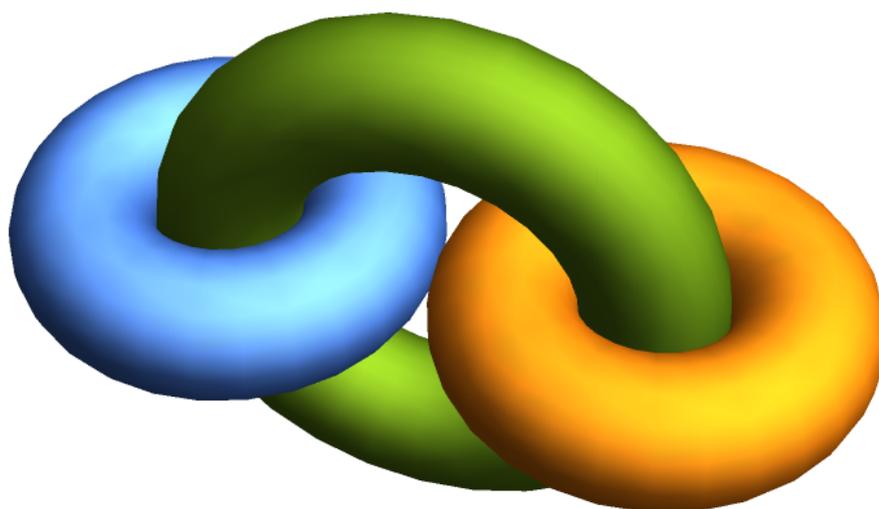


ESTRUCTURA DE LOS GRUPOS DE ARTIN DE ÁNGULO RECTO



Rodrigo Pallares Palencia



Estructura de los grupos de Artin de ángulo recto

Rodrigo Pallares Palencia

Trabajo de Fin de Grado que forma parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Dirigido por

Ramón Jesús Flores Díaz

Índice general

Introducción	3
1. Grupos de Artin de ángulo recto	5
1.1. Primeras definiciones. Propiedad universal	5
1.2. Grupos de Artin y grupos de Coxeter	7
1.3. Problemas algorítmicos. Formas normales y centralizadores	9
1.3.1. El problema de la palabra	9
1.3.2. El problema de la conjugación	11
1.3.3. Centralizadores	13
1.4. Diccionario álgebra-combinatoria	14
1.5. Subgrupos	19
1.5.1. Subgrupos RAAG	20
1.5.2. Subgrupos de Bestvina-Brady	23
1.5.3. Subgrupos de superficie	24
1.5.4. Subgrupos de trenzas sobre grafos	25
1.6. Automorfismos	25

2. Elementos de Teoría de Homotopía	27
2.1. Homotopía de orden superior	27
2.2. CW-complejos	28
2.3. Espacios recubridores	31
2.4. Espacios de Eilenberg-MacLane	33
2.5. Homología singular	34
2.5.1. Complejo de cadenas celulares	39
2.6. Cohomología	41
2.6.1. Los grupos de cohomología	41
2.6.2. El anillo de cohomología	47
2.6.3. Cohomología del espacio producto. Fórmula de Künneth	50
3. El complejo de Salvetti	55
3.1. Cohomología del toro	56
3.1.1. Cohomología del 2-toro	56
3.1.2. Cohomología del n-toro	60
3.2. Cohomología del complejo de Salvetti	60

Resumen

En este Trabajo de Fin de Grado estudiamos la estructura de los grupos de Artin de ángulo recto (RAAGs). La primera parte del trabajo es una introducción a esta familia de grupos; en ella tratamos numerosos aspectos sobre RAAGs, entre los que se encuentran la existencia de una forma normal, la decidibilidad de problemas algorítmicos, la relación con el grafo asociado, los subgrupos y el grupo de automorfismos. En la segunda parte, tras estudiar las nociones previas necesarias de teoría de homotopía, calculamos el álgebra de cohomología del espacio de Eilberg-MacLane de un RAAG: el complejo de Salvetti.

Abstract

In this Final Undergraduate Project we study the structure of right-angled Artin groups (RAAGs). In the first part of the project, which is meant as an introduction to these groups, we address several aspects about RAAGs, such as the existence of a normal form, the decidability of algorithmic problems, the connections between a right-angled Artin group and the associated graph, the families of groups that arise as subgroups of RAAGs and the automorphism group. In the second part, after presenting the required background on homotopy theory, we compute the cohomology algebra of the Eilenberg-MacLane space of a RAAG: the Salvetti complex.

Introducción

Un grupo de Artin de ángulo recto o RAAG (del inglés *right-angled Artin group*), es un grupo finitamente presentado en el que todas las relaciones son de conmutación entre generadores especificados. Dichas relaciones pueden definirse a partir de las adyacencias de los vértices de un grafo. Los grupos de Artin de ángulo recto, también llamados grupos semiconmutativos o parcialmente conmutativos, fueron introducidos originalmente por A. Baudisch [2] en los años 70 y estudiados de forma más extensa en los 80 por C. Droms [10, 11] bajo el término “*graph groups*”. Desde entonces han sido objeto de estudio de numerosos autores.

Los grupos de Artin de ángulo recto interpolan entre los grupos libres y los grupos abelianos libres, y poseen numerosas propiedades que los hacen interesantes. Como es de esperar a partir de su definición, los grupos de Artin de ángulo recto tienden un puente natural entre la teoría de grupos y la teoría de grafos; en particular, muchas de las propiedades sobre grafos tienen una traducción algebraica en términos de RAAGs. Estos grupos poseen además una forma normal eficiente, lo cual, además de permitir numerosos cálculos efectivos, los convierte en un objeto relevante desde el punto de vista de la Criptografía. Los grupos de Artin de ángulo recto también juegan un papel importante en la teoría geométrica de grupos, pues, entre otras razones, son un ejemplo prototípico de grupos con acción sobre complejos CAT(0).

A continuación resumimos brevemente el contenido de cada capítulo del presente trabajo.

En el primer capítulo introducimos el concepto de grupo de Artin de ángulo recto asociado a un grafo y presentamos algunos ejemplos y propiedades algebraicas básicas. Posteriormente estudiamos los problemas de la palabra y de la conjugación para esta familia de grupos, describiendo para ello una forma normal y la estructura de los centralizadores. También presentamos una serie de resultados que relacionan el álgebra de los grupos de Artin de ángulo recto con la combinatoria del grafo asocia-

do. Finalmente mostramos el amplio abanico de grupos que pueden encontrarse como subgrupos de grupos de Artin de ángulo recto y describimos brevemente la estructura del grupo de automorfismos.

En el segundo capítulo introducimos los conceptos de Topología Algebraica necesarios para la construcción del complejo de Salvetti de un grafo y el cálculo de su cohomología. Presentamos las nociones fundamentales sobre homotopía de orden superior, CW -complejos y espacios recubridores con el objetivo de proporcionar un marco teórico donde introducir los espacios de Eilenberg-MacLane. En la segunda parte del capítulo definimos la homología singular y el álgebra de cohomología de un espacio topológico, incidiendo especialmente en el caso de los CW -complejos. El capítulo termina con el teorema de Künneth para la cohomología del espacio producto.

En el tercer y último capítulo damos una construcción explícita del complejo de Salvetti de un grafo y vemos que este representa al correspondiente grupo de Artin de ángulo recto en la categoría topológica. El trabajo concluye con la descripción del álgebra de cohomología del complejo de Salvetti, precedida por el cálculo de la cohomología del n -toro.

Las principales referencias del presente trabajo han sido los *surveys* de Charney [8] y de Koberda [18, 19].

1 | Grupos de Artin de ángulo recto

1.1 Primeras definiciones. Propiedad universal

En esta primera sección daremos la definición de grupo de Artin de ángulo recto, estudiaremos sus propiedades elementales y veremos algunos ejemplos.

Usaremos Γ para denotar a un grafo simple finito, $V = V(\Gamma)$ para el conjunto de sus vértices y $E = E(\Gamma) \subset V \times V$ para el conjunto de sus aristas, vistas como pares de vértices no ordenados.

Definición 1.1. El **grupo de Artin de ángulo recto** o RAAG (del inglés *right-angled Artin group*) asociado a un grafo simple finito Γ es el grupo

$$A(\Gamma) = \langle V \mid [v_i, v_j] = 1 \text{ si } (v_i, v_j) \in E \rangle$$

Es decir, $A(\Gamma)$ está generado por los vértices de Γ , y las únicas relaciones son de conmutación entre vértices adyacentes.

Diremos que un grupo G es un grupo de Artin de ángulo recto si es el grupo de Artin de ángulo recto asociado a algún grafo, es decir, si existe un grafo simple finito Γ tal que $G = A(\Gamma)$.

Definición 1.2. Los vértices de Γ constituyen, por definición, un conjunto de generadores de $A(\Gamma)$, que llamaremos **generadores de Artin**.

Definición 1.3. Sea $A(\Gamma) = \langle V \mid R \rangle$ un grupo de Artin de ángulo recto, siendo V el conjunto de generadores de Artin. Dado cualquier subconjunto $W \subset V$, denotamos por $A(W)$ al subgrupo de $A(\Gamma)$ generado por W . Estos subgrupos de $A(\Gamma)$ reciben el nombre de **subgrupos especiales**.

Aunque la siguiente propiedad parece evidente, su prueba no es trivial, y la daremos en la sección 1.5.

Proposición 1.4. *Sea W un conjunto de vértices del grafo Γ . Entonces $A(W)$ es isomorfo a $A(\Gamma(W))$, donde $\Gamma(W)$ denota al subgrafo de Γ generado por los vértices de W .*

A no ser que se especifique lo contrario, siempre que hablemos de un subgrafo de Γ nos referiremos a un subgrafo lleno, esto es, al subgrafo generado por un cierto conjunto de vértices de Γ .

Como veremos a continuación, un grupo de Artin de ángulo recto es el grupo universal (finitamente generado) respecto de las relaciones de conmutación que lo definen.

| Definición 1.5. Dado un subconjunto $S \subset G$ de un grupo, construimos el **grafo de conmutación** de S , denotado $Comm(S)$, de la siguiente forma: los vértices de $Comm(S)$ son los elementos de S , y dos vértices son adyacentes en $Comm(S)$ si sus correspondientes elementos de G conmutan.

Proposición 1.6 (Propiedad universal). *Sea G un grupo y $S \subset G$ un subconjunto finito. La inclusión $S \hookrightarrow G$ se extiende de forma única a un homomorfismo*

$$A(Comm(S)) \rightarrow G$$

que respeta la identificación $V(Comm(S)) \cong S$.

Demostración. Sea $F_S = \langle S \mid \rangle$ el grupo libre sobre S . Por la propiedad universal del grupo libre, la inclusión $S \hookrightarrow G$ se extiende de forma única al homomorfismo $f : F_S \rightarrow G$ que lleva cada elemento de S (visto como generador del grupo libre) en sí mismo (visto como elemento de G). Además, $A(Comm(S)) = \langle S \mid R \rangle$, donde $R = \{[s, t] \mid st = ts \text{ en } G\}$. Ahora bien, está claro que R está contenido en $\text{Ker}(f)$, luego f extiende nuevamente a un único homomorfismo

$$A(Comm(S)) = \langle S \mid R \rangle \rightarrow G,$$

que respeta la identificación $V(Comm(S)) \cong S$, □

Observación. La única razón por la que hemos necesitado que S sea finito es que nuestra definición de grupo de Artin de ángulo recto requiere que el grafo de partida sea finito. Sin embargo, podría extenderse la definición a grafos con infinitos vértices y la finitud de S dejaría de ser una hipótesis necesaria.

En cierta forma, los grupos de Artin de ángulo recto interpolan entre los grupos libres y los grupos abelianos libres. Veamos algunos ejemplos:

- Si $\Gamma = K_n$, el grafo completo de n vértices, se tiene que $A(\Gamma) = \mathbb{Z}^n$.
- Si $\Gamma = D_n$, el grafo vacío con n vértices, $A(\Gamma) = F_n$ (el grupo libre con n generadores).
- Si $\Gamma = P_3$, un camino de tres vértices, $A(\Gamma) = F_2 \times \mathbb{Z}$.
- Si $\Gamma = C_4$, un ciclo de longitud cuatro, $A(\Gamma) = F_2 \times F_2$.
- En general, si $\Gamma = K_{m,n}$, el grafo bipartito de m y n vértices, se tiene que $A(\Gamma) = F_m \times F_n$.

El siguiente resultado, fundamental en la teoría de grupos de Artin de ángulo recto, fue probado originalmente por Droms:

| Teorema 1.7 ([10]). *Dos grafos Γ y Λ son isomorfos si y sólo si los respectivos grupos de Artin de ángulo recto $A(\Gamma)$ y $A(\Lambda)$ son isomorfos.*

Demostración. La implicación directa es evidente. Consultar [20, Teorema 1.10 y Teorema 7.4] para una prueba del recíproco. \square

1.2 Grupos de Artin y grupos de Coxeter

Los grupos de Artin de ángulo recto, como su nombre indica, forman parte de una familia más general de grupos: los grupos de Artin.

| Definición 1.8. Decimos que dos elementos s y t de un grupo G satisfacen una **relación de Artin de longitud m** si

$$\underbrace{sts \cdots}_m = \underbrace{tst \cdots}_m$$

Si s y t no satisfacen ninguna relación, decimos que satisfacen una **relación de Artin de longitud infinita**.

Un grupo A es entonces un **grupo de Artin** si admite una presentación en la que todas las relaciones son relaciones de Artin, es decir, si

$$A = \langle S \mid \underbrace{sts \cdots}_{m_{st}} = \underbrace{tst \cdots}_{m_{st}} \text{ para todos } s, t \in S \text{ con } s \neq t \rangle,$$

donde S es (normalmente) finito y $2 \leq m_{st} \leq \infty$ para todos $s, t \in S$ con $s \neq t$. En tal caso, igual que con los RAAGs, llamamos **generadores de Artin** (del grupo A) a los elementos del conjunto S . Los subgrupos de A generados por subconjuntos $S' \subset S$ reciben el nombre de **subgrupos parabólicos**.

Todo grupo de Artin tiene un grupo de Coxeter asociado:

Definición 1.9. Un grupo W es un **grupo de Coxeter** si se obtiene a partir de un grupo de Artin A añadiendo la relación $s^2 = 1$ para cada generador de Artin s de A . Es decir, si (siguiendo la notación de la definición anterior)

$$W = \langle S \mid s^2 = 1, \underbrace{sts \cdots}_{m_{st}} = \underbrace{tst \cdots}_{m_{st}} \text{ para todo } s, t \in S \text{ con } s \neq t \rangle.$$

En tal caso, diremos que W es el grupo de Coxeter asociado a A .

Ejemplo. Veamos algunas familias particulares de grupos de Artin:

- *Grupos de Artin de ángulo recto.* Cuando $m_{st} \in \{2, \infty\}$ para todo $s \neq t$, A es precisamente un grupo de Artin de ángulo recto.
- *Grupos de Artin de tipo esférico.* Un grupo de Artin se dice de tipo esférico si su grupo de Coxeter asociado es finito.
- *Grupos de Artin de tipo large y extra-large.* Un grupo de Artin (y de Coxeter) se dice de tipo *large* si $m_{st} \geq 3$ para todo $s \neq t$ y de tipo *extra-large* si $m_{st} \geq 4$ para todo $s \neq t$.
- *Grupos de Artin de tipo FC.* Un grupo de Artin $A = \langle S \mid R \rangle$ (donde los generadores S son de Artin) se dice de tipo FC si, para cada subconjunto $S' \subset S$ tal que $m_{st} \neq \infty$ para todo $s, t \in S'$, el correspondiente subgrupo parabólico es de tipo esférico.
- *Grupos de Artin de tipo afín.* Un grupo de Artin se dice de tipo afín si su grupo de Coxeter asociado es afín. Un grupo de Coxeter es afín si actúa propiamente sobre \mathbb{R}^n mediante reflexiones respecto de un hiperplano afín.
- *Grupos de trenzas.* El grupo de trenzas de n cuerdas viene dado por la presentación

$$B_n = \langle \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \mid \tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}, \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \text{ si } |i - j| \geq 2 \rangle$$

Cada elemento de \mathcal{B}_n es una trenza: viene representado geoméricamente por n cuerdas entrelazadas y unidas a n puntos tanto al principio como al final. Dos trenzas representan el mismo elemento de \mathcal{B}_n si podemos manipular una de ellas para convertirla en la otra sin necesidad de mover los puntos de los extremos. La operación del grupo consiste en concatenar las trenzas por los extremos. Así, cada generador τ_i se corresponde con la trenza en la que la i -ésima cuerda se cruza sobre la $(i + 1)$ -ésima. Los grupos de trenzas fueron los primeros grupos de Artin en ser estudiados y constituyen sin duda la familia más importante.

Hay muy pocos resultados sobre los grupos de Artin en general, pero muchos para familias específicas, en particular para los de tipo esférico. Estas son algunas propiedades conocidas de grupos de Artin de tipo esférico (y desconocidas, en general, para grupos de Artin cualesquiera):

- (1) Son libres de torsión.
- (2) Tienen centro cíclico e infinito.
- (3) Tanto el problema de la palabra como el de la conjugación son decidibles (ver Sección 1.3).
- (4) Se conoce su cohomología (ver Capítulo 2, Sección 2.6).
- (5) Si A es de tipo esférico, existe un espacio $K(A, 1)$ finito (ver Capítulo 2, Definición 2.18).

1.3 Problemas algorítmicos. Formas normales y centralizadores

Como acabamos de ver, para grupos de Artin en general no se conoce la respuesta al problema de la palabra ni al de la conjugación. Veremos en esta sección que, en el caso de los grupos de Artin de ángulo recto, la respuesta a ambos problemas es afirmativa. Para ello, vamos a centrar nuestros esfuerzos en buscar una forma normal para las palabras sobre el alfabeto formado por los generadores de Artin. Las principales referencias para esta sección son los artículos de Charney [8] y de Servatius [27].

1.3.1 El problema de la palabra

Dada una presentación $\langle S | R \rangle$ de un grupo G , existen, en general, muchas formas de representar un mismo elemento de G como una palabra formada por los generadores.

res S (y sus inversos). El **problema de la palabra** consiste en preguntarse si hay un algoritmo capaz de decidir si dos palabras sobre el alfabeto S representan el mismo elemento de G (o, equivalentemente, si una palabra sobre S representa al elemento neutro de G)

A menudo, resolver el problema de la palabra involucra la búsqueda de la **forma normal**, esto es, una representación canónica de cada elemento de G como palabra sobre S . Una vez conocido un algoritmo razonablemente eficiente que lleve una palabra a su forma normal, para ver si dos palabras representan al mismo elemento basta con ver si sus formas normales coinciden.

Definición 1.10. Sea S un conjunto de letras. Dada una palabra w sobre S (y sus inversos), la **longitud** $|w|$ de w es el número de letras de w y el **soporte** $\text{supp}(w)$ de w es el conjunto de elementos s de S tales que s o s^{-1} aparecen en w .

Definición 1.11. Dados un grupo $G = \langle S | R \rangle$ y $g \in G$, definimos la **longitud** $|g|$ de g como el mínimo de las longitudes de las palabras que representan a g y el **soporte** $\text{supp}(g)$ de g como el conjunto de letras de S que forman parte del soporte de todas las palabras que representan a g . Decimos que una palabra w sobre el alfabeto S que representa al elemento g de G es una **palabra reducida** en G si $|w| = |g|$.

Observación. Si $A(\Gamma) = \langle V | R \rangle$ es un grupo de Artin de ángulo recto, una palabra w sobre V es reducida en $A(\Gamma)$ si y sólo si no contiene ningún segmento de la forma $v xv^{-1}$ o $v^{-1}xv$, siendo v un vértice adyacente a todos los vértices de $\text{supp}(x)$. Además, si w y w' son palabras reducidas representando al mismo elemento, se cumple que $\text{supp}(w) = \text{supp}(w')$. Así, el soporte de un elemento de $A(\Gamma)$ es el soporte de cualquier palabra reducida que lo represente.

Observación. $|gh| \leq |g| + |h|$ para todo $g, h \in G$.

Definición 1.12. Sea $G = \langle S | R \rangle$ un grupo. Dados $g, h \in G$, se dice que gh es una **factorización reducida** si $|gh| = |g| + |h|$ (es decir, si la palabra gh es reducida).

Definición 1.13. Dados un grupo $G = \langle S | R \rangle$ y un elemento g de G , llamamos $\text{Min}(g)$ al conjunto de todas las palabras sobre S de longitud mínima que representan el elemento g (es decir, al conjunto de las palabras reducidas que representan a g).

