TRABAJOS DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 6, núm. 1, 1991, pp. 45 a 59

ASIGNACION DE RECUERDOS MAX-MIN: PROPIEDADES Y ALGORITMOS

A. MARMOL CONDE
Dpto. de Economía Aplicada
Universidad de Sevilla

B. PELEGRÍN PELEGRÍN
Dpto. de Matm. Aplicada y Estadística
Universidad de Murcia

RESUMEN

Este trabajo trata el problema de asignación de recursos cuando el objetivo es maximizar la mínima recompensa y las funciones recompensa son continuas y estrictamente crecientes. Se estudian diferentes propiedades que conducen a algoritmos que permiten de forma eficiente la resolución de una gran variedad de problemas de esta naturaleza, tanto con variables continuas como discretas.

Palabras clave: Asignación de recursos; programación matemática.
Clasificación AMS: 90A15, 90B99, 90C30.

SUMMARY

This paper treats the resource-allocation problem when the objective is to maximize the minimum trade-off functions.

We study several properties that lead to efficient algorithms to solve many problems of this type. Continuous and discrete cases and even the case where variables can be both continuous and integer can be solved this way.

Key words: Resource allocation; mathematical programming.
A.M.S. Classifications: 90A15, 90B99, 90C30.

1. INTRODUCCION

La formulación de un problema de asignación de recursos exige la elección de un criterio de decisión que vendrá determinado por la naturaleza del objetivo que se pretende alcanzar. Posiblemente el

Recibido Julio 1988.
Revisado Marzo 1989.

criterio más estudiado sea el criterio MAX-SUM, donde la efectividad de cada solución se mide sumando las recompensas obtenidas para cada variable. A este criterio corresponden los problemas denominados de carga, ocupación de volúmenes, mochila o «knapsack», sobre los cuales existe un gran número de publicaciones. Algunos estudios recientes sobre este tipo de problemas pueden verse en Vidal (1984), Dudzinski y Walukiewicz (1987), Lee y Guignard (1988) y Chung *et al.* (1988).

Sin embargo, hay ocasiones en que este criterio no resulta adecuado. Supongamos un problema de asignación de fondos económicos a distintos sectores, interesará que ninguno de ellos resulte especialmente desfavorecido, o un problema de supervivencia, donde ésta depende de varios recursos limitados por restricciones (peso, volumen, etc.), interesará entonces maximizar el tiempo, que dependerá a su vez de que se alcance un mínimo en cada una de las variables. En general cuando se pretende que las recompensas para las distintas variables aumenten en conjunto, el criterio más razonable es el criterio MAX-MIN.

Así pues, el problema que nos ocupa consiste en hallar una asignación que maximice el mínimo de unas ciertas funciones recompensa, sujeto a un conjunto de restricciones lineales con coeficientes no negativos, es decir:

$$\underset{x}{\text{Máx}} \min \{f_j(x_j),\quad j = 1,...,n\}$$

$$\text{s.a.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i = 1,..., m \tag{1}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1,..., n \tag{2}$$

$$x_j \text{ entero}, \quad j \in I \subseteq N = \{1,...,n\} \tag{3}$$

Donde $x = (x_1,..., x_n)$ representa a las asignaciones.

- f_j son funciones continuas estrictamente crecientes que miden la efectividad de cada asignación.
- n es el número de variables.
- m es el número de restricciones.
- $a_{ij} \geqslant 0$ son parámetros que representan las cantidades de recurso i consumidas por cada unidad asignada a la actividad j.
- $b_i > 0$ representa la cantidad total del recurso i.

I es el conjunto de índices de variables que están restringidas a ser enteras.

Algunos casos particulares en este modelo han sido ya estudiados. Kaplan (1974) fue el primero en presentar una técnica de resolución para una clase especial de poblemas máx-mín continuos, cuando las funciones recompensa son lineales sin término independiente. Más recientemente Eiselt (1985) estudia un modelo relacionado con éste, introduciendo cotas inferiores generalizadas. Por otra parte, Brown (1979b) estudia el caso general con una sola restricción.

