

El método de los elementos de contorno en los problemas de mecánica del suelo

E. Alarcón¹ / J. Domínguez² / A. Fraile¹

1. INTRODUCCIÓN

La preparación de estas notas ha llevado, al más veterano de los autores, a recordar sus primeros tanteos con los métodos numéricos. Tratando de desarrollar su tesis doctoral sobre efectos dinámicos en puentes de ferrocarril, descubrió, en 1968, en la biblioteca del Laboratorio de Transporte (donde el profesor Jiménez Salas era Director) las Actas de la reunión ASTM (1) en las que Quilan y Sung proponían la asimilación del comportamiento dinámico del semiespacio elástico a un sistema con un grado de libertad.

Résolution théorique de la distribution des forces dans des pieux

Theoretical Solution of Stress Distribution in Piles

J. A. J. SALAS, INGENIEUR CC y P., Professeur au Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, Espagne
J. A. BELZUNCE, INGENIEUR CC y P., Directeur du Gabinete de Cálculo del Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas, Madrid, Espagne

SUMMARY

On étudie la solution théorique de la distribution des forces le long d'un pieu flottant chargé, ainsi que dans le cas du frottement négatif. On suppose que le terrain possède les propriétés du demi-espace de Boussinesq et que le pieu est réduit à une ligne. On pose la compatibilité des affaissements du terrain avec l'existence du pieu, en employant l'équation de Mindlin, et l'on arrive à poser les équations intégrales qui se résolvent numériquement à l'aide d'un ordinateur électronique.

SUMMARY

This paper deals with the solution of stresses along a loaded pile taking negative friction into account. It is assumed that the soil has the properties of a Boussinesq half-space and that the pile is reduced to a line. The compatibility between settlement in the soil and stresses along the pile are determined by Mindlin's equation, in order to arrive at integral equations which can be solved by electronic computer.

DANS CE RAPPORT, nous présentons quelques solutions théoriques au problème de la distribution des forces le long d'un pieu. Pour cela, nous considérons le pieu réduit à une ligne de longueur constante, comprise dans un demi-espace de Boussinesq. Nous supposons qu'il n'y a aucun glissement entre le pieu et le sol, ce qui revient à dire que l'affaissement du pieu et le sol est plus forte que la force tranchante qui se produit dans tous les points du périmètre. Cependant, les solutions auxquelles nous allons arriver pourraient facilement s'appliquer au cas où un glissement se produirait en une certaine portion du pieu. Trois cas vont être considérés: pieu flottant, friction négative sur un pieu flottant et friction négative sur un pieu-écluse.

PIEU FLOTTANT

Supposons qu'un pieu est planté dans le sol, sous les conditions théoriques décrites ci-dessus. Supposons aussi qu'une charge P a été placée sur la tête de ce pieu. Le pieu va subir un affaissement égal à k , qui sera le même sur tous ses points, puisque nous l'avons représenté comme une ligne de longueur constante. Tandis que se produit cet affaissement, une force va s'exercer entre le pieu et le sol, en fonction de la profondeur z , force que nous pouvons représenter par $\theta(z)$. C'est précisément cette fonction que nous voulons trouver. L'affaissement sur un point du pieu, d'une profondeur z , se produira comme intégrale de chacune des forces élémentaires appliquées le long du pieu, multipliées par une fonction que nous appellerons $K(z, z_0)$, z étant la profondeur d'application de la force élémentaire. L'affaissement étant constant sur chaque point du pieu, nous pouvons écrire:

$$\int_0^L K(z, z_0) \theta(z) dz = k \quad (1)$$

ce qui correspond aux équations de premier type de Fredholm. Cette équation est non-homogène et singulière, puis-que la fonction K prend une valeur infinie lorsque $z = z_0$.

Cette équation intégrale, une fois résolue, nous donnera la solution du problème. La fonction K fut donnée par Mindlin (1936) et est égale à:

$$K(z, z_0) = \frac{P}{16\pi^2(1-\nu)G} \times \left\{ \frac{3}{R_1} - \frac{4z}{R_1} + 8(1-\nu)^2 - (3-4\nu) \frac{z^2}{R_1^2} + \frac{(z-z_0)^2}{R_1^2} + (3-4\nu) \left[\frac{(z-z_0)^3}{R_1^2} - 2z z_0 \right] + \frac{2z(z+z_0)^2}{R_1^2} \right\} \quad (2)$$

La signification de z , z_0 , R_1 et R_2 est définie sur la fig. 1. Le module de déformation transversal est G , égal à $E/2(1+\nu)$. La fonction $K(z, z_0)$ a été calculée avec un ordinateur électronique, et les résultats sont résumés sur la fig. 1.

