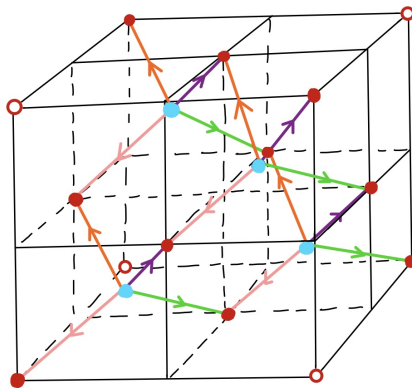


UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS



CRISTALOGRAFÍA TOPOLÓGICA



Autora:

Ana Povedano Ortiz

Tutor:

Antonio Rafael Quintero Toscano

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Departamento de Geometría y Topología

Sevilla, 2021

“Si no hubiera cuerpos sólidos en la naturaleza, no habría geometría.”

Henri Poincaré.

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar las estructuras de los cristales como ejemplos motivadores para una iniciación a la teoría general de los espacios recubridores. Hemos seguido para ello el libro [5] de Toshikazu Sunada, junto con su resumen en el artículo [4], pues es la primera exposición detallada de los fundamentos de la cristalografía topológica.

Sunada basa su estudio en el grupo fundamental (ver [2]) y después se restringe a la clase de las aplicaciones recubridoras abelianas. Sin embargo, hemos preferido usar directamente el primer grupo de homología de un grafo y trabajar desde el inicio con aplicaciones recubridoras abelianas como propone John Baez en [1].

El trabajo consta de cinco capítulos que pasamos a detallar. En el primero, damos algunas definiciones sobre grupos y acciones de grupos y presentamos el tipo de grafos con los que trabajaremos; en el segundo, hablamos de las relaciones de homotopía y homología sobre grafos; en el tercero, definimos los conceptos de grafos recubridores, grafos recubridores regulares y grafos recubridores abelianos; en el cuarto, damos la definición de cristal topológico como grafo recubridor abeliano de un grafo finito y en particular, hablamos del grafo universal abeliano sobre un grafo base dado; finalmente en el quinto, damos una serie de ejemplos de cristales topológicos.

Terminamos remarcando que este estudio se centra solamente en los elementos básicos de la cristalografía topológica y no tiene en cuenta los aspectos geométricos que se presentan al considerar condiciones físico-químicas de los cristales que aparecen en la naturaleza. Esto último tiene el fin de buscar la representación espacial más ajustada al verdadero cristal, atendiendo a principios como el de mínima acción. Estas consideraciones forman la segunda parte de [5], que queda fuera de este trabajo.

Abstract

The main purpose of this paper is to present the crystal structures as motivating examples for introducing the general theory of covering spaces. We have followed Toshikazu Sunada's book [5], together with its summary in the article [4], because it is the first detailed exposition of the foundations of Topological Crystallography.

Sunada bases his study on the fundamental group (see [2]) and then restricts to the class of abelian covering maps. However, we opted for using directly the first homology group of a graph and work from the beginning with abelian covering maps as John Baez suggests in [1].

The paper consists of five chapters that we describe as follows. In the first, we detail various definitions about groups and group actions and present the type of graphs which we will work with; in the second, we talk about homotopy and homology relations on graphs; in the third, we define the concepts of covering graphs, regular covering graphs and abelian covering graphs; in the fourth, we give the definition of a topological crystal as an abelian covering graph of a finite graph and in particular, we speak of the universal abelian graph on a given base graph; finally in the fifth, we give some examples of topological crystals.

Let us finish by pointing out that this study focuses only on the basic elements of topological crystallography and does not take into account the geometric aspects that arise when considering the physical and chemical properties of crystals that appear in nature. This leads to focus the reserach on finding the spatial representation that is more adjusted to the real crystal, attending to principles such as that of minimum action. These considerations form the second part of [5], which is left out of this work.

Índice

Resumen	3
Abstract	4
Introducción histórica	8
1 Acciones de grupos sobre grafos. Grafos cociente.	10
1.1 Conjunto fundamental de una relación de equivalencia.	10
1.2 Acciones de grupos.	11
1.3 Grafos.	15
1.4 Grafos cocientes.	18
2 Homología de grafos.	20
2.1 Caminos en grafos.	20
2.2 Homotopía de grafos.	21
2.3 Homología de grafos.	23
3 Grafos recubridores abelianos.	29
3.1 Grafos recubridores.	29
3.2 Grafos recubridores abelianos.	35
4 Grafos recubridores abelianos universales. Cristales topológicos.	38
4.1 Grafos recubridores abelianos universales.	38
4.2 Cristales topológicos.	43
5 Ejemplos.	47
5.1 Ejemplos de cristales topológicos.	47
Bibliografía	63

Introducción histórica

La Cristalografía es la ciencia que estudia la estructura tanto externa como interna de los cristales, que son unos sólidos cuyos átomos, moléculas o iones están distribuidos repetidamente y de forma regular en el espacio.

Por su naturaleza geométrica, la relación entre las matemáticas y cristalografía tiene una larga historia que se remonta a Pitágoras, de quien se cuenta que se apoyó en las formas cristalográficas para establecer la idea de polígono regular.

Otro hito histórico de la conexión entre las matemáticas y la cristalografía son las contribuciones del astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler quien en su tratado “Strena Seu De Nive Sexangula” (El Copo de Nieve de Seis Esquinas), describe matemáticamente los cristales. A raíz de este escrito surge la conocida *Conjetura de Kepler*: la densidad máxima que podemos alcanzar al amontonar esferas del mismo tamaño se obtiene apilándolas de forma piramidal de caras centradas. Esta conjetura, que no fue demostrada hasta 1998 por Thomas Hales, es un problema particular de empaquetamiento de esferas.

Entrados ya en el siglo XIX, el fuerte desarrollo de la teoría de grupos por grandes matemáticos como Joseph Louis Lagrange, Niels Henrik Abel o Évariste Galois, hace que se pueda aplicar a la cristalografía, surgiendo así la teoría de grupos cristalográficos la cual juega un importante papel en la clasificación de los cristales en función de sus simetrías.

En el siglo XX, el interés de los cristalógrafos pasó de la descripción de la forma de los cristales al estudio microscópico de los mismos. El lenguaje de la teoría de grafos se muestra muy útil para este propósito, pues vértices y aristas son abstracciones naturales de átomos y enlaces entre átomos en un cristal (o cualquier molécula), respectivamente.

Una rama de las matemáticas que a primera vista podría parecer poco ajustada a la cristalografía, y que sin embargo ha resultado ser una herramienta útil, es la topología algebraica. Recordemos que esta disciplina estudia estructuras topológicas o geométricas asignándoles datos algebraicos para traducir problemas topo-geométricos a problemas algebraicos que sean más fáciles de tratar.

De hecho la conexión de la topología algebraica con la cristalografía ha dado lugar recientemente al nacimiento de la llamada Cristalografía Topológica, cuyos fundadores son Toshikazu Sunada y Motoko Kotani.

La cristalografía topológica toma prestados de la topología algebraica la teoría de espacios recubridores y la homología particularizados ambos a la clase de los grafos. Brevemente, la cristalografía topológica fija un grafo finito X_0 y considera como cristal (teórico) con base en X_0 a cualquier grafo infinito X sobre el que actúa un grupo abeliano libre L de forma que el espacio orbital X/L es el grafo X_0 . Cuando se representa a X en un espacio euclídeo, habitualmente \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , se detecta un retículo de forma que el grupo L se corresponde con el grupo de traslaciones

en las direcciones de dicho retículo, dejando fijo a X .

El grupo L siempre será isomorfo a un subgrupo del primer grupo de homología $H_1(X_0, \mathbb{Z})$ del grafo X_0 , en particular, isomorfo a un cociente de la forma $H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$, para H un subgrupo de $H_1(X_0, \mathbb{Z})$. Recíprocamente, se puede empezar con el grafo X_0 y un subgrupo $H \subseteq H_1(X_0, \mathbb{Z})$ de forma que el grupo cociente por H , $H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$, sea libre, obteniéndose X como el espacio orbital de la acción de H sobre el grafo recubridor universal de X_0 asociado a todo el grupo $H_1(X_0, \mathbb{Z})$.

De esta forma, las estructuras de los cristales teóricos que puedan aparecer quedan determinadas al fijar un grafo finito X_0 y subgrupos de $H_1(X_0, \mathbb{Z})$ que sean sumandos directos.

1. Acciones de grupos sobre grafos.

Grafos cociente.

1.1 Conjunto fundamental de una relación de equivalencia.

Definición 1.1.1. *Conjunto fundamental.* Sean X un conjunto y \sim una relación de equivalencia dada en X . Un subconjunto $C \subseteq X$ se dice que es un conjunto fundamental para la relación \sim , si la restricción a C de la proyección $\pi : X \rightarrow X/\sim$, $\pi|_C : C \rightarrow X/\sim$, es una aplicación biyectiva.

Esto es, un conjunto fundamental se obtiene eligiendo un único representante por cada clase de equivalencia. Obviamente, existe más de un conjunto fundamental para una relación dada.

Ejemplo 1.1.2. Vamos a dar un par de ejemplos de este concepto.

1. Sea $X = \mathbb{Z}$. Fijado $n \in \mathbb{Z}$, se define la relación \sim_n tal que $a \sim b$ si y solo si $a - b = kn$ para algún $k \in \mathbb{Z}$; es decir, $a - b$ es un múltiplo de n . Esta relación es la bien conocida *relación de congruencia módulo n* y al conjunto cociente se le denota por \mathbb{Z}_n . Para $n = 2$, tenemos que \mathbb{Z}_2 está formado por dos elementos, pues $a - b$ es o un número par, que serían los múltiplos de 2, o un número impar, que serían los no múltiplos de 2. Podemos tomar así como conjunto fundamental, cualquier conjunto formado por dos elementos enteros, uno par y otro impar: $C = \{0, 1\}$, $C = \{4, 5\}$, $C = \{10, 79\}$, etc. En general para \mathbb{Z}_n , un conjunto fundamental es cualquier conjunto de n enteros que no sean dos a dos congruentes módulo n . Se suele tomar $C = \{0, \dots, n - 1\}$.
2. Sea $X = \mathbb{R}^2$. Se define la relación \sim tal que $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ si y solo si $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Podemos tomar como conjunto fundamental

$$C = \{\mathbf{x} \in S^1 : x_2 > 0\} \cup \{\mathbf{x} \in S^1 : x_2 = 0, x_1 > 0\},$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

En general para \mathbb{R}^{n+1} , un conjunto fundamental es

$$\begin{aligned} C = & \{\mathbf{x} \in S^n : x_{n+1} > 0\} \cup \{\mathbf{x} \in S^n : x_{n+1} = 0, x_n > 0\} \cup \\ & \cup \{\mathbf{x} \in S^n : x_{n+1} = 0, x_n = 0, x_{n-1} > 0\} \cup \dots \\ & \dots \cup \{\mathbf{x} \in S^n : x_{n+1} = 0, x_n = 0, \dots, x_2 = 0, x_1 > 0\}, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n+1})$. Al conjunto cociente se le llama *espacio proyectivo real* y se denota por $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$.

1.2 Acciones de grupos.

Necesitamos algunas nociones de la teoría de grupos para poder avanzar en nuestro trabajo. Comencemos definiendo el concepto de grupo y de acciones de grupo.

Definición 1.2.1. *Grupo.* Un grupo, denotado por $(G, *)$, es una estructura algebraica formada por un conjunto no vacío G y dos operaciones $\psi: G \times G \rightarrow G$, con $a * b := \psi(a, b)$, y $\phi: G \rightarrow G$, que cumplen las siguientes propiedades:

1. Propiedad asociativa: $(a * b) * c = a * (b * c)$, para cualesquiera $a, b, c \in G$.
2. Existencia de elemento neutro: existe un único elemento $e \in G$ de manera que para todo $a \in G$ se tiene $a * e = e * a = a$.
3. Existencia de elemento simétrico: para cada $a \in G$ existe un único elemento $\phi(a) \in G$ tal que $a * \phi(a) = \phi(a) * a = e$.

Si además $*$ cumple la propiedad conmutativa; es decir, $a * b = b * a$ para cualesquiera $a, b \in G$, entonces el grupo se llama *abeliano* o *conmutativo*.

Definición 1.2.2. *Grupo abeliano libre.* Se dice de un grupo $(G, *)$ abeliano en el que cada elemento de G se puede escribir de manera única como combinación lineal con coeficientes enteros de algunos elementos $\lambda \in B \subseteq G$ (llamados *base*). Además debe cumplirse que:

1. $\sum_{\lambda \in B} z_\lambda \lambda = 0$ si y solo si $z_\lambda = 0$ para todo $\lambda \in B$.
2. $\sum_{\lambda \in B} z_\lambda \lambda \pm \sum_{\lambda \in B} w_\lambda \lambda = \sum_{\lambda \in B} (z_\lambda \pm w_\lambda) \lambda$.

Definición 1.2.3. *Subgrupo.* Dado $(G, *)$ un grupo, un conjunto $H \subseteq G$ es un subgrupo de $(G, *)$ si H también forma grupo con la operación $*$; o equivalentemente, si $h_1, h_2 \in H$ entonces $h_1 * h_2$ y si $h \in H$ entonces $\phi(h) \in H$.

Definición 1.2.4. *Subgrupo normal.* Un subgrupo $(H, *)$ de un grupo $(G, *)$ se dice normal si para cada elemento $h \in H$ y cada $g \in G$, se tiene que $ghg^{-1} \in H$.

Nota 1.2.5. El elemento neutro se escribirá id y el simétrico de a se denotará por a^{-1} y se pasa a llamar *inverso* de a si usamos notación multiplicativa, $*$ = \cdot ; mientras que el elemento neutro se escribirá 0 y el simétrico de a se denotará por $-a$ y se pasa a llamar *opuesto* de a si usamos notación aditiva, $*$ = $+$. A partir de ahora, un grupo se escribirá simplemente G , usando para la operación la notación multiplicativa si el grupo no es abeliano y la aditiva si el grupo es abeliano.

Definición 1.2.6. *Acción de grupos.* Un grupo G actúa por la izquierda sobre un conjunto A , si existe una aplicación (llamada *acción*) $\psi: G \times A \rightarrow A$ que satisface:

1. Para todo $a \in A$, $\psi(id, a) = a$.
2. $\psi(g_1, \psi(g_2, a)) = \psi(g_1 g_2, a)$, para cualesquiera $g_1, g_2 \in G$ y $a \in A$.

Análogamente, un grupo G actúa por la derecha sobre un conjunto A , si existe una aplicación

$\psi : A \times G \rightarrow A$ que satisfice:

1. Para todo $a \in A$, $\psi(a, \text{id}) = a$.
2. $\psi(\psi(a, g_1), g_2) = \psi(a, g_1 g_2)$, para cualesquiera $g_1, g_2 \in G$ y $a \in A$.

Se dice que A es un G -conjunto a izquierda (a derecha, respectivamente) si el grupo G actúa por la izquierda (por la derecha, respectivamente) sobre A . Vamos a trabajar con las acciones por la izquierda, y diremos simplemente acción de un grupo G sobre un conjunto A o que A es un G -conjunto.

Las dos condiciones en la definición de G -conjunto implican que, para cada elemento $g \in G$, la aplicación $\psi_g := \psi(g, \cdot) : A \rightarrow A$ es una función biyectiva con inversa $\psi_g^{-1} = \psi_{g^{-1}} : A \rightarrow A$.

Esta observación nos dice que la acción de un grupo G sobre un conjunto A , se puede definir como un homomorfismo $\phi : G \rightarrow \mathcal{S}_A$, donde \mathcal{S}_A es el grupo cuyos elementos son todas las funciones biyectivas de A en A y cuya operación es la composición. A \mathcal{S}_A se le suele llamar *grupo de simetría* de A y a sus elementos, *permutaciones*.

Ejemplo 1.2.7. Veamos algunos ejemplos de acciones de grupos.

1. Se tiene que para todo conjunto A , \mathcal{S}_A actúa sobre A con $\psi : \mathcal{S}_A \times A \rightarrow A$ dado por $\psi(\sigma, a) = \sigma(a)$.
2. Sea $G = (\mathbb{Z}, +)$, entonces G actúa sobre $A = \mathbb{R}$ con la traslación $\psi(n, x) = n + x$.
3. Un grupo G actúa sobre sí mismo. Sean $x, g \in G$, entonces G puede actuar por la *izquierda* con $\psi(g, x) = gx$, o por la *derecha* con $\psi(x, g) = xg$, con la multiplicación habitual de los elementos del grupo. También puede actuar por *conjugación* con $\psi(g, x) = gxg^{-1}$. En general, G puede actuar por conjugación sobre cualquiera de sus subgrupos normales.
4. Vamos a considerar un polígono regular P de n lados en el plano OXY y centrado en el origen. Entonces el subgrupo G_n de las rotaciones de ángulo $\frac{2\pi k}{n}$, con $k \in \mathbb{Z}$ y $l = 1, \dots, n$, actúa sobre el conjunto de los vértices de dicho polígono por la acción que lleva $(x, y) \in \text{Vértices}(P)$ en $\psi(\theta, (x, y)) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$, con $\theta = \frac{2\pi k}{n}$. Véase en la Figura 1.2.1 un ejemplo para el caso particular de $n = 6$ y la rotación de (x, y) en (x', y') para $\theta = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$.

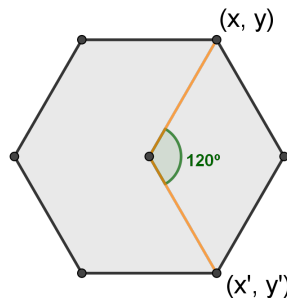


Figura 1.2.1. Rotación del vértice (x, y) en (x', y') .

Obsérvese que el grupo G_n también actúa sobre el conjunto de lados de P .

Notación. Dada una acción $\psi : G \times A \rightarrow A$ la imagen $\psi(g, a)$ se suele escribir ga .

Toda acción de un grupo G sobre un conjunto A da lugar a una relación \sim en A definida por $a \sim b$ si y solo si existe $g \in G$ tal que $b = ga$.

Lema 1.2.8. *La relación definida anteriormente es de equivalencia.*

Demostración. Sean $a, b, c \in A$ y $g, g_1, g_2 \in G$.

1. Reflexiva: $a \sim a$ pues $a = \text{id } a = a$.
2. Simétrica: Sea $a \sim b$, luego $b = ga$. Entonces $b \sim a$, pues $a = g^{-1}b$.
3. Transitiva: Sean $a \sim b$ y $b \sim c$, luego $b = g_1a$ y $c = g_2b$. Entonces $a \sim c$, pues $c = g_2g_1a$.

□

Definición 1.2.9. *Órbita, espacio orbital y conjunto fundamental de una acción.* Llamamos órbita de $a \in A$ a la clase de equivalencia de a dada por \sim . Se denota por $Ga = \{ga : g \in G\}$. El espacio orbital A/\sim , denotado comúnmente por A/G , es el conjunto de órbitas de A . Se llama conjunto fundamental de la acción a un conjunto fundamental para la relación \sim anterior.

Ejemplo 1.2.10. Sea un grupo G que actúa sobre los conjuntos A y B con las acciones ψ_A y ψ_B , respectivamente. Entonces el grupo $G \times G$ actúa sobre el producto $A \times B$ con la acción $\psi : (G \times G) \times (A \times B) \rightarrow A \times B$ dada por $\psi((g_1, g_2), (a, b)) = (\psi_A(g_1, a), \psi_B(g_2, b))$. Debido a cómo está definida esta acción, el espacio orbital $(A \times B)/(G \times G)$ se puede identificar con el producto de los espacios orbitales $(A/G) \times (B/G)$.

Definición 1.2.11. Decimos que un grupo G actúa *transitivamente* sobre A si el espacio orbital A/G es unitario, es decir, solo hay una clase de equivalencia; o lo que es lo mismo, para $a \in A$ el resto de elementos $b \in A$ se obtendrían como $b = ga$, para algún $g \in G$. Se dice que G actúa *libremente* sobre A o que G es *libre* si dado $g \in G$ tal que $a = ga$ para algún $a \in A$, se tiene que $g = \text{id}$.

Definición 1.2.12. Sean A y B dos G -conjuntos con acciones ψ_A y ψ_B , respectivamente. Se dice que una aplicación $f : A \rightarrow B$ es *G -equivariante* si satisface que $f(\psi_A(g, a)) = \psi_B(g, f(a))$, para todo $a \in A$ y para todo $g \in G$.

Sea un grupo G , dos G -conjuntos A y B y una aplicación $f : A \rightarrow B$ G -equivariante. Entonces f induce una aplicación $F : A/G \rightarrow B/G$ entre los espacios orbitales de A y B , tal que $F \circ \pi_A = \pi_B \circ f$. Aquí $\pi_A : A \rightarrow A/G$ y $\pi_B : B \rightarrow B/G$ son las proyecciones canónicas dadas por la relación de equivalencia definida anteriormente. A F se le llama *función inducida por f* . Esto se puede hacer de manera más general. Sean \sim_A, \sim_B dos relaciones de equivalencia que se establecen sobre los conjuntos A y B , respectivamente. Sea también una aplicación $f : A \rightarrow B$ cumpliendo que para $a_1, a_2 \in A$ tales que $a_1 \sim_A a_2$, entonces $f(a_1) \sim_B f(a_2)$. Podemos formar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{f} & B \\
\pi_{\sim_A} \downarrow & & \downarrow \pi_{\sim_B} \\
A/\sim_A & \xrightarrow{F} & B/\sim_B
\end{array}$$

donde π_{\sim_A} y π_{\sim_B} son las proyecciones canónicas dadas por \sim_A y \sim_B sobre A y B , respectivamente. La aplicación $F : A/\sim_A \rightarrow B/\sim_B$ dada por $F([a]) = [f(a)]$ está bien definida para toda clase $[a] \in A/\sim_A$ gracias a la propiedad que le impusimos a f : si $a_1 \sim_A a_2$, entonces $f(a_1) \sim_B f(a_2)$.

Ejemplo 1.2.13. Fijada una base $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ de \mathbb{R}^n , se llama *grupo reticular* de esa base a $R_n = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}$. Este grupo actúa sobre \mathbb{R}^n por traslaciones; es decir, $\psi(\alpha, \mathbf{x}) = \mathbf{x} + \alpha$, con $\alpha \in R_n$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Podemos tomar como conjunto fundamental de esta acción a $U_n = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i \mathbf{v}_i : 0 \leq t_i < 1, \forall i = 1, \dots, n \right\}$. En el plano, los elementos del conjunto fundamental anterior se corresponden con paralelogramos, y en el espacio, con paralelepípedos (sin las caras definidas por $t_i = 1$).

Las acciones de grupo se extienden cuando introducimos estructuras topológicas.

Definición 1.2.14. *Grupo topológico.* Es una terna (G, \mathcal{T}, \cdot) tal que (G, \mathcal{T}) es un espacio topológico, (G, \cdot) es un grupo y tal que las dos aplicaciones $\psi : G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$, y $\phi : G \rightarrow G$, $x \mapsto x^{-1}$, son continuas. Por simplicidad se denota también por G al grupo topológico si suponemos dada la topología.

Definición 1.2.15. *Subgrupo topológico discreto.* Sea G un grupo topológico. Se dice que un subgrupo $H \subseteq G$ es un subgrupo topológico de G si es grupo topológico con la topología relativa de H . El subgrupo se dice discreto si la topología relativa de G sobre H es la discreta; esto es, existe un recubrimiento de H por abiertos de G , en el que cada abierto contiene un único elemento de H .

Definición 1.2.16. *Acción continua de grupos.* Sea G un grupo topológico y A un espacio topológico. Se dice que G actúa de forma continua o simplemente actúa sobre A si la acción $\psi : G \times A \rightarrow A$ es continua con respecto a la topología producto de $G \times A$.

Al espacio orbital de la acción, A/G , se le da la topología cociente. Esto es, un conjunto $\Omega \subseteq A/G$ se toma como abierto si la imagen inversa por la proyección $\pi : A \rightarrow A/G$, $\pi^{-1}(\Omega)$, es un conjunto abierto de la topología de A .

Se dice que un espacio topológico A es un G -espacio si G actúa de forma continua sobre A . Obsérvese que la acción de un grupo G sobre un conjunto A se puede considerar como una acción continua si dotamos a G y a A de la topología discreta.

Ejemplo 1.2.17. Damos a continuación dos ejemplos de acciones continuas de grupos.

1. Si consideramos el grupo reticular R_n asociado a la base $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$ de \mathbb{R}^n del Ejemplo 1.2.13,

el espacio orbital \mathbb{R}^n/R_n , es homeomorfo al producto de n circunferencias $S^1 \times \dots \times S^1$. Esto es, el toro de dimensión n . Si tomamos $n = 2$, \mathbb{R}^2/R_2 podríamos pensarlo como un paralelogramo cuyos lados opuestos se identifican como el mismo; es decir, el toro $S^1 \times S^1$.

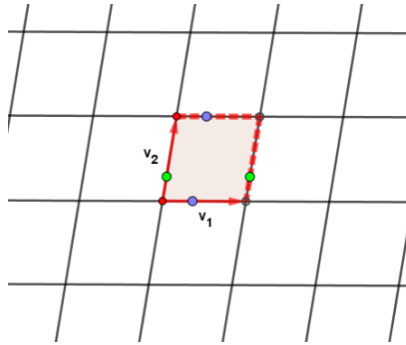


Figura 1.2.2. En rojo, un conjunto fundamental.

2. Como generalización del ejemplo anterior, consideremos el grupo $\mathbf{M}(n)$ de movimientos rígidos en \mathbb{R}^n generado por reflexiones, rotaciones y traslaciones. Recordemos que todo movimiento rígido se puede expresar como la composición de una traslación, dada por un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$; y un movimiento rígido que deja fijo el origen, descritos por las matrices ortogonales de orden n que forman el grupo ortogonal $\mathcal{O}(n)$. De esta forma, todo $T \in \mathbf{M}(n)$ se puede identificar con un par (A, \mathbf{a}) de forma que la composición de movimientos $T_1 = (A_1, \mathbf{a}_1)$ y $T_2 = (A_2, \mathbf{a}_2)$ es $T_1 \circ T_2 = (A_1 A_2, A_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1)$.