El siguiente resultado lo prueba Green en su tesis:

Proposición 1.14 ([13, Teorema 3.9]). Sean $A(\Gamma) = \langle V | R \rangle$ un grupo de Artin de ángulo recto y $g \in A(\Gamma)$. Entonces el conjunto $U_g \subset V$ de generadores de Artin que aparecen como letra inicial de una palabra de $\text{Min}(g)$ es un subconjunto esférico de V , es decir, los elementos de U_g conmutan entre sí.

Corolario. *Hay un único elemento w_0 en el subgrupo abeliano especial $A(U_g)$ de longitud máxima que aparece como segmento inicial en $Min(g)$.*

Podemos entonces escribir $g = w_0g_1$ con $w_0 \in A_0 = A(U_g)$ y repetir el proceso empezando con g_1 para encontrar el segmento inicial maximal w_1 en $Min(g_1)$ de forma que $g = w_0w_1g_2$ con $w_1 \in A_1 = A(U_{g_1})$.

Reiterando el proceso anterior, llegaremos a una descomposición $g = w_0w_1 \dots w_k$ de forma que cada w_i está en un subgrupo abeliano especial A_i . Esta forma de representar el elemento g (única salvo conmutaciones en cada A_i) recibe el nombre de **forma normal** (de g).

1.3.2 El problema de la conjugación

Dado un grupo $G = \langle S|R \rangle$, el **problema de la conjugación** consiste en preguntarse si existe un algoritmo para determinar si dos palabras sobre S representan elementos conjugados de G , es decir, si dados $x, y \in G$, existe $z \in G$ tal que $x = zyz^{-1}$.

Observemos que tomar y como la palabra vacía implica que el problema de la palabra es un subproblema del problema de la conjugación. Además, en este caso la existencia de una forma normal no necesariamente resuelve el problema. Sin embargo, cuando las formas normales satisfacen determinadas propiedades, dotan a G de una *estructura biautomática* (ver [12, Capítulo 2, Definición 2.5.4] para una definición precisa), en cuyo caso el problema de la conjugación es decidible.

Hermiller y Meier prueban en [15] que, empezando por cualquier palabra que represente al elemento g , se puede obtener la forma normal de g mediante conmutaciones de vértices adyacentes y cancelaciones de parejas de inversos. En particular, se puede calcular la forma normal de una palabra mediante operaciones que no incrementan su longitud. También prueban que esta forma normal da lugar a una estructura biautomática en $A(\Gamma)$ y que, por lo tanto, el problema de la conjugación también es decidible para la familia de grupos de Artin de ángulo recto.

Para mostrar de forma más explícita cómo tratar el problema de la conjugación en grupos de Artin de ángulo recto seguiremos el artículo de Servatius [27, págs. 37-44]. La aproximación de Servatius nos proporcionará también la clave para entender la estructura de los centralizadores.

Dos elementos g y h de $A(\Gamma)$ son conjugados si y sólo si podemos transformar g

en h mediante una secuencia finita de operaciones de la forma $w \mapsto v w v^{-1}$, donde v es una letra de $A(\Gamma)$. Es evidente que, tras este movimiento, $|v w v^{-1}|$ es igual a $|w| + 2$, $|w|$ o $|w| - 2$.

| Definición 1.15. Dado $g \in A(\Gamma) = \langle V | R \rangle$, se dice que g es **cíclicamente reducido** si no existe ninguna letra v en $V \cup V^{-1}$ tal que $|v g v^{-1}| < |g|$. Una palabra w sobre V se dice cíclicamente reducida si es reducida y representa a un elemento cíclicamente reducido.

Una palabra w es cíclicamente reducida si y sólo si es reducida y es de longitud mínima entre las palabras reducidas que se obtienen permutando cíclicamente las letras de w . Toda palabra puede reducirse cíclicamente mediante una secuencia consistente exclusivamente en operaciones que reducen la longitud. Es más, el resultado obtenido no depende de tal secuencia:

Proposición 1.16. Dado $g \in A(\Gamma)$, existe un único elemento cíclicamente reducido, llamado **reducción cíclica** de g y denotado $CR(g)$, tal que $g = \alpha CR(g) \alpha^{-1}$ es una factorización reducida (es decir, $|g| = |CR(g)| + 2|\alpha|$).

Demostración. Sólo la unicidad está en duda. Dado $g \in A(\Gamma)$, supongamos que existen dos elementos cíclicamente reducidos, x e y , tales que $g = \alpha x \alpha^{-1} = \beta y \beta^{-1}$. Si $g = 1$ entonces no hay nada que probar. Si no, sea v una letra inicial de α . Si v no es una letra inicial de β , entonces v tiene que ser una letra inicial de y que conmuta con todas las de β y que no está en el soporte de β . Por la misma razón, como v^{-1} es una letra final de α^{-1} , ha de ser una letra final de y . Pero esto contradice el hecho de que y es cíclicamente reducido.

Así, v tiene que ser una letra inicial tanto de α como de β y podemos escribir $\alpha = v \alpha'$ y $\beta = v \beta'$. Por tanto tenemos $g' = \alpha' x \alpha'^{-1} = \beta' y \beta'^{-1}$ y podemos concluir la prueba por inducción sobre $|g|$. \square

Corolario. Los grupos de Artin de ángulo recto son libres de torsión.

Demostración. Queremos ver que para todo $g \in A(\Gamma)$, si $g^n = 1$ para algún $n > 0$, entonces $g = 1$. Basta con verlo para elementos cíclicamente reducidos, pues si $g = \alpha CR(g) \alpha^{-1}$, entonces $g^n = \alpha CR(g)^n \alpha^{-1}$ es trivial si y sólo si $CR(g)^n$ es trivial y g es trivial si y sólo si $CR(g)$ es trivial.

Sea entonces $z \in A(\Gamma)$ cíclicamente reducido. Observemos que la factorización $z^2 = z z$ es reducida, pues si $|z^2| < 2|z|$, el elemento z puede ser representado por una palabra reducida que empieza por v y acaba por v^{-1} para algún $v \in V \cup V^{-1}$. Pero

esto contradice el hecho de que z sea cíclicamente reducido. El mismo argumento prueba en general que $|z^n| = n|z|$, así que si $z^n = 1$, entonces $0 = |z^n| = n|z|$. De donde $|z| = 0$ y por tanto $z = 1$. \square

Corolario. Si la factorización $g = php^{-1}$ es reducida, entonces $CR(g) = CR(h)$.

Demostración. La factorización $h = \beta CR(h)\beta^{-1}$ es reducida, así que también lo es $g = p\beta CR(h)\beta^{-1}p^{-1}$. Pero entonces, tomando $\alpha = p\beta$, obtenemos la factorización reducida $g = \alpha CR(h)\alpha^{-1}$. La unicidad de la reducción cíclica concluye la prueba. \square

En general, dos elementos g y h de $A(\Gamma)$ son conjugados si y sólo si $CR(h)$ se puede obtener a partir de $CR(g)$ mediante permutaciones cíclicas. En tal caso se tiene en particular que $|CR(g)| = |CR(h)|$. Por lo tanto, el problema de la conjugación se reduce a comparar las reducciones cíclicas: si tienen distinta longitud, entonces los elementos no pueden ser conjugados; y si tienen la misma longitud, entonces basta con comprobar si hay coincidencia en alguna de las permutaciones cíclicas.

1.3.3 Centralizadores

Otro problema importante a la hora de desentrañar la estructura de un grupo es el estudio de los centralizadores. Como los centralizadores contienen la información sobre la conmutación en un grupo, es de esperar que en el caso de los grupos de Artin de ángulo recto su estructura esté estrechamente relacionada con la del grafo asociado.

| Definición 1.17. Dados un grupo G y un subconjunto $S \subset G$, el **centralizador** de S en G , denotado $C_G(S)$, es el conjunto de elementos de G que conmutan con todo elemento de S . Es decir,

$$C_G(S) := \{g \in G \mid gs = sg \text{ para todo } s \in S\}$$

Observación. $C_G(S)$ es un subgrupo de G para todo $S \subset G$.

Servatius prueba en [27, págs. 38-44] el teorema del centralizador. Antes necesitamos unas definiciones previas:

| Definición 1.18. Sea Γ un grafo. Dado un vértice v de Γ , se define el **engarce** de v , denotado por $Lk(v)$, como el conjunto de vértices de Γ adyacentes a v . La **estrella** de v es el conjunto $St(v) = Lk(v) \cup \{v\}$. Se define el engarce de un conjunto de vértices $V_0 \subset V(\Gamma)$ como el conjunto $Lk(V_0)$ de vértices adyacentes a todos los vértices de V_0 .

Definición 1.19. Decimos que un grafo Λ se **separa como join no trivial** si existen subgrafos no vacíos Λ_1 y Λ_2 de Λ tales que $\Lambda = \Lambda_1 * \Lambda_2$. Decimos que un subgrupo de $A(\Gamma)$ es un **subgrupo join** si es el subgrupo especial asociado a un subgrafo de Γ que se separa como join no trivial.

Definición 1.20. Sean $g \in A(\Gamma)$ y $CR(g)$ la reducción cíclica de g . Sea T el subgrafo de Γ generado por los vértices de $\text{supp}(CR(g))$ y sea $T = T_1 * \dots * T_k$ la descomposición maximal de T como join de subgrafos. Podemos entonces escribir $CR(g) = g_1 g_2 \dots g_k$ de forma que $\text{supp}(g_i) = V(T_i)$ (ver Teorema 1.23). Cada g_i está contenido en un subgrupo cíclico maximal cuyo generador, h_i , está unívocamente determinado (salvo inversos). Cada h_i recibe el nombre de **factor puro** de g y denotamos por $PF(g) = \{h_1, \dots, h_k\}$ al conjunto de factores puros de g .

Teorema 1.21 (Teorema del centralizador). Sean $g, \alpha \in A(\Gamma)$ con $g = \alpha CR(g) \alpha^{-1}$. Siguiendo la notación de la definición anterior, se tiene que $PF(g) = \{h_1, \dots, h_k\}$ genera en $A(\Gamma)$ un grupo libre abeliano de rango k y

$$C_{A(\Gamma)}(CR(g)) = \langle h_1 \rangle \times \langle h_2 \rangle \times \dots \times \langle h_k \rangle \times \langle \text{Lk}(T) \rangle.$$

Además, $C_{A(\Gamma)}(g) = \alpha C_{A(\Gamma)}(CR(g)) \alpha^{-1}$.

Como consecuencia del teorema del centralizador, se tiene que el centralizador de cualquier elemento g de $A(\Gamma)$ es isomorfo a un subgrupo especial de $A(\Gamma)$. En efecto, $C_{A(\Gamma)}(g) = \alpha C_{A(\Gamma)}(CR(g)) \alpha^{-1}$ es isomorfo a $C_{A(\Gamma)}(CR(g))$, y este es a su vez isomorfo a $\langle \{v_1, \dots, v_k\} \cup \text{Lk}(T) \rangle = \langle v_1 \rangle \times \dots \times \langle v_k \rangle \times \langle \text{Lk}(T) \rangle$, donde v_i es un vértice cualquiera de $V(T_i)$.

1.4 Diccionario álgebra-combinatoria

En esta sección seguiremos el *survey* de Koberda [18, Sección 3] para indagar en cómo las propiedades combinatorias de los grafos se traducen en propiedades algebraicas de los grupos de Artin de ángulo recto asociados.

El siguiente lema, junto con el teorema del centralizador, nos permitirá escribir la primera entrada de nuestro diccionario:

Lema 1.22. Sea G un grupo. Si G es libre de torsión y puede descomponerse como producto directo de grupos no triviales, entonces el centralizador de cualquier elemento de G contiene una copia de \mathbb{Z}^2 .

Demostración. Supongamos que $G = G_1 \times G_2$ con G_1 y G_2 no triviales. Sea $g = g_1 g_2 (= g_2 g_1) \in G = G_1 \times G_2$. Si $g_1 = 1 = g_2$, entonces el centralizador de $g = 1$ es todo G y cualesquiera dos elementos no triviales de G_1 y G_2 generan en G una copia de \mathbb{Z}^2 . Si, por ejemplo, $g_1 \neq 1$ y $g_2 = 1$, entonces tanto g_1 como G_2 están contenidos en el centralizador de $g = g_1$ y $\langle g_1, h_2 \rangle \cong \mathbb{Z}^2$ para cualquier $1 \neq h_2 \in G_2$. Por último, si $g_i \neq 1$ para $i = 1, 2$, entonces tanto g_1 como g_2 están en el centralizador de g y $\langle g_1, g_2 \rangle \cong \mathbb{Z}^2$. \square

| Teorema 1.23. Γ se separa como join no trivial si y sólo si $A(\Gamma)$ se descompone como producto directo de grupos no triviales.

Prueba de la implicación directa. Si $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$, entonces todo vértice de Γ_1 es adyacente a todo vértice de Γ_2 . Se tiene entonces que $A(\Gamma_1)$ y $A(\Gamma_2)$ son subgrupos (especiales) de $A(\Gamma)$ que generan el grupo completo, que se centralizan mutuamente (es decir, $A(\Gamma_1) \subset C_{A(\Gamma)}(A(\Gamma_2))$ y viceversa) y cuya intersección es trivial. Por tanto $A(\Gamma) = A(\Gamma_1)A(\Gamma_2) \cong A(\Gamma_1) \times A(\Gamma_2)$. \square

Del teorema del centralizador podemos deducir el siguiente resultado, que nos da la clave para probar lo que nos falta del teorema anterior:

Proposición 1.24. Sea $1 \neq g \in A(\Gamma)$ un elemento cíclicamente reducido. Son equivalentes:

- (1) g está contenido en un subgrupo join de $A(\Gamma)$.
- (2) El centralizador de g en $A(\Gamma)$ no es cíclico.
- (3) El centralizador de g en $A(\Gamma)$ está contenido en un subgrupo join de $A(\Gamma)$.

Demostración. (1) \Rightarrow (2). Si g está contenido en un subgrupo join de $A(\Gamma)$ entonces, por la implicación del teorema ya probada, se tiene que g está contenido en un subgrupo G de $A(\Gamma)$ que se descompone como producto directo de grupos no triviales. Como $A(\Gamma)$ es libre de torsión, G también y deducimos del lema que $C_G(g)$ contiene una copia de \mathbb{Z}^2 . Ahora bien, $C_G(g) \subset C_{A(\Gamma)}(g)$, así que el centralizador de g en $A(\Gamma)$ no puede ser cíclico.

(2) \Rightarrow (3). Recordemos que el teorema del centralizador nos dice que $C_{A(\Gamma)}(g) = \langle h_1 \rangle \times \cdots \times \langle h_k \rangle \times \langle \text{Lk}(\text{supp}(g)) \rangle$, donde los h_i son los factores puros de g ($k \geq 1$). Sea Λ el subgrafo generado por $\text{supp}(g) \cup \text{Lk}(\text{supp}(g))$. Como $C_{A(\Gamma)}(g)$ no es cíclico, si $\text{Lk}(\text{supp}(g))$ es vacío, entonces necesariamente $k \geq 2$ y Λ ha de descomponerse como join de al menos dos grafos (uno conteniendo el soporte de h_1 y otro el de h_i para

$i = 2, \dots, k$). Si $\text{Lk}(\text{supp}(g)) \neq \emptyset$, entonces Λ es *join* de los subgrafos generados por $\text{supp}(g)$ y $\text{Lk}(\text{supp}(g))$. Por tanto en cualquiera de los dos casos $A(\Gamma)$ se separa como *join* no trivial. Además, recordemos que cada h_i está contenido en el grupo generado por $\text{supp}(g)$, así que $C_{A(\Gamma)}(g)$ está contenido en $A(\Lambda)$.

(3) \Rightarrow (1). Es evidente, puesto que g está contenido en su propio centralizador. \square

Prueba de la otra implicación del teorema 1.23. Supongamos que tenemos la descomposición $A(\Gamma) = G_1 \times G_2$ con G_1 y G_2 grupos no triviales. Como $A(\Gamma)$ es libre de torsión, se sigue del lema anterior que el centralizador de cualquier elemento de $A(\Gamma)$ contiene una copia de \mathbb{Z}^2 . En particular, $C_{A(\Gamma)}(w)$ no puede ser cíclico para ningún $w \in A(\Gamma)$. Si $V(\Gamma) = \{v_1, \dots, v_n\}$, consideramos la palabra $w = v_1 \cdots v_n$. Está claro que w es una palabra cíclicamente reducida, así que, por la proposición anterior, w ha de estar contenida en un subgrupo *join* de $A(\Gamma)$. Es decir, existe un subgrafo Λ de Γ que se separa como *join* y tal que $w \in A(\Lambda)$. Pero entonces $\text{supp}(w) = \{v_1, \dots, v_n\} = V(\Gamma)$ está contenido en $V(\Lambda)$, de donde $V(\Gamma) = V(\Lambda)$. Por tanto $\Gamma = \Lambda$ es un grafo que se separa como *join* no trivial y hemos acabado. \square

Un grafo se separa como *join* no trivial si y sólo si su grafo complementario es desconexo. Así, el siguiente resultado es, en cierta forma, el dual del que acabamos de probar:

| Teorema 1.25. $A(\Gamma)$ se descompone como producto libre de grupos no triviales si y sólo si Γ es desconexo.

Demostración. Consultar [18, Teorema 3.2] para una prueba de la implicación directa. Supongamos que Γ es desconexo. Entonces podemos encontrar subgrafos disjuntos (y no vacíos) Γ_1 y Γ_2 tales que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Así, $A(\Gamma)$ admite una presentación de la forma

$$A(\Gamma) = \langle V(\Gamma_1) \cup V(\Gamma_2) \mid R_1 \cup R_2 \rangle,$$

donde en R_i intervienen sólo vértices de $V(\Gamma_i)$ para $i = 1, 2$. Se sigue directamente que $A(\Gamma) \cong A(\Gamma_1) * A(\Gamma_2)$.

\square

La proposición 1.24 nos proporciona también la traducción algebraica de los subgrafos completos de Γ .

Observación. Dado un subgrafo $\Lambda \subset \Gamma$, la aplicación $r: A(\Gamma) \rightarrow A(\Lambda)$ dada por $r(v) = v$ si $v \in \Lambda$ y $r(v) = 1$ en caso contrario es una retracción de grupos (es decir, es un homomorfismo de grupos de forma que $r|_{A(\Lambda)}$ es la identidad).

| Teorema 1.26. *El tamaño del mayor subgrafo completo de Γ coincide con el rango del mayor subgrupo abeliano de $A(\Gamma)$.*

Demostración. Está claro que si el tamaño del mayor subgrafo completo K de Γ es k , entonces $A(K)$ es una copia de \mathbb{Z}^k contenida en $A(\Gamma)$. Veamos que ningún subgrupo abeliano de $A(\Gamma)$ puede tener rango mayor que k .

Si $k = 1$, entonces el grafo Γ es completamente desconexo, $A(\Gamma)$ es un grupo libre y sus únicos subgrupos abelianos son cíclicos.

Sea $k \geq 2$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que Γ es conexo (si no, basta con aplicar el razonamiento a cada componente conexa). Sea G un subgrupo abeliano de $A(\Gamma)$ de rango al menos 2. Conjugando si es necesario, G contiene al menos un elemento g no trivial cíclicamente reducido. El grupo G , por ser abeliano, está contenido en el centralizador de g en $A(\Gamma)$, por lo que este no puede ser cíclico (contiene a G , que es de rango al menos 2). Volvemos a acudir a la proposición 1.24 para deducir que el centralizador de g (y en particular, G) está contenido en un subgrupo *join* de $A(\Gamma)$. Dicho de otra forma, existen subgrafos $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda \subset \Gamma$ tales que $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ y de forma que todo elemento de G tiene su soporte en Λ . Podemos entonces escribir $A(\Lambda) = A(\Lambda_1) \times A(\Lambda_2)$ y considerar la retracción de $A(\Lambda)$ en $A(\Lambda_i)$, que denotaremos por r_i , para $i = 1, 2$.

Supongamos primero que Γ no tiene triángulos, es decir, que $k = 2$. En ese caso, ni Λ_1 ni Λ_2 pueden tener aristas, luego $A(\Lambda_i)$ es libre para $i = 1, 2$. Como G es abeliano, $r_i(G)$ es un subgrupo abeliano de $A(\Lambda_i)$, así que ha de ser cíclico (posiblemente trivial). Como $G \subset r_1(G) \times r_2(G)$, se sigue que G tiene a lo sumo rango 2.

