TRABAJO FIN DE MÁSTER

Ecuaciones de Navier-Stokes y Atractores

Alumno: Alejandro Morales Kirioukhina

Tutor: Pedro Marín Rubio

Máster en Matemáticas
Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

Curso 2020-21

Resumen.

Este trabajo aborda uno de los problemas de mayor renombre en áreas como la física, las matemáticas o la ingeniería: las conocidas como ecuaciones de Navier-Stokes. Estas ecuaciones en derivadas parciales, enmarcadas en el contexto de la mecánica de fluidos, constituyen la piedra angular de un problema que aún continúa abierto a día de hoy, dada su naturaleza no-lineal. No obstante, bajo determinadas condiciones veremos que es posible determinar la existencia y unicidad de soluciones. En este texto estudiaremos el caso bidimensional, incompresible y autónomo. A su vez, el estudio realizado se complementa introduciendo el concepto de atractor, orientado a estas ecuaciones. Una vez desarrollada la teoría en torno a la construcción de éstos, tendremos ocasión de apreciar la utilidad de los atractores dinámicos a la hora de concebir el problema de evolución planteado por Navier-Stokes. Se introducen también algunas nociones relativas a líneas de investigación más actuales para casos no-autónomos, desde la extensión del problema al caso tridimensional, hasta la formulación de las ecuaciones de Navier-Stokes estocásticas, añadiendo un ruido aditivo. En lo que respecta a los atractores, se introducen sucintamente los atractores pullback, estableciendo los prolegómenos para poder ahondar en la materia más allá de este texto.

Abstract.

This work addresses one of the most renowned problems in areas such as physics, mathematics or engineering: those known as Navier-Stokes equations. These partial derivative equations, framed in the context of fluid mechanics, constitute the cornerstone of a problem that is still open today, given its non-linear nature. However, under certain conditions we will see that it is possible to determine the existence and uniqueness of solutions. In this text we will study the two-dimensional, incompressible and autonomous case. In addition, the study carried out is complemented by introducing the concept of attractor, oriented to these equations. Once the theory around their construction has been developed, we will have the opportunity to appreciate the usefulness of dynamic attractors when it comes to conceiving the evolution problem posed by Navier-Stokes. Some notions related to more current lines of research for non-autonomous cases are also introduced, from the extension of the problem to the three-dimensional case, to the formulation of the stochastic Navier-Stokes equations, adding an additive noise. With regard to attractors, pullback attractors are briefly introduced, establishing the prolegomena in order to delve into the subject beyond this text.

Índice general

1. Introducción.

Las ecuaciones de Navier-Stokes sin duda constituyen uno de los problemas más sonados de las últimas décadas. Estas ecuaciones surgen a raíz de las investigaciones realizadas por los matemáticos Claude-Louis Henri Navier (1785-1836) y George Gabriel Stokes (1819-1903), permitiendo modelar el movimiento de un fluido viscoso incompresible en un espacio cerrado e inmóvil. De hecho, estas ecuaciones gobiernan toda clase de fenómenos en la naturaleza, desde la atmósfera terrestre hasta al movimiento de los mares, pasando por sistemas realmente complejos como el flujo del plasma en un tokamak. No obstante, se trata de ecuaciones en derivadas parciales no-lineales, por lo que la resolución del problema sólo resulta sencilla bajo determinadas condiciones (como veremos en capítulos posteriores). En la práctica, el estudio del caso tridimensional para estas ecuaciones aún no ha permitido demostrar la unicidad de soluciones, exceptuando casos en los que la energía y la velocidad inicial del sistema es muy pequeña, o la viscosidad del mismo muy grande.

Especialmente a partir de la segunda mitad del siglo XX, matemáticos de renombre como Jean Leray (1906-1998), Olga Ladyzhenskaya (1922-2004) o Ciprian Foias (1933-2020); y otros más recientes, como Roger Temam, James C. Robinson o Ricardo Rosa se han dedicado extensamente a estudiar este problema, que aún continúa abierto a día de hoy. De hecho, en el año 2000 el Instituto Clay de Matemáticas incluyó estas ecuaciones en sus reconocidos *problemas del milenio*, ofreciendo un millón de dólares a quien demostrase la existencia y unicidad de soluciones para un problema de flujo laminar en el instante inicial [1].

El presente texto se estructura de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se establece un marco funcional adecuado y se definen los operadores fundamentales, pasando por plantear el problema de Stokes y formular los operadores A y B, así como la forma trilineal b, que usaremos con frecuencia a lo largo del texto. Apoyándonos sobre el capítulo anterior, en el Capítulo 3 se introducen las ecuaciones de Navier-Stokes en 2D, considerando densidad constante, y estudiando posteriormente la existencia y unicidad de soluciones del problema. Acto seguido, el Capítulo 4 introduce y desarrolla el concepto de atractor global, lo cual aplicamos a las mencionadas ecuaciones a lo largo del Capítulo 5, pudiendo apreciar la utilidad de los atractores en el contexto de Navier-Stokes y finalizando a modo de ejemplo con un estudio del carácter finito-dimensional del atractor. Finalmente, en el Capítulo 6 se estudia la posibilidad de relajar algunas de las hipótesis tomadas haciendo uso de un método de energía, y se introducen nociones sobre diferentes las líneas de estudio —más allá de este texto— que ofrecen las ecuaciones de Navier-Stokes bajo el paradigma de los atractores dinámicos no autónomos, sean éstas los atractores pullback, las ecuaciones de Navier-Stokes estocásticas o la posible extensión al caso $3D$.

2. Marco funcional y operadores.

2.1. Espacios de funciones.

Denotaremos mediante $L^2(\Omega)$ al espacio de la clase de funciones reales evaluadas en Ω, las cuales son L^2 para la métrica de Lebesgue $dx = dx_1 \cdots dx_n$. Este espacio está dotado de los habituales producto escalar y norma [2]:

$$\begin{cases} (u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx \\ \\ |u| = \{(u, u)\}^{1/2} . \end{cases}$$

Denotamos mediante $H^m(\Omega)$ al espacio de Sobolev de clases de funciones que están en $L^2(\Omega)$, junto con todas sus derivadas de orden menor o igual que m. Esto no es más que el espacio de Hilbert típico para el producto escalar y la norma:

$$\begin{cases} (u, v)_m = \sum\limits_{[\alpha] \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v) \\ \\ |u|_m = \{(u, u)_m\}^{1/2} , \end{cases}$$

donde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $[\alpha] = \alpha_1 + ...\alpha_n$ y:

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{[\alpha]}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

$H_0^1(\Omega)$ es el subespacio de Hilbert de $H^1(\Omega)$, compuesto de funciones que «se anulan» en Γ. Para $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ es el espacio de las clases de funciones u en $L^p(\Omega)$ cuyas derivadas distribucionales de orden menor o igual que m están en $L^p(\Omega)$. Se trata de un espacio de Banach para la norma:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{[\alpha] \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} .$$

2. ***Marco funcional y operadores.***

Cuando $p = 2$, escribimos $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, y esto resulta ser un espacio de Hilbert para el producto escalar:

$$((u,v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{[\alpha]\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

Por supuesto, se pueden definir espacios similares en cualquier otro conjunto abierto aparte de Ω, en particular, en $\mathcal{Q} = \Omega \times]\,0, T[\, \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Para $T > 0$, escribimos $Q = \Omega \times (0,T)$. Introducimos así los espacios de Sobolev, que serán considerados con más detalle en una sección posterior: denotamos por $H_p^m(Q)$, $m \in \mathbb{N}$, al espacio de funciones que se hallan en $H_{loc}^m(\mathbb{R}^n)$ (es decir, $u|_{\mathcal{O}} \in H^m(\mathcal{O})$ para cada conjunto abierto y acotado $\mathcal{O}$) y que son periódicas con periodo Q:

$$u(x + Le_i) = u(x), \qquad i = 1, ..., n.$$

Para $m = 0$, $H_p^0(Q)$ coincide simplemente con $L_p^2(Q)$ (las restricciones de las funciones en $H_p^0(Q)$ hacia Q son todo el espacio $L^2(Q)$). Para un valor arbitrario $m \in \mathbb{N}$, $H_p^m(Q)$ es un espacio de Hilbert para el producto escalar y la norma:

$$(u,v)_m = \sum_{[\alpha]\leq m} \int_Q D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx.$$

Las funciones en $H_p^m(Q)$ son caracterizadas de manera sencilla mediante su expansión en series de Fourier:

$$H_p^m(Q) = \left\{ u, u = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k e^{2i\pi k\cdot x/L}, \bar{c}_k = c_{-k}, \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |k|^{2m} |c_k|^2 < \infty \right\}, \tag{2.1}$$

y la norma $|u|_m$ es equivalente a la norma $\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1 + |k|^{2m}) |c_k|^2\right\}^{1/2}$. También agrupamos:

$$\dot{H}_p^m(Q) = \left\{ u \in H_p^m(Q) \text{ del tipo (2.1)},\ c_0 = 0 \right\}. \tag{2.2}$$

Apreciamos que el lado derecho de (2.1) cobra sentido más generalmente para $m \in \mathbb{R}$, y nosotros realmente estamos definiendo $H_p^m(Q)$, $m \in \mathbb{R}$, $m \geq 0$, mediante (2.1); se trata de un espacio de Hilbert para la norma indicada más arriba. Para $m \in \mathbb{R}$, definimos $\dot{H}_p^m(Q)$ mediante (2.2), que es un espacio de Hilbert para la norma $\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |k|^{2m} |c_k|^2\right\}^{1/2}$, y $\dot{H}_p^m(Q)$ y $\dot{H}_p^{-m}(Q)$ se encuentran en dualidad para todos los $m \in \mathbb{R}$. Dos de los espacios usados con mayor frecuencia en el marco teórico de las ecuaciones de Navier-Stokes son:

$$\begin{cases} V = \left\{u \in \dot{\mathbb{H}}^1_p(Q), \nabla \cdot u = 0 \; en \; \mathbb{R}^n\right\} \\ H = \left\{u \in \dot{\mathbb{H}}^0_p(Q), \nabla \cdot u = 0 \; en \; \mathbb{R}^n\right\}, \end{cases}$$

donde $\dot{\mathbb{H}}^m_p(Q) = \left\{\dot{H}^m_p(Q)\right\}^n$. De manera más general, para cualquier espacio de funciones X, denotamos mediante $\mathbb{X}$ al espacio X^n provisto con la estructura de producto. Complementamos V con el producto escalar y la norma de Hilbert:

$$((u,v)) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right), \qquad \|u\| = \{((u,u))\}^{1/2}.$$

Esta norma equivale a la inducida por $(H^1_p(Q))^n$, y V es un espacio de Hilbert para esta norma. Es sencillo ver que el dual V' de V es:

$$V' = \left\{u \in \mathbb{H}^{-1}_p(Q) = (\mathbb{H}^1_p(Q))', \nabla \cdot u = 0 \; en \; \mathbb{R}^n\right\}$$

$\|\cdot\|_{V'}$ denotará la norma dual de $\|\cdot\|$ en V'; tenemos $V \subset H \subset V'$, donde las inyecciones son continuas y cada espacio es denso en el siguiente. Uno puede mostrar también mediante una pequeña modificación que el espacio funciones suaves[1],

$$\mathcal{V} = V \cap \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^n,$$

es denso en V, H y V'. Hagamos hincapié en lo siguiente:

i) Usando el teorema de la traza, es posible mostrar que $u \in V$ si y solamente si su restricción $u|_Q$ hasta Q pertenece a:

$$\left\{v \in H^1(Q), \nabla \cdot u = 0 \; en \; Q, v|_{\Gamma_{i+n}} = v|_{\Gamma_j}, j = 1, ..., n\right\},$$

donde hemos enumerado las caras $\Gamma_1, ..., \Gamma_{2n}$ de Q como sigue:

[1] Denotamos mediante $\mathscr{C}(\Omega)$ al espacio de funciones reales y continuas en Ω. $\mathscr{C}(\overline{\Omega})$ representa el espacio de funciones reales continuas y diferenciables en $\overline{\Omega}$. Los espacios de funciones reales $\mathscr{C}^\infty$ en Ω con un apoyo compacto en Ω se denotan mediante $\mathscr{C}^\infty_0(\Omega)$ ó $\mathscr{D}(\Omega)$, tal y como se denota en la teoría de las distribuciones de Schwartz [3]; $\mathscr{D}'(\Omega)$ es el espacio de distribuciones en Ω.

$$\begin{cases} \Gamma_j = \partial Q \cap \{x_j = 0\} \\ \Gamma_{j+n} = \partial Q \cap \{x_j = L\}\,, \end{cases}$$

y $v|_{\Gamma_i}$ es una manera de denotar la traza de v en Γ_j. La caracterización de $u|_Q$ para $u \in H$ es algo más delicada y se basa en el siguiente teorema para la traza: $u \in H$ si y solo si u pertenece a:

$$\left\{ v \in \mathbb{L}^2(Q), \nabla \cdot v = 0 \; en \; Q, v \cdot \mathbf{v}|_{\Gamma_{n+i}} = -v \cdot \mathbf{v}|_{\Gamma_i}, j = 1, ..., n \right\}.$$

ii) Sea G el complemento ortogonal de H en $\dot{\mathbb{H}}_p^0 = (L_p^2(Q)/\mathbb{R})^n$. Tenemos entonces:

$$G = \left\{ u \in H_p^0(Q), u = \nabla q, q \in H_p^1(Q) \right\}.$$

2.2. Propiedades de los espacios de Sobolev.

Los espacios $H^m(\Omega)$ y $W^{m,p}(\Omega)$ definidos anteriormente contienen $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ e incluso $\mathscr{C}^m(\overline{\Omega})$. El cierre de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ en $H^m(\Omega)$ (resp. $W^{m,p}(\Omega)$) se denota mediante $H_0^m(\Omega)$ (resp. $W_0^{m,p}(\Omega)$). Es especialmente habitual hacer uso de los siguientes espacios:

$$\begin{cases} H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), D_1 u \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n\} \\ H_0^1(\Omega) = el\; cierre\; de\; C_0^\infty(\Omega)\; en\; H^1(\Omega) \end{cases}$$

Ambos son espacios de Hilbert para el producto escalar:

$$((u, v))_{H^1(\Omega)} = (u, v) + \sum_{i=1}^{n} (D_i u, D_i v).$$

Cuando Ω está acotado, o al menos lo está en una dirección —i.e., Ω está incluido en el conjunto limitado por dos hiperplanos ortogonales en esa dirección—, tenemos una desigualdad de Poincaré:

$$|u| \leq c_0(\Omega) \left\{ \sum_{i=1}^{n} |D_i u|^2 \right\}^{1/2}, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega), \tag{2.3}$$

lo cual implica que $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert para el producto escalar y la norma:

$$\begin{cases} ((u,v)) = \sum_{i=1}^{n}(D_i u, D_i v) \\ \\ \|u\| = \{((u,u))\}^{1/2}, \end{cases} \tag{2.4}$$

siendo esta norma equivalente a la norma inducida por $H^1(\Omega)$. Remarcamos en este punto la importancia de los espacios de Sobolev, cobrando especial relevancia a través de los teoremas de densidad, inmersión, compacidad y traza [4].

2.2.1. Teoremas de densidad.

Si Ω es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, de la clase $\mathscr{C}^m, m \geq 1, 1 \leq p < \infty$, entonces $\mathscr{C}^m(\overline{\Omega})$ es denso en $W^{m,p}(\Omega)$.

(2.5)

Esto resultado de densidad es también válido si asumimos regularidades débiles en Ω. En particular, será válido siempre que:

Exista un operador continuo y lineal de prolongación, $\Pi \in \mathscr{L}(W^{m,p}(\Omega), W^{m,p}(\mathbb{R}^n))$, $(\Pi u)(x) = u(x)$ para casi cualquier $x \in \Omega$.

(2.6)

Esto implica, cuando Ω es suficientemente regular, que:

$$\begin{cases} W^{m,p}(\Omega) \textit{ es denso en } W^{m-1,p}(\Omega) \\ \\ H^m(\Omega) \textit{ es denso en } H^{m-1}(\Omega). \end{cases}$$

2.2.2. Teoremas de inmersión.

Sea p un valor real mayor o igual que uno; y consideremos (al menos de momento) $m \geq 1$ como un entero. Asumamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, no necesariamente acotado, el cual es suficientemente regular (Lipschitziano), por ejemplo, de clase $\mathscr{C}^{m+1}$. Entonces, si $1/p - m/n > 0, W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), 1/q = 1/p - m/n$, y la inmersión es continua:

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c(m,n,p,\Omega)\,\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \tag{2.7}$$

Si $1/p - m/n = 0$, las funciones $W^{m,p}(\Omega)$ están en $L^q_{loc}(\Omega)$, es decir, L^q en cualquier subdominio acotado de Ω, para q, $1 \leq q < \infty$:

$$\left\| u|_{\mathcal{O}} \right\|_{L^q(\mathcal{O})} \leq c(m,n,\mathcal{O},\Omega) \left\| u \right\|_{W^{m,p}(\Omega)} \qquad \forall \mathcal{O} \; acotado \; \subset \Omega \tag{2.8}$$

Si $1/p - m/n < 0$, entonces escribimos $m - p/m = k + \alpha$, con k la parte entera de $m - n/p$, $0 \leq \alpha < 1$, y las funciones en $W^{m,p}(\Omega)$ pertenecen a $\mathscr{C}^{k,\alpha}(\mathcal{O})$, para todo $\mathcal{O} \subset \Omega$ acotado, y:

$$\left| D^k u(x) - D^k u(y) \right| \leq c(m,n,p,\mathcal{O},\Omega) \left\| u \right\|_{W^{m,p}(\mathcal{O})} |x-y|^{\alpha}, \forall x,y \in \mathcal{O} \subset \Omega, \; acotado. \tag{2.9}$$

El espacio $\mathscr{C}^{k,\alpha}(\mathcal{O})$ es el espacio de funciones en $\mathscr{C}^k(\overline{\mathcal{O}})$ cuyas derivadas de orden k, $D^j u$, $[j] = k$, son Hölder[2] continuas con exponente α:

$$\underset{\substack{x,y \in \mathcal{O} \\ x \neq y}}{Sup} \frac{|D^j u(x) - D^j u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} < \infty \qquad \forall j \;\; [j] = k.$$

Este es un espacio de Banach cuando está dotado de la norma:

$$\left\| u \right\|_{\mathscr{C}^{k,\alpha}(\Omega)} = \left\| u \right\|_{\mathscr{C}^k(\overline{\mathcal{O}})} + \underset{\substack{[j]=k \\ x,y \in \mathcal{O} \\ x \neq y}}{Sup} \frac{|D^j u(x) - D^j u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}.$$

Cuando Ω está acotado, la inmersión de $W^{m,p}(\Omega)$ en $\mathscr{C}^{k,\alpha}(\Omega)$ es continua, de acuerdo con (2.9). Las propiedades de inmersión de arriba son válidas cuando $\Omega = \mathbb{R}^n$. Para $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, son válidas para para dominios menos regulares que los dominios $\mathscr{C}^{m+1}$; serán válidas siempre y cuando se satisfaga (2.6). Cuando u pertenece a $W_0^{m,p}(\Omega)$, pertenece $\tilde{u}$ (lo cual equivale a u en Ω y a 0 en Ω^C), y por tanto las propiedades de inmersión de más arriba —incluyendo (2.7)-(2.9)— son válidas para u en $W_0^{m,p}(\Omega)$ sin cualquier hipótesis de regularidad para Ω.

2.2.3. Teoremas de compacidad.

Sea Ω cualquier conjunto acotado de clase $\mathscr{C}^1$, o que satisfaga (2.6) (para $m = 1$). Entonces:

> La inmersión $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{q_1}(\Omega)$ es compacta para cualquier q_1, $1 \leq q_1 < \infty$, si $p \geq n$; y para cualquier q_1, $1 \leq q_1 < 1$, $(1/q = 1/p - 1/n)$ si $1 \leq p < n$.

[2]Se dice que una función f real o de valor complejo en el espacio euclídeo d-dimensional es Hölder continua cuando hay constantes reales no negativas C, $\alpha > 0$ tales que: $|f(x) - f(y)| \leq C \left\| x - y \right\|^{\alpha}$, para todos los x e y en el dominio de f. El parámetro α se denomina condición Hölder [5].

$$(2.10)$$

Si $p > n$, la inmersión $W^{1,p}(\Omega) \subset \mathscr{C}^{0,\alpha_1}(\Omega)$ es compacta, para todo $\alpha_1 < \alpha = 1 - n/p$.

$$(2.11)$$

Con los mismos valores de q_1 y α_1, las inmersiones:

$$\begin{cases} \dot{W}^{1,p}(\Omega) \subset L^{q_1}(\Omega) & si\, p \leq n \\ \dot{W}^{1,p}(\Omega) \subset \mathscr{C}^{0,\alpha_1}(\Omega) & si\, p \leq n, \end{cases}$$

son compactas para cualquier conjunto acotado Ω.

$$(2.12)$$

2.2.4. Teoremas de traza.

Si Ω es suave (por ejemplo, de clase $\mathscr{C}^{m+1}$) y una función u pertenece al espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, entonces podemos definir la traza de u en Γ, la cual coincide con el valor de u en Γ cuando u es regular ($u \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$). De forma más general, si $v = \{v_1, ..., v_n\}$ es el vector normal unitario exterior en Γ, podemos también definir las trazas en Γ para ciertas derivadas normales $\partial^j u/\partial v^j$, $j = 1, ..., m-1$. En pos de la simplicidad, nos restringiremos al caso $p = 2$; se hará alusión posterior a los teoremas de traza relacionados con los espacios $W^{m,p}(\Omega)$.

Para $\mathbf{m} = \mathbf{1}$:

Sea Ω un conjunto acotado de clase $\mathscr{C}^1$. Existe un operador lineal continuo $\gamma_0 \in \mathscr{L}(H^1(\Omega), L^2(\Gamma))$ tal que:

$$\gamma_0 u = u|_\Gamma, \qquad \forall u \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega}).$$

$$(2.13)$$

El espacio $L^2(\Gamma)$ es el espacio de (clases de) funciones reales que son L^2 en Γ para la medida $d\Gamma$. También, se tiene que:

$$H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega), \gamma_0 u = 0\right\} = el\ kernel\ de\ \gamma_0 \tag{2.14}$$

El espacio $\gamma_0(H^1(\Omega))$ no constituye la totalidad del espacio $L^2(\Gamma)$; se denota como $H^{1/2}(\Gamma)$, y a su vez este espacio puede ser dotado, por ejemplo, con la norma del cociente:

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \underset{\gamma_0 u=\varphi}{Inf} \|u\|_{H^1(\Omega)}, \tag{2.15}$$

la cual lo convierte en un espacio de Hilbert. Su dual se denota como $H^{-1/2}(\Gamma)$. Los siguientes resultados son similares para $\mathbf{m \geq 2}$:

> Sea Ω un conjunto acotado de clase $\mathscr{C}^{m+1}$. Existe un conjunto de un operadores lineales continuos $\gamma_0, ..., \gamma_{m-1} \in \mathscr{L}(H^m(\Omega), L^2(\Gamma))$ tales que:

$$\begin{cases} \gamma_j u = \frac{\partial^j u}{\partial v^j}|_\Gamma, \quad \forall u \in \mathcal{C}^{m+1}(\overline{\Omega}), j = 0, ..., m-1 \\ H_0^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega), \gamma_j u = 0, j = 0, ..., m-1\} = \text{ el kernel de } \gamma_0 \times \cdots \times \gamma_{m-1}. \end{cases} \tag{2.16}$$

El espacio $\gamma_j(H^m(\Omega))$ —que no es $L^2(\Gamma)$—, se denota como $H^{m-j-1/2}(\Omega)$, y se le puede atribuir una norma similar a (2.15). Su dual se denota como $H^{-m+j+1/2}(\Omega)$. Es posible formular definiciones alternativas y normas para los espacios $H^{r/2}(\Gamma)$, $r \in \mathbb{N}$, las cuales, en última instancia, resaltan la consistencia de las definiciones anteriores.

2.2.5. Algunos espacios adicionales.

En la práctica, resulta interesante estudiar las propiedades de otros espacios de Sobolev, menos habituales.

- m **no entero.**

Sean X e Y dos espacios de Hilbert, $X \subset Y$, siendo X denso en Y, y con una inyección continua. En este contexto, la teoría elemental de interpolaciones proporciona una familia de espacios de Hilbert, denotados como $[X, Y]_\theta$, $0 \leq \theta \leq 1$, tales que $[X, Y]_0 = X$, $[X, Y]_1 = Y$ y

$$X \subset [X, Y]_\theta \subset Y, \tag{2.17}$$

siendo las inyecciones en la expresión anterior continuas, y cada espacio es denso en el sucesivo. La norma en $[X, Y]_\theta$ es tal que:

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta} \leq c(\theta)\, \|u\|_X^{1-\theta}\, \|u\|_Y^{\theta}, \qquad \forall\, u \in X, \qquad \forall\, \theta \in [0,1]. \tag{2.18}$$

Mediante la interpolación entre $H^m(\Omega)$ y $H^{m+1}(\Omega)$, podemos definir para $\alpha \in\,]0,\, 1[$:

$$H^{m+\alpha}(\Omega) = [H^{m+1}(\Omega), H^m(\Omega)]_{1-\alpha}. \tag{2.19}$$

Por otra parte, también podemos definir $H^{m+\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$, $m \in \mathbb{N}$, mediante una interpolación apropiada entre $H^{m+1}(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$ (o $H^{m-1}(\Omega), ...$), y las definiciones serían equivalentes; es decir, los espacios correspondientes son isomorfos.

Los teoremas de densidad, inmersión, compacidad y traza enunciados en la sección anterior se pueden extender sin modificación alguna a los espacios $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}_+$. Los teoremas de compacidad (2.10)-(2.12) se pueden completar de la siguiente manera:

> Si Ω es un conjunto acotado de clase $\mathscr{C}^1$ (o que satisface (2.6) con $m = 1$), la inmersión de $H^{s_1}(\Omega)$ en $H^{s_2}(\Omega)$ es compacta, para cualesquiera s_1, s_2, $0 \leq s_2 < s_1$.
>
> (2.20)

También podríamos definir espacios intermedios entre los espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, $W^{m+1,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, y por tanto obtener la familia de espacios $W^{s,p}(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}_+$, $p > 1$. Sin embargo, diferentes métodos producirán diferentes definiciones, no equivalentes, de estos espacios.

- **Funciones periódicas espaciales.**

En ocasiones, es preciso considerar espacios de funciones reales definidas en $\mathbb{R}^n$, y que son periódicas con un periodo $L_j > 0$ en cada dirección $x_1, ..., x_n$,

$$u(x + L_j e_j) = u(x), \qquad \forall\, x, j = 1, ..., n, \tag{2.21}$$

donde $e_1, ..., e_n$, es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. En este caso, denotamos el periodo como Ω, $\Omega =]0, L_1[\times \cdots \times]0, L_n[$, y denotamos como $H^m_{per}(\Omega)$ (o también como $W^{m,p}_{per}(\Omega)$) al espacio de restricciones a Ω de funciones periódicas —en el sentido de (2.21)— que están en $H^m(\mathcal{O})$ (o en $W^{m,p}(\mathcal{O})$) en cada conjunto abierto $\mathcal{O}$. Haciendo uso de los teoremas de traza, podemos mostrar que $H^1_{per}(\Omega)$ es el espacio de u en $H^1(\Omega)$ de manera que las trazas $\gamma_0 u$ en las caras correspondientes de Ω son iguales[3][4]; éste es un subespacio de Hilbert de $H^1(\Omega)$. De manera similar, $H^m_{per}(\Omega)$ es el espacio de u en $H^m(\Omega)$ en el cual las trazas $\gamma_j u$ en las caras correspondientes de Ω son iguales (si j es par u opuesto; si j es

[3] $\Gamma_j = \Gamma \cap \{x_j = 0\}$ y $\Gamma_{j+1} = \Gamma \cap \{x_j = L_j\}$ son las denominadas caras correspondientes de Ω (o de Γ). Dos puntos correspondientes de Γ son dos puntos con las mismas coordenadas, exceptuando las j-ésimas, las cuales son iguales a 0 y L_j $(j = 1, ..., n)$.

[4] Parte de lo que decimos aquí y en la página siguiente se expuso ya en la segunda página de este capítulo.

impar —debido a la orientación opuesta de v en las caras correspondientes—, $j = 1, ..., m - 1$.

Para estudiar los espacios $H^m_{per}(\Omega)$ podemos usar una expansión de Fourier:

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} u_k exp(2i\pi k \cdot \frac{x}{L}), \tag{2.22}$$

con $\overline{u}_k = u_{-k}$ (de modo que u es real), y:

$$\frac{x}{L} = \left\{ \frac{x_1}{L_1}, ..., \frac{x_n}{L_n} \right\}, \qquad k \cdot \frac{x}{L} = k_1 \cdot \frac{x_1}{L_1} + ... + k_n \cdot \frac{x_n}{L_n} \tag{2.23}$$

Por tanto, u estará en $L^2(\Omega)$ si y sólo si:

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = |\Omega| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |u_k|^2 < \infty, \qquad |\Omega| = L_1 ... L_n,$$

y u estará en $H^s_{per}(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}_+$, si y sólo si:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|^2)^s |u_k|^2 < \infty. \tag{2.24}$$

Adicionalmente, la raíz de (2.24) induce en $H^2_{per}(\Omega)$ una norma equivalente a la de $H^s(\Omega)$.

Denotamos mediante $\dot{L}^2(\Omega)$ y $\dot{H}^m(\Omega)$ al espacio de funciones u en $L^2(\Omega)$ o $H^m(\Omega)$ tales que:

$$\int_\Omega u(x)dx = 0.$$

Por tanto, $\dot{H}^m_{per}(\Omega)$ ó $\dot{H}^s_{per}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}_+$, es el espacio de funciones u en $L^2(\Omega)$ que satisfacen (2.22) y (2.24), y:

$$u_0 = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x)dx = 0. \tag{2.25}$$

Encontramos en $\dot{H}^1_{per}(\Omega)$ una desigualdad de Poincaré similar a (2.3):

$$|u| \leq c'_0(\Omega) \|u\|, \qquad \forall\, u \in \dot{H}^1_{per}(\Omega), \tag{2.26}$$

y esto nos muestra que $\dot{H}^1_{per}(\Omega)$ es Hilbertiano para el producto escalar $((\cdot,\cdot))$ definido en (2.4), y $\|u\| = \{((u,u))\}^{1/2}$ será una norma en este espacio, equivalente a la inducida por $H^1(\Omega)$.

2.3. Operadores lineales.

Antes de introducir el operador A, fundamental en el marco de las ecuaciones de Navier-Stokes, es preciso introducir algunas nociones teóricas sobre operadores lineales que se verán reflejadas directamente en la sección siguiente a través de la formulación del problema de Stokes. En esta sección, introduciremos a través de distintos apartados los operadores acotados, los operadores compactos y los operadores simétricos; y tendremos la oportunidad de ver que un operador compacto y simétrico se comporta de manera muy similar a una matriz real simétrica. Esto nos permitirá encontrar bases que constituidas enteramente por las autofunciones de cierto operador lineal dado.

Decimos que un operador A en un espacio vectorial V es lineal si:

$$A(x+\lambda y) = Ax + \lambda Ay \quad\quad x, y \in V \;\; y \;\; \lambda \in \mathbb{R}(\text{ó } \mathbb{C}).$$

2.3.1. Operadores lineales acotados en espacios de Banach.

Decimos que un operador lineal A de un espacio normado $(X, \|\cdot\|_X)$ a otro espacio normado $(Y, \|\cdot\|_Y)$ está acotado si existe una constante M tal que:

$$\|Ax\|_Y \leq M\,\|x\|_X \quad\quad \forall\, x \in X. \tag{2.27}$$

Denotamos mediante $\mathcal{L}(X,Y)$ al espacio de todas las aplicaciones lineales acotadas de X a Y. La norma del operador de un operador A (de X a Y) es el valor más pequeño de M tal que (2.27) se cumple:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \text{ínf}\,\{M : (2{,}27) \text{ se verifica}\}\,. \tag{2.28}$$

Una definición equivalente es:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \underset{x\neq 0}{sup}\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \underset{\|x\|_X=1}{sup}\,\|Ax\|_Y\,. \tag{2.29}$$

Cuando no se dé lugar a confusión, omitiremos el subíndice $\mathcal{L}(X,Y)$ en la norma, añadiendo en ocasiones el subíndice «*op*» (para «operador»), con el fin de de obtener una notación algo más clara $\left(\|\cdot\|_{op}\right)$. El espacio $\mathcal{L}(X,Y)$ es un espacio de Banach siempre que Y sea un espacio de Banach; sorprendentemente, esto no depende de si el espacio X es completo o no.

Proposición 1. *Sean X un espacio normado e Y un espacio de Banach. Entonces, $\mathcal{L}(X,Y)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(X,Y)$. Necesitamos mostrar que $\{A_n\} \to A$ para cierto $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Debido a que $\{A_n\}$ es de Cauchy, para un $\epsilon > 0$ existe un N tal que:

$$\|A_n - A_m\|_{op} \leq \epsilon \quad \forall\, n, m \geq N. \tag{2.30}$$

Mostraremos ahora que, para cada $x \in X$ fijado, la sucesión $\{A_n x\}$ es Cauchy en Y. Esto se debe a que:

$$\|A_n X - A_m x\|_Y = \|(A_n - A_m)x\|_Y \leq \|A_n - A_m\|_{op} \|x\|_X\,, \tag{2.31}$$

y que $\{A_n\}$ es Cauchy en $\mathcal{L}(X,Y)$. Puesto que Y es completo, se tendrá que $A_n x \to y$, cuando y depende de x. Podemos también definir una aplicación $A : X \to Y$ mediante $Ax = y$. Sin embargo, aún debemos mostrar que $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ y que $A_n \to A$ en la norma del operador.

En primer lugar, A es lineal debido a que:

$$A(x + \lambda y) = \lim_{n\to\infty} A_n(x + \lambda y) = \lim_{n\to\infty} A_n x + \lambda \lim_{n\to\infty} A_n y = Ax + \lambda Ay.$$

Para mostrar que A está acotado, tomamos $n, m \geq N$ (de (2.30)) en (2.31) e imponemos $m \to \infty$. Ya que $A_m x \to Ax$, tendremos que:

$$\|A_n x - Ax\|_Y \leq \epsilon \|x\|_X\,. \tag{2.32}$$

Puesto que (2.32) se cumple para cada x, tendremos que:

$$\|A_n - A\|_{op} \leq \epsilon, \tag{2.33}$$

y por tanto $A_n - A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Debido a que $\mathcal{L}(X,Y)$ es un espacio vectorial y que $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$, inmediatamente se deduce que $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, y (2.33) muestra que $A_n \to A$ en $\mathcal{L}(X,Y)$. ■

Una propiedad interesante de los operadores lineales acotados es que éstos son automáticamente continuos.