Es claro que $\mathbf{M}(n)$ actúa transitivamente sobre \mathbb{R}^n .

Es inmediato comprobar que un grupo reticular R_n es un subgrupo discreto de $\mathbf{M}(n)$ que al actuar sobre \mathbb{R}^n da un espacio orbital compacto. Es por ello un ejemplo de la siguiente definición de grupo cristalográfico.

Definición 1.2.18. *Grupo cristalográfico o espacial.* Un subgrupo \mathcal{G} de $\mathbf{M}(n)$ es un grupo cristalográfico o grupo espacial de dimensión n si es discreto y al actuar sobre \mathbb{R}^n el espacio orbital \mathbb{R}^n/\mathcal{G} es compacto.

1.3 Grafos.

La teoría de grafos es una de las herramientas más importantes que hay a la hora de estudiar las conexiones internas de los cristales. Un grafo es un conjunto de objetos en donde algunos de ellos están conectados. De manera habitual, un grafo se suele representar geoméricamente, en el plano o espacio, con puntos o vértices, que serían los objetos; y aristas, que serían las conexiones entre dichos objetos. En lo que nos concierne, la definición matemática de cristal sería equivalente a la de grafo; así, cada átomo (o molécula) estaría representado por un vértice y cada vínculo entre dos pares de átomos (o moléculas) por una arista.

Empecemos dando una definición de grafo que incluya las posibles orientaciones de sus aristas.

Definición 1.3.1. *Grafo.* Es un par $X = (V, E)$ donde V y E son conjuntos disjuntos (llamados

conjuntos de *vértices* y *aristas*, respectivamente) junto con un par de aplicaciones:

1. $\nu : E \rightarrow V \times V$, llamada *incidencia*.
2. $i : E \rightarrow E$, llamada *inversión*.

cumpliendo las siguientes propiedades para todo $e \in E$:

- i es una involución sin puntos fijos; esto es, i^2 es la identidad en E e $i(e) \neq e$ para todo $e \in E$.
- Para la aplicación $\tau : V \times V \rightarrow V \times V$ dada por $\tau(x, y) = (y, x)$, se tiene la igualdad $\tau \circ \nu = \nu \circ i$.

A partir de la aplicación de incidencia ν se derivan dos aplicaciones $o, t : E \rightarrow V$ definidas como las composiciones $o = \pi_1 \circ \nu$ y $t = \pi_2 \circ \nu$, donde $\pi_1, \pi_2 : V \times V \rightarrow V$ son las proyecciones $\pi_1(x, y) = x$ y $\pi_2(x, y) = y$. De esta manera ν se escribirá a partir de ahora como $\nu(e) = (o(e), t(e))$, donde $o(e)$ y $t(e)$ se llaman *origen* y *término* de e , respectivamente. Como consecuencia se tiene:

$$(o(i(e)), t(i(e))) = \nu(i(e)) = \tau(\nu(e)) = \tau(o(e), t(e)) = (t(e), o(e));$$

esto es, $o(i(e)) = t(e)$ y $t(i(e)) = o(e)$.

Notación. Para toda arista $e \in E$, se escribirá $\bar{e} := i(e)$.

Definición 1.3.2. Dos vértices $x, y \in V$ son *adyacentes* si $o(e) = x$ y $t(e) = y$ para alguna arista $e \in E$. Si $o(e) = t(e)$, se dice que e es una *arista-lazo*; y si $o(e_1) = o(e_2)$ y $t(e_1) = t(e_2)$ para dos aristas $e_1 \neq e_2$, se dice que e_1 y e_2 son *aristas paralelas*. Un *grafo simple* es aquel que no posee aristas paralelas y ninguna de sus aristas es una arista-lazo.

La definición abstracta anterior permite mantener en la estructura las dos posibles opciones de dirigir u orientar las aristas de un grafo. A estos grafos se les llaman *grafos dirigidos*. Si queremos representar geoméricamente un grafo dirigido tal y como se ha definido, deberíamos tener en cuenta que en nuestro grafo por cada arista $e = (o(e), t(e))$ siempre aparece la arista $\bar{e} = (o(\bar{e}), t(\bar{e})) = (t(e), o(e))$, por lo que una representación geométrica debería recoger ambas aristas. En la Figura 1.3.1 se observa cómo serían estos grafos. Para simplificar la representación geométrica de un grafo, se dibuja por cada par (e, \bar{e}) sólo una arista con una flecha para indicar una elección de origen y término y la arista inversa queda implícita al poderse recorrer la arista dibujada en sentido inverso. Esta representación se llamará *grafo orientado*.

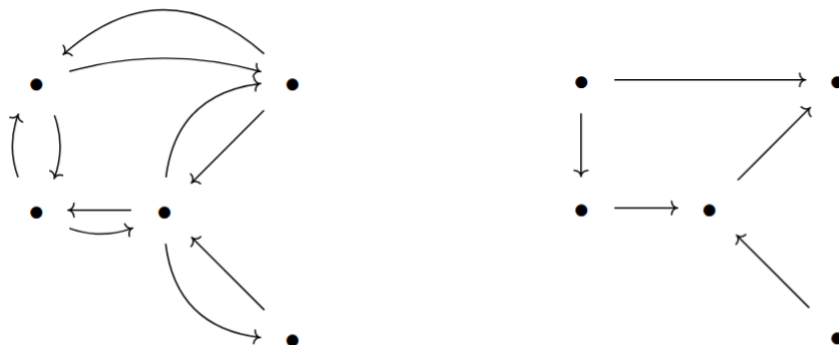


Figura 1.3.1. A la izquierda, ejemplo de grafo. A la derecha, un grafo orientado.

Dado un grafo $X = (V, E)$ se observa que existe una acción del grupo $(\mathbb{Z}_2, +)$ sobre el conjunto de aristas E dada por $\psi : \mathbb{Z}_2 \times E \rightarrow E$ con $\psi(0, e) = e$ y $\psi(1, e) = \bar{e}$. Se llaman *aristas no dirigidas* a los elementos del espacio orbital E/\mathbb{Z}_2 . Notar además que esta acción es solo sobre las aristas y no sobre los vértices. El grafo *no dirigido* subyacente a X es el grafo con V como conjunto de vértices y una arista no dirigida por cada par (e, \bar{e}) de aristas de X .

En lo que sigue trabajaremos con grafos dirigidos, a no ser que se diga lo contrario.

Definición 1.3.3. *Subgrafo.* Sea $X = (V, E)$ un grafo y sean $V_1 \subseteq V$, $E_1 \subseteq E$. Si se cumple que $\nu(e_1) \in V_1 \times V_1$ y $\bar{e}_1 \in E_1$ para todo $e_1 \in E_1$, entonces $X_1 = (V_1, E_1)$ es un grafo y se dice que es un subgrafo de X . Se escribe $X_1 \subseteq X$.

Definición 1.3.4. *Grado.* Sea $X = (V, E)$ un grafo. Dado $x \in V$, el grado de x , denotado por $\deg(x)$, es el número de elementos de E_x , donde $E_x = \{e \in E : o(e) = x\}$ es el conjunto de aristas con origen en x . El grado de X es $d = \max\{\deg(x) | x \in V\}$ si tal número es finito.

Definición 1.3.5. *Grafo regular.* Grafos en los que todos sus vértices tienen el mismo grado.

Definición 1.3.6. *Grafo bipartito.* Un grafo $X = (V, E)$ se dice bipartito si V se puede poner como la unión de dos subconjuntos $V_1, V_2 \subseteq V$ tales que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, de forma que las aristas en E sólo pueden unir vértices de V_1 con vértices de V_2 .

Este tipo de grafo aparece mucho en la cristalografía, pues muchos cristales poseen estructuras que consisten en dos tipos de átomos. Llamando (1) al primer tipo y (2) al segundo, se obtienen así dos conjuntos disjuntos, uno formado por vértices de tipo (1) y otro formado por vértices de tipo (2), y cuya unión es el total de la estructura del cristal.

Vayamos ahora a estudiar las relaciones que se pueden establecer entre grafos. Estas relaciones son los denominados *morfismos*¹. Sean $X_1 = (V_1, E_1)$, $X_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos, entonces un morfismo $\phi : X_1 \rightarrow X_2$ es un par de aplicaciones $\phi = (\phi_V, \phi_E)$, con $\phi_V : V_1 \rightarrow V_2$ y $\phi_E : E_1 \rightarrow E_2$, cumpliendo para $e \in E_1$:

1. $(\phi_V \times \phi_V) \circ \nu_1 = \nu_2 \circ \phi_E$. Esto es, $\nu_2(\phi_E(e)) = (\phi_V \times \phi_V) \circ \nu_1(e) = (\phi_V(o_1(e)), \phi_V(t_1(e)))$
o, equivalentemente, $o_2(\phi_E(e)) = \phi_V(o_1(e))$ y $t_2(\phi_E(e)) = \phi_V(t_1(e))$.
2. $i_2 \circ \phi_E = \phi_E \circ i_1$. Esto es, $i_2(\phi_E(e)) = \phi_E(i_1(e))$.

Las aplicaciones o_k, t_k, i_k y ν_k son las aplicaciones origen, término, inversión e incidencia del grafo X_k ($k = 1, 2$).

Nota 1.3.7. Es inmediato comprobar que la imagen por ϕ de X_1 , $\phi(X_1) = (\phi_V(V_1), \phi_E(E_1))$, es un subgrafo de X_2 .

Un *isomorfismo* de grafos $\phi : X_1 \rightarrow X_2$ es un morfismo de grafos donde tanto ϕ_V como ϕ_E son aplicaciones biyectivas. Se dice así que los dos grafos son *isomorfos*. Un *automorfismo* es un isomorfismo de un grafo X en sí mismo. Todos los automorfismos de X forman un grupo,

¹Aplicaciones que van entre estructuras matemáticas del mismo tipo y que preservan dichas estructuras.

denotado por $\text{Aut}(X)$. La operación sería la composición de morfismos de manera natural y el elemento identidad es el automorfismo identidad $\text{id} : X \rightarrow X$ con $\text{id} = (\text{id}_V : V \rightarrow V, \text{id}_E : E \rightarrow E)$.

Notación. Por abuso de notación, escribimos ϕ tanto para ϕ_V como para ϕ_E .

1.4 Grafos cocientes.

Los cristales se pueden representar como un grafo infinito y periódico en el plano o el espacio. Para estudiarlos se consideran acciones de grupos sobre ellos que respeten su estructura. Decimos pues, que un grupo G actúa sobre un grafo $X = (V, E)$ si existe un homomorfismo $\phi : G \rightarrow \text{Aut}(X)$. Esto quiere decir que G actúa de manera compatible sobre los conjuntos V y E ; es decir, que si como es habitual se escribe la acción como gx para $g \in G$, debe entonces cumplirse

$$t(ge) = gt(e) \quad o(ge) = go(e) \quad \tau(g(x, y)) = g\tau((x, y)),$$

para todo $e \in E$ y para todo $x, y \in V$ adyacentes. Dicho en otras palabras, se impone que $o : E \rightarrow V, t : E \rightarrow V$ sean aplicaciones G -equivariantes. De esta forma, se tiene que tanto V como E son G -conjuntos.

Definición 1.4.1. Se dice que G actúa sobre X *sin inversión* si para cualquier $g \in G$, no existe $e \in E$ tal que $ge = \bar{e}$.

Veamos ahora que los espacios orbitales de la acción de un grupo sin inversión da lugar a un nuevo grafo.

Teorema 1.4.2. *Sea $X = (V, E)$ un grafo y G un grupo que actúa sobre X sin inversión. Sean entonces $V_1 = V/G$ y $E_1 = E/G$ los espacios orbitales de los vértices y aristas de X , respectivamente. Entonces existe una única estructura de grafo $X_1 = (V_1, E_1)$ que hace que las proyecciones canónicas $\phi = (\pi_V, \pi_E)$, con $\pi_V : V \rightarrow V_1$ y $\pi_E : E \rightarrow E_1$, definan un morfismo de grafos $\phi : X \rightarrow X_1$.*

Demostración. Denotemos por $[x]_V$ y $[e]_E$ las órbitas en V_1 y E_1 , respectivamente. Se definen $i_1 : E_1 \rightarrow V_1 \times V_1$ y $\nu_1 : E_1 \rightarrow E_1$ como $\nu_1([e]) = ([o(e)]_V, [t(e)]_V)$ e $i_1([e]) = [i(e)]$. Tenemos que ver que estas aplicaciones están bien definidas y cumplen las dos condiciones de la definición de grafo.

Sea e' otro representante de $[e]_E$. Entonces existe un $g \in G$ con $e' = ge$ de modo que $o(e') = o(ge) = go(e)$ y $t(e') = t(ge) = gt(e)$, luego $[o(e')]_V = [o(e)]_V$ y $[t(e')]_V = [t(e)]_V$. Igualmente, $i(e') = i(ge) = gi(e)$, por lo que $[i(e')] = [i(e)]$. Tenemos así que las aplicaciones ν_1 e i_1 están bien definidas.

Queda ver que cumplen las condiciones de aplicaciones de incidencia e inversión para X_1 . Es claro que i_1 es una inversión por serlo i , además por hipótesis no tiene punto fijo ya que $i_1([e]) = [i(e)] = [e]$ nos lleva a que existe un $g \in G$ con $ge = i(e)$. Finalmente, para la aplicación

$\tau_1 : V_1 \times V_1 \rightarrow V_1 \times V_1$ dada por $\tau([x]_V, [y]_V) = ([y]_V, [x]_V)$ se tiene:

$$\nu_1 \circ i_1([e]_E) = ([o(i_1(e))]_V, [t(i_1(e))]_V) = ([t(e)]_V, [o(e)]_V) = \tau_1([o(e)]_V, [t(e)]_V) = \tau_1 \circ \nu_1([e]_E).$$

Veamos ahora que $\phi = (\pi_V, \pi_E)$ es un morfismo de grafos. En efecto,

1. $o_1(\pi_E(e)) = o_1([e]) = [o(e)] = \pi_V(o(e))$.
2. $t_1(\pi_E(e)) = t_1([e]) = [t(e)] = \pi_V(t(e))$.
3. $i_1(\pi_E(e)) = i_1([e]) = [i(e)] = \pi_E(i(e))$.

Además, esta estructura de grafo es la única que hace de ϕ un morfismo de grafos. Supongamos que $\hat{\nu} : E_1 \rightarrow V_1 \times V_1$ e $\hat{i} : E_1 \rightarrow E_1$ es otra estructura de grafo sobre $X_1 = (V_1, E_1)$ tal que $\phi : X \rightarrow X_1$ es morfismo de grafos. Entonces, por la definición y por haber comprobado que $\phi : X \rightarrow X_1$ ya es morfismo de grafos para la estructura de grafo sobre X_1 anterior, tenemos que

$$\hat{\nu}([e]_E) = \hat{\nu} \circ \phi_E(e) = (\phi_V \times \phi_V) \circ \nu(e) = \nu_1(\pi_E(e)) = \nu_1([e]_E)$$

y

$$\hat{i}([e]_E) = \hat{i} \circ \phi_E(e) = \phi_E \circ i(e) = (i_1 \circ \phi)_E(e) = i_1([e]_E),$$

por tanto $\hat{\nu} = \nu_1$ y $\hat{i} = i_1$.

□

Al grafo $X_1 = (V_1, E_1)$ se le llama *grafo cociente* de X por la acción de G y al morfismo ϕ se le llama *morfismo canónico*.

2. Homología de grafos.

2.1 Caminos en grafos.

Definición 2.1.1. *Camino.* Un camino c de longitud n en un grafo $X = (V, E)$ es una sucesión $c = \{e_1, \dots, e_n\}$ con $e_i \in E$ y cumpliendo que $t(e_i) = o(e_{i+1})$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. Se denota por $o(c)$ o $c(0)$ al *origen del camino*, $o(e_1)$; por $t(c)$ o $c(n)$ al *final del camino*, $t(e_n)$; y en general, $c(k) = t(e_k)$. Si $o(c) = t(c)$, se dice que es un *camino cerrado* o *lazo*.

Cada vértice $x \in V$ se puede identificar con el camino constante c_x de longitud cero. Por otro lado, dado un camino $c = \{e_1, \dots, e_n\}$, podemos tomar $\bar{c} = i(c)$ como el *camino inverso* de c dado por $\bar{c} = \{\bar{e}_n, \dots, \bar{e}_1\}$.

Definición 2.1.2. *Subcamino.* Dado un camino $c = \{e_1, \dots, e_n\}$, se llama subcamino de c a cualquier camino $sc = \{e_i, \dots, e_j\}$, con $1 \leq i \leq j \leq n$.

Definición 2.1.3. *Grafo conexo.* Un grafo es conexo si para cualquier par de vértices $x_1, x_2 \in V$, se puede encontrar un camino c tal que $o(c) = x_1$ y $t(c) = x_2$. Es decir, siempre hay un camino que conecta a dos vértices cualesquiera del grafo. Un grafo no conexo se llama *disconexo*.

Vamos a suponer que los grafos con los que trabajamos son conexos, a no ser que se diga lo contrario.

Definición 2.1.4. *Yuxtaposición de caminos.* Dados dos caminos $c_1 = \{e_1^1, \dots, e_n^1\}$ y $c_2 = \{e_1^2, \dots, e_m^2\}$ tales que $t(c_1) = o(c_2)$, se define la yuxtaposición de ellos como el camino $c = c_1 * c_2 = \{e_1^1, \dots, e_n^1, e_1^2, \dots, e_m^2\}$. Nótese que $o(c) = o(c_1)$ y $t(c) = t(c_2)$.

Definición 2.1.5. *Camino reducido.* Es un camino $c = \{e_1, \dots, e_n\}$ tal que $e_i \neq \bar{e}_{i+1}$ para todo $i = 1, \dots, n-1$.

Definición 2.1.6. *Ciclo.* Llamamos ciclo a un camino c si es un camino reducido cerrado que no pasa dos veces por el mismo vértice a excepción del primero y el último, que serían el mismo. Dicho de otra forma, si $c = \{e_1, \dots, e_n\}$ es un ciclo, entonces es un camino reducido cerrado que cumple que $o(e_i) \neq o(e_j)$ para todo $i = 2, \dots, n, j = 2, \dots, n$ e $i \neq j$.

Definición 2.1.7. *Árbol.* Es un grafo sin ciclos. Un *subárbol* de un grafo X es un subgrafo de X que es un árbol.

Definición 2.1.8. *Árbol de expansión.* Es un subárbol de un grafo X que contiene a todos los vértices de X .



Figura 2.1.1. A la izquierda en verde, un ciclo. A la derecha en rojo, un árbol de expansión.

Lema 2.1.9. Sea $X = (V, E)$ un grafo. Son equivalentes:

1. X es un árbol.
2. Para cualquier par de vértices $x, y \in V$, existe un único camino reducido uniendo x con y .

Demostración.

1 \rightarrow 2 | Sea X un árbol. Como estamos trabajando con grafos conexos se tiene que al menos existe un camino, del cuál se puede obtener (ver Sección 2.2, caminos homotópicos) un camino reducido, que une cualesquiera dos vértices de X . Veamos que no puede existir más de uno. Por reducción al absurdo, supongamos que existe un par de vértices x_1, x_2 para los que hay dos caminos, c_1 y c_2 , entre ellos. Entonces podemos tomar $o(c_1) = x_1, t(c_1) = x_2$ y $o(c_2) = x_2, t(c_2) = x_1$. De esta forma, podemos formar la yuxtaposición $c = c_1 * c_2$ de manera que $o(c) = t(c) = x_1$. Hemos conseguido así un camino reducido cerrado del cuál se puede obtener (ver Sección 2.2, caminos homotópicos) un ciclo en X , y esto es un absurdo.

2 \rightarrow 1 | Supongamos que para cualquier par $x, y \in V$, existe un único camino reducido c uniendo x con y . Por reducción al absurdo, supongamos que X no es un árbol, luego podemos encontrar un ciclo en él. Entonces para cualquier par de vértices de ese ciclo, tendríamos dos caminos reducidos distintos que los unirían, pero esto contradiría la hipótesis. Luego no pueden existir ciclos y por definición X es un árbol.

□

2.2 Homotopía de grafos.

Es bien conocida la versión continua de la homotopía en un espacio topológico. Nosotros vamos a ver la versión combinatoria para grafos. Ambas son equivalentes por el teorema de aproximación simplicial, pero no se verá en este trabajo. Puede consultarse en [3].

Sean c, c' dos caminos de un grafo $X = (V, E)$ tales que $o(c) = o(c')$ y $t(c) = t(c')$. Entonces escribimos $c \mapsto c'$ si $c = c'$ o existe un par de aristas consecutivas e_i, e_{i+1} en c con $e_{i+1} = \bar{e}_i$ tales que c' se obtiene a partir de c eliminando e_i y e_{i+1} . En particular, si $c = \{e, \bar{e}\}$ con $o(c) = x$, entonces $c \mapsto c_x$.

Dados $x, y \in V$, denotamos por $C(x, y)$ al conjunto de caminos entre x e y .

Definición 2.2.1. Lazos con origen en x . Son los caminos del conjunto $C(x, x)$, con $x \in V$.

Definición 2.2.2. Caminos homotópicos. Sean c, c' caminos en $C(x, y)$. Se dice que son caminos homotópicos, y se escribe $c \sim c'$, si existe un número finito de caminos $\{c_1, \dots, c_n\} \subseteq C(x, y)$ tales que $c = c_1, c' = c_n$ y $c_{i+1} \mapsto c_i$ o $c_i \mapsto c_{i+1}$.

Lema 2.2.3. La relación \sim anterior es de equivalencia.

Demostración.

- Reflexiva. Sea $c \in C(x, y)$. Entonces $c \sim c$ pues $c \mapsto c$ por definición.
- Simétrica. Sean $c, c' \in C(x, y)$. Si $c \sim c'$, entonces existe un conjunto de caminos $\{c_1, \dots, c_n\} \subseteq C(x, y)$ tales que $c = c_1$, $c' = c_n$ y $c_{i+1} \mapsto c_i$ o $c_i \mapsto c_{i+1}$. Luego $c' \sim c$ tomando el conjunto $\{c_n, \dots, c_1\}$.
- Transitiva. Sea $c \sim c'$ por el conjunto $\{c_1, \dots, c_n\}$ y sea $c' \sim c''$ por el conjunto $\{l_1, \dots, l_k\}$. Entonces $c \sim c''$ tomando el conjunto $\{c_1, \dots, c_n, l_1, \dots, l_k\}$.

□

A estas clases de equivalencia se les llama *clases de homotopía*. Veamos algunas propiedades importantes.

Lema 2.2.4. *Se cumple que:*

1. Si $c \sim c'$ y $d \sim d'$ para $c, c' \in C(x, y)$ y $d, d' \in C(y, z)$, entonces $c * d \sim c' * d'$.
2. $c * \bar{c} \sim c_x$, donde $x = o(c)$.
3. Cada clase de homotopía posee un único camino reducido.

Demostración.

1. Podemos suponer que $c \mapsto c'$ o $c' \mapsto c$ y que $d \mapsto d'$ o $d' \mapsto d$. Si $c \mapsto c'$, entonces $c * d \mapsto c' * d$; y si $c' \mapsto c$, entonces $c' * d \mapsto c * d$. Luego si $c \sim c'$, se tiene que $c * d \sim c' * d$. Análogamente, si $d \mapsto d'$, entonces $c * d \mapsto c * d'$; y si $d' \mapsto d$, entonces $c * d' \mapsto c * d$. Luego si $d \sim d'$, se tiene que $c * d \sim c * d'$. Concluimos por transitividad que si $c \sim c'$ y $d \sim d'$, entonces $c * d \sim c' * d'$.
2. Si $c = \{e_1, \dots, e_n\}$, entonces $\bar{c} = \{\bar{e}_n, \dots, \bar{e}_1\}$. Por tanto $c_n = c * \bar{c} = \{e_1, \dots, e_n, \bar{e}_n, \dots, \bar{e}_1\}$ y de esta forma $c_n \sim c_{n-1}$ donde $c_{n-1} = \{e_1, \dots, e_{n-1}, \bar{e}_{n-1}, \dots, \bar{e}_1\}$. Volviendo a repetir este proceso $n-1$ veces, llegamos a que $c_n \sim c_1$ donde $c_1 = \{e_1, \bar{e}_1\}$. Como $c_1 \sim c_x$ y utilizando que \sim es relación de equivalencia, tenemos que $c * \bar{c} \sim c_x$.
3. Supongamos que dada una clase de homotopía existan dos caminos reducidos diferentes c y c' . Como $c \sim c'$, entonces debe existir un número finito de caminos $\{c_1, \dots, c_n\}$ tales que $c = c_1$, $c' = c_n$ y $c_{i+1} \mapsto c_i$ o $c_i \mapsto c_{i+1}$. Como no podemos pasar de uno a otro eliminando aristas consecutivas una la inversa de la otra (pues son reducidos), necesariamente $c = c_1 = \dots = c_n = c'$.

□

Lema 2.2.5. *Todo lazo en un árbol T es homotópicamente equivalente al camino constante.*

Demostración. Sea $c = \{e_1, \dots, e_n\}$ un lazo, es decir, $o(c) = t(c) = x_0 = o(e_1) = t(e_n)$. Sea $x_1 = t(e_1)$. Sabemos por el Lema 2.1.9 que al ser T un árbol, sólo hay un único camino reducido entre dos vértices cualesquiera de T . Luego si tomamos $c_1 = \{e_2, \dots, e_n\}$ ($o(c_1) = x_1$ y $t(c_1) = x_0$), necesariamente tiene que ser homotópico a la arista \bar{e}_1 . Por tanto, c se reduce

homotópicamente a $e_1\bar{e}_1$ y este a su vez al camino constante c_{x_0} .

