)} (z_2^3 - z_1^3) + \bar{Q}_{66}^{(2)} (z_3^3 - z_2^3) \right] \\
 D_{12} &= \frac{1}{3} \left[\bar{Q}_{12}^{(1)} (z_2^3 - z_1^3) + \bar{Q}_{12}^{(2)} (z_3^3 - z_2^3) \right] \\
 D_{16} &= \frac{1}{3} \left[\bar{Q}_{16}^{(1)} (z_2^3 - z_1^3) + \bar{Q}_{16}^{(2)} (z_3^3 - z_2^3) \right] \\
 D_{26} &= \frac{1}{3} \left[\bar{Q}_{26}^{(1)} (z_2^3 - z_1^3) + \bar{Q}_{26}^{(2)} (z_3^3 - z_2^3) \right]
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

siendo la diferencia de cotas:

$$\begin{aligned}
 z_{mg} &= \frac{t}{2} \\
 z_{1g} &= 0 \\
 z_{2g} &= t_b \\
 z_{3g} &= t_b + t_p \\
 z_1 &= z_{1g} - z_{mg} \\
 z_2 &= z_{2g} - z_{mg} \\
 z_3 &= z_{3g} - z_{mg}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Para poder realizar los cálculos, hay que calcular los valores de los términos \bar{Q}_{ij} . Siguiendo las expresiones (2.32) y considerando $\theta=0$, se obtiene que los términos \bar{Q}_{ij} son iguales a los términos Q_{ij} . Dichos términos, se calculan mediante las expresiones (2.33). Para ello, hay que tener en cuenta que los materiales se consideran isótropos. La matriz D según las propiedades de los materiales expuestas anteriormente queda:

$$D = \begin{bmatrix} 6,8396 & 2,1028 & 0 \\ 2,1028 & 6,8396 & 0 \\ 0 & 0 & 2,3684 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Conocida la matriz D , se calcula D_{11}^* con las expresiones (2.26). Finalmente, con las expresiones (2.30) y (2.35) se calcula el valor máximo del desplazamiento. Para una viga compuesta por los materiales expuestos anteriormente, las dimensiones indicadas y una fuerza aplicada de 350 N se obtiene un desplazamiento igual a:

$$w_{max,laminado} = 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

4.2.2 Modelo de viga unimorfa

El modelo de viga unimorfa es un modelo unidimensional que asume un comportamiento isótropo del material. Teniendo en cuenta las mismas dimensiones que en el modelo anterior y usando las propiedades de los materiales expuestas anteriormente, se va a realizar el cálculo de la respuesta mecánica con dicho modelo.

Con la expresión (2.14) se calcula el valor del desplazamiento máximo. Se obtiene un desplazamiento igual a:

$$w_{max,unimorfo} = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

4.2.3 Modelo de elementos finitos

Por último, se va a obtener la respuesta mecánica con el modelo de elementos finitos realizado en el programa comercial ANSYS. Este modelo es un modelo tridimensional. Para evaluar la respuesta mecánica hay que desacoplar el problema mecánico del problema eléctrico. Esto se consigue haciendo los términos de la matriz con las constantes piezoeléctricas (e) iguales a cero. Por lo tanto, a la hora de introducir las propiedades del material en ANSYS se introduce una matriz e nula. El resultado que se obtiene es el que se muestra en la siguiente figura.

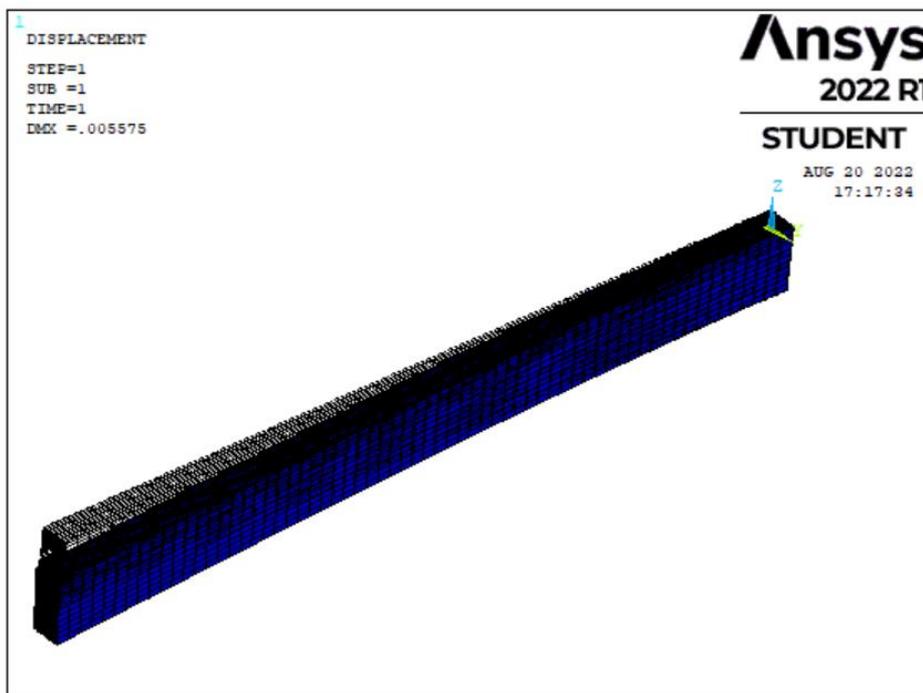


Figura 4.2 Resultado desplazamiento vertical máximo obtenido con ANSYS

El desplazamiento máximo para una carga aplicada de 350 N teniendo en cuenta las dimensiones y las propiedades de los materiales establecidas anteriormente es de $5,575 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

Para justificar la malla seleccionada se ha realizado un análisis de sensibilidad cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla. El análisis se ha realizado con tres mallas distintas que se representan en la siguiente figura. Como era de esperar utilizando un mallado más fino los resultados se aproximan a la solución analítica anteriormente mostrada.

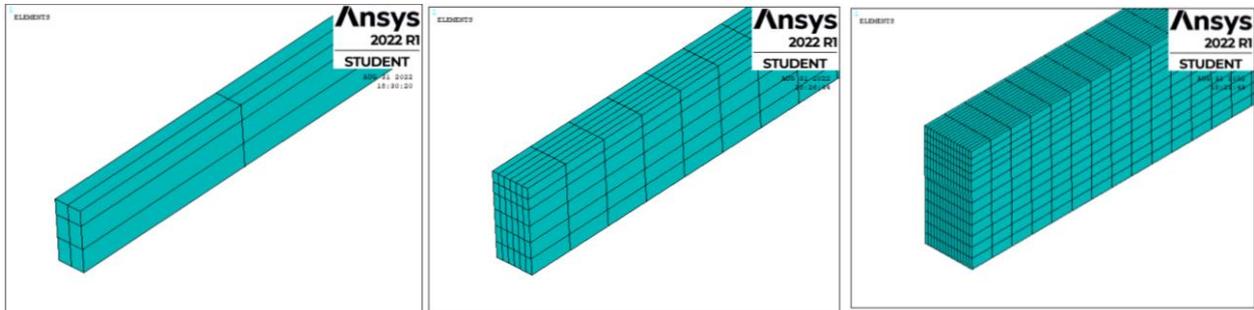


Figura 4.3 Malla 1 (izq), malla 2 (centro), malla 3 (dcha)

La malla 1 esta compuesta por 4 divisiones a lo largo de la longitud de la viga, 2 divisiones en el ancho de la viga, 2 divisiones en el espesor de la capa base y 1 division en el espesor de la capa piezoeléctrica. Con esta malla el programa comercial de elementos finitos ANSYS muestra un aviso sobre que existen elementos distorsionados.

La malla 2 se compone de 24 elementos a lo largo de la longitud de la viga, 6 divisiones en el ancho de la viga, 2 divisiones en el espesor del piezoeléctrico y 4 divisiones en la capa base. Esta malla a pesar de ser menos fina que la que finalmente se ha utilizado para el análisis (malla 3) ya muestra resultados óptimos.

La malla 3 consta de 64 elementos a lo largo de la longitud de la viga, 16 divisiones en el ancho de la viga, 4 divisiones en el espesor del piezoeléctrico y 8 en la capa base.

Tabla 4.5 Resultados en desplazamientos del análisis de sensibilidad de la malla

| | Malla 1 | Malla 2 | Malla 3 | Modelo analítico |
|---------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------|
| Desplazamiento (m) | $5,571 \cdot 10^{-3}$ | $5,575 \cdot 10^{-3}$ | $5,575 \cdot 10^{-3}$ | $5,5 \cdot 10^{-3}$ |

Se ha decidido realizar los análisis con la malla 3 ya que como se verá en el apartado del análisis de la respuesta piezoeléctrica, a pesar de que el resultado en desplazamientos ya es válido con una malla intermedia como es la malla 2, para la respuesta piezoeléctrica se necesita una malla más fina para obtener unos buenos resultados. La malla 3 proporciona unos resultados adecuados sin aumentar demasiado el coste computacional del modelo.

4.2.4 Comparativa

Tras obtener los resultados de la respuesta mecánica usando los tres modelos diferentes, se puede concluir que los diferentes modelos aportan soluciones cercanas y que por lo tanto son fiables. En los tres casos, se obtiene un desplazamiento del mismo orden de magnitud con valores muy similares. A continuación, se muestra una gráfica realizada en MATLAB donde se puede comparar los valores de desplazamiento máximo que se obtienen para distintos valores de carga aplicada manteniendo constantes las dimensiones de la viga y las propiedades de los materiales.

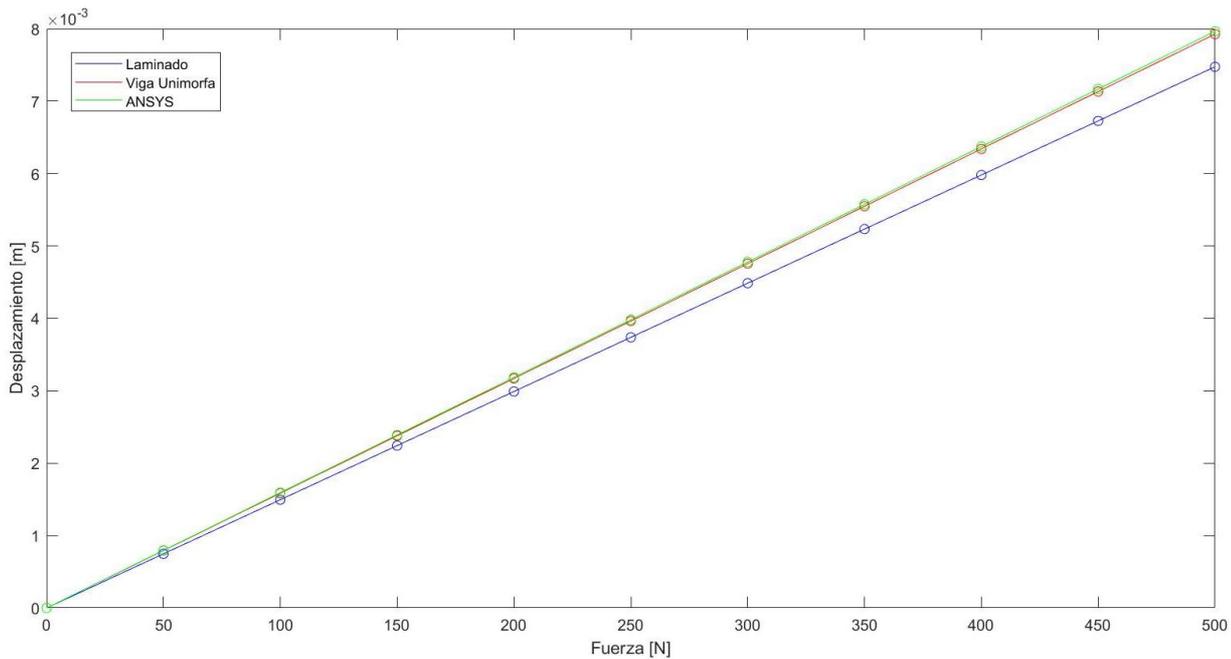


Figura 4.4 Representación del desplazamiento vertical máximo obtenido con cada modelo

Como es de esperar, el desplazamiento máximo aumenta linealmente conforme aumenta la carga aplicada. En la *Figura 4.4* se observa que los resultados obtenidos con el modelo teórico de viga unimorfa coinciden con los del modelo de elementos finitos, mientras que los del modelo teórico de laminado difieren un poco más. Esto se debe a que el modelo de laminado se ha realizado teniendo en cuenta las ecuaciones de placas laminadas bajo el estado de tensión plana. En concreto, se observa que para valores bajos de carga aplicada los tres modelos coinciden. Sin embargo, conforme el valor de la carga aplicada aumenta los valores que se obtienen empiezan a ser diferenciarse.

