FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Sobre las q-series y algunas de sus aplicaciones

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Inés Balbontín Alves

Curso 2021-2022

Grado en Matemáticas

Dirigido por

Renato Álvarez-Nodarse

Resumen

El objetivo de este trabajo es dar a conocer la teoría de las q-series y mostrar algunas de sus aplicaciones. Muchas de las fórmulas que se considerarán se deben a Euler, Gauss y Ramanujan, entre otros. Entre ellas destacan el q-análogo del Teorema del binomio, la fórmula del producto triple de Jacobi y la suma ${}_1\psi_1$ de Ramanujan.

Abstract

The aim of this paper is to introduce the q-series theory and to see some of their applications. Many of the formulas that will be considered are due to Euler, Gauss, Ramanujan and others. Among them are q-analogue of the Binomial Theorem, Jacobi's triple product formula and Ramanujan's sum ${}_1\psi_1$.

Índice general

1. Preliminares **1**

1.1. Introducción 1

1.2. Algunos resultados previos del análisis 2

1.3. ¿Qué es una q-serie? 5

2. El Teorema del binomio **11**

2.1. Aplicaciones 16

3. Producto triple de Jacobi **21**

3.1. Teorema de la identidad del producto triple de Jacobi 21

3.2. Aplicaciones 25

3.3. Funciones theta de Ramanujan 28

3.4. Identidad del producto quíntuple 33

4. Fórmula de la suma $_1\psi_1$ de Ramanujan **37**

4.1. Teorema de la suma $_1\psi_1$ de Ramanujan 37

4.2. Aplicaciones 43

Conclusiones **45**

Bibliografía **47**

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos algunas definiciones y resultados previos necesarios para entender los resultados del resto de los capítulos de esta memoria. La mayoría de ellos se pueden consultar en los libros [5, 11, 16, 23], por citar algunos. En particular, de dichas monografías, así como de los artículos [3, 10], se han sacado multitud de las referencias históricas citadas.

1.1. Introducción

Aunque los renombrados matemáticos L. Euler, C.F. Gauss y A.L. Cauchy hallaron teoremas importantes en el ámbito de las q-series, fue E. Heine el que comenzó en 1847 el desarrollo formal de la teoría de las q-series en su artículo *Untersuchungen Über Die Reihe* [18].

En la segunda mitad del siglo XX fue George E. Andrews quien estuvo a la cabeza en el desarrollo de las demostraciones de las identidades de las q-series usando combinatoria. Aunque sin duda fue S. Ramanujan quien contribuyó más a las q-series que ningún otro matemático. El Teorema de la suma ${}_1\psi_1$ de Ramanujan, unos de sus teoremas más reconocidos en este ámbito, es un teorema sobre series hipergeométricas bilaterales, y juega el mismo rol que el Teorema del q-Binomio en las series unilaterales. El Teorema de la suma ${}_1\psi_1$ de Ramanujan fue enunciado por primera vez en la entrada 17 de sus notas [8, capítulo 16, entrada 17], pero Ramanujan no dejó ninguna prueba, como era habitual en él (a día de hoy se conocen innumerables pruebas). G.H. Hardy publicó este teorema en su libro *Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*, donde declaraba que dicha suma era "*una fórmula notable con muchos parámetros*", y afirmaba que la suma de Ramanujan podía establecerse en los términos del Teorema del q-Binomio; de hecho, actualmente muchas de las pruebas conocidas usan este teorema. La fórmula de Ramanujan se ha empleado en ámbitos como sumas de cuadrados, combinatoria y, en general, en teoría analítica de números.

El Teorema del q-Binomio (al que nos referiremos en posteriores capítulos como Teorema del binomio) fue probado por Cauchy, aunque algunos de sus corolarios los demostró Euler. De uno de estos corolarios resulta la igualdad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q;q)_n} q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty} \tag{1.1}$$

para $|q| < 1$. El término $1/(q;q)_n =: p(n)$ da el número de particiones de n, es decir, el número de formas distintas en que se puede escribir el número natural n como suma de números naturales.

La igualdad

$$\frac{1}{(q;q^2)_\infty} = (-q;q)_\infty \ ,$$

probada más adelante, demuestra que el número de formas de escribir n como suma de m números distintos es igual al número de formas de escribirlo como suma de números impares. Así, vemos que las q-series se relacionan también con la teoría de números, algo que no exploraremos aquí. Para un estudio más profundo de la relación de las q-series con la teoría de particiones consultar [4, 14].

La Identidad del producto triple fue enunciada por C.G.J. Jacobi, pero fue probada primero por Gauss, quien no la publicó. Jacobi también trabajó en las funciones theta, que tuvieron un papel fundamental en la teoría de funciones elípticas, otro de sus campos de estudio. Las funciones theta también se usan en formas modulares.

La Identidad del producto quíntuple, análoga al producto triple, se usa en las demostraciones de las distintas identidades existentes de las funciones theta. Además, la Identidad quíntuple se puede encontrar en las notas de Ramanujan, quien la usaba en algunas de sus pruebas.

1.2. Algunos resultados previos del análisis

En este apartado incluiremos algunos resultados clásicos del análisis que necesitaremos en algunas de las pruebas de los capítulos 2-4.

Definición 1.1 (Serie geométrica infinita) *La serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{1.2}$$

se denomina serie geométrica. Dicha serie converge y su suma es $1/(1-x)$*, si y solo si* $|x| < 1$.

Teorema 1.2 (Criterio de la raíz o de Cauchy) *Sea* $\sum a_n$ *, si existe*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} =: L \in [0,\infty]$$

y $L < 1$*, la serie* $\sum a_n$ *es absolutamente convergente.*

Este criterio lo usaremos para probar la convergencia de las q-series infinitas y su prueba se puede encontrar en casi cualquier libro de análisis matemático.

El siguiente Teorema que permite intercambiar límites y sumas es muy poco conocido en la actualidad y resulta muy útil. Nosotros lo usaremos en la demostración del producto triple de Jacobi. Para su prueba ver [12, página 123, §49]. La prueba que sigue se debe a Hofbauer [19].

Teorema 1.3 (Tannery) *Si* $s(n) = \sum_{k\geq 0} f_k(n)$ *es una suma finita (o una serie convergente) para cada* n*,* $\lim_{n\to\infty} f_k(n) = f_k$*,* $|f_k(n)| \leq M_k$*, y* $\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} s(n) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k.$$

Demostración. Para todo $\varepsilon > 0$ dado, $\exists N(\varepsilon)$ tal que $\sum_{k>N(\varepsilon)} M_k < \varepsilon/3$. Para cada k hay un $N_k(\varepsilon)$ tal que $|f_k(n) - f_k| < \varepsilon/(3N(\varepsilon))$ para todo $n \geq N_k(\varepsilon)$. Sea $P(\varepsilon)$=$\max\{N_1(\varepsilon), \ldots, N_{N(\varepsilon)}(\varepsilon)\}$. Entonces

$$|s(n) - \sum_k f_k| \leq \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} |f_k(n) - f_k| + 2\sum_{k>N(\varepsilon)} M_k < N(\varepsilon)\frac{\varepsilon}{3N(\varepsilon)} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

para todo $n \geq P(\varepsilon)$. □

El próximo teorema lo usaremos para probar el Teorema de la suma ${}_1\psi_1$ de Ramanujan y es conocido como el Teorema de la Identidad en variable compleja (ver e.g. [25, Teorema 1, página 228]).

Teorema 1.4 (Identidad) *Sean dos funciones* f *y* g *analíticas en un conjunto abierto y conexo* A*, e iguales en cierto subconjunto* $D \subset A$ *con un punto de acumulación* $a \in A$*, entonces* $f \equiv g$ *en* A*.*

En particular se tiene que si f y g coinciden en una infinidad de puntos a_n, $n = 1, 2, \ldots,$ de A y sea $a \in A$ un punto de acumulación de la sucesión $(a_n)_n$, entonces $f \equiv g$ en A.

El siguiente teorema, que es un corolario del teorema del límite de Abel [22, Teorema 100, página 177], será de utilidad para probar el Teorema de la suma de Ramanujan. El teorema del límite de Abel establece que si la serie de potencias

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiene radio de convergencia r y además es convergente para $x = r$, entonces

$$\lim_{x \to r^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Teorema 1.5 *Supongamos que* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge para todo* $|x| < 1$ *y tiene un único polo simple en* $x = 1$ *y que* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. *Entonces*

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x) f(x) = \lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

Demostración. Sea la función $g(x) = (1-x)f(x)$. Ante todo notemos que g, como f tiene un polo simple en $x = 1$, entonces existe el límite $\lim_{x\to 1^-} g(x)$. Para calcularlo usamos que $g(x) = (1-x)f(x)$ es una función analítica cuya serie, dado que conocemos la serie de $f(x)$, es

$$g(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n,$$

y cuyo radio de convergencia es $r = 1$ (pues el de la serie de f era $r = 1$). Las sumas parciales de la serie de $g(x)$ cuando $x = 1$ vienen dadas por la expresión

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n-1}) = a_N - a_0.$$

Por tanto, $\lim_{N\to\infty} S_N = a - a_0$, de donde se sigue, usando el Teorema del límite de Abel enunciado antes que

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x) f(x) = a,$$

como se quería demostrar. $\square$

También haremos uso del criterio del siguiente teorema [1, Teorema 3.1.2].

Teorema 1.6 (Criterio Mayorante de Weierstrass) *Sea* $\sum_n f_n$ *una serie de funciones definidas en un conjunto* A. *Si existe una sucesión de números positivos* $(M_n)_n$ *tales que:*

a) $|f_n(x)| \leq M_n$, *para todo* $x \in A$, *y todo* $n \geq 1$, *y*

b) $\sum M_n < \infty$.

Entonces la serie $\sum_n f_n$ *converge uniformemente en* A.

1.3. ¿Qué es una q-serie?

Las q-series están presentes en múltiples campos de las matemáticas. Según Berndt [10], se podrían definir este tipo de series como aquellas en las que interviene un término $q \in (0,1)$. Un ejemplo de ellas es la serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, o las famosas series básicas (ver por ejemplo [16]) que contienen expresiones del tipo

$$(a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k), \quad n \in \mathbb{N} := \{1,2,3,\ldots\}, \quad (a;q)_0 := 1, \tag{1.3}$$

para $a \in \mathbb{C}$, llamadas símbolo q-Pochhammer, es decir, series que contienen productos en sus sumandos. No obstante, como el propio Berndt comenta en [10], "*no existe una definición «buena» de una q-serie*". En lo que sigue veremos muchos ejemplos de q-series así como algunas de sus aplicaciones.