□

Notación. Un camino c con origen en x y término en y se escribirá $c : x \rightarrow y$. Para simplificar la notación, el camino $c = \{e_1, \dots, e_n\}$ se denotará simplemente por $c = e_1 \cdots e_n$. De la misma forma, la yuxtaposición de los caminos c y c' se denotará por cc' .

2.3 Homología de grafos.

Vamos a introducir la homología para ver cómo definir objetos algebraicos a partir de la relación de adyacencia entre vértices y aristas de un grafo. La definición de homología se puede hacer para poliedros de dimensiones arbitrarias, pero nosotros vamos a trabajar con grupos de homología exclusivamente para el caso de grafos, cuya descripción es más sencilla y será la que necesitamos únicamente.

Empecemos con algunas definiciones. Sea $X = (V, E)$ un grafo posiblemente finito.

Definición 2.3.1. *0-cadena con coeficientes enteros.* Es cualquier suma $\sum_{x \in V} z_x x$, con $z_x \in \mathbb{Z}$ y donde solo una cantidad finita de z_x son no nulos. Además debe cumplirse:

1. $\sum_{x \in V} z_x x = 0 \iff z_x = 0$, para todo $x \in V$.
2. $\sum_{x \in V} z_x x \pm \sum_{x \in V} w_x x = \sum_{x \in V} (z_x \pm w_x) x$.

Es decir, estamos considerando el grupo abeliano libre con base el conjunto de vértices de X . Lo denotaremos por $C_0(X, \mathbb{Z})$.

De la misma forma, podemos definir una suma para las aristas del grafo.

Definición 2.3.2. *1-cadena con coeficientes enteros.* Es cualquier suma $\sum_{e \in E} z_e e$, con $z_e \in \mathbb{Z}$ y donde solo una cantidad finita de z_e son no nulos. Además se impone la relación $\bar{e} = -e$; es decir, la 1-cadena $-e$ se identifica con la 1-cadena \bar{e} .

Al conjunto de todas las 1-cadenas se denotará por $C_1(X, \mathbb{Z})$.

Obsérvese que de la definición se sigue que $C_1(X, \mathbb{Z})$ es el cociente del grupo abeliano libre $\mathbb{Z}(E)$, con base E , por el subgrupo H generado por las sumas $e + \bar{e}$, $e \in E$. Así, $C_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(E)/H$ es también un grupo abeliano libre con una base $E^0 \subseteq E$, formada al elegir una orientación para cada arista de E . De esta manera, podemos escribir de forma única cada 1-cadena; es decir, dada $\alpha = \sum_{e \in E} z_e e$, esta se puede expresar como

$$\sum_{e \in E} z_e e = \sum_{e \in E^0} (z_e - z_{\bar{e}}) e$$

A partir de ahora escribiremos directamente $\alpha = \sum_{e \in E^0} z_e e$.

De forma natural, se define un homomorfismo $\rho : \mathbb{Z}(E) \rightarrow C_0(X, \mathbb{Z})$ dado por $\rho(e) = t(e) - o(e)$, para cada $e \in E$. Como $\rho(\bar{e}) = t(\bar{e}) - o(\bar{e}) = o(e) - t(e) = -\rho(e)$, se sigue que $\rho(H) = 0$ y por tanto se induce un homomorfismo (que seguiremos llamando igual) $\rho : C_1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow C_0(X, \mathbb{Z})$, llamado *operador borde*.

Se llama *1-grupo de homología* de X , y se denota por $H_1(X, \mathbb{Z})$, a $\text{Ker } \rho = \{\alpha \in C_1(X, \mathbb{Z}) : \rho(\alpha) = 0\}$. Los elementos de $H_1(X, \mathbb{Z})$ se llaman *1-ciclos* o simplemente *ciclos*. De la misma forma, se define el *0-grupo de homología* de X como el cociente $H_0(X, \mathbb{Z}) = C_0(X, \mathbb{Z})/\text{Im } \rho$.

Nota 2.3.3. Obsérvese que, para una orientación E^0 del grafo se tiene

$$\alpha = \sum_{e \in E^0} z_e e \in H_1(X, \mathbb{Z}) \iff \rho(\alpha) = 0 \iff \sum_{\substack{e \in E^0 \\ t(e)=x}} z_e = \sum_{\substack{e \in E^0 \\ o(e)=x}} z_e, \text{ para todo } x \in V \quad (\Delta)$$

De esta forma si el grafo $X = (V, E)$ representa un circuito de tuberías donde las aristas de E simbolizarían los distintos tubos de C y los vértices de V los puntos de intersección entre los tubos, el principio de Bernoulli nos dice que la energía que posee un cierto fluido que se está moviendo a lo largo de C permanece constante. Así, si el coeficiente $z_e \in \mathbb{Z}$ en $\sum_{e \in E^0} z_e e$ se considera como la energía que pasa por la tubería representada por la arista e , la propiedad anterior (Δ) no es más que el principio de Bernoulli en el caso de energía nula en cada vértice.

Sea $c = e_1 \cdots e_n$ un camino en un grafo $X = (V, E)$ y definamos la *1-cadena asociada* a c como la suma $\langle c \rangle := e_1 + \cdots + e_n$. Observar que la 1-cadena asociada al camino constante es 0. El siguiente lema nos dice que las 1-cadenas asociadas a lazos deben ser ciclos.

Lema 2.3.4. *Si c es un lazo en X , se cumple que $\langle c \rangle \in H_1(X, \mathbb{Z})$.*

Demostración. Por ser c un camino se tiene que $t(e_i) = o(e_{i+1})$ para todo $i = 1, \dots, n-1$, y por ser cerrado $o(e_1) = t(e_n)$. Luego aplicando el homomorfismo borde a su 1-cadena asociada, nos queda que $\rho(\langle c \rangle) = \sum_{i=1}^n (t(e_i) - o(e_i))$, y reordenando los términos del sumatorio, $\rho(\langle c \rangle) = t(e_n) - o(e_1) + \sum_{i=1}^{n-1} (t(e_i) - o(e_{i+1})) = 0$. Por tanto, $\langle c \rangle \in \text{Ker } \rho = H_1(X, \mathbb{Z})$. □

Veamos ahora en qué se traduce en el 0-grupo de homología la conexión en un grafo.

Lema 2.3.5. *Dado X conexo, se tiene que $H_0(X, \mathbb{Z})$ es isomorfo a \mathbb{Z} .*

Demostración. Empezamos definiendo el homomorfismo $\varepsilon : C_0(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ dado por $\varepsilon(\sum_{x \in V} z_x x) =$

$\sum_{x \in V} z_x$ (suele llamarse *operador aumento*), que es la extensión lineal de $\varepsilon(x) = 1$ para todo $x \in V$.

En particular, ε es sobreyectivo.

Como $H_0(X, \mathbb{Z}) = C_0(X, \mathbb{Z})/\text{Im } \rho$, veamos que $\text{Im } \rho = \text{Ker } \varepsilon$ y así por el Primer teorema de isomorfía, $H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Se tiene siempre que $\text{Im } \rho \subseteq \text{Ker } \varepsilon$ pues $\text{Im } \rho$ está generada por $\rho(e) = t(e) - o(e)$ para todo $e \in E^0$, y por tanto $\varepsilon(\rho(e)) = 1 - 1 = 0$.

Por otro lado, al ser X conexo se tiene que $\text{Ker } \varepsilon \subseteq \text{Im } \rho$. En efecto, dado cualquier $a = \sum_{x \in V} z_x x \in \text{Ker } \varepsilon$, tenemos que $\sum_{x \in V} z_x = 0$. Sea $x_0 \in V$ un vértice fijado y para cada $x \in V$, tomamos $\beta_x = e_1 \cdots e_m$ un camino entre x_0 y x ; es decir, se tiene para la 1-cadena asociada que $\rho(\langle \beta_x \rangle) = \sum_{e_j \in \beta_x} (t(e_j) - o(e_j)) = x - x_0$ en $C_0(X, \mathbb{Z})$. Entonces para $c = \sum_{x \in V} z_x \langle \beta_x \rangle$, tenemos que $\rho(c) = \sum_{x \in V} z_x \rho(\langle \beta_x \rangle) = \sum_{x \in V} z_x (x - x_0) = \sum_{x \in V} z_x x - (\sum_{x \in V} z_x) x_0 = a - 0 = a$. Luego $a \in \text{Im } \rho$.

□

Nota 2.3.6. Aunque vamos a seguir en $H_1(X, \mathbb{Z})$, se puede trabajar también con $H_1(X, \mathbb{R})$, simplemente cambiando en las definiciones anteriores \mathbb{Z} por \mathbb{R} . Hay que tener en cuenta entonces que $H_1(X, \mathbb{R})$ ahora es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

Sea ahora un morfismo entre grafos $\phi = (\phi_V, \phi_E) : X_1 \rightarrow X_2$, donde $X_1 = (V_1, E_1)$ y $X_2 = (V_2, E_2)$. Se inducen los homomorfismos

$$\phi_0 : C_0(X_1, \mathbb{Z}) \rightarrow C_0(X_2, \mathbb{Z})$$

y

$$\phi_1 : \mathbb{Z}(E_1) \rightarrow \mathbb{Z}(E_2)$$

como las extensiones lineales de $\phi_V(x) = \phi_0(x)$ ($x \in V_1$) y de $\phi_E(e) = \phi_1(e)$ ($e \in E_1$), respectivamente.

Ahora bien, ϕ_1 lleva el subgrupo $H_1 \subseteq \mathbb{Z}(E_1)$, generado por las sumas $e + \bar{e}$ ($e \in E_1$), en el subgrupo $H_2 \subseteq \mathbb{Z}(E_2)$, generado por las sumas $e + \bar{e}$ ($e \in E_2$). En efecto, $\phi_1(e + \bar{e}) = \phi_1(e) + \phi_1(\bar{e}) = \phi_E(e) + \overline{\phi_E(e)} = \phi_E(e) + \overline{\phi_E(e)} = \phi_1(e) + \overline{\phi_1(e)}$. De esta forma se induce el homomorfismo (que seguimos llamando igual):

$$\phi_1 : C_1(X_1, \mathbb{Z}) \rightarrow C_1(X_2, \mathbb{Z}).$$

Así mismo se observa que si tomamos una orientación E_1^0 en X_1 , ϕ_1 queda determinado por la extensión lineal de $\phi_E(e) = \phi_1(e)$ para cada arista de E_1^0 .

Para los operadores borde, $\rho_i : C_1(X_i, \mathbb{Z}) \rightarrow C_0(X_i, \mathbb{Z})$, $i = 1, 2$, tenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_1(X_1, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\rho_1} & C_0(X_1, \mathbb{Z}) \\ \phi_1 \downarrow & & \downarrow \phi_0 \\ C_1(X_2, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\rho_2} & C_0(X_2, \mathbb{Z}) \end{array}$$

es conmutativo. En efecto, para toda arista $e \in E_1^0$ y teniendo en cuenta cómo están definidos los homomorfismos, se tiene que

$$\begin{aligned}\phi_0(\rho_1(e)) &= \phi_0(t(e) - o(e)) = \phi_0(t(e)) - \phi_0(o(e)) = \phi_V(t(e)) - \phi_V(o(e)) \\ &= t(\phi_E(e)) - o(\phi_E(e)) = \rho_2(\phi_E(e)) = \rho_2(\phi_1(e))\end{aligned}$$

En particular, ϕ_1 lleva $\text{Ker } \rho_1 = H_1(X_1, \mathbb{Z})$ en $\text{Ker } \rho_2 = H_1(X_2, \mathbb{Z})$. Así, del morfismo $\phi : X_1 \rightarrow X_2$ se inducen los homomorfismos (que llamaremos igual por abuso de notación) $\phi_* : H_1(X_1, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X_2, \mathbb{Z})$ y $\phi_* : H_0(X_1, \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(X_2, \mathbb{Z})$, dados por $\phi_*(\alpha) = \phi_1(\alpha)$ para todo $\alpha \in H_1(X_1, \mathbb{Z})$ y $\phi_*([x]) = [\phi_0(x)]$ para $[x] \in H_0(X_1, \mathbb{Z})$.

Ahora pasemos a describir el grupo $H_1(X, \mathbb{Z})$ mediante lazos. Para ello, empecemos estableciendo la siguiente relación de equivalencia entre caminos.

Definición 2.3.7. *Relación de homología.* Sean $c_1 = e_1 \cdots e_n$ y c_2 caminos en $C(x, y)$. Se dicen que son caminos *homólogos* si podemos obtener c_2 a partir de c_1 gracias a una secuencia de las siguientes operaciones:

- **Cancelación:** añadir o eliminar aristas consecutivas e_{i+1}, e_i de c_1 que cumplan que $e_{i+1} = \bar{e}_i$.
- **Transposición:** reemplazar subcaminos $e_i \cdots e_j e_{j+1} \cdots e_k$ en c_1 por $e_{j+1} \cdots e_k e_i \cdots e_j$, donde $e_i \cdots e_j$ y $e_{j+1} \cdots e_k$ son subcaminos cerrados con origen en el mismo vértice.

Observar que la cancelación es justamente la operación que define la relación de homotopía. En particular, todo lazo es homólogo a su lazo reducido.

Notación. Usaremos \sim_h para la relación de homología. Además, para denotar la clase de homología de un camino c , escribiremos $\llbracket c \rrbracket$.

Lema 2.3.8. *Dado un grafo X y un lazo $c : x_0 \rightarrow x_0$, se cumple que su ciclo asociado $\langle c \rangle$ es nulo si y solo si $c \sim_h c_{x_0}$.*

Demostración.

\Rightarrow Sea $c = e_1 \cdots e_n$ con $o(c) = o(e_1) = x_0 = t(c) = t(e_n)$. Elegimos un árbol de expansión $T \subseteq X$ y para cada $i = 1, \dots, n$, tomamos el único camino reducido en T entre x_0 y $o(e_i)$, al cual llamamos c_i . Además definimos c_{n+1} como el camino constante c_{x_0} . Cambiamos ahora c por el lazo

$$\beta = c_1 e_1 \bar{c}_2 c_2 e_2 \bar{c}_3 c_3 e_3 \cdots \bar{c}_n c_n e_n \bar{c}_{n+1}.$$

Teniendo en cuenta que $c_1 = \bar{c}_{n+1}$ (pues ambos coinciden con el camino constante c_{x_0}), se tiene que $\beta_i = c_i e_i \bar{c}_{i+1}$ es un lazo en x_0 . Además, β y c son homotópicos pues cada c_i se cancela con \bar{c}_i para $i = 2, \dots, n$. Como $\langle c \rangle = 0$ en $H_1(X, \mathbb{Z}) \subseteq C_1(X, \mathbb{Z})$, el número de e_i en c debe ser el mismo que el de \bar{e}_i ; y por tanto, hay tantos β_i como $\bar{\beta}_i = c_{i+1} \bar{e}_i \bar{c}_i$ en β . Tomando transposiciones en $\beta = \beta_1 \cdots \beta_n$, podemos hacer que cada β_i aparezca junto a su inverso $\bar{\beta}_i$ y así se cancelen haciendo que β sea homólogo a c_{x_0} y por tanto, también lo sea c .

⇐ Supongamos que $c \sim_h c_{x_0}$. En la definición de caminos homólogos, al hacer cualquiera de las dos posibilidades para pasar de un camino a otro, la 1-cadena asociada a cada uno de ellos no cambia. Por tanto si dos caminos son homólogos, sus 1-cadenas son la misma, y en particular si $c \sim_h c_{x_0}$, se tiene que $\langle c \rangle = 0$. □

Lema 2.3.9. Sean dos caminos $c_1, c_2 : x \rightarrow y$. Entonces $\langle c_1 \rangle = \langle c_2 \rangle$ si y solo si $c_1 \sim_h c_2$.

Demostración. Tenemos que $\langle c_1 \rangle = \langle c_2 \rangle$ si y solo si $\langle c_1 \rangle - \langle c_2 \rangle = \langle c_1 \bar{c}_2 \rangle = 0$ si y solo si $c_1 \bar{c}_2 \sim_h c_{x_0}$, por el Lema 2.3.8. Entonces $c_1 \bar{c}_2 c_2 \sim_h c_2$, y como $\bar{c}_2 c_2 \sim_h c_{x_0}$, se tiene que $c_1 \sim_h c_1 \bar{c}_2 c_2 \sim_h c_2$. □

Lema 2.3.10. Dado T un árbol, se tiene que $H_1(T, \mathbb{Z}) = \{0\}$.

Demostración. Bastaría comprobar que $\langle c \rangle = 0$, para todo lazo $c \in T$. Tomamos pues $c \in T$ lazo con $o(c) = t(c) = x$. Por el Lema 2.1.9, los únicos lazos reducidos en T son los lazos constantes. Por tanto, como todo lazo es homólogo a su lazo reducido, concluimos que $\langle c \rangle = \langle c_x \rangle = 0$. □

Ya hemos visto en el Lema 2.3.4 que las 1-cadenas asociadas a lazos son ciclos. El recíproco también se cumple, es decir, se tiene que todo elemento $\alpha \in H_1(X, \mathbb{Z})$ coincide con la 1-cadena asociada a un lazo. De hecho, el siguiente lema nos da una base explícita de $H_1(X, \mathbb{Z})$ formada por 1-cadenas asociadas a lazos.

Lema 2.3.11. $H_1(X, \mathbb{Z})$ tiene una base formada por 1-cadenas $\langle c \rangle$, donde cada c es un lazo con origen en un mismo vértice x_0 .

Demostración. Sea $X = (V, E)$ un grafo, $T = (V_T, E_T)$ un árbol de expansión en X y E^0 una orientación de X (las aristas E_T estarían también orientadas). Tomamos un vértice $x_0 \in V$ y también las aristas $e_1, \dots, e_n \in E^0 \setminus E_T$; es decir, el conjunto de aristas de E^0 que no aparecen en T . Ahora construimos los caminos reducidos $c_i^o : x_0 \rightarrow o(e_i)$ y $c_i^t : x_0 \rightarrow t(e_i)$ en T para cada $i = 1, \dots, n$. Además sabemos que son únicos por el Lema 2.1.9. Tenemos entonces que el camino $\beta_i = c_i^o e_i \bar{c}_i^t$ es en particular un lazo en x_0 .

Lo que vamos a comprobar es que $\{\langle \beta_i \rangle\}_{i=1}^n$ es base de $H_1(X, \mathbb{Z})$. Para ello, tomamos el subgrupo $W \in C_1(X, \mathbb{Z})$ dado por $W = \left\{ \sum_{e \in E^0 \setminus E_T} z_e e : z_e \in \mathbb{Z} \right\}$ con base $E^0 \setminus E_T$. Sea el homomorfismo $f : C_1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow W$ tal que $f\left(\sum_{e \in E^0} z_e e\right) = \sum_{e \in E^0 \setminus E_T} z_e e$ (observar que si $e \in E^0 \setminus E_T$ entonces $f(e) = e$, y si $e \in E_T$ entonces $f(e) = 0$).

Queremos ver que la restricción de f a $H_1(X, \mathbb{Z})$, $f : H_1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow W$, es un isomorfismo.

- Es sobreyectivo. Bastará comprobar que $f(\langle \beta_i \rangle) = e_i$, $i = 1, \dots, n$, y para ello utilizamos la linealidad de f en $C_1(X, \mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} f(\langle \beta_i \rangle) &= f(\langle c_i^o e_i \overline{c_i^t} \rangle) = f(\langle c_i^o \rangle + \langle e_i \rangle + \langle \overline{c_i^t} \rangle) = \\ &= f(\langle c_i^o \rangle) + f(\langle e_i \rangle) + f(\langle \overline{c_i^t} \rangle) = 0 + f(\langle e_i \rangle) + 0 = f(e_i) = e_i \end{aligned}$$

De esta forma tenemos que f es sobreyectivo.

- Es inyectivo. Sea $\alpha = \sum_{e \in E^0} z_e e \in H_1(X, \mathbb{Z})$ tal que $f(\alpha) = 0$. La definición de f nos dice que si $z_e \neq 0$ entonces $e \in T$, luego $\alpha \in H_1(T, \mathbb{Z})$. Por el Lema 2.3.10, sabemos que $H_1(T, \mathbb{Z}) = \{0\}$, luego $\alpha = 0$. Se tiene entonces que f es inyectivo.

Concluimos que $\{\langle \beta_i \rangle : i = 1, \dots, n\}$, con β_i descrito arriba, es una base para $H_1(X, \mathbb{Z})$. □

Corolario 2.3.12. *Dado $\alpha \in H_1(X, \mathbb{Z})$, existe una única clase de homología $[\beta]$ de lazos en x_0 con $\alpha = \langle \beta \rangle$. En consecuencia, $H_1(X, \mathbb{Z})$ se puede identificar con el grupo de dichas clases de homología.*

Demostración. Como hemos demostrado en el Lema 2.3.11, todo $\alpha \in H_1(X, \mathbb{Z})$ se puede escribir como $\alpha = \sum_{i=1}^n z_i \langle \beta_i \rangle$, con β_i lazos en x_0 . Entonces $\alpha = \langle \beta \rangle$ para el lazo $\beta = \beta_1 \cdots \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_2 \cdots \beta_n \cdots \beta_n$ y donde cada β_i aparece z_i veces.

Veamos que la clase de homología de β es única. Para ello, sea $\alpha = \langle \beta' \rangle$ para otro lazo β' en x_0 . Como también $\alpha = \langle \beta \rangle$, tenemos que $\langle \beta \rangle = \langle \beta' \rangle$ y por tanto $[\beta'] = [\beta]$ usando el Lema 2.3.9. □

Nota 2.3.13. A partir de ahora, los ciclos de $H_1(X, \mathbb{Z})$ se identificarán con las correspondientes clases de homología de lazos de acuerdo con la identificación del corolario anterior.

Definición 2.3.14. *Primer número de Betti.* Número de elementos de una base de $H_1(X, \mathbb{Z})$. Se denota por $b_1(X)$.

Por tanto, $b_1(X) = |E^0 \setminus E_T|$, para T un árbol de expansión del grafo X ; es decir, el primer número de Betti es el número de aristas orientadas que no pertenecen a T .

3. Grafos recubridores abelianos.

3.1 Grafos recubridores.

Definición 3.1.1. *Aplicación recubridora.* Sean dos grafos $X = (V, E)$ y $X_0 = (V_0, E_0)$ conexos. Se dice que un morfismo de grafos $\omega : X \rightarrow X_0$ es una aplicación recubridora si cumple que:

1. $\omega : V \rightarrow V_0$ es sobreyectiva.
2. Para cada $x \in V$, la restricción $\omega|_{E_x} : E_x \rightarrow E_{0,\omega(x)}$ es biyectiva.

Recordar que E_x y $E_{0,\omega(x)}$ son los conjuntos de aristas de E y E_0 con origen en x y en $\omega(x)$, respectivamente. En este contexto, X se dice que es un *grafo recubridor* del *grafo base* X_0 .

Definición 3.1.2. *Fibra.* Sea $x_0 \in V_0$. Llamamos fibra sobre x_0 al conjunto $\omega^{-1}(x_0) = \{x \in V : \omega(x) = x_0\}$.

Lema 3.1.3. *El cardinal $|\omega^{-1}(x_0)|$ no depende del vértice $x_0 \in V_0$.*

Demostración. Sea $e \in E_0$ una arista con $o(e) = x_0$ y $t(e) = x$. Como ω es aplicación recubridora, usando que la restricción $\omega|_{E_x} : E_x \rightarrow E_{0,\omega(x)}$ es biyectiva, se tiene que para cada $y \in V$ con $\omega(y) = x_0$, existe una única arista $\tilde{e} \in E_y$ tal que $\omega(\tilde{e}) = e$. De esta forma se tiene que $t(\tilde{e}) \in \omega^{-1}(x)$.

Así pues, cada $e \in E_0$ define una aplicación $\psi_e : \omega^{-1}(x_0) \rightarrow \omega^{-1}(x)$ dada por $\psi_e(y) = t(\tilde{e})$. Veamos que es biyectiva comprobando que ψ_e tiene por inversa la aplicación $\psi_{\bar{e}} : \omega^{-1}(x) \rightarrow \omega^{-1}(x_0)$. En efecto, $\psi_{\bar{e}}(\psi_e(y)) = \psi_{\bar{e}}(t(\tilde{e})) = t(\hat{e})$, donde $\hat{e} \in E_{t(\tilde{e})}$ es la única arista tal que $\omega(\hat{e}) = \bar{e}$. Como $\omega(\tilde{e}) = \bar{e}$, tenemos que $\hat{e} = \tilde{e}$ y $t(\hat{e}) = t(\tilde{e}) = o(\tilde{e}) = y$, luego $\psi_{\bar{e}} \circ \psi_e = \text{id}$. Análogamente se prueba que $\psi_e \circ \psi_{\bar{e}} = \text{id}$.

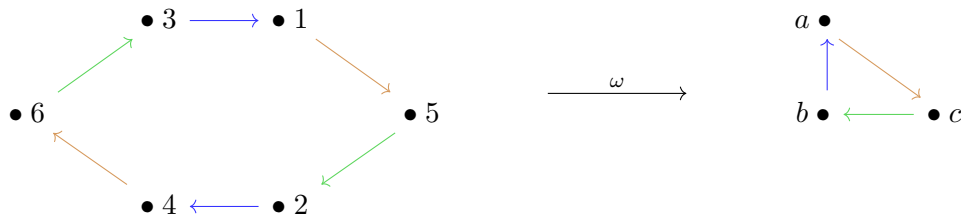
Ahora para todo $x \in V_0$ tomamos un camino $\beta = e_1 \cdots e_n$ entre x_0 y x . Entonces por lo demostrado anteriormente, tenemos las biyecciones

$$\omega^{-1}(x_0) \cong \omega^{-1}(t(e_1)) \cong \cdots \cong \omega^{-1}(t(e_{n-1})) \cong \omega^{-1}(x).$$

Luego el cardinal $|\omega^{-1}(x_0)|$ no depende del vértice x_0 escogido. □

Definición 3.1.4. Si el cardinal de $\omega^{-1}(x_0)$ es finito, ω se dice que es un *pliegue finito*. En caso contrario, es un *pliegue infinito*. Una aplicación recubridora ω con $|\omega^{-1}(x_0)| = n$, se dice que es un *n-pliegue*.