Proposición 2. *Sea $L : X \to Y$ un operador o una aplicación lineal. Entonces, L es continuo si y solo si está acotado.*

Demostración. Si L está acotado, entonces:

$$\|L(x_n - x)\|_Y \leq \|L\|_{op} \|x_n - x\|_X \,,$$

lo cual aporta continuidad. Si L es continuo pero no acotado, entonces para cada n existe un y_n tal que $\|Ly_n\|_Y > n^2 \|y_n\|_X$. Entonces:

$$x_n = y_n/(n \|y_n\|_X) \to 0,$$

pero $\|Lx_n\|_Y > n$, de modo que L no es continuo en el origen, lo cual supone una contradicción. Por tanto, continuidad implica acotación. ■

Introduciremos ahora, a modo de ejemplo, un operador del que haremos uso en los apartados siguientes.

Lema 1. *Sea $k(x,y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$:*

$$\int_\Omega \int_\Omega |k(x,y)|^2 \, dxdy = C^2 < \infty.$$

Entonces, el operador integral $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definido por:

$$[Ku](x) = \int_\Omega k(x,y)u(y)dy \tag{2.34}$$

está acotado.

Demostración. Tenemos:

$$|Ku|^2 = \int_\Omega \left(\int_\Omega k(x,y)u(y)dy \right)^2 dx,$$

y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos:

$$|Ku|^2 = \int_\Omega \left(\int_\Omega |k(x,y)|^2 \, dy \right) \left(\int_\Omega |u(y)|^2 \, dy \right) dx = \left(\int_\Omega \int_\Omega |k(x,y)|^2 \, dxdy \right) \left(\int_\Omega |u(y)|^2 \, dy \right) = C^2 \, |u|^2 ,$$

lo cual muestra que $\|K\|_{op} \leq C$. ■

2.3.2. Dominio, rango, kernel y operador inverso.

Podría darse el caso de que un operador no se halle definido en la totalidad de X. Llamaremos *dominio* al subespacio en el cual un operador se encuentra definido. Así pues, para un operador lineal genérico A, denotaremos su dominio como $D(A)$. Si $A : X \to Y$, entonces la imagen del dominio de A bajo la aplicación de A se denomina *rango* de A, denotado como $R(A)$:

$$R(A) = \{v \in Y : v = Au, u \in D(A)\} .$$

Esto bien podría ser un subespacio propio de Y. En general, podríamos escribir:

$$X \supset D(A) \ni x \to Ax \in R(A) \subset Y.$$

Un operador lineal acotado definido en un subespacio lineal de X se puede extender a un operador lineal acotado definido sobre todo X (como puede verse en la sección *3.3* [6]). Debido a esto, resulta poco natural restringirse al dominio de definición de un operador lineal y acotado, de modo que en las siguientes secciones asumiremos $D(A) = X$.

En analogía con la teoría de matrices, diremos que A es *invertible* si la ecuación $Ax = y$ tiene una única solución para cada $y \in R(A)$ (es decir, si A es inyectiva). En este caso, definimos el *inverso* de A, A^{-1} mediante $A^{-1}y = x$. Es sencillo comprobar que $AA^{-1}u = u, \forall u \in R(A)$ y $A^{-1}Au = u, \forall u \in D(A)$. Si A es lineal y A^{-1} existe, entonces este último es también lineal. Otro concepto importante es el de *kernel* de A, $Ker(A)$, el espacio de todos los elementos de $D(A)$ que A vuelve cero:

$$Ker(A) = \{u \in D(A) : Au = 0\} .$$

La invertibilidad de A es equivalente a la trivialidad de su kernel.

Lema 2. *A es invertible si $Ker(A) = \{0\}$.*

Demostración. Supongamos que A es invertible. Entonces, la ecuación $Ax = y$ tiene una única solución para cualquier $y \in R(A)$. Sin embargo, si $Ker(A)$ contiene algún elemento no-nulo z, entonces $A(x+z) = y$ también, de modo que $Ker(A)$ debe ser $\{0\}$. En cambio, si A no es invertible, entonces para algún $y \in R(A)$ habrá dos soluciones distintas, x_1 y x_2, de $Ax = y$, y por tanto $A(x_1 - x_2) = 0$, proporcionando un elemento no-nulo de $Ker(A)$. ■

2.3.3. Operadores compactos.

Introduciremos una clase de operadores cuyo comportamiento resulta notablemente más simple que los operadores generales acotados. La compacidad implícita en su definición hace su análisis mucho más simple. El propósito de introducir estos operadores es que, como veremos más adelante, existen operadores diferenciales cuyo inverso es compacto. Partamos de la siguiente definición, válida tanto para operadores lineales como no-lineales:

Definición 1. *Un operador $K : X \to Y$ es compacto si la imagen de cualquier conjunto W acotado en X tiene un cierre compacto en Y: $\overline{K(W)}$ es compacto en Y para todo $W \subset X$ acotado.*

Habitualmente, usaremos esta definición para la imagen consecuencia de K de una sucesión $\{x_n\}$ contenida en un conjunto acotado X. De hecho, a raíz de esto la sucesión $\{Kx_n\}$ en un subconjunto compacto de Y, y por tanto no tiene una subsucesión convergente. Aunque un operador lineal y acotado no tiene por qué ser compacto, cualquier operador compacto está acotado.

Lema 3. *Un operador compacto está acotado.*

Demostración. Debido a que $B = B_X(0,1)$ —la esfera unitaria en X— está acotada y K es compacto, $\overline{K(B)}$ es compacto, y por lo tanto acotado, contenido en $B_Y(0,R)$. Entonces:

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|K(x)\|_Y \leq R,$$

y entonces, debido a (2.29), $\|K\|_{op} \leq R$ y K está acotado. ■

El espacio de todos los operadores lineales compactos de X en Y, $\mathcal{K}(X,Y)$, es un espacio de Banach cuando está equipado con la norma del operador, siempre que Y sea un espacio de Banach. Contemplemos el siguiente resultado de completitud:

Teorema 1. *Supongamos que X es un espacio normado e Y un espacio de Banach. Si $\{K_n\}$ es una sucesión de operadores (lineales) compactos en $\mathcal{L}(X,Y)$ convergentes hacia cierto $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ en la norma del operador, i.e.:*

$$\sup_{\|x\|_X=1} \|K_n x - Kx\|_Y \to 0 \quad \textit{cuando } n \to \infty,$$

entonces K es compacto.

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en X. Dado que K_1 es compacto, $K_1(x_n)$ tiene una subsucesión convergente, $K_1(x_{n_{lj}})$. Como $x_{n_{lj}}$ está acotado, $K_2(x_{n_{lj}})$ tiene una subsucesión convergente, $K_2(x_{n_{2j}})$. Se repite este proceso para obtener una familia de subsucesiones encajadas, $x_{n_{kj}}$, con $K_l(x_{n_{kj}})$ convergente $\forall l \leq k$.

Consideremos ahora la subsucesión diagonal $y_j = x_{n_{jj}}$. Ésta es una subsucesión de la $\{x_n\}$ original, y mostraremos ahora que $K(y_j)$ es Cauchy, y por tanto convergente, para completar así la prueba. Escogiendo un $\epsilon > 0$, usamos la desigualdad triangular para escribir:

$$\|K(y_i) - K(y_j)\|_Y \leq \|K(y_i) - K_n(y_i)\|_Y + \|K_n(y_i) - K_n(y_j)\|_Y + \|K_n(y_j) - K(y_j)\|_Y .$$

Debido a que $\{y_j\}$ está acotada y $K_n \to K$ en el operador norma, elegimos un n suficientemente grande para que:

$$\|K(y_j) - K_n(y_j)\|_Y \leq \epsilon/3$$

para todos los y_j de la sucesión. Para dicho valor de n, la sucesión $K_n(y_j)$ es Cauchy, y por tanto existe un N tal que, para $i, j > N$, podamos garantizar:

$$\|K_n(y_i) - K_n(y_j)\|_Y \leq \epsilon/3.$$

De este modo, ahora tendremos:

$$\|K(y_i) - K(y_j)\|_Y \leq \epsilon \quad \forall\, i, j \geq N,$$

y $\{K(y_n)\}$ es una sucesión de Cauchy. ■

Corolario 1. *Si X es un espacio normado e Y es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{K}(X,Y)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Si $\{K_n\}$ es una sucesión de Cauchy de elementos en $\mathcal{K}(X,Y)$, entonces $\{K_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(X,Y)$. Dado que $\mathcal{L}(X,Y)$ es un espacio de Banach por la **Proposición** 1, se tiene que $K_n \to K$ para cierto $K \in \mathcal{L}(X,Y)$. Por otra parte, el **Teorema** 1 muestra que K es compacto y, por tanto, $K \in \mathcal{K}(X,Y)$. ■

El **Teorema** 1 puede resultar especialmente útil cuando se aplica a una serie de aproximaciones finito-dimensionales de un operador, puesto que cualquier operador acotado con un rango de dimensión finita es compacto.

Lema 4. *Sea A un operador acotado (no necesariamente lineal) desde X hasta Y. Si A tiene rango finito-dimensional, entonces A es compacto.*

Demostración. Sea $u_n \in D(A)$ una sucesión acotada dada. Debido a que A está acotado, entonces $Au_n \in R(A)$ está también acotado. Puesto que $R(A)$ es finito-dimensional, el teorema de Bolzano-Weierstrass implica que Au_n tiene una subsucesión convergente, y por tanto A es compacto. ■

Usamos ahora el **Teorema** 1 y el **Lema** 4 para mostrar que el operador lineal del **Lema** 1 es compacto.

Proposición 3. *El operador integral $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ dado por:*

$$[Ku](x) = \int_\Omega k(x,y)u(y)dy, \tag{2.35}$$

donde $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$, es compacto.

Demostración. Sea $\{\phi_j\}$ una base ortonormal para $L^2(\Omega)$. Se puede demostrar que $\{\phi_i(x)\phi_j(y)\}$ es una base ortonormal para $L^2(\Omega \times \Omega)$. Si escribimos $k(x,y)$ en términos de esta bases, tendremos:

$$k(x,y) = \sum_{j,k=1}^{\infty} k_{ij}\phi_i(x)\phi_j(y),$$

donde los coeficientes k_{ij} vienen dados en la forma $k_{ij} = \int_{\Omega\times\Omega} k(x,y)\phi_i(x)\phi_j(y)dxdy$ y la suma converge en $L^2(\Omega \times \Omega)$. Dado que $\{\phi_i(x)\phi_j(y)\}$ es una base, tenemos:

$$\|k\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega)} = \int_\Omega \int_\Omega |k(x,y)|^2 dxdy = \sum_{i,j=1}^{\infty} |k_{ij}|^2. \tag{2.36}$$

Aproximamos ahora K mediante operadores derivados a partir de los truncamientos finitos de la expansión de $k(x,y)$. Fijamos:

$$\begin{cases} k_n(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}\phi_i(x)\phi_j(y), \\ \\ [K_n u](x) = \int_\Omega k_n(x,y)u(y)dy. \end{cases}$$

Si $u \in L^2(\Omega)$ viene dado por $u = \sum_{l=1}^{\infty} c_l \phi_l$, entonces:

$$K_n u = \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} c_j \phi_i,$$

y por tanto K_n tiene rango n. A raíz del **Lema** 4, sabemos que K_n es compacto para cada n. Si somos capaces de mostrar que $K_n \to K$ en la norma del operador, entonces podremos usar el **Teorema** 1 para mostrar que K es compacto. Los argumentos usados en el **Lema** 1 muestran que:

$$\|K - K_n\|^2 \leq \int_\Omega \int_\Omega |k(x,y) - k_n(x,y)|^2 \, dxdy = \sum_{i,j=n+1}^{\infty} |k_{ij}|^2 \,,$$

usando la expansión de k y k_n. La convergencia de K_n hacia K surge debido a que la suma en (2.36) es finita. ■

2.3.4. Operadores simétricos compactos en espacios de Hilbert.

La teoría de autovalores en matrices resulta particularmente simple en aquellos casos en los cuáles estas matrices son simétricas, lo cual asegura que los autovalores asociados son reales y que sus autovectores son mutuamente ortogonales. Análogamente, cuando H es un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(H,H)$, podemos hacer la siguiente definición:

Definición 2. *Un operador lineal $A \in \mathcal{L}(H,H)$ es simétrico si:*

$$(u, Av) = (Au, v) \qquad \forall u, v \in H.$$

No obstante, para tales operadores simétricos, existe una manera alternativa de obtener el operador norma de A:

Proposición 4. *Si A es un operador simétrico, entonces:*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H,H)} = \underset{u:\|u\|=1}{sup} |(Au, u)| \,.$$

Demostración. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz resulta obvio que, para $\|u\| = 1$,

$$|(Au, u)| = \|Au\| \, \|u\| \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H,H)} \,. \tag{2.37}$$

Veamos la desigualdad opuesta. Si escribimos α para el lado derecho de (2.37), entonces:

$$|(Au,u)| = \alpha \|u\|^2 \qquad u \in H. \tag{2.38}$$

Para cualesquiera u y v en H, tendremos:

$$4(Au,v) = (A(u+v),u+v) - (A(u-v),u-v) \leq \alpha(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) = 2\alpha(\|u\|^2 + \|v\|^2),$$

usando (2.38) y la ley del paralelogramo que debe satisfacer la norma en un espacio de Hilbert[5]. Ahora bien, si $Au \neq 0$ escogemos:

$$v = \|u\| \frac{Au}{\|Au\|},$$

para obtener, puesto que $\|v\| = \|u\|$,

$$\|Au\| \leq \alpha \|u\|,$$

que obviamente se verificará si $Au = 0$, y de este modo tenemos:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq \alpha,$$

lo cual nos da la igualdad (2.37). ■

Mostraremos ahora que, si $k(x,y)$ es simétrica, entonces el operador integral K lo es también:

Lema 5. *Si $k(x,y) = k(y,x)$, entonces el operador integral (2.34) es simétrico.*

Demostración. El producto interno (Ku,v) viene dado por:

$$\int_\Omega [Ku](x)v(x)dx = \int_\Omega \left(\int_\Omega k(x,y)u(y)dy\right) v(x)dx = \int_\Omega \int_\Omega k(x,y)u(y)v(x)dxdy =$$

[5] $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

$$= \int_\Omega \int_\Omega k(y,x)u(y)v(x)dxdy = \int_\Omega \left(\int_\Omega k(y,x)v(x)dx \right) u(y)dy = \int_\Omega u(y) \left[Kv \right] (y)dy,$$

lo cual es (u, Kv). ■

2.3.5. Bases propias para un operador compacto simétrico.

Un autovalor de A es un número complejo λ tal que existe un valor no-nulo $u \in H$ (la autofunción) con:

$$Au = \lambda u.$$

Para un operador A compacto y simétrico, podemos mostrar que al menos uno de los dos valores $\|A\|_{op}$ ó $-\|A\|_{op}$ es un autovalor.

Lema 6. *Si A es un operador simétrico y compacto, entonces al menos uno de los valores $\pm \|A\|_{op}$ es un autovalor de A.*

Demostración. Asumamos que $A \neq 0$ —pues, de otra forma, el resultado sería trivial—. A raíz de la **Proposición** 4:

$$\|A\|_{op} = \underset{\{|x|=1\}}{sup} |(Ax, x)|.$$

Entonces, existe una sucesión de vectores unitarios x_n tales que:

$$(Ax_n, x_n) \to \pm \|A\|_{op} = \alpha.$$

Dado que A es compacto, también habrá una sucesión x_{n_j} tal que Ax_{n_j} converge hacia cierto y. Renombremos ahora x_{n_j} como x_n. Consideremos:

$$\|Ax_n - \alpha x_n\|^2 = \|Ax_n\|^2 + \alpha^2 - 2\alpha(Ax_n, x_n) \leq 2\alpha^2 - 2\alpha(Ax_n, x_n)$$

Debido a la elección de x_n, el lado derecho de la expresión anterior tiende a cero cuando $n \to \infty$. A consecuencia de ello, puesto que $Ax_n \to y$:

$$\alpha x_n \to y,$$

y dado que fijamos $\alpha \neq 0$, debemos tener $x_n \to x$ para cierto $x \in H$. Por tanto, $Ax_n \to Ax = \alpha x$. A raíz de esto, tenemos que:

$$Ax = \alpha x,$$

y claramente $x \neq 0$, ya que $\|y\| = |\alpha| \, \|x\| = \|A\|_{op} \neq 0$. ■

Podemos aplicar este lema repetidamente para obtener una base para $R(a)$ conformada enteramente por autovectores.

Teorema 2. ***(Teorema de Hilbert-Schmidt)*** *Sea A un operador lineal, simétrico y compacto actuando sobre un espacio de Hilbert infinito-dimensional, H. Entonces, todos los autovalores λ_j de A son reales, y si están ordenados de forma que:*

$$|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n| \, ,$$

entonces tendremos:

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0.$$

Adicionalmente, las autofunciones w_j pueden ser escogidos de manera que formen una base ortonormal para $R(A)$, y la acción de A sobre cualquier $u \in H$ viene dada por:

$$Au = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, w_j) w_j.$$

Demostración. Debido al **Lema** 6, existe un w_1 tal que $\|w_1\| = 1$ y $Aw_1 = \pm \|A\| \, w_1$. Consideremos el subespacio de H perpendicular a w_1: $H_1 = w_1^{\perp}$. H_1 permanece invariante tras la actuación de A, dado que si $u \perp w_1$, entonces:

$$(Au, w_1) = (u, Aw_1) = \lambda_1 (u, w_1) = 0.$$

Si consideramos $A_1 = A|_{H_1}$, tendremos otro operador simétrico compacto cuya norma $\|A_1\|_{op} \leq \|A\|_{op}$, debido a que el supremo en la expresión (2.37) está tomado sobre un conjunto más pequeño (H_1

en lugar de H). Por tanto, podemos aplicar el mismo argumento a H_1 para obtener un autovalor $\lambda_2 = \pm \|A_1\|_{op}$, y su correspondiente autovector w_2, por construcción perpendicular a w_1. Continuando de esta forma por inducción, obtenemos una sucesión de autovectores ortonormales w_j, con $Aw_j = \lambda_j w_j$ y $|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n|$.

Supongamos ahora que $\lambda_j \not\to 0$, de modo que $|\lambda_j| \geq \eta$ para cierto $\eta \geq 0$. Entonces, para todos los $j, \eta w_j \in A(B(0,1))$; sin embargo, claramente ηw_j no tiene subsucesiones convergentes debido a que los $\{w_j\}$ son ortornormales, contradiciendo la compacidad de A. Finalmente, si x es ortogonal al sistema generador de $\{w_j\}$, entonces:

$$\|Ax\| \leq |\lambda_j| \|x\|$$

para todos los j, de modo que $Ax = 0$. Entonces, debemos tener $x \in Ker\ A$. Por tanto, no existen más autovalores no-nulos de A.

Si $\{k_j\}_{j\in\mathcal{I}}$ es una base ortonormal para el kernel de A, entonces $\{k_j\} \cup \{w_j\}$ es una base ortonormal para H. Por tanto, escribiendo:

$$u = \sum_{j=1}^{\infty}(u, w_j)w_j + \sum_{j\in\mathcal{I}}(u, k_j)k_j,$$

obtenemos:

$$Au = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, w_j) w_j.$$

Finalmente, a raíz de esta última igualdad observamos que los $\{w_j\}$ forman una base para el rango de A, completando así la prueba. ■

Resulta sensato preguntarse cuándo las autofunciones forman una base para todos los H. Podemos ver en la prueba del **Teorema** 2 que esto ocurre siempre que $Ker\ A = \{0\}$. También vimos, a través del **Lema 3.4**, que un operador A es invertible si y solo si $Ker\ A = \{0\}$. Por consiguiente, llegamos al siguiente corolario del **Teorema** 2:

Corolario 2. *Si A es invertible y satisface las condiciones del **Teorema** 2, entonces existe una base de H compuesta enteramente por autofunciones de A.*

2.3.6. Extensiones y operadores cerrables.

Sea $A = d/dx$. Supongamos que queremos considerar un operador diferencial como un operador de $L^2(0,1)$ dentro de $L^2(0,1)$, lo cual nos permitiría aprovechar la estructura del espacio de Hilbert de L^2. Escoger un dominio adecuado para A no resulta trivial. Por ejemplo, podríamos escoger que $D(A)$ fuese $C^j([0,1])$ para cualquier valor $j \geq 1$. De algún modo, querríamos escoger un $D(A)$ que fuese consistente con la definición de A, con la cual estamos familiarizados (en este caso, $C^1([0,1])$). Nuestro propósito es encontrar una forma canónica de extender d/dx a dominios mayores en L^2.

Definición 3. Un operador ($\hat{A}$,D($\hat{A}$)) es una extensión de $(A, D(A))$ si $D(\hat{A}) \supset D(A)$ y $\hat{A} = A$ en $D(A)$.

Podemos hallar uno de esos dominios de una manera estándar llamada «cierre del operador». Supongamos que empezamos con un operador $(A, D(A))$, con $A : X \to Y$. Consideremos una sucesión $\{x_n\}$ en X tal que:

$$x_n \to x \;\; en \;\, X \quad \& \quad Ax_n \to y \;\; en \;\, Y. \tag{2.39}$$

Ahora pues, si $x \in D(A)$, entonces querríamos tener $y = Ax$, pero esto no surge automáticamente debido a que A no está acotado y por lo tanto no es continuo. Para garantizar que $y = Ax$, basta con que para cada sucesión $x_n \to 0$, ya sea $Ax_n \to 0$ ó Ax_n no converja. Bajo esta hipótesis podemos definir una extensión de A, $\hat{A}$, tomando $D(\hat{A})$ como todos esos $x \in X$ para los cuales hay sucesiones que satisfacen (2.39) y definiendo $\hat{A}x = y$. Para ello, si hay dos sucesión $\{x_n\}$ y $\{\overline{x}_n\}$ que satisfagan:

$$\begin{cases} x_n \to x \;\; en \;\, X \quad \& \quad Ax_n \to y \;\; en \;\, Y \\ x_n \to x \;\; en \;\, X \quad \& \quad Ax_n \to \overline{y} \;\; en \;\, Y, \end{cases}$$

se llega a que —dado que $x_n - \overline{x}_n \to 0$— $y = \overline{y}$, y por tanto $\hat{A}x = y$ es una extensión bien definida de A. Esto nos proporciona un operador cerrado $\hat{A}$.

Definición 4. Un operador A es cerrado si, siempre que $\{x_n\} \in D(A)$ obedezca la relación (2.39), entonces $x \in D(A)$, con $Ax = y$.

El siguiente resultado muestra que un operador simétrico cuyo dominio es denso puede ser siempre cerrado.

Proposición 5. *Si A es un operador simétrico en un espacio de Hilbert H con dominio denso, entonces tiene una extensión cerrada $\overline{A}$ que también es simétrica.*

Demostración. Supongamos que $x_n \to 0$ y que $Ax_n \to f$. Entonces, para cualquier $u \in D(A)$, tenemos:

$$(f, u) = \lim_{n\to\infty} (Ax_n, u) = \lim_{n\to\infty} (x_n, Au) = 0.$$

Puesto que $D(A)$ es denso en H, se deduce que $(f, u) = 0$ para todos los $u \in H$ y, por tanto, escogiendo $u = f$ tendremos que $f = 0$. Podemos, por lo tanto, definir una extensión como hicimos anteriormente, tomando $\hat{A}$ como todos los $x \in X$ para las cuales hay sucesión que satisfagan (2.39). La simetría es clara. ■

Debido a este resultado, en el siguiente apartado no haremos distinción entre un operador y su extensión cerrada.

2.3.7. Teoría espectral para operadores simétricos no acotados.

De manera similar a como hicimos para la teoría de autovalores enfocada a operadores simétricos y compactos en un espacio de Hilbert, en esta sección orientaremos nuestro desarrollo hacia los operadores no acotados, apoyándonos en resultados previos. Dado que un operador no acotado no se encuentra necesariamente definido en la totalidad de H, debemos modificar apropiadamente la definición vista para el operador lineal:

Definición 5. *Un operador lineal* $(A, D(A))$ *es simétrico si:*

$$(Ax, y) = (x, Ay), \forall x, y \in D(A).$$

El siguiente lema servirá para relacionar los problemas donde A no está acotado con aquellos problemas en los que sí lo está:

Lema 7. *Si A es un operador simétrico no acotado cuyo rango abarca la totalidad de H y cuyo inverso está bien definido, entonces A^{-1} está acotado y es simétrico.*

Una condición que asegura que A^{-1} está bien definido es que A esté acotado inferiormente.

Demostración. Si A^{-1} no está acotado, entonces existe una sucesión $\{y_n\} \in D(A)$ tal que:

$$|Ay_n| = 1 \quad \& \quad |y_n| \to \infty.$$

Para cualquier $f \in R(A) = H$, existe un $x(A)$ tal que $Ax = f$. Por tanto:

$$|(y_n, f)| = |(y_n, Ax)| = |(Ay_n)x| \leq |x| \, .$$

Esto muestra que las funciones lineales L_n en H dadas por $f \to (y_n, f)$ están acotadas para cada $f \in H$ y para cada valor de n. A raíz del *Teorema de Banach-Steinhaus*[6], se deduce que debe haber una cota uniforme en la norma de estas funciones L_n. Ahora pues, dado que está claro que:

$$\|L_n\|_{op} \leq |y_n| \quad \& \quad L_n(y_n) = |y_n|^2 \,,$$

tenemos

$$\|L_n\|_{op} = |y_n| \,,$$

y por tanto los $\{y_n\}$, lo cual resulta en una contradicción. Para mostrar que A^{-1} es simétrico, tomamos $x, y \in H$, con $x = Au$ e $y = Av$, donde $u, v \in D(A)$. Entonces:

$$(A^{-1}x, y) = (A^{-1}Au, Av) = (u, Av) = (Au, v) = (Au, v) = (x, A^{-1}y).$$

■

Ahora, cualquier autofunción para A será también autofunción para A^{-1}, y viceversa, debido a que:

$$Aw_n = \lambda_n w_n \Leftrightarrow A^{-1}w_n = \lambda^{-1}w_n.$$

Por tanto, tenemos el siguiente resultado para el **Lema** 7, el **Teorema** 2 y el **Corolario** 2:

Corolario 3. ***(Teorema de Hilbert-Schmidt)*** *Sea A un operador lineal simétrico en H cuyo rango es todo H, y supongamos además que su inverso está bien definido y es compacto. Entonces, A tiene un conjunto infinito de autovalores reales λ_n, con sus correspondientes autofunciones w_n:*

$$Aw_n = \lambda_n w_n.$$

Si los autovalores están ordenados de modo que $|\lambda_{n+1}| \geq |\lambda_n|$, se tendrá:

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty.$$

[6] *Sea X un espacio de Banach e Y un espacio normado. Sean a su vez $S \subset \mathcal{L}(X, Y)$ y $\sup_{T \in S} \|T_x\|_Y < \infty, \forall x \in X$. Entonces: $\sup_{T \in S} \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty$. Para una prueba de este teorema, véase la sección 3.3 de [6].*

Además, los w_n pueden ser elegidos de manera que forman una base hilbertiana para H y, en términos de esta base, el operador A puede ser representado por:

$$Au = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, w_j) w_j \tag{2.40}$$

Apreciemos que una consecuencia del **Corolario** 3 es que el dominio de A puede representarse como:

$$D(A) = \left\{ u : u = \sum_{j=1}^{\infty} c_j w_j, \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \lambda_j^2 < \infty \right\}, \tag{2.41}$$

A partir de esta representación, surge que $D(A)$ es un espacio de Hilbert cuando está dotado del producto interno y la norma correspondiente:

$$\begin{cases} ((u,v))_D(A) = (Au, Av) \\ \|u\|_{D(A)} = \|Au\|. \end{cases}$$

2.4. El problema de Stokes y el operador A.

El problema de Stokes asociado a un problema con condiciones de contorno periódicas del tipo (adelantándonos a lo que veremos al introducir las ecuaciones de Navier-Stokes):

$$u(x + Le_i, t) = u(x,t) \qquad \forall x \subset \mathbb{R}^n, \forall t > 0,$$

donde $e_1, ..., e_n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, y L es el periodo en la dirección i-ésima, consiste en lo siguiente:

Dado un $f \in \dot{\mathbb{H}}_p^0(Q)$ ó $\dot{\mathbb{H}}_p^{-1}(Q)$, encontrar $u \in \dot{\mathbb{H}}_p^1(Q)$ y $p \in L^2(Q)$ tales que:

$$\begin{cases} -\triangle u + \nabla p = f \;\; en\; Q \\ \nabla \cdot u = 0 \;\; en\; Q. \end{cases} \tag{2.42}$$

Es sencillo resolver este problema explícitamente usando series de Fourier. Introduzcamos las series de Fourier de u, p y f:

$$\begin{cases} u = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} u_k e^{2\pi i k\cdot x/L} \\ p = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} p_k e^{2\pi i k\cdot x/L} \\ f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k e^{2\pi i k\cdot x/L}. \end{cases}$$

Las ecuaciones (2.42) se reducen, para cada $k \neq 0$, a:

$$\begin{cases} -\frac{4\pi^2|k|^2}{L^2}u_k + \frac{2i\pi k}{L}p_k = f_k \\ k\cdot u_k = 0. \end{cases} \tag{2.43}$$

Tomando el producto escalar en la primera de las ecuaciones anteriores con k y usando la segunda ecuación, encontramos los distintos p_k:

$$p_k = \frac{Lk\cdot f_k}{2i\pi\,|k|^2}, \qquad k\in\mathbb{Z}^n,\ k\neq 0.$$

Por tanto, la primera ecuación de (2.43) nos proporciona los distintos u_k:

$$u = -\frac{L^2}{4\pi^2\,|k|^2}\left(f_k - \frac{(k\cdot f_k)k}{|k|^2}\right), \qquad k\in\mathbb{Z}^n,\ k\neq 0.$$

A raíz de la definición (2.1) de $H_p^m(Q)$, si $f \in \dot{\mathbb{H}}_p^0(Q)$, entonces $u \in \dot{\mathbb{H}}_p^2(Q)$ y $p \in \dot{H}_p^1(Q)$; si $f \in \dot{\mathbb{H}}_p^{-1}(Q)$, entonces $u \in \dot{\mathbb{H}}_p^1(Q)$ y $p \in \dot{H}_p^0(Q)$. Ahora, si f pertenece a H, entonces $k\cdot f_k = 0$ para cada valor de k, de modo que $p = 0$ y:

$$u_k = -\frac{f_k L^2}{4\pi^2\,|k|^2}.$$

Definimos de esta manera la aplicación uno a uno $f \to u$ desde H sobre $D(A) = \{u\in H, \triangle u \in H\} = \dot{\mathbb{H}}_p^2(Q)\cap H$. Su inverso, desde $D(A)$ sobre H se denota mediante A; y, de hecho:

$$Au = -\triangle u \qquad \forall u\in D(A).$$

Si $D(A)$ está dotado de la norma inducida por $\dot{\mathbb{H}}_p^0(Q)$, entonces A se convierte en un isomorfismo desde $D(A)$ sobre H. A raíz de esto, la norma $|Au|$ en $D(A)$ es equivalente a la norma inducida por $\dot{\mathbb{H}}_p^2(Q)$. El operador A puede interpretarse como un operador lineal autoadjunto, positivo y no acotado en H; podemos definir las potencias A^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, con dominio $D(A^\alpha)$ en H. Agrupamos:

$$V_\alpha = D(A^{\alpha/2}),$$

donde V_α es un subespacio cerrado de $\dot{\mathbb{H}}_p^\alpha(Q)$, de modo que:

$$V_\alpha = \left\{ v \in \dot{\mathbb{H}}_p^\alpha(Q), \nabla \cdot v = 0 \right\}. \tag{2.44}$$

En particular, $V_2 = D(A)$, $V_1 = V$, $V_0 = H$, $V_{-1} = V'$. A es un isomorfismo desde $V_{\alpha+2}$ sobre V_α, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$; $D(A)$ sobre H, V sobre V', etc. La norma $\left| A^{\alpha/2} u \right|$ en V_α equivale a la norma inducida por $\dot{\mathbb{H}}_p^\alpha(Q)$:

$$c\,|u|_{2\alpha} \leq |A^\alpha u| \leq c'\,|u|_{2\alpha} \qquad \forall\, u \in D(A^\alpha), \tag{2.45}$$

donde c y c' dependen de L y α. Remarcamos, además, que la inyección de V_α sobre $V_{\alpha-\varepsilon}$ es compacta para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Efectivamente, si u_m es una secuencia que converge débilmente hacia 0 en V_α, entonces:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^n} |u_{mk}|^2 \, |k|^{2\alpha} \leq c, \qquad \text{constante independiente de } m, \\ \\ u_{mk} \to 0 \qquad m \to \infty \ \forall k \in \mathbb{Z}^n. \end{cases}$$

Para cada $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$:

$$\begin{cases} |u_m|^2_{\alpha-\varepsilon} = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^n} |u_{mk}|^2 \, |k|^{2\alpha'} \leq \sum\limits_{|k| \leq K} |u_{mk}|^2 \, |k|^{2\alpha'} + \frac{1}{K^{2\varepsilon}} \sum\limits_{|k| > K} |u_{mk}|^2 \, |k|^{2\alpha} \\ \\ \lim\limits_{m \to \infty} \sup |u_m|^2_{\alpha-\varepsilon} \leq \frac{c}{K^{2\varepsilon}}, \end{cases}$$

y, dado que este límite superior es arbitrariamente pequeño, $u_m \to 0$ en $V_{\alpha-\varepsilon}$.

Abordemos ahora la cuestión de las *autofunciones* de A; para ello, nos apoyamos en el Teorema de Hilbert-Schmidt (**Corolario** 3). El operador A^{-1} es lineal y continuo desde H hasta $D(A)$, y dado que la inyección de $D(A)$ en H es compacta, A^{-1} puede considerarse como un operador compacto en H; como operador de H, resulta ser también autoadjunto. Por lo tanto, este operador posee una serie de autofunciones w_i, $j \in \mathbb{N}$, las cuales forman una base ortonormal de H:

$$\begin{cases} Aw_j = \lambda_j w_j, w_j \in D(A), \\ \\ 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3, ..., \lambda_j \to \infty \, para \, j \to \infty \end{cases}$$

De hecho, la serie de los w_j y los λ_j es la serie de las funciones $w_{k,\alpha}$ y los números $\lambda_{k,\alpha}$, donde:

$$\begin{cases} w_{k,\alpha} = \left(e_\alpha - \frac{k_\alpha k}{|k|^2}\right) e^{2\pi i k \cdot x/L} \\ \\ \lambda_{k,\alpha} = 4\pi^2 \left|k\right|^2 L^2, \end{cases}$$

donde $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^2$, $k \neq 0$, $\alpha = 1, ..., n$ y los $e_1, ..., e_n$ representan las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$.

2.5. La forma trilineal b y el operador B.

Para el fin que nos ocupa, recordemos algunas propiedades de los espacios de Sobolev: si $\mathcal{O}$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y su frontera $\partial\mathcal{O}$ es suficientemente regular (Lipschitziana), y $1/2 - m/n > 0$, entonces:

$$H^m\mathcal{O} \subset L^q(\mathcal{O}), \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{m}{n} \tag{2.46}$$

siendo la inyección continua. Concretamente, existirá una constante positiva c, dependiente de m, n y L, tal que:

$$\left|u\right|_{L^q}(Q) \leq c(m, n, L) \left|u\right|_m \qquad \forall u \in H_p^m(Q), \qquad m < \frac{n}{2}.$$

Para $m > n/2$, $H_p^m(Q) \subset \mathscr{C}_p(Q)$ (es decir, el espacio de funciones reales y continuas con periodo Q), con una inyección continua. Por otro lado, si $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $m_1 \leq m_2$ y $\theta \in [0, 1]$, la desigualdad de Hölder[7] discreta nos proporciona:

[7] $|\sum_i a_i b_i| \leq (\sum_i |a_i|^p)^{1/p} (\sum_i |b_i|^{p\,\prime})^{1/p'} \qquad p = 1/\theta, \; p' = 1/(1-\theta)$.

