

CARACTERIZACIÓN DE LA INTERFASE EN UN ENSAYO A DOBLE CORTANTE PULL-PUSH USANDO UN PROBLEMA INVERSO Y LA MECÁNICA DE LA FRACTURA FINITA

M. Muñoz-Reja, L. Távora*, V. Mantič

Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales, Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla, Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 Sevilla, España
Persona de contacto: ltavara@us.es

RESUMEN

El criterio acoplado de la Mecánica de la Fractura Finita (CCFFM por sus siglas en inglés) aplicada al Modelo de Interfase Elástica-Lineal Frágil (LEBIM por sus siglas en inglés) ha mostrado ser una herramienta robusta y fiable para la caracterización del inicio y crecimiento de grietas de interfase a diferentes escalas. En el presente trabajo se usa este enfoque para analizar el comportamiento de las grietas que aparecen en la unión adhesiva presente entre una lamina de refuerzo de material compuesto y un bloque de hormigón en el ensayo de doble cortante pull-push. El estudio incluye el uso de la solución analítica de este problema (basada en un modelo de viga de Timoshenko) y resultados experimentales con diferentes configuraciones, para formular un problema inverso con la finalidad de obtener la resistencia y la tenacidad a la fractura necesarios para caracterizar la interfase. También se analizan modelos numéricos que incluyen las propiedades obtenidas en el problema inverso y que permiten estudiar no solo el inicio sino también la propagación de las grietas de interfase.

PALABRAS CLAVE: CCFFM, LEBIM, ensayo a cortante pull-push, problema inverso.

ABSTRACT

The Coupled Criterion of Finite Fracture Mechanics (CCFFM) applied to the Linear Elastic-(perfectly) Brittle Interface Model (LEBIM) has proven to be a robust and reliable tool for the characterization of interface crack onset and growth at several scales. In the present investigation, this formulation is used to analyse the interface crack behaviour in the adhesive joint between a composite laminate (reinforcement) and a concrete block in the double pull-push shear test. The study includes the use of an analytical solution of the problem (based on a beam model) together with experimental data of several test configurations as input for an inverse problem with the aim to estimate the interface strength and toughness that characterize the interface. Numerical models including previous obtained parameters are also analysed. These models allow the study of interface crack onset and propagation.

KEYWORDS: CCFM, LEBIM, Double pull-push shear test, inverse problem.

1. INTRODUCCIÓN

En muchas aplicaciones prácticas, la zona de unión entre sólidos se puede modelar como una capa de muelles elástico-lineales que permiten estudiar el fallo de la unión/interfase. Aunque estos modelos son conocidos desde hace tiempo, recientemente algunos autores han usado este modelo junto con un criterio de fallo adecuado para obtener soluciones analíticas de uniones estructurales con diferentes configuraciones geométricas, de material y parámetros de carga [1, 2, 3, 4].

Tomando como referencia la misma idea, los autores han propuesto implementaciones numéricas del modelo de interfase elástica lineal frágil (LEBIM por sus siglas en inglés) [3, 5]. Los códigos desarrollados en estos trabajos han mostrado ser una herramienta eficiente y robusta para estudiar el fallo de las interfaces en problemas a diferentes escalas.

Debido a su sencillez, en el LEBIM se relacionan directamente tres propiedades mecánicas: la energía de fractura, la resistencia y la rigidez en la interfase. Por tanto, si dos de ellas se definen la tercera queda fijada también. Usualmente se imponen la resistencia y la tenacidad a la fractura, lo que puede conllevar a interfaces con una flexibilidad mayor a la real. Una forma de eliminar este comportamiento, es la aplicación del criterio acoplado de la mecánica de la fractura finita (CCFFM por sus siglas en inglés) al LEBIM, que permitiría que la rigidez se convierta en una variable independiente [2]. La teoría de la CCFFM propone que se deben cumplir de manera conjunta un criterio energético y un criterio tensional, ver [6, 7].

