

## Integración de los mapas conceptuales en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Superior

*Inmaculada Concepción Masero Moreno. Universidad de Sevilla (España)*

### 1. Introducción.

Hoy en día, buscamos incorporar a la docencia de cualquier materia aquellas herramientas que permitan mejorar la comprensión de los contenidos y, por lo tanto, su aprendizaje. Una de estas herramientas son los mapas conceptuales (Novak, 2010), junto a los cuales se encuentran los mapas mentales. El uso de cualquiera de ellos permite al alumnado organizar y clarificar para facilitar la comprensión del contenido, ya que sirven para realizar una representación gráfica del conocimiento, incluyendo relaciones entre los conceptos, poniendo de manifiesto que entre ambos existan puntos en común.

Sin embargo, también existen diferencias entre ambos, el Mapa Mental se desarrolla desde el centro, mientras el mapa conceptual parte de arriba a abajo y de izquierda a derecha, en orden jerárquico y lógico. Además, el mapa mental puede recoger imágenes que sustituyan a los conceptos (Mateo y Lora, 2015).

Las características de un mapa conceptual lo hacen adecuado para construir de forma significativa el conocimiento matemático y la resolución de problemas (Contreras, 1993). Una de estas características son los enlaces cruzados entre conceptos o elementos de distinto nivel o jerarquía (Novak y Cañas, 2006). Existen numerosos trabajos e investigaciones sobre los mapas conceptuales como herramienta de aprendizaje y de evaluación. Sin embargo, aún hoy, estas son escasas en el área de la docencia de las Matemáticas, a pesar de que sea considerada por el profesorado como una herramienta útil y eficaz para su enseñanza (Mutodi y Chigonga, 2016).

Respecto a sus características para el aprendizaje en este campo del conocimiento, Viana-Barbosa y Barbosa (2013) exponen la forma de elaborar y utilizar los mapas conceptuales como herramientas gráficas para organizar y representar el conocimiento en la educación matemática, proponiendo el número aconsejable de conceptos y relaciones que deben recoger.

Los mapas han sido utilizados en diferentes áreas de las Matemáticas. Así, Nieto y García (2009) proponen su uso en la Geometría Computacional y el Álgebra Lineal como refuerzo de la enseñanza-aprendizaje. En este caso, el mapa es utilizado tanto por el docente como por el alumnado, siendo valorado de forma positiva por ambos. Estos autores destacan su utilidad en la comprensión de los diferentes conceptos que integran un tema, para manifestar la importancia de las relaciones entre los conceptos y procedimientos de dicho tema, y para esquematizar o guiar la resolución de problemas.

Otra aplicación muy interesante es la que exponen Galán, Granell y Huerta (2003), que utilizan mapas conceptuales sucesivos elaborados por el estudiante universitario para analizar y evaluar el cambio conceptual que se produce durante la enseñanza de una estructura conceptual matemática.

Bii, Chris y Jackson (2019) realizan una experiencia que incorpora el aprendizaje colaborativo en la elaboración de mapas conceptuales, en este caso, enfocados al desarrollo del dominio cognitivo y afectivo hacia las Matemáticas de los estudiantes de secundaria, concluyendo que el rendimiento en el aprendizaje de conceptos matemáticos y la actitud hacia las Matemáticas es mucho mayor cuando se enseña con esta estrategia que cuando se emplea el método convencional.

Por otro lado, Hafiz, Fatra y Fatra (2017) comparan la capacidad de conexión matemática entre un grupo de estudiantes universitarios que ha recibido enseñanza tradicional y otro grupo en el que se utilizó como herramienta de enseñanza los mapas conceptuales, concluyendo que los mapas conceptuales mejoran la capacidad de conexión matemática de los estudiantes, especialmente en trigonometría. También Kamble y Tembe (2013) llegan a conclusiones similares comparando un grupo de estudiantes que han trabajado con mapas con otro grupo de control que utiliza herramientas de aprendizaje convencionales.