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |k|^{2((1-\theta)m_1+\theta m_2)} |u_k|^2 \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |k|^{2m_1} |u_k|^2\right)^{1-\theta} \cdot \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |k|^{2m_2} |u_k|^2\right)^{\theta},$$

de modo que:

$$|u|_{(1-\theta)m_1+\theta m_2} \leq |u|_{m_1}^{(1-\theta)} |u|_{m_2}^{\theta} \quad \forall u \in H_p^{m_2}(Q), \quad m_1 \leq m_2. \tag{2.47}$$

Si $(1-\theta)m_1 + m_2 > n/2$, la inmersión continua de $H_p^m(Q)$ en $\mathscr{C}_p(Q)$ nos revela que existe una constante c que sólo depende de θ, m_1, m_2, n y L, tal que:

$$\begin{cases} |u|_{L^\infty(Q)} \leq c(\theta, m_1, m_2, n, L)(|u|_{m_1}^{(1-\theta)} |u|_{m_2}^{\theta}) \\ \forall u \in H_p^{m_2}(Q), \quad m_1 \leq m_2, \quad 0 < \theta < 1, \quad (1-\theta)m_1 + \theta m_2 > \frac{n}{2}. \end{cases} \tag{2.48}$$

La desigualdad (2.48) también será válida si:

$$0 \leq m_1 < \frac{n}{2} < m_2, \quad (1-\theta)m_1 + \theta m_2 = \frac{n}{2}, \ \textit{i.e.}, \ \theta = \frac{n/2 - m_1}{m_2 - m_1}. \tag{2.49}$$

En particular, si consideramos $n = 2$:

$$|u|_{L^\infty(Q)} \leq \begin{cases} c\,|u|^{1/2}\,|u|_2^{1/2} \\ c\,|u|_1^{3/4}\,|u|_2^{1/4} \end{cases} \quad \forall\, u \in \mathbb{H}_p^2(Q), \tag{2.50}$$

y debido a la relación (2.45), tendremos:

$$|u|_{L^\infty(Q)} \leq \begin{cases} c\,|u|^{1/2}\,|Au|^{1/2} \\ c\,\|u\|^{3/4}\,|Au|^{1/4} \end{cases} \quad \forall\, u \in D(A). \tag{2.51}$$

Por su parte, si consideramos $n = 3$:

$$|u|_{L^\infty(Q)} \leq \begin{cases} c\,|u|^{1/4}\,|u|_2^{3/4} \\ c\,|u|_1^{1/2}\,|u|_2^{1/2} \end{cases} \quad \forall\, u \in \mathbb{H}_p^2(Q), \tag{2.52}$$

y de manera similar al caso anterior, tendremos:

$$|u|_{L^\infty(Q)} \leq \begin{cases} c\,|u|^{1/4}\,|Au|^{3/4} \\ \\ c\,\|u\|^{1/2}\,|Au|^{1/2} \end{cases} \quad \forall\, u \in D(A). \tag{2.53}$$

Llegados a este punto, estamos en disposición de mostrar cómo se aplican las citadas propiedades de los espacios de Sobolev. Para ello introducimos la *forma b*. Sea $\mathcal{O}$ un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, situado en Ω o en Q. Para $u, v, w \in \mathbb{L}^1(\mathcal{O})$, establecemos:

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} u_i D_i v_j w_j dx,$$

siempre y cuando las integrales en (2.49) sigan teniendo sentido. En particular, podemos enunciar el siguiente lema:

Lema 8. *Sea $\mathcal{O} = \Omega$ ó Q. La forma b se define y es trilineal continua en $\mathbb{H}^{m_1}(\mathcal{O}) \times \mathbb{H}^{m_2+1}(\mathcal{O}) \times \mathbb{H}^{m_3}(\mathcal{O})$, donde $m_i \geq 0$, y:*

$$\begin{cases} m_1 + m_2 + m_3 \geq \frac{n}{2} \quad si\;\; m_i \neq \frac{n}{2}, \quad i = 1,2,3, \\ \\ m_1 + m_2 + m_3 > \frac{n}{2} \quad si\;\; m_i = \frac{n}{2}, \quad para\ cierto\ i. \end{cases} \tag{2.54}$$

Demostración. Si $m_i < n/2$, para $i = 1,2,3$, entonces, debido a la relación (2.46) tenemos que $H^{m_i}(\mathcal{O}) \subset L^{q_i}(\mathcal{O})$, donde $1/q_i = 1/2 - m_i/n$. Debido a (2.54), $(1/q_1 + 1/q_2 + 1/q_3) \leq 1$, y el producto $u_i(D_i v_j)$ es integrable y $b(u,v,w)$ cobra sentido. Aplicando la desigualdad de Hölder, obtenemos:

$$\begin{cases} |b(u,v,w)| \leq \sum_{i,j=1}^{n} |u_i|_{L^{q_1}(\mathcal{O})}\,|D_i v_j|_{L^{q_2}(\mathcal{O})}\,|w_j|_{L^{q_3}(\mathcal{O})}\,, \\ \\ |b(u,v,w)| \leq c_1\,|u|_{m_1}\,|v|_{m_2+1}\,|w|_{m_3}\,. \end{cases} \tag{2.55}$$

Si uno o más de los m_i es mayor que $n/2$, procedemos como antes, con los correspondientes q_i, reemplazados por $+\infty$ y los otros q_j igualados a 2. Si alguno de los m_i resulta ser igual a $n/2$, los reemplazamos con $m_i' < m_i$, $m_i - m_i'$ suficientemente pequeños, de modo que la correspondiente desigualdad de (2.55) se siga verificando. ■

Es preciso remarcar lo siguiente:

- *i)* Contemplado como un caso particular del **Lema** 8 y (2.55), b es una forma trilineal continua en $V_{m_1} \times V_{m_2+1} \times V_{m_3}$, con m_i tal y como se ha visto en (2.54), y:

$$|b(u,v,w)| \leq k\,|u|_{m_1}\,|v|_{m_2+1}\,|w|_{m_3} \quad \forall\, u \in V_{m_1}, v \in V_{m_2+1}, w \in V_{m_3}. \tag{2.56}$$

  En particular b es una forma trilineal continua en $V \times V \times V$, e incluso en $V \times V \times V_{1/2}$. Tal vez, una forma más intuitiva de visualizar la cota superior de $|b(u,v,w)|$ sea (como suele verse en numerosos textos):

$$|b(u,v,w)| \leq k \times \begin{cases} |u|^{1/2}\,\|u\|^{1/2}\,\|v\|\,|w|^{1/2}\,\|w\|^{1/2}\,, & m=2, \\ |u|^{1/4}\,\|u\|^{3/4}\,\|v\|\,|w|^{1/4}\,\|w\|^{3/4}\,, & m=3. \end{cases} \tag{2.57}$$

- **ii)** Podemos reforzar las relaciones (2.55) y (2.56) mediante otras desigualdades que procedan de éstas mismas, y de (2.47)-(2.53); por ejemplo las siguientes desigualdades, combinadas con (2.56) y (2.47) resultan especialmente útiles:

$$\begin{cases} |b(u,v,w)| \leq k\,|u|^{1/2}\,\|u\|^{1/2}\,\|v\|^{1/2}\,|Av|^{1/2}\,|w| \quad \forall\, u \in V, v \in D(A), w \in H \quad si\; n=2, \\ |b(u,v,w)| \leq k\,\|u\|\,\|v\|^{1/2}\,|Av|^{1/2}\,|w| \quad \forall\, u \in V, v \in D(A), w \in H \quad si\; n=3. \end{cases} \tag{2.58}$$

- **iii)** Con menos frecuencia, también se hará uso de las siguientes desigualdades. Observamos que $u_i(D_i v_j)w_j$ es «sumable» si —por ejemplo— $u_i \in L^\infty(\mathcal{O})$, $D_i v_j, w_j \in L^2(\mathcal{O})$, y:

$$\left| \int_{\mathcal{O}} u_i D_i v_j w_j dx \right| \leq |u_i|_{L^\infty(\mathcal{O})}\,|D_i v_j|\,|w_j|\,.$$

  De esta forma, y haciendo uso también de (2.51), obtenemos para el caso $n=2$:

$$|b(u,v,w)| \leq c \times \begin{cases} |u|^{1/2}\,|Au|^{1/2}\,\|v\|\,|w| \quad \forall\, u \in D(A), v \in V, w \in H, \\ |u|\,\|v\|\,|w|^{1/2}\,|Aw|^{1/2} \quad \forall\, u \in H, v \in V, w \in D(A), \end{cases}$$

y para el caso $n = 3$ —usando (2.53)—, tenemos:

$$|b(u,v,w)| \leq k \times \begin{cases} |u|^{1/4}\, |Au|^{3/4}\, \|v\|\, |w| & \forall\, u \in D(A), v \in V, w \in H, \\ |u|\, \|v\|\, \|w\|^{1/2}\, |Aw|^{1/2} & \forall\, u \in H, v \in V, w \in D(A), \end{cases}$$

Finalmente, destacamos una propiedad fundamental de la forma b:

$$b(u,v,w) = -b(u,w,v) \quad \forall\, u,v,w \in V. \tag{2.59}$$

La propiedad anterior se establece fácilmente para $u,v,w \in \mathcal{V}$. Con $u = w$, la propiedad (2.59) implica:

$$b(u,v,v) = 0 \quad \forall u,v \in V. \tag{2.60}$$

Llegando al punto álgido de este apartado, introduciremos el *operador* B. Para $u,v,w \in V$, definimos $B(u,v) \in V'$ y $Bu \in V'$, estableciendo:

$$\langle B(u,v), w\rangle = b(u,v,w), \quad Bu = B(u,u). \tag{2.61}$$

Puesto que b es una forma trilineal continua en V, B es un operador bilineal continuo desde $V \times V$ hasta V'. De forma más general, aplicando el **Lema** 8 vemos que:

> B es un operador bilineal continuo en desde $V_{m_1} \times Vm_2 + 1$ (o desde $\mathbb{H}^{m_1}(\mathcal{O}) \times \mathbb{H}^{m_2+1}(\mathcal{O})$) hasta V_{-m_3}, donde m_1, m_2, m_3 satisfacen las hipótesis realizadas en el **Lema** 8.

(2.62)

Cabe recalcar que es posible derivar varias estimaciones para la norma del operador bilineal $B(\cdot,\cdot)$ a partir de las estimaciones anteriores realizadas para b.

3. Formulación general de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Supongamos que tenemos un fluido llenando una región Ω del espacio. Para una representación euleriana del flujo del fluido, consideramos tres funciones: $\rho = \rho(x,t)$, $p = p(x,t)$, $u = u(x,t)$, con $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$; donde $\rho(x,t)$ y $p(x,t)$ son la densidad y la presión del fluido, respectivamente, en un punto x en un instante t, mientras que $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ representa la velocidad de una partícula del fluido en un punto x en un instante t. En caso de optar por una formulación lagrangiana del flujo, introducimos las funciones $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(a,t)$, $\tilde{p} = \tilde{p}(a,t)$ y $\tilde{u} = \tilde{u}(a,t)$; en este caso, $\tilde{u}(a,t)$ representa la velocidad de una partícula de fluido que se halla en un punto $a \in \Omega$, en algún instante de referencia t_0. Por su parte, las variables $\tilde{\rho}(a,t)$ y $\tilde{p}(a,t)$ juegan un papel similar al de sus contrapartidas eulerianas.

Centrémonos en la primera representación. Si el fluido es newtoniano, entonces las funciones ρ, p y u estarán sujetas a la conservación del momento (3.1) y la masa (3.2), así como a alguna ley constitutiva que relacione ρ y p, componiendo así las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \mu \Delta u - (3\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u + \nabla p = f \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \tag{3.2}$$

donde $\mu > 0$ es un coeficiente de viscosidad cinemática, λ es un parámetro físico de ajuste y $f = f(x,t)$ representa una densidad de fuerza por unidad de volumen. Si el fluido es homogéneo e incompresible, entonces ρ será una constante independiente de x y de t, de modo que las ecuaciones anteriores se reducen a:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \mu \Delta u - \nabla p = f, \tag{3.3}$$

$$\nabla \cdot (\rho u) = 0. \tag{3.4}$$

Habitualmente, se toma $\rho = 1$ y se fija $\nu = \mu$, llegando a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = f. \tag{3.5}$$

Podemos considerar a (3.5) como una forma adimensional de la ecuación de Navier-Stokes (3.3), obtenida de la siguiente manera: fijamos $\rho = \rho_* \rho'$, $p = p_* p'$, $u = u_* u'$, $x = L_* x'$, $t = T_* t'$, $f = (p_* U_*/T_*) f'$, donde ρ_*, L_* y T_* son, respectivamente, densidad, longitud y tiempo de referencia para el flujo, y $U_* = L_*/T_*$, $p_* = U_*^2 \rho_*$. Sustituyendo en (3.3), obtenemos (3.5) para las cantidades reducidas $u'(x', t')$, $p'(x', t')$ y $f'(x', t')$. No obstante, en este caso la inversa de ν representa el llamado *número de Reynolds* del flujo:

$$Re = \frac{\rho_*}{\mu} L_* U_* \tag{3.6}$$

Las ecuaciones (3.4) y (3.5) constituyen la formulación más básica para este problema. Una obtención detallada de las ecuaciones de Navier-Stokes puede hallarse en [7]. Apreciamos que estas ecuaciones cobran sentido matemático si Ω es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)$, $f = (f_1, f_2)$. Puesto que resulta útil considerar también esta situación, y con el fin de cubrir ambas casuísticas simultáneamente, supondremos desde ahora que:

> Ω es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ ó $n = 3$, con frontera Γ. Además, asumimos que Ω se encuentra situado localmente en un lado de Γ, y que Γ es Lipschitziano o, en ciertos casos, de clase C^r, para un cierto r especificado.
>
> (3.7)

Una de las primeras cuestiones que nos surgen a raíz de (3.4) y (3.5) es la determinación de un problema asociado de valor en la frontera debidamente formulado. Se trata de un problema aún sin resolver, aunque se cree —y de hecho, ha sido probado para $n = 2$— que las ecuaciones (3.4) y (3.5) deben ser completadas por las siguientes condiciones iniciales y de frontera (para un flujo considerando $t > 0, x \subset \Omega$).

- Condición inicial:

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega \;\; (u_0 \text{ dado}). \tag{3.8}$$

- Condición de frontera:

$$u(x, t) = \phi(x, t) \qquad x \in \Gamma, \;\; t > 0 \;\; (\Omega \text{ acotado}, \phi \text{ dado}). \tag{3.9}$$

Si Ω no está acotado (y en particular, para $\Omega = \mathbb{R}^n$), a la condición de frontera anterior la sustituiremos por una condición en el infinito:

$$u(x,t) \to \psi(x,t) \quad \text{cuando } |x| \to +\infty, \tag{3.10}$$

para un ψ dado[1]. En lugar de (3.9) y (3.10), es interesante considerar otra condición de frontera —sin significado físico—:

$$u(x + Le_i, t) = u(x,t) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall t > 0, \tag{3.11}$$

donde $e_1, ..., e_n$ constituye la base canónica de $\mathbb{R}^n$, y L es el período de la dirección i-ésima; $Q = (\,]0, L[\,)^n$ es el cubo del periodo[2]. La ventaja de la condición de frontera (3.11) reside en que permite establecer un marco funcional más sencillo, a la par que muchas de las dificultades matemáticas permanecen inalteradas (exceptuando aquellas relacionadas con los valores en la frontera, que se anulan).

Aclaración 1. En el caso periódico (i.e., (3.11)), es conveniente introducir el valor medio de u en el cubo del período:

$$m_u(t) = \frac{1}{|Q|} \int_Q u(x,t)dx, \tag{3.12}$$

y fijar:

$$u = m_u + \bar{u}. \tag{3.13}$$

La media m se halla explícitamente determinada en términos de los datos. Integrando (3.5) sobre Q, haciendo uso de (3.4), de la fórmula de Stokes y teniendo en cuenta el hecho de que las integrales en la frontera ∂Q de Q se anulan debido a (3.11), obtenemos:

$$\frac{d}{dt} m_u(t) = m_f(t) \qquad \left(= \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x,t)dx \right), \tag{3.14}$$

de modo que:

[1]Para conjuntos acotados especiales Ω, es preciso añadir algunas condiciones adicionales a (3.9) y (3.10) [8][9].

[2]Por supuesto, podríamos considerar diferentes períodos $L_1, ..., L_n$ en diferentes direcciones, y en este caso $Q = \prod_{i=1}^n (\,]0, L_i[\,)$.

$$m_u(t) = m_{u_0} + \int_0^t m_f(s)ds. \tag{3.15}$$

Sustituyendo (3.13) en (3.5), finalmente llegamos a:

$$\frac{\partial \bar{u}}{dt} + (\bar{u}\nabla)\bar{u} - \nu\Delta\bar{u} + (m_u \cdot \nabla)\bar{u} = \bar{f}(= f - m_f) \tag{3.16}$$

Cuando la cantidad m_u es conocida, el estudio de (3.16) se torna muy similar al de (3.5). Por tanto, en pos de la simplicidad, supondremos en el caso periódico que el flujo medio es nulo, $m_u = 0$.

3.1. Ecuaciones de Navier-Stokes en 2D - Formulación débil del problema.

Con el fin de introducir resultados plenamente estudiados y demostrados, extensibles al ámbito de los atractores, focalizaremos las secciones siguientes en torno a las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso bidimensional.

Comencemos considerando un flujo incompresible. Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^2$, con frontera Γ. Las ecuaciones de Navier-Stokes en Ω gobiernan el flujo de un fluido que llena un cilindro infinito de sección Ω y que se mueve paralelo al plano de Ω. Sean éstas:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right) - \nu\Delta u + \nabla p = f, \tag{3.17}$$

$$\nabla \cdot u = 0, \tag{3.18}$$

donde el significado de todas las variables es análogo al del caso tridimensional. La frontera Γ, sólida y en reposo[3], se expresa mediante la *condición de no-deslizamiento*:

$$u = 0, \quad x \in \Gamma$$

[3]Una frontera que no estuviese en reposo modificaría la condición, reescribiéndose como: $u = \varphi$ en Γ, donde la función $\varphi = \varphi(x,t)$ es la velocidad dada de Γ.

Por otra parte, podemos contemplar el caso en el que el espacio sea periódico, de modo que $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$, y:

$$u, p \text{ y las derivadas primeras de } u \text{ son } \Omega\text{-periódicas (es decir, } u \text{ y } p \text{ toman los mismos valores en los puntos correspondientes de } \Gamma). \tag{3.19}$$

Adicionalmente, podemos asumir en este caso que el flujo promedio se anula:

$$\int_\Omega u dx = 0.$$

Estas condiciones no son más que una particularización de las condiciones de frontera a las que se ha hecho alusión en el caso general. Cuando se considera un problema de condiciones iniciales, las condiciones anteriores se complementan con una condición inicial del tipo (3.8).

Sustentándonos en el marco teórico introducido en las primeras secciones de este texto, y por motivos prácticos, sintetizaremos el marco espacial y operacional en torno al problema que estamos considerando ($n = 2$). Así pues, consideramos un espacio de Hilbert, H, que no es más que un subespacio cerrado de $L^2(\Omega)^n$. En el caso de no-deslizamiento:

$$H = \left\{ u \in L^2(\Omega)^n, \nabla \cdot u = 0, u \cdot v = 0 \; en \; \Gamma \right\},$$

mientras que en el caso periódico tenemos:

$$H = \left\{ u \in \dot{L}^2(\Omega)^n, \nabla \cdot u = 0, u_{i|\Gamma_i} = u_{i|\Gamma_{i+n}}, i = 1, ..., n \right\}.$$

Nótese que Γ_i y Γ_{i+n} son las caras $x_i = 0$ y $x_i = L_1$ de Γ. Por su parte, la condición $u_{i|\Gamma_i} = u_{i|\Gamma_{i+n}}$ expresa la periodicidad de $u \cdot v$, mientras que $\dot{L}^2(\Omega)^n$ es el espacio de las u en $L^2(\Omega)^n$. Naturalmente, el espacio H viene está dotado del producto escalar y la norma de $L^2(\Omega)^n$. Por su parte, consideramos el subespacio cerrado de $H^1(\Omega)^n$, V, para el caso de no-deslizamiento:

$$V = \left\{ u \in H_0^1(\Omega)^n, \nabla \cdot u = 0 \right\}, \tag{3.20}$$

mientras que para el caso periódico tenemos:

$$V = \left\{ u \in \dot{H}_{per}^1(\Omega)^n, \nabla \cdot u = 0 \right\}, \tag{3.21}$$

siendo la definición de $\dot{H}^1_{per}(\Omega)^n$ la proporcionada en (2.25). En ambos casos, V también está provisto de el producto escalar y la norma:

$$\begin{cases} ((u,v)) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \\ \|u\| = \{((u,u))\}^{1/2}. \end{cases}$$

El operador lineal no-acotado A (cuya definición es análoga a la proporcionada al estudiar el problema de Stokes) en H satisface la relación de producto escalar:

$$(Au, v) = ((u,v)), \quad \forall\, u, v \in V. \tag{3.22}$$

El dominio $D(A)$ de este operador se puede caracterizar en su totalidad usando la teoría de regularidad de sistemas lineales elípticos:

$$D(A) = H^2(\Omega)^n \cap V,$$

mientras que en el caso no-deslizante se tendrá:

$$D(A) = H^2_{per}(\Omega)^n \cap V,$$

Una demostración de este resultado puede encontrarse en [10] y en las referencias contenidas. Si definimos V' como el dual de V, el espacio H puede concebirse como un subespacio de V', es decir:

$$D(A) \subset V \subset H \subset V',$$

donde las inclusiones son continuas y cada espacio es denso en el siguiente. En un espacio periódico, tendremos que A satisface la relación $Au = -\Delta u$, mientras que en el caso no deslizante la relación será $Au = -P\Delta u$, en ambos casos $\forall\, u \in D(A)$, siendo P el proyector ortogonal en $L^2(\Omega)^n$ en H. Concibiendo estas relaciones como $Au = f$, $\forall\, u \in D(A)$, $f \in H$, nos damos cuenta de que esto equivale a decir que existe un $p \in H^1(\Omega)$ tal que:

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & en\ \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0 & en\ \Omega, \\ u = 0 & en\ \Omega. \end{cases}$$

Recordando que el operador A^{-1} es continuo desde H hasta $D(A)$, y puesto que la inmersión de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta, la inmersión de V en H es, como podemos esperar, también compacta. A consecuencia de esto, A^{-1} es un operador compacto autoadjunto y continuo en H; además, a raíz de los teoremas espectrales clásicos, existirán una sucesión λ_j $(0 < \lambda_1 \leq \lambda_2, ..., \lambda_j \to \infty)$ y una familia de elementos w_j de $D(A)$ ortonormal en H, obedeciendo la relación $Aw_j = \lambda_j w_j$, $\forall\, j$.

Como vemos, esta definición del operador A no es más que una adaptación de la definición provista para el caso general tras analizar el problema de Stokes. Algo similar ocurre para el operador B y la forma trilineal b. Si bien en secciones posteriores abordaremos la existencia y unicidad de soluciones, primero expondremos aquí la llamada *formulación débil* de las ecuaciones de Navier-Stokes, adelantando algunos resultados, con el fin de concentrar la formulación del problema 2D en una única sección. Esta formulación involucra solamente a la variable u, y es obtenida multiplicando (3.17) por una función test v en V, e integrando sobre Ω. Usando (3.18) y las condiciones de contorno, hallamos que el término que implica a p desaparece, quedando:

$$\frac{d}{dt}(u,v) + \nu((u,v)) + b(u,u,v) = (f,v), \qquad \forall\, v \in V, \tag{3.23}$$

donde

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx,$$

siempre y cuando la integral tenga sentido. A raíz de esto, remarcamos que la forma trilineal b es continua en $H^1(\Omega)^n$ $(n = 2)$, y en particular lo es en V. Tenemos, pues, las siguientes desigualdades, que condensan varias de las propiedades de continuidad de b:

$$|b(u,v,w)| \leq c_1 \times \begin{cases} |u|^{1/2} \|u\|^{1/2} \|v\|^{1/2} |Av|^{1/2} |w|, & \forall\, u \in V,\ v \in D(A),\ w \in H, \\ |u|^{1/2} |Au|^{1/2} \|v\| |w|, & \forall\, u \in D(A),\ v \in V,\ w \in H, \\ |u| \|v\| |w|^{1/2} |Aw|^{1/2}, & \forall\, u \in H,\ v \in V,\ w \in D(A), \\ |u|^{1/2} \|u\|^{1/2} \|v\| |w|^{1/2} \|w\|^{1/2}, & \forall\, u,v,w \in V, \end{cases}$$

donde $c_1 > 0$ es una constante escogida adecuadamente. Es posible formular de manera alternativa la ecuación (3.23) usando el operador A y el operador bilineal B desde $V \times V'$ dentro de V', cuya definición viene dada por (2.61), de forma que (3.23) es equivalente a:

$$\frac{du}{dt} + \nu A u + B(u) = f. \tag{3.24}$$

En lo que respecta a la condición inicial (3.8), ésta puede ser reescrita como:

$$u(0) = u_0.$$

Veremos en secciones posteriores que, asumiendo que f es independiente de t, es posible definir un sistema dinámico autónomo asociado a (3.24):

$$f(t) = f \in H, \qquad \forall\, t.$$

3.2. Existencia de soluciones débiles.

Amparándonos en todo el marco teórico introducido, procederemos a estudiar la existencia y unicidad de soluciones para las ecuaciones de Navier-Stokes.

El siguiente resultado será válido tanto para $m = 2$ como para $m = 3$. Es preciso remarcar de antemano que el teorema no hace alusión alguna a la unicidad, y la solución no necesita ser continua en H. No obstante, obtenemos la *continuidad débil* en H; es decir, para cada $\phi \in H$:

$$\lim_{t \to t_0} (u(t) - u(t_0), \phi) = 0 \tag{3.25}$$

Teorema 3. ***(Soluciones débiles)*** *Sea $f \in L^2_{loc}(0, T; V')$. Entonces, si $u_0 \in H$, existe una solución débil $u(t)$ de*

$$du/dt + \nu A u + B(u, u) = f \tag{3.26}$$

tal que, para cualquier T>0,

$$u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V),$$

y la ecuación se mantiene como una igualdad en $L^p(0, T; V')$, con $p = 2$ si $m = 2$, y $p = 4/3$ si $m = 3$. Además, la solución es débilmente continua en H, como en (3.25).

Demostración. Recurriremos a la ecuación finito-dimensional que se obtiene al mantener sólo los n primeros modos de Fourier; es decir, la aproximación n-dimensional de Galerkin:

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} u_{nj}(t) w_j.$$

La ecuación para u_n es:

$$\frac{du_n}{dt} + \nu A u_n + P_n B(u_n, u_n) = P_n f, \tag{3.27}$$

donde P_n es la proyección sobre los primeros n modos de Fourier:

$$P_n x = \sum_{j=1}^{n} (x, w_j) w_j.$$

Intentaremos hallar una cota en $|u_n|$ que sea uniforme en n. Para ello, tomamos el producto interno en la ecuación (3.27), obteniendo:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_n|^2 + \nu (A u_n, u_n) + (P_n B(u_n, u_n), u_n) = \langle P_n f, u_n \rangle .$$

Percatándonos ahora (puesto que $u_n \in P_n H$) de que:

$$(P_n B(u_n, u_n), u_n) = (B(u_n, u_n), P_n u_n) = (B(u_n, u_n), u_n) = b(u_n, u_n, u_n),$$

Aprovechando la relación de producto escalar (3.22) y la relación de ortogonalidad (2.60), podemos reescribir la ecuación diferencial como:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_n|^2 + \nu \|u_n\|^2 = \langle f, u_n \rangle^2 \leq \|f\|_* \|u_n\| .$$

Usando ahora la desigualdad de Young en el lado derecho de la ecuación, obtenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_n\right|^2 + \nu\left\|u_n\right\|^2 \leq \frac{\nu}{2}\left\|u_n\right\|^2 + \frac{\|f\|_*^2}{2\nu},$$

de modo que:

$$\frac{d}{dt}\left|u_n\right|^2 + \nu\left\|u_n\right\|^2 \leq \frac{\|f\|_*^2}{\nu}.$$

Integrando ambos lados entre 0 y t, llegamos a:

$$\left|u_n(t)\right|^2 + \nu\int_0^t \left\|u_n(s)\right\|^2 ds \leq \left|u_n(0)\right|^2 + \frac{\|f\|_{L^2(0.T;V')}^2}{\nu}.$$

Puesto que $|u_n(0)| = |P_n u_0| \leq |u_0|$ (como bien se demuestra en [6]), tenemos las siguientes fronteras:

$$\underset{t\in[0,T]}{sup}\ \left|u_n(t)\right|^2 \leq K = \left|u_0\right|^2 + \frac{\|f\|_{L^2(0,T;V')}^2}{\nu}$$

y

$$\int_0^T \left\|u_n(s)\right\|^2 ds \leq K/\nu$$

uniformemente en n. Por tanto, u_n está acotado uniformemente (en n) en:

$$L^\infty(0,T;H) \quad y \quad L^2(0,T;V).$$

Estas fronteras uniformes nos permiten usar el teorema de compacidad de Alaoglu ([6]) para hallar una subsucesión —que cambiará la notación de u_n— tal que:

$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad en\ L^\infty(0,T;H), \tag{3.28}$$

pero además podemos extraer una subsucesión adicional, de modo que tenemos (nótese el cambio en la notación):

$$u_n \to u \quad en\ L^2(0, T; V),$$

con:

$$u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V).$$

Finalmente, debemos obtener las fronteras en las derivadas, du_n/dt. Encontramos aquí una diferencia entre la elección de $m = 2$ y $m = 3$. Por un lado, para $m = 2$ podemos demostrar que du_n/dt está uniformemente acotado en $L^2(0, T; V')$, mientras que para $m = 3$ podemos obtener una frontera únicamente en $L^{4/3}(0, T; V')$. Tomaremos $p = 2$ cuando $m = 2$, y $p = 4/3$ cuando $m = 3$.

Puesto que:

$$du_n/dt = -\nu A u_n - P_n B(u_n, u_n) + P_n f,$$

debemos mostrar que cada término del lado derecho está uniformemente acotado en $L^p(0, T; V')$. Esto se aplica a Au_n, ya que u_n está uniformemente acotado en $L^2(0, T; V')$, y A es un operador lineal continuo desde V hasta V'. En este sentido, es claro ver que $P_n f$ está también acotado, puesto que hemos asumido que $f \in L^2(0, T; V')$. Sólo nos queda verificar el mismo tipo de frontera para $P_n B(u_n, u_n)$, y es aquí donde se hace patente la diferencia entre los casos $m = 2$ y $m = 3$. Las siguientes fronteras en $\|B(u, u)\|_*$ son consecuencia de (2.50) y (2.52), así como de (2.58):

$$\|B(u, u)\|_* \leq \begin{cases} k\,|u|\,\|u\|, & m = 2, \\ \\ k\,|u|^{1/2}\,\|u\|^{3/2} & m = 3. \end{cases}$$

Por otro lado, puesto que:

$$\|P_n B(u, v)\|_* \leq \|B(u, v)\|_*$$

tenemos

$$\|P_n B(u_n,u_n)\|^2_{L^2(0,T;V')} \leq k \int_0^T \|B(u_n(s),u_n(s))\|^2_* \, ds,$$

por lo que para $m=2$ tenemos:

$$\|P_n B(u_n,u_n)\|_{L^2(0,T;V')} \leq k \int_0^T |u_n(s)|^2 \|u_n(s)\|^2 \, ds \leq k \|u_n\|^2_{L^\infty(0,T;H)} \|u_n\|^2_{L^2(0,T;V)} \,,$$

mientras que para $m=3$ tenemos:

$$\|P_n B(u_n,u_n)\|^{4/3}_{L^2(0,T;V')} \leq k \int_0^T |u_n(s)|^{2/3} \|u_n(s)\|^2 \, ds \leq k \|u_n\|^{2/3}_{L^\infty(0,T;H)} \|u_n\|^2_{L^2(0,T;V)} \,.$$

Dado que u_n se halla uniformemente acotado en $L^\infty(0,T;H)$ y $L^2(0,T;V)$ (véase (3.28)), $P_n B(u_n,u_n)$ está uniformemente acotado (en n) en $L^2(0,T;V')$ si $m=2$ y $L^{4/3}(0,T;V')$ si $m=3$. Esto nos proporciona las mismas fronteras en du_n/dt:

$$du_n/dt \quad \text{está acotado uniformemente en} \quad \begin{cases} L^2(0,T,V'), & m=2, \\ L^{4/3}(0,T,V'), & m=3. \end{cases}$$

Amparándonos en las condiciones de compacidad ya conocidas, podemos garantizar que existe una subsucesión $\{u_n\}$ que converge hacia u fuertemente en $L^2(0,T;H)$, lo cual a su vez nos proporcionará una convergencia débil$-^*$ del término no-lineal en $L^p(0,T;V')$,

$$B(u_n,u_n) \xrightarrow{*} B(u,u) \quad \text{en} \quad L^p(0,T;V'). \tag{3.29}$$

De hecho, si $w \in L^q(0,T;V)$, entonces:

$$\int_0^T b(u_n,u_n,w)dt = -\int_0^T b(u_n,w,u_n)dt = -\sum_{i,j=1}^m \int_0^T \int_Q (u_n)_i (D_i w_j)(u_n)_j dxdt.$$

Abordando ahora (3.29), tenemos:

$$\int_0^T b(u_n,u_n,w) - b(u,u,w)dt == -\sum_{i,j=1}^m \int_0^T \int_Q \left[(u_n)_i - u_i\right](D_i w_j)u_j + (u_n)_i (D_i w_j)\left[(u_n)_j - u_j\right] dxdt.$$

Necesitamos considerar expresiones de la forma:

$$E_n = \int_0^T \int_Q (v_n - v) w v_n dx dt,$$

donde $v_n \to v$ en $L^2(0, T; H)$, $w \in L^q(0, T; H)$, y v_n está uniformemente acotado en $L^\infty(0, T; H)$. Puesto que:

$$\|wv_n\|_{L^2(0,T;H)} \leq \|w\|_{L^2(0,T;H)} \|v_n\|_{L^\infty(0,T;H)}$$

se tiene que $E_n \to 0$. Por tanto, $B(u_n, u_n)$ converge débilmente$-^*$ hacia $B(u, u)$ en $L^p(0, T; V')$, tal y como se precisa.

$P_n B(u_n, u_n)$ converge débilmente$-^*$ hacia $B(u, u)$ en $L^p(0, T; V')$ usando argumentos similares a los usados a la hora de abordar un problema lineal parabólico general. Por tanto, hemos mostrado la convergencia de todos los términos en $L^p(0, T; V')$, y tenemos una solución $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ que satisface:

$$du/dt + \nu A u + B(u, u) = f \tag{3.30}$$

como una desigualdad en $L^p(0, T; V')$. Esto será lo mismo que V satisfaciendo (3.30) en V' para casi cualquier $t \in [0, T]$.