En el presente trabajo, se usa el CCFFM aplicado al LEBIM (CCFFM + LEBIM) implementado en un código numérico basado en el método de los elementos de contorno (BEM por sus siglas en inglés) [3, 5, 8]. De manera específica, en este trabajo se estudia un modelo del

ensayo a doble cortante pull-push (DPPST por sus siglas en inglés) con la finalidad de comparar los resultados numéricos obtenidos con soluciones analíticas y también con datos experimentales. Para este propósito se usan los datos de la campaña experimental de Yuan et al. [9]. Los estudios incluyen un problema inverso que permite obtener la resistencia y propiedades de fractura de la unión.

2. CCCFM+LEBIM

En el LEBIM las interfases o uniones adhesivas se modelan usando una distribución continua de muelles, donde las tensiones y los desplazamientos relativos son proporcionales en cada punto de la interfase: $\sigma(x) = k_n \delta_n(x)$ y $\tau(x) = k_t \delta_t(x)$, donde $\sigma(x)$ y $\tau(x)$ son las tensiones normales y tangenciales en cualquier punto “ x ”, k_n y k_t son la rigidez normal y tangencial de la interfase y δ_n y δ_t son los desplazamientos normales y tangenciales [3, 5]. Así, el módulo del vector tensión en cada punto x se puede expresar como:

$$t(x) = \sqrt{\sigma^2(x) + \tau^2(x)} \quad (1)$$

La correspondiente tasa de liberación de energía (ERR por sus siglas en inglés) por unidad de área en modo mixto de fractura en cada punto no dañado viene dado por [1, 3, 5]:

$$\begin{aligned} G(x) &= G_I(x) + G_{II}(x) \\ &= \frac{\langle \sigma(x) \rangle_+ \langle \delta_n(x) \rangle_+}{2} + \frac{\tau(x) \delta_t(x)}{2} \\ &= \frac{\langle \sigma(x) \rangle_+^2}{2k_n} + \frac{\tau^2(x)}{2k_t}, \end{aligned} \quad (2)$$

donde el operador de Macaulay $\langle \cdot \rangle_+ = \frac{(\cdot) + |\cdot|}{2}$ indica la parte positiva de un número real. De acuerdo a la ecuación (2), si existen tensiones de compresión en la interfase la ERR queda definida como $G = G_{II}$.

La mixticidad del modo de fractura basada en la energía en cada punto x se define usando el ángulo $\psi(x)$ [3]:

$$\tan \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} \quad \text{with} \quad \kappa = \frac{k_t}{k_n}. \quad (3)$$

En el CCFFM, los criterios tensional y energético deben cumplirse simultáneamente. De manera específica el criterio tensional se impone a lo largo de un segmento finito de la interfase sin daño en cada punto x , desde $x = 0$ hasta $x = \Delta a$ [6]. El criterio tensional se puede reescribir de forma adimensional como:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\text{nom}}}{\sigma_{\text{c, ch}}} &\geq s(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{t}_c(\psi(x))}{\hat{t}(x)} \quad \forall x \in [0, \Delta a], \quad (4) \\ \text{con} \quad \hat{t}(x) &= \frac{t(x)}{\sigma_{\text{nom}}} \quad \text{y} \quad \hat{t}_c(\psi(x)) = \frac{t_c(\psi(x))}{\sigma_{\text{c, ch}}}, \end{aligned}$$

donde $t_c(\psi(x))$ es el módulo del vector tensión crítico que es función del modo de fractura en cada punto sin daño x ; σ_{nom} es la tensión nominal aplicada que depende de cada problema; $\sigma_{\text{c, ch}}$ es un parámetro que caracteriza la resistencia de la interfase. Nótese que $t_c(\psi(x))$ se puede expresar usando diferentes criterios de fallo tensionales [3]. En particular en el presente trabajo se ha usado un criterio fenomenológico basado en la expresión propuesta por Hutchinson y Suo [10]. Aunque esta ley fue propuesta originalmente como criterio de fallo energético, su uso en el LEBIM y LEBIM+CCFFM es natural debido a que los criterios de fallo tensional y energético se pueden relacionar usando (2). Por ello, en este trabajo se usa la misma ley fenomenológica para ambos criterios energético y tensional.