Les valeurs représentées sur le diagramme sont ceux d'un coefficient d'influence V , et le valeur w de l'affaissement sera:

$$w = (10^6/G) V \quad (3)$$

Les valeurs de la fonction $K(z, z_0)$ pour $\nu = 0$ et $z/c < 1$ sont très supérieures aux autres, et elles sont représentées à une échelle 10 fois inférieures. De cette manière, dans le cas de $\nu = 0$ et $z/c < 1$,

$$K \approx (10^6/c^2) V \quad (3a)$$

Observons l'influence importante de la valeur ν et la forme étrange de la courbe correspondante à la valeur $\nu = 0$, particulièrement à la profondeur z d'application de la force pour des valeurs réduites de r . La forme de cette courbe est l'expression d'un phénomène similaire, dans le cas de Mindlin, au phénomène de soulèvement du sol, dans le cas de Boussinesq, aux alentours de la force, lorsque $\nu = 0$.

Además de incorporar estos resultados a un modelo de puente para tener en cuenta los fenómenos de interacción dinámica terreno-estructura dicho autor entró en contacto con algunos miembros del equipo de investigación del Prof. Jiménez Salas que, por entonces, estaba explorando la posibilidad de aplicación del ordenador y los métodos numéricos necesarios para tratar los problemas más difíciles de Mecánica de los Medios Continuos. De hecho fue ese grupo quien contribuyó a introducir en España el método de los elementos finitos en la ingeniería civil, pero además, y en relación directa con el título de este artículo fue el propio Jiménez Salas quien inició la línea de trabajo de lo que mas tarde se ha llamado Método Indirecto de Elementos de Contorno (2) (figura 1) que luego fue seguida por otros miembros de su grupo (3,4).

En aquella época poco podía sospechar el autor precipitado que iba a dedicar una parte sustancial de su vida al desarrollo de ese método numérico en su versión Directa y mucho menos que gran parte de la motivación vendría del problema de interacción dinámica terreno-estructura una de cuyas primeras soluciones había obtenido en la mencionada visita al Laboratorio de Transporte. En efecto los autores trataban en 1975 de encontrar un procedimiento que les permitiera afrontar el estudio de la interacción en túneles sometidos a carga sísmica (5) y tropezaron, al utilizar el método de elementos finitos, con el problema de las reflexiones de ondas en los contornos artificiales creados al truncar la malla de cálculo. Deseando evitar el uso contornos absorbentes y otros recursos similares se exploró la posibilidad de soluciones fundamentales que incorporasen el comportamiento en el infinito y, fruto de ello, fueron los primeros trabajos (6,7,8) que introdujeron el Método Directo de los Elementos de Contorno en España en problemas estáticos. La extensión a teoría del potencial, dinámica en el dominio de la frecuencia, plasticidad, etc tuvo lugar inmediatamente siendo en la mayoría de los casos los problemas típicos de mecánica

Figura 1

¹ E. T. S. I. Industriales. UPM

² E. Superior de Ingenieros. Universidad Sevilla

del suelo los que motivaron y justifican el esfuerzo realizado (9-16)

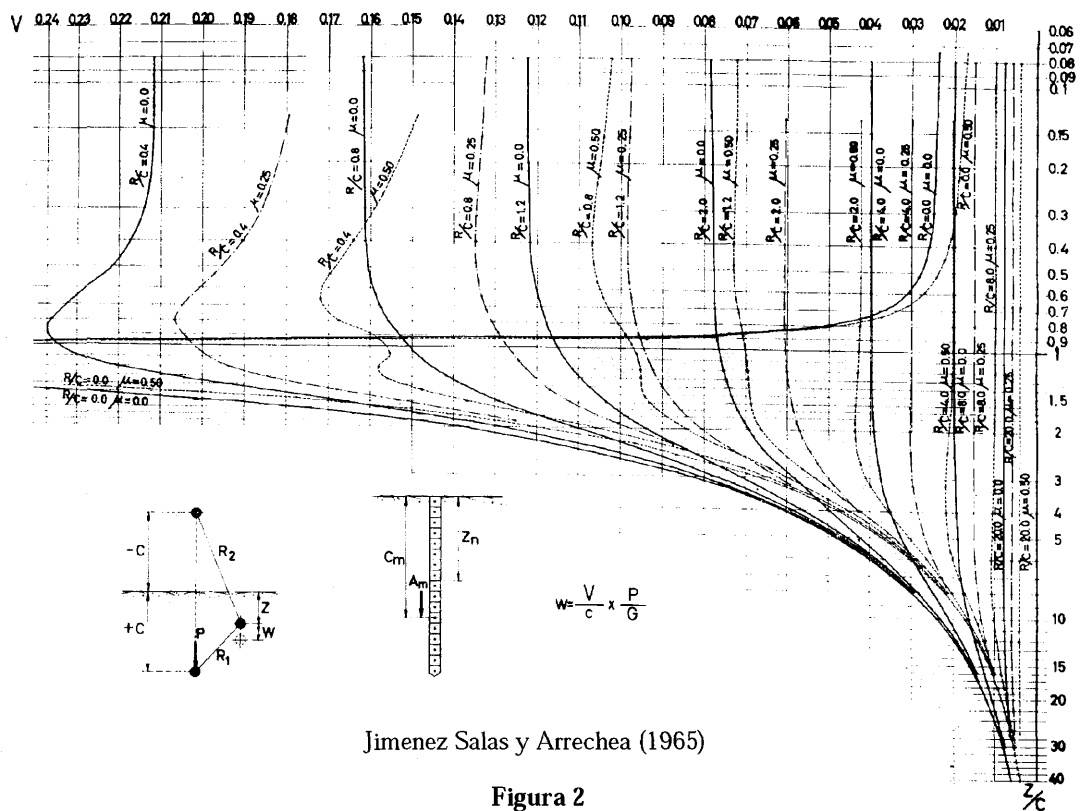
Un campo apasionante, el de la poroelasticidad ha dado lugar a nuevas contribuciones (17-20) y también se han escrito libros de diverso calado (21-24) que describen las posibilidades del método para dar contestación a preguntas de gran importancia técnica.