Continuamos por inducción: supongamos cierto para $1 \leq l \leq k$ que si el mayor subgrafo completo de Γ es de tamaño l , entonces todo subgrupo abeliano de $A(\Gamma)$ es de rango menor o igual que l . Supongamos que el mayor subgrafo completo de Γ tiene $k + 1$ vértices. Entonces, si $k_i > 0$ es el tamaño del mayor subgrafo completo de Λ_i , necesariamente $k_1 + k_2 \leq k + 1$ (puesto que $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, subgrafo de Γ , contiene un grafo completo de tamaño $k_1 + k_2$). Aplicando la hipótesis de inducción a los grupos $r_1(G)$ y $r_2(G)$, se sigue que el rango de $r_i(G)$ es a lo sumo k_i . El rango de G es por tanto menor o igual que $k_1 + k_2$ y hemos acabado. \square

Del teorema del centralizador obtenemos el siguiente resultado, que relaciona una vez más el álgebra de $A(\Gamma)$ y la combinatoria de Γ .

| Definición 1.27. El **grado** de un vértice $v \in V(\Gamma)$, denotado $\deg(v)$, es el número de vértices adyacentes a v . Es decir, $\deg(v) = |\text{Lk}(v)|$. El **grado máximo** del grafo Γ es el máximo de los grados de sus vértices.

Proposición 1.28. *Sea d el grado máximo del grafo Γ . Entonces el rango del centralizador de cualquier elemento no trivial de $A(\Gamma)$ es como mucho $d + 1$. Recíprocamente, si el rango del centralizador de cualquier elemento no trivial de $A(\Gamma)$ es menor o igual que $d + 1$, entonces el grado máximo de Γ es a lo sumo d .*

Demostración. Sea $1 \neq g \in A(\Gamma)$. Como el centralizador de g es conjugado del centralizador de su reducción cíclica $CR(g)$, podemos suponer directamente que g es cíclicamente reducido (el rango de un grupo es invariante por conjugación). Acudiendo de nuevo al teorema del centralizador, sabemos que $C_{A(\Gamma)}(g) = \langle h_1 \rangle \times \cdots \times \langle h_k \rangle \times \langle \text{Lk}(\text{supp}(g)) \rangle$, con $k \geq 1$. El rango de $C_{A(\Gamma)}(g)$ es entonces $k + |\text{Lk}(\text{supp}(g))|$. Recordemos que el soporte de cada factor puro h_i está contenido en un subgrafo T_i , de forma que $T = T_1 + \dots + T_k$ es el subgrafo de Γ generado por los vértices del soporte de g . Razonamos por reducción al absurdo: supongamos $\text{rank}(C_{A(\Gamma)}(g)) > d + 1$. Sea v una letra del soporte de g . Supongamos, por ejemplo, que v es un vértice de T_1 . Entonces v es adyacente a todos los vértices de T_i para $i = 2, \dots, k$. Como en cada T_i hay al menos un vértice, se tiene que el grado de v es al menos $(k - 1) + |\text{Lk}(\text{supp}(g))| = \text{rank}(C_{A(\Gamma)}(g)) - 1 > d$. Contradicción.

Recíprocamente, dado un vértice $v \in A(\Gamma)$, sabemos por el teorema del centralizador que $C(v) = \langle v \rangle \times \langle \text{Lk}(v) \rangle$, luego $d + 1 \geq \text{rank}(C_{A(\Gamma)}(v)) = 1 + \deg(v)$ y hemos acabado. \square

El siguiente teorema caracteriza en términos de $A(\Gamma)$ cuándo el grafo Γ admite una k -coloración. Como de costumbre, una de las direcciones es mucho más sencilla de probar que la otra:

| Teorema 1.29 ([18, Teorema 3.7]). *Sea Γ un grafo con N vértices. Entonces Γ es k -coloreable si y sólo si existe un homomorfismo sobreyectivo*

$$A(\Gamma) \rightarrow \prod_{i=1}^k F_{n_i},$$

donde para cada i el grupo F_{n_i} es libre de rango n_i y

$$\sum_{i=1}^k n_i = N$$

Demostración (de la dirección sencilla). Consideramos una k -coloración de Γ . Sea Λ el grafo obtenido a partir de Γ añadiendo una arista entre cada par de vértices de distinto color. Consideramos la partición por colores de los vértices de Λ (o de Γ):

$$V(\Gamma) = V(\Lambda) = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k.$$

Se tiene entonces en Λ que no hay aristas entre los vértices de V_i para cada i y que para cada $i \neq j$, todo vértice de V_i es adyacente a todo vértice de V_j . Se sigue que

$$A(\Lambda) = \prod_{i=1}^k A(V_i),$$

donde cada $A(V_i)$ es libre de rango $|V_i|$. Además, $A(\Lambda)$ es un cociente de $A(\Gamma)$ y por tanto la proyección es el homomorfismo buscado.

Un esbozo de la demostración de la implicación contraria puede encontrarse en [18, Teorema 3.7]. \square

La dificultad de la prueba en el otro sentido reside en el hecho de que el epimorfismo no tiene por qué enviar los vértices de Γ a un factor libre de uno de los grupos libres F_i . Algo similar sucede con el siguiente teorema, que ya enunciamos en el primer epígrafe del capítulo.

| Teorema 1.30 ([10]). *Dos grafos Γ y Λ son isomorfos si y sólo si los respectivos grupos de Artin de ángulo recto $A(\Gamma)$ y $A(\Lambda)$ son isomorfos.*

1.5 Subgrupos

Los grupos de Artin de ángulo recto viven a medio camino entre los grupos abelianos libres y los grupos libres (finitamente generados). Sin embargo, mientras que todo subgrupo de un grupo (abeliano) libre es también un grupo (abeliano) libre (ver [16, Capítulo 1, Epígrafe 2]), no es cierto en general que todo subgrupo de un grupo Artin de ángulo recto sea un grupo de Artin de ángulo recto. En esta sección analizaremos bajo qué condiciones sí es cierto y estudiaremos algunos de los otros tipos de grupos que aparecen como subgrupos de RAAGs. Seguiremos el *survey* de Koberda [19].

1.5.1 Subgrupos RAAG

Recordemos que aún tenemos pendiente demostrar que los subgrupos especiales de un grupo de Artin de ángulo recto $A(\Gamma)$ son los grupos de Artin de ángulo recto asociados a subgrafos de Γ (Proposición 1.4). Para ello necesitamos una serie de definiciones y resultados previos.

Definición 1.31. Sean G un grupo y X un conjunto. Una **acción** de G sobre X es una aplicación $\alpha : G \times X \rightarrow X$ (con $\alpha(g, x)$ acortado a $g(x)$ o $g \cdot x$ para cada $(g, x) \in G \times X$) cumpliendo:

- (1) $e(x) = x$ para todo $x \in X$ (siendo $e \in G$ el elemento neutro).
- (2) $g_1(g_2(x)) = (g_1g_2)(x)$ para todo $x \in X$.

Denotamos por S_X al conjunto de permutaciones de X . Toda acción $\alpha : G \times X \rightarrow X$ define un homomorfismo $\varphi : G \rightarrow S_X$ dado por $\varphi(g)(x) = g(x)$. Fijado un elemento $g \in G$, llamaremos **acción** de g sobre X a $\varphi(g)$. Esto da lugar a una correspondencia biyectiva entre las acciones de G sobre X y los homomorfismos de G en S_X . Usaremos indistintamente ambos puntos de vista.

A menudo omitiremos la acción α y diremos simplemente que el grupo G actúa sobre el conjunto X o que el conjunto X posee una G -acción.

Definición 1.32. Una acción del grupo G sobre X se dice **fiel** si es inyectiva vista como homomorfismo $G \rightarrow S_X$. Es decir, si dados dos elementos $g, h \in G$ distintos, existe $x \in X$ tal que $g(x) \neq h(x)$. Se dice que G actúa libremente sobre X o que la acción es **libre** si $g(x) \neq h(x)$ para todos $g \neq h$ en G y todo $x \in X$.

La siguiente versión del lema del ping-pong da un método para verificar que una cierta acción de un grupo de Artin de ángulo recto es fiel.

Teorema 1.33 (Lema del ping-pong para RAAGs). Sean Γ un grafo de vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ y aristas $E(\Gamma)$ y X un conjunto con una $A(\Gamma)$ -acción. Supongamos que existen subconjuntos $\{X_1, \dots, X_n\}$ de X cumpliendo:

- (1) Para cada $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y cada $(v_i, v_j) \notin E(\Gamma)$, $v_i^k(X_j) \subset X_i$.
- (2) Para cada $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y cada $(v_i, v_j) \in E(\Gamma)$, $v_i^k(X_j) \subset X_j$.
- (3) Existe un

$$x_0 \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n X_i$$

tal que para cada $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $v_i^k(x_0) \in X_i$.

Entonces $A(\Gamma)$ actúa fielmente sobre X .

Demostración. Sea $w = w_n \cdots w_1 \in A(\Gamma)$ una palabra no trivial escrita en forma normal. Podemos además reordenar las letras de cada segmento w_j de forma que la última letra de w_j no conmute con la última letra de w_{j-1} . Sea v_i la última letra de w_n . Veamos por inducción sobre n que $w(x_0) \in X_i$.

Si $n = 1$, todas las letras de $w = w_1$ conmutan entre sí. Por (1) tenemos que $v_i(x_0) \in X_i$ y de (2) deducimos que $w(x_0) \in X_i$.

Ahora consideramos $w = w_n(w_{n-1} \cdots w_1)$. Por inducción, $w_{n-1} \cdots w_1(x_0) \in X_j$, donde v_j es la última letra de w_{n-1} . Como v_i no conmuta con v_j , se tiene por (1) que $v_i(w_{n-1} \cdots w_1(x_0))$ está en X_i . Volvemos a usar que las letras de w_n conmutan junto con (2) para concluir que $w(x_0)$ está contenido en X_i . Por lo tanto $w(x_0) \neq x_0$ y la acción de w sobre X es no trivial. \square

La propiedad universal de los grupos de Artin de ángulo recto nos permite reescribir el lema del ping-pong de la siguiente forma:

| Teorema 1.34. Sean G un grupo generado por $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y X un conjunto con una G -acción. Supongamos que existen subconjuntos $\{X_1, \dots, X_n\}$ de X cumpliendo:

- (1) Para cada $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y cada $i \neq j$, se tiene que $v_i^k(X_j) \subset X_j$ si v_i y v_j conmutan en G y $v_i^k(X_j) \subset X_i$ en caso contrario.
- (2) Existe un

$$x_0 \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n X_i$$

tal que para cada $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $v_i^k(x_0) \in X_i$.

Entonces G es isomorfo a $A(\Gamma)$, donde $\Gamma = \text{Comm}(V)$ (el grafo de conmutación de V).

Demostración. Sea Γ el grafo de conmutación del conjunto $V \subset G$. Por la propiedad universal de los grupos de Artin de ángulo recto (Proposición 1.6), la inclusión $V \hookrightarrow G$ se extiende de forma única a un homomorfismo $\varphi : A(\Gamma) \rightarrow G$. Como φ respeta la identificación $V(\Gamma) \cong V$ y G está generado por V , se tiene que φ es sobreyectiva. Por otro lado, si componemos la acción de G en X con φ , obtenemos una acción de $A(\Gamma)$ en X . Por la definición del grafo de conmutación, las propiedades (1) y (2) de la acción original se traducen en las propiedades (1), (2) y (3) para la $A(\Gamma)$ -acción. Se sigue del teorema anterior que la nueva acción es fiel, luego φ es inyectiva y por tanto un isomorfismo entre $A(\Gamma)$ y G . \square

Corolario (Proposición 1.4). Sean Γ un grafo y $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V(\Gamma)$. Entonces

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle \cong A(\Gamma_0),$$

donde Γ_0 es el subgrafo de Γ generado por $\{v_1, \dots, v_k\}$.

Demostración. Sean $V_0 = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V(\Gamma)$, G el subgrupo especial de $A(\Gamma)$ generado por V_0 y Γ_0 el subgrafo de Γ generado por los vértices de V_0 . Está claro que $\Gamma_0 \cong \text{Comm}(V_0)$.

Consideramos $X = A(\Gamma)$ y para cada $i = 1, \dots, k$ definimos $X_i \subset X$ como el conjunto de elementos de $A(\Gamma)$ que pueden ser representados por una palabra reducida que empieza por la letra v_i . Consideramos la acción de G sobre X dada por $g(x) = gx$ para todo $g \in G$ y todo $x \in X$ (el producto se entiende dentro de $A(\Gamma)$). Tomando $x_0 = 1 \in A(\Gamma)$, es inmediato comprobar que se cumplen las condiciones del lema del ping-pong, así que $G \cong A(\text{Comm}(V_0)) \cong A(\Gamma_0)$. \square

Corolario. Sea Γ un grafo con vértices $\{v_1, \dots, v_k\}$ y sean n_1, \dots, n_k enteros no nulos. Entonces

$$\langle v_1^{n_1}, \dots, v_k^{n_k} \rangle \cong A(\Gamma).$$

Demostración. Basta con repetir la prueba anterior para $V_0 = \{v_1^{n_1}, \dots, v_k^{n_k}\}$, teniendo en cuenta que el grafo de conmutación de V_0 en $A(\Gamma)$ es isomorfo a Γ , pues $v_i^{n_i}$ y $v_j^{n_j}$ conmutan si y sólo si v_i y v_j conmutan. \square

El siguiente resultado, que prueba Droms en [11], ilustra que en general abundan los grupos de Artin de ángulo recto que tienen algún subgrupo que no es un grupo de Artin de ángulo recto:

| Teorema 1.35. Todo subgrupo finitamente generado de $A(\Gamma)$ es un grupo de Artin de ángulo recto si y sólo si Γ no contiene ni cuadrados ni caminos de cuatro vértices.

En [2, Teorema 1.1 y Teorema 1.2], Baudisch describe cómo son los todos subgrupos generados por dos elementos:

| Teorema 1.36. Sea $G = \langle g_1, g_2 \rangle < A(\Gamma)$ un subgrupo generado por dos elementos. Entonces G es o libre o abeliano.

1.5.2 Subgrupos de Bestvina-Brady

Dado un grafo Γ , denotamos por K_Γ al núcleo del homomorfismo $A(\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z}$ dado por $v \mapsto 1$, para todo $v \in V(\Gamma)$. El grupo K_Γ recibe el nombre de **subgrupo de Bestvina-Brady** de $A(\Gamma)$.

| Definición 1.37. Sea G un grupo actuando sobre un espacio topológico localmente compacto X . Se dice que la acción de G sobre X es **propriadamente discontinua** si para cada subconjunto compacto $K \subset X$ el conjunto $\{g \in G \mid K \cap g(K) \neq \emptyset\}$ es finito. Se dice que la acción es **cocompacta** si existe un subconjunto compacto $A \subset X$ tal que $G(A) = X$.

| Definición 1.38. Sean G un grupo, $n \geq 1$ entero y R un anillo. G se dice **de tipo $FH_n(R)$** si actúa de forma propriadamente discontinua, libre y cocompacta sobre un CW -complejo con grupos de homología sobre R de dimensión 1 hasta n triviales. G se dice **de tipo $FH(R)$** si actúa de forma propriadamente discontinua, libre y cocompacta sobre un CW -complejo acíclico sobre R (ver Capítulo 2, Definición 2.6).

Los grupos de Artin de ángulo recto son de tipo $FH(R)$ para cualquier anillo R , pues son de tipo F (ver [3, Introducción]), ya que su $K(G, 1)$ (ver Definición 2.18) es un CW -complejo finito (el complejo de Salvetti, ver Capítulo 3).

| Definición 1.39. Decimos que un complejo simplicial K es un **flag complex** si todo conjunto de $n + 1$ vértices adyacentes dos a dos forma un n -símplice en K .

Dado un grafo Γ , definimos su complejo bandera $F(\Gamma)$ requiriendo que cada subgrafo completo de $k + 1$ vértices genere un k -símplice. Si Γ tiene n vértices, podemos construir una realización geométrica de $F(\Gamma)$ dentro la esfera unidad de \mathbb{R}^n de la siguiente forma: identificamos cada vértice de Γ con el extremo final de cada vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Por cada subgrafo completo $\Gamma_0 \subset \Gamma$, tomamos la envolvente convexa de los puntos de la esfera correspondientes a los vértices de Γ_0 . La unión de estas envolventes convexas es homeomorfa a $F(\Gamma)$.

| Definición 1.40. Un espacio X se dice **homológicamente n -conexo** si sus grupos de homología reducida de dimensión $0, 1, \dots, n$ son triviales.

El siguiente resultado es una versión ligeramente más fuerte del teorema que prueban Bestvina y Brady en [3]:

| Teorema 1.41 ([19, Corolario 3.22]). Sean Γ un grafo y R un anillo. El grupo K_Γ es de tipo $FH_n(R)$ si y sólo si $F(\Gamma)$ es homológicamente n -conexo y es de tipo $FH(R)$ si y

sólo si $F(\Gamma)$ es acíclico sobre R . El grupo K_Γ es finitamente presentado si y sólo si $F(\Gamma)$ es simplemente conexo.

En particular, si $F(\Gamma)$ no es acíclico sobre algún anillo, K_Γ no puede ser isomorfo a un grupo de Artin de ángulo recto, pues estos son de tipo FH sobre cualquier anillo.

1.5.3 Subgrupos de superficie

Decimos que G es un **grupo de superficie** (cerrada) si es el grupo fundamental de una superficie cerrada (esto es, compacta, conexa y sin borde).

| Definición 1.42. Dada una superficie cerrada S , llamamos **género** de S al número de toros o planos proyectivos del que S es suma conexa. S es una **superficie hiperbólica** (cerrada) si es de género al menos 2.

Lema 1.43. Ningún grupo de superficie hiperbólica contiene una copia de \mathbb{Z}^2 .

Demostración. Consultar [5, Corolario 3.10]. □

Proposición 1.44. Si $\Gamma = C_n$ con $2 \leq n \leq 4$, entonces $A(\Gamma)$ no contiene ningún grupo de superficie hiperbólica.

Demostración. $A(C_n)$ es abeliano para $n = 2, 3$; así que no puede contener un grupo de superficie hiperbólica (estos no son abelianos). Veamos que $A(C_4) = F_2 \times F_2$ tampoco contiene ningún grupo de superficie hiperbólica. Razonamos por reducción al absurdo. Sea $G = \pi_1(S)$, con S una superficie hiperbólica cerrada, y sea $\phi : G \rightarrow F_2 \times F_2$ un homomorfismo inyectivo. Llamamos p_1 y p_2 a las proyecciones de $F_2 \times F_2$ en las respectivas copias de F_2 . Como G no es libre, se tiene que ni $p_1 \circ \phi$ ni $p_2 \circ \phi$ pueden ser inyectivas. Sean entonces K_1 y K_2 sus respectivos núcleos. Como ϕ es inyectiva, tenemos que K_1 y K_2 se centralizan entre sí y $K_1 \cap K_2 = \{1\}$. Se sigue que $K_1 K_2 < G$ es isomorfo a $K_1 \times K_2$, que contiene una copia de \mathbb{Z}^2 (por ser K_1 y K_2 no triviales). Pero entonces G , grupo de superficie hiperbólica, contiene una copia de \mathbb{Z}^2 . Contradicción. □

El siguiente resultado muestra que los ciclos *suficientemente largos* del grafo Γ dan lugar a subgrupos de superficie hiperbólica del correspondiente grupo de Artin de ángulo recto:

| Teorema 1.45 ([28]). Sea $n \geq 5$ y sea C_n un ciclo de longitud n . Entonces $A(C_n)$ contiene un grupo de superficie hiperbólica.

1.5.4 Subgrupos de trenzas sobre grafos

Sea Γ un grafo finito y conexo, visto dentro de cierto espacio euclídeo. Denotamos por $C_n\Gamma$ (resp. $UC_n\Gamma$) al n -ésimo espacio de configuraciones ordenado (resp. no ordenado) de Γ . Es decir,

$$C_n\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma^n \mid x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}$$

y

$$UC_n\Gamma = \{\{x_1, \dots, x_n\} \subset \Gamma^n \mid x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\} = C_n(\Gamma)/S_n,$$

donde S_n actúa sobre Γ^n permutando las coordenadas.

Definimos el **grupo de trenzas puro** $P_n\Gamma$ y el **grupo de trenzas** $B_n\Gamma$ de Γ con n cuerdas como los grupos fundamentales de $C_n\Gamma$ y $UC_n\Gamma$, respectivamente.