El mencionado símbolo q-Pochhammer es el q-análogo del símbolo de Pochhammer, que se define, para $a \in \mathbb{C}$ y $n \geq 0$, como

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1); \quad (a)_0 = 1 \ .$$

Algunas de sus propiedades son:

$$(1)_n = n! \ , \quad (-z)_n = (-1)^n(z-n+1)_n \ .$$

Sea la serie geométrica infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}. \quad |z| < 1 \ ,$$

si tomamos la serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = (1-z)^{-a} \ ,$$

analítica en $|z| < 1$, por inducción tenemos que

$$f^{(n)}(z) = (a)_n(1-z)^{-a-n}$$

con $f^{(n)}(0) = (a)_n$. Así, obtenemos que la serie geométrica puede extenderse a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n = \frac{1}{(1-z)^a} \ ,$$

y haciendo los cambios $a = -m$ y $z = -x/y$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m)_n}{n!} \frac{-x^n}{y^n} = \frac{1}{(1+(x/y))^{-m}} = \frac{(y+x)^m}{y^m} \ ,$$

se sigue,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} y^{m-n} x^n = (y+x)^m \ , \quad m = 0,1,2\dots \ , \tag{1.4}$$

donde $\binom{m}{n}$ denota los coeficientes binomiales definidos por

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}, \qquad \text{si } m \geq n,$$

y 0 si $m < n$, por lo que el número de sumandos en (1.4) pasa a ser finito, y obtenemos el Teorema del binomio clásico. Aquí x e y pueden intercambiarse, luego

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \ . \tag{1.5}$$

Este teorema tiene también su q-análogo, que surge de considerar el cambio no conmutativo $yx = qxy$ de las variables x e y, donde $q \in \mathbb{R}$. Si en (1.5) cambiamos y por xy y aplicamos dicho cambio sobre la última potencia de manera recursiva, es decir, $yx^k = x^k q^k y$, obtenemos

$$\begin{aligned}(x+xy)^n =&(x+xy)\cdots(x+xy)(x+xy)(x+xy)\\ =&x(1+y)\cdots x(1+y)x(1+y)x(1+y)\\ =&x(1+y)\cdots x(1+y)x^2(1+qy)(1+y)\\ =&x(1+y)\cdots x^3(1+q^2y)(1+qy)(1+y)\\ =&x^n(1+y)(1+qy)\cdots(1+q^{n-1}y).\end{aligned}$$

Por inducción se puede comprobar que

$$(1+y)\cdots(1+q^{n-1}y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q q^{k(k-1)/2} y^k \ , \tag{1.6}$$

donde

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}}, \quad 1 \leq k < n \ . \tag{1.7}$$

es el denominado coeficiente binomial gaussiano. Dicho coeficiente es el q-análogo del coeficiente binomial $\binom{n}{k}$.

Si en la expresión (1.6) hacemos el cambio $y \to y/x$ nos queda

$$\frac{(x+y)\cdots(x+q^{n-1}y)}{x^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q q^{k(k-1)/2} (y/x)^k \ .$$

De esta forma llegamos al q-análogo del Teorema del binomio (1.5)

$$(x+y)\cdots(x+q^{n-1}y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q q^{k(k-1)/2} x^{n-k} y^k \ . \tag{1.8}$$

Se puede comprobar que para ir de (1.8) a (1.5) basta tomar límite $q \to 1$ en el primero, y lo mismo ocurre con los coeficientes binomiales

$$\lim_{q\to 1} \binom{n}{k}_q = \binom{n}{k} .$$

Para probar este último límite de forma sencilla primero necesitaremos algunas definiciones previas.

Definición 1.7 (q-número) *Dado $x \in \mathbb{C}$, llamaremos q-número x y lo denotaremos por $[x]_q$ al número definido por*

$$[x]_q = \frac{1-q^x}{1-q}, \qquad q \in \mathbb{R} .$$

Aunque la q puede tomar cualquier valor real, nosotros nos centraremos en los $q \in (0,1)$. Nótese que

$$\lim_{q\to 1}[x]_q = x.$$

Definición 1.8 (q-factorial) *Definiremos el q-factorial de un número entero positivo n mediante la expresión*

$$[n]_q! = [1]_q[2]_q \cdots [n]_q. \tag{1.9}$$

De la definición 1.7 se sigue

$$[n]_q! = \frac{1-q}{1-q}\frac{1-q^2}{1-q}\cdots\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n} .$$

Además, como $(1-q^k)/(1-q) = (1+q+q^2+...+q^{k-1})$, para todo $k \geq 1$, se tiene que

$$[n]_q! = 1(1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+q^2+...+q^{n-1}).$$

□

Observamos que $\lim_{q\to 1}[n]_q! = n!$. Nótese además que de la definición 1.8 se sigue que

$$\binom{n}{k}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![(n-k)]_q!},$$

de donde obtenemos que

$$\lim_{q\to 1} \binom{n}{k}_q = \binom{n}{k} .$$

El Teorema del binomio del Capítulo 2 consta de una serie infinita, lo que requerirá la intervención del símbolo q-Pochhammer infinito: tomando $n \to \infty$ en $(a;q)_n$ se tiene

$$(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k), \quad q \in (0,1)\ . \tag{1.10}$$

Tenemos que probar que el producto infinito anterior es convergente si $|q|<1$ para cualquier $a \in \mathbb{C}$. Necesitaremos los siguientes resultados (para más detalle ver [22, §29, página 221]).

Proposición 1.9 *$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge absolutamente si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$. En este caso, $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ es convergente.*

Vamos a probar la convergencia para (1.10)

$$(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k)\ , \quad q \in (0,1)\ .$$

Hay que probar que

$$\sum_{k=0}^{\infty}|-aq^k|<\infty\ .$$

Esta suma es igual a

$$|a|\sum_{k=0}^{\infty}q^k$$

y sabemos que $|q|<1$, por tanto se trata de una serie geométrica convergente (1.2)

$$\frac{|a|}{1-q}<\infty,$$

luego nuestro producto $(a;q)_\infty$ converge. □

Proposición 1.10 *Si $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ es convergente, entonces $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)^{-1}$ también y se tiene $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)^{-1}=[\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)]^{-1}$.*

Proposición 1.11 *Si $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ y $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ son convergentes, entonces $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)(1+b_n)$ también lo es y además $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)(1+b_n)=[\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)][\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)]$.*

Probemos a continuación algunas identidades útiles que involucran a los q-análogos de los símbolos Pochhammer (1.3).

1.
$$(a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty} \qquad \forall n \geq 0\ . \tag{1.11}$$

Demostración.
$$\begin{aligned}(a;q)_n =& \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k) = (1-a)\cdots(1-aq^{n-1})\\ =& \frac{(1-a)\cdots(1-aq^{n-1})(1-aq^n)(1-aq^{n+1})\cdots}{(1-aq^n)(1-aq^{n+1})\cdots}\\ =& \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}\ .\end{aligned}$$

□

2.
$$(q^{-n};q)_k = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k}}(-1)^k q^{\binom{k}{2}} q^{-nk}. \tag{1.12}$$

Demostración.
$$\begin{aligned}&(q^{-n};q)_k = (1-q^{-n})(1-q^{-n+1})\cdots(1-q^{-n+k-1})\\ =& q^{-n}(q^n-1)q^{-n}(q^n-q)\cdots q^{-n}(q^n-q^{k-1})\\ =& q^{-kn}(-1)^k(1-q^n)(q-q^n)\cdots(q^{k-1}-q^n)\\ =& q^{-kn}q^{1+2+\ldots+(k-1)}(-1)^k(1-q^{n-(k-1)})\cdots(1-q^{n-1})(1-q^n)\\ =& q^{-kn}q^{k(k-1)/2}(-1)^k\left(1-\frac{q^nq}{q^k}\right)\cdots\left(1-\frac{q^nq^k}{q^k}\right)\\ =& q^{-kn}q^{\binom{k}{2}}(-1)^k(q^{n-k};q)_k.\end{aligned}$$

Veamos $(q;q)_n/(q;q)_{n-k} = (q^{n-k};q)_k$:
$$\begin{aligned}\frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k}} &= \frac{(1-q)\cdots(1-q^{n-k-1})(1-q^{n-k})(1-q^{n-k+1})\cdots(1-q^{n-1})}{(1-q)\cdots(1-q^{n-k-1})}\\ &= (1-q^{n-k})(1-q^{n-k+1})\cdots(1-q^{n-1}) = (q^{n-k};q)_k\ .\end{aligned}$$

□

3.
$$(aq^{-n};q)_n = (q/a;q)_n\left(-\frac{a}{q}\right)^n q^{-\binom{n}{2}}. \tag{1.13}$$

Demostración.
$$\begin{aligned}&(aq^{-n};q)_n = (1-a/q^n)\cdots(1-a/q)\\ =&(-a)^n(1/q^n-1/a)\cdots(1/q-1/a)\\ =&(-a)^n\frac{(1-q^n/a)\cdots(1-q/a)}{q^n\cdots q}\\ =&(-a)^n\frac{(q/a;q)_n}{q^{n(n+1)/2}} = (-a)^n(q/a;q)_n q^{-n(n+1)/2}\ .\end{aligned}$$

Escribiendo el exponente de q como $\frac{-n^2-n}{2} = \frac{-n(n-1)}{2} - n$, de nuestra expresión se sigue

$$(-a)^n (q/a;q)_n q^{-n(n-1)/2} q^{-n} = (q/a;q)_n \left(-\frac{a}{q}\right)^n q^{-\binom{n}{2}}.$$

□

Finalmente, necesitaremos la siguiente definición de q-derivada introducida por Jackson en [20]. Dicho operador se define como la pendiente de la recta secante, y se utiliza en una de las pruebas del Teorema del binomio.

Definición 1.12 *El operador q-derivada se define como:*

$$\Delta_q(f(x)) = \frac{f(x) - f(qx)}{x - qx} = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}. \tag{1.14}$$

Capítulo 2

El Teorema del binomio

En este capítulo estudiaremos el Teorema del q-Binomio (en adelante Teorema del binomio), que establece una relación entre una serie infinita y su expresión en términos de productos infinitos. La serie a considerar puede sumarse, es decir, es convergente, al igual que el producto infinito. Veamos que el producto $(x;q)_\infty$ es convergente.

$$(x;q)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty}(1-xq^n) \ . \tag{2.1}$$

Aplicamos (1.9) para $a_n = -xq^n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |-xq^n| = |x| \sum_{n=0}^{\infty} |q|^n$$

que por (1.1) es igual a

$$\frac{|x|}{1-|q|}$$

si y sólo si $|q| < 1$. Esta condición es una hipótesis necesaria para el Teorema del binomio. Además, por (1.10) y (1.11) tenemos que el cociente

$$\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

es convergente también, para cierto a fijo.

Ahora probamos la convergencia de la serie. Consideramos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^k \ . \tag{2.2}$$

Aplicamos el criterio de la raíz de Cauchy 1.2

$$\left(\left| \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} \right| |x^k| \right)^{1/k} \xrightarrow{k\to\infty} |x| \ .$$

Esto es porque $a_k := |(a;q)_k/(q;q)_k| > 0$ es un cociente de productos finitos bien definido, donde cada producto tiene su límite, luego a_k está acotado,

$$0 < m < a_k < M$$

por lo que su raíz k-ésima tiende a 1:

$$m^{1/k} < a_k^{1/k} < M^{1/k} \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad \Rightarrow a_k^{1/k} \to 1 \ ,$$

pues $M^{1/k}$ y $m^{1/k}$ tienden a 1 si $k \to \infty$. El criterio de la raíz nos dice que la serie es absolutamente convergente si el límite obtenido, $|x|$, es menor estrictamente que 1, así que esta será otra hipótesis para el Teorema del binomio, que enunciamos a continuación.

Teorema 2.1 (del binomio) *Para* $|x| < 1$, $|q| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^k = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}, \tag{2.3}$$

donde $(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k)$.