De esta forma quedan validados los modelos para la respuesta mecánica. A continuación, se muestra una tabla con los valores de desplazamiento máximo obtenidos con cada uno de los modelos para diferentes valores de carga aplicada.

Tabla 4.6 Resultados desplazamiento máximo con cada uno de los modelos

| Fuerza aplicada [N] | Modelo laminado [m] | Modelo viga unimorfa [m] | MEF [m] |
|---------------------|---------------------|--------------------------|-----------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | $0,7 \cdot 10^{-3}$ | $0,8 \cdot 10^{-3}$ | $0,796 \cdot 10^{-3}$ |
| 100 | $1,5 \cdot 10^{-3}$ | $1,6 \cdot 10^{-3}$ | $1,593 \cdot 10^{-3}$ |
| 150 | $2,2 \cdot 10^{-3}$ | $2,4 \cdot 10^{-3}$ | $2,389 \cdot 10^{-3}$ |
| 200 | $3 \cdot 10^{-3}$ | $3,2 \cdot 10^{-3}$ | $3,186 \cdot 10^{-3}$ |
| 250 | $3,7 \cdot 10^{-3}$ | $4 \cdot 10^{-3}$ | $3,982 \cdot 10^{-3}$ |
| 300 | $4,5 \cdot 10^{-3}$ | $4,8 \cdot 10^{-3}$ | $4,779 \cdot 10^{-3}$ |
| 350 | $5,2 \cdot 10^{-3}$ | $5,5 \cdot 10^{-3}$ | $5,575 \cdot 10^{-3}$ |
| 400 | $6 \cdot 10^{-3}$ | $6,3 \cdot 10^{-3}$ | $6,372 \cdot 10^{-3}$ |
| 450 | $6,7 \cdot 10^{-3}$ | $7,1 \cdot 10^{-3}$ | $7,168 \cdot 10^{-3}$ |
| 500 | $7,5 \cdot 10^{-3}$ | $7,9 \cdot 10^{-3}$ | $7,964 \cdot 10^{-3}$ |

4.3 Análisis respuesta piezoeléctrica

Tras realizar la comparativa con el análisis de la respuesta mecánica de la viga en voladizo, a continuación se va a proceder a realizar la comparativa con el análisis de la respuesta piezoeléctrica. En este caso, se va a comparar el modelo de viga unimorfa con el modelo de elementos finitos.

4.3.1 Modelo de viga unimorfa

Para conocer el voltaje generado por la viga en voladizo unimorfa cuando se le aplica una carga de 350 N se hace uso de la expresión (2.23). Se obtiene:

$$V_{unimorfo} = -1,1724 \cdot 10^4 V$$

En este modelo, al asumir un comportamiento isótropo del material, se obtiene que en todo el ancho W de la viga el potencial es constante en cada fibra.

4.3.2 Modelo de elementos finitos

A continuación, se evalúa la respuesta piezoeléctrica con el modelo de elementos finitos. A la hora de evaluar la respuesta piezoeléctrica la matriz de constantes piezoeléctricas (e) deja de ser nula, pasando a tomar los valores indicados en el apartado uno de este capítulo. El resultado que se obtiene se muestra en la *Figura 4.5* y en la *Figura 4.6*. En ella se observa que para una carga aplicada de 350 N, se obtiene un voltaje máximo generado de $-1,09954 \cdot 10^4 V$.

En el siguiente apartado, se va a realizar una comparativa de los dos modelos analizados, teniendo en cuenta los resultados obtenidos.

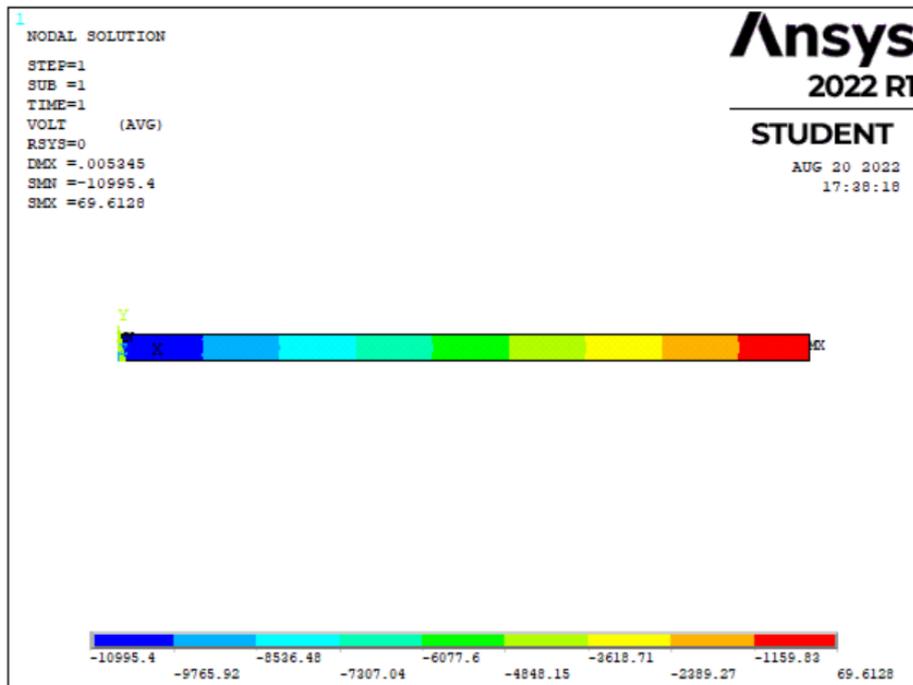


Figura 4.5 Resultado voltaje generado obtenido con ANSYS vista superior

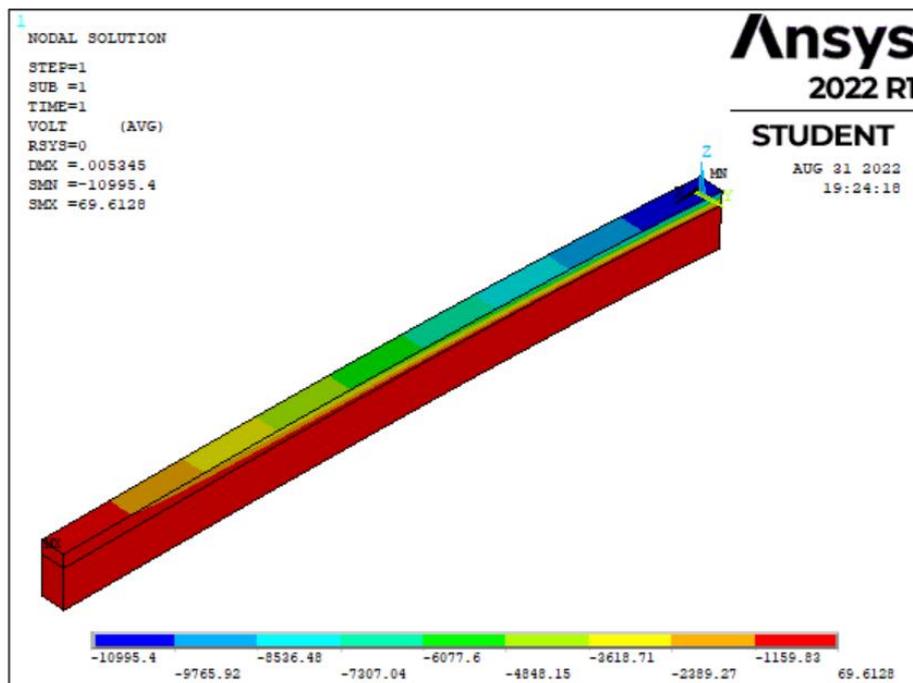


Figura 4.6 Resultado voltaje generado obtenido con ANSYS vista 3D

Del mismo modo que en el apartado del análisis de la respuesta mecánica, se ha realizado un análisis de sensibilidad de la malla. Los resultados se muestran en la siguiente tabla. Una diferencia que se observa con respecto a los resultados del análisis de sensibilidad en desplazamientos es que la malla 2 ya no proporciona los mismos resultados que la malla 3 tal y como se anticipaba en el anterior análisis de sensibilidad. Las diferencias entre los resultados obtenidos con la malla 3 y el modelo analítico se exponen en el siguiente apartado.

Tabla 4.7 Resultados en voltaje del análisis de sensibilidad de la malla

| | Malla 1 | Malla 2 | Malla 3 | Modelo analítico |
|--------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------|
| Voltaje (V) | $-1,10522 \cdot 10^4$ | $-1,10242 \cdot 10^4$ | $-1,09954 \cdot 10^4$ | $-1,1724 \cdot 10^4$ |

4.3.3 Comparativa

Tras obtener los resultados de la respuesta piezoeléctrica usando los dos modelos diferentes, se puede concluir que al igual que para el análisis de la respuesta mecánica, los modelos son fiables y se ajustan adecuadamente el estudio que se desea realizar. En los dos casos, se obtiene un voltaje del mismo orden de magnitud con valores muy similares. A continuación, se muestra una gráfica realizada en MATLAB donde se puede comparar los valores del voltaje generado que se obtienen para distintos valores de carga aplicada manteniendo constantes las dimensiones de la viga y las propiedades de los materiales.

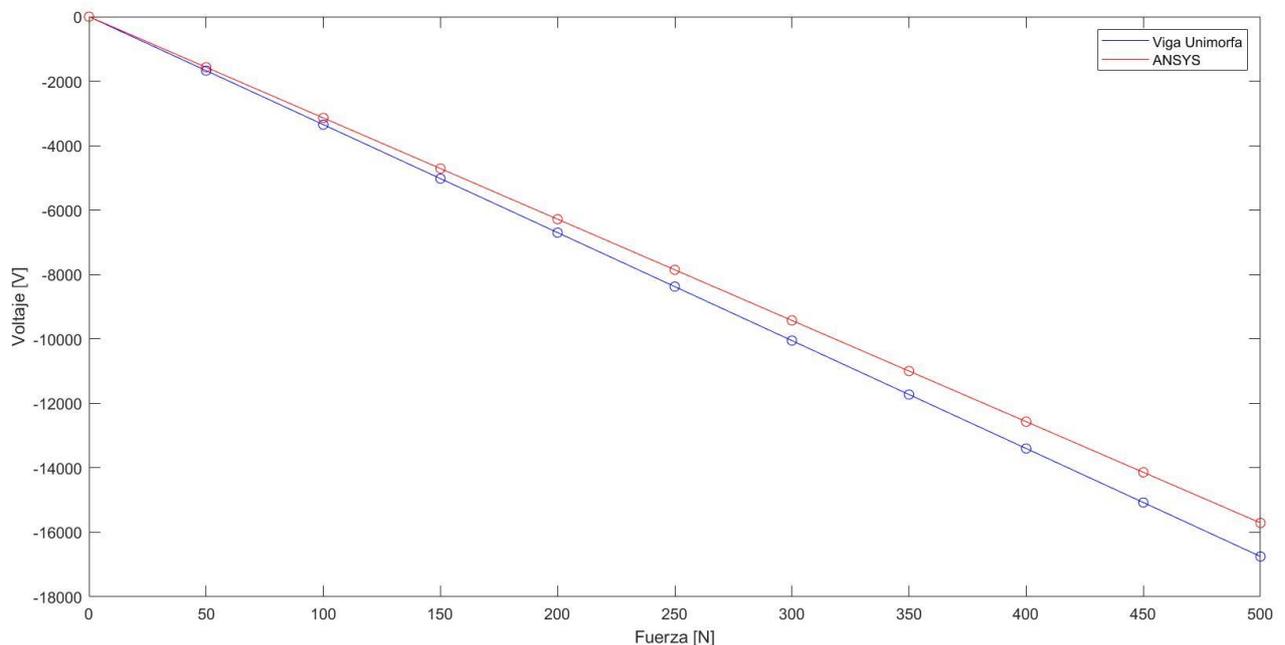


Figura 4.7 Representación del voltaje máximo generado con cada modelo

Como era de esperar, el voltaje que se genera aumenta en valor absoluto a medida que aumenta la carga aplicada. Sin embargo, si comparamos los resultados obtenidos en la respuesta mecánica de la estructura con los obtenidos con la respuesta piezoeléctrica, se observa que los valores que se obtienen con el modelo de viga unimorfa comparados con los que se obtienen con el modelo de elementos finitos difieren en mayor medida que en el anterior análisis. Esto se debe a que el modelo de elementos finitos es un modelo tridimensional, es decir la matriz de comportamiento con la que trabaja el modelo es una matriz tridimensional. Esto implica que existan deformaciones en las tres direcciones del espacio. Es por ello, por lo que la respuesta piezoeléctrica viene dada por el comportamiento en todas las direcciones. Por el contrario, en el modelo de viga unimorfa la respuesta piezoeléctrica viene dada por la deformación en la dirección longitudinal de la viga y las deformaciones en otras direcciones no contribuyen a la deformación de la viga.