Para mostrar que la solución tiene $u(0) = u_0$, debemos elegir una función test $\phi \in C^1([0, T]; V)$, con $\phi(T) = 0$, y comparar el resultado de tomar el producto interno de (3.30) con ϕ e integrando por partes,

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u(t), \phi'(t)) dt + \nu \int_0^T ((u(t), \phi(t))) dt + \int_0^T b(u(t), u(t), \phi(t)) dt = \\ = (u(0), \phi(0)) + \int_0^T \langle f(t), \phi(t) \rangle \, dt, \end{aligned}$$

con el resultado de tomar el límite de un proceso similar aplicado a las aproximaciones de Galerkin,

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u_n(t), \phi'(t)) dt + \nu \int_0^T ((u_n(t), \phi(t))) dt + \int_0^T b(u_n(t), u_n(t), \phi(t)) dt = \\ = (u_n(0), \phi(0)) + \int_0^T \langle f(t), \phi(t) \rangle \, dt, \end{aligned}$$

la cual converge hacia:

$$-\int_0^T (u(t), \phi'(t))dt + \nu \int_0^T ((u(t), \phi(t)))dt + \int_0^T b(u(t), u(t), \phi(t))dt =$$

$$= (u_0, \phi(0)) + \int_0^T \langle f(t), \phi(t) \rangle \, dt,$$

debido a que $u_n(0) = P_n u_0 \to u(0)$. Esto desembocará en que $u(0) = u_0$. En último lugar, debemos demostrar la continuidad débil en H. Puesto que (3.30) se cumple para casi cualquier $t \in [0, T]$, como una desigualdad en V', tomamos el producto interno de (3.30) con un $v \in V$ fijado para obtener:

$$(du/dt, v) + \nu((u, v)) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle \, .$$

Integrando la expresión anterior entre t_0 y t, podemos expresar ésta como:

$$(u(t) - u(t_0), v) = \nu \int_{t_0}^t ((u(s), v))ds + \int_{t_0}^t b(u(s), u(s), v)ds = \int_{t_0}^t \langle f, v \rangle \, ds, \tag{3.31}$$

lo cuál es válido para cualquier $0 < t_0 < t$. A raíz de las desigualdades para b (2.50) y (2.52), así como (2.58), y de las fronteras en (3.28), tenemos que para un $v \in V$ fijo, $t \to b(u(t), u(t), v) \in L^1(0, T; \mathbb{R})$ para cada $T > 0$. De manera similar, tanto $((u, v))$ como $\langle f, v \rangle$ se hallan en $L^1(0, T, \mathbb{R})$, y por lo tanto, a partir de (3.31) se tiene que:

$$\underset{t \to t_0}{lim} (u(t) - u(t_0), \phi) = 0 \quad \forall \, \phi \in V.$$

Dado que V es denso en H, la expresión anterior será válida para cualquier $\phi \in H$. ■

3.3. Unicidad de soluciones débiles en 2D.

Considerar el caso bidimensional sin duda ofrece resultados mucho mejores a la hora de estudiar la continuidad de las soluciones en H y la unicidad de soluciones débiles de las ecuaciones de Navier-Stokes, en comparación con el caso tridimensional. Es por ello, principalmente, por lo que nos restringimos al estudio del primer caso.

Teorema 4. ***(Unicidad de soluciones en dos dimensiones)*** *Si $m = 2$, entonces la solución $u(t)$ de la ecuación de Navier-Stokes:*

$$du/dt + \nu Au + B(u,u) = f \tag{3.32}$$

satisface:

$$u \in C^0([0,T];H),$$

y depende de forma continua de la condición inicial u_0. En particular, la solución es única.

Demostración. La continuidad en H surge de $u \in L^2(0,T;V)$ y de $du/dt \in L^2(0,T;V)$, obtenido para $m = 2$ usando el **Teorema** 23 incluido en el Anexo A.1. Tras haber probado la continuidad de la solución $u(t;u_0)$ con respecto a t, la continuidad en u_0 equivaldrá a un resultado de unicidad. En esta línea, las desigualdades vistas para la forma trilineal $b(u,v,w)$ jugarán un papel importante a lo largo de la prueba, constituyendo uno de los puntos más obvios de distinción entre los análisis posibles para los casos 2D y 3D.

Consideremos dos soluciones, u y v, para (3.32). Sea $w = u - v$ su diferencia, la ecuación reescrita en función de esta nueva variable satisfacerá:

$$dw/dt + \nu Aw + B(u,u) - B(v,v) = 0,$$

la cual a su vez puede ser reescrita usando las propiedades del operador B,

$$B(u-v,u) + B(v,u-v) = B(w,u) + B(v,w),$$

obteniendo:

$$dw/dt = \nu Aw + B(w,u) + B(v,w) = 0.$$

Si tomamos el producto de esta ecuación con w usando el **Teorema** 23, y usando las propiedades de ortogonalidad de b, (2.60), obtenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 + \nu \left\|w\right\|^2 = -b(w,u,w).$$

Usando ahora (2.50) y (2.52), tenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 + \nu \|w\|^2 \leq |b(w,u,w)| \leq k|w| \, \|w\| \, \|u\| \leq \frac{\nu}{2}\|w\|^2 + \frac{k^2}{2\nu}|w|^2 \, \|u\| \leq,$$

y por tanto:

$$\frac{d}{dt}|w|^2 + \nu \|w\|^2 \leq \frac{k^2}{\nu}\|u\| \, |w|^2.$$

Despreciando el término $\nu \|w\|^2$, podemos ver que:

$$\frac{d}{dt}\left\{ exp\left(-\int_0^t \frac{k^2}{\nu}\|u(s)\|^2 \, ds \right) |w(t)|^2 \right\} \leq 0.$$

Podemos reescribir la expresión anterior como:

$$|w(t)|^2 \leq exp\left(-\int_0^t \frac{k^2}{\nu}\|u(s)\|^2 \, ds \right) |w(0)|^2 , \tag{3.33}$$

y puesto que el **Teorema** 3 garantiza que $u \in L^2(0,T;V)$, la integral en la exponencial es finita. Por tanto, si tenemos que $w(0) = 0$, entonces $w(t) = 0$, para todo $t \geq 0$, lo cual nos da la unicidad de la solución. ■

Percatémonos de que debido a la expresión de unicidad (3.33), tenemos una propiedad de separación de Lipschitz de soluciones:

$$|u(t) - v(t)| \leq L(T)|u_0 - v_0|, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Los resultados obtenidos muestran además que, cuando f es independiente de t, podemos definir un sistema semi-dinámico en H,

$$\left(H, \{S_H(t)\}_{t\geq 0} \right),$$

donde $S_H(t)u_0 = u(t)$ y $S_H(t)$ es un semigrupo C^0:

$$\begin{cases} S_H(0) = I, \\ S_H(t)S_H(s) = S_H(s)S_H(t) = S_H(s+t), \\ S_H(t)x_0 \;\text{ es continuo en }\; x_0 \;\text{ y }\; t. \end{cases}$$

3.4. Existencia de soluciones fuertes en 2D.

En el caso bidimensional, es posible obtener soluciones más suaves si se toma una f más suave, considerando una condición inicial en V en vez de en H: son las llamadas *soluciones fuertes*, las cuales juegan un papel importante, por ejemplo, a la hora de extender el análisis al caso tridimensional, de modo que (como veremos), si existe una solución de este tipo para las ecuaciones en 3D, ésta debe ser única.

Teorema 5. ***(Soluciones fuertes)*** *Si $m = 2$, $u_0 \in V$, y $f \in L^2_{loc}(0, \infty; H)$, entonces hay una única solución para:*

$$du/dt + \nu Au + B(u,u) = f \qquad (\textit{como una igualdad en } L^2(0,T;H))$$

que satisface:

$$u \in L^\infty((0,T;V) \cap L^2(0,T;D(A))$$

y, de hecho, $u \in C^0([0,T];V)$. Además, las soluciones depende de manera continua de la condición inicial, u_0.

Merece la pena destacar que la unicidad de estas soluciones surge a raíz de la unicidad de las soluciones débiles, puesto que una solución fuerte es también una solución débil. Sin embargo, para obtener la continuidad en V y con respecto a la condición inicial, será necesario hallar fronteras más idóneas para u.

Demostración. Tomaremos el producto interno de la aproximación finito-dimensional de Galerkin, (3.27), con Au_n, de modo que:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n\|^2 + \nu\,|Au_n|^2 + (P_nB(u_n,u_n), Au_n) = (f, Au_n).$$

Aprovecharemos el hecho de que el operador A conmuta con P_n, puesto que $Aw_j = \lambda_j w_j$, de manera que:

$$(P_n B(u_n, u_n), Au_n) = (B(u_n, u_n), Au_n) = b(u_n, u_n, Au_n),$$

y usando la relación de ortogonalidad de la forma b, (2.60), esta expresión es igual a cero en el caso bidimensional periódico, de modo que tenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_n\right\|^2 + \nu\left|Au_n\right|^2 \leq |f|\left|Au_n\right|.$$

Aplicando la desigualdad de Young, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left\|u_n\right\|^2 + \nu\left|Au_n\right|^2 \leq \frac{|f|^2}{\nu}.$$

Procediendo como hicimos antes, integramos ambos lados entre 0 y t para hallar:

$$\|u_n(t)\|^2 + \nu\int_0^t |Au_n(s)|^2\, ds \leq \|u_n(0)\|^2 + \frac{|f|^2_{L^2(0,t;H)}}{\nu}$$

y, puesto que $\|u_n(0)\| \leq \|u_0\|$ —debido al **Lema** 18 ubicado en el **Anexo** A.1—, tenemos:

$$\underset{t\in[0,T]}{sup}\ \|u_n(t)\|^2 \leq K = \|u_0\|^2 + \frac{|f|^2_{L^2(0,t;H)}}{\nu}$$

y

$$\int_0^T |Au_n(s)|^2 ds \leq K/\nu.$$

Por lo tanto, u_n está uniformemente acotado (en n) en $L^\infty(0,T;V)$ y $L^2(0,T;D(A))$. A raíz de los de compacidad débil reflexiva[4] en espacios duales (teorema de compacidad débil de Alaouglu) [6],

[4] *Si X es un espacio reflexivo de Banach y x_n una sucesión acotada en X, entonces x_n tiene una subsucesión que converge débilmente en X.* Una prueba de este corolario puede encontrarse en [6], pág. 106.

podemos extraer una subsucesión de modo que:

$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T;V)$$

y

$$u_n \to u \quad \text{en} \quad L^2(0,T;D(A)),$$

para cierto

$$u \in L^\infty(0,T;V = \cap L^2(0,T;D(A)).$$

Argumentos similares a los esgrimidos por el **Teorema** 3 muestran que du_n/dt está uniformemente acotado en $L^2(0,T;H)$, y por lo tanto, con una subsucesión adiciona,

$$du_n/dt \to du/dt \quad \text{en} \quad L^2(0,T;H).$$

Es posible demostrar también que $u \in C^0([0,T];V)$ (ver [6], *Corolario 7.3*). Por su parte, los términos du_n/dt, Au_n y P_nf convergen todos débilmente en $L^2(0,T;H)$. Para mostrar que el término no lineal, $P_nB(u_n,u_n)$ converge de la misma forma (apelando al **Teorema** 24, recurrimos al hecho de que $u_n \to u$ fuertemente en $L^2(0,T;V)$. Esto es suficiente para mostrar la convergencia requerida para el término no lineal, de modo que podemos deducir que (3.24) sigue siendo una igualdad en $L^2(0,T;H)$ (y por tanto, una igualdad en H para casi cualquier $t \in [0,T]$).

Para abordar la continuidad respecto a las condiciones iniciales, volvemos a considerar el parámetro $w = u - v$, reescribiendo la ecuación como:

$$dw/dt + \nu Aw + B(u,u) - B(v,v) = f.$$

Tomando el producto interior con Aw, obtenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 + \nu |Aw|^2 = b(v,v,Aw) - b(u,u,Aw) \leq$$
$$\leq k\left[|w|^{1/2}\|w\|^{1/2}\|u\|^{1/2}|Au|^{1/2}|Aw| + |v|^{1/2}\|v\|^{1/2}\|w\|^{1/2}|Aw|^{3/2}\right] \leq$$

$$\leq C\left[\|w\|^2\|u\|\,|Au| + \|v\|^4\|w\|^2\right] + \frac{\nu}{2}|Aw|^2,$$

donde en la última línea hemos vuelto a usar la desigualdad de Young. Cancelando el término $|Aw|^2$, tenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 \leq C\left[\|u\|\,|Au| + \|v\|^4\right]\|w\|^2,$$

y por tanto:

$$\|w(t)\|^2 \leq exp\left(C\int_0^t \|u(s)\|\,|Au(s)| + \|v(s)\|^4\right)\|w(0)\|^2.$$

La continuidad respecto a las condiciones iniciales surge debido al hecho de que tanto u como v son soluciones fuertes, y por tanto están acotadas tanto en $L^\infty(0,T;V)$ como en $L^2(0,T;D(A))$. ■

Cuando f no depende del tiempo, podemos definir también un sistema semi-dinámico en V:

$$(V, \{S_V(t)\}_{t\geq 0}).$$

Puesto que las soluciones son únicas, ésta es la restricción del sistema semi-dinámico $S_H(t)$ hacia V; por simplicidad, ambos se denotan como $S(t)$.

Una vez puesta de manifiesto la existencia de soluciones débiles y fuertes, así como la unicidad de las primeras, podemos resaltar lo siguiente: cuando f es independiente del tiempo, las ecuaciones de Navier-Stokes en 2D pueden ser usadas para generar un sistema semi-dinámico, ya sea en H (si $f \in V'$) o en V (si $f \in H$). Sin embargo, al abordar el caso en 3D no tenemos forma de definir un sistema dinámico, puesto que no resulta posible probar la unicidad de soluciones débiles ni fuertes (aunque sí su existencia, bajo determinadas condiciones). En este contexto, el concepto de *atractor global* resultará especialmente útil a la hora de estudiar el comportamiento a lo largo del tiempo de un sistema semi-dinámico surgido a raíz de las ecuaciones de Navier-Stokes en 2D.

4. El atractor global.

En los capítulos anteriores, hemos podido ver cómo es posible usar la solución de algunas ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales para definir sistemas semidinámicos en varios espacios de fases. Para las ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo $\dot{x} = f(x)$ con no-linealidades Lipschitz, es posible definir un sistema dinámico en $\mathbb{R}^m$. En el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes en dos dimensiones, podríamos definir un sistema semidinámico tanto en H —básicamente, $\mathbb{L}^2(Q)$— como en V —en esencia, $\mathbb{H}^l(Q)$—.

Una de las principales ideas de la teoría de sistemas dinámicos es que se obtiene una reducción en la posible complejidad de la dinámica si estudiamos el comportamiento asintótico a largo plazo de las soluciones. En el ámbito de la mecánica de fluidos, esto equivaldría a focalizar nuestro estudio en los fenómenos de «turbulencia completamente desarrollada», más que en el comportamiento transitorio del flujo de fluido. Así pues, en esta sección introduciremos el concepto de **atractor global** para un sistema dinámico, i.e., un subconjunto compacto del espacio de fases que tiende a atraer todas las trayectorias. Como tal, resulta sensato esperar que el conjunto de soluciones que caigan dentro del atractor cubra todos los posibles comportamientos dinámicos del sistema.

Proporcionaremos un resultado general, con el fin de probar la existencia de un atractor global en varios tipos de sistemas, discutiendo sus propiedades; allanando el camino para el capítulo siguiente, donde volveremos a abordar las ecuaciones de Navier-Stokes, en esta ocasión desde la perspectiva del atractor global.

4.1. Semigrupos de operadores.

Consideraremos sistemas dinámicos cuyo estado viene descrito por un cierto elemento $u = u(t)$ de un espacio métrico H; normalmente, H será un espacio de Hilbert o un espacio de Banach. En la mayoría de casos, y en particular para aquellos sistemas dinámicos asociados a ecuaciones diferenciales parciales u ordinarias, el parámetro temporal, t, varía continuamente en $\mathbb{R}$ o en algún intervalo de $\mathbb{R}$; para algunos casos, t tomará valores discretos ($t \in \mathbb{Z}$ ó algún subconjunto de $\mathbb{Z}$). La evolución de nuestro sistema dinámico vendrá descrita por la familia de operadores $S(t)$, $t \geq 0$, que aplicarán H sobre sí mismo y que poseen las propiedades habituales de un semigrupo:

$$\begin{cases} S(t+s) = S(t) \cdot S(s) \qquad \forall s, t \geq 0 \\ \\ S(0) = I \qquad (Identidad\ en\ H) \end{cases} \tag{4.1}$$

4. ***El atractor global.***

Si consideramos un cierto estado dinámico ϕ en un instante s, entonces $S(t)\phi$ será el estado del sistema en el instante $t+s$, y por tanto:

$$\begin{cases} u(t) = S(t)u(0) \\ \\ u(t+s) = S(t)u(s) = S(s)u(t) \qquad s,t \geq 0 \end{cases}$$

En general, el semigrupo $S(t)$ vendrá determinado por la solución de una ecuación diferencial parcial u ordinaria. En el caso de estas últimas, los teoremas generales de existencia de soluciones permiten construir la definición de los operadores $S(t)$. En contraposición, cuando consideramos dimensiones cuasi-infinitas no existen teoremas que garanticen la existencia y unicidad de soluciones de manera genérica, lo cual ocasiona que demostrar la existencia de los operadores $S(t)$ y la derivación de sus propiedades constituya el paso previo de todo estudio de un sistema dinámico. A priori, podemos asumir que $S(t)$ es un operador continuo no-lineal de H en sí mismo, $\forall t \geq 0$.

En lo que respecta a la inyectividad, esta propiedad en los operadores $S(t)$ será equivalente a la «unicidad hacia atrás[1]» para un sistema dinámico. Cuando $S(t)$, $t > 0$ sea inyectivo, denotaremos como $S(-t)$ su inverso, el cual mapea $S(t)H$ en el espacio H. En este caso, obtendremos una familia de operadores $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$ que obedecen las propiedades (4.1) en sus dominios de definición, $\forall s,t \in \mathbb{R}$. Cabe mencionar que, en general, al considerar infinitas dimensiones, los operadores $S(t)$, $t < 0$ no suelen estar definidos para todas las regiones de H, incluso aunque los operadores $S(t)$, $t > 0$ sí lo estén.

Consideremos un parámetro inicial $u_0 \in H$. La trayectoria (a veces también llamada órbita) descrita en H a partir de u_0 estará constituida por el conjunto $\bigcup_{t\geq 0} S(t)u_0$. De manera similar, una trayectoria hipotética que concluyese en el valor u_0 estaría constituida por el conjunto $\bigcup_{t\leq 0} \{u(t)\}$, siendo u el mapeado en el dominio $[-\infty, 0]$ dentro de H, tal que $u(0) = u_0$ y $u(t+s) = S(t)u(s)$, $\forall s,t \leq 0$, $s+t \leq 0$ y $t \geq 0$. Las trayectorias que comienzan o acaban en u_0 reciben el nombre de trayectorias positivas o negativas a través de u_0, respectivamente. Para un cierto $u_0 \in H$, o bien para un subconjunto $\mathcal{A} \subset H$, definimos los conjuntos ω-límite para ambos parámetros considerados en H:

$$\begin{cases} \omega(u_0) = \bigcap\limits_{s\geq 0} \overline{\bigcup\limits_{t\geq s} S(t)u_0} \\ \\ \omega(\mathcal{A}) = \bigcap\limits_{s\geq 0} \overline{\bigcup\limits_{t\geq s} S(t)\mathcal{A}} \end{cases}$$

De manera análoga, podrían existir los conjuntos α-límite para un cierto $u_0 \in H$, o bien para un subconjunto $\mathcal{A} \subset H$:

$$\begin{cases} \alpha(u_0) = \bigcap\limits_{s\leq 0} \overline{\bigcup\limits_{t\leq s} S(-t)^{-1}u_0} \\ \\ \alpha(\mathcal{A}) = \bigcap\limits_{s\leq 0} \overline{\bigcup\limits_{t\leq s} S(-t)^{-1}\mathcal{A}} \end{cases}$$

[1] *Backward uniqueness*, en inglés.

Resulta sencillo observar que $\varphi \in \omega(\mathcal{A})$ si y sólo si existe una sucesión de elementos $\varphi_n \in \mathcal{A}$ y una sucesión $t_n \to +\infty$ tal que:

$$S(t_n)\varphi_n \to \varphi \qquad \textit{cuando} \quad n \to \infty \tag{4.2}$$

De manera análoga, $\varphi \in \alpha(\mathcal{A})$ sí y sólo sí existe una sucesión ψ_n que converja hacia φ en H y una sucesión $t_n \to +\infty$ tal que:

$$\varphi_n = S(t_n)\psi_b \in \mathcal{A}, \qquad \forall n$$

Diremos que un punto $u_0 \in H$ es *estacionario* o *punto de equilibrio* si:

$$S(t)u_0 = u_0, \qquad \forall t \geq 0$$

La trayectoria y los conjuntos ω/α-límite de un punto estacionario será igual a $\{u_0\}$. Si el punto u_0 es estacionario, podemos definir las variedades estable e inestable de u_0. La *variedad estable* de u_0, $\mathcal{M}_-(u_0)$, es el conjunto de puntos u_* (que puede ser vacío) perteneciente a la trayectoria completa $\{u(t), t \in \mathbb{R}\}$, $u_* = u(t_0)$, de modo que:

$$u(t) = S(t - t_0)u_* \to u_0 \qquad \textit{cuando}\, t \to \infty$$

Por otra parte, la *variedad inestable* de u_0, $\mathcal{M}_+(u_0)$, es el conjunto de puntos u_* (que puede ser vacío) perteneciente a la trayectoria completa $\{u(t), t \in \mathbb{R}\}$, $u_* = u(t_0)$, de modo que:

$$u(t) \to u_0 \qquad \textit{cuando}\, t \to -\infty$$

Un punto estacionario u_0 será *estable* cuando $\mathcal{M}_+(u_0) = \emptyset$, e *inestable* en caso contrario.

Si nos remitimos al caso discreto, consideramos un mapeado S dentro de H y para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $S(n) = S^n$. Si S es inyectivo, podremos definir S^{-1} y $S(-n) = S^{-n}$, para $n \in \mathbb{N}$. La trayectoria de $u_0 \in H$, el conjunto ω-límite de $u_0 \in H$ o de $\mathcal{A} \subset H$ vendrán definidos como se hizo más arriba, al igual que los conjuntos α-límite, en caso de existir, con la única restricción de $t \in \mathbb{Z}$. Salvo que se especifique lo contrario, el desarrollo que se expondrá será igualmente válido para los casos discreto y continuo, así como las definiciones generales y los resultados expuestos, ya sea para

$t \in R$ o $t \in Z$.

4.2. Conjuntos funcionales invariantes.

Diremos que un conjunto $X \subset H$ es invariante positivo para el semigrupo $S(t)$ si $S(t)X \subset X$, e invariante negativo si $S(t)X \supset X$, $\forall t > 0$ en ambos casos. Si el conjunto es a la vez invariante positivo y negativo, diremos que es un conjunto invariante.

Definición 6. Un conjunto $X \subset H$ es un conjunto funcional invariante para el semigrupo $S(t)$ si:

$$S(t)X = X, \qquad \forall t \geq 0 \tag{4.3}$$

Cuando los operadores $S(t)$ son inyectivos, entonces la relación (4.3) implica que $S(-t)$ está definido en X, $\forall t > 0$ y además:

$$S(t)X = X, \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{4.4}$$

Cualquier trayectoria existente para $t \in \mathbb{R}$ definirá un conjunto invariante X, del tipo $X = \{S(t)u_0, t \in \mathbb{R}\}$, donde u_0 es cualquier punto de la trayectoria. Si se diera el caso de que la función $t \in \mathbb{R} \to S(t)u_0$ es cuasi-periódica (de la forma $g(\omega_1 t, ...\omega_n t)$, donde g es periódica con periodo 2π en cada variable y las frecuencias ω_j son independientes), obtendríamos un toro invariante proyectado en H.

Supongamos ahora que u_0 es un punto estacionario. Las variedades estable $\mathcal{M}_-(u_0)$ $\mathcal{M}_-(u_0)$, e inestable, $\mathcal{M}_+(u_0)$ serán la unión de las trayectorias definidas $\forall t$, y por tanto serán conjuntos invariantes.

Si X es un conjunto invariante y $u_0 \in X$, entonces —asumiendo la inyectividad de los operadores $S(t)$, $S(t)u_0$— existe $\forall t \in \mathbb{R}$. Es sencillo ver que $_{u_0} = \{S(t)u_0, t \in \mathbb{R}\}$ es en sí mismo un conjunto invariante y que dos conjuntos de este tipo nunca intersectarán, salvo que resulten ser idénticos. Los conjuntos $X_{u_0}, u_0 \in X$ constituyen, por lo tanto, una partición de X, dentro de los conjuntos invariantes. Es más, los conjuntos X_{u_0} son conjuntos invariantes *minimales*: un subconjunto propio de X_{u_0} no puede ser en sí mismo un invariante, debido a que un conjunto invariante que contenga a u_0 debe contener a $S(t)u_0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

El siguiente lema proporciona otros conjuntos invariantes de especial interés:

Lema 9. *Supongamos que para algún subconjunto $\mathcal{A} \subset H$, $\mathcal{A} \neq \varnothing$, y para un cierto $t_0 > 0$, el conjunto $\bigcup_{t\geq 0} S(t)\mathcal{A}$ es relativamente compacto en H. Entonces, $\omega(\mathcal{A})$ es no-vacío, compacto e invariante. De manera similar, si los conjuntos $S(t)^{-1}\mathcal{A}$, $t \geq 0$, son no-vacíos y para cierto $t_0 > 0$, $\bigcup_{t\geq t_0} S(t)^{-1}\mathcal{A}$ es relativamente compacto, entonces $\alpha(\mathcal{A})$ es no-vacío, compacto e invariante.*

Demostración. Puesto que $\mathcal{A}$ es no-vacío, los conjuntos $\bigcup_{t\geq s} S(t)\mathcal{A}$ son no vacíos para cada $s \geq 0$. Por tanto, los conjuntos $\overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)\mathcal{A}}$ son no-vacíos y compactos, decreciendo conforme s aumenta: su intersección, igual a $\omega(\mathcal{A})$, es por tanto un conjunto no-vacío y compacto. Debido a la caracterización dada por (4.2) en relación a $\omega(\mathcal{A})$, es sencillo ver que $S(t)\omega(\mathcal{A}) = \omega(\mathcal{A})$, $\forall t > 0$. Si $\phi \in S(t)\omega(\mathcal{A})$, entonces $\phi = S(t)\varphi$, $\varphi \in \omega(\mathcal{A})$, y usando (4.1, las sucesiones $\varphi_n t_n$ proporcionadas por (4.2) y la hipótesis previa de que $S(t)$ es un operador continuo, no lineal, definido en H, $\forall t \geq 0$, llegamos a que:

$$S(t)S(t_n)\varphi_n = S(t+t_n)\varphi_n \to S(t)\varphi = \psi$$

La relación anterior muestra que $\psi \in \omega(\mathcal{A})$. En cambio, si $\varphi \in \omega(\mathcal{A})$, consideramos de nuevo las sucesiones $\varphi_n t_n$ proporcionadas por (4.2) y observamos que para $t_n > t$, la sucesión $S(t_n - t)\varphi_n$ es relativamente compacta en H. Por lo tanto, existen una subsucesión $t_{n_t} \to \infty$ y un $\psi \in H$ tales que:

$$S(t_{n_t} - t)\varphi_{n_i} \to \psi \qquad \textit{cuando } t \to \infty$$

También, a partir de (4.2) surge el hecho de que $\psi \in \omega(\mathcal{A})$, y a raíz de (4.1) y de nuevo la hipótesis de continuidad sobre el operador $S(t)$, obtenemos:

$$S(t_{n_i})\varphi_{n_i} \subset S(t)S(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \to S(t)\psi = \varphi \qquad \textit{cuando } n_i \to \infty,$$

y por tanto $\varphi \in S(t)\omega(\mathcal{A})$. Para $\alpha(\mathcal{A})$ la prueba sería similar. ∎

El lema anterior resulta especialmente útil para conjuntos ω-límite, pues permite proporcionar ejemplos de conjuntos invariantes siempre que podamos demostrar que $\bigcup_{t\geq 0} S(t)\mathcal{A}$ es relativamente compacto. Para probar esto último podemos, por ejemplo, mostrar que este conjunto está acotado si H tiene dimensión finita; mientras que si H posee infinitas dimensiones, mostramos que está acotado en un espacio W, «incrustado» de manera compacta en H.

4.3. Conjuntos absorbentes y Atractores.

Introduciremos en este apartado el concepto de **atractor**, que constituirá una de las piedras angulares de este texto.

Definición 7. Un atractor es un conjunto $\mathcal{A} \subset H$ que posee las siguientes propiedades:

(i) $\mathcal{A}$ es un conjunto invariante ($S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, $\forall t \geq 0$).

(ii) Existe una relación entre $\mathcal{A}$ y un vecino $\mathcal{U}$ dentro del mismo espacio de modo que, $\forall u_0 \in \mathcal{U}$, $S(t)u_0$ converge hacia $\mathcal{A}$ conforme $t \to \infty$:

$$dist(S(t)u_0, \mathcal{A}) \to 0 \quad \textit{cuando } t \to \infty$$

La distancia en la relación anterior se puede interpretar como la distancia de un punto al conjunto $d(x, \mathcal{A}) = \inf_{y \in \mathcal{A}} d(x, y)$, donde $d(x, y)$ denota la distancia desde x hasta y en H. Si $\mathcal{A}$ es un atractor, el mayor conjunto abierto $\mathcal{U}$ que satisface **(ii)** recibe el nombre de *cuenca de atracción* de $\mathcal{A}$. Alternativamente, podemos decir que $\mathcal{A}$ atrae a los puntos de $\mathcal{U}$, o con mayor rigor, que $\mathcal{A}$ atrae uniformemente un conjunto cualquiera $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ si:

$$dist(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}) \to 0 \quad \textit{cuando } t \to \infty, \tag{4.5}$$

donde $dist(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ es ahora la semidistancia entre dos conjuntos $\mathcal{B}_0$ y $\mathcal{B}_1$:

$$dist(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1) = \operatorname*{Sup}_{x \in \mathcal{B}_0} \operatorname*{Inf}_{y \in \mathcal{B}_1} d(x, y) \tag{4.6}$$

La convergencia enunciada en (4.5) equivale a lo siguiente: para cada $\varepsilon > 0$, existe un t_t tal que para $t \geq t_\varepsilon$, $S(t)\mathcal{B}$ está incluido en $\mathcal{U}_\varepsilon$, la ε-vecindad de $\mathcal{A}$ (siendo $\mathcal{U}_\varepsilon$ la unión de todas las esferas abiertas de radio ε centradas en $\mathcal{A}$). En general, salvo que sea preciso realizar alguna especificación, diremos simplemente que $\mathcal{A}$ atrae a $\mathcal{B}$. Por ejemplo, decimos que $\mathcal{A}$ atrae a los conjuntos acotados (o compactos) de $\mathcal{U}$ si $\mathcal{A}$ atrae uniformemente a cada conjunto acotado de $\mathcal{U}$. Un atractor $\mathcal{A}$ puede, o no, poseer esta propiedad.

Cuando se tienen infinitas dimensiones, donde no es necesario trabajar con diferentes topologías, podemos considerar conjuntos $\mathcal{A}$ que son atractores en un espacio W, $W \subset H$: esto significa que $\mathcal{A} \subset W$, $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, y **(ii)** es válido con la topología de W, es decir, $\mathcal{U}$ es abierto en W y la distancia dada en (4.5) es la de W (siendo W un espacio métrico).

Una definición alternativa de atractor, más rigurosa, podría ser la siguiente: $\mathcal{A}$ es un atractor si $\mathcal{A}$ es el conjunto ω-límite de uno de sus vecinos abiertos, $\mathcal{U}_0$. La cuenca de atracción de $\mathcal{A}$ es la unión de los conjuntos abiertos $\mathcal{U}_0$ tales que $\mathcal{U}_0 \supset \mathcal{A}$, y $\omega(\mathcal{U}_0) = \mathcal{A}$. Un concepto clave en este marco de referencia es el de atractores globales en un semigrupo.

Definición 8. Decimos que $\mathcal{A} \subset H$ es un **atractor global** para el semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ si $\mathcal{A}$ es un atractor compacto que atrae a los conjuntos acotados de H (y su cuenca de atracción se encuentra enteramente en H).

Es sencillo ver que un conjunto de este tipo es necesariamente único. También, este conjunto resulta ser maximal para la relación de inclusión entre los atractores acotados y entre los conjuntos funcionales invariantes acotados. Por este motivo, en ocasiones recibe el nombre de *atractor maximal*.

Con el propósito de establecer la existencia de los atractores, un concepto especialmente útil es el de *conjuntos absorbentes.*

Definición 9. Sean $\mathcal{B}$ un subconjunto de H y $\mathcal{U}$ un conjunto abierto que contiene a $\mathcal{B}$. Decimos que $\mathcal{B}$ es absorbente en $\mathcal{U}$ si la trayectoria de cualquier conjunto acotado de $\mathcal{U}$ cae sobre $\mathcal{B}$ después de cierto tiempo (que puede depender del conjunto en cuestión):

$$\begin{cases} \forall \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{U}, \quad \mathcal{B}_0 \text{ acotado}, \\ \exists t_1(\mathcal{B}_0)/S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}, \quad \forall t \geq t_1(\mathcal{B}_0). \end{cases} \tag{4.7}$$

También decimos que $\mathcal{B}$ absorbe a los conjuntos acotados de $\mathcal{U}$. La existencia de un atractor global $\mathcal{A}$ para un semigrupo $S(t)$ implica la de un conjunto absorbente. Para un cierto $\varepsilon > 0$, denotemos la ε-vecindad de $\mathcal{A}$ —es decir, la unión de esferas abiertas de radio ε centradas en $\mathcal{A}$— por $\mathcal{V}_\varepsilon$. En este caso, para cualquier conjunto acotado $\mathcal{B}_0$, $d(S(t)\mathcal{B}_0, \mathcal{A}) \to 0$ cuando $t \to \infty$; por tanto, $d(S(t)\mathcal{B}_0, \mathcal{A}) \leq \varepsilon/2$ para $t \geq t(\varepsilon)$ y $S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{V}_\varepsilon$ para dichos tiempos. Esto muestra que $\mathcal{V}_\varepsilon$ es un conjunto absorbente.

Por otra parte, mostraremos que un semigrupo que posee un conjunto absorbente y exhibe otra serie de propiedades también posee un atractor:

(i) Podemos ampliar la definición de conjunto absorbente y considerar un conjunto $\mathcal{B}$ que absorba a los puntos de $\mathcal{U}$ o a los conjuntos compactos de $\mathcal{U}$ (es decir, (4.7) se satisface cuando $\mathcal{B}_0 = \{u_0\}$, con $u_0 \in \mathcal{U}$, ó con el conjunto compacto $\mathcal{B}_0 = a$, con $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{U}$). No obstante, a no ser que se especifique lo contrario, consideraremos la **Definición 8**.