Las pruebas dadas a continuación se incluyen en [5, capítulo 10, páginas 488-490].

Primera prueba. Sea

$$f(x,a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^k \ . \tag{2.4}$$

Aplicamos el operador q-diferencia Δ_q (1.14) en ambos lados de la igualdad:

$$\frac{f(x,a) - f(qx,a)}{(1-q)x} = \frac{1}{(1-q)x}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} q^k x^k\right),$$

que equivale a

$$\frac{f(x,a) - f(qx,a)}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^{k-1}(1-q^k).$$

Desarrollamos el segundo miembro:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{k-1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)} x^{k-1}(1-q^k)$$
$$= (1-a)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_{k-1}} x^{k-1} = (1-a)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k} x^k.$$

Así,

$$\frac{f(x,a)-f(qx,a)}{x} = (1-a)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k}x^k,$$

y, usando la definición (2.4), obtenemos

$$f(x,a)-f(qx,a) = x(1-a)f(x,aq). \tag{2.5}$$

Ahora consideramos

$$\begin{aligned} f(x,a)-f(x,aq) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}x^k - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k}x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(q;q)_k}((a;q)_k-(aq;q)_k). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Simplificamos $(a;q)_k-(aq;q)_k$:

$$\begin{aligned} (a;q)_k-(aq;q)_k &= \prod_{j=0}^{k-1}(1-aq^j) - \prod_{j=1}^{k}(1-aq^j) \\ &= (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{k-1}) - (1-aq)(1-aq^2)\cdots(1-aq^k) \\ &= \prod_{j=1}^{k-1}(1-aq^j)[-a(1-q^k)] = (aq;q)_{k-1}[-a(1-q^k)]. \end{aligned}$$

Nos queda

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(q;q)_k}((aq;q)_{k-1}[-a(1-q^k)]) \\ =&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(1-q)\cdots(1-q^k)}((aq;q)_{k-1}[-a(1-q^k)]) \\ =&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_{k-1}}x^{k-1}x(-a) = (-a)xf(x,aq). \end{aligned}$$

Finalmente, de (2.6) obtenemos

$$f(x,a)-f(x,aq) = (-a)xf(x,aq),$$

es decir,

$$f(x,a) = f(x,aq)(1-ax). \tag{2.7}$$

Ahora eliminamos el término $f(x,aq)$ de (2.5) y de (2.7). Para ello, despejamos e igualamos ambas ecuaciones entre sí,

$$f(x,aq) = \frac{f(x,a)-f(qx,a)}{(1-a)x} = \frac{f(x,a)}{(1-ax)},$$

pasamos multiplicando los denominadores al otro miembro

$$f(x,a)(1-a)x = (f(x,a) - f(qx,a))(1-ax)$$

y despejamos $f(x,a)$

$$f(x,a) = \frac{1-ax}{1-x} f(qx,a).$$

Iteramos esta relación una vez, es decir, desarrollamos la expresión de $f(qx,a)$

$$f(x,a) = \frac{1-ax}{1-x}\frac{1-aqx}{1-qx} f(q^2x,a) = \frac{1-ax}{1-x} f(qx,a).$$

Iteramos por segunda vez

$$f(x,a) = \frac{1-ax}{1-x}\frac{1-aqx}{1-qx}\frac{1-aq^2x}{1-q^2x} f(q^3x,a) = \frac{1-ax}{1-x}\frac{1-aqx}{1-qx} f(q^2x,a).$$

Iteramos m veces

$$\begin{aligned}\frac{(1-ax)\cdots(1-aq^{m-1}x)}{(1-x)\cdots(1-q^{m-1}x)} f(q^m x,a) &= \frac{\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1}(1-axq^j)}{\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1}(1-xq^j)} f(q^m x,a) \\ &= \frac{(ax;q)_m}{(x;q)_m} f(q^m x,a).\end{aligned}$$

Sabemos que $|q|<1$ y que la serie es uniformemente convergente, así que podemos tomar límite $m\to\infty$

$$\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} f(0,a)\ ,$$

donde, usando (2.4), $f(0,a)=1$, y por tanto

$$f(x,a) = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty},$$

como queríamos probar. □

Segunda prueba. Sea el producto infinito

$$F(x) = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

que, por (1.9), (1.10) y (1.11), es uniforme y absolutamente convergente para a y q fijas y $|x|<1$. $F(x)$ representa una función analítica en $|x|<1$ y podemos considerar su serie de potencias

$$F(x) = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n. \tag{2.8}$$

Tenemos

$$F(x)=\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}=\frac{\prod_{j=0}^{\infty}(1-axq^j)}{\prod_{j=0}^{\infty}(1-xq^j)}=\frac{1-ax}{1-x}\frac{\prod_{j=1}^{\infty}(1-axq^j)}{\prod_{j=1}^{\infty}(1-xq^j)}$$
$$=\frac{1-ax}{1-x}\frac{(axq;q)_\infty}{(xq;q)_\infty}=\frac{1-ax}{1-x}F(qx).$$

Aplicando la definición (2.8), se sigue

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n=(1-ax)\sum_{n=0}^{\infty}A_nq^nx^n.$$

A continuación desarrollamos ambos miembros de la suma anterior

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}A_nq^nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}A_nq^nax^{n+1}\ ,$$

ajustamos los índices de los sumatorios

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}A_{n-1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}A_nq^nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}A_{n-1}q^{n-1}ax^n\ ,$$

agrupamos los coeficientes de x^n

$$A_n-A_{n-1}-A_nq^n+A_{n-1}q^{n-1}a=0$$

y despejamos A_n

$$A_n=\frac{1-aq^{n-1}}{1-q^n}A_{n-1}\ .$$

Sea ahora

$$f(n)=\frac{1-aq^{n-1}}{1-q^n}. \tag{2.9}$$

Tenemos entonces que

$$A_n=f(n)A_{n-1}\to\frac{A_n}{A_{n-1}}=f(n),$$

por tanto,

$$\frac{A_n}{A_{n-1}}\frac{A_{n-1}}{A_{n-2}}\frac{A_{n-2}}{A_{n-3}}\cdots\frac{A_1}{A_0}=\frac{A_n}{A_0},$$

esto es

$$f(n)f(n-1)f(n-2)\cdots f(1)=\frac{A_n}{A_0}$$

y despejando A_n queda

$$\begin{aligned} A_n &= A_0 f(n) \cdots f(1) \\ &= A_0 \frac{1-aq^{n-1}}{1-q^n} \cdots \frac{1-a}{1-q} \\ &= A_0 \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}. \end{aligned}$$

Nótese en (2.8) que $F(0) = 1$, luego $A_0 = 1$ y, por tanto,

$$A_n = \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}.$$

□

El Teorema del binomio fue enunciado de manera independiente por varios matemáticos, entre ellos Cauchy (1843), Heine (1847) y Gauss (1866). De hecho, al parecer, el teorema se enunció inicialmente de manera similar al Corolario 2.4 (ver la ecuación (2.14)) publicado originalmente por Rothe en 1811.

2.1. Aplicaciones

Observamos que la expresión equivalente a (1.6) dada por

$$\prod_{k=1}^{n}(1+yq^k) = (1+yq)\cdots(1+q^n y) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}_q q^{m(m+1)/2} y^m \ ,$$

llamada Teorema del binomio de Cauchy, es un caso especial del Teorema del binomio 2.1. El producto $\prod_{k=1}^{n}(1+yq^k)$ es por definición $(-yq;q)_n$, y por la identidad (1.11) es igual a

$$\frac{(-yq;q)_\infty}{(-yq^{n+1};q)_\infty} \ ,$$

que es el segundo miembro de (2.3) para $a = q^{-n}$ y $x = -yq^{n+1}$.

A continuación probaremos algunos corolarios bien conocidos del Teorema del binomio 2.1, enunciados por Rothe y Euler. Este último los publicó en [13, capítulo 16] en 1748.

Corolario 2.2 (Euler, 1748)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q;q)_k} x^k = \frac{1}{(x;q)_\infty}, \quad |x| < 1, \ |q| < 1. \tag{2.10}$$

Demostración. Se toma $a = 0$ en (2.3) y se usa que

$$(0; q)_k = 1, \ (0; q)_\infty = 1.$$

□

Corolario 2.3 (Euler, 1748)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{\binom{k}{2}}}{(q; q)_k} x^k = (x; q)_\infty, \quad |q| < 1, \ |x| < \infty. \tag{2.11}$$

Demostración. Se reemplaza a por $1/a$ y x por ax en (2.3):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/a; q)_k}{(q; q)_k} a^k x^k \ , \quad |ax| < 1. \tag{2.12}$$

Ahora tomamos límite cuando $a \to 0$:

$$\begin{aligned} &\lim_{a\to 0}(1/a; q)_k a^k = \lim_{a\to 0}(1 - 1/a)(1 - q/a) \cdots (1 - q^{k-1}/a)a^k \\ =&\lim_{a\to 0}(-1)^k(1/a - 1)q(1/a - 1/q) \cdots q^{k-1}(1/a - 1/q^{k-1})a^k \ , \end{aligned}$$

sumamos las potencias de q usando que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ , \tag{2.13}$$

y sacamos $1/a$ de k factores, y así se cancelan con a^k del numerador:

$$\begin{aligned} &\lim_{a\to 0}(-1)^k q^{1+\cdots+(k-1)}(1/a)(1 - a)(1/a)(1 - a/q) \cdots (1/a)(1 - a/q^{k-1})a^k \\ =&\lim_{a\to 0}(-1)^k q^{k(k-1)/2}(1 - a)(1 - a/q) \cdots (1 - a/q^{k-1}) = (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \ . \end{aligned}$$

Tenemos así el primer miembro de la igualdad (2.11) para todo $|x| < \infty$.

Veamos el segundo. Tras hacer el mismo reemplazo en (2.3) obtenemos

$$\frac{(x; q)_\infty}{(ax; q)_\infty}.$$

Aplicando límite $a \to 0$,

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{(ax; q)_\infty} = 1.$$

En (2.12) hay que justificar que la suma del límite es el límite de la suma. Para ello basta probar que la serie es uniformemente convergente. Usaremos el Criterio Mayorante de Weierstrass 1.6.