Ejemplo 3.1.5. Veamos un ejemplo de aplicación recubridora entre los grafos siguientes.

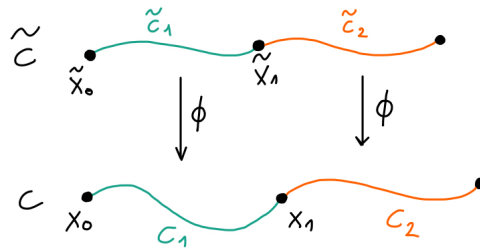


Donde $\omega(1) = \omega(4) = a$, $\omega(2) = \omega(3) = b$ y $\omega(5) = \omega(6) = c$. Se trata entonces de un 2-pliegue.

Definición 3.1.6. Sea $\phi : X \rightarrow X_0$ un morfismo de grafos. Dado un camino c en X_0 con origen en $x_0 \in V_0$, un camino \tilde{c} en X con origen en $\tilde{x}_0 \in \phi^{-1}(x_0)$ se dice que es una *elevación* o *camino elevación* de c para ϕ en \tilde{x}_0 si $\phi(\tilde{c}) = c$.

Nota 3.1.7. 1. Observar que si \tilde{c} es una elevación de c para ϕ en \tilde{x}_0 , entonces $\tilde{\bar{c}}$ es una elevación de \bar{c} para ϕ en $t(\tilde{c})$.

2. Sea $c = c_1c_2$ es un camino tal que $o(c) = x_0$ y $t(c_1) = o(c_2) = x_1$. Si \tilde{c}_1 es una elevación de c_1 para ϕ en $\tilde{x}_0 \in \phi^{-1}(x_0)$ y \tilde{c}_2 es una elevación de c_2 para ϕ en $\tilde{x}_1 = t(\tilde{c}_1) \in \phi^{-1}(x_1)$, entonces la yuxtaposición $\tilde{c} = \tilde{c}_1\tilde{c}_2$ está bien definida y es una elevación de c para ϕ en \tilde{x}_0 .



Definición 3.1.8. *Propiedad de unicidad de elevación de caminos.* Sean dos grafos $X = (V, E)$ y $X_0 = (V_0, E_0)$ y un morfismo entre ellos $\phi : X \rightarrow X_0$. Se dice que ϕ cumple la propiedad de unicidad de elevación de caminos en $\tilde{x}_0 \in V$ si para todo camino c en X_0 con $\phi(\tilde{x}_0) = o(c)$ existe un único camino $\tilde{c} \in X$ tal que $\phi(\tilde{c}) = c$ y $o(\tilde{c}) = \tilde{x}_0$. En otras palabras, todo camino en X_0 con origen en $\phi(\tilde{x}_0)$ tiene un único camino elevación con origen en \tilde{x}_0 .

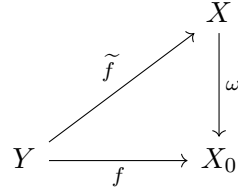
Lema 3.1.9. *Las aplicaciones recubridoras cumplen la propiedad de unicidad de elevación de caminos en cualquier vértice.*

Demostración. Sea $\omega : X \rightarrow X_0$ una aplicación recubridora de grafos y sea $x \in V$. Tomamos $c = e_1 \cdots e_n$ un camino en X_0 con $o(c) = o(e_1) = \omega(x)$ para x vértice de X . Ahora bien, por ser $\omega|_{E_x} : E_x \rightarrow E_{0,\omega(x)}$ biyectiva, existe un único $\tilde{e}_1 \in E_x$ con $\omega(\tilde{e}_1) = e_1$. De la misma manera, para el resto de aristas tomamos $\tilde{e}_i \in E_{t(\tilde{e}_{i-1})}$ (aristas de X con origen en $t(\tilde{e}_{i-1})$), también únicas, de forma que $\omega(\tilde{e}_i) = e_i$ ($i = 1, \dots, n$). Entonces el camino $\tilde{c} = \tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_n$ es el único camino con $\phi(\tilde{c}) = c$ y $o(\tilde{c}) = x$.

□

Nota 3.1.10. Con la notación de la demostración del Lema 3.1.9, dados $x_0 \in V_0$, $\tilde{x}_0 \in \omega^{-1}(x_0)$ y $e \in E_{0,x_0}$, a la única arista $\tilde{e} \in E_{\tilde{x}_0}$ con $\omega(\tilde{e}) = e$ se le llamará *elevación* de e por \tilde{x}_0 . Obsérvese que si \tilde{e} es la elevación de \bar{e} por $t(\tilde{e}) \in \omega^{-1}(t(e)) = \omega^{-1}(o(\bar{e}))$, se tiene que $\tilde{e} = \bar{e}$ por la unicidad de elevación.

Definición 3.1.11. *Elevación de morfismos.* Sean X, X_0, Y grafos conexos. Dados $\tilde{f} : Y \rightarrow X$, $f : Y \rightarrow X_0$ morfismos y $\omega : X \rightarrow X_0$ aplicación recubridora, se dice que \tilde{f} es una elevación de f si se satisface que $f = \omega \circ \tilde{f}$.



Teorema 3.1.12. *Unicidad de elevación de morfismos para aplicaciones recubridoras.* Sea $\omega : X \rightarrow X_0$ aplicación recubridora. Si tenemos dos elevaciones $\tilde{f}, \hat{f} : Y \rightarrow X$ de un morfismo $f : Y \rightarrow X_0$ cumpliendo que $\tilde{f}(y_0) = \hat{f}(y_0)$ para algún $y_0 \in Y$, entonces $\tilde{f} = \hat{f}$.

Demostración. Sea $Y = (V_Y, E_Y)$. Tomamos una arista $e \in E_Y$ tal que $o(e) = y_0$. Por ser \tilde{f} y \hat{f} elevaciones de f se cumple que $\omega \circ \tilde{f} = f = \omega \circ \hat{f}$, luego $f(e) = \omega(\tilde{f}(e)) = \omega(\hat{f}(e))$. Además tenemos que

$$o(\omega(\tilde{f}(e))) = o(\omega(\hat{f}(e))) = o(f(e)) = f(o(e)) = f(y_0).$$

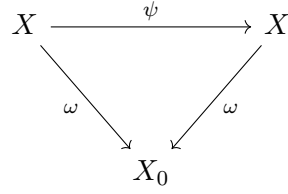
Dado $x \in \omega^{-1}(f(y_0))$, como $\omega|_{E_x} : E_x \rightarrow E_{0,f(y_0)}$ es biyectivo, se sigue necesariamente que $\tilde{f}(e) = \hat{f}(e)$. En particular, $\tilde{f}(t(e)) = t(\tilde{f}(e)) = t(\hat{f}(e)) = \hat{f}(t(e))$.

Aplicaríamos el mismo razonamiento para $t(e)$, luego para toda arista $e' \in E_Y$ con $o(e') = t(e)$, tenemos que $\tilde{f}(e') = \hat{f}(e')$. Ahora, dado cualquier vértice $y \in V_Y$, aplicamos que Y es conexo para encontrar un camino $\beta = e_1 \cdots e_n$ entre y_0 e y . Por el razonamiento anterior, se sigue inductivamente que para todo $1 \leq i \leq n-1$, $\tilde{f}(e_i) = \hat{f}(e_i)$, y por tanto $\tilde{f}(y) = \hat{f}(y)$.

Igualmente, para toda arista $e_0 \in E_Y$, se puede encontrar un camino como el anterior con $e_n = e_0$ y así $\tilde{f}(e_0) = \hat{f}(e_0)$.

□

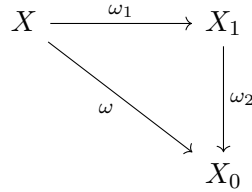
Definición 3.1.13. *Transformación recubridora.* Sea $\omega : X \rightarrow X_0$ una aplicación recubridora. Un automorfismo $\psi : X \rightarrow X$ se dice que es una transformación recubridora si cumple que $\omega \circ \psi = \omega$. Al conjunto de todas las transformaciones recubridoras lo denotamos por $G(\omega)$ y lo llamamos *grupo de transformaciones recubridoras* de ω .



Se tiene en particular que ψ es una elevación de ω .

Nota 3.1.14. Si $\omega : X \rightarrow X_0$ es una aplicación recubridora, se tiene que $G(\omega)$ es un subgrupo de $\text{Aut}(X)$. En efecto, dados $\psi_1, \psi_2 \in G(\omega)$, entonces $\omega \circ (\psi_1 \circ \psi_2) = (\omega \circ \psi_1) \circ \psi_2 = \omega \circ \psi_2 = \omega$ y por tanto $\psi_1 \circ \psi_2 \in G(\omega)$. De igual manera, si ψ^{-1} es el morfismo inverso de ψ , se tiene que $\omega \circ \psi^{-1} = (\omega \circ \psi) \circ \psi^{-1} = \omega \circ (\psi \circ \psi^{-1}) = \omega$. Además, $G(\omega)$ actúa libremente y sin inversión sobre X . En efecto, dado $x \in V$, si $\psi \in G(\omega)$ es tal que $\psi(x) = x = \text{id}(x)$ (con id el morfismo identidad en X), se tiene por el Teorema de unicidad de elevación que $\psi = \text{id}$. De la misma forma se cumpliría que si $e \in E_x$ es una arista con $\psi(e) = e = \text{id}(e)$, tenemos que $\psi(o(e)) = o(\psi(e)) = o(e)$ y por el mismo teorema, $\psi = \text{id}$. Para ver que actúa sin inversión, supongamos por reducción al absurdo que $\psi(e) = \bar{e}$. Entonces $\omega(e) = \omega(\psi(e)) = \omega(\bar{e}) = \overline{\omega(e)}$, lo cual no puede ser pues una arista es siempre distinta a su inversa.

Lema 3.1.15. Sean $\omega_1 : X \rightarrow X_1$ y $\omega_2 : X_1 \rightarrow X_0$ dos aplicaciones recubridoras.



Se cumple que:

1. La composición $\omega = \omega_2 \circ \omega_1$ es una aplicación recubridora.
2. El grupo $G(\omega_1)$ es un subgrupo de $G(\omega)$.

Demostración. Escribimos $X = (V, E)$, $X_1 = (V_1, E_1)$ y $X_0 = (V_0, E_0)$.

1. Veamos si $\omega = \omega_2 \circ \omega_1$ es una aplicación recubridora. Para ello tengamos en cuenta que tanto ω_1 como ω_2 son aplicaciones recubridoras y comprobemos las dos condiciones:
 - $\omega : V \rightarrow V_1 \rightarrow V_0$ es sobreyectiva sobre los vértices pues es la composición de dos aplicaciones sobreyectivas sobre los vértices.
 - Sea $x \in V$, entonces $\omega : E_x \rightarrow E_{1, \omega_1(x)} \rightarrow E_{0, \omega(x)}$ es biyectiva por ser composición de aplicaciones biyectivas.
2. Demostramos que $G(\omega_1)$ es un subgrupo de $G(\omega)$. Basta ver que dado $\sigma \in G(\omega_1)$ entonces $\sigma \in G(\omega)$; esto es, $\omega \circ \sigma = \omega$. Como σ es una transformación recubridora, se tiene que $\omega_1 \circ \sigma = \omega_1$, y entonces

$$\omega \circ \sigma = \omega_2 \circ \omega_1 \circ \sigma = \omega_2 \circ \omega_1 = \omega.$$

□

Definición 3.1.16. *Aplicación recubridora regular.* Se dice que la aplicación recubridora $\omega : X \rightarrow X_0$ es regular si $G(\omega)$ actúa transitivamente sobre cada fibra $\omega^{-1}(x)$, con $x \in V_0$. En tal caso se dice que X es un *grafo recubridor regular* sobre X_0 .

Teorema 3.1.17. *Sea G un grupo que actúa libremente y sin inversión sobre un grafo $X = (V, E)$. Entonces el morfismo canónico $\omega : X \rightarrow X/G$ es una aplicación recubridora regular cuyo grupo de transformaciones coincide con el grupo G .*

Demostración. Como G actúa sin inversión, el grafo cociente formado por los espacios orbitales de vértices y aristas está bien definido por el Teorema 1.4.2.

Veamos que ω es aplicación recubridora.

1. Tenemos que $\omega_V : V \rightarrow V_1$ es sobreyectiva (donde $V_1 = V/G$) por ser ω la proyección canónica.
2. Para cada $x \in V$, la restricción $\omega|_{E_x} : E_x \rightarrow E_{1,\omega(x)}$ es biyectiva (donde $E_1 = E/G$). Para ello, comencemos primero viendo que es sobreyectiva. Tenemos que $\omega_E : E \rightarrow E_1$ es sobreyectiva por la misma razón que ω_V . Entonces para toda arista $e_1 \in E_{1,\omega(x)}$ existe $e \in E$ de forma que $\omega(e) = e_1$. Teniendo en cuenta que los morfismos respetan la estructura combinatoria entre los grafos, llegamos a que

$$\omega(o(e)) = o(\omega(e)) = o(e_1) = \omega(x).$$

De esta forma, $o(e)$ y x están en la misma órbita en V/G . Por definición, existe un $g \in G$ de forma que $go(e) = x$. Como sabemos que la función origen es G -equivariante, debe cumplirse entonces que $o(ge) = go(e)$, y entonces $o(ge) = go(e) = x$. De esta forma $ge \in E_x$ y como $\omega(ge) = \omega(e) = e_1$, concluimos que $\omega|_{E_x}$ es sobreyectiva.

Ahora demostremos que es inyectiva. Sean $e, e' \in E_x$ tales que $\omega(e) = \omega(e')$. En particular, e y e' pertenecen a la misma órbita luego existe $g \in G$ tal que $ge = e'$. Además como $e, e' \in E_x$, tenemos que $o(ge) = o(e') = o(e) = x$. Por otro lado, $o(ge) = go(e) = gx$ y junto con lo anterior, tenemos que $x = gx$. Sin embargo, como G actúa libremente sobre X , debe cumplirse que $g = \text{id}$ y de esta forma $e = e'$.

Hemos probado que ω es una aplicación recubridora. Veamos que $G = G(\omega)$, y como G actúa transitivamente sobre cada fibra, se seguirá que ω es regular.

Para ver que $G \subseteq G(\omega)$, basta observar que cada elemento de G actúa sobre los elementos de X como una transformación recubridora, pues dados $g \in G$ y $x \in V$ se tiene que $\omega(gx) = \omega(x)$.

Para la otra contención $G(\omega) \subseteq G$, sean $\sigma \in G(\omega)$ con $\sigma \neq \text{id}$ y $x \in V$. Como $\omega(\sigma x) = \omega(x)$ y la acción de G es transitiva sobre las fibras, existe $g \in G$ de forma que $\sigma x = gx$. Tomando g^{-1} en ambos lados, tenemos que $g^{-1}\sigma x = x = \text{id } x$. Como $g^{-1}\sigma \in G(\omega)$ es una elevación de ω que coincide con la identidad en x , aplicamos el Teorema de unicidad de elevación y tenemos que

$g^{-1} \circ \sigma = \text{id}$, luego $\sigma = g$.

□

Teorema 3.1.18. *Sea $\omega : X \rightarrow X_0$ una aplicación recubridora regular e Y un grafo. Si tenemos dos elevaciones $\tilde{f}, \hat{f} : Y \rightarrow X$ de un morfismo $f : Y \rightarrow X_0$, entonces existe un único elemento $\sigma \in G(\omega)$ tal que $\hat{f} = \sigma \circ \tilde{f}$.*

Demostración. Veamos primero que existe dicho σ . Para ello, sea $y_0 \in V_Y$. Por hipótesis, sabemos que $\omega(\tilde{f}(y_0)) = \omega(\hat{f}(y_0)) = f(y_0)$, luego $\tilde{f}(y_0), \hat{f}(y_0) \in \omega^{-1}(f(y_0))$. Por ser ω regular debe existir $\sigma \in G(\omega)$ de forma que $\hat{f}(y_0) = \sigma \tilde{f}(y_0)$. Además como \hat{f} y $\sigma \circ \tilde{f}$ son elevaciones de f , gracias al Teorema de unicidad de elevación concluimos que $\hat{f} = \sigma \circ \tilde{f}$.

Para la unicidad de σ utilizamos que la acción de $G(\omega)$ es libre. En efecto, supongamos que existe $\sigma' \in G(\omega)$ tal que $\hat{f} = \sigma' \circ \tilde{f}$. Aplicando σ'^{-1} y σ a ambos lados nos queda $\sigma \circ \sigma'^{-1} \circ \hat{f} = \sigma \circ \tilde{f} = \hat{f}$, luego $\sigma \circ \sigma'^{-1} = \text{id}$ por ser la acción de $G(\omega)$ libre, y así $\sigma = \sigma'$.

□

Teorema 3.1.19. *Sean $\omega_X : X \rightarrow X_0$ y $\omega_Y : Y \rightarrow Y_0$ dos aplicaciones recubridoras regulares. Sean también $f : X_0 \rightarrow Y_0$ y $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ dos morfismos cumpliendo que $\omega_Y \circ \tilde{f} = f \circ \omega_X$.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y \\ \omega_X \downarrow & & \downarrow \omega_Y \\ X_0 & \xrightarrow{f} & Y_0 \end{array}$$

Entonces existe un homomorfismo $\rho : G(\omega_X) \rightarrow G(\omega_Y)$ tal que $\tilde{f} \circ \sigma = \rho(\sigma) \circ f$ para cada $\sigma \in G(\omega_X)$.

Demostración. De la hipótesis de que $\omega_Y \circ \tilde{f} = f \circ \omega_X$, se deduce que \tilde{f} es una elevación de $f \circ \omega_X$ para ω_Y . Además, dado $\sigma \in G(\omega_X)$, $\tilde{f} \circ \sigma$ es también una elevación de $f \circ \omega_X$ para ω_Y .

Usando ahora el Teorema 3.1.18, sabemos que existe un único elemento $\mu_\sigma \in G(\omega_Y)$ cumpliendo que $\tilde{f} \circ \sigma = \mu_\sigma \circ \tilde{f}$. Definiendo $\rho : G(\omega_X) \rightarrow G(\omega_Y)$ como $\rho(\sigma) = \mu_\sigma$, tenemos que ρ es el homomorfismo deseado, pues cumple las propiedades:

1. $\rho(\text{id}) = \text{id}$.
2. $\rho(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \rho(\sigma_1) \circ \rho(\sigma_2)$, pues gracias al Teorema 3.1.18 y de la definición de ρ , tenemos que $\rho(\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ (\sigma_1 \circ \sigma_2) = (\tilde{f} \circ \sigma_1) \circ \sigma_2 = \rho(\sigma_1) \circ \tilde{f} \circ \sigma_2 = \rho(\sigma_1) \circ (\rho(\sigma_2) \circ \tilde{f}) = (\rho(\sigma_1) \circ \rho(\sigma_2)) \circ \tilde{f}$.

□

3.2 Grafos recubridores abelianos.

Definición 3.2.1. *Aplicación recubridora abeliana.* Una aplicación recubridora $\omega : X \rightarrow X_0$ es llamada abeliana si su grupo de transformaciones $G(\omega)$ es un grupo abeliano. En tal caso X se dice que es un *grafo recubridor abeliano* del grafo base X_0 .

Lema 3.2.2. *Sea $\omega : X \rightarrow X_0$ una aplicación recubridora regular y abeliana. Entonces fijados $x_0 \in V_0$ y $\tilde{x}_0 \in \omega^{-1}(x_0)$, se tiene que todo lazo β en x_0 tiene asociado un único elemento $g_\beta \in G(\omega)$. Además, si $\beta \sim_h \beta'$, entonces $g_\beta = g_{\beta'}$.*

Demostración. Sea $\beta = e_1 \cdots e_n$ un lazo en $x_0 \in V_0$. Sea $\tilde{\beta} = \tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_n : \tilde{x}_0 \rightarrow y$ el único camino elevación de β por \tilde{x}_0 ; esto es, $o(\tilde{\beta}) = \tilde{x}_0$ y $\omega(\tilde{\beta}) = \beta$. Entonces $y = t(\tilde{e}_n) \in \omega^{-1}(x_0)$ y por ser ω aplicación regular, existe $g_\beta \in G(\omega)$ tal que $y = g_\beta \tilde{x}_0$.

Además, g_β es único. En efecto, sea $h_\beta \in G(\omega)$ tal que $y = h_\beta \tilde{x}_0$. Entonces $h_\beta^{-1} y = \tilde{x}_0$ y aplicando g_β en ambos lados, $g_\beta h_\beta^{-1} y = g_\beta \tilde{x}_0 = y$. Como la acción de $G(\omega)$ es libre, $g_\beta h_\beta^{-1} = \text{id}$ y $g_\beta = h_\beta$.

Para la segunda parte del lema, comenzamos suponiendo que β' se obtiene de β por medio de una operación de cancelación o transposición.

1. Supongamos que $\beta \sim_h \beta'$ por medio de la operación de cancelación de aristas $e_i \bar{e}_i$. Entonces $\beta = e_1 \cdots e_{i-1} e_i \bar{e}_i e_{i+2} \cdots e_n$ y $\beta' = e_1 \cdots e_{i-1} e_{i+2} \cdots e_n$. Sabemos por el Lema 3.1.9 que la elevación $\tilde{\beta}$ de β para ω en \tilde{x}_0 es de la forma $\tilde{\beta} = \tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_i \tilde{e}_i \cdots \tilde{e}_n$, donde \tilde{e}_1 es la elevación de e_1 por x_0 , y seguidamente, \tilde{e}_i para $2 \leq i \leq n$, es la elevación de e_i por $t(\tilde{e}_i) \in \omega^{-1}(t(e_{i-1})) = \omega^{-1}(o(e_i))$. Como se comentó en la Nota 3.1.7, $\tilde{e}_i = \bar{\tilde{e}}_i$ y así $\tilde{\beta} \sim_h \tilde{\beta}' = \tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_{i-1} \tilde{e}_{i+2} \cdots \tilde{e}_n$. En particular, $t(\tilde{\beta}) = t(\tilde{\beta}')$ y $g_\beta = g_{\beta'}$.
2. Supongamos que $\beta \sim_h \beta'$ por medio de la operación de transposición de $e_i \cdots e_j e_{j+1} \cdots e_k$ a $e_{j+1} \cdots e_k e_i \cdots e_j$ de los lazos $\eta = e_i \cdots e_j$ y $\gamma = e_{j+1} \cdots e_k$ en el mismo vértice $v_0 = t(e_{i-1})$. Entonces

$$\beta = e_1 \cdots e_{i-1} \eta \gamma e_{k+1} \cdots e_n \text{ y } \beta' = e_1 \cdots e_{i-1} \gamma \eta e_{k+1} \cdots e_n$$

tienen como camino elevación a

$$\tilde{\beta} = \tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_{i-1} \tilde{\eta} \tilde{\gamma} \tilde{e}_{k+1} \cdots \tilde{e}_n \text{ y } \tilde{\beta}' = \tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_{i-1} \tilde{\gamma} \tilde{\eta} \tilde{e}_{k+1} \cdots \tilde{e}_n,$$

respectivamente. Hemos denotado por $\tilde{\eta} = \tilde{e}_i \cdots \tilde{e}_j$ y $\tilde{\gamma} = \tilde{e}_{j+1} \cdots \tilde{e}_k$ a las elevaciones de η y γ en $t(\tilde{e}_{i-1}) \in \omega^{-1}(v_0)$, mientras que $\hat{\eta} = \hat{e}_i \cdots \hat{e}_j$ es la elevación de η con origen en $t(\tilde{\gamma}) = t(\tilde{e}_k) \in \omega^{-1}(v_0)$ y $\hat{\gamma} = \hat{e}_{j+1} \cdots \hat{e}_k$ es la elevación de γ con origen en $t(\hat{\eta}) = t(\tilde{e}_j) \in \omega^{-1}(v_0)$.

De esta forma \hat{e}_{k+1} denota la elevación de e_{k+1} por $t(\hat{\gamma})$ mientras que \tilde{e}_{k+1} denota la elevación de e_{k+1} por $t(\hat{\eta})$. De igual manera, para $k+2 \leq s \leq n$, \hat{e}_s sería la elevación por $t(\hat{e}_{s-1})$ y \tilde{e}_s la elevación por $t(\tilde{e}_{s-1})$.

Veamos que en cualquier caso, la conmutatividad de $G(\omega)$ nos da que $t(\tilde{\beta}) = t(\tilde{\beta}')$. Fijemos

$t(\tilde{e}_{i-1}) \in \omega^{-1}(v_0)$. Entonces con $t(e_{i-1})$ y $t(\tilde{e}_{i-1})$ haciendo los papeles de x_0 y \tilde{x}_0 en la definición de g_η y g_γ nos da que $g_\eta t(\tilde{e}_{i-1}) = t(\tilde{\eta})$ y $g_\gamma t(\tilde{e}_{i-1}) = t(\tilde{\gamma})$. Además, $g_\gamma \tilde{\eta} = \hat{\eta}$, pues ambas son elevaciones de η con el mismo origen ya que $o(g_\gamma \tilde{\eta}) = g_\gamma o(\tilde{\eta}) = g_\gamma t(\tilde{e}_{i-1}) = t(\tilde{\gamma}) = o(\hat{\eta})$. Análogamente se obtendría $g_\eta \tilde{\gamma} = \hat{\gamma}$. En particular, $t(g_\gamma \tilde{\eta}) = t(\hat{\eta})$ y $t(g_\gamma \tilde{\gamma}) = t(\hat{\gamma})$. A partir de estas igualdades tenemos que:

$$\begin{aligned} t(\hat{\gamma}) &= t(g_\eta \tilde{\gamma}) = g_\eta(t(\tilde{\gamma})) \\ &= g_\eta(g_\gamma(t(e_{i-1}))) = g_\gamma(g_\eta(t(e_{i-1}))) && (\star) \\ &= g_\gamma(t(\tilde{\eta})) = t(g_\gamma \tilde{\eta}) \\ &= t(\hat{\eta}) \end{aligned}$$

donde hemos usado la conmutatividad de $G(\omega)$ en la cuarta igualdad.

