OPERADORES ABSOLUTAMENTE SUMANTES

Moisés Ornedo Muñoz

OPERADORES ABSOLUTAMENTE SUMANTES

Moisés Ornedo Muñoz

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Prof. Miguel Lacruz Martín

Índice general

Agradecimientos

Antes de comenzar con el contenido del documento, me gustaría emplear algunas líneas para agradecer a todas aquellas personas que han influido de alguna forma en que pueda estar acabando el grado en Matemáticas.

En primer lugar me gustaría dar las gracias a mi familia por permitirme ir a la universidad haciéndose cargo de todos los gastos que eso ocasiona.

También me gustaría agradecer a mi vecino Enrique, profesor de matemáticas, por su amabilidad y su predisposición a la hora de ayudarme cuando no era capaz de resolver algún problema que me mandaban como deberes durante la secundaria, motivándome a mejorar.

No podría haber llegado a donde estoy sin mis amigos, los de antes de la carrera y los que hice durante el trascurso de la misma, ya que me han ayudado y apoyado para alcanzar todas las metas.

Y por último, me gustaría agradecer a todos los profesores que he tenido, especialmente de matemáticas, a los que he tenido en el grado, porque de todos he aprendido mucho. En particular me gustaría agradecer a mi tutor de este trabajo, Miguel Lacruz, porque desde el primer año de carrera he tenido la suerte de aprender de él, no solo en el ámbito matemático sino también en el personal, por eso para mí es una fuente de inspiración y un ejemplo a seguir.

Abstract

The objective of this work is to introduce ourselves to the theory of absolutely summing operators, giving an overview of them, based on the first chapter of the book with the same name to this work found in the bibliography. To do this, we will see some important results of absolute and unconditional convergence, establishing the relationship between them.

We will also define other types of convergence, such as sign convergence or disordered convergence, and we will establish a list of equivalences that will be very useful.

At the end of the second chapter we will find the *Grothendieck's Theorem*, which will establish a result that will be the heart of this work.

Finally, in the last chapter we will study the well-known *Schatten-von Neumann classes*, where we will pay special attention to the *Hilbert-Schmidt classes* and the *nuclear operators* or the *trace class operators*, seeing the relationship between them and the p-summing operators.

Resumen

El objetivo de este trabajo es introducirnos en la teoría de los operadores absolutamente sumantes, dando una visión general de los mismos, basándonos en el primer capítulo del libro homónimo a este trabajo que se encuentra en la bibliografía. Para ello, veremos algunos resultados importantes de convergencia absoluta e incondicional, estableciendo la relación entre ellas.

También definiremos otros tipos de convergencia, como la convergencia por signos o la convergencia desordenada, y estableceremos una lista de equivalencias que

resultarán de gran utilidad.

Al final del segundo capítulo encontraremos el *teorema de Grothendieck*, que establecerá un resultando que será el corazón de este trabajo.

Para finalizar, en el último capítulo estudiaremos las conocidas *clases de Schatten-von Neumann*, donde prestaremos especial atención a las clases de *Hilbert-Schmidt* y a los operadores *nucleares* o de *la clase de la traza*, viendo la relación entre ellos y los operdores p-sumantes.

1 Preliminares

En esta primera sección vamos a presentar algunos teoremas que emplearemos como herramientas en muchas de las demostraciones que se verán a lo largo de este trabajo. Además, hemos añadido un abanico de definiciones para tener claro a qué nos estamos refiriendo en cada momento, ya que dependiendo del autor o del libro hay conceptos que pueden variar ligeramente. Empezaremos viendo la definición de *operador compacto* seguido del *teorema de Schauder* junto con su demostración, ya que en el grado no lo hemos visto, el resto de teoremas se dan por conocidos.

La siguiente definición será muy importante en el desarrollo de este documento, por lo que, aunque sea breve, hay que prestarle un interés especial.

Definición 1.1 (Operador compacto). *Un operador lineal en un espacio de Banach es llamado compacto si envía la bola unidad en un conjunto cuya clausura es compacta.*

Esta misma definición es válida para los espacios H^p, con $0 < p < \infty$. Además, se tiene con facilidad que un operador compacto es acotado, lo cual nos resultará muy útil en el tercer capítulo a la hora de probar algunos resultados.

Teorema 1.1 (Teorema de Schauder). *Sean X e Y espacios de Banach. El operador $T : X \to Y$ es compacto si y solo si T^* lo es.*

Demostración. Sea $K = \overline{TB_X} \subseteq Y$. Sabemos que K es compacto. Consideramos la familia de funciones $\mathcal{K} := \left\{ y^*_{|\overline{TB_X}} : \|y^*\| \leq 1 \right\}$. Se sigue que $\mathcal{K} \subseteq C(K)$. Veamos que más conclusiones podemos obtener.