(ii) La existencia de un conjunto absorbente está relacionada con la propiedad de la *disipatividad* para un sistema dinámico y, en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, la aseveración «el semigrupo $S(t)$ disipa los conjuntos acotados (ó los conjuntos compactos; ó los puntos)» también se usa para enunciar que existe un conjunto $\mathcal{B}$ que absorbe a los conjuntos acotados. Sin embargo, al considerar infinitas dimensiones, para algunos sistemas considerados físicamente disipativos (como puede ser el caso abordado por las ecuaciones de Navier-Stokes en 3 dimensiones [11]), la existencia de un conjunto absorbente no es conocida, y por lo tanto no está claro si esta propiedad constituye una buena definición para la disipatividad como ocurre al considerar un número finito de dimensiones.

Si consideramos un cierto espacio $W \subset H$, entonces en la **Definición 8** podemos reemplazar los conjuntos abiertos y acotados de H por los de W, de manera que obtendremos el concepto de «conjuntos que son absorbentes en W». Procedamos ahora a probar la existencia de un atractor cuando la existencia de un conjunto absorbente es conocida; para ello, será preciso tomar una de las dos siguientes hipótesis:

Los operadores $S(t)$ son *uniformemente compactos* para valores de t grandes. En otras palabras, para cada conjunto acotado $\mathcal{B}$ existe un t_0 que puede depender de $\mathcal{B}$ de manera que:

$$\bigcup_{t \geq t_0} S(t)\mathcal{B}$$

sea relativamente compacto en H[2].

$$(4.8)$$

De forma alternativa, si H es un espacio de Banach, podemos asumir que $S(t)$ es la perturbación de un operador que satisface (4.8) mediante un operador —no necesariamente lineal— que converge hacia 0 conforme $t \to \infty$. Formulamos a continuación esta segunda hipótesis de manera más precisa:

Sea H un espacio de Banach, y para cada t, $S(t) = S_1(t)+S_2(t)$, donde los operadores $S_1(\cdot)$ son uniformemente compactos para t lo suficientemente grandes (por ejemplo, satisfaciendo (4.8)), y $S_2(t)$ es un mapeado continuo de H en sí mismo de modo que, para cada conjunto acotado $C \subset H$:

$$\underset{\varphi \in C}{Sup} \, |S_2(t)\varphi|_H \to 0 \qquad \textit{cuando } \, t \to \infty.$$

$$(4.9)$$

Por supuesto, si H es un espacio de Banach, cualquier familia de operadores que satisfaga (4.8) también satisfacerá (4.9) con $S_2 = 0$.

Teorema 6. *Asumimos que H es un espacio métrico y que los operadores $S(t)$ vienen dados y satisfacen (4.1), la hipótesis de que $S(t)$ es un operador continuo no lineal de H en sí mismo $\forall t \geq 0$, y (4.8) ó (4.9). Asumamos también que existen un conjunto abierto $\mathcal{U}$ y un conjunto acotado $\mathcal{B}$ de $\mathcal{U}$ de modo que $\mathcal{B}$ es absorbente en $\mathcal{U}$. Entonces, el conjunto ω-límite de $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} = \omega(B)$, es un atractor compacto que atrae a los conjuntos acotados de $\mathcal{U}$: es el atractor maximal acotado en $\mathcal{U}$ (debido a la relación de inclusión). Es más, si H es un espacio de Banach, U es convexo[3], y el mapeado $t \to S(t)u_0$ es continuo desde $\mathbb{R}_+$ en H, para cada u_0 en H; entonces $\mathcal{A}$ está conectado también.*

Demostración. Primero probaremos el teorema en el caso más simple, asumiendo (4.8). Debido a que el conjunto $\bigcup_{t \geq t_0} S(t)\mathcal{B}$ es relativamente compacto, el **Lema 1.1.** es aplicable y nos muestra que $\omega(\mathcal{B})$ es un conjunto invariante, no-vacío y compacto. Por tanto, podemos probar que $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$ es un atractor en $\mathcal{U}$ y que atrae a los conjuntos acotados de $\mathcal{U}$. Utilizaremos una prueba por contradicción y asumiremos que para algunos conjuntos acotados $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{U}$, $dist(S(t)\mathcal{B}_0, \mathcal{A})$ no tiende a 0 cuando $t \to \infty$; por tanto, existen un $\delta > 0$ y una sucesión $t_n \to \infty$ tales que:

[2]En el **Teorema 1.1.**, la hipótesis (4.8) puede ser reemplazada por la hipótesis débil: Para un cierto $t_1 > 0$. $S(t_1)$ es compacto. En la prueba de dicho teorema necesitamos saber que $\bigcup_{t \geq t_0} S(t)\mathcal{B}$ es relativamente compacto en H cuando $\mathcal{B}$ es un conjunto absorbente. Se define t_0 mediante $S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}, \forall t \geq t_0$. Por tanto, para $t \geq t_0 = t_0 + t_1$, $S(t)\mathcal{B} = S(t_1)S(t-t_1)\mathcal{B}$ está incluido en $S(t_1)\mathcal{B}$ (al igual que $S(t-t_1)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$.) y, por consiguiente, $\bigcup_{t \geq t_0} S(t)\mathcal{B}$ se halla incluido en $S(t_1)\mathcal{B}$

[3]Con una modificación apropiada de la prueba, podríamos asumir solamente que $\mathcal{U}$ es conexo.

$$dist(S(t)\mathcal{B}_0, \mathcal{A}) \geq \delta > 0, \qquad \forall n.$$

Para cada n, existe un $b_n \in \mathcal{B}_0$ que satisface:

$$dist(S(t)b_n, \mathcal{A}) \geq \frac{\delta}{2} > 0. \tag{4.10}$$

Dado que $\mathcal{B}$ es absorbente, $S(t_n)\mathcal{B}_0$, y por tanto $S(t_n)b_n$, pertenecen a $\mathcal{B}$ para valores de n lo suficientemente grandes (i.e., aquellos tales que $t_n \geq t_1(\mathcal{B}_0)$. La sucesión $S(t_n)b_n$ es relativamente compacta y posee al menor un punto de agrupación (*cluster point*) β, tal que:

$$\beta = \lim_{n_i \to \infty} S(t_{n_i})b_{n_i} = \lim_{n_i \to \infty} S(t_{n_i} - t_1)S(t_1)b_{n_i}.$$

Puesto que $S(t_1)b_n \in \mathcal{B}$, β pertenece a $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$, lo cual contradice (4.10). Por otra parte, el atractor $\mathcal{A}$ es maximal: si $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$ es un atractor acotado más grande, entonces $\mathcal{A}' \subset \mathcal{B}$, debido a que $S(t)\mathcal{A}' = \mathcal{A}'$ está incluido en $\mathcal{B}$ para valores de t lo suficientemente grandes (siendo $\mathcal{B}$ absorbente). Como consecuencia, $\omega(\mathcal{A}') = \mathcal{A}' \subset \omega(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$. Finalmente, la conectividad de $\mathcal{A}$ procede del **Lema 1.3.**, que enunciaremos más abajo, y el teorema queda probado en este caso. ■

Con el fin de probar el teorema bajo la hipótesis (4.9), probaremos en primer lugar una versión ligeramente cambiada del **Lema** 9:

Lema 10. *Si el semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ satisface (4.1), la hipótesis de que $S(t)$ es un operador continuo no lineal de H en sí mismo $\forall t \geq 0$, y (4.8) ó (4.9), entonces para cualquier conjunto acotado $\mathcal{B}_0$ de H, $\omega(\mathcal{B}_0)$ es no-vacío, compacto e invariante.*

Demostración. Si asumimos (4.8), entonces $\bigcup_{t\geq 0} S(t)\mathcal{B}_0$ es relativamente compacto y el **Lema** 9 se aplica directamente. Por otro lado, si asumimos (4.9), será preciso remarcar lo siguiente:

> Si φ_n está acotado y $t_n \to \infty$, entonces $S_2(t_n)\varphi_n \to 0$ y $S_1(t_n)\varphi_n$ es convergente si y sólo si $S(t_n)\varphi_n$ converge (en cuyo caso, los límites son iguales).

(4.11)

La norma de $S_2(t_n)\varphi_n$ está acotada por $r_c(t)$, donde C es la sucesión φ_n, $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $S_2(t_n)\varphi_n$ converge hacia 0, y:

$$S(t_n)\varphi_n = S_1(t_n)\varphi_n + S_2(t_n)\varphi_n$$

converge si y sólo si $S_1(t_n)\varphi_n$ converge. Usando (4.11) y la caracterización (4.2) de un conjunto ω-límite, podemos ver que el conjunto ω-límite de $\mathcal{B}_0$ para $S(t)$, $\omega(\mathcal{B}_0)$ es igual al conjunto:

$$\omega_1(\mathcal{B}_0) = \bigcap_{S\geq 0}\overline{\bigcup_{t\geq s} S_1(t)\mathcal{B}_0}.$$

La definición de $\omega_1(\mathcal{B}_0)$ es ciertamente parecida a la de un conjunto ω-límite a pesar de que S_1 no sea un semigrupo. Sin embargo, hay una propiedad similar a (4,2) que sigue siendo válida: $\varphi \in \omega_1(\mathcal{B}_0)$ si y sólo si existe una sucesión $\varphi_n \in \mathcal{B}_0$ y una sucesión $t_n \to \infty$, de modo que:

$$S_1(t_n)\varphi_n \to \varphi \qquad \textit{cuando } n \to \infty$$

Mostremos ahora que $\omega(\mathcal{B}_0) = \omega_1(\mathcal{B}_0)$. Asumamos que $\varphi \in \omega(\mathcal{B}_0)$; entonces, debido a (4,2) existen un $\varphi_n \in \mathcal{B}_0$ y una sucesión $t_n \to \infty$ tales que:

$$S(t_n)\varphi_n \to \varphi \qquad \textit{cuando } n \to \infty$$

Nuevamente, usando (4.11), $S_1(t_n)\varphi_n$ converge también hacia φ conforme $n \to \infty$ y $\varphi \in \omega_1(\mathcal{B}_0)$. La inclusión $\omega_1(\mathcal{B}_0) \subset \omega(\mathcal{B}_0)$ se prueba de manera similar, llegando finalmente a:

$$\omega(\mathcal{B}_0) = \omega_1(\mathcal{B}_0).$$

Tal y como se ha visto en la prueba del **Lema** 9, observamos que $\omega_1(\mathcal{B}_0)$ es no-vacío y compacto, debido a que los conjuntos $\overline{\bigcup_{t\geq s} S_1(t)\mathcal{B}_0}$ son no-vacíos, cerrados, no decrecientes y, por hipótesis, que $\overline{\bigcup_{t\geq t_0} S_1(t)\mathcal{B}_0}$ es compacto. Por lo tanto, $\omega(\mathcal{B}_0)$ es no-vacío y compacto, y se mantiene que $\omega(\mathcal{B}_0)$ sea invariante para S. La inclusión $S(t)\omega(\mathcal{B}_0) \subset \omega(\mathcal{B}_0)$, $\forall t > 0$, se prueba exactamente como en el **Lema** 9.

Sean $\psi \in \omega(\mathcal{B}_0)$, $\psi = S(t)\varphi$ y $\varphi \in \omega(\mathcal{B}_0)$. Considerando las sucesiones φ_n, t_n dadas por (4,2), obtenemos:

$$S(t)S(t_n)\varphi_n = S(t+t_n)\varphi_n \to S(t)\varphi = \psi,$$

y, por tanto, $\varphi \in \omega(\mathcal{B}_0)$. La inclusión opuesta, $\omega(\mathcal{B}_0) \subset S(t)\mathcal{B}_0$, $\forall t > 0$, precisa de un argumento ligeramente diferente: sea $\varphi \in \omega(\mathcal{B}_0)$. Debido a (4,2), existen una sucesión $\varphi_n \in \mathcal{B}_0$ y un $t_n \to \infty$ tales que:

$$S(t_n)\varphi_n \to \varphi \qquad \textit{cuando } n \to \infty.$$

Para $t_n \geq t$, la sucesión $S(t_n - t)\varphi_n$ es de la forma:

$$S(t_n - t)\varphi_n = S_1(t_n - t)\varphi_n + S_2(t_n - t)\varphi_n.$$

La sucesión $S_1(t_n - 1)\varphi_n$ es relativamente compacta en H, y contiene una subsucesión convergente:

$$S_1(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \to \psi \qquad \textit{cuando } n_i \to \infty.$$

Nuevamente, a raíz de (4.11) deducimos que $S_2(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i}$ converge hacia 0, y por lo tanto:

$$S(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} \to \psi \qquad \textit{cuando } n_i \to \infty$$

Esto implica que $\psi \in \omega(\mathcal{B}_0)$, y:

$$\varphi = \lim_{n_i \to \infty} S(t)S(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} = S(t)\psi$$

pertenece a $S(t)\omega(\mathcal{B}_0)$. ■

Demostración. **(Continuación de la prueba del Teorema 6)** El **Lema** 10 muestra que $\omega(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$ es no-vacío, compacto e invariante. El hecho de que $\mathcal{A}$ atraiga a los conjuntos acotados se prueba por contradicción, como hicimos más arriba: la única diferencia se hace patente cuando probamos que que $S(t_n)b_n$ es relativamente compacto. Esto no surge inmediatamente de la relación (4.8), sino que en su lugar observamos que $S_1(t_n)b_n$ es relativamente compacto, y (4.11) implica por lo tanto que $S(t_n)b_n$ es relativamente compacto. La prueba de que $\mathcal{A}$ es maximal se lleva a cabo de la misma manera que hicimos más arriba. ■

Completaremos la prueba del **Teorema** 6 enunciando el siguiente lema:

Lema 11. *Si $\mathcal{U}$ es un conjunto conjunto abierto y convexo, y $K \subset \mathcal{U}$ es un conjunto invariante compacto que atrae a conjuntos compactos, entonces K se halla conectado.*

Demostración. La envolvente convexa cerrada de K, $\overline{conv\, K} = \mathcal{B}$, es compacta, se halla conectada y está incluida en $\mathcal{U}$, y por lo tanto K atrae a $\mathcal{B}$. Si K no estuviera conectado, podríamos encontrar dos conjuntos abiertos $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$, con $\mathcal{U}_1 \cap K \neq \varnothing$, $\mathcal{U}_2 \cap K \neq \varnothing$, $K \subset \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ y $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \varnothing$. Debido a que $K \subset \mathcal{B}$, $K = S(t)K \subset S(t)\mathcal{B}$, pero $\mathcal{B}$ está conectado y, dado que $S(t)$ es continuo, $S(t)\mathcal{B}$ se halla conectado también. Por lo tanto, $\mathcal{U}_i \cap S(t)\mathcal{B} \neq \varnothing$, $i = 1, 2$, y $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ no cubre a $S(t)\mathcal{B}$. Por consiguiente, para cada $t > 0$ existe un $x_t \in S(t)\mathcal{B}$, $x_t \notin \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$. Consideremos ahora la sucesión x_n, $n \in \mathbb{N}$ $(t = n)$. Esta sucesión es relativamente compacta, lo cual resulta obvio si asumimos (4.8), mientras que si asumimos (4.9) escribimos $x_n = S(n)y_n$, $y_n \in \mathcal{B}$, es decir:

$$x_n = S_1(n)y_n + S_2(n)y_n.$$

La sucesión $S_1(n)y_n$ es relativamente compacta, y (4.11) implica que x_n es también relativamente compacta. Por lo tanto, K atrae a $\{x_n\}$, y la sucesión x_n contiene a su vez una subsucesión (también denotada x_n) que converge hacia un punto $x \in K$. Necesariamente, $\notin \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$, surgiendo así una contradicción. ■

Una ligera generalización del **Teorema** 6 puede obtenerse reemplazando la hipótesis (4.9) por la hipótesis débil [12]:

> El semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es *asintóticamente compacto*, i.e., para cada secuencia acotada $\{x_k\}$ en H y cada secuencia $t_k \to \infty$ $\{S(t_k)x_k\}_k$ es relativamente compacta en H.

(4.12)

En sencillo ver que (4.9) implica (4.12), pero estas condiciones son (como veremos en el siguiente párrafo) equivalentes. Recalquemos que la prueba del **Teorema** 6 sigue siendo válida si reemplazamos (4.8) ó (4.9) por (4.12). La prueba de que $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{A})$ es la misma que en el caso de la hipótesis (4.8), puesto que todas las sucesiones $\{t_n\}_n$ consideradas son tales que $t_n \to \infty$. El único cambio deviene en la prueba de que $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$ es no-vacío, lo cual es cierto porque $\omega(\varphi) \neq \varnothing$, $\forall \varphi \in \mathcal{B}$ debido a (4.12). De manera similar, mostramos que $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B}$ atrae a cualquier conjunto acotado $\mathcal{B}_0 \subset H$, y es posible aplicar el **Lema** 11, mostrando que $\mathcal{A}$ se halla conectado si $\mathcal{U}$ es convexo.

Remarcamos en último lugar lo siguiente: cuando H es un espacio de Banach uniformemente convexo, y si podemos asumir la existencia de un conjunto absorbente acotado $\mathcal{B}$ como hicimos en el **Teorema 1.1**, entonces las siguientes tres condiciones resultan equivalentes:

- **(i)** La hipótesis (4.9) (descomposición $S = S_1 + S_2$).
- **(ii)** La hipótesis (4.12) (compacidad asintótica).
- **(iii)** Existe un conjunto compacto $K \subset H$ tal que $d(S(t)\mathcal{B}, K) \to 0$ conforme $t \to \infty$.

Esto unifica los diferentes resultados concernientes a la existencia de un atractor global. Para las equivalencias anteriores, el único resultado no obvio es el relacionado con enseñar que (ii) implica (i). Probemos este resultado: asumiendo (ii), el **Teorema** 6 y (4.12) implican que $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$ es el atractor global para el semigrupo, y además además es compacto. La envolvente convexa cerrada de $\mathcal{A}$, denotada como K, es también compacta. Consideremos los proyectores $\Pi_K : H \to K$ desde H hasta K (un conjunto cerrado, convexo y no-vacío). Para cada $\varphi \in H$, agrupamos:

$$\begin{cases} S_1(t)\varphi = \Pi_K(S(t)\varphi) \in K \;\; (compacto) \\ \\ S_2(t)\varphi = S(t)\varphi - \Pi_K(S(t)\varphi). \end{cases}$$

Siendo todas las demás propiedades de (4.9) triviales, sólo tenemos que probar que, para cada conjunto acotado $C \subset H$, $Sup_{\varphi \in C} |S_2(t)\varphi|_H \to 0$ cuando $t \to \infty$. Argumentamos por contradicción y asumimos lo contrario: entonces existirán una sucesión acotada $\{\varphi_j\}$ de H y un $t_j \to \infty$ tales que $|S_2(t_j)\varphi_j|_H \geq \delta > 0$, para cierto $\delta > 0$. Puesto que $\mathcal{B}$ es absorbente, y usando (ii), vemos que existe una subsucesión (denotada t_j) tal que $S(t_j)\varphi_j \to \varphi$ cuando $j \to \infty$. A su vez, tenemos $\varphi \in \omega(\mathcal{B}) = \mathcal{A} \subset K$, y dado que Π_k es continuo, $S_1(t_j)\varphi_j = \Pi_K(S(t_j)\varphi_j) \to \Pi_K\varphi = \varphi$; entonces, $S_2(t_j)\varphi_j \to 0$, y obtenemos la contradicción.

4.4. Estabilidad de los Atractores.

Consideraremos en este apartado una familia de perturbaciones $S_\eta(t)$ del semigrupo $S(t)$. Estas perturbaciones pueden ser debidas a diversas causas, como la variación de un cierto parámetro significativo (como los coeficientes de los operadores diferenciales o de las fuerzas de arrastre); por otra parte, pueden surgir a raíz de procedimientos de aproximación como los utilizados en análisis numérico. Dado que en general los conjuntos invariantes pueden ser totalmente inestables frente a las perturbaciones, los atractores poseen algunas propiedades de estabilidad, que describiremos como un resultado de estabilidad.

El semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ satisface la propiedad (4.1), junto a la hipótesis previa de que $S(t)$ es un operador continuo no-lineal de H en sí mismo, $\forall t \geq 0$; ahora, además, asumiremos que este semigrupo posee un atractor $\mathcal{A}$, el cual atrae a una vecindad $\mathcal{U}$. Los semigrupos perturbados dependen de un cierto parámetro η, $0 < \eta \leq \eta_0$, y se definen de la siguiente manera: consideremos una familia de subespacios cerrados H_η de H, los cuales dependen de η de forma que:

$$\bigcup_{0<\eta\leq\eta_0} H_\eta \;\; es\, denso\, en\, H.$$

Para cada $\eta > 0$, consideramos un semigrupo de operadores $\{S_\eta(t)\}_{t\geq 0}$, donde $S_\eta(t)$ mapea H_η en sí mismo y estos operadores satisfacen las mismas condiciones que el semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Se puede asumir que en el límite $\eta \to 0$, los operadores $S_\eta(t)$ aproximan S uniformemente sobre el producto de $\mathcal{U}$ en los conjuntos acotados de $\mathbb{R}_+$. Para cada intervalo compacto $I \subset]0, +\infty[$,:

$$\delta_\eta(I) = \underset{u_0 \in \mathcal{U}\cap H_\eta}{Sup} \; \underset{t\in I}{Sup}\, d(S_\eta(t)u_0, S(t)u_0) \to 0 \qquad cuando\, \eta \to 0 \tag{4.13}$$

Asumiremos también que:

Para cada η, S_η posee un atractor $\mathcal{A}_\eta$, el cual atrae $\mathcal{U}' \cap H_\eta$, siendo $\mathcal{U}'$ un vecindad abierta de $\mathcal{A}_\eta \cup \mathcal{A}$, independiente de η, y por lo tanto podemos enunciar el siguiente teorema:

(4.14)

Teorema 7. *Bajo las hipótesis tomadas arriba, cuando $\eta \to 0$, $\mathcal{A}_\eta$ converge hacia $\mathcal{A}$ en el sentido de la semidistancia d —véase la expresión (4.6)—:*

$$d(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}) \to 0 \quad \eta \to 0. \tag{4.15}$$

Demostración. Es suficiente mostrar que para cada $\varepsilon > 0$, existen un $\eta(\varepsilon)$ y un $\tau(\varepsilon)$ tales que, para $0 < \eta \leq \eta(\varepsilon)$ y $t \geq \tau(\varepsilon)$:

$$S_\eta(t)(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \cap H_\eta) \subset \mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{A}), \tag{4.16}$$

donde $\mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{A})$ denota la ε-vecindad de $\mathcal{A}$. Efectivamente, puesto que $\mathcal{A}_\eta$ es el conjunto ω-límite de $\mathcal{U}' \cap H_\eta$ (para S_η), la expresión (4.16) implica que $\mathcal{A}_\eta \subset \mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{A})$, y por tanto:

$$d(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}) \leq \varepsilon \quad si\, \eta \leq \eta(\varepsilon) \tag{4.17}$$

Probaremos en último lugar la relación (4.16): existe un $r_0 > 0$ tal que $\mathcal{U}'' = \mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \supset \mathcal{V}_{r_0}(\mathcal{A})$. Asumiendo que $\varepsilon < r_0$, y dado que $\mathcal{A}$ atrae a $\mathcal{U}$, podemos encontrar un t_0 tal que, para $t < ge\tau_0 = \tau_0(\varepsilon)$:

$$S(t)\mathcal{U}'' \subset V_{\varepsilon/2}(\mathcal{A}).$$

Cuando aplicamos (4.13) con $I = [\tau_0, 2\tau_0]$ y encontramos un $\eta_0 = \eta_0(\varepsilon)$ tal que $d(S_\eta(t)u_0, S(t)u_0) \leq \varepsilon/2$ para cada $t \in [\tau_0, 2\tau_0]$, $0 < \eta \leq \eta_0(\varepsilon)$, y $u_0 \in \mathcal{U}'' \cap H_\eta$. Por tanto, hemos probado (4.16) para cada $0 < \eta \leq \eta_0(\varepsilon)$, y cada $t \in [\tau_0, 2\tau_0]$. Con el fin de enunciar (4.16) para cada $t \geq 2\tau_0$ (y $\eta \in]0, \eta_0]$), procedemos mediante inducción. Asumimos que (4.16) es válido para $t \in [\tau_0, n\tau_0]$, y probamos el resultado para $t \in [n\tau_0, (n+1)\tau_0]$. Para tales valores de t, escribimos $t = (n-1)\tau_0 + \tau$, $\tau \in [\tau_0, 2\tau_0]$, y si $u_0 \in \mathcal{U}'' \cap H_\eta$ y $\eta \in]0, \eta_0]$:

$$S_\eta(t)u_0 = S_\eta(\tau)S_\eta((n-1)\tau_0)u_0. \tag{4.18}$$

Por lo que hemos asumido por inducción, $S_\eta((n-1)\tau_0)u_0$ pertenece a $\mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{A}) \subset \mathcal{V}_{r_0}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{U}''$, y por tanto (4.16) (que es válido en el intervalo $[\tau_0, 2\tau_0]$) y (4.18) proporcionan $S_\eta(\tau)u_0 \in \mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{A})$. ■

5. El atractor global para las ecuaciones de Navier-Stokes.

Consideremos las ecuaciones de Navier-Stokes en dos dimensiones, para las cuales las estimaciones formales estándar prueban la existencia de conjuntos absorbentes en $\mathbb{L}^2$, $\mathbb{H}^l$ y $\mathbb{H}^2$[1]. Podemos mostrar la existencia de un atractor para ambos sistemas dinámicos en $G \subset \mathbb{L}^2$,

$$H = \left\{ u \in \dot{\mathbb{L}}_p^2(Q) : \nabla \cdot u = 0 \right\},$$

y mismamente en $V \subset \mathbb{H}^l$,

$$V = \left\{ u \in \dot{H}_p^l(Q) : \nabla \cdot u = 0 \right\}.$$

Recordando notación, usamos $|u|$, $\|u\|$ y $\|u\|_*$ para denotar las normas de u en H, V y V' (el dual de V), respectivamente. Los atractores globales que obtendremos en este capítulo no poseen funcional de Lyapunov alguno, lo cual permitiría determinar su estructura de forma detallada, como se hace, por ejemplo, para las ecuaciones de reacción-difusión [6].

5.1. Ecuaciones de Navier-Stokes en 2D.

Mostremos en primer lugar la existencia de conjuntos absorbentes en espacios crecientemente regulares. Obra decir que, a excepción del primer cálculo, el resto precisan de la aplicación del método de Galerkin para su justificación.

5.1.1. Conjunto absorbente en $\mathbb{L}^2$.

Consideremos el sistema dinámico en H definido en virtud de los **Teoremas** 3 y 4, relacionados con la existencia y unicidad de soluciones débiles.

[1] Esto puede hacerse de manera rigurosa empleando un método de Galerkin y tomando límites.

Proposición 6. *Si $f \in V'$, entonces habrá un conjunto absorbente en H: existen un tiempo $t_0(|u_0|)$, un ρ_H y un I_V tales que:*

$$|u(t)| \leq \rho_H \quad y \quad \int_t^{t+1} \|u(s)\|^2 \, ds \leq I_V \tag{5.1}$$

para todo $t \geq t_0(|u_0|)$.

Demostración. Tal y como hicimos en el **Capítulo** 3 cuando analizamos los truncamientos del método de Galerkin, tomaremos el producto interno de la ecuación:

$$du/dt = \nu Au + B(u,u) = f$$

con u, obteniendo:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu \|u\|^2 + b(u,u,u) = \langle f, u \rangle \, .$$

Puesto que —como hemos visto en secciones anteriores— $b(u,u,u) = 0$, tenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu \|u\|^2 \leq \|f\|_* \|u\| \, ,$$

lo cual, tras aplicar la desigualdad de Young (recordando que usamos $\|f\|_*$ para la norma de f en V'), queda como:

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu \|u\|^2 \leq \frac{\|f\|_*^2}{\nu}. \tag{5.2}$$

Usando la desigualdad de Poincaré, tenemos que $\|u\|^2 \geq \lambda_1 |u|^2$, y por lo tanto:

$$|u(t)|^2 \leq |u_0| exp(-\nu\lambda_1 t) + \frac{\|f\|_*^2}{\nu^2\lambda_1}(1 - e^{\nu\lambda_1 t}$$

Usando la desigualdad de Gronwall (ver, por ejemplo, el **Lema 2.8** de [6]), podemos deducir fácilmente que:

$$|u(t)|^2 \leq |u_0|^2 exp(-\nu\lambda_1 t) + \frac{\|f\|_*^2}{\nu^2\lambda_1}(1 - e^{-\nu_1 t}),$$

y por lo tanto existe un tiempo $t_0(|u_0|)$, que podemos tomar como:

$$t_0(|u_0|) = max(\frac{1}{\nu\lambda_1} ln(\frac{\|f\|_*^2}{\nu^2\lambda_1|u_0|}), 0),$$

tal que, para todo $t \geq t_0$:

$$|u(t)|^2 \leq 2\frac{\|f\|_*^2}{\nu^2\lambda_1} \equiv \rho_H^2. \tag{5.3}$$

El límite en la integral de $\|u(s)\|^2$ surge al integrar (5.2) entre t y $t+1$, para así obtener:

$$\nu \int_t^{t+1} \|u(s)\|^2 \, ds \leq \frac{\|f\|_*^2}{\nu} + |u(t)|^2,$$

y luego usando la relación (5.3). ■

Tiene cabida mencionar que este resultado se mantendrá considerando $m = 3$, puesto que lo único que hemos usado es la propiedad de ortogonalidad de b, en lugar de cualquiera de las cotas que vimos al estudiar la forma trilineal b en la sección 2.5. Sin embargo, para $m = 3$ será preciso obtener estas estimaciones mediante el proceso de Galerkin, puesto que sólo tenemos $du/dt \in L^{4/3}(0, T; V')$ (y por tanto, no es posible aplicar el **Teorema** 23).

5.1.2. Conjunto absorbente en $\mathbb{H}^1$.

Partiendo de la **Proposición** 6, haremos uso del límite integral de $\|f\|^2$ para obtener un conjunto absorbente en V. Precisaremos mayor regularidad en el término de forzamiento, mientras que esto no será necesario en u_0. Recalquemos que todas las estimaciones que se realizarán en ésta y las siguientes secciones requieren la aplicación del método de Galerkin para su justificación.

Proposición 7. *Si $f \in H$, entonces habrá un conjunto absorbente en V: existen un tiempo $t_1(|u_0|)$, un ρ_V y un I_A tales que:*

$$\|u(t)\| \leq \rho_V \quad y \quad \int_t^{t+1} |Au(s)|^2 ds \leq I_A, \tag{5.4}$$

para cualquier $t \geq t_1(|u_0|)$.

Veremos en la siguiente sección cómo el límite integral en $|Au(s)|$ resultará útil para obtener un conjunto absorbente en $D(A)$.

Demostración. En primer lugar, tomamos el producto interno de la ecuación con Au y obtenemos —puesto que $b(u, u, Au) = 0$—:

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \nu|Au|^2 \leq \frac{|f|^2}{\nu}. \tag{5.5}$$

Eliminando el segundo término[2], tenemos:

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 \leq \frac{|f|^2}{\nu}.$$

Si ahora integramos ambos lados de la desigualdad entre s y t, con $t-1 \leq s < t$, obtenemos:

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u(s)\|^2 + \frac{|f|^2}{\nu}.$$

Volviendo a integrar, esta vez entre $s = t-1$ y $s = t$, llegamos a:

$$\|u(t)\|^2 \leq \int_{t-1}^{t} \|u(s)\|^2 \, ds + \frac{|f|^2}{\nu}.$$

Siempre que $t \geq t_1(|u_0|) + 1$, podremos usar el límite integral en (5.1) para deducir que:

$$\|u(t)\|^2 \leq \rho_V^2 \equiv I_V + \frac{|f|^2}{\nu},$$

[2]Ya que tenemos $|Au|^2 \geq \lambda_1 \|u\|^2$, podemos escribir:

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \nu\lambda_1 \|u\|^2 \leq \frac{|f|^2}{\nu}.$$

que es un conjunto absorbente en V. Si ahora integramos (5.5) entre t y $t+1$, obtenemos finalmente:

$$\nu \int_t^{t+1} |Au(s)|^2 \leq \frac{|f|^2}{\nu} + \|u(t)\|^2,$$

lo cual nos dará (5.4), con $\nu I_A = |f|^2/\nu + \rho_V^2$. ■

Este resultado nos muestra que habrá un atractor para el sistema dinámico en $H = \mathbb{L}^2$, siempre que $f \in H$. Hemos mostrado también que cualquier solución en el atractor estará en $L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;D(A))$, y por tanto debe ser una solución fuerte.

Teorema 8. *Si $f \in H$, entonces el sistema dinámico en H generado por las ecuaciones de Navier-Stokes en 2D posee un atractor global, $\mathcal{A}_H$, y las soluciones en $\mathcal{A}_H$ son soluciones fuertes de la ecuación original.*

En **Capítulo** 3 mostramos que las ecuaciones de Navier-Stokes en 2D generaban un semigrupo no sólo en H, sino también en V; la cuestión sobre la existencia de un atractor global en V surge de forma natural. Además, acabamos de mostrar que existe un conjunto absorbente y acotado (pero no compacto) en V, y por tanto podríamos definir un conjunto mediante:

$$\mathcal{A}_W = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq T} S(t)B}, \tag{5.6}$$

donde B es una *esfera* absorbente en V a raíz de la **Proposición** 7, pero el cierre se ha tomado en H. Esto proporciona un conjunto $\mathcal{A}_W$ acotado (pero no compacto) en V y atrae todas las trayectorias en la norma de H. Sin embargo, un atractor global «en V» tiene que atraer en la norma de V. Así pues, para obtener un atractor global apropiado para el semigrupo en V, debemos encontrar un conjunto absorbente compacto en V, lo cual haremos mostrando que existe un conjunto absorbente en $\mathbb{H}^2$.

5.1.3. Conjunto absorbente en $\mathbb{H}^2$.

En línea con lo anterior, podemos demostrar que existe también un conjunto absorbente en $D(A)$, encontrando una cota asintótica en $|Au|$ y, por tanto, usando el resultado de regularidad para el operador de Stokes, una cota asintótica en $\|u\|_{\mathbb{H}^2}$. Para el sistema dinámico en H, esto equivale a un resultado de regularidad para el atractor. Para el sistema dinámico en V, se muestra la existencia de un conjunto compacto absorbente y, por tanto, de un atractor en V.

Proposición 8. *Si $f \in H$ es independiente de t, entonces hay un conjunto absorbente en $D(A)$: existen un tiempo $t_2(|u_0|)$ y un ρ_A tales que:*

$$|Au(t)| \leq \rho_A \quad \forall\, t \geq t_2(|u_0|).$$

En particular, $\mathcal{A}_H$ está acotado en $\dot{\mathbb{H}}^2_p(Q)$.

Percatémonos de que, si f es independiente del tiempo (para lo cual necesitamos probar la existencia de un atractor global), entonces $f \in H$ es suficiente para obtener un conjunto absorbente en $\mathbb{H}^2$ al igual que en esta proposición. Si f dependiera de t, entonces necesitaríamos que f fuese más regular, con el fin de obtener cotas asintóticas en $|Au(t)|$.