El criterio energético incremental esta basado en un balance de energía que considera el cambio de energía entre el estado previo y posterior al avance finito Δa de la grieta. Este balance se expresa como la disminución de energía potencial $-\Delta\Pi(\Delta a)$ y energía disipada durante el crecimiento finito instantáneo de la grieta $\Delta R(\Delta a)$ [7, 11]:

$$\begin{aligned} -\Delta\Pi(\Delta a) &\geq \Delta R(\Delta a) \quad \text{ó} \\ \int_0^{\Delta a} G(a) da &\geq \int_0^{\Delta a} G_c(\psi(\xi)) d\xi \end{aligned} \quad (5)$$

donde $G(a)$ es la ERR asociada al vértice de la grieta en la interfase en $x = a$, obtenido usando (2). $G_c(\psi(\xi))$ es la energía de fractura asociada en el mismo punto $\xi = a$. Como se ha comentado previamente, aunque se pueden usar diferentes criterios de fallo en este trabajo se usa la ley propuesta por Hutchinson y Suo, también en el criterio energético. El criterio energético también se puede escribir en términos adimensionales definiendo una energía de fractura característica de la interfase $G_{\text{c, ch}}$ y una rigidez característica de la interfase k_{ch} ,

$$\frac{\sigma_{\text{nom}}^2}{2k_{\text{ch}}} \int_0^{\Delta a} \hat{G}(a) da \geq G_{\text{c, ch}} \int_0^{\Delta a} \hat{G}_c(\psi(\xi)) d\xi \quad (6)$$

El parámetro adimensional $\mu = \frac{2G_{\text{c, ch}} k_{\text{ch}}}{\sigma_{\text{c, ch}}^2}$ caracteriza la rigidez de la interfase, cf. [2]. Por tanto el criterio energético puede reescribirse como:

$$\frac{\sigma_{\text{nom}}}{\sigma_{\text{c, ch}}} \geq \sqrt{\mu g(\Delta a)} \quad (7)$$

Combinando ambos criterios en (4) y (7), el CCFFM + LEBIM se puede reescribir como:

$$\frac{\sigma_{\text{nom, c}}}{\sigma_{\text{c, ch}}} = \min_{\Delta a} \max \left\{ s(\Delta a), \sqrt{\mu g(\Delta a)} \right\}, \quad (8)$$

donde $\sigma_{\text{nom, c}}$ es la carga mínima que satisface ambos criterios y provoca una grieta de longitud $a_{\text{crit}} = \Delta a$. Nótese que $G_{\text{c, ch}}$, $\sigma_{\text{c, ch}}$ y k_{ch} se escogen conforme al modo de fractura predominante del problema.

En el problema analizado en el presente trabajo, DPPST, prevalece el modo II de fractura [12]. Por ello los parámetros característicos usados son: $G_{\text{c, ch}} = G_{IIc}$, $\sigma_{\text{c, ch}} = \tau_c$ y

$k_{ch} = k_t$. Adicionalmente, σ_{nom} se define como la tensión aplicada al final del refuerzo σ_x^r . Por ello, la mínima carga aplicada en el refuerzo que satisface simultáneamente ambos criterios es $\sigma_{crit}^r = \sigma_{nom,c}$. Adicionalmente, el parámetro de sensibilidad al modo de fractura usado en la ley de Hutchinson y Suo, λ_{HS} , se escoge para tener en cuenta el modo predominante de fractura, por ello en este trabajo se usa $\lambda_{HS} = 0.5$ [12].

3. EL ENSAYO A DOBLE CORTANTE PULL-PUSH (DPPST)

3.1. Descripción del ensayo

El pegado de laminas de material compuesto es una las formas más comunes de reparar y aumentar la resistencia de estructuras civiles. La caracterización de la unión es relevante, debido a que el fallo de la unión suele producirse por la pérdida de adhesión entre los adherentes [13]. El ensayo a cortante pull-push (PPST) es una las configu-