La conexión entre los grupos de trenzas de grafos y los grupos de Artin de ángulo recto ha sido estudiada por numerosos autores (ver [17, 9, 25]). Crisp demuestra en [9, Teorema 2] lo siguiente:

| Teorema 1.46. *Todo grupo de trenzas de un grafo es subgrupo de un grupo de Artin de ángulo recto.*

1.6 Automorfismos

Es un resultado conocido que los grupos de automorfismos de los grupos libres y de los grupos abelianos libres tienen los mismos generadores (ver [22, Sección 3.2, Teorema 3.2] y [1, pág. 2]). Si F es un grupo libre (abeliano o no) con base S , entonces $\text{Aut}(F)$ está generado por los siguientes tres tipos de automorfismos:

- (1) *Inversiones.* Para cada $s \in S$, la inversión I_s envía s en s^{-1} y deja fijo el resto de S .
- (2) *Transposiciones.* Para cada pareja $\{s, t\} \subset S$, la transposición $P_{\{s,t\}}$ intercambia s con t y deja fijo el resto de S .
- (3) *Transvecciones.* Para cada par $(s, t) \in S^2$, la transvección $T_{(s,t)}$ manda s en st y deja fijo el resto de S .

Servatius trató de adaptar esta situación a los grupos de Artin de ángulo recto. Su intento resultó en considerar las siguientes familias de automorfismos, que bautizó como **automorfismos elementales** de $A(\Gamma)$:

- (1) *Inversiones.* Para cada $v \in V(\Gamma)$, la inversión I_v envía v en v^{-1} y deja fijo el resto de vértices.
- (2) *Simetrías.* Son los automorfismos de $A(\Gamma)$ inducidos por automorfismos del grafo Γ .
- (3) *Transvecciones dominadas.* Dados dos vértices $u, v \in V(\Gamma)$, decimos que v domina a u si v es adyacente a todo vértice adyacente a u , es decir, si $\text{Lk}(u) \subset \text{St}(v)$. La transvección $T_{(u,v)}$ define un automorfismo de $A(\Gamma)$ si y sólo si v domina a u . En ese caso, $T_{(u,v)}$ recibe el nombre de transvección dominada.
- (4) *Conjugaciones parciales.* Sean v un vértice de Γ y U el conjunto de vértices de una componente conexa de $\Gamma \setminus \text{St}(v)$. La aplicación $L_{v,U}$ que envía cada vértice $u \in U$ en $vu v^{-1}$ y que deja fijo al resto de vértices de Γ induce un automorfismo de $A(\Gamma)$, llamado conjugación parcial de U por v .

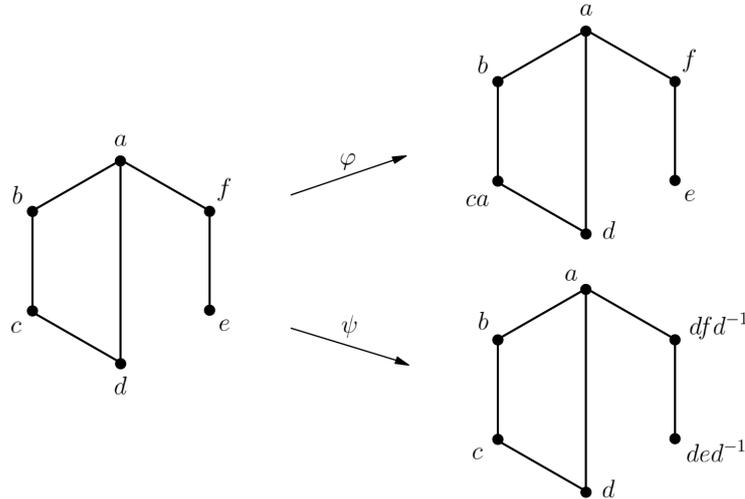


Figura 1.1: Ejemplo de transvección dominada (φ) y de conjugación parcial (ψ)

El siguiente teorema fue conjeturado por Servatius en [27, Sección IV] y demostrado por Laurence en [21]. Se trata de un resultado de extrema utilidad en la teoría de los grupos de Artin de ángulo recto.

| Teorema 1.47 ([21]). *Los automorfismos elementales de $A(\Gamma)$ generan $\text{Aut}(A(\Gamma))$.*

2 | Elementos de Teoría de Homotopía

En este capítulo presentamos todos los conceptos de Topología Algebraica que estarán implicados en la construcción del complejo de Salvetti y en el cálculo de su cohomología.

2.1 Homotopía de orden superior

El principal objetivo de estudio del siguiente capítulo es el complejo de Salvetti, que es el objeto *correcto* que representa a un grupo de Artin de ángulo recto en la categoría topológica. Para definir dichos objetos, los espacios de Eilenberg-MacLane, necesitamos definir previamente los grupos de homotopía. Seguiremos para ello la sección 4.1 del libro de Hatcher [14].

Sea (X, x_0) un espacio topológico con punto base. Para cada $n \geq 0$, denotamos por $\pi_n(X, x_0)$ al conjunto de clases de homotopía relativas al punto base de las aplicaciones continuas de S^n en X .

Si denotamos por I al intervalo unidad $[0, 1]$ y por I^n al cubo unidad de dimensión n ($I^0 = \{0\}$), se tiene que el cociente $I^n/\partial I^n$ es homeomorfo a la esfera S^n . Así, $\pi_n(X, x_0)$ puede definirse de forma equivalente como el conjunto de clases de homotopía de las aplicaciones continuas de $(I^n, \partial I^n)$ en (X, x_0) relativas al borde ∂I^n . Observemos que $\pi_0(X, x_0)$ se corresponde con el conjunto de componentes conexas por caminos de X .

Con argumentos similares a los presentados en el curso de Geometría y Topología de Superficies para el caso del grupo fundamental, se prueba que la siguiente

operación es compatible con las clases de homotopía y dota a $\pi_n(X, x_0)$ de estructura de grupo. Dadas dos aplicaciones continuas $f, g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$, se define el producto $fg : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ como

$$fg(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, \dots, s_n) & \text{si } s_1 \in [0, 1/2] \\ f(2s_1 - 1, \dots, s_n) & \text{si } s_1 \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Con esta definición se cumple para $n \geq 2$ que $fg \simeq gf$ (ver página 340 de [14] para más detalles), así que los grupos $\pi_n(X, x_0)$ son abelianos para $n \geq 2$.

Desde el punto de vista de aplicaciones continuas de la esfera (S^n, s_0) en (X, x_0) , el producto fg se corresponde con la composición $S^n \rightarrow S^n \vee S^n \rightarrow X$, donde la primera aplicación contrae el ecuador S^{n-1} (habiendo elegido el punto base s_0 en S^{n-1}) en un punto y la segunda es la suma puntual $f \vee g$.

Definición 2.1. El grupo $\pi_n(X, x_0)$ recibe el nombre de **n -ésimo grupo de homotopía** de X con punto base x_0 .

Igual que sucedía con el grupo fundamental, el siguiente resultado nos permite omitir el punto base en homotopía superior cuando se trata de espacios conexos por caminos. Los siguientes resultados pueden consultarse en [14, pág. 342],

Proposición 2.2. Si X es un espacio conexo por caminos, $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x_1)$ para cualesquiera $x_0, x_1 \in X$ y para todo $n \geq 1$.

Toda aplicación continua $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ induce un homomorfismo entre los grupos de homotopía $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ dado por $\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$. Además, si $\psi : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ es otra aplicación continua, es inmediato comprobar que $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ y $Id_* = Id$.

Proposición 2.3. Dos aplicaciones homotópicas (relativas al punto base) inducen el mismo homomorfismo en cada grupo de homotopía. Una equivalencia de homotopía induce isomorfismos en π_n para todo $n \geq 1$.

2.2 CW-complejos

La generalidad de los espacios topológicos dificulta mucho el cálculo y estudio de sus grupos de homotopía. Sin embargo, si nos restringimos a una clase de espacios

que puedan ser ensamblados pieza a pieza (como es el caso de los complejos simpliciales), el carácter combinatorio de dicha estructura nos permite trabajar de forma más cómoda. La clase de los CW -complejos generaliza la de los complejos simpliciales, permitiendo además reproducir el tipo de homotopía de gran parte de los espacios topológicos de interés.

La referencia para esta sección es el capítulo 5 del libro de Switzer [29]. Se asumirá que todos los espacios son Hausdorff y localmente compactos. Comenzamos con una definición previa:

Definición 2.4. Dado un espacio X , un **complejo celular** sobre X es una colección $K = \{e_\alpha^n \mid n \geq 0, \alpha \in J_n\}$ de subconjuntos de X , donde para cada $n \geq 0$, J_n es un conjunto de índices. Cada conjunto e_α^n se denomina **celda de dimensión n** o **n -celda**. Llamamos **n -esqueleto** de K a la colección $K^n = \{e_\alpha^r \mid 0 \leq r \leq n, \alpha \in J_r\}$ de celdas de dimensión menor o igual que n , cuya unión denotamos por $|K^n|$. Para cada n -celda e_α^n , definimos su borde como $\partial e_\alpha^n = e_\alpha^n \cap |K^{n-1}|$ y su interior como $\text{int}(e_\alpha^n) = e_\alpha^n \setminus \partial e_\alpha^n$. K debe satisfacer las siguientes condiciones:

- (1) X es la unión $|K|$ de todas las celdas de K .
- (2) Los interiores de las celdas son disjuntos.
- (3) Para cada celda e_α^n existe una aplicación continua, $f_\alpha^n : (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (e_\alpha^n, \partial e_\alpha^n)$, llamada **aplicación característica** de e_α^n , que es sobreyectiva y se restringe a un homeomorfismo entre los interiores de D^n y e_α^n .

Observemos que la condición (3) implica que cada celda es un subconjunto compacto de X y por tanto cerrado, pues además estamos suponiendo que X es Hausdorff. De las condiciones (1) y (2) se deduce que X ha de ser la unión disjunta de los interiores de las celdas.

Definición 2.5. Decimos que una celda e_β^m es **cara inmediata** de otra celda e_α^n si $\text{int}(e_\beta^m) \cap e_\alpha^n \neq \emptyset$. La celda e_β^m se dice **cara** de e_α^n si existe una sucesión finita de celdas comenzando en e_β^m y terminando en e_α^n , de forma que cada una es cara inmediata de la siguiente. Una celda que no es cara de ninguna otra se llama **principal**.

Ya estamos en condiciones de definir la noción de CW -complejo, que no es más que un complejo celular cuya topología puede extraerse de su estructura combinatoria, sujeto a una condición adicional de finitud:

Definición 2.6. Dado un espacio X , un **CW -complejo** sobre X es un complejo celular K cumpliendo:

- (a) Cada celda de K tiene un número finito de caras.
- (b) X tiene la *topología débil* inducida por K , es decir, un subconjunto de X es cerrado si y sólo si lo es su intersección con cualquier celda de K .

En general, un espacio X puede admitir diferentes estructuras de CW -complejo (consultar [29, págs. 65-68] para algunos ejemplos). Diremos que X es un CW -complejo si se sobreentiende una estructura de CW -complejo concreta sobre X .

La siguiente proposición ilustra una de las primeras ventajas de los CW -complejos:

Proposición 2.7 ([29, Proposición 5.5 y Proposición 5.6]). *Sean X un CW -complejo e Y un espacio topológico. Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es continua si y sólo si $f|_{e_\alpha^n}$ es continua para cada celda e_α^n de X . De igual forma, una aplicación $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ es continua si y sólo si lo es $F|_{e_\alpha^n \times [0, 1]}$ para toda celda e_α^n de X .*

Hasta ahora hemos visto los CW -complejos como una serie de instrucciones con las que descomponer en celdas un espacio X ya dado previamente. Sin embargo, como adelantamos al principio de la sección, vamos a ser capaces de construir un espacio X pegando celdas sucesivamente, hasta obtener un CW -complejo. Precisamente esta será la forma en la que construiremos el complejo de Salvetti de un grafo en el siguiente capítulo.

Primero vamos a formalizar el concepto de pegar celdas:

Definición 2.8. Dada una aplicación continua $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, llamamos **cono de la aplicación f** , denotado por $Y \cup_f CX$, al espacio cociente de $Y \vee CX$ resultante tras identificar $[x, 0] \in CX$ con $f(x) \in Y$.

Intuitivamente, estamos pegando la base del cono CX a Y por medio de f . Observemos además que la proyección $p : Y \vee CX \rightarrow Y \cup_f CX$ se restringe a un homeomorfismo entre Y y $p(Y)$, así que podemos pensar en Y como un subespacio de $Y \cup_f CX$.

Definición 2.9. Sean X un espacio y $g : S^{n-1} \rightarrow X$ una aplicación continua. El cono de g , $X \cup_g CS^{n-1}$, es lo que llamamos **X con una n -celda pegada**. La aplicación g recibe el nombre de **aplicación de pegado** de la celda. La proyección $p : X \vee CS^{n-1} \rightarrow X \cup_g CS^{n-1}$ se restringe a una aplicación continua $f : CS^{n-1} \rightarrow X \cup_g CS^{n-1}$, que a su vez se restringe a un homeomorfismo entre el interior de CS^{n-1} y su imagen. Como $CS^{n-1} \cong B^n$, podemos considerar f como una aplicación de pares $f : (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (X \cup_g CS^{n-1}, X)$. Llamamos a f la **aplicación característica** de la celda pegada.

La definición anterior se extiende sin dificultad a la de X con varias n -celdas pegadas partiendo de una aplicación de pegado $g: \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^{n-1} \rightarrow X$.

El siguiente resultado muestra que podemos construir CW -complejos de forma inductiva pegando n -celdas al $(n - 1)$ -esqueleto:

Proposición 2.10 ([29, Proposición 5.12]). *Supongamos que tenemos una sucesión $\{x_0\} = X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n \subset X^{n+1} \subset \dots$ de espacios tales que X^n se obtiene a partir de X^{n-1} pegando n -celdas. Si dotamos a $X = \bigcup_{n \geq -1} X^n$ de la topología débil (es decir, $S \subset X$ es cerrado si y sólo si $S \cap X^n$ es cerrado para todo $n \geq -1$), entonces el conjunto formado por todas las celdas pegadas dota a X de estructura de CW -complejo.*

El n -ésimo grupo de homotopía de un CW -complejo sólo depende de su $(n + 1)$ -esqueleto. Este hecho nos servirá para calcular el grupo fundamental del complejo de Salvetti en el capítulo 3. Más concretamente, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.11 ([14, Corolario 4.12]). *Sea X un CW -complejo. La inclusión $X^n \hookrightarrow X$ induce isomorfismos $\pi_i(X^n) \cong \pi_i(X)$ para $i < n$.*

El siguiente resultado reduce, en el caso de los CW -complejos, la pregunta sobre el tipo de homotopía a comprobar isomorfismos de grupos. Puede consultarse en [29, Teorema 6.32].

Teorema 2.12 (Whitehead). *Una aplicación continua entre CW -complejos es una equivalencia de homotopía si y sólo si para todo $n \geq 1$ el homomorfismo inducido en π_n es un isomorfismo.*

2.3 Espacios recubridores

Presentamos en esta sección las nociones de espacio recubridor y de espacio recubridor universal, que servirán para garantizar que el complejo de Salvetti efectivamente nos proporciona un modelo topológico *adecuado* para representar un grupo de Artin de ángulo recto.

Durante esta sección seguiremos el capítulo 5 del libro de Massey [23]. Supondremos que todos los espacios son conexos por caminos y localmente conexos por caminos.

Definición 2.13. Sea X un espacio topológico. Un **espacio recubridor** de X es un par (Y, p) , donde Y es un espacio y $p: Y \rightarrow X$ es una aplicación continua cumpliendo

lo siguiente: cada punto $x \in X$ posee un entorno abierto y conexo por caminos U de forma que p se restringe a un homeomorfismo entre cada componente conexa por caminos de $p^{-1}(U)$ y U .

A continuación definimos las aplicaciones naturales entre espacios recubridores:

| Definición 2.14. Dados (Y_1, p_1) y (Y_2, p_2) espacios recubridores de un espacio X , un **homomorfismo de espacios recubridores** entre Y_1 e Y_2 es una aplicación continua $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ tal que $p_2 \circ f = p_1$. Decimos que f es un **isomorfismo** si es invertible y f^{-1} también es un homomorfismo de espacios recubridores.

Observación. Todo isomorfismo entre espacios recubridores es en particular un homeomorfismo.

La existencia de homomorfismos entre espacios recubridores puede traducirse algebraicamente en términos de los grupos fundamentales de los mismos. Además, los homomorfismos establecen una jerarquía entre los espacios recubridores.

Proposición 2.15 ([23, Lema 6.3 y Lema 6.7]). Sean (Y_1, p_1) y (Y_2, p_2) espacios recubridores de un espacio X y con $y_1 \in Y_1$ e $y_2 \in Y_2$ tales que $p_1(y_1) = p_2(y_2)$. Entonces existe un homomorfismo $f : (Y_1, p_1) \rightarrow (Y_2, p_2)$ si y sólo si $p_{1*}(\pi_1(Y_1, y_1))$ es subgrupo de $p_{2*}(\pi_1(Y_2, y_2))$. Además, si existe tal f , se tiene que (Y_1, f) es espacio recubridor de Y_2 .

| Teorema 2.16 ([23, Teorema 6.6]). Dos espacios recubridores (Y_1, p_1) y (Y_2, p_2) de X son isomorfos (esto es, existe un isomorfismo entre ellos) si y sólo si, para cualesquiera dos puntos $y_1 \in Y_1$ e $y_2 \in Y_2$ con $p(y_1) = p(y_2) = x_0$, los subgrupos $p_{1*}(\pi_1(Y_1, y_1))$ y $p_{2*}(\pi_1(Y_2, y_2))$ forman parte de la misma clase de conjugación en $\pi_1(X, x_0)$.

Como consecuencia de la proposición 2.15, se tiene que un recubridor simplemente conexo de un cierto espacio X también recubre a cualquier otro espacio recubridor de X . Esto nos lleva a la noción de recubridor universal, que será de gran utilidad a la hora de conseguir modelos para $K(G, 1)$; ver Definición 2.18 en la siguiente sección.

| Definición 2.17. Sean X un espacio topológico y (Y, p) un espacio recubridor de X . Si Y es simplemente conexo, decimos que (Y, p) es un **espacio recubridor universal** de X .

En virtud del teorema 2.16, se tiene que el recubridor universal de un espacio es único salvo isomorfismo.

2.4 Espacios de Eilenberg-MacLane

Como ya hemos mencionado anteriormente, nuestro objetivo es estudiar la estructura de los grupos de Artin de ángulo recto mediante su cohomología. Para ello daremos una construcción explícita del complejo de Salvetti de un grafo, que es precisamente un espacio de Eilenberg-MacLane para el RAAG asociado. La referencia en esta sección es el capítulo 6 de [29].

Definición 2.18. Sean G un grupo y $n \geq 1$. Un espacio X conexo por caminos se dice **espacio de Eilenberg-MacLane** de tipo $K(G, n)$ si su n -ésimo grupo de homotopía es isomorfo a G y todos los demás grupos de homotopía son triviales.

Proposición 2.19. Sea X un CW-complejo conexo. Si X tiene recubridor universal contráctil, entonces X es un modelo para $K(\pi_1(X), 1)$.

Demostración. La prueba consiste en estudiar la sucesión exacta larga de homotopía de una fibración. Ver [14, Teorema 4.41]. \square

Como ilustran los siguientes resultados, los espacios de tipo $K(G, n)$ representan, en cierto sentido, al grupo G en la categoría de espacios (salvo equivalencia de homotopía). Las pruebas pueden ser consultadas en [29, 6.39-6.44].

Teorema 2.20. Sean $n \geq 1$ y G un grupo (abeliano si $n \geq 2$). Entonces existe un CW-complejo de tipo $K(G, n)$, único salvo equivalencia de homotopía.

Teorema 2.21. Sean $n \geq 1$ y $\phi: G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos (abelianos si $n \geq 2$) y sean X e Y modelos para $K(G, n)$ y $K(H, n)$, respectivamente. Si tomamos puntos base, $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, existe una aplicación continua $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, única salvo homotopía, que induce ϕ en el n -ésimo grupo de homotopía, es decir, de forma que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_n(Y, y_0) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ G & \xrightarrow{\phi} & H. \end{array}$$

2.5 Homología singular

En este epígrafe definiremos la versión singular de homología, que necesitaremos en el resto del trabajo. La homología singular extiende los grupos de homología a espacios topológicos cualesquiera. A diferencia de la homología simplicial, la homología singular permite definir de forma natural e inmediata los homomorfismos inducidos por aplicaciones continuas. Aunque la computabilidad de los grupos de homología singular de un espacio arbitrario es en general muy complicada, cuando tratemos con CW-complejos (como el complejo de Salvetti, que definimos al comienzo del capítulo 3) contaremos con herramientas que facilitarán sustancialmente el cálculo. Además, para espacios triangulables los grupos de homología simplicial y singular son isomorfos de forma natural, así que en ese caso podremos acudir a la teoría simplicial para ejecutar el cálculo. A lo largo de la sección seguiremos el capítulo 4 del libro de Munkres [24].