Demostración. La idea es de esta prueba consiste en usar estimaciones en la longitud de la derivada en el tiempo, u_t, para ayudar con las estimaciones sobre las derivadas de u. De hecho, el primer paso de la prueba va a consistir en mostrar que la norma de u_t está relacionada con la norma de Au.

En primer lugar, observemos que la cota (2.58) implica que, si $u \in D(A)$, entonces $B(u,u) \in H$, con:

$$|B(u,u)| \leq k|u|^{1/2} \, \|u\| \, |Au|^{1/2}. \tag{5.7}$$

A raíz de la ecuación que gobierna el proceso,

$$du/dt + \nu Au + B(u,u) = f$$

se tiene que:

$$|u_t| \leq |Au| + k|u|^{1/2} \, \|u\| \, |Au|^{1/2} + |f|.$$

Si ahora aplicamos la desigualdad de Young, obtendremos:

$$|u_t| \leq \frac{3}{2}|Au| + \frac{1}{2}k^2|u| \, \|u\|^2 + |f|,$$

y a su vez, usando (5.1) y (5.4), obtenemos:

$$|u_t| \leq c|Au| + c\rho_H \rho_V^2 + |f|$$

una vez que t es lo suficientemente grande. De aquí se deduce que, para tales valores de t lo suficientemente grandes, podemos transcribir el límite de la **Proposición** 7 para:

$$\int_t^{t+1} |Au(s)|^2 ds$$

dentro de un límite en:

$$\int_t^{t+1} |u_t|^2 ds \leq C_t \equiv C[I_A + \rho_H^2 \rho_V^4 + |f|^2]. \tag{5.8}$$

Ahora, diferenciamos la ecuación con respecto a t y tomamos el producto interno con u_t, para así obtener:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t|^2 + \nu \|u_t\|^2 \leq |b(u_t, u, u_t)| \leq k \|u\| \|u_t\| \|u_t\| \leq \frac{\nu}{2} \|u_t\|^2 + \frac{k^2}{2\nu} \|u\|^2 |u_t|^2.$$

A raíz de lo anterior, se deduce que para valores de t lo suficientemente grandes:

$$\frac{d}{dt}|u_t|^2 \leq \frac{k^2 \rho_V^2}{\nu}|u_t|^2.$$

Haciendo uso de la desigualdad de Gronwall, podemos integrar la ecuación entre s y $t+1$, con $t < s < t+1$, para obtener:

$$|u_t(t+1)|^2 \leq |u_t(s)|^2 + \frac{k^2 \rho_V^2}{\nu} \int_s^{t+1} |u_t(s)|^2 ds,$$

y luego, nuevamente entre t y $t+1$, de modo que:

$$|u_t(t+1)|^2 \leq \left(1 + \frac{k^2 \rho_V^2}{\nu}\right) \int_t^{t+1} |u_t(s)|^2 \, ds \leq C_t(1 + k^2 \rho_V^2/\nu), \tag{5.9}$$

usando el límite de (5.8). A raíz de esto, se tiene que:

$$|Au| \leq |u_t| + |B(u,u)| + |f|,$$

lo cual puede ser reordenado usando la relación (5.7), obteniendo así:

$$|Au| \leq 2|u_t| + k^2\rho_H\rho_V^2 + 2|f|,$$

y por tanto tenemos que $|Au(t+1)|$ está acotado, usando (5.9). ■

Puesto que $|u_0| \leq \lambda_1^{-1/2}\|u_0\|$, se tiene que si $u_0 \in V$, entonces existe un tiempo $\tilde{t}_0(\|u_0\|) = t_1(\lambda_1^{-1/2}\|u_0\|)$, tal que:

$$\|u(t)\| \leq \rho_V \quad \text{y} \quad |Au(t)| \leq \rho_A, \quad \forall\, t \geq \tilde{t}_0(\|u_0\|),$$

por lo que hay un conjunto absorbente y compacto en V. Por consiguiente, el sistema dinámico en V tiene un atractor global.

Teorema 9. *Si $f \in H$, entonces el sistema dinámico en V generado por las ecuaciones de Navier-Stokes en 2D tiene un atractor global, $\mathcal{A}_V$.*

5.1.4. Comparaciones de los atractores en H y V.

En esta subsección, además de realizar la comparación indicada en el título de la misma, exploraremos algunos resultados adicionales de regularidad. Comencemos enunciando el siguiente lema:

Lema 12. *Si $f \in H$, entonces $\mathcal{A}_H = \mathcal{A}_V$.*

Demostración. La frontera asintótica en $|Au|$ muestra que $\mathcal{A}_V$ está acotado en $D(A)$ y que por tanto es compacto en V; por tanto, se trata de un conjunto invariante en V. Debido a que el atractor global es el conjunto maximal invariante compacto, deberemos tener $\mathcal{A}_H \subset \mathcal{A}_V$. Puesto que el conjunto absorbente compacto en H contiene al conjunto absorbente compacto en V y la norma en H es más débil que la norma en V, la relación $\omega(B) = \bigcap_{t\geq 0} S(t)B$ muestra que $\mathcal{A}_H \supset \mathcal{A}_V$. Por tanto, ambos atractores son iguales. ■

Cabe la pena destacar que en la primera parte de la prueba resulta fundamental el resultado de regularidad relacionado con que $\mathcal{A}_H$ se encuentra acotado en $D(A)$. Veamos algunas propiedades adicionales de regularidad: sabemos que el atractor consiste en funciones suaves en $Q = [0, L]^2$. A raíz de esto, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 10. *Si $f \in \dot{C}_p^\infty(Q)$, entonces el atractor global está acotado en $\dot{\mathbb{H}}_p^m(Q)$ para cada $m \geq 0$. Particularmente, si $u \in \mathcal{A}$, entonces $u \in \dot{C}_p^\infty(Q)$.*

El teorema anterior puede encontrarse profusamente demostrado en [13], y viene a decir que si la fuerza es tan regular como uno desee (incluyendo condiciones de compatibilidad, por ejemplo, en la frontera), los espacios de Sobolev donde se hospeda la solución serán también del orden deseado; un resultado de regularidad cuanto menos interesante.

5.1.5. Inyectividad en el atractor.

Comenzaremos introduciendo algunos resultados adicionales del atractor global:

Lema 13. *Sean H y V espacios de Hilbert, donde V' es el dual de V, con $V \subset\subset H \simeq H' \subset V'$. Supongamos que:*

$$\omega \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;D(A))$$

satisface

$$\frac{d\omega}{dt} + A\omega = h(t,\omega(t))$$

como una igualdad en $L^2(0,T;H)$, donde A es un operador lineal acotado desde V hasta V', y

$$|h(t,\omega(t))| \leq k(t) \left\|\omega(t)\right\|, \tag{5.10}$$

con $k(t) \in L^2(0,T)$. Si escribimos:

$$\Lambda(t) = \frac{\left\|\omega(t)\right\|^2}{|\omega(t)|^2},$$

entonces tendremos:

$$\Lambda(t) \leq \Lambda(0)\, exp\left(2\int_0^t k^2(s)ds\right).$$

Tomaremos ω como la diferencia entre dos soluciones cuando apliquemos este lema.

Demostración. Diferenciando $\Lambda(t)$, tendremos:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{((\omega', \omega))}{|\omega|^2} - \frac{\|\omega\|^2}{|\omega|^4}(\omega', \omega) = \frac{(\omega', A\omega)}{|\omega|^2} - \frac{\Lambda}{|\omega|^2}(\omega', \omega) = \frac{1}{|\omega|^2}(\omega', A\omega - \Lambda\omega) = \frac{1}{|\omega|^2}(h - A\omega, A\omega - \Lambda\omega).$$

Ahora, con $(A\omega, \omega) = \Lambda(\omega, \omega)$, tendremos:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Lambda}{dt} \leq -\frac{|A\omega - \Lambda\omega|^2}{|\omega|^2} + \frac{1}{|\omega|^2}(A\omega - \Lambda\omega, h).$$

Usando las desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Young en el último término, obtendremos:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Lambda}{dt} \leq -\frac{1}{2}\frac{|A\omega - \Lambda\omega|^2}{|\omega|^2} + \frac{1}{2}\frac{|h|^2}{|\omega|^2},$$

de modo que, usando (5.10), obtenemos:

$$\Lambda' + \frac{|A\omega - \Lambda\omega|^2}{|\omega|^2} \leq 2k^2\Lambda.$$

Despreciando el segundo término, obtenemos finalmente:

$$\frac{d\Lambda}{dt} \leq 2k^2\Lambda,$$

y finalmente llegamos al resultado deseado usando la desigualdad de Gronwall ([6]). ∎

Usaremos el lema anterior para probar el siguiente resultado de «unicidad hacia atrás»:

Teorema 11. *Supongamos que $\omega(t)$ satisface las hipótesis del lema anterior. Si $\omega(T) = 0$ para cierto $T > 0$, entonces $\omega(t) = 0$ para cualquier $0 \leq t \leq T$.*

Demostración. Supongamos que lo anterior no es cierto. Entonces, $\omega(t_0) \neq 0$, para cierto $t_0 \in [0, T)$. De las hipótesis tomadas para ω tendremos que $d\omega/dt \in L^2(0, T; L^2)$, y por lo tanto sabemos que $\omega \in C^0([0, T]; H^1)$. Por tanto, por continuidad, necesariamente deberemos tener $\omega(t) \neq 0$ para cierto intervalo $(t_0, t_0 + \epsilon)$. Denotemos mediante t_1 la tiempo más largo para el cual $|\omega(t)| \neq 0$ en $[t_0, t_1)$. Claramente, $\omega(t_1) = 0$.

En el intervalo $[t_0, t_1)$, podemos considerar la función $t \mapsto log|\omega(t)|$ y, diferenciando, tendremos:

$$\frac{d}{dt}log\frac{1}{|\omega|} = -\frac{1}{2}\frac{s}{dt}log|\omega|^2 = -\frac{(\omega', \omega)}{|\omega|^2} = -\frac{(h - A\omega, \omega)}{|\omega|^2} = \Lambda - \frac{(h, \omega)}{|\omega|^2} \leq \Lambda + k\Lambda^{1/2},$$

usando la cota en h —(5.10)—. Aplicar la desigualdad de Young nos llevará inmediatamente a:

$$\frac{d}{dt}log\frac{1}{|\omega|} \leq 2\Lambda + k^2.$$

Si integramos la expresión anterior entre t_0 y $t \in [t_0, t_1)$, tendremos:

$$log\frac{1}{|\omega(t)|} \leq log\frac{1}{|\omega(t_0)|} + \int_{t_0}^{t}(2\Lambda(s) + k(s)^2)ds \leq log\frac{1}{|\omega(t_0)|} + \int_{t_0}^{T}(2\Lambda(s) + k(s)^2)ds.$$

Puesto que $k \in L^2(0, T)$, y por lo tanto también lo está Λ (debido al lema anterior), obtendremos una frontera uniforme en $1/|\omega(t)|$ sobre $[t_0, t)$, lo cual supone una contradicción. ∎

Apliquemos ahora el **Teorema** 11 para probar la propiedad de inyectividad sobre el atractor.

Teorema 12. *Si $f \in H$, entonces las ecuaciones de Navier-Stokes en 2D poseen la propiedad de inyectividad sobre el atractor $\mathcal{A}_H$.*

Demostración. Comprobemos las suposiciones realizadas en el **Lema 11.9**. Si $\omega = u - v$, siendo u y v dos soluciones sobre $\mathcal{A}$, entonces necesitamos que $\omega \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; D(A))$, y si la ecuación para la variación temporal de ω es:

$$\frac{d\omega}{dt} + A\omega = h(t, \omega(t)),$$

necesitaremos:

$$|h(t, \omega(t))| \leq k(t) \left\|\omega(t)\right\|, \tag{5.11}$$

con $k(t) \in L^2(0, T)$. Si $f \in H$, entonces la **Proposición** 7 nos muestra que el atractor está acotado en V, y que las soluciones caen en $L^2(0, T; D(A))$. Si usamos las desigualdades ya conocidas para la forma trilineal $b(u, v, w)$, podemos ver que:

$$|h(t,\omega(t))| = |B(u,u) - B(v,v)| \leq |B(u,e)| + |B(w,v)| \leq k[\|u\|_\infty \|w\| + |\omega|^{1/2} \|w\|^{1/2} \|v\|^{1/2} |Av|^{1/2}].$$

Usando el resultado del **Anexo** (A.2), tendremos:

$$\|u\|_\infty \leq C|Au|^{1/2}|u|^{1/2} \qquad u \in D(A),$$

que se convertirá fácilmente en:

$$|h(t,\omega(t))| \leq C[|u|^{1/2}|Au|^{1/2} \|w\| + |w|^{1/2} \|w\|^{1/2} \|v\|^{1/2} |Av|^{1/2}] \leq C(|Au| + |Av|) \|w\| .$$

Puesto que $u, v \in L^2(0,T;D(A))$, $h(t,w(t))$ satisface (5.11), y por tanto el **Teorema** 11 implicará inyectividad. ■

Corolario 4. *Las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes en 2D generan un sistema dinámico:*

$$\left(\mathcal{A}, \{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}\right)$$

cuando están restringidas al atractor global.

Percatémonos de que $\mathcal{A}_H = \mathcal{A}_V$ y $S_V(t) = S_H(t)$ en el atractor, y por tanto no es necesario distinguir entre ambos casos en el contexto del corolario anterior.

5.2. Carácter finito-dimensional del atractor.

Llegados a este punto, hemos probado la existencia de atractores globales para las ecuaciones de Navier-Stokes. Puesto que se trata de atractores compactos, esto garantiza que son —en cierto sentido— subconjuntos «pequeños» del espacio de fases original. De hecho, la no-compacidad de la esfera unitaria en un espacio infinito-dimensional implica que estos atractores no tengan interior. Se puede demostrar que la dimensión de estos atractores globales es finita, incluso cuando se trate de subconjuntos de espacios de fases infinito-dimensionales [14].

Definición 10: Decimos que $S(t)$ es uniformemente diferenciable en $\mathcal{A}$ si para cada $u \in \mathcal{A}$ existe un operador lineal $\Lambda(t,u)$ tal que, para todo $t \geq 0$:

$$\begin{cases} \sup\limits_{u,v\in\mathcal{A};0<|u-v|\leq\epsilon} \frac{|S(t)v-S(t)u-\Lambda(t,u)(v-u)|}{|v-u|} \to 0 \qquad \text{conforme } \epsilon \to 0 \\ \\ \sup\limits_{u\in\mathcal{A}} \|\Lambda(t,u)\|_{op} < \infty \qquad \forall\, t \geq 0. \end{cases} \tag{5.12}$$

Teorema 13. *Las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes en 2D satisfacen (5.12), siendo* $\Lambda(t; u_0)\xi$ *la solución de la ecuación:*

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + \nu AU + B(u, U) + B(U, u) = 0, \\ U(0) = \xi. \end{cases} \tag{5.13}$$

Además, $\Lambda(t; u_0)$ *es compacta para* $t > 0$.

Demostración. Tomaremos $u(t)$ y $v(t)$ como soluciones de:

$$\frac{du}{dt} + \nu Av + B(u, u) = 0,$$

con condiciones iniciales u_0 y v_0, respectivamente $(u_0, v_0 \in \mathcal{A})$, y consideraremos $U(t)$ como la solución de (5.13), con $U(0) = v_0 - u_0$. Haciendo el cambio de variable $\theta = v - u - U$, y tras algunos cálculos, tendremos la ecuación:

$$\frac{d\theta}{dt} + \nu A\theta + B(u, \theta) + B(\theta, u) + B(u - v, u - v) = 0.$$

Si ahora escribimos $w = u - v$ y tomamos el producto interno con θ, tendremos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta|^2 + \nu \|\theta\|^2 = -b(\theta, u, \theta) - b(w, w, \theta),$$

y por tanto, usando (2.57), tenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta|^2 + \nu \|\theta\|^2 \leq k|\theta| \|\theta\| \|u\| + k|w| \|w\| \|\theta\|.$$

Ahora, el atractor se encuentra acotado en V, por lo que $\|u\| \leq \rho_V$, y por tanto podemos usar la desigualdad de Young en los dos términos, de modo que podemos formular:

$$\frac{d}{dt}|\theta|^2 + \nu \|\theta\|^2 \leq c|\theta|^2 + c|w|^2 \|w\|^2.$$

Eliminando ahora el término $\|\theta\|$ y usando la desigualdad de Gronwall con $\theta(0) = 0$ obtendremos:

$$|\theta(t)|^2 \leq k \int_0^t |w(s)|^2 \|w(s)\|^2 \, ds. \tag{5.14}$$

Conviene ahora recordar que, cuando probamos la unicidad del **Teorema** 4, obtuvimos la desigualdad:

$$\frac{d}{dt}|w|^2 + \nu \|w\|^2 \leq \frac{k^2}{\nu} \|u\|^2 |w|^2, \tag{5.15}$$

relación a partir de la cual obtuvimos la cota (3.33):

$$|w(t)|^2 \leq exp\left(\int_0^t \frac{k^2}{\nu} \|u(s)\|^2 \, ds\right) |w(0)|^2.$$

Debido al hecho de que $\|u\| \leq \rho_V$, esta relación se convierte en una estimación exponencial simple:

$$|w(t)|^2 \leq e^{Kt}|w_0|^2,$$

para cierto valor de K, y por tanto podemos multiplicar (5.15) por $|w(t)|^2$ e integrar entre 0 y t, obteniendo:

$$\nu \int_0^t |w(s)|^2 \|w(s)\|^2 \, ds \leq \frac{k^2}{\nu}\rho_V^2 \int_0^t |w(s)|^4 ds + \frac{1}{2}|w_0|^4,$$

lo cual implica:

$$\int_0^t |w(s)|^2 \|w(s)\|^2 \, ds \leq Ce^{Kt}|w_0|^4.$$

Insertando este resultado en (5.14), podemos ver que $|\theta(t)| \leq C(t)|u_0 - v_0|^2$, y por tanto:

$$\frac{|v(t) - u(t) - U(t)|}{|v_0 - u_0|} \leq C|v_0 - u_0| \to 0 \quad \text{cuando} \quad v_0 \to u_0,$$

probando así la diferenciabilidad. ■

En el **Anexo** A.4 podemos hallar la demostración de que $\Lambda(t; u_0)$ es compacto para cualquier $t > 0$.

5.2.1. Una cota sobre la dimensión del atractor.

Una vez asegurada la diferenciabilidad, podemos encontrar una cota sobre la dimensión.

Teorema 14. *El atractor para las ecuaciones periódicas de Navier-Stokes en 2D es finito-dimensional, con:*

$$d_f(\mathcal{A}) \leq \alpha(\frac{\rho_V}{\nu})^2.$$

Demostración. La forma correcta de la ecuación linealizada es la proporcionada por (5.13), y por tanto:

$$L(u)w = \nu Aw - B(w,u) - B(u,w).$$

Por tanto, la traza promediada en el tiempo, $\langle P_n L(u(t))\rangle$, está acotada por:

$$\langle P_n L(u)\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} (L(u)\phi_j, \phi_j) \right\rangle = -\left\langle \sum_{j=1}^{n} (-\nu\Delta\phi_j, \phi_j) \right\rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{n} b(\phi_j, u, \phi_j) \right\rangle.$$

Si, una vez más, usamos la cota (2.57) de la forma trilineal $b(u,v,w)$, podemos obtener:

$$\langle P_n L(u)\rangle \leq -\nu \sum_{j=1}^{n} \left\langle \|\phi_j\|^2 \right\rangle + k \left\langle \sum_{j=1}^{n} \|u\| \, \|\phi_j\| \, \|\phi_j\| \right\rangle =$$

$$= -\nu \sum_{j=1}^{n} \left\langle \|\phi_j\|^2 \right\rangle + k \left\langle \sum_{j=1}^{n} \|u\| \, \|\phi_j\| \right\rangle \leq -\nu \sum_{j=1}^{n} \left\langle \|\phi_j\|^2 \right\rangle + k \sum_{j=1}^{n} \langle \|u\| \, \|\phi_j\| \rangle,$$

donde se ha usado que $|\phi_j = 1|$. Si ahora usamos la desigualdad de Young en el último término:

$$\langle P_n L(u)\rangle \leq -\nu \sum_{j=1}^{n} \left\langle \|\phi_j\|^2 \right\rangle + \sum_{1}^{n} \left\langle \frac{\nu}{2} \|\phi_j\|^2 + \frac{k^2}{2\nu} \|u\|^2 \right\rangle =$$

$$= -\frac{\nu}{2} \sum_{j=1}^{n} \left\langle \|\phi_j\|^2 \right\rangle + \frac{k^2}{2\nu} \sum_{j=1}^{n} \left\langle \|u\|^2 \right\rangle = -\frac{\nu}{2} \langle Tr(-\Delta P_n)\rangle + \frac{k^2 n}{2\nu} \left\langle \|u\|^2 \right\rangle.$$

Si ahora hacemos uso del **Lema** 6, considerando $m = 2$, tenemos:

$$\langle P_n L(u)\rangle \leq -\frac{c\nu}{2} n^2 + \frac{k^2 n}{2\nu} \left\langle \|u\|^2 \right\rangle,$$

de modo que la traza será negativa siempre que:

$$\alpha \left(\frac{\left\langle \|u\|^2 \right\rangle}{\nu^2} \right) < n.$$

Resulta sensato percatarse de que $\left\langle \|u\|^2 \right\rangle \leq \rho_V^2$ es finito, ya que gracias a la **Proposición** 7 sabemos que $\|u\| \leq \rho_V$ sobre $\mathcal{A}$. ■

6. Posibles horizontes del caso de estudio.

En los capítulos anteriores hemos estudiado las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso 2D, incompresible, en un dominio acotado, sin términos estocásticos, desde una perspectiva que se aleja cualitativamente muy poco de la concepción original del problema y los estudios relacionados en las primeras décadas posteriores. En este sentido, dedicaremos las secciones siguientes a introducir algunas nociones básicas sobre tres variantes o formas de abordar el problema: primeramente, estudiaremos brevemente los métodos de energía mediante un ejemplo. Estos métodos buscan relajar las hipótesis $f \in L^2(\Omega)$ usadas en la existencia del componente compacto absorbente; en segundo lugar, tomando como contexto lo anterior, introduciremos el concepto de atractor pullback. Por último, saldremos del terreno determinista y abordaremos para un caso sencillo las ecuaciones de Navier-Stokes en 2D cuando añadimos un término de ruido.

Para estos apartados, obra decir que daremos un salto cualitativo, en el sentido de que pasaremos a estudiar **casos no-autónomos**. Por supuesto, todo lo que se expondrá es extrapolable al caso autónomo; no obstante, la elección de considerar sistemas no-autónomos para este último capítulo viene motivada por que la mayoría de estudios recientes sobre la materia operan bajo este marco, además de las limitaciones temporales en lo que respecta a la redacción de este texto.

6.1. Relajación de hipótesis a un método de energía.

Los métodos de energía buscan relajar las hipótesis $f \in L^2(\Omega)$ que se usan en la existencia de compactos absorbentes. Si únicamente se tiene $f \in V'$, el problema tendrá acotaciones uniformes con las que se pueden extraer subsucesiones que convergen débilmente en espacios adecuados. A modo ilustrativo, supongamos que nuestro sistema tiene una cierta energía (por ejemplo, con $u \in L^2(0, T; V)$, $u' \in L^2(0, T; V')$ e identificando H con H'; y usando la terna $V \subset H \subset V'$). Entonces, (concierta astucia) es posible concluir también la convergencia de las normas de soluciones. De ambos, convergencia débil y convergencia de las normas, en un espacio de Hilbert obtendríamos convergencia fuerte. Un excelente ejemplo donde se usa una consideración de este tipo (en dominios no acotados) es la referencia [15].

No obstante, este método se puede desarrollar de manera algo más simple y elegante haciendo uso de funciones J_n y J, como veremos a continuación con un ejemplo práctico.

Situándonos en el marco de los atractores pullbak (que definiremos en la sección siguiente), partamos de las ecuaciones ya conocidas de Navier-Stokes en 2D:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \nabla^2 u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f(t) \quad \text{en } (\tau, +\infty) \times \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 \quad \text{en } (\tau, +\infty) \times \Omega \\ u = 0 \quad \text{en } (\tau, +\infty) \times \partial\Omega \\ u(\tau, x) = u_\tau(x) \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{6.1}$$

donde $\tau \in \mathbb{R}$ es un valor arbitrario, el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un cerrado y acotado con una frontera lo suficientemente suave, $\nu > 0$ es el coeficiente de viscosidad cinemática, u es el campo de velocidades del fluido, p es la presión, u_τ es el campo de velocidades iniciales y f es un término de forzamiento externo que depende del tiempo.

En capítulos anteriores estudiamos las soluciones débiles de este problema. No obstante, conviene recordar algunos aspectos clave:

- (i) Una solución débil de (6.1) es una función u perteneciente a $L^2(\tau, T; V) \cap L^\infty(\tau, T; H)$ para todo $T > \tau$, con $u(\tau) = u_\tau$, de modo que para cualquier $v \in V$:

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + \nu \langle Au(t), v \rangle + b(u(t), u(t), v) = \langle f(t), v \rangle ,$$

  entendiendo esta ecuación en el sentido de $\mathcal{D}'(\tau, +\infty)$.

- (ii) Si u es una solución débil de (6.1), de lo anterior se deduce que para cualquier $T > \tau$, se tendrá $u' \in L^2(\tau, T; V')$, y por tanto $u \in C([\tau, +\infty); H)$, por lo cual lo datos iniciales tienen un sentido completo. En este caso, podemos formular la siguiente igualdad de energía:

$$|u(t)|^2 + 2\nu \int_s^t \langle Au(r), u(r) \rangle \, dr = |u(s)|^2 + 2 \int_s^t \langle f(r), u(r) \rangle \, dr, \qquad \forall\, \tau \leq s \leq t.$$

- (iii) Una solución fuerte de (6.1) es una solución débil u de (6.1) para la cual $u \in L^2(\tau, T; D(A)) \cap L^\infty(\tau, T; V)$, para todo $T > \tau$.

- (iv) Si $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; H)$ y u es una solución fuerte de (6.1), entonces $u' \in L^2(\tau, T; H)$ para todo $T > \tau$, y por tanto $u \in C([\tau, +\infty); V)$. En este caso, es posible formular la siguiente igualdad para la energía:

$$\|u(t)\|^2 + 2\nu \int_s^t |Au(r)|^2 dr + 2 \int_s^t b(u(r), u(r), Au(r)) dr =$$

$$= \|u(t)\|^2 + 2\int_s^t (f(r), Au(r))dr, \qquad \forall\, \tau \le s \le t.$$

Sin entrar en detalle en lo que respecta a los atractores pullback, seguiremos los pasos de [16], que a su vez vienen motivados por [17] y [18], siendo los autores de estas últimas referencias algunos de los primeros en aplicar métodos de energía. Denotaremos mediante $\mathcal{D}_\mu^H$ a la clase de todas las familias de subconjuntos no-vacíos $\{D(t) : t \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{P}(H)$, tales que:

$$\lim_{\tau \to -\infty} (e^{\mu\tau} \sup_{v \in D(\tau)} |v|^2) = 0,$$

donde $\mu \in (0, 2\nu\lambda_1)$, y por supuesto el «universo» es ampliable. Los autores ([16]) aplican el método que veremos a continuación con el propósito de obtener la compacidad asintótica del atractor pullback en V para $\mathcal{D}_\mu^{H,V}$, enunciando el siguiente lema:

Lema 14. *Supongamos que $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; H)$ cumple la siguiente condición:*

$$\int_{-\infty}^0 e^{\mu s}|f(s)|^2 ds < +\infty, \qquad \textit{para cierto}\, \mu \in (0, 2\nu\lambda_1).$$

Entonces, el proceso $U : \mathbb{R}^2_d \times V \to V$ es pullback $\mathcal{D}_\mu^{H,V}$-asintóticamente compacto.

Demostración. Fijemos $t \in \mathbb{R}$, una familia $\hat{D} \in \mathcal{D}_\mu^{H,V}$, una sucesión $\{\tau_n\} \subset (-\infty, t]$ con $\tau_n \to -\infty$, y una sucesión $\{u_{\tau_n}\} \subset V$, con $u_{\{\tau_n\}} \in D_V(\tau_n)$, para todo valor de n. El objetivo es probar que la sucesión $\{u(t; \tau_n, u_{\tau_n})\}$ es relativamente compacta en V. Por simplicidad, denotemos $u^n(s) = u(s; \tau_n, u_{\tau_n})$.

Se puede demostrar que existe un $\tau_1(\hat{D}_V, t) < t - 3$, tal que la subsucesión $\{u^n : \tau_n \le \tau_1(\hat{D}_V, t)\} \subset \{u^n\}$ está acotado uniformemente en $L^\infty(t-2, t; V) \cap L^2(t-2, t; D(A))$, con $\{(u^n)'\}$ estando también uniformemente acotado en $L^2(t-2, t; H)$. Entonces, usando el lema de compacidad de Aubin-Lions ([19]), podremos ver que existe un elemento $L^\infty(t-2, t; V) \cap L^2(t-2, t; D(A))$ con $u' \in L^2(t-2, t; H)$, tal que para una subsucesión, se cumplen las siguientes convergencias:

$$\begin{cases} u^n \overset{*}{\rightharpoonup} u & \text{débil-* en } L^\infty(t-s, t; V) \\ u^n \rightharpoonup u & \text{débilmente en } L^\infty(t-s, t; D(A)) \\ (u^n)' \rightharpoonup u' & \text{débilmente en } L^\infty(t-s, t; H) \\ u^n \to u & \text{fuertemente en } L^\infty(t-s, t; V) \\ u^n(s) \to u(s) & \text{fuertemente en } V,\ a.e.\ s \in (t-s, t). \end{cases} \tag{6.2}$$

Percatémonos de que $u \in C([t-2,t];V)$, y de que debido a (6.2), u satisface la ecuación que hemos mostrado en (i) en el intervalo $(t-2,t)$. A raíz de (6.2) podemos deducir también que $\{u^n\}$ es equi-continua en H, sobre $[t-2,t]$. Por tanto, teniendo en cuenta que la sucesión $\{u^n\}$ está uniformemente acotada en $C([t-2,t;V)$, por la compacidad de la inyección de V en H, y el teorema de Ascoli-Arzelá, obtenemos que:

$$u^n \to u \quad \text{fuertemente en } C([t-2,t];H). \tag{6.3}$$

Nuevamente, debido a la uniformidad del acotamiento de $\{u^n\}$ en $C([t-2,t];V)$, tenemos que para toda sucesión $\{s_n\} \subset [t-2,t]$ con $s_n \to s_*$, se cumple que:

$$u^n(s_n) \to u(s_*) \quad \text{débilmente en } V. \tag{6.4}$$

donde hemos usado (6.3) para identificar el límite débil. En realidad, lo que estamos afirmando es que:

$$u^n \to u \quad \text{fuertemente en } C([t-1,t];V), \tag{6.5}$$

lo cual implicará la compacidad relativa. De hecho, si (6.5) no se cumple, existen un $\varepsilon > 0$ y una sucesión $\{t_n\} \subset [t-1,t]$, convergiendo —sin pérdida de generalidad— hacia algún t_*, y que además:

$$\|u^n(t_n) - u(t_*)\| \geq \varepsilon, \qquad \forall\, n \geq 1. \tag{6.6}$$

A partir de (6.4) tenemos que:

$$\|u(t_*)\| \leq \mathop{lim\,inf}_{n\to\infty} \|u^n(t_n)\|\,. \tag{6.7}$$

Por otro lado, usando la igualdad de energía presentada en (iv) para u y todos los u^n, tenemos que para todo $t-2 \geq s_1 \geq s_2 \geq t$,

$$\|u^n(s_2)\|^n + \nu \int_{s_1}^{s_2} |Au^n(r)|^2 dr \leq \|u^n(s_1)\|^2 + 2C^{(\nu)} \int_{s_1}^{s_2} |u^n(r)|^2 \|u^n(r)\|^4\, dr + \frac{2}{\nu} \int_{s_1}^{s_2} |f(r)|^2 dr, \tag{6.8}$$

y

$$\|u(s_2)\|^n + \nu\int_{s_1}^{s_2} |Au(r)|^2 dr \leq \|u(s_1)\|^2 + 2C^{(\nu)}\int_{s_1}^{s_2} |u(r)|^2 \|u(r)\|^4 dr + \frac{2}{\nu}\int_{s_1}^{s_2} |f(r)|^2 dr. \tag{6.9}$$

Así pues, podemos definir las siguientes funciones:

$$\begin{cases} J_n(s) = \|u^n(s)\|^2 - 2C^{(\nu)} \int_{t-2}^{s} |u^n(r)|^2 \|u^n(r)\|^4 dr - \frac{2}{\nu}\int_{t-2}^{s} |f(r)|^2 dr, \\ J(s) = \|u(s)\|^2 - 2C^{(\nu)} \int_{t-2}^{s} |u(r)|^2 \|u(r)\|^4 dr - \frac{2}{\nu}\int_{t-2}^{s} |f(r)|^2 dr. \end{cases}$$

Claramente, a raíz de la regularidad de u y todos los u^n, estas funciones son continuas en $[t-2,t]$. Es más, a partir de las J_n definidas y de (6.8), tenemos:

$$\begin{aligned} J_n(s_2) - J_n(s_1) = \|u^n(s_2)\|^2 - 2C^{(\nu)}\int_{t-2}^{s_2} |u^n(r)|^2 \|u^n(r)\|^4 dr - \frac{2}{\nu}\int_{t-2}^{s_2} |f(r)|^2 dr - \\ - \|u^n(s_1)\|^2 + 2C^{(\nu)}\int_{t-2}^{s_1} |u^n(r)|^2 \|u^n(r)\|^4 dr + \frac{2}{\nu}\int_{t-2}^{s_1} |f(r)|^2 dr = \\ = \|u^n(s_2)\|^2 - \|u^n(s_1)\|^2 - 2C^{(\nu)}\int_{s_1}^{s_2} |u^n(r)|^2 \|u^n(r)\|^4 dr - \frac{2}{\nu}\int_{s_1}^{s_2} |f(r)|^2 dr \leq \\ \leq -\nu\int_{s_1}^{s_2} |Au^n(r)|^2 dr \leq 0, \qquad \forall\, t-2 \leq s_1 \leq s_2 \leq t, \end{aligned}$$

y por tanto todas las J_n son funciones no-crecientes en $[t-2,t]$. Análogamente, usando (6.9) y la definición de J, se puede deducir que J es también una función no-creciente en $[t-2,t]$.