Los autores quieren poner de manifiesto que la redacción de este trabajo, debe considerarse no solo como la muestra de algunos resultados de aplicación a problemas prácticos, sino también como un homenaje y reconocimiento explícito a la labor precursora del Prof. Jiménez Salas y a su espíritu de permanente curiosidad por el conocimiento científico.

2. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Se puede considerar que existen tres claves que caracterizan el método: una solución fundamental de la ecuación de campo del problema, una fórmula de representación que permita expresar la solución en un punto en función de valores en el resto del dominio o contorno y una filosofía de discretización que permite reducir el problema a un número finito de incógnitas.

Jiménez Salas y Arrechea (2) presentaron una temprana aplicación del ordenador a este proceder en su artículo sobre la carga admisible en un pilote situado en terreno elástico (figura 2), simulado mediante una línea soldada al mismo.



Jimenez Salas y Arrechea (1965)

Figura 2

En este caso la solución fundamental es la correspondiente a una carga vertical actuante en el interior de un semiespacio propuesta por Mindlin (figura 2.a) U_{ij} que representa el desplazamiento vertical producido en el punto i cuando en el punto j actúa una carga vertical unidad. La discretización consiste en la subdivisión del eje en elementos rígidos y en la sustitución de las tensiones de adherencia actuantes en la periferia de cada elemento de pilote por una carga concentrada en el centro de aquél. La fórmula de representación es ahora la aplicación del principio de superposición al cálculo del desplazamiento en un punto i ; utilizando la notación de índice repetido:

$$u_i = U_{ij} F_j \tag{1.1}$$

Si los puntos i y j coinciden se aprecia el carácter singular de la solución fundamental lo que conduce a problemas numéricos que Jiménez Salas y Arrechea solventaron aprovechando la hipótesis de rigidez del pilote y colocando las ecuaciones en los extremos de cada elemento obligando a que los desplazamientos finales sean iguales a un valor constante.

En el campo bidimensional otros autores aplicaron la misma idea. Así Hoek y Brown (25) describen en su conocida obra un método de elementos constantes utilizando la solución de Kelvin para un espacio elástico y Crouch (26) usó la solución

fundamental correspondiente a la apertura de una grieta presurizada para resolver problemas típicos de minería.

Como se ha visto antes, la aplicación de la solución fundamental en puntos distintos a aquéllos en los que se establecen ecuaciones evita el problema del tratamiento numérico de la singularidad por lo que muchos autores siguieron esta línea. Así Crouch con su

método de fisuras (figura 3) calcula las presiones que deben aplicarse en el interior de N de ellas situadas arbitrariamente para que los valores de las tensiones normales y tangenciales o los movimientos en N elementos del contorno $\partial\Omega$ sean las que corresponden al problema que se está estudiando.