Tomamos un M tal que $|q| \leq M < 1$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $0 < 2\varepsilon < 1-M$. Con $|a| \leq \varepsilon$ fijo. Sea N_0 el único entero positivo tal que

$$|a| + M^k \geq 2\varepsilon,\ \ 0 \leq k < N_0,$$

y

$$|a| + M^{N_0} < 2\varepsilon.$$

Entonces para $|a| \leq \varepsilon$ y $n \geq N_0$ tenemos

$$\left|\frac{(1/a;q)_n}{(q;q)_n}a^n\right| = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(1-q^k/|a|)}{\prod_{k=1}^{n}(1-q^k)}|a|^n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(|a|-q^k)}{\prod_{k=1}^{n}(1-q^k)}\ .$$

La última igualdad se debe a que si hacemos $|a|$ común denominador $(|a|-q^k)/|a|$ y aplicamos el producto, los $|a|^n$ se cancelan. Ahora vamos a acotar superiormente por

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(|a|+M^k)}{(1-M)^n} < \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(|a|+M^{N_0})}{(1-M)^n} \\ &< \frac{\prod_{k=0}^{n-1}2\varepsilon}{(1-M)^n} = \frac{(2\varepsilon)^n}{(1-M)^n} = \left(\frac{2\varepsilon}{1-M}\right)^n \end{aligned}$$

y dado que $0 < 2\varepsilon < 1-M$, usando el criterio de la raíz 1.2 se demuestra que

$$\sum_{n=N_0}^{\infty}\left(\frac{2\varepsilon}{1-M}\right)^n < \infty\ .$$

Aplicando (1.6), tenemos que nuestra serie (2.12) es uniformemente convergente para $|a| \leq \varepsilon$ y podemos tomar límite dentro de la suma. □

Corolario 2.4 (Rothe, 1811)

$$\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}_q(-1)^k q^{\binom{k}{2}}x^k = (x;q)_N = (1-x)\cdots(1-xq^{N-1}). \tag{2.14}$$

Demostración. Se toma $a = q^{-N}$, $x = yq^N$ en (2.3),

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{(q^{-N};q)_k}{(q;q)_k}q^{kN}y^k = \frac{(y;q)_\infty}{(yq^N;q)_\infty}.$$

Observamos que el sumatorio ahora es finito, esto es porque para los términos $k \geq N+j$, $j = 1, 2, \ldots$, el producto $(q^{-N}; q)_k$ se hace 0:

$$(q^{-N}; q)_{N+j} = (1 - q^{-N})(1 - q^{-N+1}) \cdots \underbrace{(1 - q^{-N+N})}_{=0} \cdots (1 - q^{-N+N+j-1}) = 0.$$

Por (1.12) sabemos $(q^{-N}; q)_k = (-1)^k q^{\binom{k}{2}} q^{-Nk} (q; q)_N / (q; q)_{N-k}$. Por otro lado, por (1.11) tenemos

$$\frac{(y; q)_\infty}{(yq^N; q)_\infty} = (y; q)_N.$$

Así, obtenemos

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k q^{\binom{k}{2}} q^{-Nk} (q; q)_N / (q; q)_{N-k}}{(q; q)_k} q^{kN} y^k = (y; q)_N. \tag{2.15}$$

Aplicando (1.7), llegamos a

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k}_q (-1)^k q^{\binom{k}{2}} y^k = (y; q)_N.$$

Basta renombrar y como x y obtenemos (2.14). $\square$

Capítulo 3

Producto triple de Jacobi

3.1. Teorema de la identidad del producto triple de Jacobi

Carl Gustav Jacob Jacobi probó este teorema en 1829 en su trabajo sobre las funciones elípticas *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum* [21]. La demostración se basa en el Teorema del número pentagonal, enunciado por Leonhard Euler en 1775, que da una equivalencia entre la función de Euler $\phi(x)$ definida por

$$\phi(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n),$$

y su representación como serie. Dicho teorema se formula como[1]

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k x^{k(3k-1)/2}. \tag{3.1}$$

El producto triple expresa el producto $(x; q)_\infty (q/x; q)_\infty (q; q)_\infty$ como una serie de Laurent en $0 < |x| < \infty$. La primera demostración parte del Corolario 2.4 de Rothe; esta era conocida por Gauss (1866) y Cauchy (1843) [5, capítulo 10, página 497]. La segunda prueba parte del Corolario 2.3 de Euler y la desarrolló George E. Andrews [23, capítulo 6, página 44].

Teorema 3.1 (Producto triple de Jacobi) *Para* $|q| < 1$ *y* $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$(x; q)_\infty (q/x; q)_\infty (q; q)_\infty = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} x^k. \tag{3.2}$$

[1]Este teorema es la expresión inversa de la función generatriz de particiones (1.1).

Primera prueba. Tomamos $N = 2n$ en (2.14) y obtenemos

$$(x;q)_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}_q (-1)^k q^{\binom{k}{2}} x^k,$$

o lo que es lo mismo,

$$(x;q)_{2n} = \sum_{k=-n}^{n} \binom{2n}{n+k}_q (-1)^{k+n} q^{(k+n)(k+n-1)/2} x^{k+n}. \tag{3.3}$$

Ahora cambiamos x por xq^{-n} y reescribimos $(xq^{-n};q)_{2n}$ como

$$\begin{aligned}(xq^{-n};q)_{2n} &= (1-xq^{-n})\cdots(1-xq^{-1})(1-x)(1-xq)\cdots(1-xq^{n-1})\\ &= (xq^{-n};q)_n(x;q)_n.\end{aligned}$$

Desarrollamos $(xq^{-n};q)_n$:

$$\begin{aligned}(xq^{-n};q)_n &= \prod_{j=0}^{n-1}(1-xq^{-n}q^j) = (1-xq^{-n})(1-xq^{-n+1})\cdots(1-xq^{-1})\\ &= x(1/x-q^{-n})x(1/x-q^{-n+1})\cdots x(1/x-q^{-1})\\ &= x^nq^{-n}(1/(xq^{-n})-1)q^{-n}(1/(xq^{-n})-q)\cdots q^{-n}(1/(xq^{-n})-q^{n-1})\\ &= x^nq^{-n^2}(q^n/x-1)(q^n/x-q)\cdots(q^n/x-q^{n-1})\\ &= x^nq^{-n^2}(-1)^n(1-q^n/x)(q-q^n/x)\cdots(q^{n-1}-q^n/x)\\ &= x^nq^{-n^2}(-1)^n(1-q^n/x)q(1-q^{n-1}/x)\cdots q^{n-1}(1-q/x).\end{aligned}$$

Usando (2.13) obtenemos

$$q^{1+2+\cdots+(n-1)} = q^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

de donde se sigue

$$\begin{gathered} x^nq^{-n^2}(-1)^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}(1-q^n/x)(1-q^{n-1}/x)\cdots(1-q/x) = \\ x^nq^{-n^2}(-1)^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{j=1}^{n}(1-q^j/x) = \\ x^nq^{-n^2}(-1)^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}(q/x;q)_n = (xq^{-n};q)_n. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Hemos llegado a

$$(xq^{-n};q)_{2n} = x^nq^{-n^2}(-1)^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}(q/x;q)_n(x;q)_n.$$

Vamos a igualar esta expresión a (3.3) y despejamos $(q/x;q)_n(x;q)_n$. Pero antes debemos observar que estamos igualando $(x;q)_{2n}$ con $(xq^{-n};q)_{2n}$, por tanto hay que ajustar primero el sumatorio:

$$(xq^{-n};q)_{2n} = \sum_{k=-n}^{n} \binom{2n}{n+k}_q (-1)^{k+n} q^{(k+n)(k+n-1)/2} x^{k+n} q^{-n(k+n)}.$$

Ya podemos igualar y despejar:

$$(q/x;q)_n(x;q)_n =$$

$$\sum_{k=-n}^{n} \binom{2n}{n+k}_q (-1)^k x^k q^{(k+n)(k+n-1)/2} q^{-n(k+n)} q^{n^2} q^{-\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Simplificando las potencias de q queda $k(k-1)/2$ como exponente.

Por otro lado, por (1.7)

$$\binom{2n}{n+k}_q = \frac{(q;q)_{2n}}{(q;q)_{n+k}(q;q)_{n-k}} .$$

Así, nos queda

$$(q/x;q)_n(x;q)_n = \sum_{k=-n}^{n} \frac{(q;q)_{2n}}{(q;q)_{n+k}(q;q)_{n-k}} (-1)^k x^k q^{k(k-1)/2} .$$

Cuando $n \to \infty$

$$(q/x;q)_\infty(x;q)_\infty = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(q;q)_\infty}{(q;q)_\infty(q;q)_\infty} (-1)^k x^k q^{k(k-1)/2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k q^{\binom{k}{2}}}{(q;q)_\infty}.$$

El límite lo podemos justificar gracias al Teorema de Tannery 1.3. □

Segunda prueba. En (3.2) tomamos x como zq y q como q^2

$$\begin{aligned}
(zq;q^2)_\infty(q/z;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k (q^{\binom{k}{2}})^2 z^k q^k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-z)^k (q^{k(k-1)/2})^2 q^k \qquad (3.5)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-z)^k q^{k^2}.
\end{aligned}$$

Aplicando el Corolario 2.3, desarrollamos $(zq;q^2)_\infty$:

$$(zq;q^2)_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-zq)^k q^{k^2-k}}{(q^2;q^2)_k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k q^{k^2} \frac{1}{(q^2;q^2)_k}. \qquad (3.6)$$

De aquí, el término

$$\frac{1}{(q^2;q^2)_k} = \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots(1-q^{2+2(k-1)})}$$

podemos reescribirlo como

$$\frac{(q^{2+2k};q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} = \frac{(1-q^{2+2k})(1-q^{4+2k})(1-q^{6+2k})\cdots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots}.$$

Veamos que esto es cierto:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q^2;q^2)_k} = 1 + \frac{1}{(1-q^2)} + \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)} + \ldots$$

es lo mismo que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{2+2k};q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} =& \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots} + \frac{(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\cdots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots} + \\ & \frac{(1-q^6)(1-q^8)(1-q^{10})\cdots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots} + \ldots \\ =& 1 + \frac{1}{(1-q^2)} + \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)} + \ldots\end{aligned}$$

Además, se puede observar que para $k<0$ el numerador $(q^{2+2k};q^2)_\infty$ se hace 0, por lo que podemos tomar el sumatorio desde $k=-\infty$. Se sigue de (3.6)

$$\frac{1}{(q^2;q^2)_\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-z)^k q^{k^2} (q^{2+2k};q^2)_\infty.$$

Ahora vamos a volver a aplicar (2.11) a $(q^{2+2k};q^2)_\infty$:

$$\frac{1}{(q^2;q^2)_\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-z)^k q^{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-q^{2+2k})^m q^{m^2-m}}{(q^2;q^2)_m}. \tag{3.7}$$

Como $(q^{2+2k};q^2)_\infty$ depende de k, al hacer el cambio se ha usado m como índice. Vamos a agrupar las q. Sumamos los exponentes

$$k^2 + 2m + 2km + m^2 - m = (k+m)^2 + m,$$

agrupamos z y q

$$(-z)^k q^m q^{(k+m)^2}.$$

Dado que $q^m = (q/z)^m z^m$, queda

$$(-z)^{k+m} (q/z)^m q^{(k+m)^2}$$

y de (3.7) se sigue

$$\frac{1}{(q^2;q^2)_\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(q/z)^m}{(q^2;q^2)_m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-z)^{k+m} q^{(k+m)^2}. \tag{3.8}$$

Dado que para todo a_k

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+m}$$

podemos escribir (3.8) como

$$\frac{1}{(q^2;q^2)_\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(q/z)^m}{(q^2;q^2)_m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-z)^k q^{k^2}.$$

Aplicando el Corolario de Euler 2.2 al sumatorio con índice m, para $|q/z| < 1$, se obtiene

$$\frac{1}{(q^2;q^2)_\infty} \frac{1}{(q/z;q^2)_\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-z)^k q^{k^2}$$

que es igual a $(zq;q^2)_\infty$ por (3.6). Llegamos así a (3.5) que equivale a probar (3.2). Por tanto, (3.5) es cierta para $|q/z| < 1$ y, por prolongación analítica, para todo $z \neq 0$. $\square$

3.2. Aplicaciones

Veamos ahora algunos corolarios del Teorema de la identidad del producto triple.