Podemos percatarnos ahora de que debido a la última convergencia en (6.2) y (6.3), $\|u^n(s)\| \to \|u(s)\|$ y $|u^n(s)|^2 \|u^n(s)\|^4 \to |u(s)|^2 \|u(s)\|^4$, a.e. $\in (t-2,t)$. Es más, conforme la sucesión $\{u^n\}$ es acotada en $L^\infty(t-2,t;V) \subset L^\infty(t-2,t;H)$, tenemos que la sucesión $\{|u^n(s)|^2 \|u^n(s)\|^4\}$ está acotada en $L^\infty(t-2,t)$. Por tanto, a raíz del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, podemos deducir que:

$$\int_{t-2}^{s} |u^n(r)|^2 \|u^n(r)\|^4 dr \to \int_{t_2}^{s} |u(r)|^2 \|u(r)\|^4 , dr \qquad \forall\, s \in [t-2,t].$$

Entonces,

$$J_n(s) \to J(s) \quad a.e.\ s \in (t-2,t).$$

Por tanto, existe una sucesión $\{\tilde{t}_k\} \subset (t-2, t_*)$ tal que $\tilde{t}_k \to t_*$, cuando $k \to +\infty$, y:

$$\lim_{n\to+\infty} J_n(\tilde{t}_k) = J(\tilde{t}_k), \qquad \forall\, k.$$

Fijemos ahora un valor arbitrario $\delta > 0$. Por la continuidad de J, existe un k_δ tal que: $|J(\tilde{t}_k) - J(t_*)| < \delta/2, \quad \forall\, k \geq k_\delta$. Si ahora consideramos un $n(k_\delta)$ tal que $n \geq n(k_\delta)$, se verificará que: $t_n \geq \tilde{t}_{k_\delta}$ y $|J_n(\tilde{t}_{k_\delta}) - J(\tilde{t}_{k_\delta})| < \delta/2$. Por tanto, dado que las J_n son no-crecientes, podemos deducir que para todo $n \geq n(k_\delta)$:

$$J_n(t_n) - J(t_*) \leq J_n(\tilde{t}_{k_\delta}) - J(t_*) \leq |J_n(\tilde{t}_{k_\delta}) - J(t_*)| \leq |J_n(\tilde{t}_{k_\delta}) - J(\tilde{t}_{k_\delta})| + |J(\tilde{t}_{k_\delta}) - J(t_*)| < \delta.$$

Lo anterior nos lleva a:

$$\limsup_{n\to\infty} J_n(t_n) \leq J(t_*),$$

y por tanto, por (6.2):

$$\limsup_{n\to\infty} \|u^n(t_n)\| \leq \|u(t_*)\|,$$

lo cual junto con (6.7) y (6.4) implica que $u^n(t_n) \to u(t_*)$ fuertemente en V, lo que supone una contradicción con (6.6). Por tanto, (6.5) se cumple y la compacidad relativa de $\{u(t; \tau_n, u_{\tau_n})\}$ en V queda probada. ∎

Vemos, pues, que el uso de los operadores J supone una forma elegante de proceder. En líneas generales, este artificio permite obtener —en la métrica que interese— la convergencia fuerte como suma de dos resultados: convergencia débil y convergencia de las normas, donde la convergencia débil se saca de las cotas para u y la convergencia de las normas se saca a partir de las igualdades de energía. Además de en los espacios de Hilbert, este método puede aplicarse en otros espacios, como pueden ser los espacios de Banach uniformemente convexos.Esto sirve en espacios de Hilbert (y también en otros, como por ejemplo espacios de Banach uniformemente convexos.

6.2. Atractores pullback.

Con el fin de contextualizar las referencias mencionadas en la sección anterior, así como de ilustrar un interesante horizonte de estudio, introduciremos brevemente en esta sección el concepto de atractor pullback. Nuevamente, nos situamos en el marco no-autónomo, para un sistema dinámico asintóticamente compacto.

Sean Ω un conjunto no-vacío y $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ una familia de aplicaciones $\theta_t : \Omega \to \Omega$ que satisfacen:

1. $\theta_0\omega = \omega, \quad \forall\, \omega \in \Omega.$
2. $\theta_t(\theta_\tau\omega) = \theta_{t+\tau}\omega, \quad \forall\, \omega \in \Omega$ y $t, \tau \in \mathbb{R}$.

Las aplicaciones θ_t a veces se denominan «operadores de traslación» (*shift operators*). Denominemos a su vez como X al espacio métrico con distancia $d(\cdot,\cdot)$, y sea ϕ un θ-cociclo sobre X, es decir, una aplicación $\phi : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times X \to X$, que satisface:

- (a) $\phi(0, \omega, x) = x$, para todo $(\omega, x) \in Omega \times X$.
- (b) $\phi(t+\tau, \omega, x) = \phi(t, \theta_\tau\omega, \phi(\tau, \omega, x))$, para todos los $t, \tau \in \mathbb{R}_+$ y $(\omega, x) \in \Omega \times X$.

El θ-cociclo ϕ se dice que es continuo si para todos los $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, la aplicación $\phi(t, \omega, \cdot) : X \to X$ es continua.

Los conjuntos parametrizados por el índice $\omega \in \Omega$ reciben el nombre de *conjuntos parametrizados* y se denotan como $\hat{D} = \{D(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$; a su vez, los conjuntos parametrizados por el tiempo $t \in \mathbb{R}$ reciben el nombre de *conjuntos no-autónomos* y se denotan como $\mathbb{D}\{D(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Esta diferencia de notación enfatiza el caso especial $\Omega = \mathbb{R}$ y $\theta_t s = s + t$. Denotemos ahora mediante $\mathscr{P}(X)$ a la familia de todos los subconjuntos no-vacíos de X, y mediante $\mathscr{S}$ a la clase de todos los conjuntos parametrizados $\hat{D} = \{D(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ tales que $D(\omega) \in \mathscr{P}(X)$ para todos los $\omega \in \Omega$.

Consideremos una subclase dada no-vacía $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$. Esta clase clase recibe el nombre de *universo de atracción* (recordemos los $\mathcal{D}_\mu^H$ usados en la sección anterior). Introduzcamos las siguientes definiciones:

- El θ-cociclo ϕ se dice que es pullback $\mathscr{D}$-asintóticamente compacto ($\mathscr{D} - a.c.$) si para cualquier $\omega \in \Omega$, cualquier $\hat{D} \in \mathscr{D}$ y cualquier sucesión $t_n \to +\infty$, $x_n \in D(\theta_{-t_n}\omega)$, la sucesión $\phi(t_n, \theta_{-t_n}\omega, x_n$ posee una subsucesión convergente.
- Un conjunto parametrizado $\hat{B} = \{B(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\} \in \mathscr{S}$ se dice que es pullback $\mathscr{D}$-absorbente si para cada $\omega \in \Omega$ y para cada $\hat{D} \in \mathscr{D}$, existe un $t_0(\omega, \hat{D}) \geq 0$ tal que:

$$\phi(t, \theta_{-t}\omega, D(\theta_{-t}\omega)) \subset B(\omega), \quad \forall\, t \geq t_0(\omega, \hat{D}).$$

Conviene denotar mediante $dist_X(C_1, C_2)$ a la semi-distancia de Hausdorff entre C_1 y C_2, definida como:

$$dist_X(C_1, C_2) = \underset{x\in C_1}{sup}\ \underset{y\in C_2}{inf}\ d(x, y), \quad C_1, C_2 \subset X.$$

6. ***Posibles horizontes del caso de estudio.***

- Un conjunto parametrizado $\hat{C} = \{C(\omega)\}_{\omega\in\Omega} \in \mathscr{S}$ se dice que es pullback $\mathscr{D}$-atractivo si:

$$\lim_{t\to+\infty} dist_X(\phi(t, \theta_{-t}\omega), D(\theta_{-t}\omega)), C(\omega)) = 0 \quad \forall\, \hat{D} \in \mathscr{D}, \omega \in \Omega.$$

- Un conjunto parametrizado $\hat{A} = \{A(\omega)\}_{\omega\in\Omega} \in \mathscr{S}$ se dice que es un $\mathscr{D}$-atractor pullback global si satisface:

  - (i) $A(\omega)$ es compacto para cualquier $\omega \in \Omega$.
  - (ii) $\hat{A}$ es pullback $\mathscr{D}$-atractivo.
  - (iii) $\hat{A}$ es invariante, es decir:

$$\phi(t, \omega, A(\omega)) = A(\theta_t\omega), \qquad \text{para cualesquiera } (t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega.$$

  Cabe destacar que esta última definición no garantiza la unicidad del $\mathscr{D}$-atractor pullback. Para asegurar la unicidad, es preciso imponer condiciones adicional, como por ejemplo la condición de que el atractor pertenezca al mismo universo de atracción, $\mathscr{D}$. Sin embargo, hemos visto que amparándonos en algunas hipótesis muy generales, es posible asegurar la existencia del $\mathscr{D}$-atractor pullback global.

- Para cada $\hat{D} \in \mathscr{S}$ y cada $\omega \in \Omega$, definimos el conjunto ω-límite de $\hat{D}$ en ω como:

$$\Lambda(\hat{D}\omega) = \bigcap_{s\geq 0} \left(\overline{\bigcup_{t\geq s}} |phi(t, \theta_{-t}\omega, D(\theta_{-t}\omega)) \right).$$

  $\Lambda(\hat{D}\omega)$ es un subconjunto cerrado de X que puede estar vacío. Resulta sencillo observar que, para cada $y \in X$, se tiene que $y \in \Lambda(\hat{D}\omega)$ si y sólo si existen una sucesión $t_n \to +\infty$ y una sucesión $x_n \in D(\theta_{-t_n}\omega)$ tales que:

$$\lim_{t_n\to+\infty} d(\phi(t_n, \theta_{-t_n}\omega, x_n)y) = 0.$$

Ahora estamos en disposición de enunciar el siguiente resultado para el $\mathscr{D}$-atractor global pullback:

Teorema 15. *Supongamos que el θ-cociclo ϕ es continuo y pullback $\mathscr{D}$-asintóticamente compacto, y que existe un $\hat{B} \in \mathscr{D}$ que es pullback $\mathscr{D}$-absorbente. Entonces, el conjunto parametrizado $\hat{A}$, definido mediante:*

$$A(\omega) = \Lambda(\hat{B}, \omega), \qquad \omega \in \Omega,$$

es un $\mathscr{D}$*-atractor global pullback que es minimal, en el sentido de que si* $\hat{C} \in \mathscr{S}$ *es un conjunto parametrizado tal que* $C(\omega)$ *es cerrado y:*

$$\lim_{t_n \to +\infty} dist_X(\phi(t_n, \theta_{-t_n}\omega, B(\theta_{-t_n}\omega)), C(\omega)) = 0,$$

entonces $A(\omega) \subset C(\omega)$*.*

Una prueba del **Teorema** 15 podemos hallarla en [20]. Esta prueba se complementa con la siguiente proposición:

Proposición 9. *Si* $\hat{B} \in \mathscr{S}$ *es un conjunto parametrizado* $\mathscr{D}$*-absorbente pullback, entonces:*

$$\Lambda(\hat{D}, \omega) \subset \Lambda(\hat{B}, \omega) \qquad \forall\, \hat{D} \in \mathscr{D} \; y \, \omega \in \Omega.$$

Si además $\hat{B} \in \mathscr{D}$*, entonces:*

$$\Lambda(\hat{D}, \omega) \subset \Lambda(\hat{B}, \omega) \subset \overline{B(\omega)} \qquad \forall\, \hat{D} \in \mathscr{D} \; y \, \omega \in \Omega.$$

Complementando lo anterior:

Proposición 10. *Si* ϕ *es* $\mathscr{D}$*-asintótico pullback compacto, entonces para* $\hat{D} \in \mathscr{D}$ *y* $\omega \in \Omega$*, el conjunto* $\Lambda(\hat{D}, \omega)$ *es no-vacío, compacto y:*

$$\lim_{t \to +\infty} dist_X(\phi(t, \theta_{-t}\omega, D(\theta_{-t}\omega)), \Lambda(\hat{D}, \omega)) = 0$$

Proposición 11. *Si el* θ*-cociclo* ϕ *es continuo y* $\mathscr{D}$*-asintóticamente pullback compacto, entonces para cualesquiera* $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ *y cualquier* $\hat{D} \in \mathscr{D}$*, se tiene:*

$$\phi(t, \omega, \Lambda(\hat{D}, \omega)) = \Lambda(\hat{D}, \theta_t\omega).$$

Lo anterior nos permite definir lo siguiente: diremos que un proceso U es $\mathscr{D}$-asintóticamente pullback compacto si para cualquier $t \in \mathbb{R}$, cualquier $\mathbb{D} \in \mathscr{D}$, cualquier sucesión $\tau_n \to -\infty$ y cualquier sucesión $x_n \in D(\tau_n)$, la sucesión $\{U(t, \tau_n)x_n\}$ es relativamente compacta en X.

6. ***Posibles horizontes del caso de estudio.***

En línea con lo anterior, diremos que $\mathbb{B} = \{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \in \mathscr{D}$ es $\mathscr{D}$-absorbente pullback para el proceso U si para cualquier $t \in \mathbb{R}$ y cualquier $\mathbb{D} \in \mathscr{D}$, existe un $\tau_0(t, \mathbb{D}) \leq t$ tal que:

$$U(t, \tau)D(\tau) \subset B(t) \qquad \tau \leq \tau_0(t, \mathbb{D}).$$

Finalmente, enunciamos el siguiente teorema:

Teorema 16. *Supongamos que el proceso U es $\mathscr{D}$-asintóticamente compacto pullback y que $\mathbb{B} \in \mathscr{D}$ es un conjunto $\mathscr{D}$-absorbente no-autónomo para U. Entonces, el conjunto no-autónomo $\mathbb{A} = \{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ con «fibras» no-vacías $A(t) \in \mathscr{P}(X)$ para $t \in \mathbb{R}$ definido por:*

$$A(t) = \Lambda(\mathbb{B}, t) \qquad parat \in \mathbb{R},$$

donde para cada $\mathbb{D} = \{D(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \in \mathscr{D}$:

$$\Lambda(\mathbb{D}, t) = \bigcap_{s\leq t} \left(\overline{\bigcup_{\tau\leq s} U(t, \tau)D(\tau)} \right),$$

tiene las siguientes propiedades:

- *(i) Los conjuntos $A(t)$ son compactos para $t \in \mathbb{R}$.*
- *El conjunto no-autónomo $\mathbb{A}$ es $\mathscr{D}$-atractivo pullback, es decir:*

$$\lim_{\tau\to-\infty} dist_X(U(t, \tau)D(\tau), A(t)) = 0 \qquad \forall\, \mathbb{D} \in \mathscr{D}$$

- *El conjunto no-autónomo $\mathbb{A}$ es invariante, es decir: $U(t, \tau)A(\tau) = A(t)$, para $-\infty < \tau \leq t < +\infty$.*
- *Los conjuntos $A(t)$ vienen dados por:*

$$A(t) = \overline{\bigcup_{\mathbb{D}\in\mathscr{D}} \Lambda(\mathbb{D}, t)} \qquad para\, t \in \mathbb{R}.$$

El conjunto no-autónomo $\mathbb{A}$, denominado $\mathscr{D}$-atractor global pullback para el proceso U, es minimal en el sentido de que si $\mathbb{C} = \{C(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, con $C(t) \in \mathscr{P}(X)$ siendo un conjunto no-autónomo de modo que $C(t)$ es cerrado y:

$$\lim_{t\to-\infty} dist_X(U(t,\tau)B(\tau), C(t)) = 0,$$

entonces $A(t) \subset C(t)$.

Los atractores pullback constituyen un campo de estudio por derecho propio. A raíz de que algunos autores consiguiesen derivar la existencia del atractor global para la ecuación de Navier-Stokes incompresible autónoma 2D con términos de forzamiento ([21][22][23]), la extensión al caso no-autónomo ha llevado a la consideración de este tipo de atractores en el contexto de Navier-Stokes en dos y en tres dimensiones y bajo todo tipo de paradigmas [24]. Aún así, constituye todavía un campo en desarrollo, pues existen casos en los que éstos no ofrecen una imagen completa del comportamiento asintótico cuando los sistemas dinámicos no-autónomos que generan se formulan como procesos [25].

6.3. Tratamientos estocásticos.

Daremos ahora otro salto cualitativo. En esta ocasión, abordaremos brevemente las ecuaciones de Navier-Stokes cuando se añade a éstas un ruido aditivo. Para ello, en primer lugar lugar es preciso introducir el concepto de *atractor aleatorio* o estocástico, cosa que haremos de manera sucinta, enumerando las características generales y sin entrar en terreno de las demostraciones (que pueden encontrarse, por ejemplo, en [26]), pues tan solo se pretende aportar una idea general de éstos para proporcionar un marco de referencia a la hora de abordar las ecuaciones de Navier-Stokes estocásticas.

6.3.1. Atractor determinista vs atractor estocástico.

El atractor estocástico supone una generalización del concepto de atractor determinista a sistemas dinámicos estocásticos. Este atractor satisface la mayoría de las propiedades que cumplen los atractores definidos para sistemas dinámicos deterministas.

A fin de establecer una comparación entre los atractores ya conocidos y los estocásticos, consideremos en primer lugar un **sistema determinista no-autónomo**. Supongamos que (X, d) es nuestro espacio métrico y $S(t,s) : X \to X$, $-\infty < s \leq t < \infty$ una familia de mapeados continua en X ($\forall\, s \leq t$) y que verifica además que $S(t,r)S(r,s)x = S(t,s)x$, $\forall\, s \leq r \leq t$ y $x \in X$. Comencemos introduciendo el siguiente lema:

Lema 15. *Dado un instante $t \in \mathbb{R}$, asumamos que existe un conjunto atrayente compacto en el tiempo t, $K(t)$. Entonces, el conjunto ω-límite $A(B,T)$ atraerá a B desde $-\infty$:*

$$\lim_{s\to-\infty} d(S(t,s)B, A(B,t)) = 0$$

6. ***Posibles horizontes del caso de estudio.***

El objetivo es definir un atractor global como un conjunto que atraiga a cualquier conjunto acotado de X. A raíz del **lema** 15, podemos tomar la unión de los conjuntos ω-límite de todos los conjuntos acotados. Definamos, pues, el siguiente teorema:

Teorema 17. *Dando un $t \in \mathbb{R}$, supongamos que existe un conjunto compacto atrayente, $K(t)$. Entonces, el conjunto $A(t)$, definido como:*

$$A(t) = \overline{\bigcup_{B \subset X} A(B,t)}$$

(tomando la unión sobre todos los conjuntos acotados b), es un subconjunto compacto no-vacío de $K(t)$. Éste atraerá a todos los conjuntos acotados desde $-\infty$: para todos los $B \subset X$:

$$\lim_{s \to -\infty} d(S(t,s)B, A(t)) = 0$$

Es más, se trata del conjunto minimal cerrado con la siguiente propiedad: si $\tilde{A}(t)$ es un conjunto cerrado que atrae a todos los conjuntos acotados desde $-\infty$, entonces $A(t) \subset \tilde{A}(t)$. Finalmente, $A(\tau)$ estará también debidamente definida para todo $\tau > t$ y satisfacerá la propiedad de invariancia:

$$S(\tau, r)A(r) = A(\tau), \qquad \forall\, \tau \geq r \geq t$$

Por estos motivos, decimos que $A(t)$ es el atractor global del sistema $S(t,s)$ para el tiempo t.

Consecuencia directa del teorema anterior es lo siguiente:

Teorema 18. *Supongamos que $(S(t,s))_{t \geq s}$ es asintóticamente compacto. Entonces, para todo $t \in \mathbb{R}$, el conjunto $A(t)$ definido en el* ***Teorema*** *17 es un subconjunto no-vacío y compacto de $K(t)$ que atrae a todos los conjuntos acotados desde $-\infty$, además de ser el conjunto cerrado minimal con esta propiedad. Adicionalmente, es invariante, en el sentido de:*

$$S(t,s)A(s) = A(t), \qquad \forall\, s \geq t$$

Abordemos ahora los **sistemas dinámicos estocásticos**. Para ello, denotemos por (X, d) al espacio métrico completo separable y mediante $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ al espacio de probabilidades. De manera similar a como acabamos de hacer, consideramos una familia de mapeados $S(t,s;\omega)$: $X \to X$, $-\infty < s \leq t <$, parametrizada mediante $\omega \in \Omega$, que satisface para $P - a.e.$ (*casi en todas partes*) las dos propiedades que ya hemos visto:

- (i) $S(t,r;\omega)S(r,s;\omega)x = S(t,s;\omega)x$, para todos los $s \leq r \leq t$ y $x \in X$.

- (ii) $S(t,s;\omega)$ es continuo en X, para todos los $s \leq t$.

Lema 16. *Las siguientes dos aseveraciones son equivalentes:*

- *(a)* $(S(t,s;\omega))_{t\geq s,\,\omega\in\Omega}$ *es asintóticamente compacto.*
- *(b) Para cada* $t\in\mathbb{R}$*, existe un conjunto medible* $\Omega_t \subset \Omega$ *con medida unidad tal que, para todos los* $\omega \in \Omega_t$*, existe un conjunto compacto atrayente,* $K(t,\omega)$*.*

En virtud de lo anterior, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 19. *Supongamos que nuestro sistema dinámico estocástico* $(S(t,s;\omega))_{t\geq s,\omega\in\Omega}$ *es asintóticamente compacto. Entonces, para* $P-a.e.\ \omega$*, el siguiente resultado será cierto: Para cualquier* $t\in\mathbb{R}$*, el conjunto* $A(t,\omega)$ *es un subconjunto no-vacío y compacto de* $K(t,\omega)$*, que atrae a todos los conjuntos acotados desde* $-\infty$*, y además es el minimal cerrado con esta propiedad. Además es invariante, en el sentido de que, para todos los* $s\leq t$*:*

$$S(t,s;\omega)A(s,\omega) = A(t,\omega)$$

Lo anterior es una consecuencia directa del **Teorema** 18. Ahora bien, en lo que respecta a la capacidad del atractor para ser medido, decimos que una familia $A(\omega)$ ($\omega\in\Omega$) de subconjuntos cerrados de X es *medible* si, para cualquier $x\in X$, la función $\omega\mapsto d(A(\omega),x)$ es medible. A las condiciones que vimos más arriba podemos añadirles la siguiente:

- (iii) Para cualquier $t\in\mathbb{R}$, $x\in X$, el mapeado $(s,\omega)\mapsto S(t,s;\omega)x$ es medible desde $((-\infty,t]\times\Omega,$ $\mathscr{B}((-\infty,t])\otimes\mathscr{F})$ hasta $(X,\mathscr{B}(X))$.

Por tanto, podemos enunciar el siguiente resultado:

Proposición 12. *Supongamos que* $(S(t,s;\omega))_{t\geq,w\in\Omega}$ *satisface (i), (ii) y (iii) y es asintóticamente compacto. Entonces, para cualquier* $t\in\mathbb{R}$ *y para cualquier conjunto acotado* $B\subset X$*, los conjuntos* $A(B,t,\omega)$ *y* $A(t,\omega)$ *son son conjuntos mediables, con respeto a la P-completitud de* $\mathscr{F}$*.*

Consideraremos a partir de aquí el caso de que exista una **variación en el espacio de probabilidades** («shift»). Ahora, motivados por la **Proposición** 12, asumiremos que $(\Omega,\mathscr{F},P)$ es un espacio completo de probabilidades. A las condiciones (i), (ii) y (iii) añadiremos las dos siguientes:

- (iv) Para todo $s<t$ y $x\in X$, el mapeado $\omega\mapsto S(t,s;\omega)x$ es medible desde $(\Omega,\mathscr{F})$ hasta $(X,\mathscr{B}(X))$.
- (v) Para todo t, y $P-a.e.\ \omega$, el mapeado $s\mapsto S(t,s;\omega)x$ es continua a la derecha en cada punto.

6. ***Posibles horizontes del caso de estudio.***

Percatémonos de que la condición (iii) viene implicada por (iv) y (v); por tanto, sabemos que $A(t,\omega)$ es medible.

Proposición 13. *Asumiendo (i), (ii), (iv), (v) y $S(t,s;\omega)x = S(t-s,0;\theta_s\omega)x$, $P-a.s.$, supongamos que para $P-a.e.$ ω existe un conjunto atractor compacto $K(\omega)$ en el instante 0, es decir, uno para el cual para todos los conjuntos acotados $B \subset X$, $d(S(0,s;\omega)B, K(\omega)) \to 0$ conforme $s \to -\infty$. Entonces, el sistema dinámico estocástico $(S(t,s;\omega))_{t\geq s,\omega\in\Omega}$ es asintóticamente compacto.*

Con el propósito de verificar (v) de cara a posibles aplicaciones, tenemos la siguiente condición de suficiencia:

Lema 17. *Supongamos que:*

- *(vi-a) Para cada s, $x \in X$ y $P-a.e.$ ω, el mapeado $t \mapsto S(t,s;\omega)x$ es continuo en $t = s$.*
- *(vi-b) Para cada $s < t$ y $P-a.e.$ ω, el mapeado $x \mapsto S(t,s;\omega)x$ es continuo en X, uniformemente en s sobre conjuntos acotados.*

Entonces, (v) se satisface completamente.

Proposición 14. *Suponiendo que las hipótesis tomadas en la **Proposición** 13 se mantienen y que el la el salto de tiempo θ_t ($t \in \mathbb{R}$) es ergódico. Entonces, existe un conjunto acotado $B \subset X$ (independiente de ω) tal que $A(\omega)$ es el conjunto ω-límite de B en $t = 0$.*

Es más, $A(\omega)$ será el conjunto compacto medible de mayor tamaño que satisfaga la propiedad de invariancia: si $(\tilde{A}(\omega))_{\omega\in\Omega}$ es una familia de conjuntos compactos medibles tal que, para casi todos los ω: $S(t,s;\omega)\tilde{A}(\theta_s\omega) = \tilde{A}(\theta_t\omega)$. Entonces, $\tilde{A}(\omega) \subset A(\omega)$ para casi todos los ω.

Concluiremos esta sección con un teorema que agrupe los resultados anteriores:

Teorema 20. *Sea $(S(t,s;\omega))_{t\geq s,\omega\in\Omega}$ un sistema dinámico estocástico que satisface (i), (ii), (iv) y (v). Supongamos que existe un grupo θ_t, $t \in \mathbb{R}$, de medidas que conservan los mapeados de modo que $S(t,s;\omega)x = S(t-s,0;\theta_s\omega)x$, $P-a.s.$ resulte cierto y que, para $P-a.e.$ ω, existe un conjunto compacto atractor $K(\omega)$ para $t = 0$. Para $P-a.e.$ $\omega \in \Omega$, fijamos:*

$$A(\omega) = \overline{\bigcup_{B\subset X} A(B,\omega)},$$

donde la unión ha sido tomada sobre todos los subconjuntos acotados de X y $A(B,\omega)$ viene dado por:

$$A(B,\omega) = \bigcap_{T<0} \overline{\bigcup_{s<T} S(0,s;\omega)B}$$

Entonces, para $P-a.e.$ $\omega \in \Omega$, tenemos:

1. *$A(\omega)$ es un subconjunto compacto no-vacío de X, y si X está conexo, es un subconjunto conexo de $K(\omega)$.*

2. *La familia $A(\omega)$, $\omega \in \Omega$ es medible.*

3. *$A(\omega)$ es invariante, en el sentido de: $S(t,s;\omega)A(\theta_s\omega) = A(\theta_t\omega)$, $s \leq t$.*

4. *Además, es el conjunto minimal cerrado para el cual, para $t \in \mathbb{R}$, $B \subset X$ acotado: $d(S(t,s;\omega)B, A(\theta_t\omega)) \to 0$, cuando $s \to -\infty$.*

5. *Para cualquier conjunto acotado $B \subset X$, $B \subset X$ acotado: $d(S(t,s;\omega)B, A(\theta_t\omega)) \to 0$ en probabilidad cuando $t \to \infty$.*

   Además, si el salto de tiempo θ_t es ergódico:

6. *Existe un conjunto acotado $B \subset X$ tal que: $A(\omega) = A(B,\omega)$.*

7. *$A(\omega)$ es el mayor conjunto compacto medible, el cual es invariante en el sentido de (2).*

6.3.2. Ecuaciones de Navier-Stokes con ruido aditivo.

Denotemos por $D \subset \mathbb{R}^2$ a un dominio acotado, con frontera ∂D. Consideraremos las *ecuaciones de Navier-Stokes estocásticas* que describen el movimiento de un fluido incomprensible llenando D y sujeto a perturbaciones aleatorias, para el caso en 2D:

$$\begin{cases} du + (-\nu\nabla^2 u + (u\nabla)u + \nabla p)dt = Fdt + \sum\limits_{j=1}^{m}\phi_j dw_j(t) \\ \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \tag{6.10}$$

Las incógnitas serán, por supuesto, la velocidad $u = (u_1, u_2)$ y la presión p. La densidad se ha supuesto con valor unidad, y ν denota la viscosidad. Las condiciones de contorno son:

$$u|_{\partial D} = 0 \tag{6.11}$$

Las funciones ϕ_j $(j = 1, ..., m)$ son independientes del tiempo (las especificaremos más abajo). Las funciones w_j $(j = 1, ..., m)$ son procesos de Wiener de valor real bilaterales independientes en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Más concretamente, sea $\Omega = \{\omega \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) | \omega(0) = 0\}$, siendo P una medida del producto de dos medidas de Wiener en las partes negativa y positiva de Ω. Por tanto, tenemos:

$$(w_1(t,\omega), w_2(t,\omega), ..., w_m(t,\omega)) = \omega(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

6. ***Posibles horizontes del caso de estudio.***

Podemos definir el proceso de salto temporal (de manera similar a como se hace, por ejemplo, en [26]), como una familia o transformaciones ergódicas:

$$\theta_s\omega(t) = \omega(t+s) - \omega(s), \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

En lo que respecta al espacio funcional de esta variante del problema de Navier-Stokes, volvemos a considerar los espacios de Hilbert:

$$H = \{u \in (L^2(D))^2 | \nabla \cdot u = 0, u, n = 0 \text{ en } \partial D\}$$

dotados con la norma $(L^2(D))^2$ y producto escalar ya conocidos —$|\cdot|$, $(.,.)$—, y:

$$V = (H_0^1(D))^2 \cap H$$

provisto con la norma:

$$\|u\|^2 = \sum_{i,j=1,2} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2_{L^2(D)}$$

Denotaremos mediante $\mathcal{P}$ al proyector ortonormal en $(L^2(D))^2$ sobre H, definiendo al operador lineal no acotado sobre H:

$$\mathcal{A} = -\mathcal{P}\Delta$$

sobre el dominio $D(A) = (H^2(D))^2 \cap V$. La forma trilineal, b, será similar a la considerada en los capítulos anteriores:

$$b(u, v, w) = \int_D (u \cdot \nabla) v \cdot w dx,$$

siempre que los u, v, w permitan que la integral tenga sentido. Podemos escribir ahora la ecuación (6.10) y la condición (6.11) como una ecuación diferencial estocástica en H:

$$du + (\nu A u + b(u, u))dt = F dt + \sum_{j=1}^{m} \Phi_j dw_j, \tag{6.12}$$

con $\Phi_j = \mathcal{P}\phi_j \ (j = 1, ..., m)$, siendo la condición inicial:

$$u(0) = u_0 \tag{6.13}$$

Asumiremos que, para los $j = 1, ..., m$, $\Phi_j \in D(A)$ y que existe una constante c_1 tal que:

$$|b(u, \Psi_j), u| \leq c_1 |u|^2, \quad \forall\, u \in H. \tag{6.14}$$

En lo que respecta a la existencia y unicidad de (6.12) y (6.13), existen numerosos autores que han abordado esta cuestión (véase, por ejemplo [27]). Lo que se expone en esta sección se enmarca en el contexto de los atractores aleatorios. En lo relativo al estudio de (6.12), es habitual redefinir las incógnitas. Escribamos ahora la ecuación que satisface:

$$u - \sum_{j=1}^{m} \Phi_j w_j \tag{6.15}$$

Obra decir que esto permitiría demostrar resultados de existencia y unicidad de soluciones (aunque no resulta suficiente para probar la existencia de conjuntos atractores [26]). Introduzcamos la siguiente función-incógnita: $v = u - z$, siendo z un proceso de Ornstein-Uhlenbeck:

$$z = \sum_{j=1}^{m} \Phi_j z_j.$$

con:

$$z_j = \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)} dw_j(s),$$

siendo α una matriz constante cuadrada y con w denotando un proceso de Wiener. z es un proceso estacionario, cuyas trayectorias son *casi seguramente continuas* con respecto a una probabilidad P (P-a.s. continuas). La función v que hemos definido satisfacerá la siguiente ecuación diferencial con parámetro aleatorio:

$$\frac{dv}{dt} + \nu A v + b(v + z, v + z) = F + \alpha z - \nu A z \tag{6.16}$$

Resulta sencillo (usando un método de Galerkin para cada $\omega \in \Omega$, por ejemplo) probar que, si $s \in \mathbb{R}$ y v_s está en H *casi seguro*, entonces existirá una solución única definida sobre $[s, \infty)$ para (6.16), $v(t, \omega)$, tal que:

$$v(s, \omega) = v_s(\omega), \qquad P - a.s. \tag{6.17}$$

Definimos ahora el sistema dinámico estocástico $(S(t, s; \omega))_{t \geq s, \omega \in \Omega}$ mediante:

$$S(t, s; \omega)u_s = v(t, \omega) + z(t, \omega),$$

donde v es la solución de (6.16) y (6.17), con $v_s = u_s - z(s, \omega)$. Probaremos ahora la existencia de un conjunto compacto atrayente $K(\omega)$ para el instante 0. Sea B un conjunto acotado en H; para cada $s \in \mathbb{R}$ y $u \in B$, sea v la solución de (6.16), (6.17), con $v_s = u - z(s, \omega)$. Para $\omega \in \Omega$, multiplicamos la ecuación (6.16) en H por v, obteniendo:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v|^2 + \nu \|v\|^2 - (b(v + z, v + z), v) = (F, v) + \alpha(z, v) - \nu((z, v)).$$

Si usamos (6.14) y $(b(\tilde{u}, \tilde{v}), \tilde{v}) = 0$, para todos aquellos $\tilde{u}, \tilde{v}$ tales que $b(\tilde{u}, \tilde{v})$ se encuentra definido, tendremos:

$$|(b(v + z, v + z), v)| = |(b(v + z, z)v + z)| \leq \left| \sum_{j=1}^{m} z_j (b(v + z, \Phi_j), v + z) \right| \leq$$

$$\leq c_1 \left(\sum_{j=1}^{m} |z_j| \right) |v + z|^2 \leq 2c_1 \left(\sum_{j=1}^{m} |z_j| \right) (|v|^2 + |z|^2)$$

A raíz de esto, formulamos la ecuación:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v|^2 + \nu \|\nu\|^2 \leq 2c_1 \left(\sum_{j=1}^{m} |z_j| \right) |v|^2 + \frac{\nu\lambda_1}{4}|v|^2 + \frac{\nu}{2} \|\nu\|^2 + g,$$

con:

$$g = 2c_1 \left(\sum_{j=1}^{m} |z_j| \right) |z|^2 + \frac{2}{\nu\lambda_1}|F|^2 + \frac{2\alpha^2}{\nu\lambda_1}|z|^2 + \frac{\nu}{2} \|z\|^2,$$

y siendo λ_1 es el primer autovalor de A, que satisface $\|v\|^2 \geq \lambda_1|v|^2$, $\forall\, v \in V$. Deducimos entonces:

$$\frac{d}{dt}|v|^2 + \frac{\nu}{4}\|v\|^2 + \left(\frac{\nu\lambda_1}{4} - 2c_1\sum_{j=1}^{m}|z_j|\right)|v|^2 \leq 2g, \tag{6.18}$$

y debido al lema de Gronwall, para $s < -1$ y $t \in [-1, 0]$:

$$|v(t)|^2 \leq |v(s)|^2 exp\left(-\int_s^t \frac{\nu\lambda_1}{4} - 2c_1\sum_{j=1}^{m}|z_j(\sigma)|d\sigma\right) + 2\int_s^t g(\sigma) exp\left(-\int_s^t \frac{\nu\lambda_1}{4} - 2c_1\sum_{j=1}^{m}|z_j(\tau)|d\tau\right) d\sigma \leq$$

$$\leq c_2|v(s)|^2 exp\left(s\left(\frac{\nu\lambda_1}{4} + \frac{2c_1}{s}\int_s^0\sum_{j=1}^{m}|z_j(\sigma)|d\sigma\right)\right) + 2c_2\int_s^0 g(\sigma) exp\left(-\int_\sigma^0 \frac{\nu\lambda_1}{4} - 2c_1\sum_{j=1}^{m}|z_j(\tau)|d\tau\right) d\sigma,$$

con $c_2 = exp(\nu\lambda_1/4)$.