Por otro lado, se observa que a medida que aumenta la carga aplicada las soluciones obtenidas con el modelo de viga unimorfa y las obtenidas con el modelo de elementos finitos comienzan a ser cada vez más diferentes. Esto puede deberse a que al aumentar el valor de la carga aplicada aumenta el desplazamiento del extremo libre de la viga hasta tal punto que el desplazamiento es del mismo orden que el espesor. Esto quiere decir que se comienzan a producir grandes desplazamientos que inducen un estado de deformación en la viga cuasitridimensional, por lo que aparecen unas deformaciones por cortante que el modelo de viga unimorfa no contempla. Aún así, la diferencia producida entre las soluciones de los diferentes modelos es pequeña.

A continuación, se muestra una tabla con los valores de voltaje máximo generado con cada uno de los modelos para diferentes valores de carga aplicada.

Tabla 4.8 Resultados voltaje máximo generado con cada uno de los modelos

| Fuerza aplicada [N] | Modelo laminado [V] | MEF [V] |
|----------------------------|----------------------------|----------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 50 | -1675 | -1570,77 |
| 100 | -3350 | -3141,53 |
| 150 | -5025 | -4712,3 |
| 200 | -6700 | -6283,06 |
| 250 | -8375 | -7853,83 |
| 300 | -10050 | -9424,6 |
| 350 | -11724 | -10995,4 |
| 400 | -13399 | -12566,1 |
| 450 | -15074 | -14136,9 |
| 500 | -16749 | -15707,7 |

4.4 Conclusiones

Tras analizar en detalle los resultados obtenidos con los modelos teóricos desarrollados en capítulos anteriores y los resultados que se obtienen con el modelo de elementos finitos realizado en el programa comercial ANSYS se puede concluir que los diferentes modelos dan soluciones cercanas. El modelo teórico de viga unimorfa es un modelo unidimensional que representa una realidad tridimensional. El modelo de elementos finitos es un modelo tridimensional más cercano a la realidad. El principal inconveniente del modelo de elementos finitos es que es más costoso a nivel computacional, mientras que el modelo de viga unimorfa es un modelo sencillo con bajo coste computacional. Debido a esto, en el siguiente capítulo se estudiará el rango de validez del modelo de viga unimorfa.

Además de esto, se va a proceder a realizar un análisis paramétrico, para así estudiar que configuración es la más eficiente dado que si se recuerda lo expuesto en el capítulo introductorio lo que se busca es almacenar la máxima energía posible.

5 ANÁLISIS. ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DE PARÁMETROS

Una vez que se han validado los modelos, se va a realizar un estudio paramétrico para así conocer el tipo de configuración que logra generar la máxima energía posible. Este estudio, se va a realizar con los diferentes modelos desarrollados con anterioridad. Como ya se ha indicado en el capítulo anterior, el modelo de viga unimorfa es un modelo más sencillo que implica un menor coste computacional. Es por ello, por lo que se trata de un modelo especialmente útil para realizar estudios paramétricos.

Además de esto, se va a realizar un estudio para conocer el rango de validez del modelo de viga unimorfa ya que a pesar de ser un modelo interesante, debido a que implica un menor coste computacional, es un modelo unidimensional que representa una realidad que es tridimensional, por lo que es probable que solo funcione correctamente dentro de un rango concreto de valores.

Las dimensiones y propiedades de los materiales utilizados en los diferentes estudios de la influencia de parámetros se muestran en la siguiente tabla. Se ha aplicado una carga de 350N.

Tabla 5.1 Dimensiones y propiedades de los materiales para el estudio paramétrico

| Símbolo | Unidad | Valor |
|----------------------|------------------|-----------------------|
| E_p | GPa | 81 |
| ϵ_{33}^T | | $5,82 \cdot 10^{-9}$ |
| k_{31} | | 0,46 |
| d_{31} | C/m ² | $-124 \cdot 10^{-12}$ |
| L | cm | 10 |
| W | cm | 0,36 |
| t | cm | 0,8 |
| t_b | cm | 0,6 |
| t_p | cm | 0,2 |

Conociendo esto se va a proceder a explicar cada uno de los estudios realizados y las conclusiones alcanzadas.

5.1 Influencia de la relación de módulo elástico α y la relación de espesores β

El primer análisis paramétrico que se ha realizado es un estudio de la influencia de la relación de espesores β en el voltaje generado. Este análisis se ha realizado manteniendo la relación del módulo elástico α constante. Utilizando las ecuaciones del modelo de viga unimorfa se ha implementado un código en MATLAB para determinar como varía el voltaje generado. Los resultados se muestran en la siguiente figura

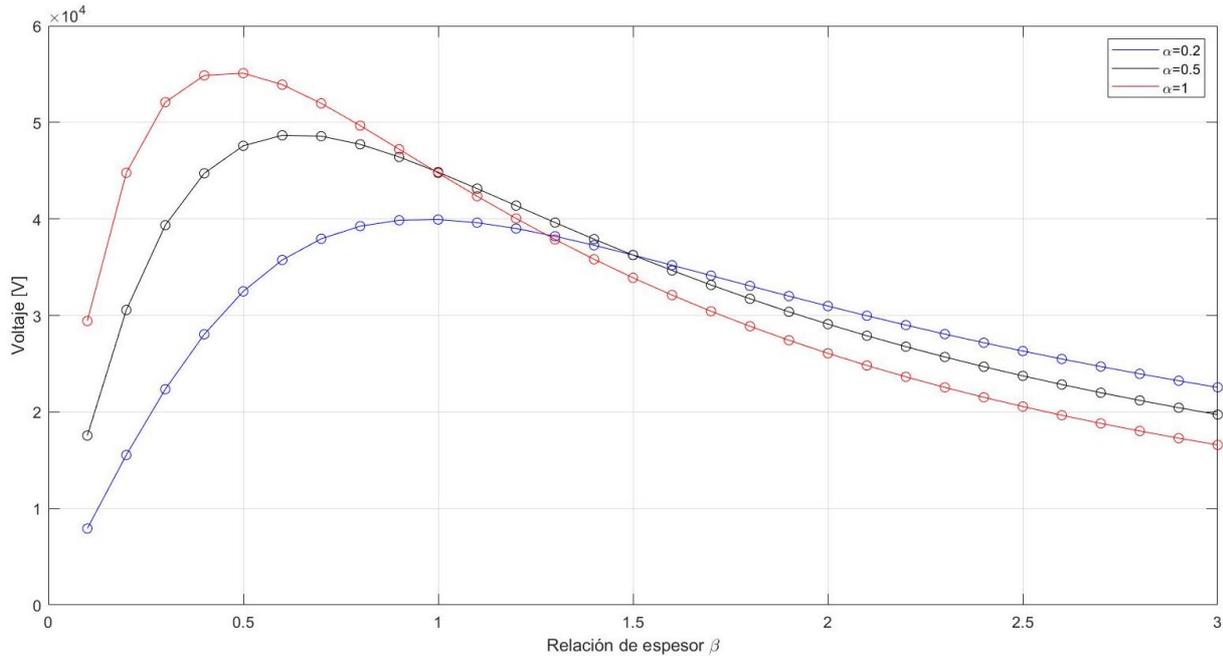


Figura 5.1 Influencia de la relación de espesor en el voltaje generado

Se observa, que inicialmente el voltaje generado aumenta con la relación de espesores hasta alcanzar un máximo. A partir de ahí el voltaje generado disminuye con la relación de espesores. El máximo se alcanza en $\beta = 0.5$. Destacar también, que dicho máximo varía en función de como se defina la relación de módulo elástico α y disminuye considerablemente cuando el módulo de Young de la capa base es mucho menor que el de la capa piezoeléctrica.

Por lo tanto, se puede concluir que el máximo voltaje generado se produce cuando el módulo de Young de la capa base se aproxima al de la capa piezoeléctrica para una relación de espesores de $\beta = 0.5$.

Teniendo en cuenta las mismas dimensiones y propiedades de los materiales se ha realizado un segundo estudio paramétrico para conocer la influencia de la relación de espesores β en el voltaje generado manteniendo constante esta vez la relación de módulo elástico α . Del mismo modo que en el anterior análisis, se han utilizado las ecuaciones del modelo de viga unimorfa y se han implementado en MATLAB. Los resultados se muestran en la *Figura 5.2*.

Es notable observar que el voltaje generado aumenta rápidamente a medida que aumenta la relación de módulo elástico hasta llegar a un punto en el que se mantiene constante. También, se puede ver que para una relación de espesores $\beta = 0.5$ el voltaje generado aumenta considerablemente.

Entonces, se puede concluir que el máximo voltaje generado se produce para una relación de espesores $\beta = 0.5$ y una relación de módulos elásticos cercana a la unidad.

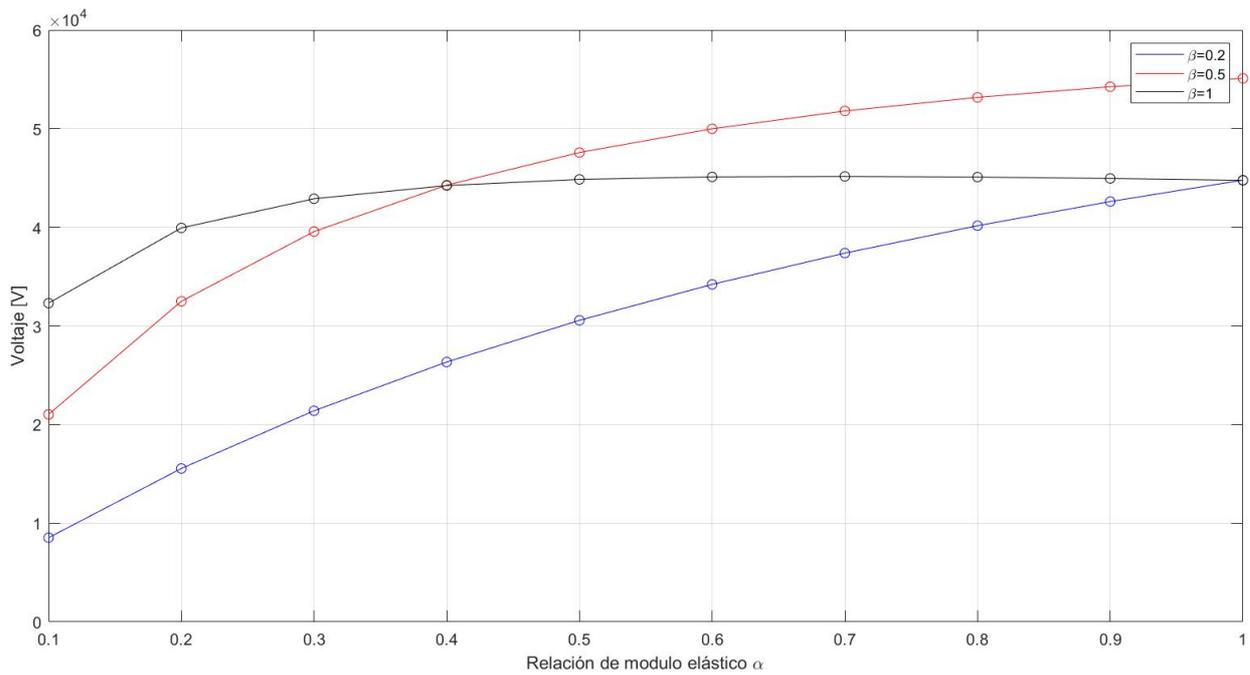


Figura 5.2 Influencia de la relación del módulo elástico en el voltaje generado

Por otro lado, se ha analizado la influencia de la relación de espesores en la carga generada siendo la relación de módulo elástico igual a uno. Teniendo en cuenta las mismas dimensiones y propiedades de los materiales indicadas en la introducción de este capítulo se ha implementado en MATLAB las ecuaciones del modelo de viga unimorfa. En la *Figura 5.3* se muestran los resultados obtenidos.