Corolario 3.2 (Gauss, 1866)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2 \ . \tag{3.9}$$

Demostración. En (3.2) tomamos x como $-qx$ y q como q^2,

$$(-qx;q^2)_\infty(-q/x;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} (-qx)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} x^k \ .$$

Sea $x = 1$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} &= (-q;q^2)_\infty(-q;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty \\ &= (1+q)^2(1+q^3)^2 \cdots (1-q^2)(1-q^4)\cdots \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} (1+q^{2k-1})^2(1-q^{2k}) \ . \end{aligned}$$

$\square$

Corolario 3.3 (Gauss, 1808)

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2} = \prod_{n=1}^{\infty} [(1-q^{2n})/(1-q^{2n-1})]. \tag{3.10}$$

Demostración. En (3.2) reescribimos x como $-qx$,

$$\begin{aligned}(-qx;q)_\infty(-1/x;q)_\infty(q;q)_\infty &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\binom{n}{2}}(-1)^n q^n x^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n+1)/2} x^n.\end{aligned}$$

Vamos a reescribir la suma infinita anterior de la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2}(x^{-n-1}+x^n).$$

Por otra parte, desarrollando $(-qx;q)_\infty(-1/x;q)_\infty(q;q)_\infty$:

$$\begin{aligned}&\prod_{n=1}^{\infty}(1+xq^n)\prod_{n=0}^{\infty}(1+q^n/x)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\\ =&\prod_{n=1}^{\infty}(1+xq^n)(1+1/x)\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n/x)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\\ =&(1+1/x)\prod_{n=1}^{\infty}(1+xq^n)(1+q^n/x)(1-q^n),\end{aligned}$$

obtenemos la igualdad

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2}(x^{-n-1}+x^n) = (1+1/x)\prod_{n=1}^{\infty}(1+xq^n)(1+q^n/x)(1-q^n). \tag{3.11}$$

Sea $x=1$, entonces $(x^{-n-1}+x^n)$ y $(1+1/x)$ se cancelan en (3.11) y queda

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2} &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+q^n)(1+q^n)\\ &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^n)\\ &= \prod_{n=1}^{\infty}[(1-q^{2n})^2/(1-q^n)]\ ;\end{aligned}$$

desarrollamos parte de este producto:

$$\begin{aligned}
&\left[\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\right]\left[\frac{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n})}\right]\\
=&\left[\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\right]\left[\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots}\right]\\
=&\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n})}{(1-q^{2n-1})}\ ,
\end{aligned}$$

y probamos así (3.10). □

Nota: La expresión (3.10) aparece con una errata en [5, capítulo 10, página 500] ya que el denominador del producto viene dado como $(1-q^{2n+1})$. Puede verse la expresión correcta en el libro [11, capítulo 1, página 11].

Jacobi incluyó el siguiente corolario en su libro *Fundamenta Nova* [21].

Corolario 3.4 (Jacobi, 1829)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)q^{n(n+1)/2}=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^3. \tag{3.12}$$

Demostración. Se prosigue con la demostración anterior. Dividimos (3.11) por $1+1/x$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+1/x}\sum_{n=0}^{\infty}q^{n(n+1)/2}(x^{-n-1}+x^n)&=\prod_{n=1}^{\infty}(1+xq^n)(1+q^n/x)(1-q^n)\\
&=(-xq;q)_\infty(-q/x;q)_\infty(q;q)_\infty\ ,
\end{aligned}$$

y tomamos límite $x\to-1$. Como el denominador se anula, aplicamos la regla de l'Hôpital en el primer miembro de la igualdad:

$$\begin{aligned}
&-x^2\sum_{n=0}^{\infty}q^{n(n+1)/2}[(-n-1)x^{-n-2}+nx^{n-1}]\\
&=(-xq;q)_\infty(-q/x;q)_\infty(q;q)_\infty\ ,
\end{aligned}$$

y volvemos a tomar límite $x\to-1$:

$$\begin{aligned}
&-\sum_{n=0}^{\infty}q^{n(n+1)/2}[(-n-1)(-1)^{-n-2}+n(-1)^{n-1}]\\
&=(q;q)_\infty(q;q)_\infty(q;q)_\infty\ .
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Simplificamos sacando factor común:

$$\begin{aligned}
&-\left[(-n-1)(-1)^{-n-2}+n(-1)^{n-1}\right]\\
=&-(-1)^n\left[(-n-1)(-1)^{-2n-2}+n(-1)^{-1}\right]\\
=&-(-1)^n(-2n-1)=(-1)^n(2n+1).
\end{aligned}$$

Por otro lado usamos que

$$(q;q)_\infty(q;q)_\infty(q;q)_\infty=(q;q)^3{}_\infty\ .$$

Finalmente, de (3.13) obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)q^{n(n+1)/2}=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^3\ .$$

□

3.3. Funciones theta de Ramanujan

En esta sección veremos que el producto triple de Jacobi se puede escribir en términos de la función theta de Ramanujan. La función theta de Ramanujan aparece en el capítulo 16 del segundo cuaderno de notas de Ramanujan, en la entrada 18 y siguientes [8, página 34 y siguientes].

Definición 3.5 *La función general theta de Ramanujan se define como*

$$f(a,b):=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{n(n+1)/2}b^{n(n-1)/2}\ . \tag{3.14}$$

Si escribimos $f(a,b)$ en términos de la expresión del producto triple de Jacobi (3.2), sería

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{n(n+1)/2}b^{n(n-1)/2}=&\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{\binom{n}{2}}a^nb^{\binom{n}{2}}\\
=&(-a;ab)_\infty(-b;ab)_\infty(ab;ab)_\infty\ ,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

donde a y b de (3.14) son, respectivamente, $-x$ y $-q/x$ de (3.2). La fórmula anterior es la entrada 19 del citado segundo cuaderno de notas de Ramanujan.

Ramanujan definió tres casos especiales de funciones theta:

Definición 3.6

$$\phi(q) := f(q,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \ , \tag{3.16}$$

$$\psi(q) := f(q,q^3) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n^2-n} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2} \ , \tag{3.17}$$

$$f(-q) := f(-q,-q^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n-1)/2} \ , \tag{3.18}$$

que son expresiones de enunciados previos. (3.16), (3.17) y (3.18) se corresponden, respectivamente, con los Corolarios de la identidad del producto triple 3.2 y 3.3, y con la expresión (3.1) del Teorema del número pentagonal de Euler. Las demostraciones que siguen de las funciones theta se pueden encontrar en [11, 23].

Vamos a empezar probando la segunda igualdad de (3.17). Tenemos, usando (3.14),

$$\begin{aligned} f(q,q^3) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n^2-n} &= 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} q^{2n^2-n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n^2-n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n^2+n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n^2-n} \ . \end{aligned} \tag{3.19}$$

Por otro lado, sea

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n(n+1)/2} \ ,$$

separamos el sumatorio para n par e impar

$$1 + \sum_{n \ par} q^{n(n+1)/2} + \sum_{n \ impar} q^{n(n+1)/2}$$

y tomamos valores para $n = 2k$ y $n = 2k-1$, $k = 1, 2, \ldots$, en la primera y segunda suma respectivamente, y así obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} q^{2k^2+k} + \sum_{k=1}^{\infty} q^{2k^2-k} \ ,$$

de donde se sigue (3.17).

Estas funciones theta tienen también una representación como producto infinito:

Corolario 3.7

$$\phi(q) = (-q;q^2)_\infty(-q;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty \ , \tag{3.20}$$

$$\psi(q) = \frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty} \ , \tag{3.21}$$

$$f(-q) = (q;q)_\infty \ . \tag{3.22}$$

Demostración. Hemos visto que (3.20) es (3.9),

$$\phi(q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2 \ ,$$

que es, por definición, igual a

$$(q^2;q^2)_\infty(-q;q)_\infty^2 \ .$$

Veamos (3.21). Por (3.14), (3.15) y (3.17), $a=q$ y $b=q^3$,

$$\begin{aligned}\psi(q) =&(-q;q^4)_\infty(-q^3;q^4)_\infty(q^4;q^4)_\infty\\ =&\prod_{n=0}^{\infty}(1+q^{4n+1})(1+q^{4n+3})(1-q^{4n+4})\\ =&(1+q)(1+q^5)\cdots(1+q^3)(1+q^7)\cdots(1-q^4)(1-q^8)\cdots\end{aligned}$$

Observamos que con los productos de $(1+q^{4n+1})(1+q^{4n+3})$ se tienen todos los $(1+q^n)$ para n impar. Por otro lado, cada término del producto de $(1-q^{4n+4})$ se puede descomponer en el producto de dos factores:

$$(1-q^4) = (1+q^2)(1-q^2), \ (1-q^8) = (1+q^4)(1-q^4) \ , \ldots$$

es decir

$$(1-q^{2n}) = (1+q^n)(1-q^n) \ . \tag{3.23}$$

Así,

$$\begin{aligned}\psi(q) &= (1+q)(1+q^3)\cdots(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1-q^2)(1-q^4)\cdots\\ &= \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n+2}) = (-q;q)_\infty(q^2;q^2)_\infty \ .\end{aligned} \tag{3.24}$$

El factor $(-q;q)_\infty$ se puede escribir de manera equivalente como

$$\begin{aligned}(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots &= \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}\cdots\\ =&\frac{1}{(1-q)(1-q^3)\cdots} = \frac{1}{(q;q^2)_\infty} \ .\end{aligned} \tag{3.25}$$

Y así, (3.24) queda

$$\psi(q) = \frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty}$$

como queríamos probar.

La última igualdad (3.22) es inmediata por (3.18) y la función de Euler (3.1), tomando $x=q$. $\square$

Veamos ahora un par de identidades de las funciones theta.

Corolario 3.8 *Para* $|q| < 1$*,*

$$\phi(q) + \phi(-q) = 2\phi(q^4) \ , \tag{3.26}$$
$$\phi(q)\psi(q^2) = \psi^2(q) \ , \tag{3.27}$$

Demostración. Aplicamos la definición (3.16):

$$\phi(q) + \phi(-q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-q)^{n^2} \ .$$

Sabemos que n par $\Rightarrow$ n^2 par, y n impar $\Rightarrow$ n^2 impar. Por tanto, para estos últimos los términos q correspondientes al segundo sumatorio tendrán signo negativo para n negativo, por lo que se anularán con los del primer sumatorio, que serán positivos en todo caso; mientras que para los n pares, los q correspondientes se repetirán dos veces. Así pues, $\phi(q) + \phi(-q)$ es igual a

$$2 \sum_{n \ par} q^{n^2} \ ,$$

hacemos el cambio $n = 2m$,

$$2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{(2m)^2} = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{4m^2} = 2\phi(q^4) \ ,$$

y la identidad (3.26) ha quedado probada.