El proceso $\sum_{j=1}^{m}|z_j|$ es estacionario y ergódico. Dada esta ergodicidad, sabemos que:

$$-\frac{1}{s}\int_s^0\sum_{j=1}^{m}|z_j(\sigma)|d\sigma \to E\left(\sum_{j=1}^{m}|z_j(0)|\right) \quad \text{cuando} \quad s \to -\infty. \tag{6.19}$$

Por tanto, existe un $s_0(\omega)$ para el cual, para cualquier $s < s_0(\omega)$:

$$-\frac{1}{s}\int_s^0\sum_{j=1}^{m}|z_j(\sigma)|d\sigma \leq 2E\left(\sum_{j=1}^{m}|z_j(0)|\right)$$

y:

$$exp\left(s\left(\frac{\nu\lambda_1}{4} + \frac{2c_1}{s}\int_s^0\sum_{j=1}^{m}|z_j(\sigma)|d\sigma\right)\right) \leq exp\left(s\left(\frac{\nu\lambda_1}{4} + 4c_1E\left(\sum_{j=1}^{m}|z_j(0)|\right)\right)\right) \tag{6.20}$$

Ahora poseemos una perspectiva más rigurosa que nos permite entender por qué el cambio de variable realizado en (6.15) no resulta adecuado para nuestro propósito. Aplicando (6.15), el lado derecho de (6.20) contendría:

$$exp\left(s\frac{\nu\lambda_1}{4}+2c_1\int_s^0\sum_{j=1}^m|w_j(\sigma)|d\sigma\right),$$

y se trata de un término que puede crecer indefinidamente conforme $s\to-\infty$. Desde un punto de vista opuesto, si nos percatamos de que:

$$E\left(\sum_{j=1}^m|z_j(0)|\right)\leq\sum_{j=1}^m E(|z_j(0)|^2)^{1/2}=\frac{m}{\sqrt{2\alpha}}$$

y tomamos un valor de *alpha* lo suficiente grande, de modo que:

$$E\left(\sum_{j=1}^m|z_j(0)|\right)\leq\frac{\nu\lambda_1}{32c_1}, \tag{6.21}$$

entonces el primer término de (6.20) decae a 0 cuando $s\to-\infty$. Es más, el segundo término se encuentra acotado. Esto es consecuencia de:

$$z_j(t)=z_j(0)-\alpha\int_t^0 z_j(s)ds+w_j(t),$$

lo cual demuestra que $|z_j(t)|/t$ está acotado en $-\infty$ y que $g(t)$ crece, como mucho, de forma polinomial. Puesto que $g(t)$ se halla multiplicado por una función que decae exponencialmente —(6.19) y (6.21)—, la integral converge. Por tanto, para $s<s_0(\omega)$ y $t\in[-1,0]$:

$$|v(t)|^2\leq c_2|v(s)|^2exp\left(s\frac{\nu\lambda_1}{8}\right)+2c_2\int_{-\infty}^0 g(\sigma)exp\left(\sigma\left(\frac{\nu\lambda_1}{4}+\frac{2c_1}{\sigma}\int_\sigma^0\sum_{j=1}^m|z_j(\tau)|d\tau\right)\right)d\sigma\leq$$

$$\leq 2c_2|u_s|^2exp\left(s\frac{\nu\lambda_1}{8}\right)+2c_2|z(s)|^2exp\left(s\frac{\nu\lambda_1}{8}\right)+2c_2\int_{-\infty}^0 g(\sigma)exp\left(\sigma\left(\frac{\nu\lambda_1}{4}+\frac{2c_1}{\sigma}\int_\sigma^0\sum_{j=1}^m|z_j(\tau)|d\tau\right)\right)d\sigma$$

Ahora se puede apreciar con claridad que existe $s_1(\omega,B)$, dependiendo únicamente de ω y B, de modo que para $s<s_1(\omega,B)$, $t\in[-1,0]$:

$$|v(t)|^2\leq r_0(\omega)=2c_2\int_{-\infty}^0 g(\sigma)exp\left(\sigma\left(\frac{\nu\lambda_1}{4}+\frac{2c_1}{\sigma}\int_\sigma^0\sum_{j=1}^m|z_j(\tau)|d\tau\right)\right)d\sigma+$$

$$+ 2c_2 \sup_{s\in(-\infty,-1])} \left(|z(s)|^2 exp\left(s\frac{\nu\lambda_1}{8} \right) \right) + 1 \tag{6.22}$$

Es más, podemos integrar (6.18) sobre $[-1, 0]$ y deducir:

$$\int_{-1}^{0} \|v(s)\|^2 \leq r_1(\omega) = \frac{8c_1}{\nu} \left(\int_{-1}^{0} \sum_{j=1}^{m} |z_j(\sigma)| d\sigma \right) r_0(\omega) + \frac{8}{\nu} \int_{-1}^{0} g(\sigma) d\sigma \tag{6.23}$$

Ahora, para derivar una estimación en V, tomaremos el producto escalar de (6.16) con v en V, obteniendo así:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|v\|^2 + \nu |Av|^2 = ((F, v)) + \alpha((z, v)) - \nu(Az, Av) - (b(v + z, v + z), Av)$$

Es bien sabido (remitiéndonos, una vez más, a las propiedades de la forma trilineal b) que existe una constante c_3 tal que, para cualquier u en $D(A)$, $|b(u, u)| \leq c_3 |u|^{1/2} |Au|^{1/2} \|u\|$. Se puede deducir a partir de aquí —valiéndonos de ayuda computacional— que:

$$\frac{d}{dt} \|v\|^2 \leq G(t) + H(t) \|v\|^2 ,$$

donde las funciones G y H se definen como:

$$\begin{cases} G = \frac{4}{\nu}|F|^2 + \frac{4\alpha^2}{\nu}|z|^2 + 4\nu|Az|^2 + \frac{4}{\nu}c_3^2|v + z||Az| \|v + z\|^2 + \frac{32}{\nu^3}c_3^4|v + z|^2 \|z\|^4 \\ H = \frac{32}{\nu^3}c_3^4|v + z|^2 \|v\|^2 \end{cases}$$

Deducimos que, para cualquier $t \in [-1, 0]$:

$$\|v(0)\|^2 \leq \|v(s)\|^2 e^{\int_1^0 H(\sigma)d\sigma} + \int_t^0 G(\sigma) e^{\int_\sigma^0 H(\tau)d\tau} d\sigma \leq \left(\|v(s)\|^2 + \int_{-1}^{0} G(\sigma)d\sigma \right) e^{\int_{-1}^0 H(\sigma)d\sigma}$$

Recordando (6.22) y (6.23), se deduce que existe un $r_3(\omega)$ tal que, cuando $s < s_1(\omega, B)$:

$$\|v(0)\|^2 \leq r_3(\omega)$$

Sea ahora $K(\omega)$ la esfera de radio $r_3(\omega)^{1/2} + \|z(0,\omega)\|$ en V. Hemos probado que para cualquier B acotado en H, existe un $s_1(\omega, B)$ de modo que, para $s < s_1(\omega, B)$:

$$S(0, s; \omega)B \subset K(\omega), \qquad P - a.e. \text{ (casi en cualquier parte)}$$

Esto implica que $K(\omega)$ sea atractivo en el instante 0, puesto que es compacto en H, y el **Teorema** 20 se cumple.

Destacamos que $K(\omega)$ es un conjunto absorbente, y que el resultado obtenido se puede generalizar al caso de ruido infinito-dimensional, en el cual el término estocástico $\sum_{j=1}^{m} \Psi_j w_j$ se reemplaza con:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \beta_j e_j,$$

donde $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es la base ortonormal de los autovalores de A correspondientes a los autovectores $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$; β_j, $j \in \mathbb{N}$ es una secuencia de movimientos brownianos independientes, y $(\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números estrictamente positivos tal que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{\lambda_j^{1/2-\gamma}} < \infty, \qquad \gamma > 0$$

Un desarrollo similar al aquí realizado pero considerando ruido multiplicativo, también en el contexto de los atractores aleatorios, podemos encontrarlo en [28]. Por último, un tratamiento del problema de Navier-Stokes para el caso tridimensional puede encontrarse en [29], lo cual sin duda supone un interesante horizonte de estudio.

6.4. Extensión a dimensión 3.

Tomemos como marco de referencia el **Capítulo** 5. En su momento, no tuvimos ocasión de mostrar que las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso tridimensional generaban soluciones débiles únicas, ni tampoco pudimos mostrar que las soluciones fuertes (que son únicas) existían para cualquier instante de tiempo. En esta sección abordaremos la cuestión de si resulta sensato asumir que dichas ecuaciones generan un semigrupo en V (es decir, si asumimos la existencia de soluciones fuertes), lo cual implica que las ecuaciones deben tener un atractor global. Veremos cómo nuestro resultado principal prueba la existencia de un conjunto absorbente en V; a su vez, veremos que es posible también mostrar que existe un conjunto absorbente en $D(A)$ y, por tanto, un atractor global.

6.4.1. Conjunto absorbente en V.

Teorema 21. *Supongamos que las ecuaciones de Navier-Stokes en 3D se encuentran bien definidas sobre V de modo que para cualesquiera $f \in H$ y $u_0 \in V$,*

$$\frac{du}{dt} + Au + B(u,u) = f$$

tiene una solución fuerte, $u(t)$, es decir, una solución u con:

$$u \in L^\infty(0, L; V) \cap L^2(0, T; D(A)) \qquad \forall\, T > 0.$$

Entonces, existe un conjunto absorbente en V.

Demostración. Podemos discernir entre dos partes para el teorema. En primer lugar, mostraremos que existe una frontera uniforme en $\|u(T)\|$ para todos los $\|u_0\| \leq M$, para cada $T > 0$,

$$\sup_{t\in[0,T]} \; \sup_{\|u_0\|\leq M} \|u(T)\| \leq K_T < \infty \qquad \forall\, T > 0. \tag{6.24}$$

Por supuesto, esto no excluye la posibilidad de que colapse al cabo de un tiempo infinito, que sería $K_T \to \infty$ conforme $T \to \infty$. La otra parte del teorema muestra que esta posibilidad puede excluirse usando casi los mismos argumentos que garantizan (6.24). Así pues, supongamos que (6.24) no se verifica; entonces, deben de existir unas sucesiones $\{u_{0n}\}$ y $\{t_n\}$, con $u_{0n} \in V$, $\|u_{0n}\| \leq M$ y $t_n \in [0, T]$ tales que:

$$\|S(t_n)u_{0n}\| \to \infty \tag{6.25}$$

conforme $n \to \infty$. Tomamos una subsucesión tal que $t_n \to t^* \in [0, T]$ y, usando el teorema de compacidad de Alaoglu (ver [6], *Corolario 4.19*), podemos tomar otra subsucesión al que u_{0n0} en V. Por tanto, tenemos que $\|v_0\| \leq M$ y, puesto que V está compactamente inmerso en H, es posible tomar otra subsucesión y redefinir los subíndices, de modo que:

$$u_n \to v_0 \quad \text{en} \quad H. \tag{6.26}$$

De manera similar a como hicimos al probar la existencia de soluciones débiles, podemos mostrar que las soluciones $u_n(t)$ de:

$$du_n/dt + \nu A u_n + B(u_n, u_n) = f,$$

con $u(0) = u_{0n}$ están acotadas uniformemente en $L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$. Tomando los límites conforme $n \to 0$, obtenemos una solución débil v de:

$$dv/dt + \nu av + B(v, v) = f,$$

con $v(0) = v_0$. Sin embargo, por hipótesis, esta ecuación posee una solución fuerte, $y(t)$. Puesto que esta solución es única en la clase de soluciones débiles, deberemos tener $v(t) = y(t)$ y, por consiguiente:

$$v \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;D(A)).$$

Usaremos ahora las propiedades de regularidad de v para obtener una convergencia mejorada de u_n hacia v; mostraremos que $u_n \to v$ fuertemente en $L^2(0,T;V)$. Consideremos la ecuación de evolución para la diferencia $w_n = v - u_n$. Entonces, w_n satisface:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} w_n + \nu A w_n + B(w_n, w_n) + B(u, w_n) + B(w_n, v) = 0 \\ \\ w_n(0) = u_{0n} - v_0 \end{cases}$$

Tomando el producto interno con w_n (nuevamente, considerando la relación de ortogonalidad de la forma trilineal, así como la cota superior de $|b(u,v,w)|$ cuando $u, v, w \in V$), obtenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_n|^2 + \nu \|w_n\|^2 \leq |b(w_n, v, w_n)| \leq k|w_n|^{1/2} \|w_n\|^{3/2} \|v\| \leq \frac{3\nu}{4} \|w_n\|^2 + \frac{k^4}{4\nu^3}|w_n|^2 \|v\|^4,$$

donde en el último paso hemos usado la desigualdad de Young con $(p,q) = (4, 4/3)$. Por tanto:

$$\frac{d}{dt}|w_n|^2 + \frac{\nu}{2}\|w_n\|^2 \leq \frac{k^4}{2\nu^3}\|v\|^4 |w_n|^2. \tag{6.27}$$

Ignorando el segundo término e integrando, obtenemos:

$$|w_n(t)|^2 \leq exp\left\{\frac{k^4}{2\nu^3}\int_0^t \|v(s)\|^4 \, ds\right\} |w_n(0)|^2. \tag{6.28}$$

Puesto que $v \in L^\infty(0,T;V)$ y $w_n(0) \to 0$ en H —debido a (6.26)—, podemos deducir que:

$$w_n \to 0 \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T;H). \tag{6.29}$$

Volviendo a la relación (6.27) e integrando entre 0 y T, obtenemos:

$$\frac{\nu}{2}\int_0^T \|w_n(s)\|^2\, ds \leq \frac{k^4}{2\nu^3}\int_0^T \|v(s)\|^4 |w_n(s)|^2 ds + |w_n(0)|^2.$$

Puesto que $v \in L^\infty(0,T;V)$, junto con lo que hemos mostrado en (6.29) y usando (6.26), tendremos ahora que $w_n \to 0$ en $L^2(0,T;V)$. Por tanto:

$$u_n \to v \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T;V).$$

Dado que la convergencia L^2 en un intervalo implica la existencia de una subsucesión convergiendo casi en cualquier parte, tenemos:

$$u_n(s) \to v(s) \quad \text{en } V \quad \text{c.t.p. } s \in [0,T] \tag{6.30}$$

Tomamos ahora uno de los tiempos s_1 tal que la convergencia en (6.30) se mantenga. Luego, para valores de n lo suficientemente grandes, tendremos con certeza:

$$\|u_n(s_1)\| \leq M_0 \equiv 1 + \|v\|_{L^\infty(0,T;V)}\,.$$

Mostraremos ahora que existe cierto tiempo pequeño, τ, tal que:

$$\|u_n(s_1+t)\| \leq 2(1+M_0) \quad \forall\, 0 \leq t \leq \tau. \tag{6.31}$$

Paralelamente, consideremos la ecuación para la evolución de $\|u(t)\|$:

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \nu|Au|^1 = -b(u,u,Au) + (f,Au) \leq k\,\|u\|^{3/2}\,|Au|^{3/2} + |f||Au|,$$

que tras la aplicación de la desigualdad de Young en ambos términos, queda como:

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \nu|Au|^2 \leq \frac{2|f|^2}{\nu} + c\|u\|^6 \leq a + b\|u\|^6, \tag{6.32}$$

para ciertas constantes $a, b, c > 0$. Es posible deducir de la ecuación anterior que debe existir un tiempo $\tau(\|u_0\|)$ tal que:

$$\|u(t)\| \leq 2(1 + \|u_0\|) \quad \forall\, 0 \leq t \leq \tau.$$

Escoger $\tau = \tau(M_0)$ implicará (6.31).

Cubrimos ahora el intervalo $[0, T]$ con subintervalos de longitud $\tau, [s_j, s_j + \tau]$, donde cada s_j constituye uno de los puntos donde se mantiene la convergencia en (6.30). Entonces:

$$\|u_n(t)\| \leq 2(1 + M_0), \quad \forall\, t \in [0, T],$$

lo cual contradice (6.25). A si pues, hemos mostrado —(6.24)— que K_T es finito para cada $T > 0$. Ahora debemos excluir la posibilidad de que $K_T \to \infty$ conforme $T \to \infty$, lo cual haremos de manera similar a como hicimos para (6.25) con $K_T \to \infty$. En primer lugar, haciendo uso de la **Proposición** 6, tenemos el siguiente límite integral:

$$\int_t^{t+1} \|u(s)\|^2 \leq I_V, \quad \forall\, t \geq t_0(|u_0|).$$

Consideraremos ahora el conjunto de todos aquellos s en $[t, t+1]$ para los cuales $\|u(s)\|^2 \geq 2I_V$, denotando la medida de este conjunto como σ. Entonces:

$$2I_V\sigma \leq \int_t^{t+1} \|u(s)\|^2\, ds \leq I_V,$$

de modo que $\sigma \leq \frac{1}{2}$. Por tanto, en cualquier intervalo $[t, t+1]$ la medida de puntos tal que:

$$\|u(s)\|^2 \leq 2I_V \tag{6.33}$$

será igual o mayor que 1/2. En particular, en cada intervalo $[t, t+1]$ existirá al menos un punto s de manera que (6.33) se verifique.

Fijemos ahora $\varrho = \sqrt{2I_V}$. Mostraremos que:

$$\underset{t\geq 0}{sup} \underset{\|u_0\|\leq\varrho}{sup} \|u(t)\| \leq \infty.$$

Si esto no fuese así, habría una sucesión $t_n \to \infty$ y unos puntos u_{0n} con $\|u_{0n}\| \leq \varrho$ tales que:

$$\|S(t_n)u_{0n}\| \to \infty. \tag{6.34}$$

Consideremos ahora el intervalo $[t_n - 1, t_n]$. Sabemos que dentro de este intervalo debe existir un s_n tal que:

$$\|u_n(s_n)\| \leq \varrho,$$

debido a la relación (6.33). Consideremos entonces la solución desplazada temporalmente: $v_n(t) = u_n(t - s_n)$, donde v_n es una solución para la ecuación en tres dimensiones y cuya condición inicial es $v_n(0) = v_{0n}$, donde $\|u_{0n}\| \leq \varrho$, y teniendo presente que (6.34) nos dice que existe un $a_n = t_n - s_n \leq 1$ tal que:

$$\|v_n(a_n)\| \to \infty.$$

No obstante, vemos que esto es exactamente (6.25), cosa que ya hemos mostrado que no puede ocurrir. Entonces, para resumir, sabemos que existe un cierto tiempo s, con $t_0(\|u_0\|) \leq s \leq t_0(\|u_0\|)+1$, tal que:

$$\|u(s)\| \leq \varrho.$$

Hemos mostrado que desde este punto debe de haber algún/os R_v tal que:

$$\|u(t)\| \leq R_V.$$

Por tanto, tenemos la certeza de que si fijamos $t_1(\|u_0\|) = t_0(\|u_0\|) + 1$, entonces tendremos:

$$\|u(t)\| \leq R_v, \quad \forall\, t \geq t_1(\|u_0\|),$$

lo cual es un conjunto absorbente en V. ■

6.4.2. Conjunto absorbente en $D(A)$ y atractor global.

Finalizando estas notas sobre el atractor global en el contexto de las ecuaciones de Navier-Stokes en 3D, recordemos que (como vimos tras introducir el **Teorema** 8) un conjunto absorbente en V nos permite probar la existencia de un atractor que atrae *débilmente* a las soluciones en V (es decir, en la norma de H). Para demostrar la existencia de un atractor global que atraiga en la norma de V, precisamos mostrar la existencia de un conjunto absorbente en $D(A)$. Podemos hacer esto con un análisis muy similar a realizado en la **Proposición** 8, y se muestra en detalle en el **Anexo** A.3.

Proposición 15. *Si las hipótesis realizadas en el **Teorema 12.10** se cumplen, entonces existirá un conjunto absorbente en $D(A)$.*

Por tanto, hemos mostrado la existencia de un atractor global para las ecuaciones en tres dimensiones, y estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema:

Teorema 22. *Si las ecuaciones de Navier-Stokes en 3D generan soluciones fuertes únicas —tal y como se enunció en el **Teorema** 21—, entonces existirá un atractor global en V.*

En resumen, en este capítulo hemos mostrado la existencia de un atractor global tanto en H como en V para las ecuaciones de Navier-Stokes en 2D. Adicionalmente, y asumiendo regularidad, también lo hemos hecho para las ecuaciones en 3D en V.

A. Anexos.

A.1. Teoremas y lemas de utilidad.

A continuación, se enuncian algunos resultados de especial utilidad, a los que se hace referencia en el texto principal. La demostración de estos resultados puede hallarse en los capítulos 7 y 8 de [6].

Teorema 23. *Supongamos que:*

$$\begin{cases} u \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \\ du/dt \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \end{cases}$$

Entonces:

- *(i) u es continuo desde $[0,T]$ en $L^2(\Omega)$, con:*

$$\sup_{t\in[0,T]} |u(t)| \leq C \left(\|u\|_{L^2(0,T;H^1)} + \|du/dt\|_{L^2(0,T;H^{-1})} \right),$$

  y:

- *$d|u|^2/dt = 2\langle du/dt, u\rangle$ para casi cualquier $t \in [0,T]$, es decir:*

$$|u(t)|^2 = |u_0|^2 + 2\int_0^t \langle du/dt(s), u(s)\rangle\, ds.$$

Lema 18. *Si $X = H$, V o V', entonces:*

$$\|P_n u\|_X \leq \|u\|_X \quad y \quad P_n u \to u \text{ en } X.$$

Teorema 24. *Sean $X \subset\subset H \subset Y$ espacios de Banach, siendo X reflexivo. Supongamos que u_n es una sucesión que está uniformemente acotada en $L^2(0,T;X)$, y du_n/dt está uniformemente acotado en $L^p(0,T;Y)$, para algún $p > 1$. Entonces, hay una subsucesión que converge fuertemente $L^2(0,T;H)$.*

A.2. Desigualdad de Agmon en 2D.

Usando la expansión de Fourier de $u \in D(A)$, es posible demostrar la siguiente desigualdad, conocida como desigualdad de Agmon en 2D:

Si $u \in D(A)$, considerando una sucesión del tipo:

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} u_k e^{2\pi i k \cdot x / L},$$

podemos estimar $\|u\|_\infty$ mediante:

$$\|u\|_\infty \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |u_k|.$$

Ahora, dividimos el sumatorio en dos partes:

$$\|u\|_\infty \leq \sum_{|k| \leq \kappa} |u_k| + \sum_{|k| > \kappa} |u_k|.$$

Haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz en cada término, podemos formular:

$$\|u\|_\infty \leq \sum_{|k| \leq \kappa} (|u_k| \times 1) + \sum_{|k| > \kappa} (|u_k||k|^2 \times |k|^{-2}) \leq \left(\sum_{|k| \leq \kappa} |u_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{|k| \leq \kappa} 1 \right)^{1/2} + \\ + \left(\sum_{|k| > \kappa} |u_k|^2 |k|^4 \right)^{1/2} \left(\sum_{|k| > \kappa} |k|^{-4} \right)^{1/2}.$$

Puesto que:

$$\sum_{|k| \leq \kappa} 1 \leq C\kappa^2 \qquad \& \qquad \sum_{|k| > \kappa} |k|^4 \leq C\kappa^{-2},$$

la expresión anterior se convierte en:

$$\|u\|_\infty \leq C(\kappa |u| + \kappa^{-1} |Au|).$$

Con el fin de igualar los dos términos de la derecha, definimos $\kappa = |Au|^{1/2} |u|^{-1/2}$, obteniendo:

$$\|u\|_\infty \leq C|u|^{1/2}|Au|^{1/2}.$$

A.3. Existencia de un conjunto absorbente en $D(A)$.

Mostraremos la existencia de un conjunto absorbente en $\mathbb{H}^2$ para las ecuaciones de Navier-Stokes en 3D, bajo las hipótesis del **Teorema** 21. En primer lugar, pudimos derivar en (6.32) la desigualdad:

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \nu|Au|^2 \leq \frac{2|f|^2}{\nu} + c\,\|u\|^6 \leq a + b\,\|u\|^6\,,$$

y puesto que tenemos una frontera uniforme en $\|u\|$ para aquellos t lo suficientemente grandes, obtenemos una frontera uniforme en la integral de $|Au(s)|^2$:

$$\int_{t_0}^{t_0+1} |Au(s)|^2 ds \leq C_1. \tag{A.1}$$

Procediendo con un análisis similar al realizado en la **Proposición** 8, usando una desigualdad del tipo:

$$|B(u,u)| \leq k\,\|u\|^{3/2}\,|Au|^{1/2}, \tag{A.2}$$

que surge a raíz de (2.58), podemos hacer la siguiente estimación:

$$|u_t| \leq \nu|Au| + |B(u,u)| + |f|,$$

que puede convertirse en:

$$|u_t| \leq \nu|Au| + k\,\|u\|^{3/2}\,|Au|^{1/2} + |f|$$

Si ahora aplicamos la desigualdad de Young, obtenemos:

$$|u_t| \leq c|Au| + C\,\|u\|^2 + |f|,$$

que considerando un t lo suficientemente grande, queda como:

$$u_t| \leq c|Au| + C\rho_V^2 + |f|.$$

La frontera en (A.1) por tanto implicará una frontera en $\int |u_t|^2$,

$$\int_{t_0}^{t_0+1} |u_t(s)|^2 ds \leq C_2. \tag{A.3}$$

Diferenciando $u_t + \nu Au + B(u,u) = f$ con respecto a t, obtenemos:

$$u_{tt} + \nu Au_t + B(u_t, u) + B(u, u_t) = 0.$$

Tomando el producto interno con u_t:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t|^2 + \nu \|u_t\|^2 \leq |b(u_t, u, u_t)| \leq k \|u\| |u_t|^{1/2} \|u_t\|^{3/2} \leq \frac{3\nu}{4} \|u_t\|^2 + \frac{k^4 \|u\|^4 |u_t|^2}{4\nu^3}.$$

Nuevamente, usando la frontera asintótica sobre $\|u\|$, tenemos para $t > t_0$ que:

$$\frac{d}{dt}|u_t|^2 \leq C_3|u_t|^2.$$

Usamos ahora el artificio de integrar entre s y $t+1$, con $t < s < t+1$:

$$|u_t(t+1)|^2 \leq |u_t(s)|^2 + C_4 \int_t^{t+1} |u_t(s)|^2 ds,$$

que complementamos integrando entre t y $t+1$ (con respecto a s), de manera que:

$$|u_t(t+1)|^2 \leq (1 + C_4) \int_t^{t+1} |u_t|^2 ds \leq (1 + C_4)C_3, \tag{A.4}$$

debido a (A.3). En último lugar, mostraremos que $|u_t|$ acota a |Au|. A raíz de la ecuación, tenemos: $\nu|Au| \leq |u_t| + |B(u,u)| + |f|$, o bien usando (A.2):

$$\nu|Au| \leq |u_t| + k|Au|^{1/2}\,\|u\|^{3/2} + |f|,$$

que tras usar la desigualdad de Young y reordenar, nos queda:

$$|Au| \leq C(|u_t| + \|u\|^3 + |f|).$$

Teniendo en cuenta lo anterior, junto con (A.4), obtenemos:

$$|Au(t)| \leq \rho_D$$

para todos los $t \geq 1 + t_0(\|u_0\|)$. Por tanto, tenemos un conjunto absorbente en $D(A)$, y por consiguiente, un atractor global para las ecuaciones en 3D.

A.4. Compacidad de $\Lambda(t, u_0)\,\forall\, t > 0$.

Mostraremos que el operador $\Lambda(t; u_0)$ al que hace alusión el **Teorema** 13 (linealización de las ecuaciones de Navier-Stokes bidimensionales) es compacto para todo $t > 0$.

Si tomamos el producto interno de (5.13) con U, obtenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|U|^2 + \nu\,\|U\|^2 = -b(U,u,U),$$

y por tanto:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|U|^2 + \nu\,\|U\|^2 \leq k|U|\,\|U\|\,|u|.$$

Si usamos ahora la desigualdad de Young y reordenamos, obtendremos:

$$\frac{d}{dt}|U|^2 + \nu\,\|U\|^2 \leq C|U|^2. \tag{A.5}$$

Despreciando el término en $\|U\|^2$ y aplicando la desigualdad de Gronwall, se obtiene:

$$|U(t)|^2 \leq e^{Ct}|U(0)|^2 = e^{Ct}|\xi|^2. \tag{A.6}$$

Para mostrar que obtenemos un conjunto acotado en H^1, nos remitiremos a la desigualdad (A.5) e integraremos entre $t/2$ y t:

$$\nu \int_{t/2}^{t} \|U(s)\|^2 \, ds \leq C \int_{t/2}^{t} |U(s)|^2 ds + |U(t/2)| \leq C(t)|U(t/2)|^2, \tag{A.7}$$

habiendo usado (A.6). Si ahora tomamos el producto interno de (5.13) con AU, obtendremos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U\|^2 + \nu|Au|^2 = -b(u, U, AU) - b(U, u, AU).$$

Usando ahora (2.58):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U\|^2 + \nu|Au|^2 \leq k(|u|^{1/2}\|u\|^{1/2}\|U\|^{1/2}|AU|^{3/2} + |U|^{1/2}\|U\|^{1/2}\|u\|^{1/2}|Au|^{1/2}|AU|),$$

y seguidamente usando la desigualdad de Young y reordenando, tenemos finalmente:

$$\frac{d}{dt}\|U\|^2 + \nu|AU|^2 \leq C\|U\|^2.$$

La expresión (A.7) nos permite usar el «truco de Gronwall» (ver, por ejemplo, [6], Capítulo 2) y así hallar una cota en $\|U\|$ válida para todo $t > 0$. Por tanto, se concluye que $\Lambda(t; u_0)$ es compacto para cualquier $t > 0$.

Bibliografía

[1] A. M. Jaffe, "The millennium grand challenge in mathematics," *Notices of the AMS*, vol. **53**, pp. 652–660, 6 2006.

[2] R. Temam, *Navier–Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995.

[3] L. Schwartz, *Théorie des distributions.* No. v. **1-2** in Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, 1957.

[4] R. Adams and J. Fournier, *Sobolev Spaces.* ISSN, Elsevier Science, 2003.

[5] L. Evans and A. M. Society, *Partial Differential Equations.* Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, 1998.

[6] J. Robinson, D. Crighton, and M. Ablowitz, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors.* Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 2001.

[7] L. Landau and E. Lifshits, *Fluid Mechanics, by L.D. Landau and E.M. Lifshitz.* Teoreticheskaia fizika, Pergamon Press, 1959.

[8] O. Ladyzhenskaya and V. Solonnikov, "Some problems of vector analysis and generalized formulations of boundary-value problems for the Navier-Stokes equations," *Journal of Soviet Mathematics*, vol. **10**, 08 1978.

[9] O. Ladyzhenskaya and V. Solonnikov, "On the solvability of boundary value problems for the Navier-Stokes equations in regions with noncompact boundaries," *Vestn. Leningr. Univ.*, vol. **13**, pp. 39–47, 01 1977.

[10] R. Temam, "Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis," vol. **2**, p. 500 pp, 01 2001.

[11] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical System in Mechanics and Physics*, vol. **68**. 01 1997.

[12] O. Ladyzhenskaya, *Attractors for Semi-groups and Evolution Equations.* Lezioni Lincee, Cambridge University Press, 1991.

[13] C. Guillopé, "Comportement à l'infini des solutions des équations de navier-stokes et propriété des ensembles fonctionnels invariants (ou attracteurs)," *Annales de l'Institut Fourier*, vol. **32**, no. 3, pp. 1–37, 1982.

[14] J. Robinson, "Attractors and finite-dimensional behaviour in the 2D Navier-Stokes equations," *ISRN Mathematical Analysis*, vol. **2013**, 07 2013.

[15] R. Rosa, "The global attractor for the 2D Navier-Stokes flow on some unbounded domains," *Nonlinear Analysis*, vol. **32**, 05 2001.

[16] J. García-Luengo, P. Marín-Rubio, and J. Real, "Pullback attractors in V for non-autonomous 2D-Navier-Stokes equations and their tempered behaviour," *J. Differential Equations*, vol. **252**, pp. 4333–4356, 04 2012.

[17] O. Kapustyan, V. Melnik, and J. Valero, "Attractors of multivalued dynamical processes generated by phase-field equations.," *I. J. Bifurcation and Chaos*, vol. **13**, pp. 1969–1983, 07 2003.

[18] J. Ball, "Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the Navier-Stokes equations," *J. Nonlinear Sci.*, vol. **8**, 01 1997.

[19] J.-P. Aubin, "Un théorème de compacité," *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, vol. 256, pp. 5042–5044, 01 1963.

[20] G. Łukaszewicz and P. Kalita, *Non-autonomous Navier–Stokes Equations and Pullback Attractors*, pp. 251–275. 04 2016.

[21] T. Caraballo and J. Real, "Navier-Stokes equations with delays," *Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. **457**, pp. 2441–2453, 10 2001.

[22] T. Caraballo and J. Real, "Asymptotic behaviour of two-dimensional Navier-Stokes equations with delays," *Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. **459**, pp. 3181–3194, 12 2003.

[23] T. Caraballo and J. Real, "Attractors for 2D-Navier-Stokes models with delays* 1," *Journal of Differential Equations*, vol. **205**, pp. 271–297, 10 2004.

[24] J. Li, Y. Wang, and X.-G. Yang, "Pullback attractors of 2D Navier-Stokes equations with weak damping and continuous delay," *Boundary Value Problems*, vol. **2015**, 12 2015.

[25] P. Kloeden, C. Pötzsche, and M. Rasmussen, "Limitations of pullback attractors for processes," *Journal of Difference Equations and Applications*, vol. **18**, pp. 693–701, 04 2012.

[26] H. Crauel, A. Debussche, and F. Flandoli, "Random attractors," *Journal of Dynamics and Differential Equations*, vol. **9**, pp. 307–341, 04 1997.

[27] A. Bensoussan and R. Temam, "Equations stochastiques du type Navier-Stokes," *Journal of Functional Analysis*, vol. **13**, pp. 195–222, 06 1973.

[28] H. Crauel and F. Flandoli, "Attractor for random dynamical systems," *Probability Theory and Related Fields*, vol. **100**, pp. 365–393, 01 1994.

[29] F. Flandoli and B. Schmalfuß, "Weak solutions and attractors for three-dimensional Navier–Stokes equations with nonregular force," *Journal of Dynamics and Differential Equations*, vol. **11**, pp. 355–398, 01 1999.