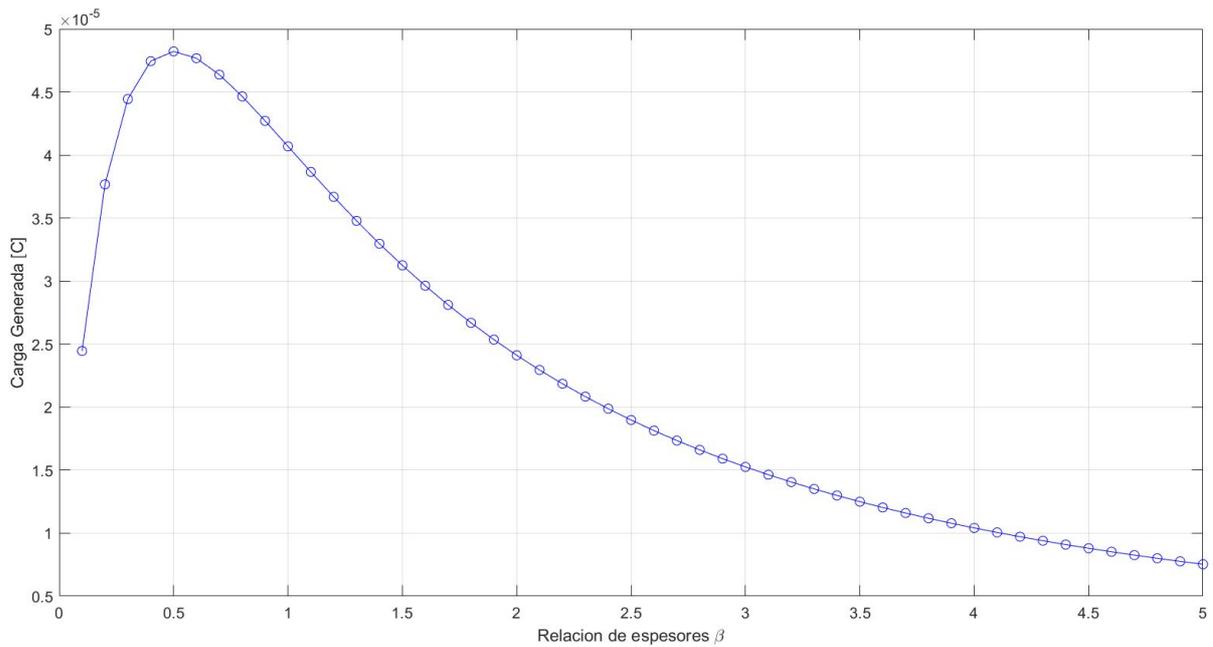


Figura 5.3 Influencia de la relación de espesores en la carga generada

Se observa que la carga generada aumenta inicialmente hasta alcanzar un valor máximo. Este máximo se da en $\beta = 0,5$. A partir de ahí, la carga generada disminuye rápidamente con el aumento de la relación de espesor.

Por lo tanto, se puede concluir que al igual que para el voltaje generado, el máximo valor de carga generada se produce cuando el módulo de Young de la capa base se aproxima al de la capa piezoeléctrica para una relación de espesores de $\beta = 0,5$.

Por último, se ha realizado un estudio para conocer la influencia de la relación de módulo elástico en la carga generada cuando la relación de espesores es igual a uno. Los resultados se muestran en la siguiente figura.

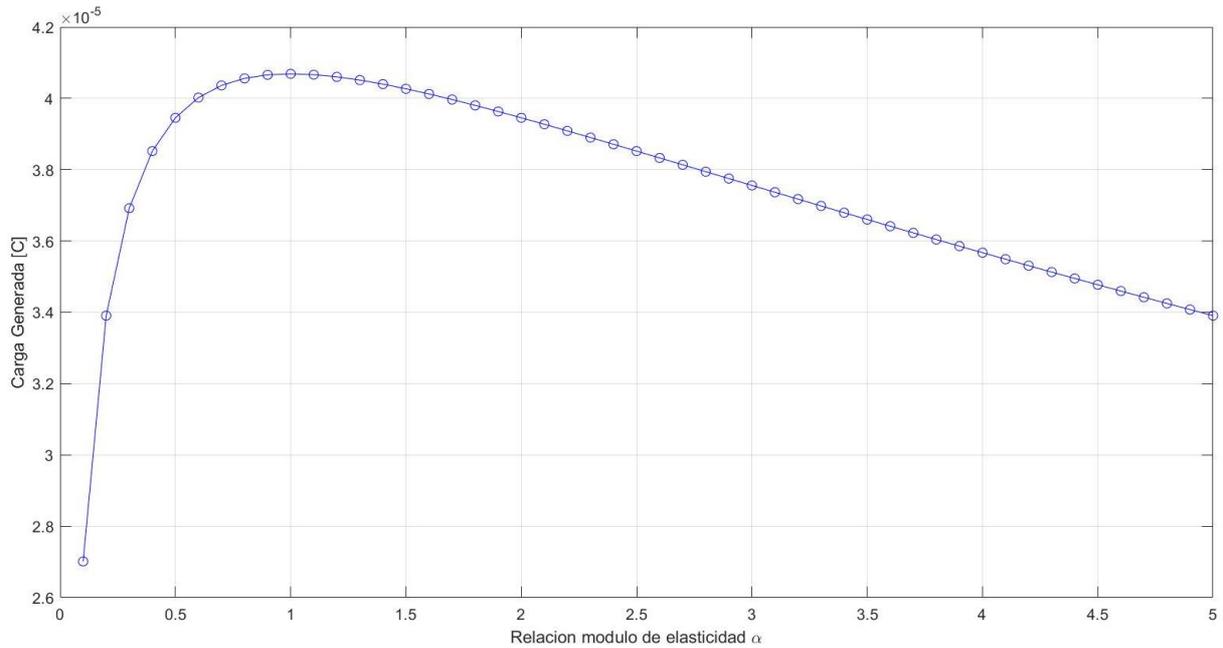


Figura 5.4 Influencia de la relación del módulo de elasticidad en la carga generada

Esta figura muestra la misma tendencia descrita en el caso anterior. Se observa que la carga generada aumenta conforme aumenta la relación del módulo de elasticidad hasta llegar a un valor máximo. Este máximo se encuentra en $\alpha = 1$. A partir de ahí la carga generada comienza a disminuir aunque lo hace a un ritmo más lento que en el caso anterior.

Por lo tanto, se puede concluir que la máxima carga generada se da para una relación del módulo de elasticidad cercana a la unidad.

De esta forma, queda finalizado este primer apartado de estudios paramétricos.

5.2 Influencia de la longitud L

En este segundo apartado se va a estudiar la influencia de la longitud L en el voltaje generado y en la carga generada. Dado que en el apartado anterior se ha podido concluir que tanto el máximo voltaje generado como la máxima carga generada se dan para una relación de espesores $\beta = 0,5$ y una relación de módulo elástico de $\alpha = 1$, se ha decidido hacer el análisis paramétrico de la influencia de la longitud imponiendo dichas condiciones. Teniendo en cuenta las dimensiones y propiedades de los materiales expuestas en la introducción del capítulo se ha decidido llevar a cabo dicho estudio implementando las ecuaciones del modelo de viga unimorfa en MATLAB. Los resultados se muestran a continuación.

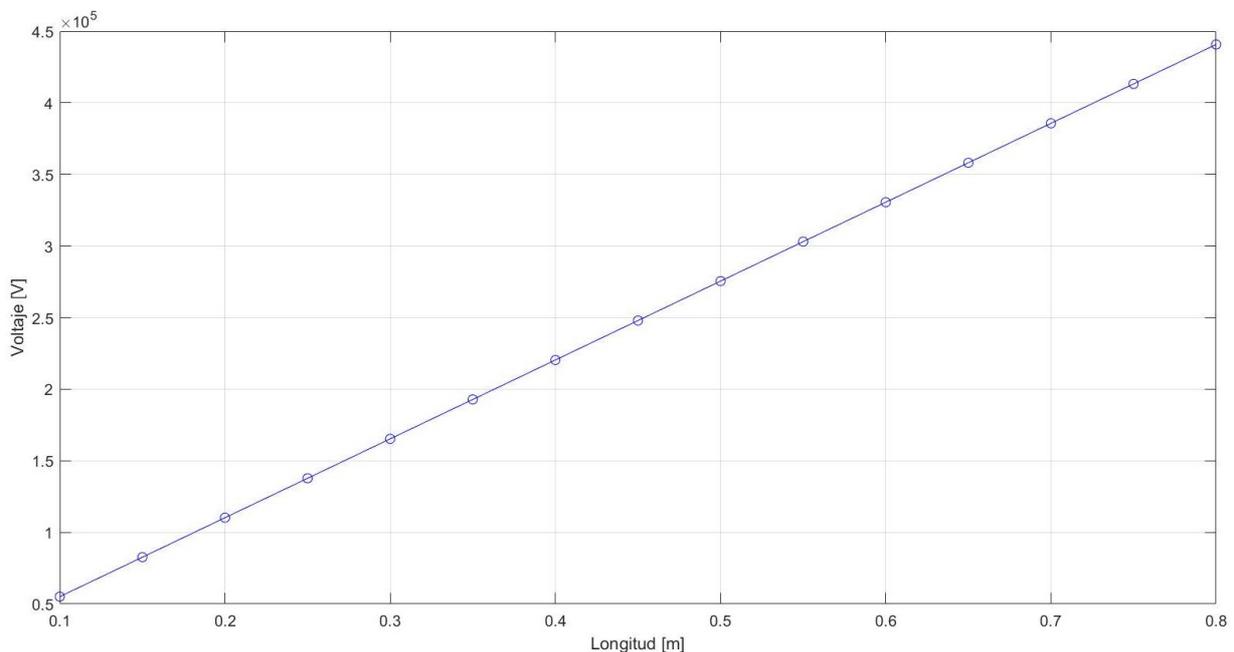


Figura 5.5 Influencia de la longitud L en el voltaje generado

Se observa, que a medida que aumenta la longitud de la viga el voltaje generado aumenta linealmente. Es decir a mayor longitud de la viga en voladizo se generará un mayor voltaje.

Se concluye entonces que el voltaje generado es directamente proporcional a la longitud de la viga en voladizo.

Si analizamos bajo la mismas condiciones la influencia de la longitud L en la carga generada se observa que ésta también aumenta conforme lo hace la longitud de la viga. En este caso la carga generada es proporcional al cuadrado de la longitud. Estos resultados se muestran en la *Figura 5.6*.