Nos servimos de (3.20) y (3.21) para probar la segunda identidad.

$$\begin{aligned} \phi(q)\psi(q^2) &= (-q;q^2)_\infty(-q;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty \frac{(q^4;q^4)_\infty}{(q^2;q^4)_\infty} \\ &= (-q;q^2)_\infty(-q;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty \frac{(1-q^4)(1-q^8)\cdots}{(1-q^2)(1-q^6)\cdots} \ . \end{aligned}$$

Usando (3.23), de la igualdad anterior se sigue

$$\begin{aligned} &= (-q;q^2)_\infty(-q;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty \frac{(1+q^2)(1-q^2)(1+q^4)(1-q^4)\cdots}{(1+q)(1-q)(1+q^3)(1-q^3)\cdots} \\ &= (-q;q^2)_\infty(-q;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty \frac{(-q^2;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty}{(-q;q^2)_\infty(q;q^2)_\infty} \\ &= \frac{(-q;q^2)_\infty(q^2;q^2)^2_\infty(-q^2;q^2)}{(q;q^2)_\infty} \ . \end{aligned}$$

Desarrollando $(-q;q^2)_\infty(-q^2;q^2)$ y volviendo a usar (3.23), obtenemos otro $(q;q^2)$ en el denominador y nos queda finalmente

$$\frac{(q^2;q^2)^2_\infty}{(q;q^2)^2_\infty} \ ,$$

que es igual a $\psi^2(q)$ por (3.21). □

Ramanujan definió una función adicional a las theta [11, capítulo 1, página 14]:

$$\chi(q) := (-q; q^2)_\infty \ , \tag{3.28}$$

que no es propiamente una función theta, pero tiene un papel importante en la relación entre dichas funciones. En el siguiente teorema se recogen algunas de las más importantes.

Teorema 3.9 *Se tienen las siguientes identidades:*

1.

$$\chi(q)\chi(-q) = \chi(-q^2) \ . \tag{3.29}$$

2.

$$\chi(q) = \frac{\phi(q)}{f(q)} \ . \tag{3.30}$$

3.

$$\frac{\chi(q)}{\chi(-q)} = \frac{\psi(q)}{\psi(-q)} \ . \tag{3.31}$$

Demostración. Usaremos los productos de las funciones theta (3.20), (3.21), (3.22) y (3.28).

1.

$$\begin{aligned} \chi(q)\chi(-q) &= (-q; q^2)_\infty (q; q^2)_\infty \\ &= (1+q)(1+q^3)\cdots(1-q)(1-q^3)\cdots \end{aligned}$$

Reordenamos los factores

$$(1+q)(1-q)(1+q^3)(1-q^3)\cdots$$

y aplicando (3.23) llegamos a

$$(1-q^2)(1-q^6)\cdots = (q^2; q^4)_\infty = \chi(-q^2) \ .$$

2. Tenemos

$$\chi(q) = (-q; q^2)_\infty$$

y

$$\frac{\phi(q)}{f(q)} = \frac{(-q; q^2)_\infty (-q; q^2)_\infty (q^2; q^2)_\infty}{(-q; -q)_\infty} \ .$$

Para demostrar que ambas expresiones son iguales basta probar

$$(-q;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty = (-q;-q)_\infty \ .$$

Veamos que ambos miembros de esta ecuación son iguales:

$$\begin{aligned}(-q;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty &= (1+q)(1+q^3)\cdots(1-q^2)(1-q^4)\cdots \ , \\ (-q;-q)_\infty &= (1+q)(1-q^2)(1+q^3)(1-q^4)\cdots \ .\end{aligned}$$

3. Fácilmente se comprueba que

$$\frac{\chi(q)}{\chi(-q)} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty}$$

coincide con

$$\frac{\psi(q)}{\psi(-q)} = \frac{(q^2;q^2)_\infty(-q;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty} \ .$$

□

3.4. Identidad del producto quíntuple

Para cerrar este Capítulo, introduciremos la Identidad del producto quíntuple de Watson. Esta identidad es análoga al Teorema de la identidad del producto triple de Jacobi 3.1. Fue introducida por Watson en 1929, y redescubierta por Bailey (1951) y Gordon (1961). Existen múltiples maneras de formular esta identidad, daremos a continuación la enunciada en [11, capítulo 1, página 18], cuya demostración puede consultarse en la entrada 38 del segundo cuaderno de notas de Ramanujan [8, página 80 y siguientes].

$$\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+n}(z^{3n}q^{-3n} - z^{-3n-1}q^{3n+1}) \\ &=(q^2;q^2)_\infty(qz;q^2)_\infty(q/z;q^2)_\infty(z^2;q^4)_\infty(q^4/z^2;q^4)_\infty \ , \quad z\neq 0 \ .\end{aligned} \tag{3.32}$$

Ramanujan también enunció esta identidad en su cuaderno de notas [24, página 207] como

$$\frac{f(-x^2,-\lambda x)f(-\lambda x^3)}{f(-x,-\lambda x^2)} = f(-\lambda^2x^3,-\lambda x^6) + xf(-\lambda,-\lambda^2x^9) \ .$$

Demostración. En este trabajo mostraremos la idea de la prueba presentada en [2], mucho menos conocida y que difiere de las mencionadas anteriormente.

Para ello vamos a probar una tercera expresión de la identidad quíntuple, dada por:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{3n}q^{(3n^2-n)/2} - z\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{3n}q^{(3n^2+n)/2} \\ &=(q;q)_\infty(z;q)_\infty(q/z;q)_\infty(z^2q;q^2)_\infty(q/z^2;q^2)_\infty \ .\end{aligned} \tag{3.33}$$

Necesitaremos usar la identidad triple de Jacobi dada por (3.5):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-z)^n q^{n^2} = (zq;q^2)_\infty (q/z;q^2)_\infty (q^2;q^2)_\infty \ .$$

En primer lugar, aplicando (3.5) en el primer miembro de (3.33), obtenemos

$$(-z^3q;q^3)_\infty(-q^2/z^3;q^3)_\infty(q^3;q^3)_\infty - z(-z^3q^2;q^3)_\infty(-q/z^3;q^3)_\infty(q^3;q^3)_\infty \ .$$

Multiplicamos (3.33) por $(-z;q)_\infty(-q/z;q)_\infty$ en ambos lados:

$$\begin{aligned}
&(-z;q)_\infty(-q/z;q)_\infty(-z^3q;q^3)_\infty(-q^2/z^3;q^3)_\infty(q^3;q^3)_\infty \\
&- z(-z;q)_\infty(-q/z;q)_\infty(-z^3q^2;q^3)_\infty(-q/z^3;q^3)_\infty(q^3;q^3)_\infty \\
=&(-z;q)_\infty(-q/z;q)_\infty(q;q)_\infty(z;q)_\infty(q/z;q)_\infty(z^2q;q^2)_\infty(q/z^2;q^2)_\infty \ ;
\end{aligned} \tag{3.34}$$

el segundo miembro de esta última expresión podemos reescribirlo, usando que

$$(-z;q)_\infty(z;q)_\infty = (z^2;q^2)_\infty \ , \quad (-q/z;q)_\infty(q/z;q)_\infty = (q^2/z^2;q^2)_\infty \ ,$$

nos quedaría

$$(q;q)_\infty(z^2;q^2)_\infty(q^2/z^2;q^2)_\infty(z^2q;q^2)_\infty(q/z^2;q^2)_\infty \ ,$$

y por

$$(z^2;q^2)_\infty(z^2q;q^2)_\infty = (z^2;q)_\infty \ , \quad (q^2/z^2;q^2)_\infty(q/z^2;q^2)_\infty = (q/z^2;q)_\infty \ ,$$

el segundo miembro queda reducido a

$$(z^2;q)_\infty(q/z^2;q)_\infty(q;q)_\infty \ ,$$

que, por (3.5), es equivalente a

$$\sum_{N=-\infty}^{\infty} (-1)^N z^{2N} q^{(N^2-N)/2} \ .$$

Ahora multiplicamos (3.34) a ambos lados por $(q;q)_\infty$:

$$\begin{aligned}
&(q;q)_\infty(-z;q)_\infty(-q/z;q)_\infty(-z^3q;q^3)_\infty(-q^2/z^3;q^3)_\infty(q^3;q^3)_\infty \\
&- z(q;q)_\infty(-z;q)_\infty(-q/z;q)_\infty(-z^3q^2;q^3)_\infty(-q/z^3;q^3)_\infty(q^3;q^3)_\infty \\
=&(q;q)_\infty \sum_{N=-\infty}^{\infty} (-1)^N z^{2N} q^{(N^2-N)/2} \ ,
\end{aligned}$$

y aplicando (3.5) al primer miembro, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{(n^2-n)/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^{3m} q^{(3m^2-m)/2} - z \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{(n^2-n)/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^{3m} q^{(3m^2+m)/2} \\
=&(q;q)_\infty \sum_{N=-\infty}^{\infty} (-1)^N z^{2N} q^{(N^2-N)/2} \ .
\end{aligned}$$

Denotamos

$$I := \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{(n^2-n)/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^{3m} q^{(3m^2-m)/2} \ ,$$

$$II := z \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{(n^2-n)/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^{3m} q^{(3m^2+m)/2} \ .$$

Por tanto tenemos que

$$(q;q)_\infty \sum_{N=-\infty}^{\infty} (-1)^N z^{2N} q^{(N^2-N)/2} = I - II \ . \tag{3.35}$$

Ahora basta aplicar los dos siguientes lemas, cuya demostración detallada puede consultarse en [2]:

Lema 3.10 *El coeficiente de* z^{2N+1} *del segundo miembro de* (3.35) *es* 0.

Lema 3.11 *El coeficiente de* z^{2N} *del segundo miembro de* (3.35) *es*

$$(-1)^N q^{(N^2-N)/2} (q;q)_\infty \ .$$

Para probar el segundo lema, es clave el uso del Teorema del número pentagonal de Euler (3.1), considerando por un lado los números pares y por otro los impares. □

Capítulo 4

Fórmula de la suma ${}_1\psi_1$ de Ramanujan

4.1. Teorema de la suma ${}_1\psi_1$ de Ramanujan

En el capítulo anterior hemos estudiado el producto triple de Jacobi; este no es más que una consecuencia de la fórmula de la ${}_1\psi_1$ suma de Ramanujan (en adelante suma de Ramanujan), que es a su vez una generalización del Teorema del binomio, el cual considera la serie para n positivo, mientras que Ramanujan considera la serie bilateral, es decir, para todo n entero. Por ello debemos ver previamente cómo se entiende $(a;q)_n$ si n es negativo. Sabemos que si $n \geq 0$ se tiene (1.11). Para el caso $n < 0$ tomamos esta igualdad con $n = -m$:

$$\begin{aligned}(a;q)_{-m} &= \frac{(a;q)_\infty}{(aq^{-m};q)_\infty} = \frac{(1-a)(1-aq)\cdots}{(1-aq^{-m})(1-aq^{-m+1})\cdots(1-aq^{-1})(1-a)(1-aq)\cdots} \\ &= \frac{1}{(aq^{-m};q)_m}.\end{aligned}$$

Aplicando (1.13) a $(aq^{-m};q)_m$ obtenemos

$$(q/a;q)_m\left(-\frac{a}{q}\right)^m q^{-\binom{m}{2}} = \frac{(a^{-1}q;q)_m a^m}{(-1)^m q^m q^{\binom{m}{2}}},$$

por lo que

$$(a;q)_{-m} = \frac{(-1)^m q^{\binom{m}{2}} q^m}{a^m (a^{-1}q;q)_m}. \tag{4.1}$$

Nota: La expresión (4.1) aparece con una errata en [5, capítulo 10, página 502] ya que le falta el término q^m del numerador. Puede verse la expresión correcta en el libro [16, Apéndice I (I.2), página 351].