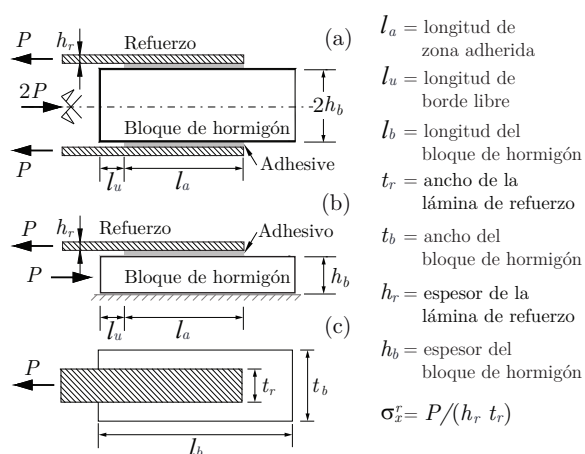


Figura 1: Vista lateral del ensayo (a) a doble cortante y (b) cortante simple. (c) Vista superior de ambos ensayos PSST.

raciones más usadas para caracterizar el fallo de la unión entre una lamina de refuerzo y una superficie de hormigón. Existen 2 configuraciones del PPST: doble cortante y cortante simple, ver la Fig. 1 (a) and (b), respectivamente. Aunque el ensayo a cortante simple es el más común (debido a que es más fácil de ensayar), los resultados de ambas configuraciones son aproximadamente las mismas [14]. Por esta razón y además debido a que el ensayo a doble cortante es más fácil de modelar, es muy común usar los resultados analíticos/numéricos del ensayo a doble cortante y compararlos con los resultados experimentales del ensayo a cortante simple.

Recientemente, Yuan et al. [9, 15, 16] han realizado diversas campañas experimentales para estudiar los efectos

de algunos parámetros que afectan a este tipo de uniones. En el presente trabajo se usan los resultados de 3 configuraciones de ensayos experimentales descritos en [9] para compararlos con los resultados obtenidos con el modelo descrito en la Sección 2. Los 3 tipos de configuraciones usadas mantienen todas las propiedades geométricas y mecánicas, excepto en la lámina de refuerzo que tiene diferentes laminados. Los 3 laminados usados son (manteniendo los nombres indicados en [9]):

- 2C incluye dos capas de fibra de carbono (2C).
- 1C4B incluye una capa de fibra de carbono (1C) unida al bloque de hormigón y 4 capas de fibra de basalto (4B) unidas en la parte superior de 1C.
- 4B1C incluye cuatro capas de fibra de basalto (4B) unidas al bloque de hormigón y 1 capa de fibra de carbono (1C) unida en la parte superior de 4B.

Las características geométricas y mecánicas de los sólidos se muestran en la Tabla 1. Estos valores fueron tomados de [9], excepto por los valores de E_b , ν_b y ν_r , que se han estimado dentro de los valores usuales [13]. Estudios

Tabla 1: Características mecánicas y geométricas de los sólidos usados en el PPST [9].

Bloque	l_b (mm)	t_b (mm)	h_b (mm)	E_b (GPa)	ν_b	
	350	350	150	30	0.2	
Refuerzo	l_u (mm)	l_a (mm)	t_r (mm)	h_r (mm)	E_r (GPa)	ν_r
2C	50	200	40	0.334	191	0.30
1C4B	50	200	40	0.647	85	0.30
4B1C	50	200	40	0.647	85	0.30

previos han demostrado que el fallo de la unión depende de muchos factores incluyendo las propiedades mecánicas del refuerzo y el hormigón [13, 15]. Por esta razón, en el presente trabajo se presenta un análisis inverso simplificado con la finalidad de caracterizar la unión tomando como referencia los resultados experimentales.

3.2. Análisis inverso aplicado al PPST

Los análisis inversos se han usado para obtener parámetros de fractura en el marco de la CCFFM [17] o el LEBIM [18]. En el presente trabajo se hace uso de la solución analítica del PPST obtenida en un trabajo previo de los autores [12] junto con un análisis inverso para determinar 2 parámetros necesarios en el presente modelo: G_{IIc} y τ_c .

Se destaca que el fallo de la unión usando el CCFFM + LEBIM esta caracterizado por tres parámetros independientes: $G_{c,ch}$, $\sigma_{c,ch}$ y k_{ch} . En el presente trabajo estos parámetros son: G_{IIc} , τ_c y k_t , respectivamente. El valor

de k_t puede obtenerse de una manera sencilla tomando como referencia la pendiente de la primera zona (elástica-lineal) de las curvas fuerza-desplazamientos de los ensayos [19]. Los valores k_t obtenidos para cada configuración se muestran en la Tabla 2.