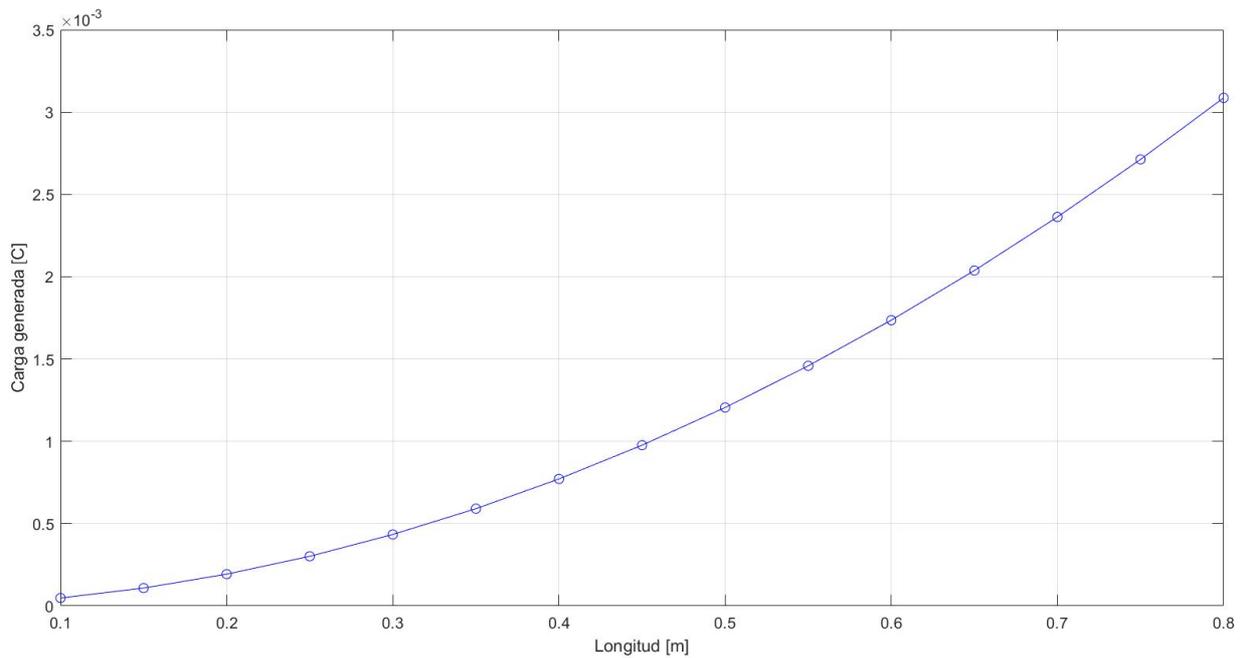


Figura 5.6 Influencia de la longitud L en la carga generada

5.3 Influencia del ancho W

Del mismo modo que se ha analizado en el apartado anterior la influencia de la longitud en el voltaje y la carga generada, en el este apartado se va a estudiar la influencia del ancho. Al igual que antes, el estudio se ha realizado para una relación de espesores $\beta = 0,5$ y una relación de módulo elástico de $\alpha = 1$. Teniendo en cuenta esto y las dimensiones y propiedades expuestas con anterioridad se ha llevado a cabo el análisis usando las ecuaciones de viga unimorfa. Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

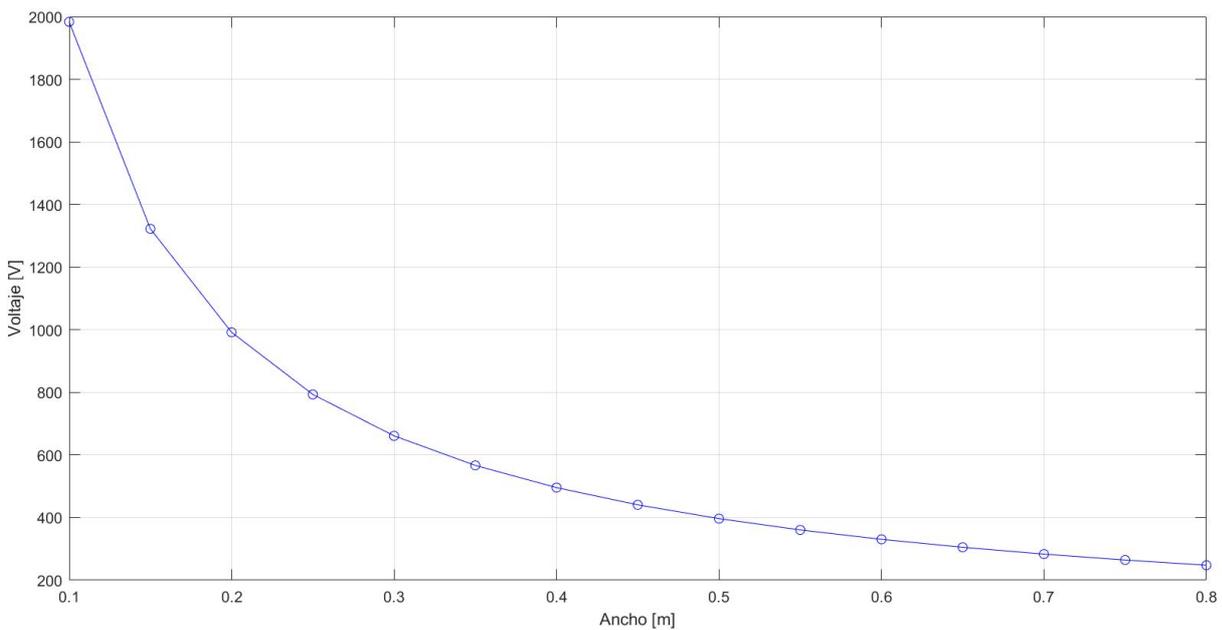


Figura 5.7 Influencia del ancho en el voltaje generado

Se observa que el voltaje generado disminuye a medida que aumenta el ancho de la viga. Es decir el voltaje generado es inversamente proporcional al ancho de la viga en voladizo. Por el contrario si se analiza la influencia del ancho en la carga generada en la *Figura 5.8*, se observa que ésta no depende del ancho.

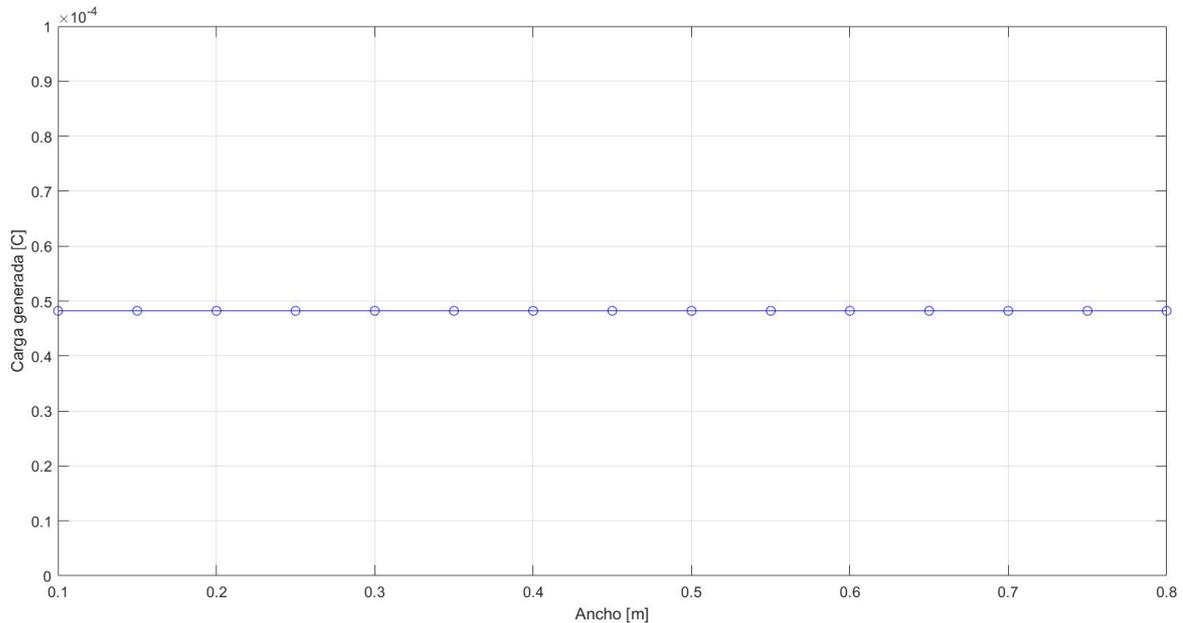


Figura 5.8 Influencia del ancho en la carga generada

Por lo tanto, se puede concluir que aumentar el ancho de la viga no hará que se produzca un mayor voltaje o una mayor carga.

5.4 Influencia de la relación W/t

Por último, se va a analizar la influencia de la relación adimensional $\frac{W}{t}$. Todos los análisis realizados con anterioridad se han llevado a cabo para una relación $\frac{W}{t} = 0,45$. En este apartado se desea estudiar que es lo que ocurre cuando se aumenta el valor de dicha relación. Concretamente, se desea ensayar cual es el rango de validez del modelo teórico de viga unimorfa. Para ello, se va a comparar el voltaje que se obtiene con el modelo teórico y el que se obtiene con el modelo de elementos finitos haciendo variar los valores de la relación adimensional $\frac{W}{t}$.

La importancia de este estudio viene dada a que como ya se explicó anteriormente en el capítulo 4 apartado 4.3.3 el modelo teórico de viga unimorfa es un modelo unidimensional, mientras que el modelo de elementos finitos es un modelo tridimensional.

En el modelo teórico de viga unimorfa se asumen un comportamiento isótropo del material. Además, la respuesta piezoeléctrica venga dada por la deformación en la dirección longitudinal de la barra. Deformaciones en otras direcciones no contribuyen a la respuesta piezoeléctrica. Es por ello, por lo que en todo el ancho W de la viga el potencial es constante en cada fibra.

Sin embargo, en el modelo de elementos finitos la respuesta piezoeléctrica viene dada por el comportamiento en todas las direcciones ya que dicho modelo presenta deformaciones en las tres direcciones.

Debido a esto se ha decidido llevar a cabo este estudio paramétrico. Para ello, se ha hecho variar la relación adimensional $\frac{W}{t}$ con los valores que se muestran a continuación.

$$\frac{W}{t} = \{0,25; 0,5; 0,75; \dots; 10\}$$

En primer lugar, con el modelo de elementos finitos y haciendo uso del programa comercial ANSYS se obtuvieron los siguientes resultados. Se muestra una primera selección de resultados donde se observa como para una relación adimensional $\frac{W}{t} < 0,5$ el potencial que se obtiene es constante en cada fibra por lo que el modelo de elementos finitos se asemeja totalmente a un modelo unidimensional. Sin embargo, a partir de una relación $\frac{W}{t} = 0,5$ se comienzan a observar cambios leves en los valores del potencial en cada fibra. Hasta que finalmente para $\frac{W}{t} = 1$ se aprecia una variación considerable alrededor del potencial máximo obtenido.