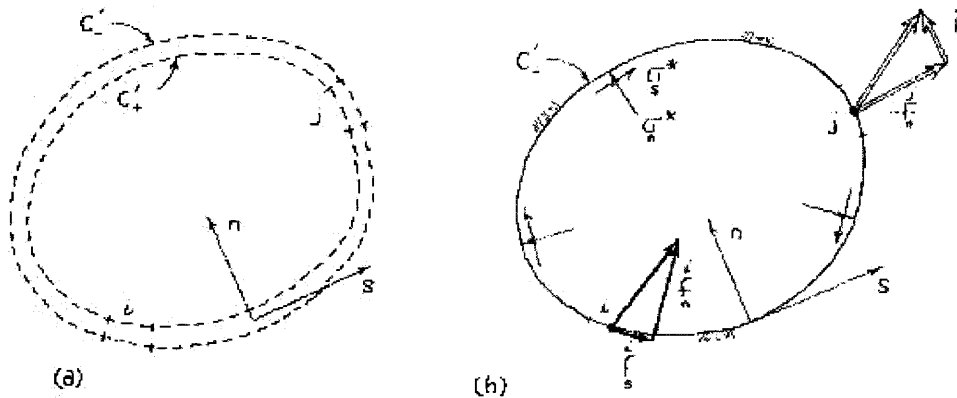


Figura 3

Una vez conocidas aquellas presiones es posible calcular las incógnitas en el contorno $\partial\Omega$. Este procedimiento llamado método **indirecto** tiene problemas numéricos cuando se tratan contornos con tangente discontinua (27).

Una formulación mucho más interesante es el uso de la identidad de Somigliana como fórmula de representación.

Como es sabido (figura 4) es posible poner:

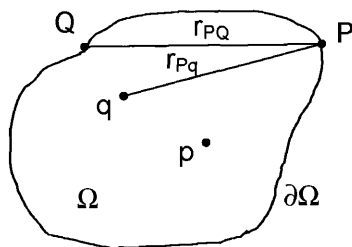


Figura 4

$$\begin{aligned}
 [c] \{u(P)\} + \int_{\partial\Omega} [T(P, Q)] \{u(Q)\} &= \\
 = \int_{\partial\Omega} [U(P, Q)] \{t(Q)\} + \int_{\Omega} [U(P, q)] \{f(q)\} & \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Como se ve se trata de la misma estructura de la teoría del potencial que rige, por ejemplo los problemas de filtración.

En esa fórmula [c] recoge las características del contorno en el punto P; $\{u(P)\}$ y $\{t(P)\}$ son los desplazamientos y tensiones en un punto P del contorno $\{f(q)\}$ el vector de cargas por unidad de volumen en un punto q del dominio y $[T(P, Q)]$; $[U(P, Q)]$ los núcleos de

la solución fundamental correspondientes respectivamente a tensiones y movimientos inducidos en Q por la carga aplicada en P. La última integral es conocida y en la mayoría de los casos inexistente, por lo que basta discretizar el contorno para resolver el problema. La discretización incluye la definición de la interpolación de $\{u(Q)\}$ y $\{t(Q)\}$ que generalmente se lleva a cabo mediante polinomios. También la geometría se puede aproximar en cuyo caso se tiene el planteamiento isoparamétrico, pero ello no es necesario y en algunos casos, como el de los métodos autoadaptables (14) o con elementos incompatibles, puede resultar contraproducente.

Generalmente los nudos se utilizan como puntos de colocación por lo que es preciso resolver las integrales singulares que se producen cuando P y Q coinciden. También es posible introducir funciones singulares (12) que recojan la existencia de puntos singulares en esquinas reentrantes, vértices de tablestacas, etc.

El planteamiento en dinámica es semejante si se trabaja en el dominio de la frecuencia, lo que permite introducir medios viscolásticos.

Para leyes de comportamiento no lineal aparece una integral de dominio que es preciso evaluar en cada caso de carga. De nuevo se trata de una integral que no introduce incógnitas, pero la elegancia del método se ve amortiguada.

Las principales ventajas, en estos tiempos en que el tamaño de los sistemas de ecuaciones carece de importancia ante la potencia y la rapidez de los ordenadores, radican en la posibilidad de introducir de forma automática las condiciones de contorno en medios infinitos, lo que hace especialmente adecuado para problemas de interacción terreno-estructura-fluido sobre todo en problemas dinámicos donde el truncamiento del

dominio introduce soluciones parásitas que deben eliminarse por procedimientos ad-hoc.

3. APLICACIONES

La utilización del método directo ha producido diferentes aplicaciones a problemas típicos de mecánica de suelos: filtración (10), consolidación (13), plasticidad (11), etc, así como a problemas especiales.

Una de las primeras aplicaciones llevadas a cabo en España trató la distribución de tensión alrededor de anclajes (figura 5) modelados como fisuras con un labio rígido, al que se aplica la carga, y otro libre.

Utilizando el método de Mushkeslisvili fue posible obtener una solución analítica cuando el anclaje está lejos de los contornos, que sirvió para validar el código de elementos de contorno que luego se aplicó a anclajes en las proximidades de bordes libres.