En particular, el caso de funciones recompensa lineales, $f_j(x_j) = w_jx_j + d_j$, puede formularse como un problema de Programación Lineal, ya que es equivalente a:

$$\begin{aligned}
&\text{Máx } z \\
&\text{s.a. } w_jx_j - z \geqslant -d_j, \quad j = 1, ..., n \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, ..., m \\
&x_j \geqslant 0, \quad j = 1, ..., n \\
&x_j \text{ entera}, \quad j \in I
\end{aligned}$$

Este problema se puede resolver aplicando cualquier programa de Programación Lineal o Programación Lineal Entera como LINDO, MPCODE o LP88, según sea $I = \phi$ ó $I \neq \phi$. Sin embargo, los procedimientos que presentamos, particularizados al caso lineal son mucho más eficientes que los anteriores.

Como se ha indicado, el objetivo de este trabajo consiste en estudiar el modelo de asignación MAX-MIN para funciones más generales, como son las funciones continuas y estrictamente crecientes. En la sección 2 estudiamos el problema relajado obtenido al suprimir las restricciones (2) y (3), y se obtiene un algoritmo que lo resuelve. Basándonos en estos resultados, abordamos en la seción 3 el problema continuo, obtenido al eliminar del modelo general las restricciones (3), y por último, en la sección 4 analizamos el modelo general con variables continuas y enteras, al que llamaremos modelo mixto, dando en ambos casos algoritmos generales para su resolución.

2. ANALISIS DEL PROBLEMA RELAJADO

Consideremos el problema relajado, obtenido al eliminar las restricciones de no negatividad de las variables y las restricciones x_j entero, $j \in I$. Es decir:

$$\begin{aligned} &\text{Máx mín } \{f_j(x_j), \quad j = 1, ..., n\} \\ &\text{s.a. } \sum_j a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, ..., m \end{aligned}$$

Sea $r = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $f_j(x_j) = t, j = 1, ..., n, t \in \mathbb{R}\}$, en particular, si las funciones son lineales, r es una recta. Denotemos por H_i al hiperplano determinado por la restricción i-ésima

$$H_i = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\}$$

y por $f(x)$ a la función objetivo, $f(x) = \text{mín}\{f_j(x_j), j = 1, ..., n\}$.

Suponemos, además, que el conjunto de soluciones factibles es no vacio.

Propiedad 1

Si $r \cap H_i = \{P_i\}$, $i = 1, ..., m$, y si $f(P_k) = \text{mín}\{f(P_i), i = 1, ..., m\}$, entonces P_k es solución óptima del problema relajado. Además este mínimo se alcanza en un único punto de r.

Demostración:

Sea $x = (x_1, ..., x_n)$ factible tal que $f_j(x_j) > f(x)$ para algún índice j, $x \notin r$. Definamos $x' = (x'_1, ..., x'_n)$ de la siguiente forma:

$$x'_j = \begin{cases} x_j & \text{si } f_j(x_j) = f(x) \\ f_j^{-1}(f(x)) & \text{si } f_j(x_j) > f(x) \end{cases}$$

donde las funciones inversas f_j^{-1} se definen como $f_j^{-1}(\beta) = \inf\{\alpha : f_j(\alpha) \geqslant \beta\}$. De estas definiciones se desprende que $x'_j \leqslant x_j$, $j = 1, ..., n$, por tanto, x' también es factible.

Como f_j son continuas, resulta que $f_j(x'_j) = f(x)$, $j = 1, ..., n$, por consiguiente, $x' \in r$, y $f(x') = f(x)$. De aquí que una solución óptima del problema relajado debe estar en r.

Ahora bien, si una solución $x = (x_1, ..., x_n)$ es interior al conjunto factible, podemos encontrar una solución factible x' de la forma $x'_j = x_j + \varepsilon$, $j = 1, ..., n$, $\varepsilon > 0$ tal que $f(x') > f(x)$.