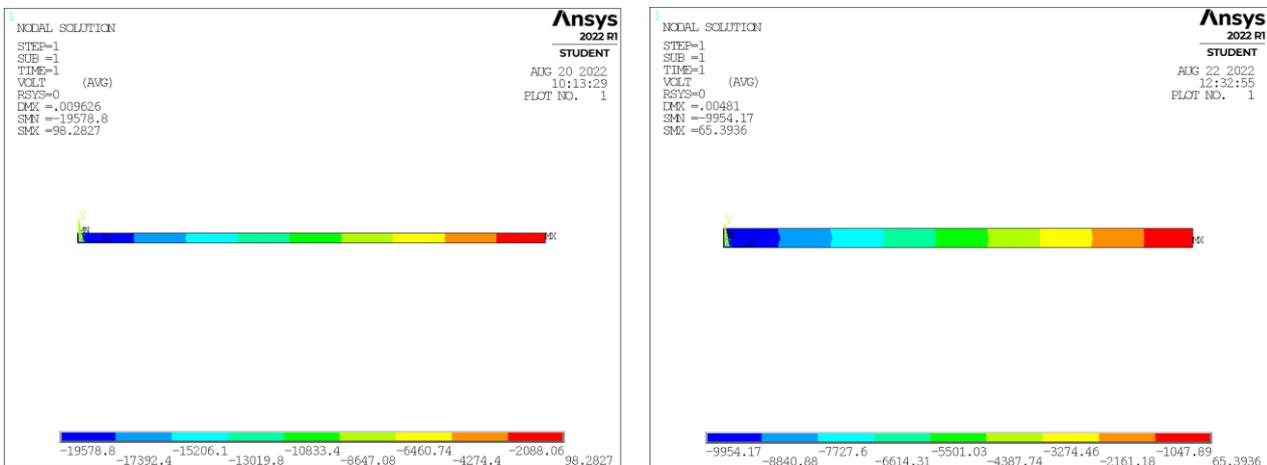


Figura 5.9 Resultado voltaje máximo generado para una relación $W/t = 0,25$ (izq) y $W/t = 0,5$ (dcha)

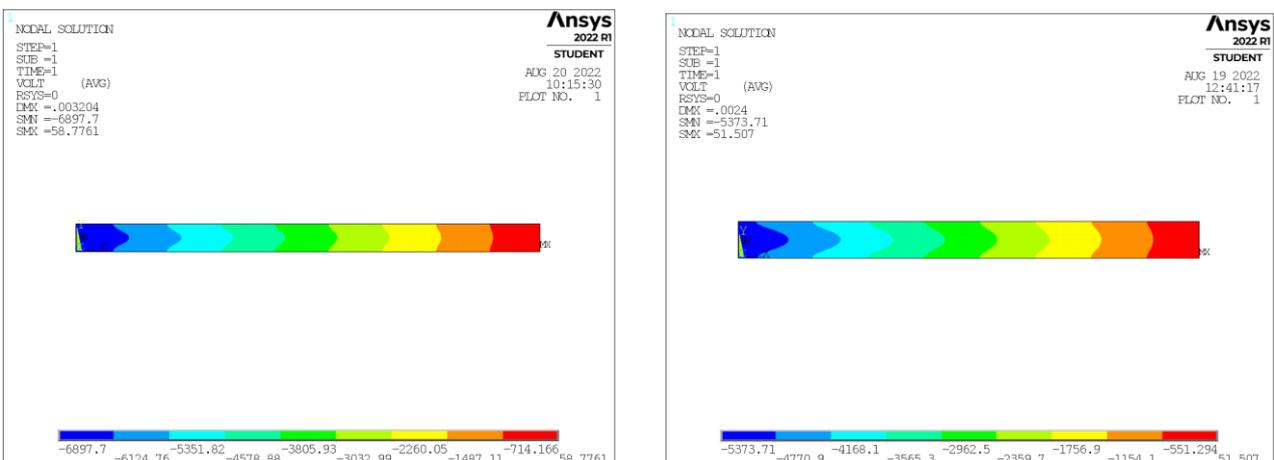


Figura 5.10 Resultado del voltaje máximo generado para una relación $W/t = 0,75$ (izq) y $W/t = 1$ (dcha)

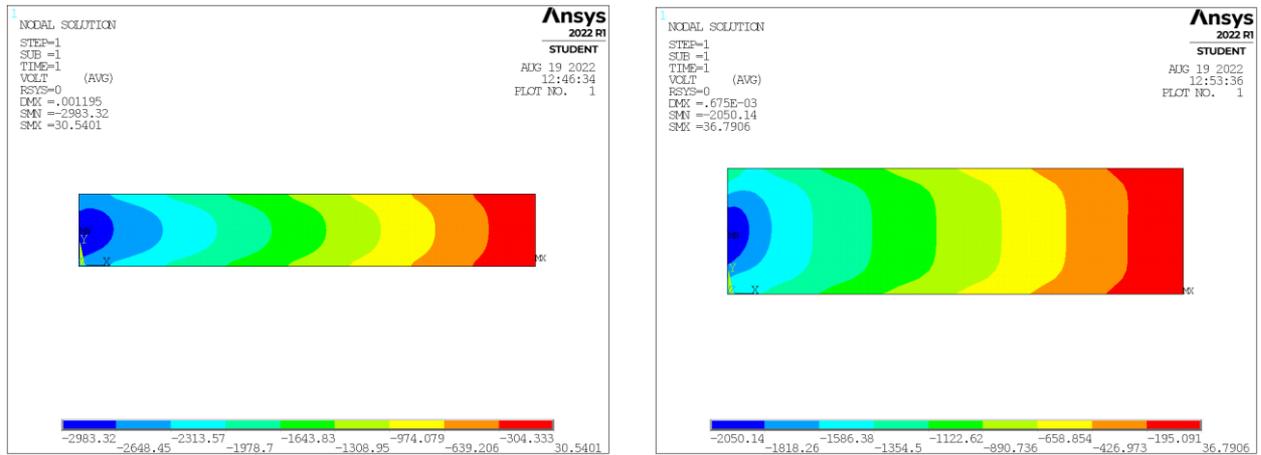


Figura 5.11 Resultado voltaje máximo generado para una relación $W/t = 2$ (izq) y $W/t = 3,5$ (dcha)

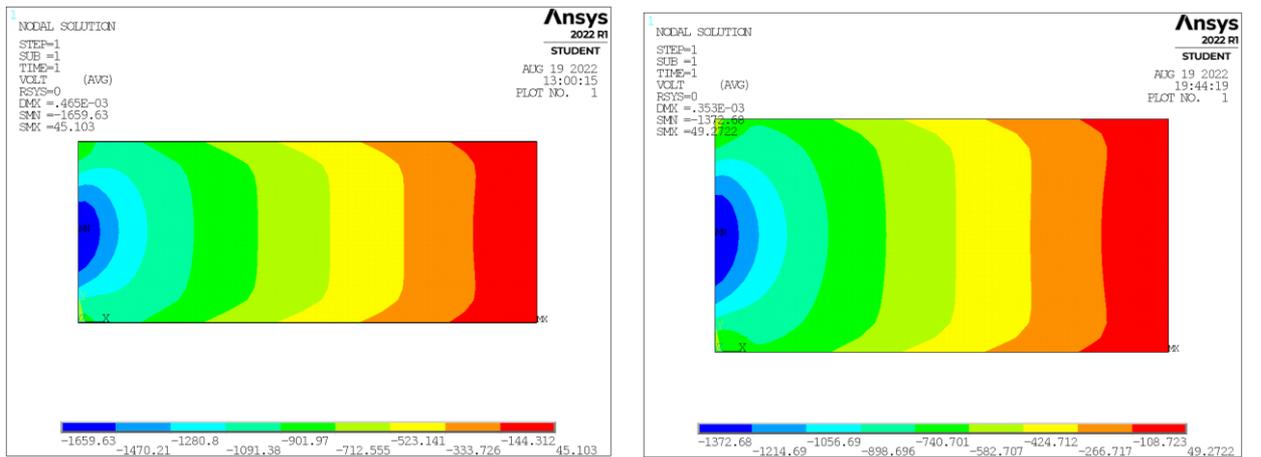


Figura 5.12 Resultado voltaje máximo generado para una relación $W/t = 5$ (izq) y $W/t = 6,5$ (dcha)

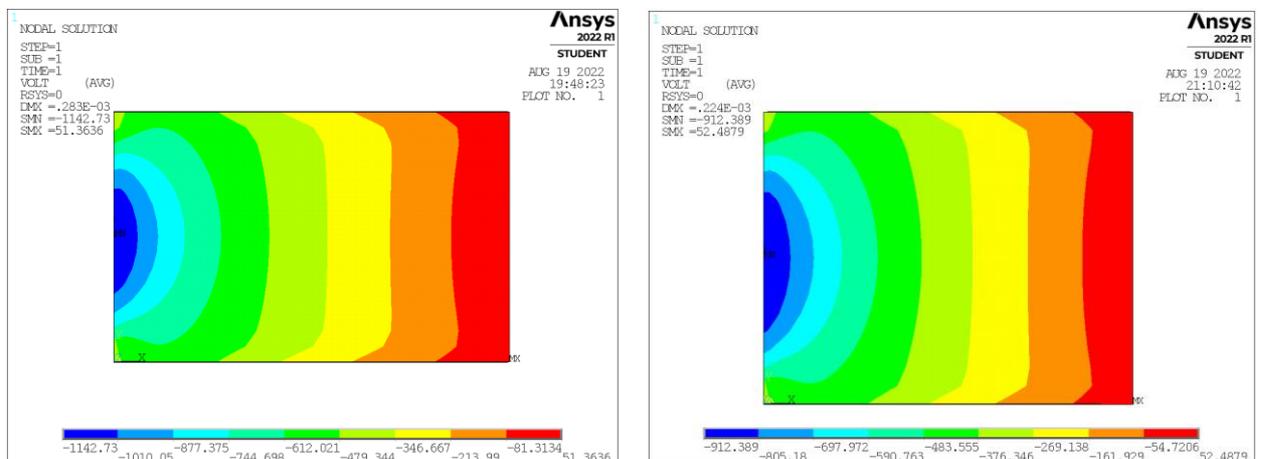


Figura 5.13 Resultado voltaje máximo generado para una relación $W/t = 8$ y $W/t = 10$

A partir de una relación $\frac{W}{t} > 1$ se observa que la respuesta piezoeléctrica viene dada por el comportamiento en todas las direcciones. Por lo tanto, a priori el modelo de elementos finitos y el modelo teórico de viga unimorfa no son compatibles.

Para poder establecer un rango de valores en los que el modelo teórico de viga unimorfa se ajusta a la realidad que se desea estudiar, se ha realizado un análisis comparativo. El resultado del análisis se muestra en la *Figura 5.14*.

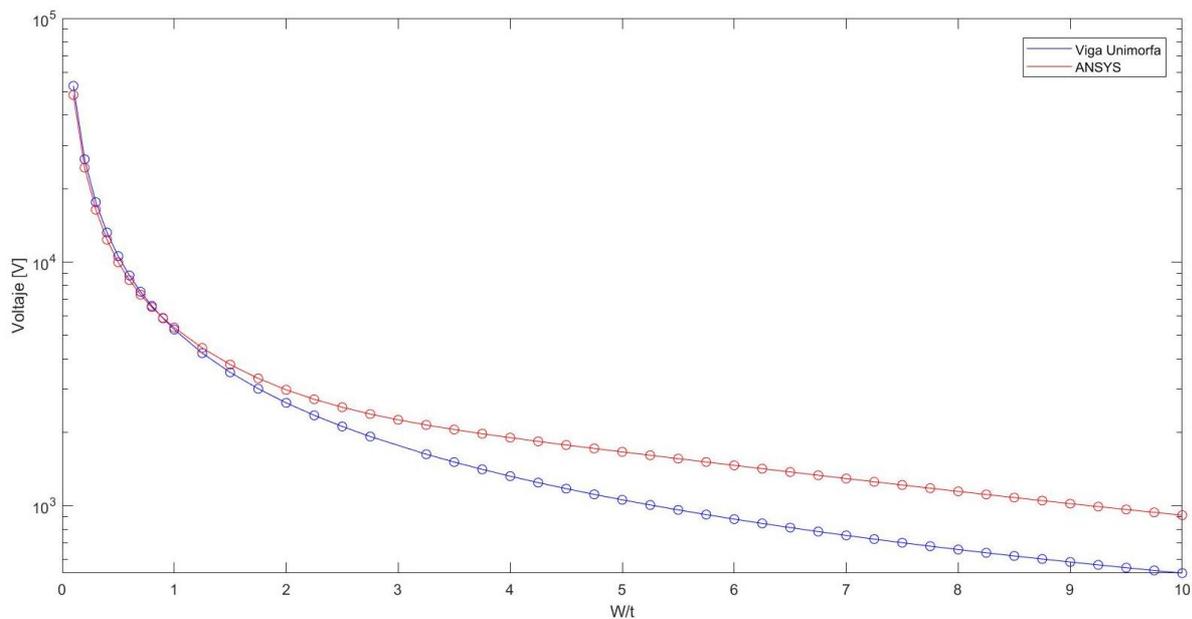


Figura 5.14 Resultados voltaje máximo generado para distintos valores de la relación W/t

Es notable observar que en el rango de valores $\frac{W}{t}$ situado entre 0,25 y 0,5 los resultados de ambos modelos difieren un poco debido a que como se trata de una viga muy estrecha en el modelo de elementos finitos la malla se distorsiona y esto hace que se produzcan resultados menos cercanos a la realidad.

En el rango de valores $\frac{W}{t}$ entre 0,5 y 1 los resultados de ambos modelos coinciden. Es decir, en este rango de valores se pueden utilizar ambos modelos indistintamente, por lo que los análisis que se han realizado en apartados anteriores son correctos debido a que se han llevado a cabo con una relación $\frac{W}{t} = 0,45$.