Denotamos por $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n$ al espacio vectorial de sucesiones de números reales con un número finito de componentes no nulas. Dotamos a \mathbb{R}^∞ de la topología dada por la norma

$$\|x - y\| = \max_{n \geq 1} |x_n - y_n|.$$

Comenzamos dando la definición del elemento básico en teoría singular: los símlices singulares.

Definición 2.22. Sea $\Delta_n \subset \mathbb{R}^\infty$ el n -símplice canónico. Entonces, dado un espacio topológico X , un **n -símplice singular** de X es una aplicación continua $T : \Delta_n \rightarrow X$. Llamamos **grupo de n -cadenas singulares**, denotado $S_n(X)$, al grupo libre abeliano generado por los n -símlices singulares de X . Los elementos de $S_n(X)$, denominados **n -cadenas singulares**, son por tanto combinaciones lineales formales de n -símlices singulares con coeficientes enteros.

Un tipo especial de símlices singulares es el de los dados por aplicaciones afines. Nos servirá para adaptar la noción de cara a símlices singulares.

Definición 2.23. Dados $n + 1$ puntos $\{a_0, \dots, a_n\}$ de \mathbb{R}^∞ , existe una única aplicación afín l de Δ_n en \mathbb{R}^∞ que lleva e_i en a_i para cada $i = 0, \dots, n$. Viene dada por

$$l(x_1, \dots, x_n, 0, \dots) = a_0 + \sum_{i=1}^n x_i (a_i - a_0).$$

Esta aplicación, denotada por $l(a_0, \dots, a_n)$, recibe el nombre de **símplice singular lineal** determinado por $\{a_0, \dots, a_n\}$.

Para cada $i = 0, \dots, n$, la aplicación $l(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n)$ es un homeomorfismo lineal que lleva Δ_{n-1} en la cara $(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n)$ de Δ_n . Así, si $T : \Delta_n \rightarrow X$ es un n -símplice singular, la composición

$$T \circ l(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n) : \Delta_{n-1} \rightarrow X$$

es un $(n-1)$ -símplice singular de X , que podemos interpretar como la **i -ésima cara** del n -símplice T .

| Definición 2.24. Para cada $n \geq 1$, el **operador borde** es el homomorfismo $\partial_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$ dado por

$$\partial_n T = \sum_{i=1}^n (-1)^i T \circ l(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n)$$

para cada n -símplice singular $T : \Delta_n \rightarrow X$.

Siempre que no haya lugar a ambigüedad, escribiremos ∂ en lugar de ∂_n . En [24, Teorema 29.1] se prueba que, en efecto, $\partial^2 = 0$, así que lo que tenemos es un complejo de cadenas:

| Definición 2.25. La familia de grupos y homomorfismos $\{S_n(X), \partial_n\}$ constituye un complejo de cadenas, denominado **complejo de cadenas singulares** de X y denotado por $S(X)$. Los grupos de homología $H_n(S(X))$ de este complejo de cadenas se denominan **grupos de homología singular** de X , y se denotan por $H_n(X)$.

El complejo de cadenas $S(X)$ admite un aumento $\epsilon : S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ dado por $\epsilon(T) = 1$ para todo 0-símplice singular $T : \Delta_0 \rightarrow X$. Se comprueba que $\epsilon \circ \partial = 0$. Los grupos de homología de $\{S(X), \epsilon\}$ reciben el nombre de **grupos de homología singular reducida** y se denotan por $\tilde{H}_n(X)$.

Observación. La homología singular puede definirse con coeficientes en cualquier grupo abeliano. Por simplicidad nos limitamos en este trabajo a la homología con coeficientes en \mathbb{Z} , que es la que hemos definido de un modo implícito.

Como adelantamos el comienzo de la sección, en homología singular pueden definirse sin ningún esfuerzo homomorfismos inducidos por aplicaciones continuas:

| Definición 2.26. Toda aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ induce, para cada $n \geq 0$, un homomorfismo $f_{\#} : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$ dado por $f_{\#}(T) = f \circ T$ para cada n -símplice singular $T : \Delta^n \rightarrow X$.

Es inmediato comprobar que $f_{\#}$ conmuta tanto con el operador borde ∂ como con el aumento ϵ , así que la familia de homomorfismos $\{f_{\#}\}$ es de hecho un homomorfismo entre los complejos de cadenas $\{S(X), \epsilon\}$ y $\{S(Y), \epsilon'\}$. Por lo tanto, toda aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ induce homomorfismos f_* tanto en homología singular como en homología singular reducida. Además, se comprueba fácilmente que $Id_* = Id$ y $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, pues las respectivas igualdades son ciertas a nivel de cadenas.

De lo anterior se deduce inmediatamente que los grupos de homología singular son invariantes topológicos. En [24, Teorema 30.7] se prueba que aplicaciones homotópicas inducen los mismos homomorfismos en los grupos de homología singular, así que estos también son invariantes por equivalencias de homotopía.

Observación. Dado un subespacio $A \subset X$, la inclusión $i : A \hookrightarrow X$ induce homomorfismos inyectivos $i_{\#} : S_n(A) \rightarrow S_n(X)$. Dicho de otro modo, podemos ver $S_n(A)$ como el subgrupo de $S_n(X)$ formado por cadenas de n -símplices $T : \Delta_n \rightarrow X$ cuya imagen está contenida en A . De esta forma, $S(A)$ es un subcomplejo de cadenas de $S(X)$.

Definición 2.27. Si A es un subespacio de X , denotamos por $S(X, A)$ al complejo de cadenas que tiene como n -ésimo grupo de cadenas a

$$S_n(X, A) = S_n(X)/S_n(A),$$

denominado grupo de cadenas relativas, y como operador borde al inducido por $\partial : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$ en el cociente. Los grupos de homología $H_n(X, A)$ de este complejo de cadenas se denominan **grupos de homología singular relativa** de la pareja (X, A) . Puede comprobarse que las aplicaciones continuas $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ inducen homomorfismos tanto a nivel de cadenas relativas como a nivel de homología y que estos poseen las propiedades funtoriales usuales; ver [24, Teorema 30.1].

Observación. Tomando $A = \emptyset$ se tiene que $S_n(X, A) = S_n(X)$, así que la homología absoluta puede verse como un caso particular de homología relativa.

Igual que en homología simplicial, hay una sucesión exacta larga que relaciona los grupos de homología singular con los grupos de homología singular relativa:

Teorema 2.28 ([24, Teorema 30.2]). *Sea A un subespacio de X . Entonces existen homomorfismos $\partial_* : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$ de forma que la sucesión*

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{\pi_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \rightarrow \cdots$$

*es exacta, donde $i : A \rightarrow X$ es la inclusión y $\pi : S_n(X) \rightarrow S_n(X, A)$ es la proyección natural. Esta sucesión recibe el nombre de **sucesión exacta del par (X, A)** .*

Si X es la unión de dos subespacios X_1 y X_2 , nos gustaría poder construir la correspondiente sucesión de Mayer-Vietoris en homología singular. En el caso de homología simplicial, esto es posible cuando X_1 y X_2 son los poliedros subyacentes a subcomplejos del complejo que triangula a X . En homología singular necesitamos una condición análoga:

| Definición 2.29. Sea $X = X_1 \cup X_2$. Se dice que $\{X_1, X_2\}$ es una **pareja escisiva** si

$$H_n(X_1, X_1 \cap X_2) \cong H_n(X, X_2)$$

a través del homomorfismo inducido por la inclusión de pares $(X_1, X_1 \cap X_2) \hookrightarrow (X, X_2)$.

Si $X = X_1 \cup X_2$, denotamos por $S(X_1) + S(X_2)$ al complejo de cadenas que tiene como n -ésimo grupo de cadenas a $S_n(X_1) + S_n(X_2)$ (suma interna de subgrupos de $S_n(X)$) y como operador borde a (∂_1, ∂_2) , donde ∂_i es la restricción del operador borde de $S(X)$ a $S(X_i)$ para $i = 1, 2$. Llamamos $H_n(X_1 + X_2)$ a los correspondientes grupos de homología.

Proposición 2.30. La pareja $\{X_1, X_2\}$ es escisiva si y sólo si la inclusión

$$S(X_1) + S(X_2) \hookrightarrow S(X)$$

induce un isomorfismo en homología.

Demostración. Sea $p: S(X_1) + S(X_2) \rightarrow S(X_1, X_1 \cap X_2)$ dada por

$$p(c) = c_1 + S_n(X_1 \cap X_2)$$

para todo $c = c_1 + c_2 \in S_n(X_1) + S_n(X_2)$. Observemos que p está bien definida, pues no depende de la descomposición de c . En efecto, si $c = c_1 + c_2 = c'_1 + c'_2$, entonces $c_1 - c'_1 = c'_2 - c_2$ está en $S_n(X_1) \cap S_n(X_2) = S_n(X_1 \cap X_2)$, luego $c_1 + S_n(X_1 \cap X_2) = c'_1 + S_n(X_1 \cap X_2)$.

Se comprueba fácilmente que p es un homomorfismo de complejos de cadenas. Así, tenemos la siguiente sucesión exacta de complejos de cadenas

$$0 \rightarrow S(X_2) \xrightarrow{j} S(X_1) + S(X_2) \xrightarrow{p} S(X_1, X_1 \cap X_2) \rightarrow 0,$$

donde j es la inclusión.

La correspondiente sucesión exacta larga de homología y la sucesión exacta larga del par (X, X_2) nos proporcionan el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H_n(X_2) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X_1 + X_2) & \xrightarrow{p_*} & H_n(X_1, X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & H_{n-1}(X_2) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & H_n(X_2) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{\pi_*} & H_n(X, X_2) & \longrightarrow & H_{n-1}(X_2) & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Aquí las flechas verticales son homomorfismos inducidos por inclusiones. El lema de los cinco concluye la prueba. \square

| Teorema 2.31 (Sucesión de Mayer-Vietoris). Sean $X = X_1 \cup X_2$, con $\{X_1, X_2\}$ pareja escisiva, y $A = X_1 \cap X_2$. Entonces existe una sucesión exacta

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{\phi_*} H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \xrightarrow{\psi_*} H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(A) \rightarrow \cdots$$

llamada **sucesión de Mayer-Vietoris** de $\{X_1, X_2\}$. Los homomorfismos ϕ_* y ψ_* son los inducidos por los homomorfismos de complejos de cadenas

$$\begin{aligned}
 \phi(a) &= (i_{\#}(a), -j_{\#}(a)) \\
 \psi(x_1, x_2) &= k_{\#}(x_1) + l_{\#}(x_2),
 \end{aligned}$$

donde las aplicaciones que intervienen son las inclusiones

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & X_1 \\
 j \downarrow & & \downarrow k \\
 X_2 & \xrightarrow{l} & X.
 \end{array}$$

Demostración. Puesto que el hecho de que la pareja $\{X_1, X_2\}$ sea escisiva garantiza por la proposición anterior que

$$H_n(\mathcal{S}(X_1) + \mathcal{S}(X_2)) \cong H_n(X),$$

basta con probar que la sucesión de complejos de cadenas

$$0 \rightarrow \mathcal{S}(A) \xrightarrow{\phi} \mathcal{S}(X_1) \oplus \mathcal{S}(X_2) \xrightarrow{\psi} \mathcal{S}(X_1) + \mathcal{S}(X_2) \rightarrow 0$$

es exacta.

Es evidente que ψ es sobreyectivo. El homomorfismo ϕ es inyectivo por serlo $i_{\#}$ (también lo es $j_{\#}$). Se tiene además que

$$(x_1, x_2) \in \text{Ker}(\psi) \iff k_{\#}(x_1) = -l_{\#}(x_2) \iff x_1 = -x_2.$$

Así, el núcleo de ψ está constituido por todas las cadenas de la forma $(a, -a)$ con $a \in \mathcal{S}_n(X_1) \cap \mathcal{S}_n(X_2) = \mathcal{S}_n(A)$, que son precisamente los elementos de la imagen de ϕ . \square

Análogamente a lo que sucede en homología simplicial, dispondremos de la sucesión de Mayer-Vietoris de homología singular en el caso de un CW -complejo que se descomponga como la unión de dos subcomplejos.

Proposición 2.32 ([14, Corolario 2.24]). *Si un CW -complejo X es la unión de los subcomplejos X_1 y X_2 , entonces la pareja $\{X_1, X_2\}$ es escisiva y se tiene por tanto la correspondiente sucesión de Mayer-Vietoris.*

El siguiente teorema nos muestra cómo pasar de homología simplicial a singular y viceversa cuando trabajamos con espacios triangulables:

Teorema 2.33 ([24, Teoremas 34.3-34.5]). *Dado un complejo simplicial K , elegimos un orden parcial de los vértices de K que induzca un orden total en los vértices de cada símplice de K y orientamos los símplices de K a partir de dicho orden. Definimos entonces $\eta : C(K) \rightarrow S(|K|)$ como*

$$\eta([v_0, \dots, v_n]) = l(v_0, \dots, v_n).$$

Se tiene que η es un homomorfismo de complejos de cadenas que induce un isomorfismo η_ entre los grupos de homología simplicial y singular que no depende del orden parcial escogido. Además η_* conmuta con los homomorfismos inducidos por aplicaciones continuas.*

2.5.1 Complejo de cadenas celulares

Veamos ahora cómo la estructura de los CW -complejos permite el cálculo de su homología singular mediante técnicas similares a las empleadas en homología simplicial. El objetivo es definir un complejo de cadenas $D(X)$ para CW -complejos que se comporte de forma parecida a los complejos de cadenas simpliciales $C(K)$ y que a su vez permita calcular la homología singular de X .

Definición 2.34. Dado un CW -complejo X , llamamos **complejo de cadenas celulares**, denotado $D(X)$, al complejo de cadenas cuyo n -ésimo grupo de cadenas es

$$D_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$$

y cuyo operador borde $\partial : D_n(X) \rightarrow D_{n-1}(X)$ viene dado por la composición

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{\pi_*} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}),$$

donde $\pi : S_n(X) \rightarrow S_n(X, A)$ es la proyección y ∂_* es el homomorfismo de la sucesión exacta del par (X^n, X^{n-1}) .

Nota. La igualdad $\partial_n \partial_{n-1} = 0$ se sigue de la exactitud de la sucesión del par (X^{n-1}, X^{n-2}) en $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$.

El ejemplo 1 de la página 222 de [24] muestra que si el CW-complejo X es precisamente una realización geométrica de un complejo simplicial K de forma que las celdas de X son los símlices de K , entonces los complejos de cadenas $D(X)$ y $C(K)$ coinciden. Los siguientes resultados refuerzan la analogía entre la homología de ambos complejos. Ver [24, Lema 39.2 y Teoremas 39.3-39.5].

| Teorema 2.35. Sean X un CW-complejo y e_α^n una n -celda de X . La función característica de e_α^n ,

$$f_\alpha^n : (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (e_\alpha^n, \partial e_\alpha^n),$$

induce un isomorfismo en homología relativa (singular).

| Teorema 2.36. El grupo $H_i(X^n, X^{n-1})$ es trivial para $i \neq n$ y es abeliano libre para $i = n$. Si γ genera $H_n(B^n, S^{n-1})$, entonces $\{(f_\alpha^n)_*(\gamma)\}_{\alpha \in J_n}$ es base de $H_n(X^n, X^{n-1})$.

| Definición 2.37. Si un CW-complejo X puede ser triangulado por un complejo simplicial K de forma que cada esqueleto X^n de X esté triangulado por un subcomplejo de K de dimensión a lo sumo n , entonces decimos que X es un **CW-complejo triangulable**.

| Teorema 2.38. Sean X un CW-complejo y $D(X)$ su complejo de cadenas celulares. Entonces

$$H_n(D(X)) \cong H_n(X).$$

Si K es una triangulación del CW-complejo X , se tiene que $D_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$ es el subgrupo de $C_n(K)$ formado por las n -cadenas en X^n cuyo borde está en X^{n-1} y el isomorfismo anterior viene inducido por la inclusión $D(X) \hookrightarrow C(X)$.

Resumimos a continuación los ingredientes necesarios para obtener el complejo de cadenas $D(X)$.

| Definición 2.39. Para cada n -celda e_α^n del CW-complejo X , el grupo $H_n(e_\alpha^n, \partial e_\alpha^n)$ es infinito y cíclico (ver Teorema 2.35). Los dos posibles generadores de este grupo se denominan **orientaciones** de e_α^n . Una **n -celda orientada** de X es una n -celda e_α^n junto con una orientación de e_α^n .

Así, podemos obtener una base de $D_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$ orientando cada n -celda de X y tomando su imagen por el homomorfismo inducido por la inclusión $(e_\alpha^n, \partial e_\alpha^n) \hookrightarrow (X^n, X^{n-1})$.

Si K es una triangulación del CW -complejo X , se tiene que cada n -celda de X es el poliedro subyacente de un subcomplejo de K . El grupo $H_n(e_\alpha^n, \partial e_\alpha^n)$ es entonces el subgrupo de $C_n(K)$ formado por cadenas en e_α^n cuyo borde está en ∂e_α^n . Este grupo es cíclico e infinito y llamamos **ciclo fundamental** de $(e_\alpha^n, \partial e_\alpha^n)$ a cualquier generador. El grupo $D_n(X)$ es entonces el subgrupo de $C_n(K)$ formado por las combinaciones lineales de ciclos fundamentales de los pares $(e_\alpha^n, \partial e_\alpha^n)$.

Se recomienda al lector que consulte el ejemplo 2 de la página 229 de [24], donde se utilizan estas ideas para calcular la homología del 2-toro. El cálculo de la cohomología que haremos en la sección 3.1 seguirá la misma línea.

2.6 Cohomología

En este epígrafe definiremos los conceptos que necesitaremos para describir la cohomología del complejo de Salvetti, que es el principal objeto de estudio del capítulo 3. Definiremos en primer lugar los grupos de cohomología, que se obtienen, esencialmente, dualizando los complejos de cadenas. Posteriormente veremos que estos grupos nos dan acceso a una estructura mucho más rica: la de anillo. En la última sección del epígrafe abordaremos la fórmula de Künneth para la cohomología del espacio producto, que nos será de suma utilidad en el último capítulo. La principal referencia en este epígrafe es el capítulo 5 del libro de Munkres [24].

2.6.1 Los grupos de cohomología

En esta sección definiremos los grupos de cohomología de un complejo de cadenas y veremos que en cohomología singular contamos con una serie de resultados análogos a los vistos en el anterior epígrafe para homología singular.

| Definición 2.40. Sean $C = \{C_n, \partial_n\}$ un complejo de cadenas y G un grupo abeliano. Llamamos **grupos de cocadenas** de C con coeficientes en G a los grupos

$$C^n(C; G) = \text{Hom}(C_n, G).$$

Definimos el **operador coborde** $\delta_n : C^{n-1}(C; G) \rightarrow C^n(C; G)$ como el dual del operador borde ∂_n , es decir:

$$\delta_n(c) = c \circ \partial_n$$

para todo $c \in C^{n-1}(C; G)$. Se tiene que $\delta^2 = 0$. La familia de grupos y homomorfismos $\{C^n(C; G), \delta_n\}$ se denomina **complejo de cocadenas** de C con coeficientes en G . Llamamos **grupo de cociclos**, denotado $Z^{n-1}(C; G)$, al núcleo de δ_n y **grupo de cobordes**, $B^n(C; G)$, a su imagen. El **grupo de cohomología** de C de dimensión n con coeficientes en G viene entonces dado por

$$H^n(C; G) = Z^n(C; G) / B^n(C; G).$$

Si $\{C, \epsilon\}$ es un complejo de cadenas aumentado, podemos dualizar el aumento ϵ para obtener los **grupos de cohomología reducida** $\tilde{H}^n(C; G)$ (ver [24, pág. 246] para más detalles).

Observación. Si llamamos C^* a $\{C^n(C; G), \delta_n\}$ y cambiamos cada índice n por $-n$, entonces C^* es un complejo de cadenas y la cohomología del complejo C con coeficientes en G es precisamente la homología de C^* . Es decir,

$$H^n(C; G) = H_{-n}(C^*).$$

Por tanto, los resultados que conocemos sobre álgebra homológica son aplicables a cohomología.

Proposición 2.41. Sean $C = \{C_n, \partial\}$ y $D = \{D_n, \partial'\}$ complejos de cadenas y $\phi : C \rightarrow D$ un homomorfismo de complejos de cadenas. Entonces el homomorfismo dual

$$C^n(C; G) \xleftarrow{\tilde{\phi}} D^n(D; G)$$

conmuta con los operadores coborde de C y D , y recibe el nombre de **homomorfismo de complejo de cocadenas** asociado a ϕ . Tal homomorfismo induce un homomorfismo entre los grupos de cohomología,

$$H^n(C; G) \xleftarrow{\phi^*} H^n(D; G).$$

Además, se tiene que $Id^* = Id$ y si $\phi : D \rightarrow E$ es otro homomorfismo de complejos de cadenas, entonces $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$.