Para elegir ε basta tomar $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_i, i = 1, ..., m\}$, siendo $\varepsilon_i = (b_i - \sum a_{ij}x_j)/na_i$ y $a_i = \text{máx}\{a_{ij}, j = 1, ..., n\}$. De aquí que las posibles soluciones óptimas están en la frontera del conjunto factible.

Vamos a ver que de entre los P_i, sólo existe un punto, el correspondiente al mín $\{f(P_i), i = 1, ..., m\}$, que es factible. Como este punto sería el único punto de r en la frontera del conjunto factible, resulta que es solución óptima del problema relajado por todo lo visto anteriormente.

Sea $P_i = (x_1^i, ..., x_n^i)$ y $f(P_i) = t_i$, $i = 1, ..., m$, como $f_j(x_j^i) = t_i$, $j = 1, ..., n$, resulta que $x_j^i = f_j^{-1}(t_i)$, $j = 1, ..., n$. Por tanto, si $f(P_k) < f(P_i)$ tendremos que $t_k < t_i$, por lo que $x_j^k = f_j^{-1}(t_k) < f_j^{-1}(t_i) = x_j^i$, $j = 1, ..., n$, de donde:

$$\sum_j a_{ij}x_j^k < \sum_j a_{ij}x_j^i = b_i, \quad i \neq k$$

$$b_k = \sum_j a_{kj}x_j^k < \sum_j a_{kj}x_j^i, \quad i \neq k$$

por consiguiente, P_k es factible y P_i no lo es. Además, el mín $\{f(P_i), i = 1, ..., m\}$ sólo corresponde a un punto, pues si $f(P_k) = f(P_h) = t^*$, resultará que $x_j^k = f_j^{-1}(t^*) = x_j^h$, $j = 1, ..., n$; de donde, $P_k = P_h$.

Propiedad 2

Si además se verifica que $a_{kj} > 0, j = 1, ..., n$, para un índice k tal que $f(P_k) = \text{mín}\{f(P_i), i = 1, ..., m\}$, entonces P_k es la única solución del problema.

En efecto:

Sea $x' \neq P_k$, también solución óptima, $x' \notin r$ ya que P_k es única sobre r. Tendríamos que

$$f_j(x'_j) \geqslant f(x') = f(P_k) = f_j(x_j^k), \quad j = 1, ..., n,$$

con alguna desigualdad estricta. Entonces $x'_j \geqslant x_j^k$, $j = 1, ..., n$, con alguna desigualdad estricta, y por tanto,

$$\sum_j a_{kj}x'_j > \sum_j a_{kj}x_j^k = b_k,$$

lo cual es absurdo pues x' es factible. Luego P_k es única.

Como consecuencia de la propiedad 1, el siguiente algoritmo permite obtener una solución x^* del problema relajado, que será única si se verifica la propiedad 2.

Algoritmo 1 (Resolución del modelo relajado)

PASO 1: Para $i = 1, ..., m$ hallar t_i tal que $\sum_j a_{ij} f_j^{-1}(t_i) = b_i$.

PASO 2: Sea $t^* = \text{mín}_i\{t_i\}$.

PASO 3: Para $j = 1, ..., n$ hacer $x_j^* = f_j^{-1}(t^*)$ y $f(x^*) = t^*$. x^* es una solución óptima del problema relajado y $f(x^*) = t^*$.

Este algoritmo presenta un procedimiento general de resolución independiente de la forma funcional de las funciones f_j. El paso 1 requiere calcular las inversas de dichas funciones y resolver las ecuaciones indicadas. Cada una de estas ecuaciones tiene solución, y además es única ya que ésta corresponde al punto de intersección de r con H_i, es decir, P_i. Estos cálculos pueden hacerse aplicando métodos numéricos en los casos en que no se obtenga una expresión analítica para los valores t_i.