Para obtener los otros dos parámetros necesarios (G_{IIc} y τ_c), se necesitan como mínimo dos configuraciones de ensayo diferentes con similares características geométricas y propiedades mecánicas. En el presente trabajo se han usado las tres configuraciones descritas en la Tabla 1.

En el primer paso del análisis inverso, se obtiene una superficie de fallo $\sigma_{crit}^r(G_{IIc}, \tau_c)$ para cada configuración de ensayo, que se compara con el valor $\sigma_{crit,exp}^r$ obtenido de los experimentos.

En Yuan et al. [9], se ensayan 3 probetas para cada configuración de ensayo, obteniendo 3 cargas de despegue para cada tipo de refuerzo (2C, 1C4B y 4B1C), ver Tabla 2. Esta carga se corresponde con el primer pico en las curvas fuerza-desplazamiento. En el presente trabajo, se ha estimado $\sigma_{crit,exp}^r$ para cada configuración como la media de las tres cargas proporcionadas en [9]. Los puntos

Tabla 2: Cargas de despegue e interfaces usadas determinadas de los datos experimentales de [9].

	2C	1C4B	4B1C
Carga crítica 1 (MPa)	935.63	483.00	621.72
Carga crítica 2 (MPa)	982.78	555.64	694.36
Carga crítica 3 (MPa)	1005.24	459.04	672.33
$\sigma_{crit,exp}^r$ (MPa) (media)	974.55	499.23	662.80
k_t (MPa/mm)	3.6	4.7	7.0

que generan la superficie de fallo en cada configuración se obtienen aplicando (8). Por tanto, la carga aplicada en el refuerzo que provoca el despegue, σ_{crit}^r , se puede escribir en función de a_{crit} :

$$\sigma_{crit}^r = \tau_c s(a_{crit}(\mu)) = \tau_c s\left(a_{crit}\left(\frac{2G_{IIc}k_t}{\tau_c^2}\right)\right) \quad (9)$$

Cada superficie de fallo esta compuesta por 5000 combinaciones de $\sigma_{crit}^r(G_{IIc}, \tau_c)$. Los rangos usados para cada parámetro son 0.0015-11.5 N/mm para G_{IIc} y 0.1-2.5 MPa para τ_c .

En la Fig. 2, se presenta la intersección de la superficie de fallo con el plano definido por $\sigma_{crit,exp}^r$ en cada una de las 3 configuraciones analizadas. Dichas intersecciones generan isolíneas que representan todas las parejas de valores G_{IIc} y τ_c que predicen $\sigma_{crit}^r(G_{IIc}, \tau_c) = \sigma_{crit,exp}^r$. Aunque la Fig. 2 se centra en las curvas generadas usando los valores medios $\sigma_{crit,exp}^r$ de cada configuración, también se puede analizar el rango de valores obtenido experimentalmente en cada configuración. Este rango se obtiene usando los

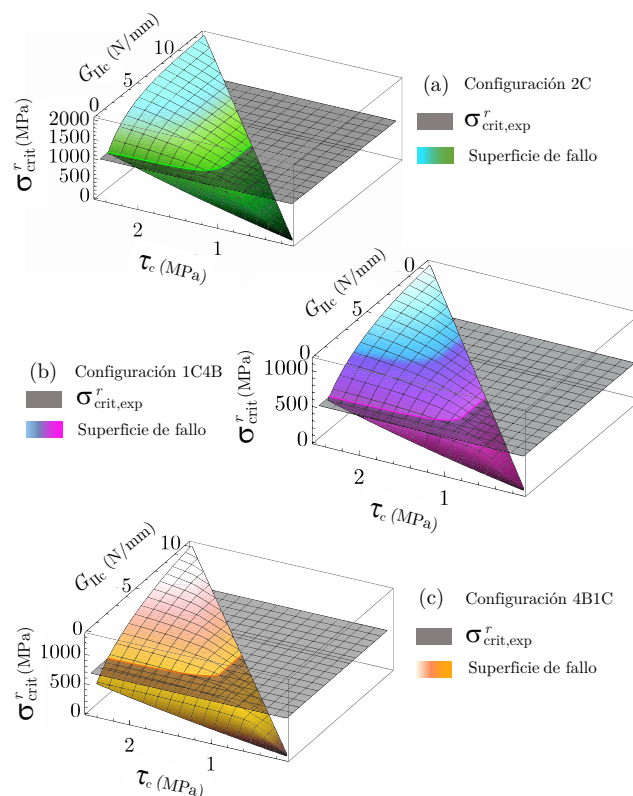


Figura 2: Intersección de la superficie de fallo y los planos $\sigma_{crit,exp}^r$ para las configuraciones: (a) 2C, (b) 1C4B y (c) 4B1C.