Demostración. Llamamos δ y δ' a los homomorfismos duales de ∂ y ∂' , respectivamente. El hecho de que $\delta \circ \tilde{\phi} = \tilde{\phi} \circ \delta'$ se obtiene dualizando la igualdad $\phi \circ \partial = \partial' \circ \phi$,

que es cierta por ser ϕ un homomorfismo de complejos de cadenas. De lo anterior se deduce que los homomorfismos de complejos de cocadenas llevan cociclos en cociclos y cobordes en cobordes, luego efectivamente inducen homomorfismos en los respectivos cocientes y por tanto en cohomología. Por último, es fácil comprobar que las propiedades funtoriales de la asociación $\phi \rightarrow \phi^*$ son ciertas a nivel de cocadenas, así que se mantienen al pasar al cociente. \square

Como muestra el siguiente teorema, en el caso de los complejos de cadenas libres (esto es, aquellos cuyos grupos de cadenas son libres) los grupos de cohomología están determinados, salvo isomorfismos, por los grupos de homología.

| Teorema 2.42 ([24, Teorema 45.5]). *Sean C y D complejos de cadenas libres y $\phi : C \rightarrow D$ un homomorfismo de complejos de cadenas. Si ϕ induce isomorfismos en todos los grupos de homología, entonces ϕ induce isomorfismos en todos los grupos de cohomología.*

La cohomología singular no es más que la cohomología del complejo de cadenas singulares:

| Definición 2.43. Sean X un espacio topológico, A un subespacio de X (posiblemente vacío) y G un grupo abeliano. Llamamos **grupos de cocadenas singulares** del par (X, A) a los grupos

$$S^n(X, A; G) = S^n(S(X, A); G).$$

y definimos los **grupos de cohomología singular** del par (X, A) con coeficientes en G como

$$H^n(X, A; G) = H^n(S(X, A); G).$$

Eliminaremos A de la notación cuando sea vacío.

De la proposición 2.41 se deduce lo siguiente:

Proposición 2.44. *Dada una aplicación continua $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, consideramos el homomorfismo inducido $f_\#$ y denotamos su dual por*

$$f^\# : S^n(Y, B; G) \rightarrow S^n(X, A; G).$$

Se tiene que $f^\#$ induce un homomorfismo

$$H^n(X, A; G) \xleftarrow{f^*} H^n(Y, B; G)$$

que satisface las propiedades funtoriales habituales.

Como en homología, los grupos de cohomología singular y simplicial de un complejo simplicial son isomorfos:

| Teorema 2.45. Sean K un complejo simplicial y $\eta: C(K) \rightarrow S(|K|)$ el homomorfismo de cadenas definido en el teorema 2.33. Entonces η^* es un isomorfismo entre los grupos de cohomología singular y simplicial que no depende del orden parcial escogido para definir η y que conmuta con los homomorfismos inducidos por aplicaciones continuas.

Demostración. El hecho de que η^* es un isomorfismo se deduce de los teoremas 2.33 y 2.42. Consultar [24, Teorema 44.2] para el resto de la prueba. \square

Veamos ahora que en cohomología también contamos con la sucesión de Mayer-Vietoris de una pareja.

Lema 2.46. Sean A, B y G grupos abelianos. Entonces existe un isomorfismo natural

$$\text{Hom}(A \oplus B, G) \cong \text{Hom}(A, G) \oplus \text{Hom}(B, G).$$

Demostración. Sean i_A e i_B las respectivas inclusiones de A y B en $A \oplus B$. Entonces la aplicación $L: \text{Hom}(A \oplus B, G) \rightarrow \text{Hom}(A, G) \oplus \text{Hom}(B, G)$ dada por

$$\gamma \mapsto (\gamma|_A, \gamma|_B) = (\gamma \circ i_A, \gamma \circ i_B) = (\tilde{i}_A(\gamma), \tilde{i}_B(\gamma))$$

es el isomorfismo buscado. Su inverso viene dado por

$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta,$$

donde $(\alpha + \beta)(a, b) = \alpha(a) + \beta(b)$ para todo $(a, b) \in A \oplus B$. \square

Lema 2.47. Si la sucesión

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

es exacta y escinde, se tiene que la sucesión dual

$$0 \leftarrow \text{Hom}(A, G) \xleftarrow{\tilde{f}} \text{Hom}(B, G) \xleftarrow{\tilde{g}} \text{Hom}(C, G) \leftarrow 0$$

es exacta y escinde.

Demostración. Veamos primero que \tilde{g} es inyectiva. Sea $\gamma \in \text{Hom}(C, G)$ con $0 = \tilde{g}(\gamma) = \gamma \circ g$. Como g es sobreyectiva por exactitud, dado $c \in C$, existe $b \in B$ con $g(b) = c$, así que $\gamma(c) = \gamma(g(b)) = 0$ para todo $c \in C$ y por tanto $\gamma = 0$.

Veamos la exactitud en $\text{Hom}(B, G)$. Como $g \circ f = 0$, tomando dual obtenemos que $\tilde{f} \circ \tilde{g} = 0$, es decir, $\text{Im}(\tilde{g}) \subset \text{Ker}(\tilde{f})$. Sea ahora $\beta \in \text{Ker}(\tilde{f})$. Como $\tilde{f}(\beta) = \beta \circ f = 0$, se tiene que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(\beta)$, así que β induce un homomorfismo $\beta' : B/\text{Im}(f) \rightarrow G$. Por exactitud tenemos que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$ y que g es sobreyectiva. Por tanto, por el primer teorema de isomorfía, g induce un isomorfismo $g' : B/\text{Im}(f) \rightarrow C$. Es decir, tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} G & \xleftarrow{\beta} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & \swarrow \beta' & \downarrow \pi & \searrow g' & \\ & & B/\text{Im}(f) & & \end{array}$$

Sea entonces $\gamma = \beta' \circ (g')^{-1} \in \text{Hom}(C, G)$. Se tiene que $\tilde{g}(\gamma) = \gamma \circ g = \beta' \circ (g')^{-1} \circ g = \beta$ y por tanto $\beta \in \text{Im}(\tilde{g})$.

Veamos finalmente que \tilde{f} es sobreyectiva y que la sucesión dual escinde. Como la sucesión original es escindida, existe un subgrupo B' de B tal que $B = \text{Im}(f) \oplus B'$. Como f es inyectiva, podemos considerar el homomorfismo $p : B \rightarrow A$ resultante de componer la proyección de B en $\text{Im}(f)$ con $f^{-1} : \text{Im}(f) \rightarrow A$. Se tiene entonces que $p \circ f = \text{Id}_A$. Dualizando obtenemos que $\tilde{f} \circ \tilde{p} = \text{Id}_{\text{Hom}(A, G)}$, así que \tilde{f} ha de ser sobreyectiva. Si vemos que $\text{Hom}(B, G) = \text{Ker}(\tilde{f}) \oplus \text{Im}(\tilde{p})$ habremos acabado, pues ya hemos probado que $\text{Ker}(\tilde{f}) = \text{Im}(\tilde{g})$. Dado $\beta \in \text{Hom}(B, G)$, podemos escribir

$$\beta = [\beta - \tilde{p}(\tilde{f}(\beta))] + \tilde{p}(\tilde{f}(\beta)),$$

donde el primer sumando está en $\text{Ker}(\tilde{f})$ y el segundo en $\text{Im}(\tilde{p})$. Por último, si $\beta \in \text{Ker}(\tilde{f}) \cap \text{Im}(\tilde{p})$, entonces $\beta = \tilde{p}(\alpha)$ para algún $\alpha \in \text{Hom}(A, G)$, de donde $0 = \tilde{f}(\beta) = \tilde{f}(\tilde{p}(\alpha)) = \alpha$. Por tanto $\psi = \tilde{p}(0) = 0$.

□

| Teorema 2.48 (Sucesión de Mayer-Vietoris). Sean $X = X_1 \cup X_2$, con $\{X_1, X_2\}$ pareja escisiva, $A = X_1 \cap X_2$ y G un grupo abeliano. Entonces existe una sucesión exacta

$$\dots \leftarrow H^{n+1}(X; G) \leftarrow H^n(A; G) \xleftarrow{\phi^*} H^n(X_1; G) \oplus H^n(X_2; G) \xleftarrow{\psi^*} H^n(X; G) \leftarrow \dots,$$

llamada **sucesión de Mayer-Vietoris** en cohomología de la pareja $\{X_1, X_2\}$. Los homomorfismos ϕ^* y ψ^* son los inducidos por los homomorfismos de complejos de cocadenas

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\alpha_1, \alpha_2) &= i^\sharp(\alpha_1) - j^\sharp(\alpha_2) \\ \hat{\psi}(\beta) &= (k^\sharp(\beta), l^\sharp(\beta)),\end{aligned}$$

donde las aplicaciones que intervienen son las inclusiones

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X_1 \\ j \downarrow & & \downarrow k \\ X_2 & \xrightarrow{l} & X. \end{array}$$

Demostración. En la prueba del teorema 2.31 vimos que, para cada $n \geq 0$, la sucesión

$$0 \rightarrow S^n(A) \xrightarrow{\phi} S^n(X_1) \oplus S^n(X_2) \xrightarrow{\psi} S^n(X_1) + S^n(X_2) \rightarrow 0$$

es exacta. Además, como $S_n(X)$ es libre, también lo es $S(X_1) + S(X_2)$ (todo subgrupo de un grupo abeliano libre es abeliano libre), luego la sucesión es escindida y se tiene por el lema 2.47 que la sucesión dual

$$0 \leftarrow S_n(A) \xleftarrow{\tilde{\phi}} \text{Hom}(S_n(X_1) \oplus S_n(X_2), G) \xleftarrow{\tilde{\psi}} \text{Hom}(S_n(X_1) + S_n(X_2), G) \leftarrow 0$$

es exacta. Mediante el isomorfismo L del lema 2.46 obtenemos la sucesión exacta

$$0 \leftarrow S^n(A) \xleftarrow{\hat{\phi}} S^n(X_1) \oplus S^n(X_2) \xleftarrow{\hat{\psi}} \text{Hom}(S_n(X_1) + S_n(X_2), G) \leftarrow 0, \quad (*)$$

donde $\hat{\phi} = \tilde{\phi} \circ L^{-1}$ y $\hat{\psi} = L \circ \tilde{\psi}$.

Observemos que podemos dotar a la familia de grupos $\{\text{Hom}(S_n(X_1) + S_n(X_2), G)\}$ de estructura de complejo de "cocadenas" de la forma evidente: dualizando el operador borde del complejo $S(X_1) + S(X_2)$. Ahora bien, como la pareja $\{X_1, X_2\}$ es escisiva, la inclusión $S_n(X_1) + S_n(X_2) \hookrightarrow S_n(X)$ induce un isomorfismo en homología para todo $n \geq 0$. Por el teorema 2.42 se tiene entonces que la restricción $S^n(X; G) \rightarrow \text{Hom}(S_n(X_1) + S_n(X_2), G)$ induce un isomorfismo en cohomología para todo $n \geq 0$. Por tanto la sucesión exacta larga asociada a las sucesiones exactas (*) es precisamente

$$\dots \leftarrow H^{n+1}(X; G) \leftarrow H^n(A; G) \xleftarrow{\phi^*} H^n(X_1; G) \oplus H^n(X_2; G) \xleftarrow{\psi^*} H^n(X; G) \leftarrow \dots$$

Veamos por último que los homomorfismos $\hat{\phi}$ y $\hat{\psi}$ se corresponden con los definidos en el teorema. Por un lado, dados $(\alpha, \beta) \in \mathcal{S}^n(X_1; G) \oplus \mathcal{S}^n(X_2; G)$ y $x \in \mathcal{S}_n(A)$, se tiene que

$$\begin{aligned} (\tilde{\phi} \circ L^{-1})(\alpha, \beta)(x) &= \tilde{\phi}(\alpha + \beta)(x) = (\alpha + \beta)(\phi(x)) \\ &= (\alpha + \beta)(i_{\#}(x), -j_{\#}(x)) = \alpha(i_{\#}(x)) - \beta(j_{\#}(x)) \\ &= i^{\#}(\alpha_1)(x) - j^{\#}(\alpha_2)(x) = (i^{\#}(\alpha_1) - j^{\#}(\alpha_2))(x). \end{aligned}$$

Por otro, dados $\beta \in \text{Hom}(\mathcal{S}_n(X_1) + \mathcal{S}_n(X_2), G)$ y $(x_1, x_2) \in \mathcal{S}_n(X_1) \oplus \mathcal{S}_n(X_2)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\beta)(x_1, x_2) &= \beta(\psi(x_1, x_2)) = \beta(k_{\#}(x_1) + l_{\#}(x_2)) \\ &= \beta(k_{\#}(x_1)) + \beta(l_{\#}(x_2)) = k^{\#}(\beta)(x_1) + l^{\#}(\beta)(x_2). \end{aligned}$$

Por tanto $L(\tilde{\psi}(\beta)) = (\tilde{\psi}(\beta)|_{\mathcal{S}_n(X_1)}, \tilde{\psi}(\beta)|_{\mathcal{S}_n(X_2)}) = (k^{\#}(\beta), l^{\#}(\beta))$. \square

En cohomología también podemos aprovechar la estructura de los CW -complejos. Dado un CW -complejo X , definimos el n -ésimo **grupo de cocadenas celulares** con coeficientes en G como $D^n(X; G) = \text{Hom}(D_n(X), G)$.

| Teorema 2.49. Sean X un CW -complejo, $D(X)$ su complejo de cadenas celulares y G un grupo abeliano. Entonces

$$H^n(D(X); G) \cong H^n(X; G).$$

Si K es una triangulación del CW -complejo X , se tiene que el isomorfismo está inducido por la restricción $C^n(K; G) \rightarrow D^n(X; G)$.

Demostración. Tanto $D(X)$ como $S(X)$ son complejos de cadenas libres, así que se tiene por los teoremas 2.38 y 2.42 que los respectivos grupos de cohomología son isomorfos. Si además X es un CW -complejo triangulable, sabemos que los isomorfismos en homología están inducidos por las inclusiones $D_n(X) \hookrightarrow C_n(K)$, luego sus duales (las restricciones) inducen isomorfismos en cohomología. \square

2.6.2 El anillo de cohomología

Hasta ahora hemos visto que los grupos de cohomología, por sí mismos, no aportan información nueva con respecto a los grupos de homología. Sin embargo, es posible dotar a la familia de los grupos de cohomología de una estructura algebraica

adicional: la de anillo. Esta estructura permite distinguir entre espacios en algunas ocasiones donde no es posible mediante los grupos de (co)homología. Seguiremos la sección 48 del capítulo 5 de [24].

De aquí en adelante, R denotará a un anillo conmutativo con unidad. Recordemos que un anillo es un grupo abeliano aditivo junto un producto compatible. Así, cuando los coeficientes de cohomología constituyen un anillo, podemos definir la siguiente operación:

| Definición 2.50. Sea X un espacio topológico. Llamamos **producto cup** de cocadenas a la operación binaria

$$\smile : S^p(X; R) \times S^q(X; R) \rightarrow S^{p+q}(X; R)$$

definida de la siguiente forma:

$$(c^p \smile c^q)(T) = c^p(\text{ToI}(e_0, \dots, e_p)) \cdot c^q(\text{ToI}(e_p, \dots, e_{p+q}))$$

para todo $(p+q)$ -símplice singular $T : \Delta_{p+q} \rightarrow X$.

Enunciamos a continuación una serie de propiedades del producto cup, cuya demostración puede consultarse en [24, Teoremas 48.1-48.3].

| Teorema 2.51. *El producto cup de cocadenas es bilineal y asociativo. La cocadena z^0 cuyo valor es 1 en cada 0-símplice singular actúa como elemento neutro. Además, se tiene la siguiente fórmula para el coborde del producto cup:*

$$\delta(c^p \smile c^q) = (\delta c^p) \smile c^q + (-1)^p c^p \smile (\delta c^q)$$

| Teorema 2.52. *El producto cup de cocadenas induce una operación*

$$\smile : H^p(X; R) \times H^q(X; R) \rightarrow H^{p+q}(X; R)$$

que es bilineal y asociativa. La clase de cohomología $[z^0]$ actúa como elemento neutro.

| Teorema 2.53. *Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua, entonces h^\sharp conserva los productos cup, es decir, $h^\sharp(c \smile c') = h^\sharp(c) \smile h^\sharp(c')$. La misma igualdad se tiene por lo tanto a nivel de cohomología.*

| Definición 2.54. Denotamos por $H(X; R)$ a la suma directa $\bigoplus H^i(X; R)$. El producto cup dota a este grupo de estructura de anillo unitario graduado. El anillo $(H(X; R), +, \smile)$, usualmente denotado por $H^*(X; R)$, recibe el nombre de **anillo de cohomología** de X con coeficientes en R .

Como consecuencia del teorema 2.53, toda aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ induce un homomorfismo de anillos $f^* : H^*(X; R) \rightarrow H^*(Y; R)$.

Se tiene que el producto cup es anticonmutativo:

| Teorema 2.55 ([24, Corolario 61.4]). *Dados $\alpha^p \in H^p(X; R)$ y $\beta^q \in H^q(X; R)$, se tiene la fórmula*

$$\alpha^p \smile \beta^q = (-1)^{pq} \beta^q \smile \alpha^p.$$

No hay un método general para el cálculo del anillo de cohomología singular de un espacio X , ni siquiera si X es un CW -complejo. Sin embargo, podemos definir una fórmula combinatoria para el producto cup en cohomología simplicial que se corresponda, a través del isomorfismo η del teorema 2.33, con la fórmula dada en el caso singular.

| Definición 2.56. Dado un complejo simplicial K , elegimos un orden parcial de los vértices de K que induzca un orden total en los vértices de cada símlice de K . Así, definimos el producto cup de cadenas simpliciales

$$\smile : C^p(X; R) \times C^q(X; R) \rightarrow C^{p+q}(X; R)$$

mediante la fórmula

$$(c^p \smile c^q)([v_0, \dots, v_{p+q}]) = c^p([v_0, \dots, v_p]) \cdot c^q([v_p, \dots, v_{p+q}]),$$

donde $v_0 < \dots < v_{p+q}$ en el orden escogido.

Los siguientes teoremas muestran que efectivamente la fórmula anterior tiene las propiedades análogas al producto cup singular.

| Teorema 2.57 ([24, Teorema 49.1]). *El producto cup de cadenas simpliciales es bilineal y asociativo. La cocadena z^0 que vale 1 en cada vértice de K actúa como elemento neutro. La fórmula del coborde del teorema 2.51 también es cierta en el caso simplicial. Por último, si $\eta : C_n(K) \rightarrow S_n(X)$ es el homomorfismo del teorema 2.33, entonces su dual $\tilde{\eta}$ lleva productos cup singulares en productos cup simpliciales.*

| Teorema 2.58 ([24, Teorema 49.2]). *El producto cup simplicial induce una operación*

$$\smile : H^p(K; R) \times H^q(K; R) \rightarrow H^{p+q}(K; R)$$

que es bilineal, asociativa y anticonmutativa y que no depende del orden escogido para los vértices de K . La clase de cohomología $[z^0]$ actúa como elemento neutro. Además, si $f : |K| \rightarrow |L|$ es una aplicación continua, entonces f^ conserva los productos cup.*

2.6.3 Cohomología del espacio producto. Fórmula de Künneth

Para calcular la cohomología del n -toro $\mathbb{T}^n = \prod_{k=1}^n S^1$, que necesitaremos en el siguiente capítulo, usaremos la fórmula de Künneth para la cohomología del espacio producto. Aunque estos resultados son clásicos, seguimos aquí el detallado enfoque de [30, Capítulo 3]. Una referencia estándar de este material es [14, Sección 3.2]. El teorema de Künneth dice así:

| Teorema 2.59. *Si R es un dominio de ideales principales y X e Y son espacios tales que para $A = X, Y$ el R -módulo $H(A; R)$ es de tipo finito y todos los R -módulos de torsión $\text{Tor}(H^i(A; R), H^j(A; R))$ son triviales, entonces el producto cross*

$$\times_1 : H^*(X; R) \otimes H^*(Y; R) \rightarrow H^*(X \times Y; R)$$

es un isomorfismo de álgebras.