Por tanto, de la unicidad de elevaciones de aristas, \hat{e}_{k+1} y \tilde{e}_{k+1} son elevaciones de e_{k+1} por el mismo vértice $t(\hat{\gamma}) = t(\hat{\eta})$. Así $\tilde{e}_{k+1} = \hat{e}_{k+1}$ y por tanto $\tilde{e}_s = \hat{e}_s$ para todo $s \geq k+1$. Con ello, $g_{\beta'} \tilde{x}_0 = t(\hat{e}_n) = t(\tilde{e}_n) = g_\beta \tilde{x}_0$, lo que implica que $g_\beta = g_{\beta'}$ por ser la acción de $G(\omega)$ libre.

En general, si $\beta \sim_h \beta'$, tenemos una secuencia de cancelaciones y transposiciones que da lugar a una secuencia de los procedimientos descritos anteriormente llegando, a la conclusión de que sus g_β y $g_{\beta'}$ coinciden. □

Nota 3.2.3. Obsérvese que la igualdad $t(\hat{\gamma}) = t(\hat{\eta})$ en (\star) nos dice que

$$g_{\eta\gamma} = g_\eta \circ g_\gamma = g_\gamma \circ g_\eta = g_{\gamma\eta}. \quad (\diamond)$$

En efecto, con la notación de (\star)

$$g_{\eta\gamma}(t(e_{i-1})) = t(\hat{\gamma}) = g_\eta g_\gamma(t(e_{i-1})) = g_\gamma g_\eta(t(e_{i-1})) = t(\hat{\eta}) = g_{\gamma\eta}(t(e_{i-1})).$$

Como la acción de $G(\omega)$ es libre, tenemos las igualdades de (\diamond) . Naturalmente, esto es válido si reemplazamos los lazos en $t(e_{i-1})$ por lazos en cualquier vértice $x_0 \in V_0$ y $t(\tilde{e}_{i-1})$ por cualquier $\tilde{x}_0 \in \omega^{-1}(x_0)$ para hacer las elevaciones.

Lema 3.2.4. Criterio de elevación. *Sea $\omega : X \rightarrow X_0$ una aplicación recubridora y sea $f : Y \rightarrow X_0$ un morfismo entre los grafos $Y = (V_Y, E_Y)$ y X_0 , con Y conexo. Sea $y_0 \in Y$ y $x_0 = f(y_0)$. Dado $\tilde{x}_0 \in \omega^{-1}(x_0)$, f admite una elevación $\tilde{f} : Y \rightarrow X$ con $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ si y solo si $f_*(H_1(Y, \mathbb{Z})) \subseteq \omega_*(H_1(X, \mathbb{Z}))$.*

Demostración.

\Rightarrow Supongamos que $\tilde{f} : Y \rightarrow X$ es elevación de f por ω , es decir, $f = \omega \circ \tilde{f}$. Además, tenemos por definición de f_* que $f_*(\langle \beta \rangle) = \langle f(\beta) \rangle$, para el ciclo $\langle \beta \rangle \in H_1(Y, \mathbb{Z})$ representado por el lazo β . Concluimos que $f_*(\langle \beta \rangle) = \langle f(\beta) \rangle = \langle \omega(\tilde{f}(\beta)) \rangle = \omega_*(\langle \tilde{f}(\beta) \rangle)$, luego $f_*(H_1(Y, \mathbb{Z})) \subseteq \omega_*(H_1(X, \mathbb{Z}))$.

\Leftarrow | Vamos a empezar definiendo $\tilde{f} : V_Y \rightarrow V$. Dado $y \in Y$ tomamos un camino β entre y_0 e y , que existe por ser Y conexo. Entonces $f(\beta)$ es el camino entre los v\u00e9rtices x_0 y $f(y)$, y por tanto existe un \u00fanico camino elevaci\u00f3n $\widetilde{f(\beta)}$ de $f(\beta)$ con origen en \tilde{x}_0 (Lema 3.1.9). Definimos $\tilde{f}(y) = t(\widetilde{f(\beta)})$, es decir, como el v\u00e9rtice final del camino $\widetilde{f(\beta)}$. Veamos que $\tilde{f}(y)$ es independiente del camino β que hayamos tomado. Para ello, sea β' otro camino entre y_0 e y , con $\widetilde{f(\beta')}$ el camino elevaci\u00f3n asociado a $f(\beta')$ con origen en \tilde{x}_0 . Como la yuxtaposici\u00f3n $\beta\overline{\beta'}$ nos da un lazo en y_0 , tenemos que $f(\beta\overline{\beta'})$ es un lazo en x_0 . La hip\u00f3tesis $f_*(H_1(Y, \mathbb{Z})) \subseteq \omega_*(H_1(X, \mathbb{Z}))$, nos dice que existe un lazo η en \tilde{x}_0 tal que

$$\langle f(\beta\overline{\beta'}) \rangle = f_*(\langle \beta\overline{\beta'} \rangle) = \omega_*(\langle \eta \rangle) = \langle \omega(\eta) \rangle .$$

Esto es, los lazos $f(\beta\overline{\beta'})$ y $\omega(\eta)$ son hom\u00f3logos (Lema 2.3.9) y por el Lema 3.2.2, se tiene que sus elevaciones por \tilde{x}_0 terminan en el mismo v\u00e9rtice \tilde{x}_0 . Adem\u00e1s, si $\xi = \widetilde{f(\beta\overline{\beta'})}$ es la elevaci\u00f3n de $f(\beta\overline{\beta'})$ en \tilde{x}_0 , tenemos que ξ es la yuxtaposici\u00f3n de la elevaci\u00f3n $\widetilde{f(\beta)}$ de $f(\beta)$ en \tilde{x}_0 y de la elevaci\u00f3n $\alpha = \widetilde{f(\overline{\beta'})}$ de $f(\overline{\beta'})$ en $t(\widetilde{f(\beta)}) = o(\alpha)$. Sabemos que $t(\alpha) = t(\xi) = \tilde{x}_0$. Entonces para el camino opuesto $\overline{\alpha}$ tenemos que $\omega(o(\overline{\alpha})) = \omega(t(\alpha)) = \omega(\tilde{x}_0) = x_0$ y $\omega(\overline{\alpha}) = \overline{\omega(\alpha)} = \overline{f(\overline{\beta'})} = f(\beta')$, por lo que $\overline{\alpha} = \widetilde{f(\beta')}$ es la elevaci\u00f3n de $f(\beta')$ en \tilde{x}_0 y por tanto, $t(\widetilde{f(\beta')}) = t(\overline{\alpha}) = o(\alpha) = t(\widetilde{f(\beta)})$.

Para extender \tilde{f} a las aristas, sea $e \in E_Y$ y $\mu = e_1 \cdots e_n$ un camino con origen en y_0 y t\u00e9rmino en $o(e)$. Se define $\tilde{f}(e)$ como la arista correspondiente a $f(e)$ por la biyecci\u00f3n $E_{t(\widetilde{f(\mu)})} \cong E_{0, \omega(t(\widetilde{f(\mu)}))} = E_{0, o(f(e))}$, por ser ω una aplicaci\u00f3n recubridora. Para ver que $\tilde{f}(e)$ no depende del camino μ , solo hay que observar que para $y = o(e)$ y otro camino μ' entre y_0 y $o(e)$, hemos visto antes que $t(\widetilde{f(\mu)}) = t(\widetilde{f(\mu')})$.

Concluimos entonces que $\tilde{f} : Y \rightarrow X$ as\u00ed definida es una elevaci\u00f3n de f .

□

4. Grafos recubridores abelianos universales. Cristales topológicos.

4.1 Grafos recubridores abelianos universales.

Definición 4.1.1. *Aplicación recubridora abeliana universal.* Sea $u : U \rightarrow X_0$ una aplicación recubridora abeliana sobre el grafo X_0 . Se dice que u es *universal* si su grupo de transformaciones $G(u)$ es isomorfo a $H_1(X_0, \mathbb{Z})$. En este caso, a U se le llama *grafo recubridor abeliano universal* de X_0 .

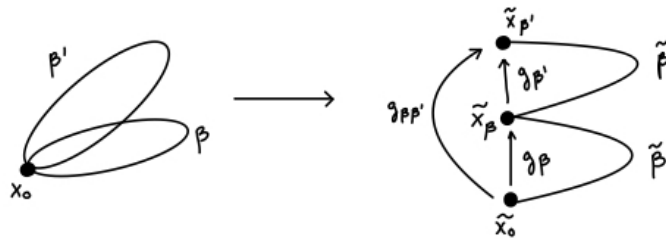
Veamos que el grafo U existe y que para cualquier aplicación recubridora abeliana $\omega : X \rightarrow X_0$, existe una aplicación recubridora abeliana $\tilde{u} : U \rightarrow X$ tal que $u = \omega \circ \tilde{u}$. Esta propiedad se llama *propiedad universal de u sobre X_0* .

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{\tilde{u}} & X \\
 & \searrow u & \downarrow \omega \\
 & & X_0
 \end{array}$$

Para la demostración, necesitaremos algunos lemas previos.

Lema 4.1.2. *Sea $\omega : X \rightarrow X_0$ aplicación recubridora regular abeliana. Si representamos los elementos de $H_1(X_0, \mathbb{Z})$ por las clases de homología de lazos en $x_0 \in V_0$ y tomamos $\tilde{x}_0 \in \omega^{-1}(x_0)$, entonces existe un homomorfismo sobreyectivo $\nu : H_1(X_0, \mathbb{Z}) \rightarrow G(\omega)$ dado por $\nu([\beta]) = g_\beta$, con g_β definido en el Lema 3.2.2; esto es, $g_\beta \tilde{x}_0 = t(\tilde{\beta})$, con $\tilde{\beta}$ elevación de β en \tilde{x}_0 .*

Demostración. Como demostramos en el Lema 3.2.2, g_β es el mismo para todos los caminos homólogos a β , luego usando el Lema 2.3.9, la aplicación ν dada en el enunciado está bien definida. Además es homomorfismo, pues dados $[\beta], [\beta'] \in H_1(X, \mathbb{Z})$ se tiene que $\nu([\beta][\beta']) = \nu([\beta\beta']) = g_{\beta\beta'} = g_\beta g_{\beta'} = \nu([\beta])\nu([\beta'])$, donde se ha utilizado la Nota 3.2.3 para la tercera igualdad.



Veamos ahora que es sobreyectivo tomando para ello un elemento g de $G(\omega)$. Como X es conexo, sabemos que existe al menos un camino $\eta : \tilde{x}_0 \rightarrow g\tilde{x}_0$. Entonces $\omega(\eta)$, la imagen de η por ω , es un lazo en x_0 , pues $\omega(g\tilde{x}_0) = \omega(\tilde{x}_0) = x_0$. Por unicidad de elevación, η es el camino elevación de $\omega(\eta)$ por \tilde{x}_0 y por definición, $\nu([\omega(\eta)]) = g$.

□

Como consecuencia de este lema, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.1.3. *Se tiene que $\text{Ker } \nu = \omega_*(H_1(X, \mathbb{Z}))$ y la elevación en $\tilde{x}_0 \in V$, $\tilde{\beta}$, de un lazo β en $x_0 \in V_0$, es un lazo si y solo si $[\beta] \in \text{Ker } \nu$.*

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\omega_*} H_1(X_0, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\nu} G(\omega)$$

Demostración.

Empecemos viendo que $\text{Ker } \nu$ coincide con $\text{Im } \omega_*$.

\supseteq Sea $\omega_*([\gamma]) \in \omega_*(H_1(X, \mathbb{Z}))$ con γ un lazo en \tilde{x}_0 . Entonces $\omega(\gamma)$ es un lazo en X_0 y por unicidad de elevación, $\gamma = \widetilde{\omega(\gamma)}$ es la elevación de $\omega(\gamma)$ en \tilde{x}_0 . Entonces $g_{\omega(\gamma)}\tilde{x}_0 = t(\widetilde{\omega(\gamma)}) = t(\gamma) = \tilde{x}_0$, y por ser la acción de $G(\omega)$ libre, $g_{\omega(\gamma)} = \text{id}$. Así pues, $\nu(\omega_*([\gamma])) = \text{id}$ y $\omega_*([\gamma]) \in \text{Ker } \nu$.

\subseteq Si $[\mu] \in \text{Ker } \nu$ entonces $\nu([\mu]) = g_\mu = \text{id}$, luego $g_\mu\tilde{x}_0 = t(\tilde{\mu}) = \tilde{x}_0$. Así que la elevación $\tilde{\mu}$ de μ en \tilde{x}_0 es un lazo y define una clase de homología $[\tilde{\mu}] \in H_1(X, \mathbb{Z})$ con $\omega_*([\tilde{\mu}]) = [\omega(\tilde{\mu})] = [\mu] \in \omega_*(H_1(X, \mathbb{Z}))$.

Veamos ahora la segunda parte del enunciado.

\Rightarrow Es inmediato que si la elevación $\tilde{\beta}$ es un lazo, entonces $[\beta] = \omega_*([\tilde{\beta}]) \in \omega_*(H_1(X, \mathbb{Z})) = \text{Ker } \nu$.

\Leftarrow Si $[\beta] \in \text{Ker } \nu = \omega_*(H_1(X, \mathbb{Z}))$, entonces $[\beta] = \omega_*([\gamma]) = [\omega(\gamma)]$ para algún lazo γ en \tilde{x}_0 . Así, $\omega(\gamma)$ es un lazo en x_0 homólogo a β . Entonces $g_\beta = g_{\omega(\gamma)}$ por el Lema 3.2.2 y $t(\tilde{\beta}) = g_\beta\tilde{x}_0 = g_{\omega(\gamma)}\tilde{x}_0 = t(\widetilde{\omega(\gamma)}) = t(\gamma) = \tilde{x}_0$. Por tanto $\tilde{\beta}$ es un lazo en \tilde{x}_0 .

□

Lema 4.1.4. *Sean $\omega_1 : X \rightarrow X_1$ y $\omega_2 : X_1 \rightarrow X_0$ dos aplicaciones recubridoras tales que la composición $\omega = \omega_2 \circ \omega_1$, que sabemos que es aplicación recubridora por el Lema 3.1.15, es abeliana y regular. Entonces ω_1 y ω_2 también lo son y además $G(\omega_2)$ es isomorfo al grupo cociente $G(\omega)/G(\omega_1)$.*

Demostración. Escribimos $X = (V, E)$, $X_1 = (V_1, E_1)$ y $X_0 = (V_0, E_0)$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\omega_1} & X_1 \\ & \searrow \omega & \downarrow \omega_2 \\ & & X_0 \end{array}$$

- Regularidad de $\omega_1 : X \rightarrow X_1$. Sean $x, y \in V$ tales que $\omega_1(x) = \omega_1(y)$, es decir, x e y pertenecen a la misma fibra de ω_1 . Aplicando ω_2 a ambos lados, nos queda que $\omega(x) = \omega(y)$ y por tanto, x e y están en la misma fibra de ω . Por ser la acción de $G(\omega)$ transitiva sobre las fibras de ω , existe $\sigma \in G(\omega)$ tal que $y = \sigma x$. Veamos que $\sigma \in G(\omega_1)$. Para ello, observamos que ω_1 y $\omega_1 \circ \sigma : X \rightarrow X_1$ son elevaciones de $\omega : X \rightarrow X_0$ para ω_2 pues $\omega_2 \circ \omega_1 \circ \sigma = \omega \circ \sigma = \omega = \omega_2 \circ \omega_1$. Además ambas tienen el mismo valor en x , pues $\omega_1 \circ \sigma(x) = \omega_1(y) = \omega_1(x)$. Usando el Teorema de unicidad de elevación, tenemos que $\omega_1 \circ \sigma = \omega_1$ y así $\sigma \in G(\omega_1)$.
- ω_1 es aplicación abeliana pues por el Lema 3.1.15, $G(\omega_1)$ es subgrupo de $G(\omega)$, el cuál es abeliano.
- Para demostrar la regularidad de ω_2 , definimos la siguiente acción de $G(\omega)$ sobre X_1 . Sea $x \in V_1$, $e \in E_1$ y $\sigma \in G(\omega)$:

1. $\sigma \cdot x = \omega_1(\sigma x')$, para $x' \in V$ con $\omega_1(x') = x$.

2. $\sigma \cdot e = \omega_1(\sigma e')$, para $e' \in E$ con $\omega_1(e') = e$.

Utilizaremos “ \cdot ” para la nueva operación y así poder diferenciar esta acción de la acción de $G(\omega)$ sobre X .

Por un lado, tenemos que esta acción está bien definida para los vértices. En efecto, sea $x'' \in V$ tal que $\omega_1(x'') = x = \omega_1(x')$, entonces como ω_1 es regular, existe un $\mu \in G(\omega_1) \subseteq G(\omega)$ tal que $x'' = \mu x'$. De esta forma, $\omega_1(\sigma x'') = \omega_1(\sigma \mu x') = \omega_1(\mu \sigma x') = \omega_1(\sigma x')$, donde en la penúltima y última igualdad se ha utilizado el hecho de que $G(\omega)$ es abeliano y que $\mu \in G(\omega_1)$, respectivamente. Luego la acción está bien definida sobre los vértices.

Ahora veamos para las aristas. Sea $e'' \in E$ tal que $\omega_1(e'') = e = \omega_1(e')$. Entonces $\omega_1(o(e'')) = \omega_1(o(e'))$ y se tiene que existe un $\eta \in G(\omega_1)$ de forma que $o(e'') = \eta(o(e')) = o(\eta e')$. Usando la propiedad de biyectividad sobre las aristas de ω_1 (por ser aplicación recubridora), se tiene que $e'' = \eta e'$ y $\omega_1(\sigma e'') = \omega_1(\sigma \eta e') = \omega_1(\eta \sigma e') = \omega_1(\sigma e')$.

Para ver que en efecto es una acción de $G(\omega)$ sobre X_1 , hay que probar las propiedades de la definición de acción:

- Sea $\sigma_1, \sigma_2 \in G(\omega)$ y tomamos $x' \in V$ con $\omega_1(x') = x \in V_1$. Entonces por la acción que hemos definido, $\sigma_1 \cdot (\sigma_2 \cdot x) = \omega_1(\sigma_1 \sigma_2 x') = (\sigma_1 \sigma_2) \cdot x$. En el caso de las aristas, si $e' \in E$ con $\omega_1(e') = e$, entonces $\sigma_1 \cdot (\sigma_2 \cdot e) = \omega_1(\sigma_1 \sigma_2 e') = (\sigma_1 \sigma_2) \cdot e$.
- Si $\sigma = \text{id}$, entonces $\sigma \cdot x = \omega_1(\sigma x') = \omega_1(x') = x$ y $\sigma \cdot e = \omega_1(\sigma e') = (\omega_1)e' = e$.

Obsérvese que esta acción de $G(\omega)$ sobre X_1 es transitiva sobre las fibras de ω_2 , pues para $x_0 \in V_0$, si $y, z \in \omega_2^{-1}(x_0)$ dados $y', z' \in V$ con $\omega_1(y') = y$ y $\omega_1(z') = z$, tenemos que $y', z' \in \omega^{-1}(x_0)$. Así existe $\sigma \in G(\omega)$ con $z' = \sigma y'$. Luego por definición de la acción, $z = \omega_1(z') = \omega_1(\sigma y') = \sigma \cdot y$.

- Veamos que $G(\omega_2)$ es isomorfo al grupo cociente $G(\omega)/G(\omega_1)$, y por tanto ω_2 también será

una aplicación recubridora abeliana. Para $\sigma \in G(\omega)$, sea $\psi_\sigma : X_1 \rightarrow X_1$ el isomorfismo dado por $\psi_\sigma(x) = \sigma \cdot x$ y $\psi_\sigma(e) = \sigma \cdot e$, para $x \in V_1$, $e \in E_1$. En particular, ψ_σ es una transformación recubridora para ω_2 , pues si $x = \omega_1(x')$ entonces

$$\omega_2(\psi_\sigma(x)) = \omega_2(\sigma \cdot x) = \omega_2(\omega_1(\sigma x')) = \omega(\sigma x') = \omega(x') = \omega_2(\omega_1(x')) = \omega_2(x).$$

Por ello, $\nu : G(\omega) \rightarrow G(\omega_2)$ dado por $\sigma \mapsto \psi_\sigma$ es un homomorfismo de grupos para el cuál la igualdad de la definición sobre los vértices de la acción de $G(\omega)$ sobre X_1 queda

$$(\nu(\sigma))(x) = \sigma \cdot x = \omega_1(\sigma x'), \text{ para todo } x' \in X_2 \text{ y } x = \omega_1(x').$$

Veamos que ν es sobreyectivo. En efecto, sea $\mu \in G(\omega_2)$. Para cualquier $x \in V_1$, x y μx están en la misma fibra para ω_2 . De la transitividad de la acción de $G(\omega)$ en las fibras de ω_2 , se sigue que existe $\sigma \in G(\omega)$ con $\sigma \cdot x = \mu x$. Pero $\nu(\sigma)x = \psi_\sigma(x) = \sigma \cdot x = \mu x$ y como $\nu(\sigma), \mu \in G(\omega_2)$ coinciden para todo $x \in V_2$, se tiene que $\mu = \nu(\sigma)$. Hemos probado pues que ν es sobreyectivo. Además, si $\sigma \in \text{Ker } \nu$ (o, equivalentemente, $\nu(\sigma) = \text{id}$), tenemos que para todo $z \in V$, $\omega_1(z) = \psi_\sigma(\omega_1(z)) = \sigma \cdot \omega_1(z) = \omega_1(\sigma z)$. La última igualdad se corresponde con la definición sobre los vértices de la acción de $G(\omega)$ sobre X_1 . Por tanto, $\text{Ker } \nu = G(\omega_1)$, siguiéndose del primer Teorema de isomorfía que ν induce un isomorfismo entre $G(\omega)/G(\omega_1)$ y $G(\omega_2)$.

□

Teorema 4.1.5. *Dado un grafo X_0 conexo siempre existe una aplicación abeliana universal $u : U \rightarrow X_0$. Además u es regular y cumple al propiedad universal sobre X_0 .*

Demostración. Para construir U fijamos un vértice $x_0 \in V_0$. Ahora para cada vértice $x \in V_0$ tomamos las clases de homología $[[\beta]]$ de caminos $\beta : x_0 \rightarrow x$ (que existen por ser X_0 conexo). Vamos a tomar el conjunto de vértices de U como $V_U = \{[[\beta]] : x_0 \rightarrow x \mid x \in V_0\}$. En cuanto al conjunto de aristas E_U , se establece que dos vértices $[[\beta]] : x_0 \rightarrow x$ y $[[\eta]] : x_0 \rightarrow y$ son adyacentes si existe una arista orientada $e \in E_0$ entre x e y y $[[\eta]] = [[\beta e]]$. En cuanto a la orientación, tomamos el sentido de $[[\beta]]$ a $[[\eta]]$. Denotamos por $\varepsilon([[\beta]], e)$ a la arista que va de $[[\beta]]$ a $[[\beta e]]$. De esta forma, $\overline{\varepsilon([[\beta]], e)} = \varepsilon([[\beta e]], \bar{e})$.

Veamos que U es conexo. En efecto, dados dos vértices cualesquiera de U , $[[\beta]] : x_0 \rightarrow x$ y $[[\eta]] : x_0 \rightarrow y$, tomamos un camino en X_0 entre x e y , $\gamma : x \rightarrow y$, con $\gamma = e_1 \cdots e_k$. Entonces el camino formado por los vértices $[[\beta]]$, $[[\beta e_1]]$, $[[\beta e_1 e_2]]$, ..., $[[\beta e_1 \cdots e_k]]$ es un camino entre $[[\beta]]$ y $[[\alpha]]$, donde $\alpha = \beta e_1 \cdots e_k = \beta \gamma$. A continuación formamos el lazo $\xi = \bar{\alpha} \eta$ en el vértice y , ya que $o(\bar{\alpha}) = t(\alpha) = t(e_k) = y$. De esta forma, tenemos además del camino entre $[[\beta]]$ y $[[\alpha]]$, un camino entre $[[\alpha]]$ y $[[\alpha \xi]] = [[\eta]]$. La yuxtaposición entre estos dos caminos, es el camino deseado entre $[[\beta]]$ y $[[\eta]]$. Luego U es conexo.

Veamos como actúa el grupo $H_1(X_0, \mathbb{Z})$ sobre U . Para ello, tomamos un vértice $[[\beta]] : x_0 \rightarrow x$ y un ciclo $z \in H_1(X_0, \mathbb{Z})$, que por el Corolario 2.3.12 determina una única clase de homología de

lazos en x_0 , $[\eta] : x_0 \rightarrow x_0$ que cambiamos por $z = [\eta]$ (recordemos que identificamos z con $[\eta]$ por la Nota 2.3.13). Definimos entonces la acción como $z\llbracket\beta\rrbracket = \llbracket\eta\beta\rrbracket$.