En un entorno diferente se encuentra el trabajo de Gordillo, Pinzón y Moreno, (2017), que realizan una investigación utilizando el mapa conceptual para identificar obstáculos de tipo epistemológicos en el concepto de derivada en los libros de texto de Cálculo Diferencial.

Centrándonos en la resolución de problemas, Martínez, Villanueva y Ruiz (2018) realizan una propuesta enfocada a superar distintos tipos de dificultades que presenta la resolución de problemas en el área de Matemáticas. En este mismo sentido, Moreno (2017) y Moreno, Aguilar y Villanueva (2017) abordan el uso de los mapas conceptuales por parte del docente para la descripción gráfica de la resolución de problemas en el Cálculo Diferencial.

Un mapa puede estar enfocado a que el estudiante identifique las dificultades que encuentra al reflexionar sobre las características de un determinado problema. Dicha reflexión condiciona su respuesta en la elección de una técnica o herramienta específica para la resolución del problema. Resulta evidente que todo este proceso de razonamiento puede llevar al estudiante hacia una solución que sea fiable o errónea. En este sentido, un mapa conceptual puede ser una herramienta de enseñanza-aprendizaje que permita detectar las deficiencias de dicho razonamiento y afianzar sus fortalezas.

Para abordar un problema de optimización es necesario realizar un estudio de sus características que permitan elegir la herramienta adecuada para su resolución y, una vez aplicada y desarrollado el proceso correspondiente, poder establecer la solución de este. De hecho, este proceso lógico que debe realizar el estudiante puede ser el problema más importante del aprendizaje de la optimización, al implicar la comprensión no solo del problema, sino también del mismo estudio en sí y de todos los conceptos que intervienen. En este contexto particular, se desarrolla el presente trabajo, que muestra una propuesta basada en el uso de los mapas conceptuales y cuestionarios de respuesta múltiple. Los mapas conceptuales se orientan a que el alumnado pueda estructurar el contenido teórico de la resolución de problemas con restricciones de igualdad y mostrar su comprensión conceptual del tema. A partir de estos, se pueden identificar los errores de conocimiento estructural de los estudiantes al aplicar diferentes condiciones y teoremas para decidir el camino que les permite resolver un problema de optimización y encontrar sus soluciones. Con estos resultados, se combina esta herramienta con el uso de cuestionarios de respuesta múltiple con el objetivo de subsanar los errores y las deficiencias ya identificadas.

## 2. Propuesta.

En este trabajo, la propuesta que se realiza al alumnado consiste en elaborar mapas que recojan los elementos y relaciones que intervienen en la resolución de un problema de Programación Matemática, en particular, con restricciones de igualdad.

El contexto de la propuesta es el siguiente: asignatura cuatrimestral Matemáticas II de segundo curso del Grado en Administración y Dirección de Empresas de la Universidad de Sevilla.

El objetivo que se persigue al proponer al alumnado que elabore este mapa es que sirva de apoyo al estudio y le ofrezca una visión organizada del contenido del tema, formando parte de la documentación de este (Fernández y García, 2009). Para la propuesta de construcción del mapa, se indica a los estudiantes que el tipo de problema en el que se centra son los que tienen restricciones de igualdad, y han de responder a la pregunta de enfoque (Viana-Barbosa y Barbosa, 2013):

¿Cómo se plantea la resolución de un problema de optimización con restricciones de igualdad?

Con esta pregunta se pretende que el estudiante pueda establecer la estructura jerárquica del mapa conceptual.