El lector no debe extrañarse si una buena parte de los elementos que intervienen en el teorema le resultan desconocidos. El propósito de esta sección es precisamente proporcionar las herramientas necesarias para entender el producto cross y las condiciones bajo las cuales este es un isomorfismo. Comenzamos explicando por qué el teorema habla de isomorfismo de álgebras y no de anillos.

Dados un grupo abeliano G y un anillo R , podemos dotar a $\text{Hom}(G, R)$ de estructura de R -módulo definiendo $(r \cdot \alpha)(g) = r \cdot \alpha(g)$ para todos $r \in R$, $\alpha \in \text{Hom}(G, R)$ y $g \in G$. De esta forma, si $f : G \rightarrow G'$ es un homomorfismo de grupos, su dual $\tilde{f} : \text{Hom}(G', R) \rightarrow \text{Hom}(G, R)$ es un homomorfismo de R -módulos.

El grupo de cocadenas singulares $S^n(X; R)$ es un R -módulo y el operador coborde δ es un homomorfismo de R -módulos. Así, el producto por escalar definido a nivel de cocadenas induce en los grupos de cohomología $H^n(X; R) = \text{Im}(\delta)/\text{Ker}(\delta)$ un producto por escalar que los dota de estructura de R -módulo.

El grupo $H(X; R)$ adquiere por tanto estructura de R -módulo, pues es la suma directa de los R -módulos $H^n(X; R)$. El anillo graduado $H^*(X; R)$ es en realidad un R -álgebra graduada y las aplicaciones continuas inducen homomorfismos de álgebras.

| Definición 2.60. Sean A y B R -álgebras graduadas. Entonces el R -módulo $A \otimes B$ admite una estructura de R -álgebra graduada con el producto

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (-1)^{|b_1||a_2|} (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2),$$

donde $|\cdot|$ denota el grado. Se define $|a \otimes b| = |a| + |b|$ para todos $a \in A$ y $b \in B$.

A continuación definimos los R -módulos $\text{Tor}(M, N)$. Necesitamos para ello una definición previa:

Definición 2.61. Sea M un R -módulo. Una **resolución libre** de M es una sucesión exacta

$$\cdots \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

donde los R -módulos F_n son libres.

Si el anillo R es un dominio de ideales principales, entonces todo R -módulo admite una resolución libre en la que $F_n = 0$ para todo $n > 1$. En efecto, podemos tomar F_0 como el R -módulo libre sobre un conjunto de generadores de M y considerar la proyección natural $\pi : F_0 \rightarrow M$. Como R es dominio de ideales principales, se tiene que $F_1 = \text{Ker}(\pi)$ también es un R -módulo libre.

Definición 2.62. Sean M y N dos R -módulos y sea $0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ una resolución libre de M . Se define el **producto de torsión** de M y N , $\text{Tor}_R(M, N)$, como el R -módulo tal que la sucesión

$$0 \rightarrow \text{Tor}_R(M, N) \rightarrow F_1 \otimes N \rightarrow F_0 \otimes N \rightarrow M \otimes N \rightarrow 0$$

es exacta.

En [14, Lema 3A.2] se prueba que el producto de torsión es independiente de la resolución libre considerada. Escribiremos Tor en lugar de Tor_R cuando no haya lugar a confusión. Estas son algunas de las propiedades básicas del producto de torsión. Ver [14, Proposición 3A.5].

- (1) $\text{Tor}(M, N) \cong \text{Tor}(N, M)$
- (2) $\text{Tor}(M, N) = 0$ si M o N son R -módulos libres.
- (3) $\text{Tor}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, M) \cong \text{Ker}(M \xrightarrow{n} M)$. En particular, $\text{Tor}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}_b) = \mathbb{Z}_{(a,b)}$, donde (a, b) es el máximo común divisor de a y b .

Para poder definir el producto cross necesitamos el teorema de Eilbenberg-Zilber, que nos proporciona una equivalencia de homotopía entre los complejos de cadenas $\mathcal{S}(X \times Y)$ y $\mathcal{S}(X) \otimes \mathcal{S}(Y)$.

Definición 2.63. Sean $C = \{C_n, \partial\}$ y $D = \{D_n, \partial'\}$ complejos de cadenas, con C_n y D_n R -módulos. Definimos su producto tensorial $C \otimes D$ como el complejo de cadenas cuyo n -ésimo grupo de cadenas es el R -módulo

$$(C \otimes D)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes D_q,$$

con operador borde ∂^\otimes dado por

$$\partial^\otimes(c_p \otimes d_q) = \partial_p c_p \otimes d_q + (-1)^p c_p \otimes \partial'_q d_q$$

para todos $c_p \otimes d_q \in C_p \otimes D_q$ y enteros $p + q = n$.

| Teorema 2.64 ([24, Teorema 59.2]). *Para todo par de espacios topológicos X e Y existe una equivalencia de homotopía*

$$\phi : S(X \times Y) \rightarrow S(X) \otimes S(Y)$$

que conmuta con homomorfismos inducidos por aplicaciones continuas. El homomorfismo ϕ es único salvo homotopías y recibe el nombre de **homomorfismo de Eilenberg-Zilber**.

El siguiente teorema nos proporciona una fórmula específica para el homomorfismo de Eilenberg-Zilber.

| Teorema 2.65 ([24, Teorema 59.5]). *Sean $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ y $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ las proyecciones. Entonces la familia de homomorfismos*

$$\phi : S_n(X \times Y) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} S_p(X) \otimes S_q(Y)$$

dados por

$$\phi(T) = \sum_{p+q=n} (\pi_1 \circ T \circ l(e_0, \dots, e_p)) \otimes (\pi_2 \circ T \circ l(e_p, \dots, e_{p+q}))$$

constituye el correspondiente homomorfismo de Eilenberg-Zilber.

Necesitamos por último un homomorfismo que nos permita ver el producto tensorial de clases de homología como clases de homología de un producto tensorial de cocadenas. Recordemos que, dado un anillo R , siempre hay un isomorfismo $\nu : R \otimes R \rightarrow R$, dado por $\nu(r \otimes s) = r \cdot s$.

Proposición 2.66. *Sean C y D dos complejos de cadenas. Dados dos enteros p y q , se tiene que la aplicación*

$$\Theta_{pq} : H^p(C; R) \otimes H^q(D; R) \rightarrow H^{p+q}(C \otimes D; R)$$

dada por $\Theta_{pq}(\{c^p\} \otimes \{d^q\}) = \{\nu \circ (c^p \otimes d^q)\}$ está bien definida y es un monomorfismo.

Observación. En la proposición anterior se está haciendo uso implícito del isomorfismo natural $S^p(X; R) \otimes S^q(Y; R) \cong \text{Hom}(S_p(X) \otimes S_q(Y), R \otimes R)$. Ver [30, Lema 3.4] para más detalles.

| Definición 2.67. Sean X e Y espacios topológicos. Dados dos enteros p y q , se define el producto cross como la composición

$$\times_1 : H^p(X; \mathbb{R}) \otimes H^q(Y; \mathbb{R}) \xrightarrow{\Theta_{pq}} H^{p+q}(S(X) \otimes S(Y); \mathbb{R}) \xrightarrow{\phi^*} H^{p+q}(X \times Y; \mathbb{R}).$$

Es decir, el producto cross de dos clases $\{c^p\} \in H^p(X; \mathbb{R})$ y $\{d^q\} \in H^q(Y; \mathbb{R})$ viene dado por

$$\{c^p\} \times_1 \{d^q\} = \{\nu \circ (c^p \otimes d^q) \circ \phi\}.$$

Recordemos que el producto cup $\smile : H^p(Z; \mathbb{R}) \times H^q(Z; \mathbb{R}) \rightarrow H^{p+q}(Z; \mathbb{R})$ es una operación bilineal, así que induce una operación $\smile : H^p(Z; \mathbb{R}) \otimes H^q(Z; \mathbb{R}) \rightarrow H^{p+q}(Z; \mathbb{R})$ (que llamamos igual). Con eso en mente, se tiene que el producto cross \times_1 coincide con la composición

$$H^p(X; \mathbb{R}) \otimes H^q(Y; \mathbb{R}) \xrightarrow{\pi_1^* \otimes \pi_2^*} H^p(X \times Y; \mathbb{R}) \otimes H^q(X \times Y; \mathbb{R}) \xrightarrow{\smile} H^{p+q}(X \times Y; \mathbb{R}),$$

es decir, $\{c^p\} \times_1 \{d^q\} = \pi_1^* (\{c^p\}) \smile \pi_2^* (\{d^q\})$.

En efecto, si $c^p \in S^p(X; \mathbb{R})$, $d^q \in S^q(Y; \mathbb{R})$ y $T \in S^{p+q}(X \times Y)$, entonces

$$\begin{aligned} (\nu \circ (c^p \otimes d^q) \circ \phi)(T) &= \\ &= (\nu \circ (c^p \otimes d^q)) \left[\sum_{p'+q'=n} (\pi_1 \circ T \circ l(e_0, \dots, e'_p)) \otimes (\pi_2 \circ T \circ l(e'_p, \dots, e_n)) \right] \\ &= (\nu \circ (c^p \otimes d^q)) \left[(\pi_1 \circ T \circ l(e_0, \dots, e_p)) \otimes (\pi_2 \circ T \circ l(e_p, \dots, e_{p+q})) \right] \\ &= c^p(\pi_1 \circ T \circ l(e_0, \dots, e_p)) \cdot d^q(\pi_2 \circ T \circ l(e_p, \dots, e_{p+q})) \\ &= \pi_1^\#(c^p)(T \circ l(e_p, \dots, e_{p+q})) \cdot \pi_2^\#(d^q)(T \circ l(e_p, \dots, e_{p+q})) \\ &= \pi_1^\#(c^p) \smile \pi_2^\#(d^q). \end{aligned}$$

3 | El complejo de Salvetti

En este capítulo concluimos el trabajo dando una construcción del complejo de Salvetti de un grafo Γ y calculando su cohomología, para lo que necesitaremos conocer primero la del n -toro. Veremos en primer lugar que dicho complejo, que denotaremos por $S(\Gamma)$, es en efecto un espacio de Eilenberg-MacLane para $A(\Gamma)$.

Construimos $S(\Gamma)$ como un CW -complejo de la siguiente forma. Sea $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ el conjunto de los vértices de Γ . Consideramos el cubo $[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ y el subespacio $S \subset [0, 1]^n$ construido cubo a cubo como sigue. Para cada $i = 1, \dots, n$, incluimos en S el segmento $J_i = [0, e_i]$, donde e_i es el i -ésimo elemento de la base canónica de \mathbb{R}^n . Para cada $q = 2, \dots, n$, incluimos en S el subcubo $J_{i_1} \times \dots \times J_{i_q} \subset [0, 1]^n$ si y sólo si los vértices $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_q}\}$ generan un subgrafo completo en Γ .

Definimos $S(\Gamma)$ como la imagen de S en $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, donde \mathbb{Z}^n actúa sobre \mathbb{R}^n mediante traslaciones. De esta forma, $S(\Gamma)$ es un subcomplejo del n -toro $\mathbb{T}^n \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong [0, 1]^n/\mathbb{Z}^n$.

Observación. El 1-esqueleto de $S(\Gamma)$ es un *wedge* de n circunferencias, cada una asociada a un vértice de Γ . Así, dos circunferencias están pegadas a través de un 2-toro en $S(\Gamma)$ si y sólo si los correspondientes vértices son adyacentes. En general, cada q -grafo completo K de Γ da lugar a un q -toro en $S(\Gamma)$ generado por las circunferencias asociadas a los vértices de K .

Proposición 3.1. *El grupo fundamental de $S(\Gamma)$ es isomorfo a $A(\Gamma)$.*

Demostración. Sabemos por la proposición 2.11 que el grupo fundamental del complejo de Salvetti coincide con el grupo fundamental de su 2-esqueleto. Se sigue de la observación anterior y de una aplicación estándar del teorema de Seifert van Kampen (procediendo, por ejemplo, por inducción sobre el número de aristas del grafo Γ) que el grupo fundamental del 2-esqueleto es isomorfo a $A(\Gamma)$. \square

Proposición 3.2. *El recubridor universal de $S(\Gamma)$ es contráctil y por tanto el complejo de Salvetti es un espacio $K(A(\Gamma), 1)$.*

Demostración. La prueba tiene sus bases en la geometría hiperbólica y consiste en probar que $S(\Gamma)$ admite una estructura de complejo cúbico localmente CAT(0). Para más detalles remitimos al lector a [31]. \square

3.1 Cohomología del toro

Puesto que el complejo de Salvetti de un grafo se obtiene mediante el pegado de toros de distintas dimensiones, es conveniente si queremos calcular su cohomología conocer primero la de un solo toro. Primero veremos de forma muy explícita la cohomología del 2-toro, y posteriormente haremos el cálculo general por medio de la fórmula de Künneth. En lo sucesivo trabajaremos con coeficientes en \mathbb{Z} .

3.1.1 Cohomología del 2-toro

Calcularemos primero el álgebra de cohomología del toro 2-dimensional. El cálculo seguirá la línea de los ejemplos de las secciones 39, 47 y 49 de [24].

Recordemos que si G es un grupo abeliano libre con base $\{b_1, \dots, b_n\}$, entonces $\{b_1^*, \dots, b_n^*\}$ es base de $\text{Hom}(G, \mathbb{Z})$, donde $b_i^* : G \rightarrow \mathbb{Z}$ vale 1 en b_i y 0 en el resto de elementos de la base.

Consideramos el 2-toro, $X = \mathbb{T}^2$, visto como espacio cociente de un rectángulo R . Llamamos f a la proyección del rectángulo en X .

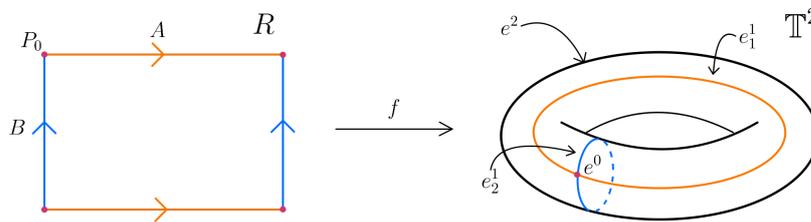


Figura 3.1

Observemos que de esta forma el toro adquiere automáticamente estructura de CW-complejo con una 2-celda $e^2 = f(R)$, dos 1-celdas $e_1^1 = f(A)$ y $e_2^1 = f(B)$ y una

0-celda $e^0 = f(P_0)$. Las aplicaciones características son evidentemente las respectivas restricciones de f . Sea K el complejo simplicial inducido por la triangulación L del rectángulo que vemos en la figura 3.2. Se tiene que K es una triangulación del toro compatible con su estructura de CW -complejo.

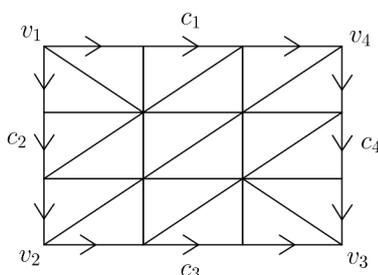


Figura 3.2

El complejo de cadenas celulares. En virtud de los teoremas 2.38 y 2.49, podemos calcular los grupos de (co)homología de X mediante el complejo de cadenas celulares $D(X)$. Además, $D_i(X)$ puede verse como el subgrupo de $C_i(K)$ generado por los ciclos fundamentales de $(e_\alpha^i, \partial e_\alpha^i)$. Recordemos que los grupos $H_n(B^n, S^{n-1})$ son cíclicos infinitos.

El grupo $H_2(L, \partial L)$, donde ∂L es el subcomplejo de L con $|\partial L| = \partial R$, está generado por la clase de la 2-cadena d , suma de los 2-símplices de L orientados en sentido antihorario. Por tanto $\mu = f_\#(d)$ es el ciclo fundamental para $(e^2, \partial e^2)$ y $D_2(X) = \langle \mu \rangle$.

$H_1(A, \partial A)$ está generado por la clase de c_1 , luego $a_1 = f_\#(c_1)$ es el ciclo fundamental para $(e_1^1, \partial e_1^1)$. De igual forma, $a_2 = f_\#(c_2)$ es el ciclo fundamental para $(e_2^1, \partial e_2^1)$. Así, $D_1(X) = \langle a_1, a_2 \rangle$.

Por último, $D_0(X)$ está generado por $f_\#(v_1)$. El complejo de cadenas celulares queda así:

$$0 \rightarrow D_2(X) = \langle \mu \rangle \xrightarrow{\partial_2} D_1(X) = \langle a_1, a_2 \rangle \xrightarrow{\partial_1} D_0(X) = \langle f_\#(v_1) \rangle \rightarrow 0.$$

Grupos de cohomología. Dualizando el diagrama del complejo $D(X)$ obtenemos

$$0 \leftarrow D^2(X) = \langle \mu^* \rangle \xleftarrow{\delta_2} D^1(X) = \langle a_1^*, a_2^* \rangle \xleftarrow{\delta_1} D^0(X) = \langle f_\#(v_1)^* \rangle \leftarrow 0.$$

Veamos cómo funcionan los operadores coborde δ_1 y δ_2 . Por un lado tenemos

$$\begin{aligned} \partial_2 \mu &= \partial_2 f_\#(d) = f_\#(\partial_2 d) = f_\#(-c_1 + c_2 + c_3 - c_4) \\ &= -f_\#(c_1) + f_\#(c_2) + f_\#(c_3) - f_\#(c_4) = -a_1 + a_2 + a_1 - a_2 = 0, \end{aligned}$$

así que $\partial_2 = 0$ y por tanto $\delta_2 = 0$. Por otro,

$$\begin{aligned}\partial_1 a_1 &= \partial_1 f_{\#}(c_1) = f_{\#}(\partial_1 c_1) = f_{\#}(v_4 - v_1) = f_{\#}(v_4) - f_{\#}(v_1) = 0 \text{ y} \\ \partial_1 a_2 &= \partial_1 f_{\#}(c_2) = f_{\#}(\partial_1 c_2) = f_{\#}(v_2 - v_1) = 0,\end{aligned}$$

así que $\partial_1 = 0$ y por tanto $\delta_1 = 0$.

Como tanto δ_1 como δ_2 son triviales, obtenemos que $H^2(\mathcal{D}(X)) = D^2(X)$ y $H^1(\mathcal{D}(X)) = D^1(X)$. En definitiva, los grupos de cohomología del toro con coeficientes en \mathbb{Z} son

$$H^2(X) = \mathbb{Z}, \quad H^1(X) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad H^0(X) = \mathbb{Z}.$$

Generadores. Para efectuar el producto cup y calcular el anillo de cohomología por medio de la fórmula simplicial, necesitamos conocer explícitamente los cociclos cuyas clases generan los grupos de cohomología. Usaremos la notación para los vértices de K de la figura 3.3.

Recordemos que el isomorfismo $H^n(X) \cong H^n(\mathcal{D}(X))$ viene inducido por la restricción $C^n(K) \rightarrow D^n(X)$. Debemos por tanto encontrar cociclos en $C^2(K)$ y $C^1(K)$ cuyas restricciones a $D^2(X)$ y $D^1(X)$ sean μ^* , a_1^* y a_2^* . No hay un método general para esto, así que nuestros cálculos deben ser *ad hoc*.

Empecemos por a_1^* . Buscamos $\alpha_1 : C_1(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\delta\alpha_1 = 0$ y $\alpha_1|_{D_1(X)} = a_1^*$. Un primer intento podría ser tomar $\alpha_1 = [P_1, P_2]^*$ (el dual de cualquier 1-símplice que aparezca en a_1). En efecto, $\alpha_1(a_1) = 1$ y $\alpha_1(a_2) = 0$, luego la restricción de α_1 a $D_1(X)$ es a_1^* . Sin embargo, α_1 no es un ciclo, pues $\delta\alpha_1(\sigma) = \alpha_1(\partial\sigma) = 1$, así que no representa nada en cohomología.

La idea es ir añadiendo a α_1 (duales de) 1-símplices de forma que se vaya compensando el valor que toma $\delta\alpha_1$ en cada 2-símplice. Por ejemplo, como $\partial\sigma = [P_1, P_2] + [P_2, P_8] + [P_8, P_1]$, podemos tomar $\alpha_1 = [P_1, P_2]^* + [P_1, P_8]^*$ y ahora $\delta\alpha_1(\sigma) = 0$. Observemos que si los 1-símplices que vamos añadiendo no forman parte de las cadenas a_1 y a_2 , se seguirá cumpliendo que $\alpha_1|_{D_1(X)} = a_1^*$. Siguiendo este proceso llegamos al cociclo α_1 de la figura 3.3. Nótese que esta no es la única opción para α_1 , pero todas las posibles opciones son cohomólogas. De forma completamente análoga obtenemos el cociclo α_2 . El módulo $H^1(X)$ está entonces generado por $\{\alpha_1\}$ y $\{\alpha_2\}$.