La acción sobre las aristas está definida tomando $z\varepsilon(\llbracket\beta\rrbracket, e)$ como la arista $\varepsilon(\llbracket\eta\beta\rrbracket, e)$. Notar que si β es un lazo en x_0 y $z' = \llbracket\beta\rrbracket$, entonces $z+z' = \llbracket\eta\beta\rrbracket = z\llbracket\beta\rrbracket$; esto es, la acción de z sobre $\llbracket\beta\rrbracket$ se corresponde con la suma de ciclos en $H_1(X_0, \mathbb{Z})$. Aquí hemos utilizado de nuevo la identificación de la Nota 2.3.13.

Esta acción es sin inversión, pues si no lo fuese, $z\varepsilon(\llbracket\beta\rrbracket, e) = \overline{\varepsilon(\llbracket\beta\rrbracket, e)} = \varepsilon(\llbracket\beta e\rrbracket, \bar{e})$ llevaría a $e = \bar{e}$. Además es libre, pues dados $\llbracket\beta\rrbracket$ y $z = [\eta]$ tales que $z\llbracket\beta\rrbracket = \llbracket\eta\beta\rrbracket = \llbracket\beta\rrbracket$, entonces:

$$\eta \sim_h \eta\beta\bar{\beta} \sim_h \beta\bar{\beta} \sim_h c_{x_0}$$

donde c_{x_0} es el camino constante en x_0 , y así z es la clase del lazo constante. En particular, los espacios orbitales de vértices y aristas de U dan lugar al grafo $U/H_1(X_0, \mathbb{Z})$. Probamos que X_0 es isomorfo a este grafo cociente. Para ello, definimos la aplicación $u : U \rightarrow X_0$ como $u(\llbracket\beta\rrbracket : x_0 \rightarrow x) = x$ para los vértices y $u(\varepsilon(\llbracket\beta\rrbracket, e)) = e$ para las aristas.

Para esta aplicación, dado $x \in V_0$, la órbita de un vértice $\llbracket\beta\rrbracket : x_0 \rightarrow x$ de V_U es justamente el conjunto de vértices de V_U correspondientes a las clases de homología de caminos entre x_0 y x . En efecto, para todo vértice $\llbracket\gamma\rrbracket : x_0 \rightarrow x$, si $z \in H_1(X_0, \mathbb{Z})$ es el ciclo definido por el lazo $\gamma\bar{\beta}$ en x_0 tenemos $\llbracket\gamma\rrbracket = \llbracket\gamma\bar{\beta}\beta\rrbracket = z\llbracket\beta\rrbracket$. Por tanto la aplicación $\psi : X_0 \rightarrow U/H_1(X_0, \mathbb{Z})$ que lleva $x \in V_0$ en la órbita de $\llbracket\beta\rrbracket : x_0 \rightarrow x$ es una biyección entre los dos conjuntos de vértices que se extiende a una biyección entre los conjuntos de aristas al llevar $e \in E_0$ en la órbita de la arista $\varepsilon(\llbracket\beta\rrbracket, e)$. Esto se puede hacer porque dicha órbita consiste en todas las aristas de la forma $\varepsilon(\llbracket\gamma\rrbracket, e)$ con $\llbracket\gamma\rrbracket : x_0 \rightarrow o(e)$, pues para el ciclo z correspondiente a la clase de homología del lazo $\gamma\bar{\beta}$ en x_0 , se tiene que $z\varepsilon(\llbracket\beta\rrbracket, e) = \varepsilon(\llbracket\gamma\bar{\beta}\beta\rrbracket, e) = \varepsilon(\llbracket\gamma\rrbracket, e)$. Así pues, para el morfismo $u : U \rightarrow X_0$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\pi} & U/H_1(X_0, \mathbb{Z}) \\ & \searrow u & \uparrow \psi \\ & & X_0 \end{array}$$

lo que demuestra que $u : U \rightarrow X_0$ es una aplicación recubridora que por ψ se identifica con la proyección natural sobre el espacio de órbitas de la acción de $H_1(X_0, \mathbb{Z})$ sobre U . En particular, ψ induce un isomorfismo $\rho_\psi : G(u) \rightarrow H_1(X_0, \mathbb{Z})$ que lleva $\sigma \in G(u)$ en el ciclo $\rho_\psi(\sigma)$ correspondiente a la clase de homología $\llbracket\beta\rrbracket$ del lazo β en x_0 tal que $\sigma(\llbracket c_{x_0} \rrbracket) = \llbracket\beta\rrbracket$.

Comprobamos ahora que el inverso de ρ_ψ es justamente el homomorfismo $\nu : H_1(X_0, \mathbb{Z}) \rightarrow G(u)$ con $\nu(\llbracket\beta\rrbracket) = g_\beta$ dado en el Lema 3.2.2. En efecto, tenemos por definición que $g_\beta\tilde{x}_0 = t(\tilde{\beta})$, siendo $\tilde{\beta}$ la elevación de β en $\tilde{x}_0 = \llbracket c_{x_0} \rrbracket : x_0 \rightarrow x_0$. Ahora bien, si $\beta = e_1 \cdots e_n$ entonces $\tilde{\beta} = \varepsilon(\llbracket c_{x_0} \rrbracket, e_1)\varepsilon(\llbracket e_1 \rrbracket, e_2) \cdots \varepsilon(\llbracket e_1 \cdots e_{n-1} \rrbracket, e_n)$, ya que $\varepsilon(\llbracket e_1 \cdots e_j \rrbracket, e_{j+1})$ es la única arista de U con $o(\varepsilon(\llbracket e_1 \cdots e_j \rrbracket, e_{j+1})) = \llbracket e_1 \cdots e_j \rrbracket : x_0 \rightarrow t(e_j) = t(\varepsilon(\llbracket e_1 \cdots e_{j-1} \rrbracket, e_j))$. Además $t(\tilde{\beta}) = t(\varepsilon(\llbracket e_1 \cdots e_{n-1} \rrbracket, e_n)) = \llbracket e_1 \cdots e_{n-1} e_n \rrbracket = \llbracket\beta\rrbracket : x_0 \rightarrow x$. Así pues, $g_\beta(\llbracket c_{x_0} \rrbracket) = \llbracket\beta\rrbracket$ y $\rho_\psi(\nu(\llbracket\beta\rrbracket)) = \rho_\psi(g_\beta) = \llbracket\beta\rrbracket$. Esto es, $\rho_\psi \circ \nu = \text{id}$ en $H_1(X_0, \mathbb{Z})$. Como ρ_ψ es isomorfismo, entonces $\nu = \rho_\psi^{-1}$.

Queda demostrar la propiedad universal de u . Para ello empezamos observando que por el Corolario 4.1.3, $u_* : H_1(U, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X_0, \mathbb{Z})$ es el homomorfismo nulo, pues $\text{Im } u_* = \text{Ker } \nu = \{0\}$. Entonces si $\omega : X \rightarrow X_0$ es una aplicación recubridora abeliana, $u_*(H_1(U, \mathbb{Z})) = \{0\} \subseteq \omega_*(H_1(X, \mathbb{Z}))$ y el Criterio de elevación nos proporciona una elevación $\tilde{u} : U \rightarrow X$ para u . Esto es, tenemos la commutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\tilde{u}} & X \\ & \searrow u & \downarrow \omega \\ & & X_0 \end{array}$$

Esta elevación es de hecho una aplicación recubridora. Para ello si $X = (V, E)$, observamos que:

1. $\tilde{u} : V_U \rightarrow V$ es sobreyectivo. En efecto, sea $\tilde{x} \in V$ y sea $x \in V_U$ con $u(x) = \omega(\tilde{x})$. Si $\tilde{u}(x) = \tilde{x}$ hemos acabado, pues $u(x) = \omega(\tilde{u}(x)) = \omega(\tilde{x})$. Si $\tilde{u}(x) \neq \tilde{x}$, sea $\tilde{\beta}$ un camino en X entre $\tilde{u}(x)$ y \tilde{x} . Entonces $\omega\tilde{\beta}$ es un lazo en X_0 (pues $u(x) = \omega(\tilde{x})$) con origen en $\omega\tilde{u}(x) = u(x) = \omega\tilde{x}$. Sea β el camino elevación de $\omega\tilde{\beta}$ para u con origen en x . Entonces $\tilde{u}\beta$ es el camino elevación de $\omega\tilde{\beta}$ para ω con origen en $\tilde{u}(x)$. Así pues, $\tilde{u}\beta$ y $\tilde{\beta}$ son dos caminos elevación de $\omega\tilde{\beta}$ con origen en $\tilde{u}(x)$. Pero por unicidad del camino elevación, $\tilde{u}\beta = \tilde{\beta}$ y en particular, $\tilde{x} = t(\tilde{\beta}) = t(\tilde{u}\beta) = \tilde{u}(t(\beta))$. Esto es, \tilde{x} está en la imagen de \tilde{u} y de esa forma \tilde{u} es sobreyectiva sobre los vértices.
2. Recordemos que $E_{U, [\beta]}$, $E_{\tilde{u}([\beta])}$ y $E_{0,x}$ denotan el conjunto de aristas de E_U con origen en $[\beta]$, de E con origen en $\tilde{u}([\beta])$ y de E_0 con origen en x , respectivamente. Por ser $u = \omega \circ \tilde{u} : E_{[\beta]}^u \rightarrow E_{1, \tilde{u}([\beta])} \rightarrow E_x$ y $\omega : E_{1, \tilde{u}([\beta])} \rightarrow E_x$ aplicaciones biyectivas (pues u y ω son aplicaciones recubridoras), se tiene que \tilde{u} también lo es.

Por el Lema 3.1.15, \tilde{u} es abeliana.

Hemos probado que u cumple la propiedad universal sobre X_0 . □

4.2 Cristales topológicos.

Definición 4.2.1. *Cristal topológico.* Un grafo X se dice que es un cristal topológico de X_0 si existe una aplicación recubridora abeliana $\omega : X \rightarrow X_0$ cuyo grupo de transformaciones $G(\omega)$ es un grupo abeliano libre no nulo. A X_0 y $G(\omega)$ se les llama *grafo base* y *reticulado*, respectivamente, del cristal topológico X . Se llama *dimensión* de X al rango del grupo $G(\omega)$.

En particular, si $u : U \rightarrow X_0$ es la aplicación recubridora universal sobre X_0 , entonces U es un cristal topológico con reticulado $H_1(X_0, \mathbb{Z})$, llamado *cristal topológico universal* sobre X_0 . Su dimensión es el número de Betti, $b_1(X_0)$.

Observar en la definición de cristal topológico que al ser $G(\omega)$ un grupo abeliano infinito, esto implica en particular que $\omega : X \rightarrow X_0$ es de pliegue infinito.

Nota 4.2.2. Por abuso de notación, diremos que $\omega : X \rightarrow X_0$ es un cristal topológico de X_0 si cumple la definición anterior.

Definición 4.2.3. *Sumando directo.* Sea H un subgrupo de un grupo abeliano libre L . Entonces H se dice que es sumando directo de L si existe otro subgrupo $J \subseteq L$ de forma que $L = H \oplus J$.

Lema 4.2.4. *La definición anterior es equivalente a decir que el grupo cociente L/H es un grupo abeliano libre. Más aún, L/H es isomorfo a un sumando directo de L .*

Demostración.

\Rightarrow Supongamos que $L = H \oplus J$ para $J \subseteq L$ subgrupo. Como L es un grupo abeliano libre, se tiene que H y J también lo son. Por tanto, $L/H \cong J$ es un grupo abeliano libre.

\Leftarrow Supongamos ahora que L/H es un grupo abeliano libre y tomemos $\{[\beta_1], \dots, [\beta_n]\}$ una \mathbb{Z} -base. Por otro lado, tenemos que $H \subseteq L$ es libre, y sea $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ una \mathbb{Z} -base. Veamos que $\{\beta_1, \dots, \beta_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ es base de L y así $L = H \oplus J$, donde $J \subseteq L$ es grupo libre con \mathbb{Z} -base $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$. Además $\beta_i \mapsto [\beta_i]$ define un isomorfismo entre J y L/H . En efecto, dado $\alpha \in L$, tenemos que su clase en L/H puede escribirse como $[\alpha] = \sum_{i=1}^n \lambda_i [\beta_i]$, con $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$[\alpha - \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_i] = [\alpha] - [\sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_i] = \sum_{i=1}^n \lambda_i [\beta_i] - \sum_{i=1}^n \lambda_i [\beta_i] = 0.$$

Luego como $[\alpha - \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_i] \in L/H$, se tiene que $\alpha - \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_i \in H$ y podemos expresarlo en la base

de H , es decir, $\alpha - \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_i = \sum_{j=1}^m \mu_j \gamma_j$, con $\mu_j \in \mathbb{Z}$. Por tanto, $\alpha = \sum_{j=1}^m \mu_j \gamma_j + \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_i$.

Además esta expresión es única, pues si $\alpha = \sum_{j=1}^m \mu'_j \gamma_j + \sum_{i=1}^n \lambda'_i \beta_i$, entonces

$$\sum_{j=1}^m (\mu_j - \mu'_j) \gamma_j = \sum_{i=1}^n (\lambda'_i - \lambda_i) \beta_i \in H.$$

Por consiguiente, $[\sum_{i=1}^n (\lambda'_i - \lambda_i) \beta_i] = \sum_{i=1}^n (\lambda'_i - \lambda_i) [\beta_i] = 0$ y por ser $\{[\beta_1], \dots, [\beta_n]\}$ base de L/H ,

necesariamente $\lambda'_i - \lambda_i = 0$ y así $\lambda'_i = \lambda_i$. Además, $\sum_{j=1}^m (\mu_j - \mu'_j) \gamma_j = 0$, y como $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ es base de H , se tiene que $\mu_j - \mu'_j = 0$ y así $\mu_j = \mu'_j$. □

Teorema 4.2.5. *Fijado un grafo X_0 , existe una equivalencia entre los cristales topológicos sobre X_0 y los subgrupos de $H_1(X_0, \mathbb{Z})$ que son sumandos directos. En particular, el cristal universal se asocia a todo $H_1(X_0, \mathbb{Z})$.*

Demostración.

\Rightarrow Sea $\omega : X \rightarrow X_0$ un cristal topológico con reticulado $L = G(\omega)$ y sea $u : U \rightarrow X_0$ el

cristal topológico universal. Por la propiedad universal de u , existe una aplicación recubridora abeliana $\tilde{u} : U \rightarrow X$ tal que $u = \omega \circ \tilde{u}$. Sabemos que $G(u) = H_1(X_0, \mathbb{Z})$; luego por el Lema 3.1.15, $G(\tilde{u}) \subseteq H_1(X_0, \mathbb{Z})$, y por el Lema 4.1.4, $G(\omega)$ es isomorfo a $H_1(X_0, \mathbb{Z})/G(\tilde{u})$. En particular, $G(\tilde{u})$ es un subgrupo libre de $H_1(X_0, \mathbb{Z})$. Usando el Lema 4.2.4, se tiene que L es un sumando directo de $H_1(X_0, \mathbb{Z})$.

\Leftarrow Recíprocamente, supongamos que $L \subseteq H_1(X_0, \mathbb{Z})$ es un sumando directo y así $H_1(X_0, \mathbb{Z}) = L \oplus H$. Como $H_1(X_0, \mathbb{Z})$ actúa libremente y sin inversión sobre U y H es un subgrupo de $H_1(X_0, \mathbb{Z})$, tenemos por el Teorema 3.1.17, una la aplicación recubridora abeliana $\omega : U \rightarrow U/H$.

Vamos a comprobar que $H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$ actúa sobre U/H . En efecto, si $[g] \in H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$ y $[x] \in U/H$ (por abuso del lenguaje, no hacemos diferencia, por ahora, entre la notación de cada clase), entonces $[g][x] = [gx]$ está bien definido, pues dados g' y x' tales que $[g] = [g']$ y $[x] = [x']$, existen $h_1, h_2 \in H$ con $g' = gh_1$ y $x' = h_2x$. Por tanto, usando la conmutatividad de los grupos, $g'x' = gh_1h_2x = h_1h_2gx$ y así $[g'x'] = [gx] \in U/H$.

Veamos que la acción anterior es libre. Supongamos que existe $[g] \in H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$ y $[x] \in U/H$ de forma que $[x] = [g][x] = [gx] \in U/H$. Entonces existe un $h \in H$ tal que $hx = gx$, y aplicando h^{-1} a ambos lados, $x = h^{-1}gx$. Como sabemos que $H_1(X_0, \mathbb{Z})$ actúa libremente sobre U , se tiene que $h^{-1}g = \text{id}$ y así, $g = h \in H$ y $[g] = [\text{id}] \in H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$.

Por último, demostremos que el espacio de órbitas de la acción es X_0 ; es decir, que $X_0 \cong (U/H)/(H_1(X_0, \mathbb{Z})/H)$. Aquí sí distinguiremos la clase, denotando por $[\cdot]_1$ a la clase en U/H , $[\cdot]_2$ a la clase en $(U/H)/(H_1(X_0, \mathbb{Z})/H)$ y $[\cdot]_3$ a la clase en $H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$. Sea la aplicación $\psi : (U/H)/(H_1(X_0, \mathbb{Z})/H) \rightarrow X_0$ dada por $\psi([\cdot]_2) = u(x)$ para x vértice o arista de U . Comprobemos que es un isomorfismo.

- Vemos que está bien definida. Sean $x, x' \in U$ tales que $[\cdot]_2 = [\cdot]_2$. Entonces existe $[g]_3 \in H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$ tal que $[g]_3[\cdot]_1 = [gx]_1 = [x']_1$ y por tanto existe $h \in H$ con $x' = hgx$. Concluimos entonces que $u(x) = u(hgx) = u(x')$.
- Se tiene que ψ es sobreyectiva, pues u lo es. Por otro lado, ψ es inyectiva pues si $u(x) = \psi([\cdot]_2) = \psi([\cdot]_2) = u(x')$, entonces existe $g \in H_1(X_0, \mathbb{Z})$ con $gx = x'$ y por ello $[g]_3 \in H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$ cumple que $[g]_3[\cdot]_1 = [x']_1$, es decir, $[\cdot]_2 = [\cdot]_2$.

De esta forma, por el Teorema 3.1.17 obtenemos una aplicación recubridora abeliana $\bar{u} : U/H \rightarrow X_0$ con $G(\bar{u}) = H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$. Es inmediato que $\bar{u} \circ \omega = u$, y así, usando el Lema 4.1.4, \bar{u} define un cristal topológico con reticulado $G(\bar{u}) \cong G(u)/G(\omega) \cong H_1(X_0, \mathbb{Z})/H \cong L$.

□

Definición 4.2.6. *Grupo anulador.* Sea $\omega : X \rightarrow X_0$ un cristal topológico con reticulado $G(\omega)$. Entonces un subgrupo $H \subseteq H_1(X_0, \mathbb{Z})$ tal que $G(\omega) \cong H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$ se le llama grupo anulador del cristal.

Nota 4.2.7. Como para todo $d \in \mathbb{N}$ con $1 \leq d < b_1(X_0)$ existen infinitos subgrupos $H \subset H_1(X_0, \mathbb{Z})$ que son sumandos libres y tales que el rango de $H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$ es d , se sigue que hay

entonces infinitos cristales topológicos de dimensión n sobre un grafo base fijado X_0 .

Por tanto, para poder clasificar los cristales topológicos se introduce un procedimiento para “medir” los grupos anuladores por medio de la siguiente norma sobre las cadenas $\alpha \in C_1(X_0, \mathbb{Z})$.

Si $\alpha = \sum_{e \in E_0^0} z_e e$, $z_e \in \mathbb{Z}$, denotamos $\|\alpha\|_1 = \sum_{e \in E_0^0} |z_e|$ (E_0^0 es una orientación en E_0).

Nota 4.2.8. La norma $\|\cdot\|_1$ no depende de la orientación elegida sobre las aristas de X_0 , pues el valor absoluto aplicado a los coeficientes z_e elimina la dependencia de la elección de una orientación.

Sea $\omega : X \rightarrow X_0$ un cristal topológico con reticulado L y con $\dim X = d$, y sea $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ base de $H_1(X_0, \mathbb{Z})$ ($n = b_1(X_0)$). Para un subgrupo anulador H de este cristal, sea $S = \{\alpha_{d+1}, \dots, \alpha_n\} \subset H_1(X_0, \mathbb{Z})$ una base para H (cambiando los subíndices si fuese necesario). Definimos $h(S) = \max\{\|\alpha_{d+1}\|_1 \cdots \|\alpha_n\|_1\}$ y llamamos *altura* de H a $h(H) = \min h(S)$, S variando sobre todas las bases de H .

Teorema 4.2.9. *Sea h cualquier número positivo. Dado $d \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq d < n = b_1(X_0)$, solo existe una cantidad finita de subgrupos anuladores $H \subseteq H_1(X_0, \mathbb{Z})$ para el cristal $\omega : X \rightarrow X_0$ cumpliendo que:*

1. *El rango de $H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$ es d .*
2. *$h(H) \leq h$.*

Demostración. Dado $h > 0$, sea $R_1 = \{S \subset H_1(X_0, \mathbb{Z}) : S \text{ base de } H \text{ y } h(S) \leq h\}$. Se tiene que R_1 es un conjunto finito, pues los conjuntos base S hay que elegirlos entre los elementos de $H_1(X_0, \mathbb{Z})$ cuyas sumas de coeficientes no superen el número h . Ahora sea $R_2 = \{H \subset H_1(X_0, \mathbb{Z}) : H \text{ subgrupos con } h(H) \leq h\}$. Para cada H en R_2 existe S en R_1 con S base de H . Entonces la aplicación $\psi : R_1 \rightarrow R_2$ dada por $\psi(S) = \mathbb{Z}(S)$ (con $\mathbb{Z}(S)$ subgrupo con base S) es sobreyectiva y por tanto, R_2 es finito. □

Nota 4.2.10. Sea $\omega : X \rightarrow X_0$ una aplicación recubridora abeliana de forma que $G = G(\omega)$ actúe sin inversión pero no libremente. Por el Teorema de clasificación de grupos abelianos, $G = L_G \oplus T_G$, donde L_G y T_G indican la parte libre y la parte con torsión de G , respectivamente. Restringiendo la acción de G sobre X a L_G , tenemos una nueva aplicación recubridora abeliana $\omega' : X \rightarrow X'_0 = X/L_G$ que ahora sí es un cristal topológico, pues $G(\omega') = L_G$ es libre y actúa sin inversión al ser un subgrupo de G . Así, todo X para el cuál exista una aplicación recubridora abeliana, puede ser considerada un cristal topológico, cambiando como hemos visto el grafo base si fuese necesario.

5. Ejemplos.

5.1 Ejemplos de cristales topológicos.

En esta sección vamos a exponer varios ejemplos de cristales topológicos. La notación que seguiremos para ello es la misma que hasta ahora, $\omega : X \rightarrow X_0$, donde $X = (V, E)$ y $X_0 = (V_0, E_0)$. Cuando se trate del cristal universal, escribiremos $u : U \rightarrow X_0$, con $U = (V_U, E_U)$.

Para ver cuál es el reticulado $G(\omega)$ de cada cristal, usamos del Lema 4.1.2 el homomorfismo sobreyectivo $\nu : H_1(X_0, \mathbb{Z}) \rightarrow G(\omega)$ dado por $\nu([\beta]) = g_\beta$. Recordemos lo que hacía este homomorfismo. Dados $x_0 \in V_0$, $\tilde{x}_0 \in \omega^{-1}(x_0)$ y un lazo β en x_0 , sabemos que existe un único camino elevación $\tilde{\beta}$ tal que $o(\tilde{\beta}) = \tilde{x}_0$ y $\omega(\tilde{\beta}) = \beta$. Entonces $\nu([\beta])$ nos da el único elemento $g_\beta \in G(\omega)$ tal que $t(\tilde{\beta}) = g_\beta \tilde{x}_0$.

Además, basta aplicar ν a los elementos de una base de $H_1(X_0, \mathbb{Z})$, la cual calcularemos usando el procedimiento del Lema 2.3.11.

En general, los ejemplos vendrán explicados de acuerdo al siguiente procedimiento:

1. Se describirán y representarán los grafos X y X_0 .
2. Se definirá la aplicación ω tanto para aristas como para vértices.
3. Se establecerá una base de $H_1(X_0, \mathbb{Z})$, tomando para ello un árbol de expansión en X_0 .
4. Haciendo uso del Primer teorema de isomorfía y tomando $H = \text{Ker } \nu$, tenemos que $G(\omega) \cong H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$. De esta forma, calculando $\text{Ker } \nu$ y haciendo cociente se obtendrán los generadores de $H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$.
5. Se aplicará el isomorfismo anterior para pasar de los generadores de $H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$ a los generadores de $G(\omega)$. Estos serán la imagen por ν de los elementos de una base complementaria a $\text{Ker } \nu$.

Observar que si $\text{Ker } \nu$ está formado solo por la clase del lazo constante, entonces $G(\omega) \cong H_1(X_0, \mathbb{Z})$ y ω sería el cristal topológico universal de X_0 .

Nota 5.1.1. En todos los ejemplos siguientes, los reticulados $G(\omega)$ de los correspondientes cristales topológicos son abelianos por ser $G(\omega)$ siempre un subgrupo del grupo de traslaciones en el plano o espacio. Por tanto, no se comentará su conmutatividad.

Ejemplo 5.1.1. Sea $u : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dado por $t \mapsto e^{2\pi it}$, donde i es la unidad imaginaria. Representamos \mathbb{R} como un grafo infinito U cuyos vértices son los números enteros y cuyas aristas son los intervalos $[i, i+1]$, para $i \in \mathbb{Z}$; y representamos S^1 como un grafo X_0 formado por un vértice $x_0 = (1, 0)$ y una arista-lazo α .