A partir de $\frac{W}{t} > 1$ los resultados del modelo de elementos finitos no coinciden con los resultados del modelo teórico de viga unimorfa debido a que la respuesta piezoeléctrica del modelo de elementos finitos viene dada por el comportamiento en todas las direcciones y los efectos tridimensionales hacen que las soluciones no sean las mismas.

5.5 Conclusiones

En este capítulo, se han realizado una serie de análisis paramétricos para conocer qué configuración es la más óptima a la hora de recolectar energía.

Tras llevar a cabo diferentes análisis, se puede concluir que para poder obtener el máximo voltaje generado y la máxima carga generada es necesario que la relación de módulos elásticos α sea cercana a la unidad, es decir que los módulos de Young de la capa base y de la capa piezoeléctrica sean prácticamente iguales. Además, la relación de espesores β debe ser cerca a 0,5 es decir, que el espesor de la capa base sea la mitad del espesor de la capa piezoeléctrica.

Al mismo tiempo, hay que tener en cuenta que la longitud es directamente proporcional al voltaje y a la carga generada. Por lo que si se aumenta la longitud de la viga se recolectará mayor energía. Sin embargo, aumentar el ancho de la viga no incrementará la cantidad de energía recolectada.

Por último, se ha desarrollado un análisis para conocer cual es el alcance del modelo teórico de viga unimorfa, ya que, si bien es un modelo sencillo y menos costoso a nivel computacional, no deja de ser una simplificación unidimensional de una realidad tridimensional. Se concluye que para un rango de valores $\frac{W}{t}$ comprendidos entre 0,5 y 1, el modelo teórico de viga unimorfa proporciona unos resultados aproximados a los del modelo de elementos finitos, realizado con el programa comercial ANSYS. Mientras que si se aumenta el valor de la relación $\frac{W}{t}$ los efectos tridimensionales hacen que se proporcione una solución menos aproximada.

6 CONCLUSIONES GENERALES Y TRABAJOS FUTUROS

En este último capítulo, se van a exponer las conclusiones resultantes del estudio de laminados piezoeléctricos para actividades de recolección de energía. También, las posibles investigaciones que pueden surgir a raíz de este trabajo, buscando una optimización de la configuración del recolector de energía.

Para introducir este capítulo, se presentará a modo de resumen los desarrollos y resultados principales obtenidos en cada uno de los capítulos anteriormente desarrollados.

6.1 Resumen

En el presente proyecto se han desarrollado una serie de modelos que permiten estudiar el comportamiento de una viga en voladizo piezoeléctrica. En concreto, se han llevado a cabo dos modelos analíticos y un modelo de elementos finitos desarrollado en el programa comercial ANSYS. Los modelos analíticos corresponden a un modelo de laminado y a un modelo de viga unimorfa. Se desarrollaron las ecuaciones que definían cada uno de los modelos y posteriormente se implementaron en MATLAB para así poder realizar una serie de estudios paramétricos. Antes de realizar la influencia de ciertos parámetros se presentó el modelo de elementos finitos. Para verificar que los modelos expuestos eran válidos se realizó una comparativa de las soluciones que aportaban cada uno de ellos. Una vez verificados los modelos se realizó el estudio de influencia de parámetros para así conocer el tipo de configuración que maximiza la energía recolectada.

6.2 Conclusiones

En este apartado se presentan las conclusiones relativas a los estudios realizados de una viga en voladizo piezoeléctrica que tiene aplicada en el extremo libre una carga. De acuerdo a los resultados obtenidos se exponen las siguientes conclusiones.

Tras realizar un estudio comparativo de los resultados que se obtenían con los modelos teóricos y con el modelo de elementos finitos se puede afirmar que los modelos se han desarrollado correctamente y se corresponden con el problema que se desea estudiar. En concreto, tras analizar y comparar la respuesta mecánica del modelo de laminado, del modelo de viga unimorfa y del modelo de elementos finitos se puede afirmar que:

- El desplazamiento obtenido con el modelo de viga unimorfa y con el modelo de elementos finitos coincide para cualquier valor de carga aplicada. Sin embargo, el resultado en desplazamiento obtenido con el modelo de laminado difiere de los dos anteriormente mencionados conforme aumenta el valor de la carga aplicada. Esto se debe a que el modelo de laminado se ha realizado teniendo en cuentas las ecuaciones de placas laminadas bajo el estado de tensión plana

Del mismo modo, tras analizar y comparar la respuesta piezoeléctrica obtenida con el modelo de viga unimorfa y con el modelo de elementos finitos se puede concluir que:

- El modelo teórico de viga unimorfa es un modelo unidimensional que representa una realidad tridimensional. El modelo de elementos finitos es un modelo tridimensional más cercano a la realidad. Es por ello por lo que los resultados obtenidos con el modelo de viga unimorfa no son exactamente iguales a los obtenidos con el modelo de elementos finitos. Aún así, son muy cercanos por lo que ambos modelos quedan validados.
- El principal inconveniente del modelo de elementos finitos es que es más costoso a nivel computacional, mientras que el modelo de viga unimorfa es un modelo sencillo con bajo coste computacional

En cuanto a los análisis de influencia realizados para conocer qué tipo de configuración es la más adecuada para optimizar la cantidad de energía recolectada las conclusiones obtenidas son:

- Para poder obtener el máximo voltaje generado y la máxima carga generada es necesario que la relación de módulos elásticos α sea cercana a la unidad, es decir que los módulos de Young de la capa base y de la capa piezoeléctrica sean prácticamente iguales. Además, la relación de espesores β debe ser cerca a 0,5 es decir, que el espesor de la capa base sea la mitad del espesor de la capa piezoeléctrica.
- Hay que tener en cuenta que la longitud es directamente proporcional al voltaje y a la carga generada. Por lo que si se aumenta la longitud de la viga se recolectará mayor energía. Sin embargo, aumentar el ancho de la viga no incrementará la cantidad de energía recolectada.

Por último, en cuanto al análisis desarrollado para conocer cuál es el alcance del modelo teórico de viga unimorfa, se concluye que para un rango de valores $\frac{W}{t}$ comprendidos entre 0,5 y 1, el modelo teórico de viga unimorfa proporciona unos resultados aproximados a los del modelo de elementos finitos, realizado con el programa comercial ANSYS. Mientras que si se aumenta el valor de la relación $\frac{W}{t}$ los efectos tridimensionales hacen que se proporcione una solución menos aproximada.

6.3 Trabajos futuros

La mayoría de estudios realizados y presentados en el proyecto de estudio dejan posibles vías de investigación abiertas. Se van a proponer una serie de trabajos futuros, que pueden servir de base a futuras investigaciones que busquen optimizar el modelo y los resultados anteriormente expuestos.

- Estudio de otros tipos de configuraciones de viga en voladizo piezoeléctrica, como por ejemplo la viga en voladizo bimorfa en serie o la bimorfa en paralelo.
- Estudio de otros casos de laminados con multitud de variantes en sus condiciones de contorno y aplicación de diferentes tipos de carga, analizando cómo influye la variación de las condiciones de contorno en la cantidad de energía recolectada.
- Estudio de la respuesta dinámica de placas laminadas de material piezoeléctrico.
- Estudio de rentabilidad económica del uso de materiales piezoeléctricos en la industria.

ANEXO A. CÓDIGOS ANSYS

- ANÁLISIS PROBLEMA MECÁNICO

!-----

!Análisis viga en voladizo piezoeléctrica

!-----

FINISH

/CLEAR

/PREP7

!-----

!DEFINICION ELEMENTO

!-----

ET,1,SOLID226,1001 !Elemento SOLID226 20 nodos, 1001 opción piezoeléctrica

ET,2,SOLID186 !Elemento SOLID186 20 nodos

!-----

!DEFINICION PROPIEDADES DEL MATERIAL

!-----

! Material 2

MP,DENS,2,7750!Densidad del metal

MP,EX,2,195E9 !Modulo de Young

MP,PRXY,2,0.3 !Modulo de Poisson

! Material 1

MP,DENS,1,7495 ! Densidad del piezoeléctrico

E_11 = 763

E_22 = 763

E_33 = 658

e11 = 0
e12 = 0
e13 = 0
e21 = 0
e22 = 0
e23 = 0
e31 = 0
e32 = 0
e33 = 0
e41 = 0
e42 = 0
e43 = 0
e51 = 0
e52 = 0
e53 = 0
e61 = 0
e62 = 0
e61 = 0

c11 = 139E9
c12 = 77.8E9
c13 = 74.3E9
c22 = 139E9
c23 = 74.3E9
c33 = 115E9
c44 = 25.6E9
c55 = 25.6E9
c66 = 30.6E9

!Matriz dielectrica

EMUNIT,EPZRO,8.85E-12 !Especifica el sist de unidades para los problemas de campo magnetico,
permitividad electrica del espacio libre 8.85e-12 (relativo al vacio)

MP,PERX,1,E_11 ! Er direccion x

MP,PERY,1,E_22 ! Er direccion y

MP,PERZ,1,E_33 ! Er direccion z

!Matriz piezoelectrica

TB,PIEZ,1 ! Define la tabla piezoelectrica

TBDATA,1,e11
TBDATA,2,e12
TBDATA,3,e13
TBDATA,4,e21
TBDATA,5,e22
TBDATA,6,e23
TBDATA,7,e31
TBDATA,8,e32
TBDATA,9,e33
TBDATA,10,e41
TBDATA,11,e42
TBDATA,12,e43
TBDATA,13,e51
TBDATA,14,e52
TBDATA,15,e53
TBDATA,16,e61
TBDATA,17,e62
TBDATA,18,e63

!Matriz de rigidez

TB,ANEL,1 ! Define la tabla estructural

TBDATA,1,c11,c12,c13

TBDATA,7,c22,c23

TBDATA,12,c33

TBDATA,16,c44

TBDATA,19,c55

TBDATA,21,c66

!-----

!DIMENSIONES Y GEOMETRIA

!-----

L=0.1 !Longitud

tp=2E-3 !Espesor piezo

tb= 6E-3 !Espesor metal

t = tp +tb

W = t*0.45

```

K,1      !Coordenada 0,0
K,2,L    !Coordenada L,0
K,3,L, ,tp  !Coordenada L,H1
K,4,0, ,tp  !Coordenada 0,H1
KGEN,2,1,4,1,,W  !Genera puntos clave adicionales
KGEN,2,1,4,1,,W/2
K,13,L, ,-tb  !Coordenada L,-H2
K,14,0, ,-tb  !Coordenada 0,-H2
KGEN,2,13,14,1,,W  !Genera puntos clave adicionales
KGEN,2,13,14,1,,W/2

V,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12
V,1,2,13,14,5,6,15,16,9,10,17,18

!-----
!MALLADO
!-----
VSEL,,,1
VATT, 1, , 1, 0
ALLSEL

VSEL,,,2
VATT, 2, , 2, 0
ALLSEL

divx = 64
divy = 16

LESIZE,1,,,divx  !Divisiones en la longitud de la viga !LESIZE,nlinea,,,ndivisiones
LESIZE,2,,,4  !Divisiones en el espesor piezo
LESIZE,5,,,divy  !Divisiones en el ancho de la viga
LESIZE,13,,,8  !Divisiones en el espesor del metal
MSHK,1  !Use mapped meshing
MSHA,0,3D  !Malla con elementos hexaedricos en 3D

VMESH,ALL