Casos particulares

Aunque las ecuaciones del paso 1 del algoritmo, en general no son sencillas de resolver, en muchos casos los valores t_i pueden ser obtenidos fácilmente.

Consideremos, por ejemplo, el caso de que las funciones recompensas sean de la forma $f_j(x_j) = \phi(w_j x_j + d_j)$, $j = 1, ..., n$, donde ϕ es una función continua y estrictamente creciente $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

En estos casos

$$t^* = \min_i \phi \left(\frac{b_i + \sum_j \frac{a_{ij} d_j}{w_j}}{\sum_j \frac{a_{ij}}{w_j}} \right)$$

En efecto:

Si

$$t_i = f_j(x_j) = \phi(w_j x_j + d_j),$$

entonces

$$\phi^{-1}(t_i) = w_j x_j \, Q \, d_j \qquad \text{y} \qquad x_j = (\phi^{-1}(t_i) - d_j)/w_j,$$

de aquí que

$$\sum_j a_{ij} \frac{\phi^{-1}(t_i) - d_j}{w_j} = b_i,$$

lo que implica que:

$$\phi^{-1}(t_i) = \frac{b_i + \sum \frac{a_{ij} d_j}{w_j}}{\sum_j \frac{a_{ij}}{w_j}} \qquad \text{y} \qquad t_i = \phi\left(\frac{b_i + \sum \frac{a_{ij} d_j}{w_j}}{\sum_j \frac{a_{ij}}{w_j}}\right)$$

En particular, si ϕ es la identidad, caso de funciones recompensa lineales, se obtiene que una asignación óptima es:

$$x_j = \frac{t^* - d_j}{w_j}, \qquad \text{donde} \qquad t \stackrel{*}{=} \text{mín}_i \frac{b_i + \sum \frac{a_{ij} d_j}{w_j}}{\sum_j \frac{a_{ij}}{w_j}}$$

como vemos, utilizando el algoritmo 1, el problema relajado puede resolverse fácilmente en los casos de funciones recompensa lineales o de las formas:

$$f_j(x_j) = e^{w_j x_j + d_j}$$

$$f_j(x_j) = \log (w_j x_j + d_j)$$

Otros casos serían, por ejemplo, las funciones de la forma $f_j(x_j) = w_j x_j^2$ y las funciones lineales a trozos. Todos ellos se presentan con frecuencia en las aplicaciones prácticas.

3. MODELO CONTINUO

En este apartado consideraremos el modelo continuo obtenido al eliminar las restricciones (3). Es decir:

$$\text{Max mín} \{ f_j(x_j), \quad j = 1, .., n \}$$

$$\text{s.a.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, ..., m.$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, ..., n.$$

Denotaremos por $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ una solución óptima, y sea $f^* = f(x^*)$.

Sea $P_k = (x_1^k, ..., x_n^k)$, la solución del problema relajado, si $x_j^k \geqslant 0\ \forall j = 1, ..., n$, entonces P_k es factible, y por tanto solución óptima del modelo continuo. En otro caso, para su resolución nos basaremos en la solución óptima del problema relajado y en la siguiente propiedad:

Propiedad 3

Si $x_j^k < 0$, entonces $x_j^* = 0$ en la solución óptima. En efecto:

Tenemos que $f^* \leqslant f(P_k) = f_j(x_j^k) < f_j(0)$.

Por tanto, el menor valor que puede tomar la variable x_j, $x_j = 0$, tiene recompensa mayor o igual que el valor óptimo de la función objetivo. Si se elevara el valor de x_j por encima de cero, no influiría en el valor óptimo y disminuirían las cantidades de recurso disponible a distribuir entre las restantes variables, con la consiguiente disminución en el valor de la función objetivo. De aquí que x_j^* ha de ser 0.

El método de resolución consistirá pues, en resolver el problema relajado, poner a cero las variables que resulten negativas y volver a resolverlo con el resto de las variables, así sucesivamente hasta que obtengamos una solución factible.