valores de carga mínima y máxima obtenidas experimentalmente en cada configuración mostrados en la Tabla 2. En la Fig. 3, las líneas punteadas representan las isolíneas obtenidas en la Fig. 2 con los valores medios, y las líneas continuas representan las isolíneas obtenidas usando los valores mínimos y máximos de carga obtenidos experimentalmente. La pareja de valores seleccionada se estima en la zona donde las 3 zonas de fallo se cruzan. De manera específica en este problema, se escogen los siguientes valores $G_{IIc}=2.2$ N/mm y $\tau_c=1.20$ MPa, representados con un punto en la Fig. 3.

3.3. Comparación entre los resultados numéricos y analíticos

En esta sección se comparan los resultados obtenidos mediante la solución analítica propuesta en [12] y los resultados numéricos por medio del método de los elementos finitos. En ambos modelos se permite la penetración entre sólidos en la zona libre de adhesivo, es decir no se tienen en cuenta los posibles efectos de compresión en esa zona. De manera específica, solo una de las 3 configuraciones analizadas previamente se considera en esta sección (configuración 1C4B).

En la Fig. 4 (a), se presentan las tensiones obtenidas usan-

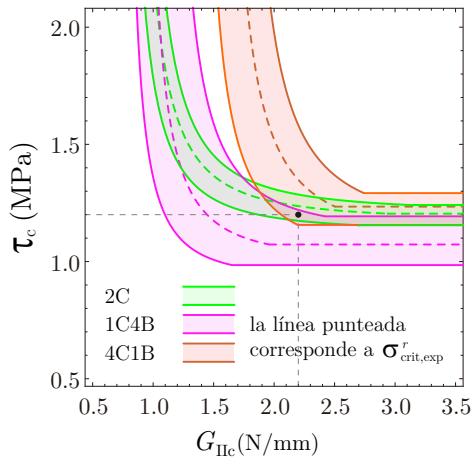


Figura 3: Zona de fallo experimental para cada configuración del ensayo. Las líneas que limitan cada zona representan las isóneas obtenidas con los valores mínimos y máximos de carga, $\sigma_{crit,exp}^r$, mientras que las líneas punteadas representan las isóneas obtenidas con los valores medios en cada configuración de ensayo.

do los modelos numéricos (NP) y analíticos (AP). Se destaca la buena correlación entre ellas. En la Fig. 4(b) se

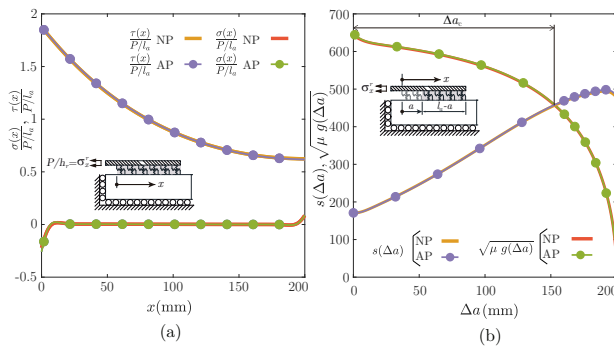


Figura 4: (a) Tensiones adimensionales a lo largo de la interfase obtenidas con modelos numéricos (NP) y analíticos (AP). (b) Curvas $s(\Delta a)$ y $\sqrt{\mu g(\Delta a)}$ y su intersección.

muestra la intersección de las curvas $s(\Delta a)$ y $\sqrt{\mu g(\Delta a)}$ donde se muestra el primer crecimiento finito de la grieta de interfase.