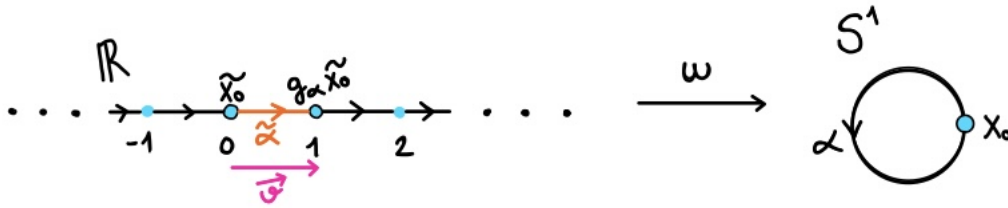


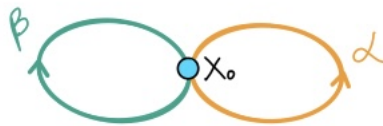
Figura 5.1.1.

Tomamos la aplicación $u : U \rightarrow X_0$ que envía todos los vértices de U al vértice x_0 y todas las aristas de U a la arista-lazo α . Se comprueba que u es aplicación recubridora, pues verifica las dos propiedades de la definición: sobreyectiva sobre los vértices y biyectiva para la restricción a aristas de U con mismo origen. Hay que tener en cuenta que el lazo $\alpha_n = \alpha \cdots \alpha$, con α repetido n veces, tiene como camino elevación por x_0 a $\tilde{\alpha}_n$, mientras que el lazo $\alpha_{-n} = \bar{\alpha} \cdots \bar{\alpha}$, con $\bar{\alpha}$ repetido n veces, tiene como camino elevación por x_0 a $\tilde{\alpha}_{-n}$. Puede haber lazos combinados con n_1 lazos α y n_2 lazos $\bar{\alpha}$, siendo su elevación por x_0 la dada por $\tilde{\alpha}_{n_1-n_2}$. Denotamos α_1 por α , luego $\tilde{\alpha}$ sería la elevación de α en \tilde{x}_0 .

Además, $u : U \rightarrow X_0$ es el cristal topológico universal de X_0 . Para comprobarlo, tomamos el vértice x_0 como árbol de expansión en X_0 y así obtenemos $\{[\alpha]\}$ como base para $H_1(X_0, \mathbb{Z})$.

De esta forma, $\nu([\alpha]) = g_\alpha$ con $g_\alpha \in G(u)$ tal que $t(\tilde{\alpha}) = g_\alpha \tilde{x}_0$ como se indica en la Figura 5.1.1, se identifica con la traslación del vector \vec{v} . Por tanto, $G(\omega)$ está generado por la traslación del vector \vec{v} .

Ejemplo 5.1.2. Sea X_0 el grafo formado por dos aristas-lazo α, β y un único vértice x_0 como se indica a continuación:



Dos ejemplos de cristales X_1 y X_2 sobre el grafo X_0 son los siguientes:

1. $\omega_1 : X_1 \rightarrow X_0$, donde X_1 es el grafo dado por:

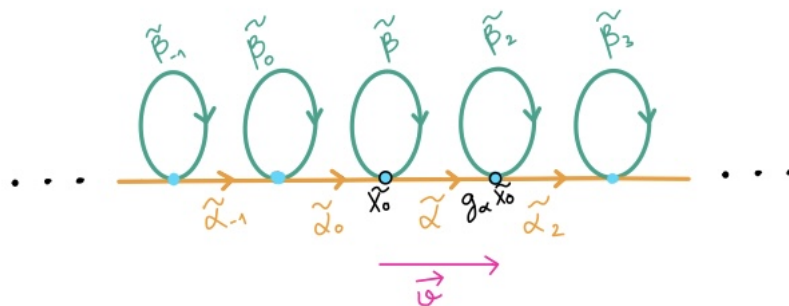


Figura 5.1.2.

Esta aplicación envía todos los vértices de X_1 al vértice x_0 , las aristas β_i a β y las aristas α_j a α ($i, j \in \mathbb{Z}$). Se comprueba fácilmente que ω es aplicación recubridora. De manera análoga que en el Ejemplo 5.1.1, ahora hay que tener en cuenta la construcción de los lazos que se puedan formar con α , con β o con combinaciones entre ellos. Denotamos α_1 por α y β_1 por β .

Una base para $H_1(X_0, \mathbb{Z})$ está formada por $\{[\alpha], [\beta]\}$. De nuevo se ha tomado como árbol de expansión únicamente el vértice x_0 .

Como la elevación $\tilde{\beta}$ de β en \tilde{x}_0 es un lazo, tenemos por el Corolario 4.1.3 que $[\beta] \in \text{Ker } \nu$, luego $\nu([\beta]) = \text{id}$. Si tomamos $H = \text{Ker } \nu \subset H_1(X_0, \mathbb{Z})$ el grupo abeliano libre generado por $[\beta]$, tenemos que $H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$ está generado por $[\alpha]$.

Tenemos que $\nu([\alpha]) = g_\alpha$, con $g_\alpha \in G(\omega)$ de forma que $t(\tilde{\alpha}) = g_\alpha \tilde{x}_0$, se identifica con la traslación del vector \vec{v} dado en la Figura 5.1.2. Por tanto, $G(\omega)$ tiene como base a la traslación por el vector \vec{v} .

2. $\omega_2 : X_2 \rightarrow X_0$, donde X_2 es el grafo dado por:

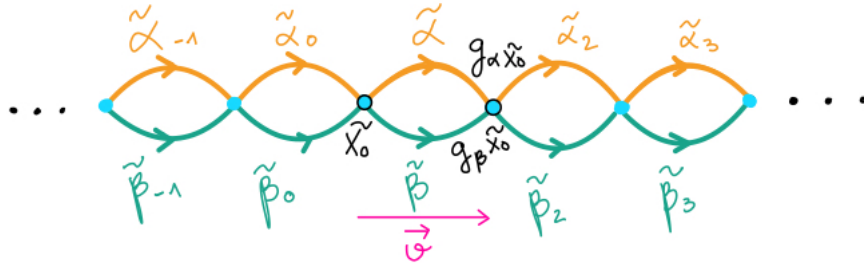


Figura 5.1.3.

Definimos ω_2 de manera análoga a ω_1 .

Como $\nu([\alpha]) = \nu([\beta])$, $\text{Ker } \nu$ está generado por $[\alpha] - [\beta]$. Tomando $H = \text{Ker } \nu \subset H_1(X_0, \mathbb{Z})$, tenemos que $H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$ está generado por $[\alpha]$.

Aplicando ν a $[\alpha]$ tenemos que g_α , con g_α de forma que $t(\tilde{\alpha}) = g_\alpha \tilde{x}_0$, se identifica con la traslación del vector \vec{v} dado en la Figura 5.1.3, y de igual forma lo hace g_β , con g_β de forma que $t(\tilde{\beta}) = g_\beta \tilde{x}_0$. Por tanto, $G(\omega)$ tiene como base a la traslación por el vector \vec{v} .

Vamos ahora a comprobar que el grafo $U = (V_U, E_U)$ asociado al retículo $\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ es el cristal topológico abeliano universal del grafo X_0 . En este caso vamos a construir directamente U usando el procedimiento del Teorema 4.1.5.

- Conjunto de vértices V_U . Fijamos $x_0 \in X_0$, pues es el único vértice que hay, y hallamos todas las clases de homología de lazos en él. Dado un $i \in \mathbb{Z}$, denotamos por α_i al lazo $\alpha \cdots \alpha$, con α apareciendo $|i|$ veces y con la orientación de los α según la que indique el signo de i (con el sentido que se indica en la Figura 5.1.4 si $i > 0$ o con el sentido contrario si $i < 0$). Notamos $\alpha = \alpha_1$ y $\alpha_0 = c_{x_0}$). De la misma forma se sigue para los lazos β_j .

Se tiene que $[\alpha_i] \neq [\alpha_{i'}]$ para todo $i \neq i'$. Análogo para los β_j . También podemos hacer

combinaciones entre ellos, obteniendo así la clase $[[\alpha_i\beta_j]]$, que de igual forma sería distinta de $[[\alpha_{i'}\beta_{j'}]]$ para $(i, j) \neq (i', j')$.

- Conjunto de aristas E_U . Sabemos que dos vértices $[[\alpha_i\beta_j]]$ y $[[\alpha_{i'}\beta_{j'}]]$ son adyacentes si existe una arista orientada e en X_0 (en nuestro caso, α o β) de forma que $[[\alpha_{i'}\beta_{j'}]] = [[\alpha_i\beta_j]e]$.

Gráficamente, obtendríamos el retículo \mathbb{Z}^2 :

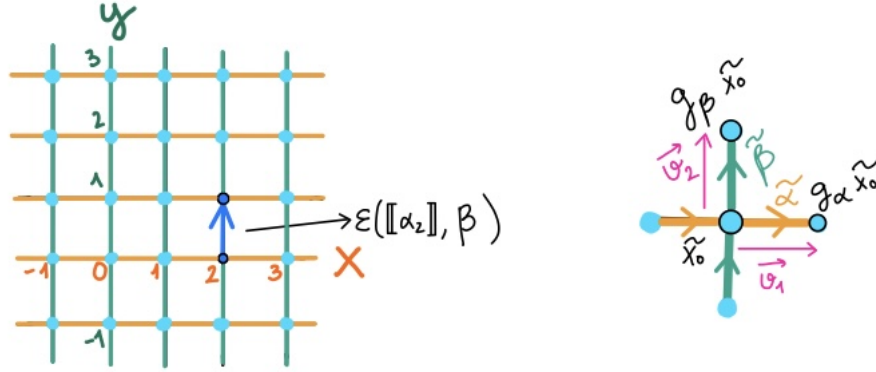


Figura 5.1.4. A la derecha se muestra como sería el patrón de las aristas en el retículo de la izquierda.

El eje x horizontal está representado por las clases que se puedan obtener a partir del lazo α , mientras que el eje y vertical está representado por las clases que se puedan obtener a partir del lazo β . El punto $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ representa al vértice $[[\alpha_i\beta_j]]$. Por ejemplo, el punto $(2, 1)$ se identifica con el vértice $[[\alpha_2\beta]]$, y de la misma forma, el punto $(0, -1)$ se identifica con el vértice $[[\beta_{-1}]]$.

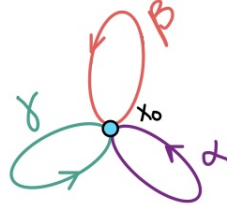
Si ahora tomamos los vértices $[[\alpha_2]]$ y $[[\alpha_2\beta]]$, entonces sabemos que son adyacentes, pues la arista orientada e que tendríamos que tomar para que $[[\alpha_2]e] = [[\alpha_2\beta]]$ sería β . En este caso, obtendríamos la arista $\varepsilon([[\alpha_2]], \beta)$, es decir, la arista que va de $[[\alpha_2]]$ a $[[\alpha_2\beta]]$, como se indica en la Figura 5.1.4 a la izquierda.

La aplicación $u : U \rightarrow X_0$ que envía todos los vértices de U en x_0 , las aristas verticales en β y las aristas horizontales en α es aplicación recubridora.

Como $\text{Ker } \nu$ está formado únicamente por la clase del lazo constante, tenemos que $G(\omega) \cong H_1(X_0, \mathbb{Z})$, que es lo que tenía que salir pues ya sabemos por construcción que U es el cristal abeliano universal sobre X_0 .

Los generadores de $G(\omega)$ son las traslaciones por los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 dados en la Figura 5.1.4 a la derecha. Si $\tilde{\alpha}$ es la elevación de α en \tilde{x}_0 , entonces g_α tal que $t(\tilde{\alpha}) = g_\alpha\tilde{x}_0$ se identifica con la traslación del vector \vec{v}_1 . Análogamente, si $\tilde{\beta}$ es la elevación de β en \tilde{x}_0 , entonces g_β tal que $t(\tilde{\beta}) = g_\beta\tilde{x}_0$ se identifica con la traslación del vector \vec{v}_2 .

Ejemplo 5.1.3. Dado el grafo base X_0 :



Veamos dos cristales topológicos sobre él.

1. El retículo $\mathbb{Z}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$:

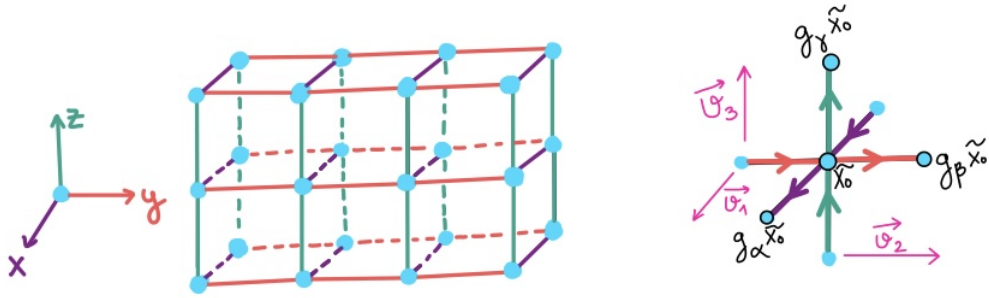


Figura 5.1.5.

es el cristal abeliano universal U sobre X_0 .

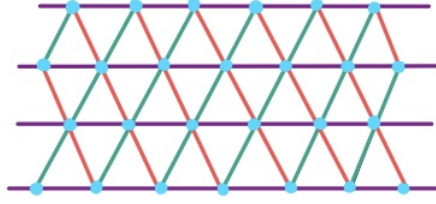
Tanto la construcción de U como la descripción de la aplicación recubridora universal $u : U \rightarrow X_0$ es análoga al caso $n = 2$ del Ejemplo 5.1.2.

Una base para $H_1(X_0, \mathbb{Z})$ viene dada por $\{[\alpha], [\beta], [\gamma]\}$, y como U es el cristal abeliano universal de X_0 , sabemos que $G(u) \cong H_1(X_0, \mathbb{Z})$. Por tanto, si el eje x está representado por las clases que se obtienen a partir del lazo α , el eje y está representado por las clases que se obtienen a partir del lazo β y el eje z está representado por las clases que se obtienen a partir del lazo γ , entonces $G(\omega)$ está generado por las traslaciones de los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, como se muestra en la Figura 5.1.5 a la derecha.

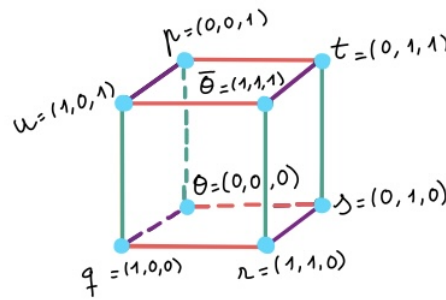
Ahora bien, dado un vértice $(x, y, z) \in V_U$ (recordemos que los vértices del retículo U son los puntos enteros de \mathbb{R}^3) y un elemento $[\mu] \in H_1(X_0, \mathbb{Z})$ con $[\mu] = a_1[\alpha] + a_2[\beta] + a_3[\gamma]$ ($a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$), la acción vendría dada por $[\mu](x, y, z) = (x + a_1, y + a_2, z + a_3) \in V_U$.

En general, si consideramos el grafo dado por un vértice y n aristas-lazo, el cristal topológico universal sería el grafo U determinado por el retículo $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$; es decir, el conjunto de vértices V_U son las n -uplas de enteros (m_1, \dots, m_n) y los vértices adyacentes a (m_1, \dots, m_n) están dados por $(m_1 \pm 1, \dots, m_n)$, $(m_1, m_2 \pm 1, \dots, m_n)$, ..., $(m_1, \dots, m_n \pm 1)$.

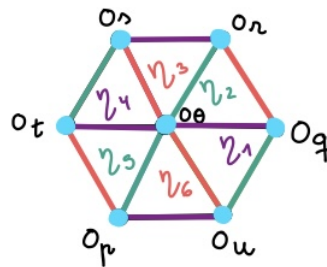
2. Ahora vamos a tomar $H \subset H_1(X_0, \mathbb{Z})$ generado por $[\alpha\beta\gamma]$. Tendríamos que el retículo plano triangular X :



es un cristal topológico sobre X_0 . En efecto, dado $(x, y, z) \in V_U$ consideramos la restricción de la acción de $H_1(X_0, \mathbb{Z})$ sobre U a H , que vendría dada entonces por $[[\mu]](x, y, z) = (x + a, y + a, z + a)$, para $[[\mu]] = a[[\alpha\beta\gamma]] \in H$ ($x, y, z, a \in \mathbb{Z}$). Entonces el espacio de órbitas U/H es isomorfo a X . Para su comprobación, sea el grafo Z formado por las aristas del cubo unidad:



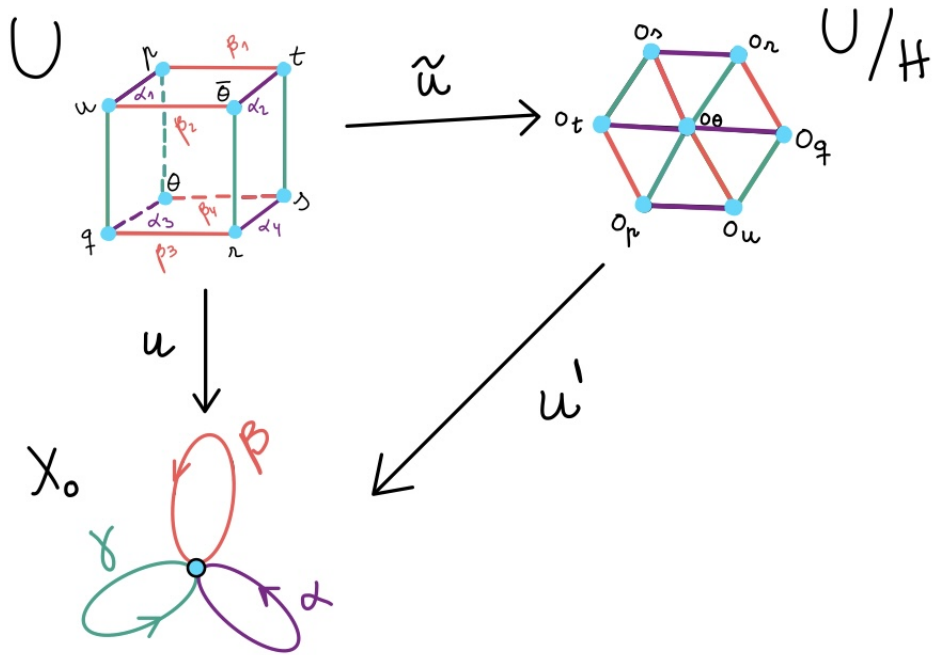
Solo $\theta = (0, 0, 0)$ y $\bar{\theta} = (1, 1, 1)$ están en la misma órbita por la acción de H , pues $\bar{\theta} = (0 + 1, 0 + 1, 0 + 1)$. Si denotamos por o_w a la órbita de un punto $w \in V_U$, tenemos por la proyección canónica que el grafo Z se transforma en el grafo G del espacio orbital U/H :



donde las aristas η_1, η_3 y η_5 son las imágenes de las aristas de Z entre θ y sus vértices adyacentes; mientras que η_2, η_4 y η_6 son las imágenes de las aristas de Z entre $\bar{\theta}$ y sus vértices adyacentes. El resto de aristas de G son las imágenes de las aristas de Z que no son adyacentes ni a θ ni a $\bar{\theta}$.

Esta construcción es compatible en todos los cubos ya que pasar de un cubo a otro es el resultado de hacer actuar $H_1(X_0, \mathbb{Z})$ sobre el grafo Z , que conmuta con la acción de H .

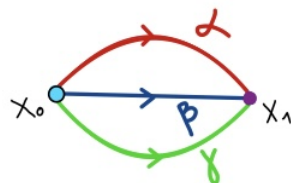
La proyección desde el retículo triangular a X_0 es $u' : U/H \rightarrow X_0$, dada por la factorización de la aplicación recubridora abeliana universal $u : U \rightarrow X_0$:



donde $u(\alpha_j) = \alpha$, $u(\beta_j) = \beta$ y $u(\gamma_j) = \gamma$, para $1 \leq j \leq 3$.

Notar que u' lleva el ciclo de $H_1(U/H, \mathbb{Z})$ formado por el perímetro de cada triángulo en U/H al ciclo $[\alpha\beta\gamma]$ de $H_1(X_0, \mathbb{Z})$ que genera H . En particular, la elevación del lazo $\alpha\beta\gamma$ es el lazo $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}$, y por tanto, la acción de H es la identidad sobre U/H . En particular, el reticulado de u' es isomorfo a $H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$.

Ejemplo 5.1.4. Sea X_0 el grafo dado por dos vértices y tres aristas:



Comprobemos que su cristal universal $U = (V_U, E_U)$ es el retículo por hexágonos del plano:

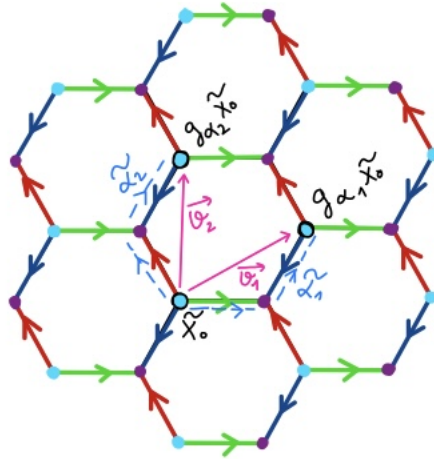


Figura 5.1.6.

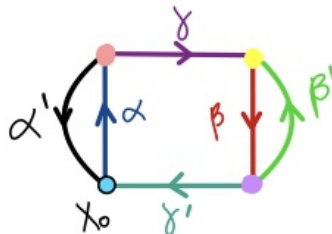
Definimos los lazos α_1 y α_2 en X_0 dados por $\alpha_1 = \gamma\bar{\beta}$ y $\alpha_2 = \alpha\bar{\beta}$. Tomando β como arista para el árbol de expansión en X_0 , tenemos que una base para $H_1(X_0, \mathbb{Z})$ es $\{[\alpha_1], [\alpha_2]\}$.

Teniendo en cuenta la Figura 5.1.6, tomamos la aplicación $u : U \rightarrow X_0$ de forma que envíe los vértices de U en azul claro al vértice x_0 y los vértices morados al vértice x_1 . En cuanto a las aristas, las rojas van en α , las azules oscuras en β y las verdes en γ . Se comprueba así que u es aplicación recubridora.

Como $\text{Ker } \nu$ está formado únicamente por la clase del lazo constante, tenemos que $G(u) \cong H_1(X_0, \mathbb{Z})$ y así U es efectivamente el cristal universal de X_0 .

Aplicando ν a los elementos base, tenemos que los generadores de $G(\omega)$ son las traslaciones por los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 dados en la Figura 5.1.6. Si $\tilde{\alpha}_1$ es la elevación de α_1 en \tilde{x}_0 , entonces g_{α_1} tal que $t(\tilde{\alpha}_1) = g_{\alpha_1}\tilde{x}_0$ se identifica con la traslación del vector \vec{v}_1 . Análogamente, si $\tilde{\alpha}_2$ es la elevación de α_2 en \tilde{x}_0 , entonces g_{α_2} tal que $t(\tilde{\alpha}_2) = g_{\alpha_2}\tilde{x}_0$ se identifica con la traslación del vector \vec{v}_2 .

Ejemplo 5.1.5. Tomamos ahora el grafo X_0 dado por:



Veamos dos cristales para este grafo.

1. El retículo hexagonal X del Ejemplo 5.1.4:

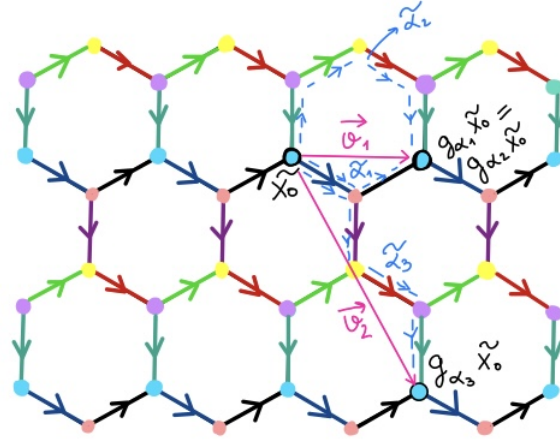


Figura 5.1.7.

es también un cristal con grafo base X_0 .

Sea $\omega : X \rightarrow X_0$ la aplicación que envía los vértices de X del mismo color en el vértice de X_0 de ese mismo color, y de igual manera para las aristas. Entonces ω es aplicación recubridora.

Para obtener una base de $H_1(X_0, \mathbb{Z})$, definimos los lazos $\alpha_1 = \alpha\alpha'$, $\alpha_2 = \beta'\beta$ y $\alpha_3 = \alpha\gamma\beta\gamma'$. Entonces tomando el árbol de expansión en X_0 formado por las aristas $\{\alpha, \beta, \gamma'\}$, concluimos que $\{[\alpha_1], [\alpha_2], [\alpha_3]\}$ es base para $H_1(X_0, \mathbb{Z})$.

Observamos que $\nu([\alpha_1]) = \nu([\alpha_2])$, como se muestra en la Figura 5.1.7. Luego $\text{Ker } \nu$ está generado por $[\alpha_1] - [\alpha_2]$. Por tanto, $H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$ estaría generado por $[\alpha_1]$ y $[\alpha_3]$.

Aplicando ν a los elementos base, tenemos que los generadores de $G(\omega)$ son las traslaciones de los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 dados en la Figura 5.1.7. Si $\tilde{\alpha}_1$ es la elevación de α_1 en \tilde{x}_0 , entonces g_{α_1} tal que $t(\tilde{\alpha}_1) = g_{\alpha_1}\tilde{x}_0$ se identifica con la traslación del vector \vec{v}_1 . Análogamente, si $\tilde{\alpha}_3$ es la elevación de α_3 en \tilde{x}_0 , entonces g_{α_3} tal que $t(\tilde{\alpha}_3) = g_{\alpha_3}\tilde{x}_0$ se identifica con la traslación del vector \vec{v}_2 .