```

!-----

!APLICACION DE LA CARGA

!-----

F=350

!OPCION1 No se obtienen buenos resultados al aplicarla de esta forma

!NSEL,S,LOC,X,L !Seleccionamos los nodos en x=L

!NSEL,R,LOC,Y,W/2 !Seleccionamos los nodos en y=w/2

!NSEL,R,LOC,Z,0 !Seleccionamos los nodos en z=0

!F,ALL,FZ,-F !Aplicamos la carga

!ALLSEL

!OPCION2

NSEL,S,LOC,X,L !Seleccionamos los nodos en x=L

NSEL,R,LOC,Z,0 !Seleccionamos los nodos en z=0

F,ALL,FZ,-F/(2*divy) !Aplicamos la carga

ALLSEL

NSEL,S,LOC,X,L !Seleccionamos los nodos en x=L

NSEL,R,LOC,Y,0 !Seleccionamos los nodos en y=0

NSEL,R,LOC,Z,0 !Seleccionamos los nodos en z=0

F,ALL,FZ,-F/(4*divy) !Aplicamos la carga

ALLSEL

NSEL,S,LOC,X,L !Seleccionamos los nodos en x=L

NSEL,R,LOC,Y,W !Seleccionamos los nodos en y=W

NSEL,R,LOC,Z,0 !Seleccionamos los nodos en z=0

F,ALL,FZ,-F/(4*divy) !Aplicamos la carga

ALLSEL

!-----

!CONDICIONES DE CONTORNO

!-----

NSEL,S,LOC,X,0 !Seleccionamos nodos en x=0

D,ALL,UX,0 !Define las restricciones de grados de libertad en nodos

!D,ALL,UY,0

!D,ALL,UZ,0

ALLSEL

```
NSEL,S,LOC,X,0 !Seleccionamos nodos en x=0
NSEL,R,LOC,Y,W/2 !Reseleccionamos nodos en y=w/2
!NSEL,R,LOC,Y,0 !Reseleccionamos nodos en y=0
D,ALL,UY,0
ALLSELL
```

```
NSEL,S,LOC,X,0 !Seleccionamos nodos en x=0
NSEL,R,LOC,Z,-tb !Reseleccionamos nodos en z=-h/2
D,ALL,UZ,0
ALLSELL
```

```
ASEL,S,LOC,Z,0 !Seleccionamos el area en z=0
!ASEL,S,LOC,X,L
DA,all,VOLT,0 !Imponemos voltaje 0 en la cara superior
ALLSEL
```

```
FINISH
```

```
!-----
!RESUELVE
!-----
/SOL
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
```

```
!-----
!RESULTADOS
!-----
/POST1
```

```
PLDISP,1 !Deformada
```

- ANÁLISIS PROBLEMA PIEZOELÉCTRICO

```
!-----
!Analisis viga en voladizo piezoelectrica
!-----
FINISH
/CLEAR

/PREP7

F = 350

!-----
!DEFINICION ELEMENTO
!-----
ET,1,SOLID226,1001 !Elemento SOLID226 20 nodos, 1001 opcion piezoelectrica
ET,2,SOLID186 !Elemento SOLID186 20 nodos

!-----
!DEFINICION PROPIEDADES DEL MATERIAL
!-----

! Material 2
MP,DENS,2,7750 !Densidad del metal
MP,EX,2,195E9 !Modulo de Young
MP,PRXY,2,0.3 !Modulo de Poisson

! Material 1
MP,DENS,1,7495 ! Densidad del piezoelectrico

E_11 = 763
E_22 = 763
E_33 = 658

e11 = 0
e12 = 0
e13 = -5.20
```

e21 = 0

e22 = 0

e23 = -5.20

e31 = 0

e32 = 0

e33 = 15.1

e41 = 0

e42 = 12.7

e43 = 0

e51 = 12.7

e52 = 0

e53 = 0

e61 = 0

e62 = 0

e61 = 0

c11 = 139E9

c12 = 77.8E9

c13 = 74.3E9

c22 = 139E9

c23 = 74.3E9

c33 = 115E9

c44 = 25.6E9

c55 = 25.6E9

c66 = 30.6E9

!Matriz dielectrica

EMUNIT,EPZRO,8.85E-12 !Especifica el sist de unidades para los problemas de campo magnetico,
permitividad electrica del espacio libre 8.85e-12 (relativo al vacio)

MP,PERX,1,E_11 ! Er direccion x

MP,PERY,1,E_22 ! Er direccion y

MP,PERZ,1,E_33 ! Er direccion z

!Matriz piezoelectrica

TB,PIEZ,1 ! Define la tabla piezoelectrica

TBDATA,1,e11

TBDATA,2,e12
TBDATA,3,e13
TBDATA,4,e21
TBDATA,5,e22
TBDATA,6,e23
TBDATA,7,e31
TBDATA,8,e32
TBDATA,9,e33
TBDATA,10,e41
TBDATA,11,e42
TBDATA,12,e43
TBDATA,13,e51
TBDATA,14,e52
TBDATA,15,e53
TBDATA,16,e61
TBDATA,17,e62
TBDATA,18,e63

TB,PIEZ,1,,0
TBMODIF,1,1,0
TBMODIF,1,2,0
TBMODIF,1,3,e13
TBMODIF,2,1,0
TBMODIF,2,2,0
TBMODIF,2,3,e23
TBMODIF,3,1,0
TBMODIF,3,2,0
TBMODIF,3,3,e33
TBMODIF,4,1,0
TBMODIF,4,2,e42
TBMODIF,4,3,0
TBMODIF,5,1,e51
TBMODIF,5,2,0
TBMODIF,5,3,0
TBMODIF,6,1,0
TBMODIF,6,2,0
TBMODIF,6,3,0

```

!Matriz de rigidez
TB,ANEL,1 ! Define la tabla estructural
TBDATA,1,c11,c12,c13
TBDATA,7,c22,c23
TBDATA,12,c33
TBDATA,16,c44
TBDATA,19,c55
TBDATA,21,c66

!-----
!DIMENSIONES Y GEOMETRIA
!-----
L=0.1    !Longitud
tp=2E-3 !Espesor piezo
tb= 6E-3 !Espesor metal
t = tp + tb
W= t*0.45 !Ancho

K,1      !Coordenada 0,0
K,2,L    !Coordenada L,0
K,3,L, ,tp    !Coordenada L,H1
K,4,0, ,tp    !Coordenada 0,H1
KGEN,2,1,4,1,,W    !Genera puntos clave adicionales
KGEN,2,1,4,1,,W/2
K,13,L, ,-tb    !Coordenada L,-H2
K,14,0, ,-tb    !Coordenada 0,-H2
KGEN,2,13,14,1,,W    !Genera puntos clave adicionales
KGEN,2,13,14,1,,W/2

V,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12
V,1,2,13,14,5,6,15,16,9,10,17,18

!-----
!MALLADO
!-----
VSEL,,,,,1
VATT, 1, , 1, 0

```

```
ALLSEL
```

```
VSEL,,,,2
```

```
VATT, 2, , 2, 0
```

```
ALLSEL
```

```
divx = 64
```

```
divy = 16
```

```
LESIZE,1,,,divx !Divisiones en la longitud de la viga !LESIZE,nlinea,,,ndivisiones
```

```
LESIZE,2,,,4 !Divisiones en el espesor piezo
```

```
LESIZE,5,,,divy !Divisiones en el ancho de la viga
```

```
LESIZE,13,,,8 !Divisiones en el espesor del metal
```

```
MSHK,1 !Use mapped meshing
```

```
MSHA,0,3D !Malla con elementos hexaedricos en 3D
```

```
VMESH,ALL
```

```
!-----
```

```
!APLICACION DE LA CARGA
```

```
!-----
```

```
!OPCION1 No se obtienen buenos resultados al aplicarla de esta forma
```

```
!NSEL,S,LOC,X,L !Seleccionamos los nodos en x=L
```

```
!NSEL,R,LOC,Y,W/2 !Seleccionamos los nodos en y=w/2
```

```
!NSEL,R,LOC,Z,0 !Seleccionamos los nodos en z=0
```

```
!F,ALL,FZ,-F !Aplicamos la carga
```

```
!ALLSEL
```

```
!OPCION2
```

```
NSEL,S,LOC,X,L !Seleccionamos los nodos en x=L
```

```
NSEL,R,LOC,Z,0 !Seleccionamos los nodos en z=0
```

```
F,ALL,FZ,-F/(2*divy) !Aplicamos la carga
```

```
ALLSEL
```

```
NSEL,S,LOC,X,L !Seleccionamos los nodos en x=L
```

```
NSEL,R,LOC,Y,0 !Seleccionamos los nodos en y=0
```

```
NSEL,R,LOC,Z,0 !Seleccionamos los nodos en z=0
```

```
F,ALL,FZ,-F/(4*divy) !Aplicamos la carga
```

```
ALLSEL
```

```

NSEL,S,LOC,X,L  !Seleccionamos los nodos en x=L
NSEL,R,LOC,Y,W  !Seleccionamos los nodos en y=W
NSEL,R,LOC,Z,0  !Seleccionamos los nodos en z=0
F,ALL,FZ,-F/(4*divy)  !Aplicamos la carga
ALLSEL

!-----
!CONDICIONES DE CONTORNO
!-----
NSEL,S,LOC,X,0 !Seleccionamos nodos en x=0
D,ALL,UX,0  !Define las restricciones de grados de libertad en nodos
!D,ALL,UY,0
!D,ALL,UZ,0
ALLSEL

NSEL,S,LOC,X,0 !Seleccionamos nodos en x=0
NSEL,R,LOC,Y,W/2 !Reseleccionamos nodos en y=w/2
!NSEL,R,LOC,Y,0 !Reseleccionamos nodos en y=0
D,ALL,UY,0
ALLSELL

NSEL,S,LOC,X,0 !Seleccionamos nodos en x=0
NSEL,R,LOC,Z,-tb !Reseleccionamos nodos en z=-h/2
D,ALL,UZ,0
ALLSELL

ASEL,S,LOC,Z,0 !Seleccionamos el area en z=0
!ASEL,S,LOC,X,L
DA,all,VOLT,0 !Imponemos voltaje 0 en la cara superior
ALLSEL

FINISH

!-----
!RESUELVE
!-----
/SOL
/STATUS,SOLU

```

SOLVE

FINISH

!-----

!RESULTADOS

!-----

/POST1

!PLDISP,1 !Deformada

PLNSOL, VOLT !Potencial electrico

!PLNSOL, EF,SUM !Campo electrico

REFERENCIAS

- [1] N. Sezer y M. Koc, «A comprehensive review on the state-of-the-art of piezoelectric energy harvesting,» *Nano Energy*, 2021.
- [2] E. Varadraján y M. Bhanusri, «Design and Simulation of Unimorph Piezoelectric Energy Harvesting System,» 2013.
- [3] J. I. García, «Diseño de um prototipo para generación energética mediante tecnología piezoeléctrica. Aplicación a escaleras,» Universidad Politécnica de Cataluña, 2012.
- [4] Z. Yang, S. Zhou, J. Zu y D. Inman, «High-Performance Piezoelectric Energy Harvesters an Their Applications,» *CellPress*, 2018.
- [5] Z. D. Deng, «ResearchGate,» Diciembre 2014. [En línea]. Available: https://www.researchgate.net/figure/Various-configurations-of-piezoelectric-cantilevers-a-unimorph-b-bimorph-c-a_fig2_280207081. [Último acceso: 17 Agosto 2022].
- [6] W. Qingping, D. Wei, L. Sha, S. O. Jin An y W. Tian, «Modelling and analysis of a piezoelectric unimorph cantilever for energy harvesting application,» *Materials Technology*, vol. 35, pp. 675-681, 2020.
- [7] C. Covaci y A. Gontean, «Piezoelectric energy harvesting solutions,» *Sensors 20*, nº 3512, 2020.
- [8] J. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*, CRC Press LLC, 2004.
- [9] J.-S. Kim, J. R. Hill y K. W. Wang, «An asymptotic approach for the analysis of piezoelectric fiber composite beams,» *Smart Materials and Structures*, 2011.
- [10] H. Quing, Y. Zhen, F. Likai y S. Bo, «Modeling and analysis of piezoelectric vibrating generator of cantiveler,» *Applied Mechanics and Materials*, vol. 148, pp. 1327-1330, 2012.
- [11] G. Xiaotong, S. Wei-Heng y Y. S. Wan, «Induced voltaje of piezoelectric unimorph cantilevers of different nonpiezoelectric/piezoelectric lenght ratios,» *Smart Materials and Structures*, vol. 18, 2009.
- [12] W. Quing-Ming, D. Xiao-Hong, M. I. X. Baomin and L. E. Cross, «Electromechanical Coupling and Output Efficiency of Piezoelectric,» *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics and frequency control*, vol. 46, no. 3, 1999.