En dimensión 2 la cosa es más sencilla, pues toda cocadena de $C^2(K)$ es cociclo. Basta entonces con tomar el dual de cualquier 2-símplice σ orientado en sentido antihorario (que es la orientación que dimos a los 2-símplices de la clase fundamental μ).

En efecto, $\sigma^*(\mu) = \sigma^*(\sigma) = 1$, luego $\sigma^*|_{D_2(X)} = \mu^*$ y por tanto $\{\sigma^*\}$ es el generador de $H^2(X)$.

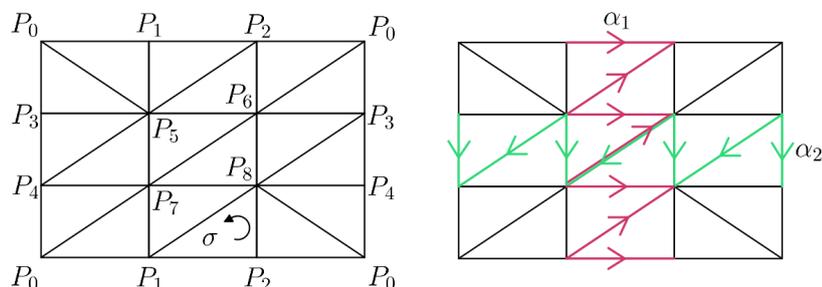


Figura 3.3

El anillo de cohomología. Para describir la estructura de $H^*(X)$ basta con calcular los posibles productos entre los generadores $\{\alpha_1\}$, $\{\alpha_2\}$ y $\{\sigma^*\}$. Elegimos el orden de los vértices $P_0 < P_1 < \dots < P_8$.

Por anticonmutatividad sabemos que $\{\alpha_1\} \smile \{\alpha_1\} = -\{\alpha_1\} \smile \{\alpha_1\}$, luego $2\{\alpha_1\} \smile \{\alpha_1\} = 0$. Como $H^2(X) = \mathbb{Z}$ es libre de torsión, ha de ser $\{\alpha_1\} \smile \{\alpha_1\} = 0$. Análogamente, $\{\alpha_2\} \smile \{\alpha_2\} = 0$.

Veamos cuánto vale la cocadena $\alpha_1 \smile \alpha_2$ en cada 2-símplice $\tau \in C^2(K)$. Observemos que, en vista de la fórmula $(\alpha_1 \smile \alpha_2)([v_0, v_1, v_2]) = \alpha_1([v_0, v_1]) \cdot \alpha_2([v_1, v_2])$, el valor de $\alpha_1 \smile \alpha_2$ en τ será nulo a no ser que τ tenga una cara en α_1 y otra en α_2 . Sabemos entonces que $(\alpha_1 \smile \alpha_2)(\tau) = 0$ para todo τ distinto de $[P_5, P_6, P_7]$ y $[P_6, P_7, P_8]$.

$$(\alpha_1 \smile \alpha_2)([P_5, P_6, P_7]) = \alpha_1([P_5, P_6]) \cdot \alpha_2([P_6, P_7]) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$(\alpha_1 \smile \alpha_2)([P_6, P_7, P_8]) = \alpha_1([P_6, P_7]) \cdot \alpha_2([P_7, P_8]) = (-1) \cdot 0 = 0$$

Por tanto $\alpha_1 \smile \alpha_2$ vale 1 en $\tau = [P_5, P_6, P_7]$ y 0 en el resto de 2-símplices, es decir, $\alpha_1 \smile \alpha_2 = \tau^*$. Recordemos que los duales de dos 2-símplices cualesquiera orientados en sentido antihorario son cohomólogos. Como τ está orientado en sentido horario, tenemos que $\{\tau^*\} = -\{\sigma^*\}$ y por tanto $\{\alpha_1\} \smile \{\alpha_2\} = -\{\sigma^*\}$.

Por razones de dimensión se tiene que $\sigma^* \smile \sigma^* = 0$ y $\sigma^* \smile \alpha_i = 0 = \alpha_i \smile \sigma^*$ para $i = 1, 2$.

El álgebra $H^*(X)$ es por tanto isomorfa a $\Lambda[\alpha_1, \alpha_2]$, el álgebra exterior sobre \mathbb{Z} generada por α_1 y α_2 (ver en Tabla 3.1 la tabla de multiplicación de $H^*(X)$).

\smile	$\{\alpha_1\}$	$\{\alpha_2\}$	$\{\sigma^*\}$
$\{\alpha_1\}$	0	$-\{\sigma^*\}$	0
$\{\alpha_2\}$	$\{\sigma^*\}$	0	0
$\{\sigma^*\}$	0	0	0

Tabla 3.1

3.1.2 Cohomología del n -toro

Para el caso general del n -toro no es tan sencillo describir la estructura de la cohomología de un modo geoméricamente tan explícito, así que utilizaremos el teorema de Künneth.

Consideramos n copias de la circunferencia S^1 y denotamos por $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$ al correspondiente n -toro. Sabemos que $H^q(S^1, \mathbb{Z}) = 0$ para todo $q \geq 1$ y que $H^1(S^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Si x_1, \dots, x_n son los generadores de $H^1(S^1, \mathbb{Z})$ para cada copia de S^1 , entonces $H^*(S^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x_i]/\langle x_i^2 \rangle$, con $|x_i| = 1$.

Dado que \mathbb{Z} es dominio de ideales principales y $\text{Tor}(\mathbb{Z}^m, \mathbb{Z}^n)$ es trivial para cualesquiera $m, n \geq 1$, estamos en condiciones de aplicar (reiteradamente) el teorema de Künneth para deducir que

$$H^*(\mathbb{T}^n, \mathbb{Z}) \cong \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{Z}[x_i]/\langle x_i^2 \rangle \cong \Lambda[x_1, \dots, x_n].$$

Explícitamente, si $\pi_i : \mathbb{T}^n \rightarrow S^1$ es la proyección en la i -ésima copia de la circunferencia y llamamos $\alpha_i = \pi_i^*(x_i) \in H^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{Z})$, entonces:

- $H^q(\mathbb{T}^n, \mathbb{Z})$ es el \mathbb{Z} -módulo libre con base $\{\alpha_{i_1} \smile \dots \smile \alpha_{i_q}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n}$ para cada $1 \leq q \leq n$.
- $H^*(\mathbb{T}^n, \mathbb{Z})$ junto con el producto cup es el \mathbb{Z} -álgebra exterior generada por $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

3.2 Cohomología del complejo de Salvetti

En esta sección describiremos de forma explícita el álgebra de cohomología del complejo de Salvetti. La naturaleza de la construcción dada al comienzo del capítulo

nos permitirá identificar, a través de un homomorfismo de álgebras, los generadores de la cohomología de $S(\Gamma)$ con los generadores de los respectivos subtoros.

Cabe destacar que, pese a que la cohomología del complejo de Salvetti es bien conocida, la única demostración detallada y elemental que conocemos al respecto es la presentada por Koberda en [18], que es esencialmente distinta de la que daremos a continuación. Un tratamiento más general con sucesiones espectrales puede encontrarse en [7].

El primer paso es calcular la dimensión los grupos de (co)homología de $S(\Gamma)$ con coeficientes en \mathbb{Z} . Para ello, tengamos en cuenta que cada paso de la construcción del complejo de Salvetti consiste en pegar un q -toro T a lo largo de su “borde” $\Delta T := \partial[0, 1]^q / \mathbb{Z}^q$. Sea K el q -grafo completo de Γ asociado a T . El pegado se lleva a cabo identificando cada uno de los $(q - 1)$ -toros que aparecen en ΔT con los $(q - 1)$ -toros de $S(\Gamma)$ correspondientes a los $(q - 1)$ -grafos completos de K (estos han sido pegados en pasos anteriores).

Lema 3.3. *Sea T un q -toro. Entonces $H_q(\Delta T, \mathbb{Z}) = 0$ y $H_i(\Delta T, \mathbb{Z}) \cong H_i(T, \mathbb{Z})$ para todo $i = 0, \dots, q - 1$. Además, el isomorfismo viene inducido por la inclusión $\Delta T \hookrightarrow T$.*

Demostración. Notemos que ΔT , visto como subcomplejo de T , es precisamente el $(q - 1)$ -esqueleto de T , así que $D_i(\Delta T) = D_i(T)$ para todo $i \leq q - 1$ y por tanto $H_i(\Delta T, \mathbb{Z}) = H_i(T, \mathbb{Z})$ para todo $i < q - 1$. El caso $i = q - 1$ se sigue del hecho de que $B_{q-1}(T) = 0 = B_{q-1}(\Delta T)$, pues el operador borde $\partial : D_q(T) \rightarrow D_{q-1}(T)$ es trivial. \square

Proposición 3.4. *Se tiene que $H_q(S(\Gamma), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{N_q}$, donde N_q es el número de q -grafos completos en Γ .*

Demostración. Está claro que el resultado es cierto si Γ se trata de un grafo totalmente desconexo, es decir, si $S(\Gamma)$ es un *wedge* de circunferencias. Veamos que pegar un q -toro en el paso inductivo de la construcción del complejo de Salvetti se traduce en añadir un nuevo generador al grupo de homología en dimensión q .

Sean S el complejo de Salvetti construido hasta ahora y S' el complejo resultante tras pegar un q -toro T ; es decir, $S' = S \sqcup_{\Delta T} T$. Dado que S y T son subcomplejos de S' , podemos acudir a la sucesión de Mayer-Vietoris (Proposición 2.32) para obtener la sucesión exacta

$$\dots \rightarrow H_i(\Delta T) \xrightarrow{\varphi_{1*}} H_i(S) \oplus H_i(T) \xrightarrow{\psi_*} H_i(S') \xrightarrow{\Delta} H_{i-1}(\Delta T) \xrightarrow{\varphi_{2*}} H_{i-1}(S) \oplus H_{i-1}(T) \rightarrow \dots$$

El lema garantiza que φ_{2*} es inyectiva, pues es un isomorfismo en la segunda coordenada, luego el operador Δ es trivial y ψ_* es sobreyectiva. Como $H_q(\Delta T) = 0$, se tiene para $i = q$ que ψ_* es también inyectiva y por tanto isomorfismo. Tenemos entonces que $H_q(S')$ es libre si lo es $H_q(S)$ y $\dim(H_q(S')) = \dim(H_q(S)) + 1$, pues $H_q(T) \cong \mathbb{Z}$. Si $i \leq q - 1$, tenemos por exactitud y por el primer teorema de isomorfía que $H_i(S') \cong H_i(S) \oplus H_i(T)/\text{Im}(\varphi_{1*})$. Usando de nuevo que φ_{1*} es un isomorfismo en la segunda coordenada, concluimos que $H_i(S') \cong H_i(S)$ para $i \leq q - 1$. \square

Los grupos de cohomología tienen la misma dimensión que los de homología. Los siguientes resultados describen la estructura del álgebra de cohomología del complejo de Salvetti.

Proposición 3.5. *Cada q -celda e del complejo de Salvetti se corresponde con un generador e^* de $H^q(S(\Gamma))$. Sea T el único q -toro en $S(\Gamma)$ que contiene a e . Entonces e^* se identifica con el generador de $H^q(T)$ a través del homomorfismo $H^q(S(\Gamma)) \rightarrow H^q(T)$ inducido por la inclusión $T \hookrightarrow S(\Gamma)$.*

Demostración. La proposición anterior nos dice que $H_q(S(\Gamma))$ es libre y de la misma dimensión que $D_q(S(\Gamma))$, luego necesariamente coinciden. Así, el operador borde del complejo de cadenas celulares de $S(\Gamma)$ es trivial (como sucede en el caso del toro) y tenemos también que $D^q(S(\Gamma)) = H^q(S(\Gamma))$. Por lo tanto, los duales de las q -celdas de $S(\Gamma)$ constituyen un sistema de generadores de $H^q(S(\Gamma))$.

Puesto que T es un subcomplejo de $S(\Gamma)$, la inclusión $i : T \hookrightarrow S(\Gamma)$ induce un monomorfismo $D_q(T) \rightarrow D_q(S(\Gamma))$ que podemos ver como una inclusión. Teniendo en cuenta el razonamiento anterior, la construcción con pegados inductivos del complejo de Salvetti implica que $i^* : H^q(S(\Gamma)) = D^q(S(\Gamma)) \rightarrow H^q(T) = D^q(T)$ es precisamente el homomorfismo restricción, que a su vez identifica e^* con el generador en dimensión máxima del toro correspondiente. \square

Como cada q -toro en $S(\Gamma)$ se corresponde con un q -grafo completo en Γ , una base de $H^q(S(\Gamma))$ viene dada por $\{e_K^* \mid K \text{ } q\text{-grafo completo de } \Gamma\}$. En particular, una base en dimensión 1 es $V^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$, donde $v_i^* := e_{v_i}^*$.

| Teorema 3.6. *El álgebra $H^*(S(\Gamma), \mathbb{Z})$ está generada por el módulo de dimensión 1. Es más, para cada $q \geq 2$ se cumple lo siguiente:*

- (1) $v_{i_1}^* \smile \dots \smile v_{i_q}^* = 0$ si los vértices $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_q}\}$ no generan un q -grafo completo en Γ .

(2) $v_{i_1}^* \smile \cdots \smile v_{i_q}^* = \pm e_K^*$ si los vértices $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_q}\}$ generan el q -grafo completo K en Γ .

Demostración. Para cada grafo completo $K \subset \Gamma$, denotamos por T_K al correspondiente toro de $S(\Gamma)$ y por i_K a la respectiva inclusión. Observemos que $i_K^*(v_i^*) = 0$ si v_i no es un vértice de K , pues eso significa que la 1-celda (la circunferencia) correspondiente al vértice v_i no forma parte de T_K .

Podemos escribir $v_{i_1}^* \smile \cdots \smile v_{i_q}^* = \sum_L n_L e_L^*$ para ciertos enteros n_L con L recorriendo los q -grafos completos de Γ . Así, para cada q -grafo completo L se tiene que $i_L^*(v_{i_1}^* \smile \cdots \smile v_{i_q}^*) = n_L i_L^*(e_L^*)$. Por otro lado, i_L^* es homomorfismo de álgebras, luego $i_L^*(v_{i_1}^* \smile \cdots \smile v_{i_q}^*) = i_L^*(v_{i_1}^*) \smile \cdots \smile i_L^*(v_{i_q}^*)$.

Si los vértices $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_q}\}$ no generan un grafo completo en Γ , entonces debe ser $i_L^*(v_{i_1}^*) \smile \cdots \smile i_L^*(v_{i_q}^*) = 0$ para todo q -grafo completo $L \subset \Gamma$. En caso contrario la observación inicial nos llevaría a contradicción. Por tanto $n_L = 0$ para todo L .

Si los vértices $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_q}\}$ generan el q -grafo completo K en Γ , entonces $i_L^*(v_{i_1}^*) \smile \cdots \smile i_L^*(v_{i_q}^*) = 0$ para todo L distinto de K y por tanto $v_{i_1}^* \smile \cdots \smile v_{i_q}^* = n_K e_K^*$. Ahora bien, $\{i_K^*(v_{i_1}^*), \dots, i_K^*(v_{i_q}^*)\}$ es base de $H^1(T_K)$, así que sabemos (Sección 3.1.2) que $i_K^*(v_{i_1}^*) \smile \cdots \smile i_K^*(v_{i_q}^*)$ genera $H^q(T_K)$. Como $i_K^*(e_K^*)$ también genera $H^q(T_K)$ (por la proposición anterior), debe ser $n_K = \pm 1$. \square

En definitiva, el álgebra de cohomología del complejo de Salvetti de un grafo Γ es la suma directa de las álgebras de cohomología de los subtoros asociados a los respectivos subgrafos completos, identificando generadores que se correspondan a los mismos vértices de Γ . Es decir,

$$H^*(S(\Gamma)) \cong \left(\bigoplus_{W^* \subset V^*} \Lambda(W^*) \right) / \sim,$$

donde W^* recorre los subconjuntos de V^* correspondientes a vértices que generan grafos completos en Γ y la relación \sim identifica generadores de las álgebras exteriores si son iguales en V^* .

Aunque entrar en detalles sobrepasaría los objetivos de este trabajo, es importante notar que existen las nociones de homología y álgebra de cohomología de grupos (ver [6]). Además, dado un grupo G se cumple que su álgebra de cohomología es isomorfa a la de cualquier espacio $K(G, 1)$. Se tiene por tanto que el álgebra de cohomología de

$S(\Gamma)$ está completamente determinada por el grupo $A(\Gamma)$. La estructura del álgebra de cohomología de $A(\Gamma)$ (o, equivalentemente, de $S(\Gamma)$) es clave en numerosos resultados que relacionan la combinatoria de Γ y el álgebra de $A(\Gamma)$, entre los que se encuentran los teoremas 1.25, 1.29 y 1.30 que enunciamos en el capítulo 1.

Bibliografía

- [1] S. Bachmuth. Induced automorphisms of free groups and free metabelian groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 122:1–17, 1966.
- [2] A. Baudisch. Subgroups of semifree groups. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 38(1-4):19–28, 1981.
- [3] Mladen Bestvina and Noel Brady. Morse theory and finiteness properties of groups. *Invent. Math.*, 129(3):445–470, 1997.
- [4] Noel Brady and John Meier. Connectivity at infinity for right angled Artin groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(1):117–132, 2001.
- [5] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [6] Kenneth S. Brown. *Cohomology of groups*, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1982 original.
- [7] Filippo Callegaro. Salvetti complex, spectral sequences and cohomology of artin groups. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques*, Ser. 6, 23(2):267–296, 2014.
- [8] Ruth Charney. An introduction to right-angled Artin groups. *Geom. Dedicata*, 125:141–158, 2007.
- [9] John Crisp and Bert Wiest. Embeddings of graph braid and surface groups in right-angled Artin groups and braid groups. *Algebr. Geom. Topol.*, 4:439–472, 2004.
- [10] Carl Droms. Isomorphisms of graph groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 100(3):407–408, 1987.

- [11] Carl Droms. Subgroups of graph groups. *J. Algebra*, 110(2):519–522, 1987.
- [12] David B. A. Epstein, James W. Cannon, Derek F. Holt, Silvio V. F. Levy, Michael S. Paterson, and William P. Thurston. *Word processing in groups*. Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1992.
- [13] Elisabeth R. Green. *Graph Products of Groups*. PhD thesis, The University of Leeds, 1990.
- [14] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [15] Susan Hermiller and John Meier. Algorithms and geometry for graph products of groups. *J. Algebra*, 171(1):230–257, 1995.
- [16] D. L. Johnson. *Topics in the theory of group presentations*, volume 42 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980.
- [17] Ki Hyoung Ko and Hyo Won Park. Characteristics of graph braid groups. *Discrete Comput. Geom.*, 48(4):915–963, 2012.
- [18] Thomas Koberda. Geometry and combinatorics via right-angled Artin groups. arXiv:2103.09342.
- [19] Thomas Koberda. Right-angled Artin groups and their subgroups. <https://users.math.yale.edu/users/koberda/raagcourse.pdf>.
- [20] Thomas Koberda. Right-angled Artin groups and a generalized isomorphism problem for finitely generated subgroups of mapping class groups. *Geom. Funct. Anal.*, 22(6):1541–1590, 2012.
- [21] Michael R. Laurence. A generating set for the automorphism group of a graph group. *J. London Math. Soc. (2)*, 52(2):318–334, 1995.
- [22] Wilhelm Magnus, Abraham Karrass, and Donald Solitar. *Combinatorial group theory*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, second edition, 2004. Presentations of groups in terms of generators and relations.
- [23] William S. Massey. Reviews: Algebraic Topology: A First Course. *Amer. Math. Monthly*, 103(10):913–916, 1996.

- [24] James R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.
- [25] Lucas Sabalka. Embedding right-angled Artin groups into graph braid groups. *Geom. Dedicata*, 124:191–198, 2007.
- [26] Otto Schreier. Die Untergruppen der freien Gruppen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 5(1):161–183, 1927.
- [27] Herman Servatius. Automorphisms of graph groups. *J. Algebra*, 126(1):34–60, 1989.
- [28] Herman Servatius, Carl Droms, and Brigitte Servatius. Surface subgroups of graph groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 106(3):573–578, 1989.
- [29] Robert M. Switzer. *Algebraic topology—homotopy and homology*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [30] Álvaro Torras. Cohomology of Product Spaces from a Categorical Viewpoint. Trabajo de Fin de Grado. Universidad de Barcelona, 2016.
- [31] Daniel T. Wise. *From riches to raags: 3-manifolds, right-angled Artin groups, and cubical geometry*, volume 117 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.