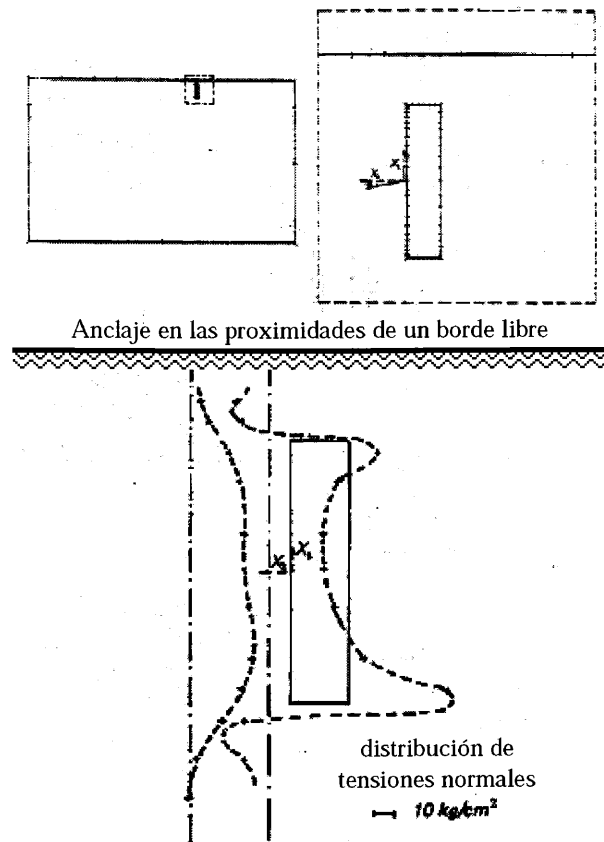


Figura 5

Un problema típico en dinámica ha sido la determinación de la impedancia dinámica de zapatas rígidas, empotradas o no, en terreno estratificado. La solución en el dominio de la frecuencia es semejante a la estática si se dispone de la solución fundamental, ya que basta discretizar la superficie y las interfases. El ejemplo de la figura 6 corresponde a un caso en que, en lugar de utilizar la solución axisimétrica, se recurrió a la solución fundamental en tres dimensiones lo que obligó a definir

elementos de corona circular en las interfases (15).

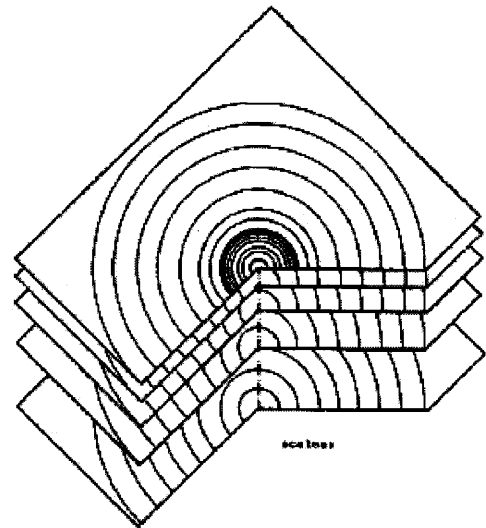


Figura 6

El método fue posteriormente extrapolado al caso de cimentaciones empotradas y pilotes aislados.

El mismo planteamiento se aplica a otro problema de gran interés: los empujes dinámicos en estribos de puente (figura 7) donde tiene gran importancia la disipación de energía debida a la radiación (16)