En este caso, el mapa que represente el proceso de resolución de los problemas con restricciones de igualdad debe contener diferentes conceptos y condiciones como son:

- Conceptos:
  - o Punto crítico.
  - o Conjunto factible.
  - o Máximo/ mínimo local.
  - o Máximo/mínimo global (estricto).
  - o Función continua.
  - o Matriz Hessiana.
  - o Forma Cuadrática Definida o Semidefinida positiva o Negativa.
  - o Función cóncava/convexa.
  - o Función estrictamente cóncava/convexa.
  - o Conjunto convexo.
  - o Conjunto cerrado.
  - o Conjunto acotado.
  - o Función Lagrangiana.
  - o Problema convexo.
- Condiciones/Teoremas:
  - o Condición necesaria de optimalidad.
  - o Teorema de Weierstrass.
  - o Condición suficiente de optimalidad local.
  - o Condición suficiente de optimalidad global.

Los conceptos y condiciones necesarias que deberían estar situadas en un nivel más alto nivel de jerarquía y en un nivel inferior otros que se basados en dichos conceptos o resultados necesarios.

Debido a este perfil específico del tema al que nos enfrentamos, en el que se combina la teoría con la resolución de problemas, es lógico que en las relaciones aparezcan no solo palabras afines a los conceptos, también que sirvan para indicar el camino a elegir según las características de un problema, tomando como paralelismo el formato de un algoritmo.

Como señalan Viana-Barbosa y Barbosa (2013), construido un primer mapa, es necesaria su revisión, señalando que son necesarias tres o cuatro revisiones para concluir un buen mapa. Por ello, se proponen tres entregas:

- mapa preliminar
- mapa 1
- mapa 2.

El estudiante ha dispuesto de una semana para la elaboración de cada uno de ellos.

Para la evaluación general del mapa se analiza (Rivadulla-López, García-Barros y Martínez-Losada, 2016):

- la forma del mapa (organización)
- el número de elementos y tipo (Conceptos, Condiciones, Teoremas)
- las relaciones (palabras enlace)
- y las unidades de significado o partes del desarrollo del estudio del problema (cinco en total).

Partiendo de estos datos, se plantean en clase cuestionarios teóricos que expongan todas las posibles situaciones que se podrían plantear en un problema de este tipo. En las cuestiones se proponen como respuestas cuatro opciones en las que solo una es correcta, siendo una de ellas No sabe /No contesta. En

las respuestas se han recogido todas las combinaciones posibles de hipótesis y conclusiones, no solo en el estudio del problema, sino también de cómo proceder según dicho estudio. Estos cuestionarios han sido realizados con Socrative, ya que permite conocer el resultado de forma inmediata a su realización, lo que es beneficioso para subsanar los errores detectados.

A continuación, se propone una rúbrica para la corrección del mapa definitivo.

Nivel	Conceptos Condiciones Teoremas	Organización Jerarquía	Relaciones	Unidades de significado (5)
Bajo	6	Desorganizado/Sin niveles	Pocas y unidireccionales	1
Medio	10	Algo Organizado/ Algunos niveles	Algunas unidireccionales y entre unidades	2
Alto	16	Organizado casi todo / Con niveles claramente diferenciados	Todas las unidireccionales y bastantes entre unidades	3/4
Muy Alto	18	Muy organizado y jerarquizado	Todas unidireccionales y entre unidades	5

Tabla 1. Rúbrica para la valoración de los mapas conceptuales.

### 3. Resultados.

Han aceptado participar de forma voluntaria en la experiencia 17 de los 26 alumnos que asisten a clase de forma asidua. Hay que señalar que el grupo en el que se propone esta experiencia acude a clase por la tarde, y que es usual que la asistencia en este horario sea menor que en los grupos de mañana.

A continuación, se comentan los aspectos más relevantes con relación al contenido del mapa preliminar.

#### 3.1. Mapa previo.

El 80 % de los mapas recogen todos los conceptos y también recogen la primera unidad de significado entorno al cálculo de la Lagrangiana y sus puntos críticos (Condición Necesaria de Primer Orden). Respecto a las condiciones y Teoremas, encontramos que el 85% recogen en qué consisten y cómo se comprueban. Sin embargo, el 65% de estos mapas no recogen o no lo hacen de forma adecuada alguna de las siguientes relaciones:

- el Teorema de Weierstrass y la existencia de solución
- la convexidad/concavidad estricta de la función objetivo y la unicidad de la solución
- la convexidad del problema y la globalidad de la solución.