2. Otro ejemplo de cristal con grafo base X_0 sería:

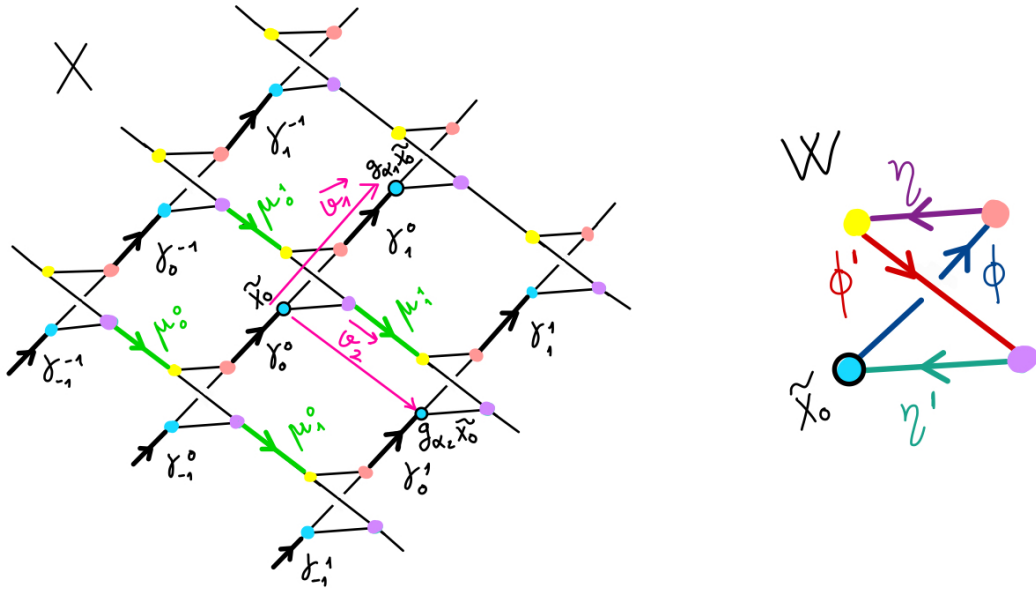


Figura 5.1.8. El grafo X tiene dimensión 2 pero está representado en \mathbb{R}^3 , hay aristas que se cruzan pero no se cortan.

En este caso, la aplicación $\omega : X \rightarrow X_0$ lleva las aristas γ_i^j en $\omega(\gamma_i^j) = \alpha'$ y las aristas μ_i^j en $\omega(\mu_i^j) = \beta'$ ($i, j \in \mathbb{Z}$). De igual forma, lleva las aristas de los subgrafos W en $\omega(\eta) = \gamma$, $\omega(\eta') = \gamma'$, $\omega(\phi) = \alpha$ y $\omega(\phi') = \beta$. En este ejemplo se ha cambiado el nombre habitual de las aristas elevación para tener una notación más agradable.

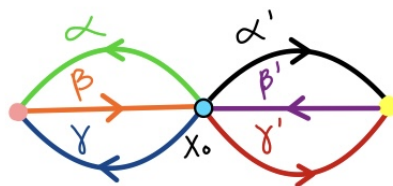
Tomamos la misma base $\{[\alpha_1], [\alpha_2], [\alpha_3]\}$ en $H_1(X_0, \mathbb{Z})$.

$\text{Ker } \nu$ está formado por $[\alpha_3]$, pues su elevación $\tilde{\alpha}_3$ por x_0 es un lazo (Corolario 4.1.3). Por tanto, $H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$, con $H = \text{Ker } \nu$, está generado por $\{[\alpha_1], [\alpha_2]\}$.

Aplicando ν a los elementos base, tenemos que los generadores de $G(\omega)$ son las traslaciones de los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 dados en la Figura 5.1.8. Si $\tilde{\alpha}_1$ es la elevación de α_1 en \tilde{x}_0 , entonces g_{α_1} tal que $t(\tilde{\alpha}_1) = g_{\alpha_1}\tilde{x}_0$ se identifica con la traslación del vector \vec{v}_1 . Análogamente, si $\tilde{\alpha}_2$ es la elevación de α_2 en \tilde{x}_0 , entonces g_{α_2} tal que $t(\tilde{\alpha}_2) = g_{\alpha_2}\tilde{x}_0$ se identifica con la traslación del vector \vec{v}_2 .

Como vimos en el Teorema 4.1.5, si $u : U \rightarrow X_0$ es el cristal abeliano universal sobre X_0 , tenemos que $u = \omega \circ \tilde{u}$, donde $\tilde{u} : U \rightarrow U/H$ y $\omega : U/H \rightarrow X_0$. Se concluye entonces que $X \cong U/H$.

Ejemplo 5.1.6. Sea ahora X_0 dado por:



Entonces un cristal para X_0 puede ser el retículo "pseudocúbico" X :

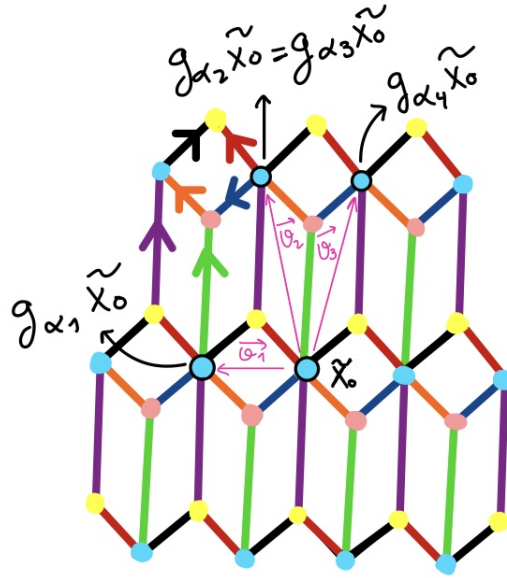


Figura 5.1.9.

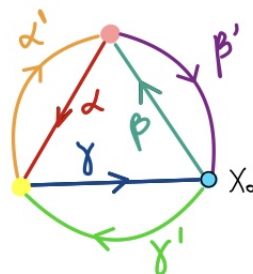
De igual forma que en los ejemplos anteriores, la aplicación ω envía los vértices de un mismo color a su color en X_0 e igual para las aristas.

Tomando $\alpha_1 = \gamma\beta$, $\alpha_2 = \alpha\beta$, $\alpha_3 = \gamma'\beta'$ y $\alpha_4 = \alpha'\beta'$ y el árbol de expansión formado por $\{\beta, \beta'\}$, concluimos que $\{[\alpha_1], [\alpha_2], [\alpha_3], [\alpha_4]\}$ es base para $H_1(X_0, \mathbb{Z})$.

Calculemos $\text{Ker } \nu$. Como $\nu([\alpha_2]) = \nu([\alpha_3])$, tenemos que $[\alpha_2] - [\alpha_3]$ genera $\text{Ker } \nu$. Por tanto, $H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$, con $H = \text{Ker } \nu$, tiene a $\{[\alpha_1], [\alpha_2], [\alpha_4]\}$ como base.

De esta manera, $G(\omega)$ tendría a las traslaciones de los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ como base, como se muestra en la Figura 5.1.9. La traslación del vector \vec{v}_1 se identifica con el elemento g_{α_1} tal que si $\tilde{\alpha}_1$ es la elevación de α_1 en \tilde{x}_0 , entonces $t(\tilde{\alpha}_1) = g_{\alpha_1}\tilde{x}_0$; la traslación del vector \vec{v}_2 se identifica con el elemento g_{α_2} tal que si $\tilde{\alpha}_2$ es la elevación de α_2 en \tilde{x}_0 , entonces $t(\tilde{\alpha}_2) = g_{\alpha_2}\tilde{x}_0$; y la traslación del vector \vec{v}_3 se identifica con el elemento g_{α_4} tal que si $\tilde{\alpha}_4$ es la elevación de α_4 en \tilde{x}_0 , entonces $t(\tilde{\alpha}_4) = g_{\alpha_4}\tilde{x}_0$.

Ejemplo 5.1.7. Tomemos el grafo X_0 como:



Entonces un cristal X sobre este grafo es:

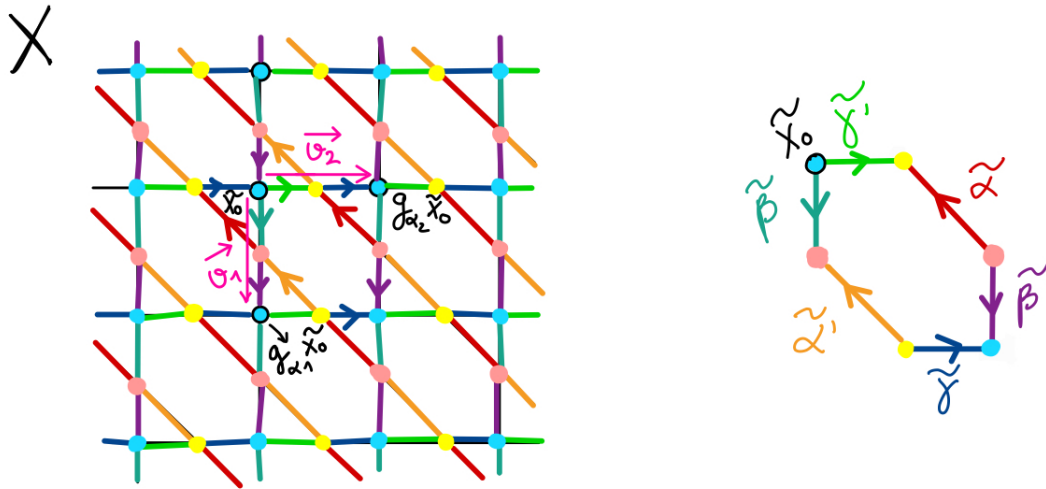


Figura 5.1.10.

Tomamos la aplicación $\omega : X \rightarrow X_0$ dada por $\omega(\tilde{\alpha}) = \alpha$, $\omega(\tilde{\alpha}') = \alpha'$, $\omega(\tilde{\beta}) = \beta$, $\omega(\tilde{\beta}') = \beta'$, $\omega(\tilde{\gamma}) = \gamma$ y $\omega(\tilde{\gamma}') = \gamma'$, la cual es aplicación recubridora.

Definimos los lazos $\alpha_1 = \beta\beta'$, $\alpha_2 = \gamma'\gamma$, $\alpha_3 = \beta\alpha\gamma$ y $\alpha_4 = \gamma'\alpha'\beta'$, y junto con el árbol de expansión en X_0 dado por $\{\beta, \gamma\}$, tenemos que $\{[\alpha_1], [\alpha_2], [\alpha_3], [\alpha_4]\}$ es base para $H_1(X_0, \mathbb{Z})$.

$\text{Ker } \nu$ está generado por $[\alpha_3]$ y $[\alpha_4]$, pues las elevaciones de α_3 y α_4 por x_0 son lazos (Corolario 4.1.3). Tenemos así que $\{[\alpha_1], [\alpha_2]\}$ es base de $H_1(X_0, \mathbb{Z})/H$, donde $H = \text{Ker } \nu$.

Por tanto, $G(\omega)$ está generado por las traslaciones de los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, como se observa en la Figura 5.1.10. La traslación del vector \vec{v}_1 se identifica con el elemento g_{α_1} tal que si $\tilde{\alpha}_1$ es la elevación de α_1 en \tilde{x}_0 , entonces $t(\tilde{\alpha}_1) = g_{\alpha_1}\tilde{x}_0$; mientras que la traslación del vector \vec{v}_2 se identifica con el elemento g_{α_2} tal que si $\tilde{\alpha}_2$ es la elevación de α_2 en \tilde{x}_0 , entonces $t(\tilde{\alpha}_2) = g_{\alpha_2}\tilde{x}_0$.

Ejemplo 5.1.8. Sea X el retículo hexagonal en cada plano $\mathbb{R}^2 \times \{n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, y lo multiplicamos por el retículo por intervalos de longitud uno de la recta real. De esta forma, podemos diferenciar para cada n un nivel tal y como se indica a continuación en la Figura 5.1.11:

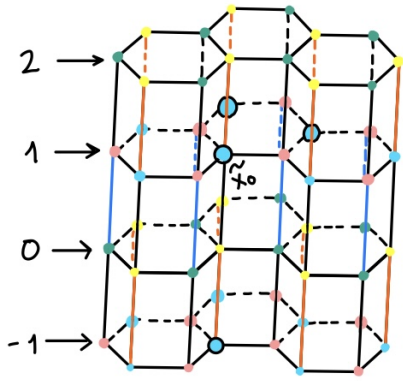


Figura 5.1.11.

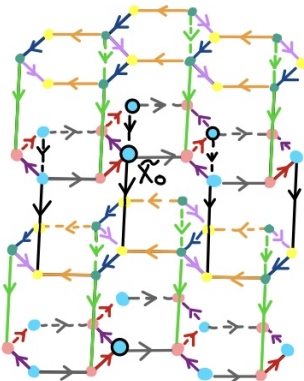


Figura 5.1.12.

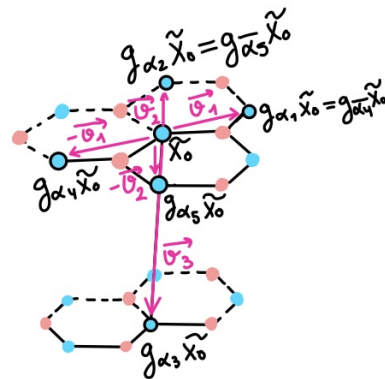
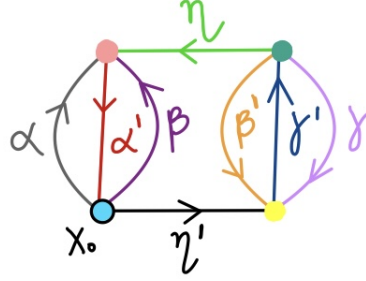


Figura 5.1.13.

Además se ha diferenciado los vértices de los niveles pares, pintados en amarillo y verde, del de

los impares, pintados en azul y rosa, y se han eliminado las aristas azules y naranjas que van de forma alternada en cada nivel (Figura 5.1.11), como se muestra en la Figura 5.1.12.

De esta forma, X es un cristal sobre el grafo base X_0 :



llamado retículo tipo grafito de Lonsdaleite.

Se comprueba que la aplicación $\omega : X \rightarrow X_0$ dada por la forma habitual, es una aplicación recubridora.

Fijado el vértice x_0 , definimos los lazos $\alpha_1 = \alpha\alpha'$, $\alpha_2 = \beta\alpha'$, $\alpha_3 = \eta'\gamma'\eta\alpha'$, $\alpha_4 = \overline{\alpha'}\overline{\eta}\beta'\gamma'\eta\alpha'$ y $\alpha_5 = \overline{\alpha'}\overline{\eta}\gamma'\eta\alpha'$. Tomando el árbol de expansión con aristas $\{\alpha', \eta, \gamma'\}$, tenemos que una base para $H_1(X_0, \mathbb{Z})$ estaría formada por cinco generadores, $\{[\alpha_1], [\alpha_2], [\alpha_3], [\alpha_4], [\alpha_5]\}$.

Como $\nu([\alpha_1]) = -\nu([\alpha_4]) = \nu([\overline{\alpha_4}])$ y $\nu([\alpha_2]) = -\nu([\alpha_5]) = \nu([\overline{\alpha_5}])$, tenemos que $\text{Ker } \nu$ está generado por $\{[\alpha_1] - [\overline{\alpha_4}], [\alpha_2] - [\overline{\alpha_5}]\}$. De esta forma, $H_1(X_0, \mathbb{Z})$ tiene como base a $\{[\alpha_1], [\alpha_2], [\alpha_3]\}$.

Para los generadores de $G(\omega)$ procedemos de forma habitual y teniendo en cuenta la Figura 5.1.13. Así, la traslación del vector \vec{v}_1 se identifica con el elemento g_{α_1} tal que si $\tilde{\alpha}_1$ es la elevación de α_1 en \tilde{x}_0 , entonces $t(\tilde{\alpha}_1) = g_{\alpha_1}\tilde{x}_0$; la traslación del vector \vec{v}_2 se identifica con el elemento g_{α_2} tal que si $\tilde{\alpha}_2$ es la elevación de α_2 en \tilde{x}_0 , entonces $t(\tilde{\alpha}_2) = g_{\alpha_2}\tilde{x}_0$; y la traslación del vector \vec{v}_3 se identifica con el elemento g_{α_3} tal que si $\tilde{\alpha}_3$ es la elevación de α_3 en \tilde{x}_0 , entonces $t(\tilde{\alpha}_3) = g_{\alpha_3}\tilde{x}_0$.

En conclusión, $G(\omega)$ está generado por las traslaciones de los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, y de esta forma X no es el cristal abeliano universal sobre X_0 .

Ejemplo 5.1.9. Veamos ahora el cristal U cuya estructura representa la del diamante como ejemplo de cristal topológico. Sus átomos de carbono estarían configurados como se muestra a continuación:

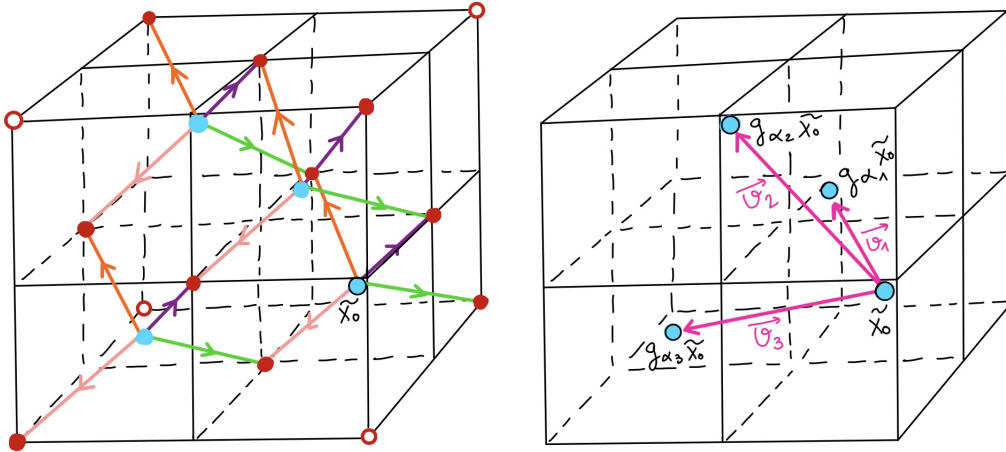


Figura 5.1.14.

Consideramos el retículo cúbico unitario en \mathbb{R}^3 y lo dividimos en ocho cubos de igual tamaño, como se ve en la Figura 5.1.14. Los vértices azules están en el centro de cuatro de ellos: delante, abajo, izquierda; delante, arriba, derecha; detrás, abajo, derecha; y detrás, arriba, izquierda. Quedan así configurados en dos tipos de cubos:

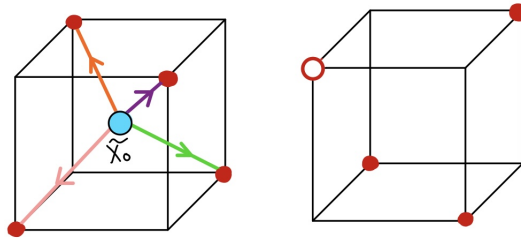


Figura 5.1.15. En cada cubo unidad hay cuatro cubos de un tipo y cuatro del otro.

Los vértices rojos que no están rellenos, estarían conectados a vértices de otro cubo unitario adyacente.

Extendiendo este patrón a todo \mathbb{R}^3 , tendríamos que U es el cristal topológico universal sobre el grafo base X_0 dado por:

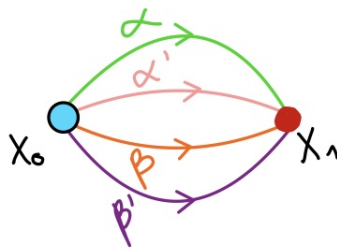


Figura 5.1.16.

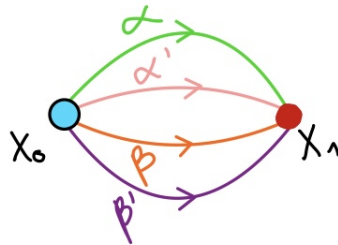
En efecto, definimos $u : U \rightarrow X_0$ de la manera habitual, enviando cada arista de un color en su color en X_0 , los vértices azules en el vértice x_0 y los rojos en x_1 . Se tiene que u es una aplicación recubridora.

Definiendo ahora los lazos $\alpha_1 = \beta' \bar{\alpha}$, $\alpha_2 = \beta \bar{\alpha}$ y $\alpha_3 = \alpha' \bar{\alpha}$ y tomando la arista α para el árbol de expansión, tenemos que $\{[\alpha_1], [\alpha_2], [\alpha_3]\}$ es base de $H_1(X_0, \mathbb{Z})$.

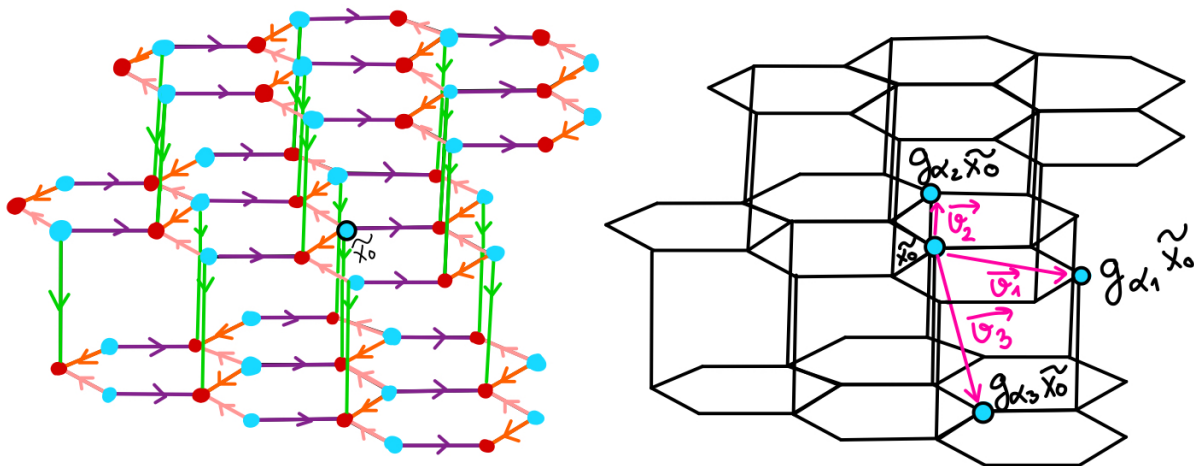
Como $\text{Ker } \nu$ está formado únicamente por la clase del camino constante, tenemos que $G(u) \cong H_1(X_0, \mathbb{Z})$ y así U es el cristal topológico universal de X_0 .

De esta forma, tenemos que la traslación del vector \vec{v}_1 se identifica con el elemento g_{α_1} tal que si $\tilde{\alpha}_1$ es la elevación de α_1 en \tilde{x}_0 , entonces $t(\tilde{\alpha}_1) = g_{\alpha_1}\tilde{x}_0$; la traslación del vector \vec{v}_2 se identifica con el elemento g_{α_2} tal que si $\tilde{\alpha}_2$ es la elevación de α_2 en \tilde{x}_0 , entonces $t(\tilde{\alpha}_2) = g_{\alpha_2}\tilde{x}_0$; y la traslación del vector \vec{v}_3 se identifica con el elemento g_{α_3} tal que si $\tilde{\alpha}_3$ es la elevación de α_3 en \tilde{x}_0 , entonces $t(\tilde{\alpha}_3) = g_{\alpha_3}\tilde{x}_0$.

Ejemplo 5.1.10. Este último ejemplo expone el hecho de que los cristales topológicos son objetos puramente matemáticos y pueden tener distintas representaciones espaciales, se encuentren así o no en la naturaleza. Por ejemplo, el cristal del diamante del Ejemplo 5.1.9 (que es el cristal universal con grafo base el dado en la Figura 5.1.16) puede también adoptar la forma de grafito que describimos a continuación. Partimos del grafo base del ejemplo anterior:



Ahora se toma en cada $\mathbb{R}^2 \times \{n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, el retículo hexagonal, tal y como hemos visto en el Ejemplo 5.1.8. Ahora desplazamos los niveles de forma que el nivel $n + 1$ cae sobre el nivel n como se indica a continuación:



Tomamos $\omega : X \rightarrow X_0$ de forma que sobre cada nivel funciona como en el Ejemplo 5.1.4, por ejemplo con las aristas α', β y β' de X_0 , y que envíe las aristas verticales en α .

Para los lazos $\alpha_1 = \beta'\bar{\beta}$, $\alpha_2 = \alpha'\bar{\beta}$ y $\alpha_3 = \alpha\bar{\beta}$ y el árbol de expansión formado por β , tenemos que $\{[\alpha_1], [\alpha_2], [\alpha_3]\}$ es base de $H_1(X_0, \mathbb{Z})$.

De esta forma, como $\text{Ker } \nu$ está formado solo por la clase del lazo constante, tendríamos que X

es también el cristal topológico universal del grafo base X_0 pero con otra representación espacial. Dado un cristal topológico, existen infinitas maneras de representarlo pero, ¿podemos conocer la representación más natural? La respuesta es sí, atendiendo a propiedades físico-químicas de dicho cristal como la simetría o el principio de mínima acción. La búsqueda de tales representaciones son el objetivo de la segunda parte del libro de Sunada [5], material que queda fuera del alcance de este trabajo.

Bibliografía

- [1] J. C. Baez. Topological crystals. *arXiv preprint arXiv:1607.07748*, 2016.
- [2] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [3] C.R.F. Maunder. *Algebraic Topology*. Dover Publications, 1996.
- [4] T. Sunada. Lecture on topological crystallography. *Japanese Journal of Mathematics*, 7, 2012, 1-39.
- [5] T. Sunada. *Topological Crystallography*. Springer, 2013.