3.4. Comparación entre resultados experimentales y numéricos

En esta sección se comparan los resultados obtenidos con los modelos descritos y los resultados experimentales de Yuan et al. [9]. En la Fig. 5 se muestran los resultados numéricos donde se tiene en cuenta el efecto de incluir o no el contacto sin fricción, para las tres configuraciones

de ensayo, donde las curvas grises representan los ensayos experimentales. Estas figuras representan, para cada ensayo, la carga aplicada versus el desplazamiento relativo que se mide en el ensayo. El desplazamiento incluye tanto el deslizamiento entre las partes pegadas y la elongación de la parte no pegada del refuerzo. Se destaca que,

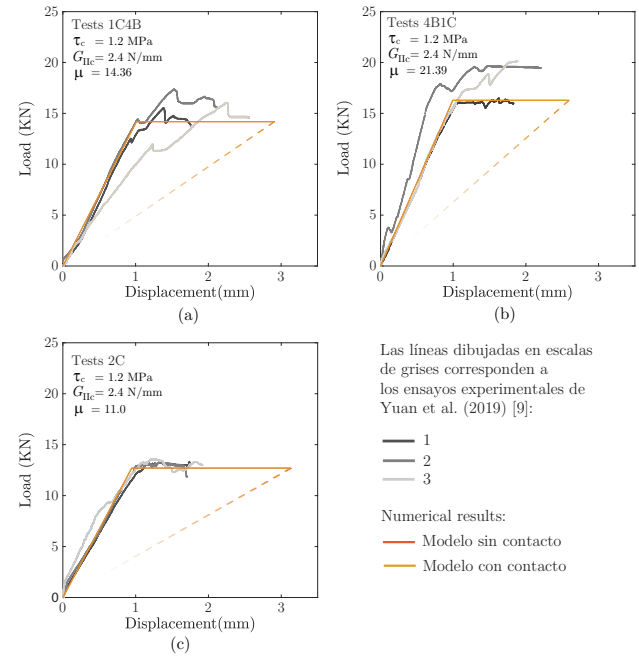


Figura 5: Comparación entre los resultados experimentales y las predicciones numéricas en el ensayo de doble cortante PPST.

en control en carga, cuando se alcanza la carga crítica se alcanza el fallo total de la unión. Sin embargo dado que el crecimiento finito se da a una carga constante, el CCFM es capaz de captar un comportamiento tipo snap-back tal como ocurre en ensayos donde se tiene un control en desplazamiento [20] o en simulaciones usando modelos de zona cohesiva [14].

4. CONCLUSIONES

El criterio acoplado de la fractura finita (CCFFM) aplicado al LEBIM se ha usado para modelar el ensayo de doble cortante pull-push. Los resultados muestran una muy buena correlación entre los resultados numéricos y analíticos.

Los resultados obtenidos por los modelos también se han comparado con resultados experimentales, obteniendo un buen acuerdo. Se ha realizado un análisis inverso para una correcta caracterización de la interfase, donde se han ajustado los valores de G_{IIc} y τ_c tomando como referencia los resultados experimentales.

Los resultados muestran que la herramienta numérica es adecuada para la predicción del fallo de uniones adhesivas. Como trabajo futuro, se destaca la importancia del conocimiento del campo tensional en la zona cercana al vértice de la grieta cuando se usa el LEBIM, el uso de elementos especiales que sean capaces de captar este comportamiento permitirían mejorar la eficiencia de los cálculos dado que en la actualidad se necesita mallas muy refinadas cuando se tienen rigideces elevadas.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer la financiación de la Consejería de Economía y Conocimiento de la Junta de Andalucía y del Fondo de Desarrollo Regional Europeo (Proyecto P18-FR-1928 y Contrato US-1266016-Programa Operativo FEDER Andalucía 2014-2020), de la Junta de Andalucía y del Fondo Social Europeo (Acciones de transferencia del conocimiento AT17-5908-USE), y del Ministerio de Ciencia Innovación y Universidades y del Fondo de Desarrollo Regional Europeo (Proyecto PGC2018-099197-B-I00).