También se ha encontrado que un 30% de los mapas que no recogen la Condición Suficiente de Optimalidad Local, que indica el proceso a seguir si no se verifican ninguna de las condiciones anteriores.

Estas condiciones y teoremas junto a las relaciones que se establecen en torno a ellas conforman cuatro de las cinco unidades de significado o partes del desarrollo del estudio del problema.

Una vez enviado a cada estudiante su mapa con las correcciones oportunas, se ha propuesto un cuestionario estructurado en torno a dos problemas teóricos con tres preguntas para cada uno. Estas cuestiones se plantean partiendo de las deficiencias de aprendizaje identificadas en los mapas, en particular, en torno de tres de las cuatro unidades de significado en las que se han centrado las deficiencias. Uno de los problemas verifica solo el Teorema de Weierstrass y el otro la Condición Suficiente de Optimalidad Global y la unicidad. En ambos se pregunta por la existencia de óptimo global, la unicidad y la convexidad del problema conectando con el Teorema o condición correspondiente. Las respuestas

correctas superaron el 50% en tres de las cuestiones: las dos relativas a la existencia de solución global (una en cada problema) y la convexidad en el segundo problema.

Se ha corregido el cuestionario con los estudiantes, comentando y debatiendo las respuestas para así mostrar la implicación de las condiciones verificadas en cada uno de los dos problemas con la solución de estos. La forma de proceder cuando no se verifican ninguna de las condiciones anteriores ha sido incluida en las respuestas de todas las cuestiones. Ha sido elegida como cierta por un 50% de los estudiantes en dos de las preguntas en las que aparece.

### 3.2. Mapa 1.

En el mapa 1, que contiene las correcciones del mapa preliminar, se ha observado que un 85% de los estudiantes han incluido las siguientes relaciones: Teorema de Weierstrass/existencia de solución global, convexidad/concavidad estricta de la función objetivo/unicidad de la solución global y convexidad del problema/implicaciones.

Un 70% de los mapas muestran una clara jerarquía en su organización, aunque todavía hay un 50% que no establece de forma correcta las relaciones que indican la forma de proceder según las características del problema. Esto indica que hay que seguir profundizando e insistiendo en las implicaciones del estudio de las condiciones del problema. Sin embargo, el 100% ha recogido de forma correcta en qué consisten y cómo se comprueban. Por último, un 65% incluyen de forma correcta la forma de resolver el problema en el caso en que no se verifiquen las condiciones anteriores. Una vez corregido, se ha enviado de nuevo a cada estudiante las apreciaciones particulares de su mapa.

El segundo cuestionario que se ha realizado en clase consta de ocho cuestiones, tres sobre las relaciones que se establecen en el estudio de las condiciones del problema y cuatro sobre cómo abordar el problema si no se verifica alguna o todas las condiciones anteriores. Tres de las cuestiones parten de un enunciado teórico y el resto están enunciadas para problemas con funciones o restricciones diferentes.

En este caso, las respuestas correctas superaron el 50% en cinco de las cuestiones, entre ellas las tres sobre relaciones, otra que hace referencia a un problema que solo verifica el Teorema de Weierstrass y la última, a otro problema que es convexo, coincidiendo con lo que ya ocurrió en el primer cuestionario.

Se ha procedido de la misma manera que con el cuestionario anterior, desarrollando una puesta en común y debate sobre las respuestas de cada pregunta, insistiendo en las tres preguntas con menor porcentaje de aciertos, en las que se combinan el cumplir más de una condición o no cumplir ninguna de ellas.