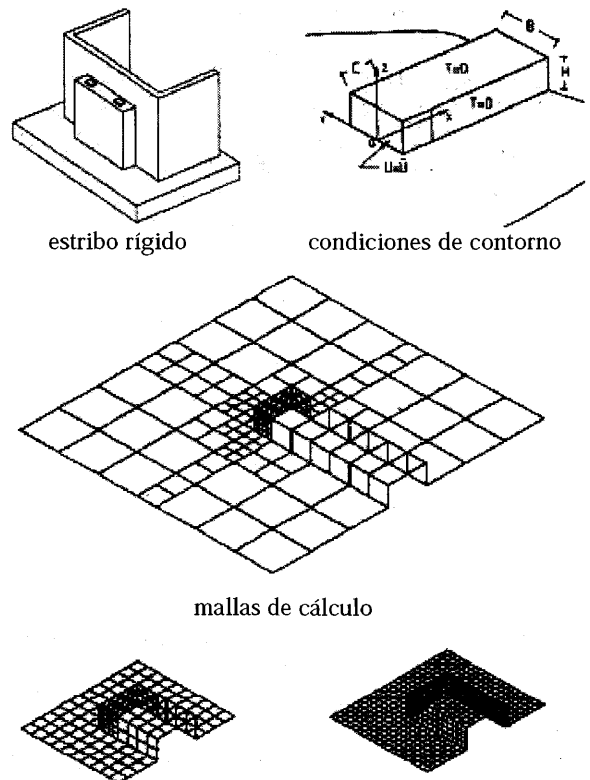


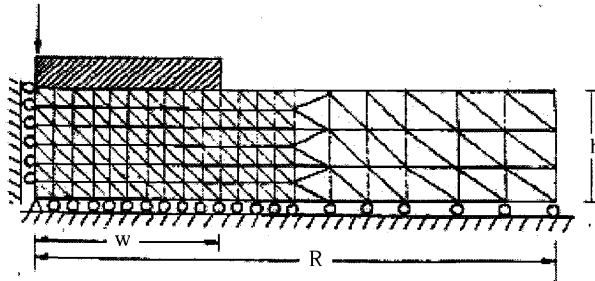
Figura 7

En todos estos casos se manifiestan las ventajas del

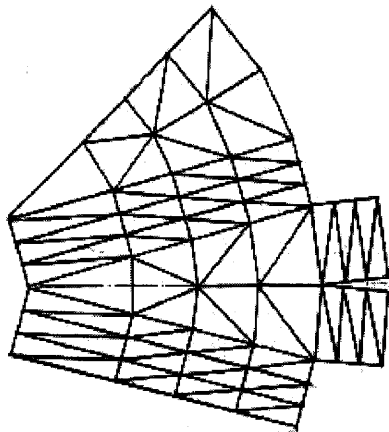
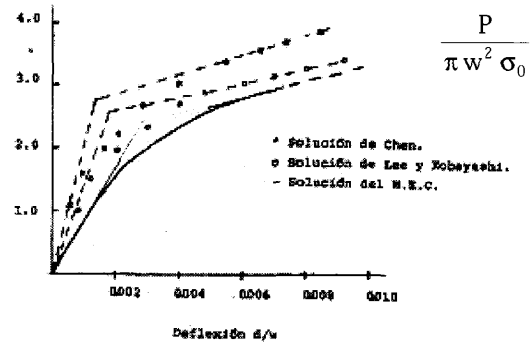
método muy adecuado para problemas con comportamiento prácticamente lineal y elástico y contornos infinitos.

Ello no quiere decir que no sea posible la utilización del método en problemas con comportamiento

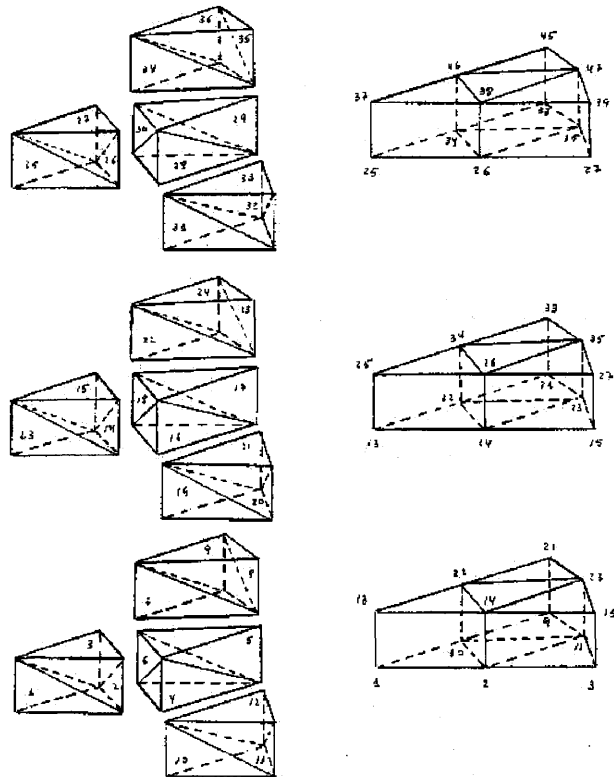
no lineal. En la figura 8 por ejemplo se dibuja un resultado típico de cálculo de carga de hundimiento en un medio elastoplástico (11). Puede verse sin embargo la necesidad de uso de celdas de integración en el interior del dominio que, aunque como se dijo mas arriba no introducen nuevas variables, provocan la duda sobre las



Malla de elementos finitos de Chen



Discretización del contorno



Discretización del dominio

Figura 8

ventajas en relación con el método de elementos finitos.

Una posibilidad que se ha explorado es la combinación de ambos conectando una malla de elementos finitos situada en la zona con comportamiento no lineal, con otro de elementos de contorno que recoge

la zona la zona lineal elástica (figura 9). Es el enfoque de la ref 28 donde se utilizó además un interesante método de resolución paralelo. Observese que el subdominio tratado con elementos de contorno sólo necesita la discretización de la línea de interfase entre subdominios.