Teorema 4.1 (Suma ${}_1\psi_1$ de Ramanujan) *Para $|q| < 1$ y $|ba^{-1}| < |x| < 1$,*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(b;q)_n} x^n = \frac{(ax;q)_\infty (q/ax;q)_\infty (q;q)_\infty (b/a;q)_\infty}{(x;q)_\infty (b/ax;q)_\infty (b;q)_\infty (q/a;q)_\infty}. \tag{4.2}$$

Antes de proceder con la demostración, veamos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(b;q)_n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(b;q)_n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q/b;q)_n}{(q/a;q)_n} \left(\frac{b}{ax}\right)^n . \tag{4.3}$$

Primero separamos el sumatorio en dos, uno desde $-\infty$ a -1 y otro desde 0 a ∞. Para demostrar la igualdad (4.3) basta probar que

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(a;q)_n}{(b;q)_n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q/b;q)_n}{(q/a;q)_n} \left(\frac{b}{ax}\right)^n ;$$

para ello vamos a tomar un n negativo, sea $n = -k$, con $k > 0$. El término correspondiente al sumatorio sería

$$\frac{(a;q)_{-k}}{(b;q)_{-k}} x^{-k}$$

que podemos desarrollar aplicando (4.1)

$$\frac{(-q/a)^k q^{\binom{k}{2}}}{(q/a;q)_k} \frac{(q/b;q)_k}{(-q/b)^k q^{\binom{k}{2}}} x^{-k} = \left(\frac{b}{ax}\right)^k \frac{(q/b;q)_k}{(q/a;q)_k} , \tag{4.4}$$

obteniendo así un término de un sumatorio de índices positivos.

A continuación se desarrollan dos pruebas del Teorema 4.1. La primera fue desarrollada por Venkatachaliengar, quien fue presidente de la Sociedad Matemática de la India durante dos años. Él apremió a sus compañeros a estudiar tanto las notas del cuaderno perdido de Ramanujan como sus primeras investigaciones. En particular, Venkatachaliengar se centró en ejemplos concretos del cuaderno perdido y en sus demostraciones [9, volumen 14, página XV].

Primera prueba. Al igual que hicimos en el Teorema del binomio 2.1, podemos considerar el producto infinito uniforme y absolutamente convergente para $|x| < 1$ y $|b/ax| < 1$, y por tanto su serie de Laurent para $|b/a| < |x| < 1$. Sea

$$F(x) = \frac{(ax;q)_\infty (q/ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty (b/ax;q)_\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n x^n. \tag{4.5}$$

Consideramos la serie de Laurent para $F(qx)$, con $|b/aq| < |x| < 1$,

$$F(qx) = \frac{(aqx;q)_\infty (q/aqx;q)_\infty}{(qx;q)_\infty (b/aqx;q)_\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n q^n x^n.$$

Ambas series están definidas en el conjunto $|b/aq| < |x| < 1$, así que podemos encontrar una relación funcional entre $F(x)$ y $F(qx)$ en esta región. Desarrollamos $F(qx)$:

$$\frac{(1-aqx)\cdots(1-1/ax)(1-q/ax)\cdots}{(1-qx)\cdots(1-b/aqx)(1-b/ax)(1-bq/ax)\cdots} =$$

$$\frac{(1-1/ax)}{(1-b/aqx)}\frac{(1-aqx)\cdots(1-q/ax)\cdots}{(1-qx)\cdots(1-b/ax)(1-bq/ax)\cdots}=$$

$$\frac{(1-1/ax)}{(1-b/aqx)}\frac{(ax;q)_\infty}{(1-ax)}\frac{(1-x)}{(x;q)_\infty}\frac{(q/ax;q)_\infty}{(b/ax;q)_\infty}=\sum_{n-\infty}^{\infty}A_nq^nx^n.$$

Observamos que esto es igual a

$$\sum_{n-\infty}^{\infty}A_nx^n\frac{(1-1/ax)(1-x)}{(1-ax)(1-b/aqx)}=\sum_{n-\infty}^{\infty}A_nq^nx^n\ ,$$

que despejando queda

$$(1-1/ax)(1-x)\sum_{n-\infty}^{\infty}A_nx^n=(1-ax)(1-b/aqx)\sum_{n-\infty}^{\infty}A_nq^nx^n. \tag{4.6}$$

Vamos a simplificar los productos que no dependen de n:

$$(1-1/ax)(1-x)=(1-ax)(1-b/aqx)\ ,$$

hacemos común denominador

$$\frac{(-1)(1-ax)}{ax}(1-x)=(1-ax)\frac{(aqx-b)}{aqx}$$

y cancelamos términos para llegar a

$$q(1-x)=b-aqx.$$

Así, (4.6) queda

$$q(1-x)\sum_{n-\infty}^{\infty}A_nx^n=(b-aqx)\sum_{n-\infty}^{\infty}A_nq^nx^n\ ,$$

que es equivalente a

$$\sum_{n-\infty}^{\infty}qA_nx^n-\sum_{n-\infty}^{\infty}qA_nx^{n+1}=\sum_{n-\infty}^{\infty}bA_nq^nx^n-\sum_{n-\infty}^{\infty}aA_nq^{n+1}x^{n+1}\ ,$$

y reajustando los x^n se sigue

$$\sum_{n-\infty}^{\infty}qA_nx^n-\sum_{n-\infty}^{\infty}qA_{n-1}x^n=\sum_{n-\infty}^{\infty}bA_nq^nx^n-\sum_{n-\infty}^{\infty}aA_{n-1}q^{n+1}x^n.$$

Igualamos los coeficientes de x^n

$$qA_n-bA_nq^n=qA_{n-1}-aA_{n-1}q^n$$

y despejamos A_n

$$A_n = A_{n-1}\frac{1-aq^{n-1}}{1-bq^{n-1}} \ .$$

Aplicando el procedimiento usado en (2.9) llegamos a

$$A_n = \frac{(a;q)_n}{(b;q)_n}A_0 \ .$$

Es decir, usando (4.5), $F(x)$ es

$$\frac{(ax;q)_\infty(q/ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty(b/ax;q)_\infty} = A_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(b;q)_n}x^n. \tag{4.7}$$

Multiplicando ambos miembros por $(1-x)$ eliminamos la singularidad en el primero, (dada por $(x;q)_\infty$ en el denominador), y tomando límite $x \to 1^-$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(ax;q)_\infty(q/ax;q)_\infty}{[(1-xq)(1-xq^2)\cdots](b/ax;q)_\infty} = A_0 \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(b;q)_n}x^n.$$

llegamos por el Teorema 1.5 a

$$\frac{(a;q)_\infty(q/a;q)_\infty}{(q;q)_\infty(b/a;q)_\infty} = A_0\frac{(a;q)_\infty}{(b;q)_\infty}.$$

De aquí se sigue que A_0 es igual a

$$\frac{(a;q)_\infty(q/a;q)_\infty(b;q)_\infty}{(q;q)_\infty(b/a;q)_\infty(a;q)_\infty} \ ,$$

y sustituyendo este valor en (4.7) llegamos finalmente a

$$\frac{(ax;q)_\infty(q/ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty(b/ax;q)_\infty} = \frac{(a;q)_\infty(q/a;q)_\infty(b;q)_\infty}{(q;q)_\infty(b/a;q)_\infty(a;q)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(b;q)_n}x^n \ ,$$

o equivalentemente

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(b;q)_n}x^n = \frac{(ax;q)_\infty(q/ax;q)_\infty(q;q)_\infty(b/a;q)_\infty}{(x;q)_\infty(b/ax;q)_\infty(b;q)_\infty(q/a;q)_\infty} \ .$$

□

La segunda prueba del Teorema 4.1 fue desarrollada por Ismail en 1977 [5, capítulo 10, página 504].

Segunda prueba. Reescribimos (2.3) como

$$\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}x^n = \sum_{n=-N}^{\infty}\frac{(a;q)_{n+N}}{(q;q)_{n+N}}x^{n+N}.$$

Veamos ahora que $(a;q)_{n+N} = (a;q)_N(aq^N;q)_n$:

$$\begin{aligned}(a;q)_{n+N} &= (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{N-1})(1-aq^N)(1-aq^{N+1})\cdots(1-aq^{N+n-1})\\ &= (a;q)_N(1-aq^N)(1-aq^{N+1})\cdots(1-aq^{N+n-1})\\ &= (a;q)_N(aq^N;q)_n\ .\end{aligned}$$

De la misma forma, $(q;q)_{n+N} = (q;q)_N(q^{N+1};q)_n$.

Podemos sacar del sumatorio lo que no depende de n

$$\frac{(a;q)_N}{(q;q)_N}x^N \sum_{n=-N}^{\infty} \frac{(aq^N;q)_n}{(q^{N+1};q)_n}x^n$$

y nos queda la ecuación

$$\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} = \frac{(a;q)_N}{(q;q)_N}x^N \sum_{n=-N}^{\infty} \frac{(aq^N;q)_n}{(q^{N+1};q)_n}x^n.$$

Cambiamos a por aq^{-N}

$$\frac{(aq^{-N}x;q)_\infty}{(x;q)_\infty} = \frac{(aq^{-N};q)_N}{(q;q)_N}x^N \sum_{n=-N}^{\infty} \frac{(aq^{-N}q^N;q)_n}{(q^{N+1};q)_n}x^n\ ,$$

o, equivalentemente,

$$\sum_{n=-N}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q^{N+1};q)_n}x^n = \frac{(aq^{-N}x;q)_\infty}{(x;q)_\infty}\frac{(q;q)_N}{(aq^{-N};q)_N}x^{-N}.$$

Observamos que el límite inferior del sumatorio, $n=-N$, podemos cambiarlo por $n=-\infty$, pues los términos de la suma para los valores de $n \in (-\infty, -N-1]$ valen 0. Para probarlo tomamos $(q^{N+1};q)_n$ del denominador para un $n=-N-k$, $k \in [1,\infty)$, y le aplicamos (4.1)

$$(q^{N+1};q)_{-N-k} = \frac{(-1)^{N+k}q^{\binom{N+k}{2}}q^{N+k}}{q^{(N+k)(N+1)}(q/q^{N+1};q)_{N+k}}\ .$$

Nos fijamos en $(q/q^{N+1};q)_{N+k}$, que es igual a

$$(q^{-N};q)_{N+k} = (1-q^{-N})(1-q^{-N+1})\cdots(1-q^{-N+N})\cdots(1-q^{k-2})(1-q^{k-1})\ .$$

El término $(1-q^{-N+N})$ siempre va a ser 0 para $k \geq 1$, y forma parte del numerador de

$$\sum_{n=-\infty}^{-N-1} \frac{(a;q)_n}{(q^{N+1};q)_n}x^n\ ,$$

por tanto para todo $k \geq 1$, se anulan todos los sumandos para $n \in (-\infty, -N-1]$, como queríamos comprobar. Así pues, tenemos la expresión

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q^{N+1};q)_n} x^n = \frac{(aq^{-N}x;q)_\infty}{(x;q)_\infty} \frac{(q;q)_N}{(aq^{-N};q)_N} x^{-N}. \tag{4.8}$$