Algoritmo 2 (Resolución del modelo continuo)

PASO 0: Sea $N' = \{1, ..., n\}$.

PASO 1: Para $i = 1, ..., m$, hallar t_i tal que $\sum_{j \in N'} a_{ij} f_j^{-1}(t_i) = b_i$.

PASO 2: Sea $t' = \text{mín}_i\{t_i\}$.

PASO 3: Hacer $R = \phi$.

Para $j \in N'$ calcular $x'_j = f_j^{-1}(t')$, y si $x'_j < 0$, entonces hacer $R = R \cup j$.

PASO 4: Si $R \neq \phi$, hacer $N' = N' - R$ e ir al PASO 1.
Si $R = \phi$, para $j = 1, ..., n$, hacer

$$x_j^* = \begin{cases} x'_j & j \in N' \\ 0 & j \notin N' \end{cases} \quad \text{y} \quad t^* = t'$$

x^* es una solución óptima y $f(x^*) = t^*$.

El número máximo de iteraciones es n, ya que en cada iteración se reduce el cardinal del conjunto N' por lo menos en una unidad.

Hemos implementado este algoritmo en lenguaje Pascal para el caso de funciones recompensa lineales, y se ha ejecutado en un VAX11/785. La tabla muestra el tiempo máximo y el tiempo medio de ejecución medidos en milésimas de segundo de C.P.U. para problemas de distintos tamaños.

Variables	Restricciones	N.º problemas resueltos	Tiempo medio	Tiempo máximo
5	5	10	5	10
10	5	10	10	20
5	10	10	12	20
10	10	10	15	20
20	10	10	25	30

4. MODELO CON VARIABLES ENTERAS

Hay situaciones donde todas las variables del problema no son continuas, por ejemplo, supongamos que los recursos son presupuesto y personas trabajando. En tales casos añadiremos al conjunto de restricciones el que algunas variables sean enteras, y estudiaremos el modelo más general:

$$\begin{aligned} &\text{Máx}\,\text{mín}_j\,\{f_j(x_j), \quad j = 1, ..., n\} \\ &\text{s.a.} \sum_j a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, ..., m \\ &x_j \geqslant 0, \quad j \in N \\ &x_j \text{ entero}, \quad j \in I \subseteq N \end{aligned}$$

Para la resolución de este modelo, consideremos el problema con todas las variables continuas. En todo lo que sigue notaremos por x° a la asignación óptima del problema continuo, obtenida al aplicar al algoritmo 2, por N' al conjunto de índices asociado a la solución óptima en dicho algoritmo, y sea $f(x^\circ) = f^\circ$. Designaremos por x^* a una solución óptima del problema que nos ocupa al que llamaremos problema mixto, y sea $f^* = f(x^*)$.

Es evidente que f° es una cota superior del valor óptimo de la función objetivo del problema mixto. Por otra parte, la siguiente asignación:

$$x'_j = \begin{cases} 0 & j \notin N' \\ x_j^\circ & j \in N' - I \\ \lfloor x_j^\circ \rfloor & j \in N'^w \cap I \end{cases}$$

es factible para el problema mixto, donde $\lfloor x_j^\circ \rfloor$ representa el mayor entero menor o igual que x_j°.

Sea $f' = f(x')$, entonces f' es una cota inferior de f^*. En consecuencia: $f' \leqslant f^* \leqslant f^\circ$.