### 3.3. Mapa 2.

En el último mapa, el 95% de los estudiantes han incluido de forma correcta las diferentes relaciones que se establecen al estudiar un problema y además, el 85% de estos ha incluido la forma de proceder según se verifiquen o no las condiciones ya comentadas con anterioridad. Se mantiene que el 100% expone correctamente su contenido y comprobación. Respecto a la resolución en caso de no verificarse el Teorema de Weierstrass ni la convexidad del problema, el 85% expone correctamente el proceso a seguir para comprobar si un punto crítico es solución local del problema.

En este mapa definitivo se evalúa la organización y jerarquía en el mismo, poniéndose de manifiesto que los mapas reflejan una buena visión estructurada del tema. En la siguiente tabla se recoge el resultado de la valoración del mapa según la rúbrica detallada en el apartado anterior.

Nivel	Conceptos Condiciones Teoremas	Organización Jerarquía	Relaciones	Unidades de significado (5)
Alto		15%	5%	15%
Muy Alto	100%	85%	95%	85%

Tabla 2. Valoración del mapa 2.

#### 4. Conclusiones.

El objetivo del trabajo es mostrar el uso combinado de los mapas conceptuales con una actividad como los cuestionarios teóricos para mejorar el aprendizaje en la Optimización con restricciones de igualdad.

Esta experiencia ha permitido que los estudiantes puedan tener una visión de conjunto y ordenada de cómo afrontar la resolución de un problema de optimización. Además, uno de los aspectos más relevantes del aprendizaje de este tipo de contenido es poder establecer relaciones significativas entre los diferentes elementos que integran el proceso de resolución de un problema de optimización. Los resultados expuestos en el apartado anterior permiten comprobar que se ha conseguido guiar la evolución del proceso de enseñanza de este tema de forma positiva para el aprendizaje del estudiante.

Por supuesto, el elaborar estos mapas conlleva la toma de decisiones de forma lógica y razonada, y la síntesis y análisis coherente de la información que se tiene para resolver un problema. Por ello, se podría afirmar que el aprendizaje ha estado enfocado al desarrollo de estas competencias asociadas al aprendizaje de las Matemáticas.

Un aspecto relevante a incluir en investigaciones futuras es la utilización de los mapas como actividad de evaluación del alumnado, especialmente a nivel de competencias. También se considera su extensión a la resolución de problemas con restricciones de desigualdad.

Respecto al uso de los cuestionarios, hay que resaltar que en este caso han sido elaborados con un objetivo muy concreto y claramente delimitado a partir de la corrección de los mapas, ya que las preguntas y sus tres respuestas se han centrado en poner de manifiesto las deficiencias detectadas en los mapas. Esta planificación del uso de los cuestionarios permite su inclusión como una estrategia de enseñanza que enriquece el proceso de aprendizaje. Su desarrollo en torno al resultado de la corrección de los mapas amplía su uso tradicional para comprobar si el alumnado ha realizado unas tareas propuestas o comprendido lo trabajado en cada clase.

Esta propuesta combinada de mapas conceptuales y cuestionarios puede ser desarrollada en otras materias cuantitativas, introduciendo en su enseñanza otras herramientas de aprendizaje no tradicionales.

#### Referencias bibliográficas

Bii, K. J., Chris, M. W. and Jackson, T. (2019.) Effect of collaborative concept mapping teaching strategy on students' achievement and attitudes towards mathematics in selected secondary schools in Kenya. *European Journal of Education Studies*, 6(5), 135-162.

Buzan, T. (2013). *Cómo Crear Mapas Mentales*. Barcelona. Urano.

Contreras, L.C. (1993). Mapas Conceptuales y resolución de problemas. *Investigación en la escuela*, 19, 79-88Y.