REFERENCIAS

- [1] S. Lenci. Analysis of a crack at a weak interface. *International Journal of Fracture*, 108:275–290, 2001.
- [2] P. Cornetti, V. Mantič, and A. Carpinteri. Finite Fracture Mechanics at elastic interfaces. *International Journal of Solids and Structures*, 49:1022–1032, 2012.
- [3] V. Mantič, L. Távara, A. Blázquez, E. Graciani, and F. París. A linear elastic - brittle interface model: Application for the onset and propagation of a fibre-matrix interface crack under biaxial transverse loads. *International Journal of Fracture*, 195:15–38, 2015.
- [4] M. Muñoz Reja, L. Távara, V. Mantič, and P. Cornetti. Crack onset and propagation at fibre-matrix elastic interfaces under biaxial loading using finite fracture mechanics. *Composites Part A*, 82:267–278, 2016.
- [5] L. Távara, V. Mantič, E. Graciani, and F. París. BEM analysis of crack onset and propagation along fiber-matrix interface under transverse tension using a linear elastic-brittle interface model. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35:207–222, 2011.
- [6] D. Leguillon. Strength or toughness? a criterion for crack onset at a notch. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 21:61–72, 2002.
- [7] V. Mantič. Interface crack onset at a circular cylindrical inclusion under a remote transverse tension. Application of a coupled stress and energy criterion. *International Journal of Solids and Structures*, 46:1287–1304, 2009.
- [8] E. Graciani, V. Mantič, F. París, and A. Blázquez. Weak formulation of axi-symmetric frictionless contact problems with boundary elements: Application to interface cracks. *Computer and Structures*, 83:836–855, 2005.
- [9] C. Yuan, W. Chen, T. M. Pham, and H. Hao. Bond behaviour between hybrid fiber reinforced polymer sheets and concrete. *Construction and Building Materials*, 210:93–110, 2019.
- [10] J. W. Hutchinson and Z. Suo. Mixed mode cracking in layered materials. *Advances in Applied Mechanics*, 29:63–191, 1992.
- [11] I. G. García and D. Leguillon. Mixed-mode crack initiation at a v-notch in presence of an adhesive joint. *International Journal of Solids and Structures*, 49:2138–2149, 2012.
- [12] M. Muñoz Reja, P. Cornetti, L. Távara, and V. Mantič. Interface crack model using finite fracture mechanics applied to the double pull-push shear test. *International Journal of Solids and Structures*, 188–189:56–73, 2020.
- [13] C. Mazzotti, A. Bilotta, C. Carloni, F. Ceroni, T. D’Antino, E. Nigro, and C. Pellegrino. *Bond Between EBR FRP and Concrete*, chapter 3, pages 39–96. Springer Netherlands, Dordrecht, 2016.
- [14] P. Cornetti and A. Carpinteri. Modelling the FRP-concrete delamination by means of an exponential softening law. *Engineering Structures*, 33(6):1988–2001, 2011.
- [15] C. Yuan, W. Chen, T. M. Pham, and H. Hao. Effect of aggregate size on bond behaviour between basalt fibre reinforced polymer sheets and concrete. *Composites Part B: Engineering*, 158:459–474, 2019.
- [16] C. Yuan, W. Chen, T. M. Pham, H. Hao, J. Cui, and Y. Shi. Strain rate effect on interfacial bond behaviour between BFRP sheets and steel fibre reinforced concrete. *Composites Part B: Engineering*, 174:107032, 2019.
- [17] E. Martin, D. Leguillon, O. Sevecek, and R. Bermejo. Understanding the tensile strength of ceramics in the presence of small critical flaws. *Engineering Fracture Mechanics*, 201:167 – 175, 2018.
- [18] L. Távara, L. Moreno, E. Paloma, and V. Mantič. Accurate modelling of instabilities caused by multi-site interface-crack onset and propagation in composites using the sequentially linear analysis and Abaqus. *Composite Structures*, 225:110993, 2019.
- [19] P. Carrara and D. Ferretti. A finite-difference model with mixed interface laws for shear tests of frp plates bonded to concrete. *Composites Part B: Engineering*, 54:329 – 342, 2013.
- [20] P. Carrara, D. Ferretti, F. Freddi, and G. Rosati. Shear tests of carbon fiber plates bonded to concrete with control of snap-back. *Engineering Fracture Mechanics*, 78(15):2663 – 2678, 2011.