Si x° es factible del problema mixto, entonces $x^* = x^\circ = x'$ y $f^* = f^\circ = f'$, por tanto el problema estaría resuelto. De lo contrario, como $f_j(x_j^\circ) = f^\circ$ si $j \in N'$, $f_j(x_j^\circ) = f_j(0) > f^\circ$ si $j \notin N'$ y $f_j(\lfloor x_j^\circ \rfloor) < f_j(x_j^\circ)$ para algún $j \in I$, resulta que:

$$f' = f(x') = \text{Mín}\,\{\min_{j \notin N'} f_j(0), \quad \min_{j \in N' \cap I} f_j(\lfloor x_j^\circ \rfloor),$$

$$\min_{j \in N' - I} f_j(x_j^\circ)\} = \min_{j \in N' \cap I} f_j(\lfloor x_j^\circ \rfloor).$$

Veamos qué sucede en este último caso:

Propiedad 4

Sea $S = \{j \in N' \cap I : f_j(\lfloor x_j^\circ \rceil) = f'\}$, entonces

$$x_j^* = \lfloor x_j^\circ \rceil \quad o \quad x_j^* = \lfloor x_j^\circ \rceil + 1 \quad \forall j \in S.$$

En efecto:

Si $x_j^* < \lfloor x_j^\circ \rceil$ $j \in S$, entonces $f^* \leqslant f_j(x_j^*) < f_j(\lfloor x_j^\circ \rceil) = f'$, lo cual es absurdo.

Por otra parte, $f_j K \lfloor x_j^\circ \rceil) + 1) > f_j(x_j^\circ) \geqslant f^\circ \geqslant f^*$, luego no aumentaría el valor óptimo de la función objetivo aumentando x_j^* a más de $\lfloor x_j^\circ \rceil + 1$.

Propiedad 5

Si $f' < f^*$, entonces $x_j^* = \lfloor x_j^\circ \rceil + 1$ $\forall j \in S$.

En efecto:

Si $x_j^* = \lfloor x_j^\circ \rceil$ $j \in S$, entonces $f^* \leqslant f_j(x_j^*) = f' < f^*$, lo cual es absurdo. De donde, por la propiedad anterior, tiene que ser $x_j^* = \lfloor x_j^\circ \rceil + 1$ $\forall j \in S$.

Esta propiedad nos da una condición necesaria para que $f' < f^*$. Estudiaremos ahora cuando es posible mejorar la solución factible x', obtenida por redondeo de la solución óptima x° del problema continuo.

Dado $f' = f(x')$ definimos la asignación $\hat{x} = (\hat{x}_1, ..., \hat{x}_n)$ como los menores valores de las variables x_j que sean factibles para el problema mixto y verifiquen $f_j(x_j) \geqslant f'$, $j = 1, ..., n$, $\hat{x}$ será entonces:

$$\hat{x}_j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \notin N' \\ f_j^{-1}(f') & \forall \ j \in N' - I \\ \lceil f_j^{-1}(f') \rceil & \forall \ j \in N' \cap I \end{cases}$$

donde $\lceil a \rceil$ representa el menor entero mayor que a.

Sean $\hat{b}_i = \sum_{j \in N} a_{ij} \hat{x}_j$, entonces $\hat{b}_i$ son las menores sumas para todas las asignaciones factibles $x = (x_1, ..., x_n)$ tales que $f(x_j) \geqslant f'$, $j = 1, ..., n$.

Consideremos $M = \{j \in N' \cap I$ tal que $f_j(\hat{x}_j) = f'\}$, obsérvese que S está incluido en M, y en general $S \neq M$. Para que la función objetivo crezca, es necesario que cada variable de M aumente una unidad. Entonces las sumas aumentarán a $\hat{b}_i + \sum_{j \in M} a_{ij}$, éstas son las menores sumas posibles tales que todas las variables enteras tienen función recompensa mayor estrictamente que f', las continuas tienen función recompensa igual a f'. Se pueden presentar los siguientes casos:

— Si $\hat{b}_i + \sum_{j \in M} a_{ij} > b_i$, para algún i, entonces no es posible mejorar x' pues se produciría infactibilidad. Por tanto, una solución óptima sería $x^* = x'$, y $f(x^*) = f'$.