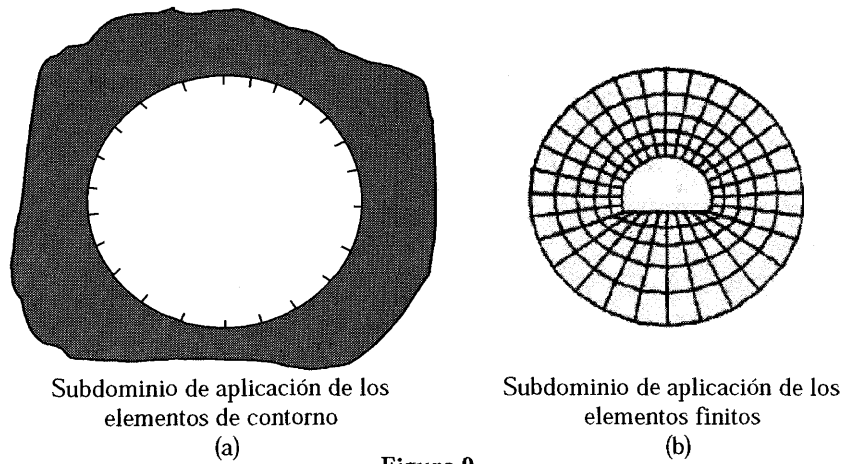


Figura 9

Una aplicación reciente se refiere al problema de transmisión de vibraciones provocadas por el tráfico ferroviario a edificaciones vecinas. De nuevo el tratamiento en frecuencia es ventajoso ya que en él establecen las Normas los criterios de admisibilidad. La figura 10 muestra un caso estudiado en la estación de Xeraco donde se tomaron medidas antes y después de llevar a cabo un aislamiento de la vía, medidas que sirvieron para calibrar un modelo numérico con el que se comparó la efectividad de diferentes soluciones (29).

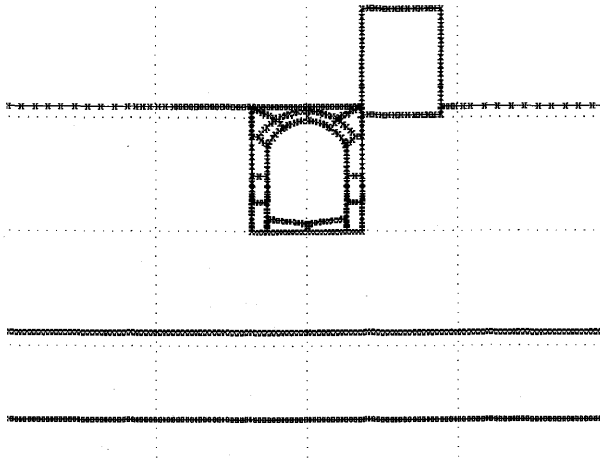


Figura 10

Cuando el Método de los Elementos de contorno se formula para problemas de propagación de ondas en medios poroelásticos saturados o cuasi-saturados debe hacerse en términos de cuatro variables de campo: las tres componentes del desplazamiento en el esqueleto sólido y la presión intersticial. En términos de estas variables y sus derivadas puede establecerse una ecuación integral que se discretiza empleando los mismos procedimientos de otros problemas de medios continuos.

Un ejemplo que resume muy bien las posibilidades del Método para problemas de interacción dinámica es el que se muestra en la figura 11. En ella se

presenta la malla de elementos de contorno empleada para el cálculo sísmico de una presa bóveda. La discretización de los contornos implica la del agua como medio sometido a ondas hidrodinámicas, la presa como medio viscoelástico, el suelo como medio viscoelástico infinito con regiones de diversos materiales y los sedimentos de fondo como medio poroelástico que tiene un importante efecto amortiguador de la respuesta.

Este modelo permite considerar rigurosamente los fenómenos de interacción dinámica entre todos estos medios así como los efectos de la topografía y la distribución espacial de la excitación (efecto de la onda viajando), fenómenos estos que difícilmente pueden ser contemplados en modelos basados en métodos de dominio.