Aplicamos (1.11) para $(aq^{-N}x;q)_\infty$ y $(q;q)_N$

$$(aq^{-N}x;q)_\infty = (aq^{-N}x;q)_N(ax;q)_\infty \ ,$$
$$(q;q)_N = (q;q)_\infty/(q^{N+1};q)_\infty \ ,$$

y sustituimos en el segundo miembro de nuestra expresión (4.8)

$$\frac{(aq^{-N}x;q)_N}{(aq^{-N};q)_N} x^{-N} \frac{(ax;q)_\infty(q;q)_\infty}{(x;q)_\infty(q^{N+1};q)_\infty} \ . \tag{4.9}$$

Ahora vamos a tomar

$$\frac{(aq^{-N}x;q)_N}{(aq^{-N};q)_N} x^{-N},$$

que, usando (3.4) y simplificando, es igual a

$$\frac{(q/ax;q)_N}{(q/a;q)_N} \ ,$$

y por (1.11) tenemos que

$$(q/ax;q)_N = \frac{(q/ax;q)_\infty}{(q^{N+1}/ax;q)_\infty} \ , \quad (q/a;q)_N = \frac{(q/a;q)_\infty}{(q^{N+1}/a;q)_\infty} \ ,$$

así, hemos obtenido

$$\frac{(aq^{-N}x;q)_N}{(aq^{-N};q)_N} x^{-N} = \frac{(q/ax;q)_\infty}{(q^{N+1}/ax;q)_\infty} \frac{(q^{N+1}/a;q)_\infty}{(q/a;q)_\infty},$$

y sustituyendo en (4.9) nos queda

$$\frac{(q/ax;q)_\infty}{(q^{N+1}/ax;q)_\infty} \frac{(q^{N+1}/a;q)_\infty}{(q/a;q)_\infty} \frac{(ax;q)_\infty(q;q)_\infty}{(x;q)_\infty(q^{N+1};q)_\infty} \ ,$$

que, por (4.8), es igual a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q^{N+1};q)_n} x^n.$$

Reemplazamos q^{N+1} por b y llegamos a la expresión deseada (4.2).

Ambos lados de la igualdad del Teorema de Ramanujan 4.1 son funciones analíticas en b para b en un entorno de 0, punto límite de ambas, y coinciden cuando $b = q^{N+1}$, $N \in \mathbb{N}$. Entonces por 1.4 son idénticas en dicho entorno.

$\square$

4.2. Aplicaciones

Comencemos mostrando que el Teorema del producto triple de Jacobi 3.1 es un caso límite del Teorema de la suma ${}_1\psi_1$ de Ramanujan 4.1

En primer lugar, en (4.2) reemplazamos a por $1/a$ y x por ax

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1/a;q)_n}{(b;q)_n} a^n x^n = \frac{(x;q)_\infty (q/x;q)_\infty (q;q)_\infty (ba;q)_\infty}{(ax;q)_\infty (b/x;q)_\infty (b;q)_\infty (qa;q)_\infty},$$

para $|b| < |x| < |1/a|$. Sea ahora $b = 0$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (1/a;q)_n a^n x^n = \frac{(x;q)_\infty (q/x;q)_\infty (q;q)_\infty}{(ax;q)_\infty (qa;q)_\infty} . \tag{4.10}$$

Desarrollamos el primer miembro de la ecuación:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} (1/a;q)_n a^n x^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1-1/a)(1-q/a)\cdots(1-q^{n-1}/a) a^n x^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n a^{-1}(1-a) a^{-1}(q-a)\cdots a^{-1}(q^{n-1}-a) a^n x^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (1-a)(q-a)\cdots(q^{n-1}-a) x^n .
\end{aligned}$$

Por último, hacemos $a \to 0$ en (4.10) y obtenemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q \cdots q^{n-1} x^n = (x;q)_\infty (q/x;q)_\infty (q;q)_\infty ,$$

que es (3.2)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} x^n = (x;q)_\infty (q/x;q)_\infty (q;q)_\infty$$

como queríamos probar.

Para terminar mostraremos, tal y como mencionamos al principio de este capítulo, que el Teorema de la suma ${}_1\psi_1$ de Ramanujan 4.1 es una extensión del Teorema del binomio 2.1, ya que en la primera se consideran además los n negativos. Además, hay que observar que en el Teorema 2.1 se considera $(q;q)_\infty$ en el denominador, mientras que en el Teorema 4.1 se toma $(b;q)_\infty$. Si en (4.2) tomamos $b = q$ nos queda

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} x^n = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} .$$

Sin embargo, para los n negativos, los valores de la suma valen cero. Para probarlo basta aplicar (4.4):

$$\frac{(a;q)_{-k}}{(q;q)_{-k}}x^{-k} = \left(\frac{q}{ax}\right)^k \frac{(1;q)_k}{(q/a;q)_k} \tag{4.11}$$

que es igual a 0 ya que $(1;q)_k = 0$, y de esta manera hemos obtenido (2.3)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}x^k = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} \ .$$

En conclusión, el Teorema de la suma ${}_1\psi_1$ de Ramanujan tiene como corolarios el Teorema del binomio y el Teorema de la identidad del producto triple de Jacobi.

Conclusiones

En este trabajo se han estudiado algunas de las q-series más famosas, como son la serie del q-análogo del Teorema del binomio, el producto triple de Jacobi y el Teorema de la ${}_1\psi_1$ suma de Ramanujan. En sus demostraciones se utilizan resultados clásicos del análisis.

La teoría de las q-series es muy amplia y conecta diversos campos de estudio. Los llamados q-análogos de casos como los coeficientes binomiales o el Teorema del binomio, también se tienen para multitud de conceptos y funciones, como pueden ser la q-integral, la función q-Gamma, la integral q-Beta o las series q-hipergeométricas, las cuales también representan temas interesantes para ser estudiados. Las conexiones del Teorema del binomio 2.1 y la suma ${}_1\psi_1$ de Ramanujan 4.1 con los q-análogos de las funciones gamma y beta los detalla R. Askey en [6]. Su uso se extiende también a la teoría analítica de números (ver e.g. [11]) y a la teoría de particiones [4].

La teoría de las q-series no se desarrolló de forma lineal y aislada, sino como una contribución paralela y a lo largo del tiempo de varios matemáticos de distintas partes del mundo, apoyándose unos a otros en sus estudios, y todo ese esfuerzo conjunto tuvo como consecuencia múltiples aplicaciones de las q-series hasta el día de hoy.

Conviene destacar que muchas de las demostraciones incluidas en esta memoria aparecen en las monografías [5, 11, 16, 23], aunque con menos detalle que las aquí expuestas.

Finalmente, debemos mencionar que hay muchos resultados no considerados en nuestro trabajo. Por ejemplo las series básicas hipergeométricas introducidas por Heine en 1846 [17] (véase también [18]), las funciones elípticas de Jacobi y Ramanujan y las funciones theta, entre otros. Tampoco se han considerado sus aplicaciones en el campo de la física (ver e.g. [7]) ni la teoría de q-álgebras (ver [26]). Por último, y no por ello menos importante, no hemos aludido a la conexión de las q-series con la teoría de polinomios ortogonales, los denominados q-polinomios, entre los que destacan los polinomios grandes de Jacobi y los de Askey-Wilson (ver, por ejemplo, [5, 15]).

Bibliografía

[1] M.K. Ablowitz, A.s. Fokas, *Complex variables: Introduction and applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[2] K. Alladi, *The quintuple product identity and shifted partition functions*, Journal of Computational and Applied Mathematics 68 (1996), 3-13.

[3] R. Álvarez-Nodarse, *Ramanujan y las q-series*, La Gaceta de la RSME, **23**(2), (2020), 263-302.

[4] G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Encyl. of Math. and Its Appl., Vol. 2, Addison Wesley, Reading, 176 (Reissued: Cambridge University Press, Cambridge, 1985 and 1998).

[5] G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, vol. 71, Encyclopedia of Mathematics and its Applications (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).

[6] R. Askey, *Ramanujan's extensions of the gamma and beta functions*, Amer. Math. Monthly 87 (1980), 346–359.

[7] R.J. Baxter, *Ramanujan's identities in statistical mechanics*, en Ramanujan Revisited, G.E. Andrews, R.A. Askey, B.C. Berndt, K.G. Ramanathan, and R.A. Rankin, eds., Academic Press, Boston, 1988, pp. 69–84.

[8] B.C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks Part III*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[9] B.C. Berndt, K. Venkatachaliengar, en *Ramanujan Rediscovered: Proceedings of a Conference on Elliptic Functions, Partitions, and q-Series in memory of K. Venkatachaliengar*, Bangalore, 1-5 June, 2009, N. D. Baruah, B. C. Berndt, S. Cooper, T. Huber, and M. J. Schlosser, eds., Ramanujan Lecture Notes Series Volume 14, 2012, pp. xiii-xvi.

[10] B.C. Berndt, *What is a q-series?*, en *Ramanujan Rediscovered: Proceedings of a Conference on Elliptic Functions, Partitions, and q-Series in memory of K. Venkatachaliengar*, Bangalore, 1-5 June, 2009, N. D. Baruah, B. C. Berndt, S. Cooper, T. Huber, and M. J. Schlosser, eds., Ramanujan Lecture Notes Series Volume 14, 2012, pp. 31-51.

[11] B.C. Berndt, *Number Theory in the Spirit of Ramanujan*, American Mathematical Society, RI, 2006.

[12] T.J.I'A. Bromwich, *An Introduction to the Theory of Infinite Series*, Macmillan, London, 1908.

[13] L. Euler, *Introductio in Analysin Infinitorum*, Marcum-Michaelem Bousquet, Lausannae, 1748.

[14] N.J. Fine, *Basic Hypergeometric Series and Applications*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

[15] G. Gasper, *Lecture notes for an introductory minicourse on q-series*, arXiv:math/9509223 [math.CA], (1995).

[16] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series*, Second Edition, vol. 35, Encyclopedia of Mathematics and its Applications Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[17] E. Heine, Über die Reihe ... *J. Reine Angew. Math.*, **32** (1846), 210-212.

[18] E. Heine, Untersuchungen über die Reihe..., *J. Reine Angew. Math.* **34** (1847), 285–328.

[19] J. Hofbauer, *A Simple Proof of* $1+1/2^2+1/3^2+=\pi^2/6$ *and Related Identities*, The American Mathematical Monthly, **109**(2), (2002), 196–200.

[20] F.H. Jackson, *On q-functions and a certain difference operator*, Trans. R. Soc. Edinb. **46**(2), (1908), 253–281.

[21] C.G.J. Jacobi, *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, Königsberg (1829).

[22] K. Knopp, *Theory and Application of Infinite Series*, Blackie & Son Limited, Glasgow, 1954.

[23] J. McLaughlin, *Topics and Methods in q-Series*, Monographs in Number Theory Vol. 8, World Scientific Publishing, Singapore, 2017.

[24] S. Ramanujan, *The Lost Notebook and Other Unpublished Papers*, Narosa, New Delhi, 1988.

[25] R. Remmert, *Theory of Complex Functions*, Springer-Verlag, New York (1991).

[26] N.Ja. Vilenkin and A.U. Klimyk, *Representations of Lie Groups and Special Functions.* I,II,III. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.