— Si $\hat{b}_i + \sum_{j \in M} a_{ij} \leqslant b_i, \forall \, i = 1, ..., m$, y se da la igualdad para alguna restricción, entonces:

a) Si $N' - I \neq \phi$, como $f(\hat{x}_j) = f'$ $\forall j \in N' - I$, resulta que un aumento de estas variables produciría infactibilidad, por tanto no sería posible mejorar x' y en consecuencia $x^* = x'$ y $f(x^*) = f'$.

b) Si todas las variables de N' son enteras, es necesario tomar x_j

$= \hat{x}_j + 1 \ \forall j \in M$, y $x_j = \hat{x}_j \ \forall j \notin M$ para producir una mejora en la función objetivo. Como al hacer esto, al menos una restricción queda saturada, entonces no es posible una nueva mejora y, por tanto, una solución óptima será:

$$x_j^* = \begin{cases} \hat{x}_j + 1 & \text{si } j \in M \\ \hat{x}_j & \text{si } j \notin M \end{cases} \quad \text{y} \quad f^* = f(x^*)$$

— Si $\hat{b}_i + \sum_{j \in M} a_{ij} < b_i$, $\forall i = 1, ..., m$, entonces la solución x' puede mejorarse en cualquier caso. Se verifica pues que $f^* > f'$, y por la propiedad 5 se cumple que $x_j^* = x_j' + 1 = \lfloor x_j^\circ \rfloor + 1$, $\forall j \in S$.

En este último caso, obtenemos los valores óptimos $\forall j \in S$, obsérvese que no conocemos los valores óptimos de todas las variables de M, sólo de las de S. Podemos eliminar entonces estas variables del problema, con lo que éste queda reducido a:

$$\begin{aligned} &\text{Máx min} \{f_j(x_j), \ \ j \in N' - S\} \\ &\text{s.a.} \sum_{j \in N' - S} a_{ij} x_j \leqslant b_i - \sum_{j \in S} a_{ij} x_j^* \\ &\qquad x_j \geqslant 0, \ \ j \in N' - S \\ &\qquad x_j \text{ entero}, \ \ j \in I \cap (N' - S) \end{aligned}$$

Continuaríamos el proceso con este nuevo problema hasta que todos los valores óptimos de las variables x_j^* sean obtenidos. Así resulta el algoritmo siguiente:

Algoritmo 3 (Resolución del modelo mixto)

PASO 0: Resolver el problema continuo mediante el algoritmo 2. Sea x° su solución y $f^\circ = f(x^\circ)$.
Si x_j° entera $\forall j \in N' \cap I$, entonces $x^* = x^\circ$ y $f^* = f^\circ$.
Si $\exists j \in N' \cap I / x_j^\circ$ no es entera $\Rightarrow$ paso 1.

PASO 1: Hallar

$$x_j' = \begin{cases} 0 & j \notin N' \\ x_j^\circ & j \in N' - I \\ \lfloor x_j^\circ \rfloor & j \in N' \cap I \end{cases}$$

y

$$f' = \text{Mín}\,\{f_j(\lfloor x_j^\circ \rfloor) \quad j \in N' \cap I\}$$

PASO 2: Sea

$$\hat{x}_j = \begin{cases} 0 & j \notin N' \\ f_j^{-1}(f') & j \in N' - I \\ \lceil f_j^{-1}(f') \rceil & j \in N' \cap I \end{cases}$$

PASO 3: $M = \{j \in N' \cap I \quad \text{tal que} \quad f_j(\hat{x}_j. = f'\}$
$S = \{j \in N' \cap I \quad \text{tal que} \quad f_j(\lfloor x_j^\circ \rfloor) = f'\}$.

PASO 4: Para $i = 1, ..., m$, calcular $\hat{b}_i = \sum_{j \in N'} a_{ij}\hat{x}_j$, $B_i = \hat{b}_i + \sum_{j \in M} a_{ij}$.

PASO 5: — Si $B_i > b_i$ para algún i, entonces $\Rightarrow$ paso 6.