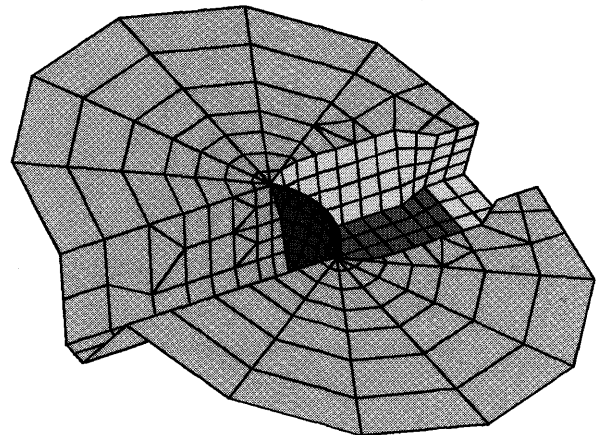


Figura 11

REFERENCIAS

1. ASTM (1953) "Symposium on Dynamic Testing of Soils"
2. J.A. Jiménez Salas, J. Arrechea (1965). "Résolution

- théorique de la distribution des forces dans des pieux" 6th Int. Conf. ISSMFE. Montreal
3. C. Oteo (1972) "Resistencia y deformación lateral de los grupos de pilotes verticales, con especial consideración de los esfuerzos alternativos"
Tesis Doctoral. ETS Ing. Caminos. UPM
 4. J. Zaballos (1974). "Estudio de los efectos originados por esfuerzos dinámicos horizontales en cimentaciones profundas"
Tesis Doctoral. ETS I. Ing. Caminos. UPM
 5. E. Alarcón (1977). "Efectos dinámicos aleatorios en túneles"
Fundación March. Serie Universitaria 36
 6. E. Alarcón, C. Brebbia, J. Domínguez (1978). "The Boundary element method in elasticity"
International Journal of Mechanical Sciences
 7. J. Domínguez (1977). "Cálculo de tensiones en las inmediaciones de anclajes"
Tesis Doctoral ETS. Ing. Industriales. Sevilla
 8. J. Domínguez, E. Alarcón (1979). "Determinación de tensiones en las cabezas de anclaje"
Hormigón y Acero
 9. E. Alarcón, F. Paris, A. Martín (1979). "Boundary elements in potential and elasticity theory"
Computers and Structures
 10. E. Alarcón (1980). "The BIEM applied to flow through porous media"
3rd Int. Conf. on Finite Element in Water Resources
 11. F.G. Benítez, E. Alarcón (1981). "Three-dimensional plasticity using BIEM"
Int. Journal of Applied Mathematical Modelling
 12. M^a. S. Gómez Lera, F. Paris, E. Alarcón (1982). "Treatment of singularities in 2-d domains using BIEM"
Applied Mathematical Modelling
 13. C. García Suárez, E. Alarcón (1983). "Effective and neutral stresses in soils using Boundary Element Method"
Boundary Element in Engineering
 14. E. Alarcón, M. Cerrolaza (1986). "P-adaptive BEM approach in 3-D potential theory"
1st World Congress on Computational Mechanics.
 15. E. Alarcón, J.J. Cano, J. Domínguez (1989). "Boundary element approach to the dynamic stiffness functions of circular foundations"
International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics
 16. A.M. Cutillas, E. Alarcón (1997). "Dynamic stiffness analysis of bridge abutments"
European Journal of Mechanics. A/solids
 17. Domínguez, J. (1991) "An integral Formulation for Dynamic Poroelasticity"
J.Appl. Mech.,ASME
 18. Domínguez J. (1992), "Boundary Element Approach for Dynamic Poroelastic Problems"
Int. J. Numer.. Methods in Engineering
 19. Domínguez J., Gallego R. y Japon B. R. (1997) "Effects of Porous Sediments on Seismic Response of Concrete Gravity Dams"
Journal of Engineering Mechanics. ASCE
 20. Domínguez J., Gallego R. y Japon B. R. (1997) "Dynamic Stiffness of foundations on saturated poroelastic soil"
Journal of Engineering Mechanics. ASCE
 21. E. Alarcón, P. Reyero (1983). "Introducción al método de los elementos de contorno"
ETS Ing. Industriales. Madrid
 22. J. Domínguez (1989) "Boundary Elements. An Introductory Course"
Mc Graw Hill
 23. J. Domínguez (1993) "Boundary Elements in Dynamics"
Elsevier
 24. F. Paris, J. Cañas (1997) "Boundary Elements Method" Fundamentals and Applications
Oxford Science
 25. E. Hoek y E. T. Brown (1980). "Underground excavations in rock"
Institution of mining and metallurgy. London
 26. S.L. Crouch (1976). "Analysis of stresses and displacements around underground excavations. An application of the displacement discontinuity method"
Univ. Minnesota.
 27. R. Picón (1980). "Aplicación del método de las discontinuidades finitas a los problemas de fractura"
Tesis doctoral ETS Ing. Industriales. Sevilla
 28. R. Perera, E. Alarcón. (1977) "FE-BE coupling methods for elastoplasticity"
Communications in Numerical in Engineering
 29. J. Mateo, E. Alarcón. (1994) "On the use of trenches and walls on the control of ground transmitted railway vibrations"
Boundary Element Methods 16.