Conceição, S. C. O., Samuel, A., & Yelich Biniecki, S. M. (2017). Using concept mapping as a tool for conducting research: An analysis of three approaches. *Cogent Social Sciences*, 3(1), 1404753. <https://doi.org/10.1080/23311886.2017.1404753>

Fernández, N. y García, M. A. (2009). Uso de mapas conceptuales en dos asignaturas de matemáticas. *Actas del XV JENUI*. Disponible en <http://jenui2009.fib.upc.edu/>

Galán, E, Granell, R y Huerta, P. (2003). Los mapas conceptuales en Educación Matemática. Antecedentes y estado actual de la investigación. En J. Murillo, P. M<sup>a</sup> Arnal, R. Escolano, J. M<sup>a</sup> Gairín y L. Blanco (Eds.), *Actas del VI Simposio de la SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática)* (pp. 225-238). Universidad de La Rioja, Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Gordillo, W., Pinzón, W. J. y Martínez, J. H. (2017). Los Mapas Conceptuales: una Técnica para el Análisis de la Noción de Derivada en un Libro de Texto. *Formación Universitaria Vol. 10(2)*, 57-66.

Hafiz, M., Fatra, K. and Fatra, M. (2017). Concept mapping learning strategy to enhance students' mathematical connection ability. En T. Hidayat, A. B. D. Nandiyanto, A. Jupri, E. Suhendi and H. S. H. Munawaroh, *Mathematics, Science, and Computer Science Education (MSCEIS 2016) AIP Conference Proceedings, 1848 (1)*. <https://doi.org/10.1063/1.4983944>

Kamble, S.K. y Tembe, B.L. (2013). The effect of use of concept maps on problem solving performance and attitude in Mechanical engineering course. *Procedia-Social and Behavioural Sciences 83*, 748 – 754. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2013.06.141>

Mateo, F. y Lora, Y (2015). Los mapas mentales como alternativa en la enseñanza de las matemáticas en Formación Profesional. En P. A. Sánchez, *Actas de la 17 Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, FESPM. Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia, SEMRM.

Martínez, N.M., Villanueva, R. G. A. y Ruiz, I. R. (2018). Mapas Conceptuales Híbridos para la enseñanza de la física y matemática en el aula. *Innovación e Investigación en Matemática Educativa 3(1)*, 113-130.

Moreno, N. (2017). Una representación gráfica de la práctica de resolución de problemas en Cálculo diferencial. *Revista internacional de Investigación e Innovación Educativa, 92*, 58-75.

Moreno, N., Aguilar, M. F. y Villanueva, M. A. (2017). Descripción gráfica de la práctica de resolución de problemas de modelación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.

Mutodi, P. y Chigonga, B. (2016). Concept map as an assessment tool in secondary school mathematics: An analysis of teachers' perspectives. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12(10)*, 2685-2696. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.2301a>

Nieto, C, y García, M. A. (2009). Uso de mapas conceptuales en dos asignaturas de matemáticas. *Actas de las XV Jornadas de Enseñanza universitaria de la Informática (Jenui 2009)* (pp. 439-442). Recuperado de <http://hdl.handle.net/2099/7857>

Novak, J. D. (2010). *Learning, creating, and using knowledge: concept maps as facilitative tools in schools and corporations*. 2nd ed. New York: Routledge.

Novak, J. D. y A. J. Cañas, (2006). *The Theory Underlying Concept Maps and How to Construct Them. Technical Report IHMC CmapTools*. Florida Institute for Human and Machine Cognition.

Reyes-Santander, P. A. y Ramos-Rodríguez, E. (2018). Mapas conceptuales en educación matemática a nivel universitario. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 20(2)*, 25-36. <https://doi.org/10.24320/redie.2018.20.2.1657>

Rivadulla-López, J.C, García-Barros, S. y Martínez-Losada, C. (2016). Los mapas conceptuales como instrumento para analizar las ideas de los estudiantes de Maestro de Educación Primaria sobre qué enseñar de nutrición humana en Educación Primaria. *Revista Complutense de Educación, 27 (3)*, 1247-1269.

Viana-Barbosa, C.J. y Barbosa, K. (2013). Mapas conceptuales en la educación matemática. *Actas del VII CIBEM* (pp. 490-497). Disponible en <http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/676.pdf>