— Si $B_i \leqslant b_i$ $\forall i$, y $B_i = b_i$ para algún $i \begin{cases} \text{si } N' \neq I \Rightarrow \text{paso 6.} \\ \text{si } N' = I \Rightarrow \text{paso 7.} \end{cases}$

— Si $B_i < b_i$ $\forall i$, entonces $\Rightarrow$ paso 8.

PASO 6: $x_j^* = x_j'$ $\forall j \in N$ y $f(x^*) = f'$.

PASO 7: $x_j^* = x_j' + 1$ $\forall j \in M$
$x_j^* = x_j'$ $\forall j \in N - M$ y $f^* = \text{mín}\,\{f_j(x_j^*), j = 1, ..., n\}$.

PASO 8: $x_j^* = x_j' + 1$ $\forall j \in S$.
Hacer $b_i = b_i - \sum_{j \in S} a_{ij}x_j^*$ para $i = 1, ..., m$, $I = I - S$
y $N' = N' - S \Rightarrow$ paso 0.

Observemos que en cada iteración se llega a una solución óptima (pasos 6 y 7) o bien se obtienen los valores óptimos de algunas variables (las del conjunto S).

En el peor de los casos, en cada iteración eliminaremos al menos una variable, luego el número de iteraciones es como máximo $|I| + 1$.

La eficiencia de este algoritmo depende de la eficiencia de la resolución del problema relajado, por lo que en los casos donde las t_i tienen expresión analítica resulta muy eficiente. Para el caso particular en que $I = N$, queda también resuelto el problema con todas las variables enteras.

La tabla muestra los tiempos de ejecución para problemas mixtos y enteros de distintos tamaños en el caso de funciones recompensa lineales.

Variables enteras	Variables continuas	Restricciones	Problemas resueltos	Tiempo medio	Tiempo máximo
5	0	5	10	39.5	60
5	0	10	10	41	60
5	5	5	10	42.2	60
5	5	10	10	59	80
10	0	5	10	46.4	80
10	0	10	10	51.8	70
10	10	5	10	61	90
10	10	10	10	83	100
20	0	5	10	62.5	90
20	0	10	10	70	90

BIBLIOGRAFIA

BROWN, J. R. (1979a): «The Sharing Problem», *Operations Research*, 27, 324-340.

BROWN, J. R. (1979b): «The Knapsack Sharing Problem», *Operations Research*, 27, 341-355.

CHUNG, C. S.; HUNG, M. S., and ROM, W. O. (1988): «A Hard KnapsackProblem», *Naval Research Logistics*, 35, 85-98.

DEMJANOV, V. F. (1962): «Algorithms for some minimax problems», *Journal of Computation and Systems Science*, 2, 342-380.

DUDZINSKI, K., and WALUKIEWICZ, S. (1987): «Exact methods for the knapsack problem and its generalizations», *European Journal of Operational Research*, 28, 3-21.

EISELT, H. A. (1986): «Continuous maxmin knapsack problems with GLB constraints», *Mathematical Programming*, 36, 114-121.

EISELT, H. A. (1984): «Maxmin knapsack problems», en M. BRETON (ed.), *Proceedings of the 1984 ASAC Conference Management Science/Recherche Operationelle.*

GILMORE, P. C., and GOMORY, R. E. 1(966): «The Theory of

Computation of Knapsack Functions», *Operations Research*, 14, 1045-1074.

KAPLAN, S. (1974): «Aplications of programs with maxmin objective functions to problems of optimal resource allocation», *Operations Research*, 22, 802-087.

LEE, J. S., and GUIGNARD, M. (1988): «An Aproximate Algorithm for Multidimensional zero-one Knapsack Problems-A Parametric Approach», *Management Science*, 34, 402-410.

MJELDE, K. M. (1982): *Methods of Allocation of Limited Resources, John* Wiley and Sons, Chirchester, New York.

VIDAL, R. V. V. (1984): «A graphical method to solve a family of allocation problems», *European Journal of Operations Research*, 17, 31-34.