En primer lugar tenemos que $\mathcal{K}$ es acotada porque

$$\|y^*(Tx)\| \leq \|y^*\| \cdot \|T\| \cdot \|x\| \leq \|T\|.$$

Por otra parte, también podemos afirmar que $\mathcal{K}$ es equicontinua ya que

$$\begin{aligned}\|y^*(Tx_1) - y^*(Tx_2)\| &= \|y^*(T(x_1 - x_2))\| \\ &\leq \|y^*\| \cdot \|T\| \cdot \|x_1 - x_2\| \leq \|T\| \cdot \|x_1 - x_2\|\end{aligned}$$

de donde se tiene el resultado tomando

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}.$$

Por último, podemos finalizar aplicando el *teorema de Ascoli-Arzelá* para afirmar que $\mathcal{K}$ es relativamente compacto, y como

$$T^* B_{Y^*_{|B_X}} = \left\{ y^* T_{|B_X} : \|y^*\| \leq 1 \right\} \subseteq X^*$$

de donde se deduce que $T^* B_{Y^*_{|B_X}}$ es compacto, como queríamos demostrar.

La implicación que falta se obtiene de forma casi inmediata. Tenemos que T^* es compacto luego por lo visto anteriormente T^{**} también es compacto. Basta observar que se tiene la igualdad $T = T^{**}_{|X}$, donde hemos identificado X con su imagen isométrica en el bidual mediante la aplicación natural $J : X \to X^{**}$ definida por

$$(Jx)(x^*) = x^*(x),$$

así, siendo T^* compacto tenemos que T es compacto, y con eso terminamos la prueba. ∎

Este teorema tendrá gran importancia a la hora de razonar las equivalencias del *Teorema Omnibus*, ya que establece una fácil relación entre un operador y su dual, que nos permitirá ver con facilidad que si un operador es compacto su dual lo es, y así mismo, el dual del dual.

Seguiremos este capítulo con el *teorema de Ascoli-Arzelá* que hemos mencionado en la prueba anterior.

Teorema 1.2 (Teorema de Ascoli-Arzelá). *Sea X un espacio métrico compacto, e Y un espacio métrico completo. El conjunto $H \subset C(X,Y)$ de funciones continuas de X en Y será relativamente compacto si y solo si*

1. *H es equicontinua.*
2. *Para todo x en X, el conjunto $H_x = \{f(x) : f \in H\}$ es relativamente compacto en Y.*

El teorema de Ascoli-Arzelá es una de las herramientas más poderosas que hay para verificar si una familia de funciones de un espacio topólogico en otro es compacta.

Teorema 1.3 (Teorema de categorización de Baire). *La intersección de conjuntos abiertos y densos es densa.*

El teorema anterior está enunciado de forma clásica, pero podemos dar también la versión más actual. *Si (X, d) es un espacio métrico completo, y si (F_n) es una familia numerable de subconjuntos cerrados de X tales que*

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n,$$

entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que int $F_n \neq \emptyset$.

Continuaremos viendo dos desigualdades muy interesantes que vendrán en nuestra ayuda en el siguiente capítulo.

Teorema 1.4 (Desigualdad de Hölder). *Sea $X = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}$, y sean $1 < p, q < +\infty$ tales que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Si $x, y \in X$ entonces se tiene

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \right)^{1/q}.$$

Esta conocida desigualdad vendrá a facilitarnos, entre otras pruebas, la demostración de la desigualdad de Khinchin.

Teorema 1.5 (Desigualdad de Minkowski). *Fijado un espacio de medida, dos funciones f y g pertenecientes a dicho espacio y $p \in [1, +\infty)$, entonces tenemos*

$$\left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Este importante resultado, que establece que los espacios L^p son espacios vectoriales normados, lo utilizaremos en uno de los últimos teoremas de la siguiente sección, el *Teorema de Orlicz*, cuya prueba ocupará unas escasas líneas debido al gran trabajo que nos ahorra esta desigualdad.

A continuación, vamos a ver la definición de *espacio complementado*, la cual nos ayudará a entender un teorema posterior a la introducción de las funciones de Rademacher, junto con su corolario.

Definición 1.2 (Subespacio complementado). *Decimos que un subespacio cerrado Y de un espacio normado X está complementado en X cuando existe un complemento topológico de Y en X, o equivalentemente, cuando existe una proyección lineal continua P en X tal que $P(X) = Y$.*

Ahora, continuaremos este capítulo introduciendo unos resultados muy conocidos que nos serán de gran provecho en la parte final del trabajo, ya que los emplearemos en algunas de las demostraciones y nos acortarán el proceso resolutivo. Empezaremos viendo el lema de Zorn, que es un resultado muy útil y versátil equivalente al axioma de elección.

Teorema 1.6 (Lema de Zorn). *Cualquier conjunto inductivo y no vacío posee un elemento maximal.*

Recordemos que un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ es inductivo si toda cadena en A (es decir, todo subconjunto totalmente ordenado) posee una cota superior. También recordemos que $m \in A$ es maximal si para todo $a \in A$ tal que $m \leq a$ se tiene $m = a$.

La siguiente desigualdad no necesita ninguna presentación, pues es un clásico de muchos ámbitos de las matemáticas, y como no podría ser de otra manera, también haremos uso de ella en este trabajo.

Teorema 1.7 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Consideramos el espacio de Banach X, y los vectores x e y pertenecientes a dicho espacio. Entonces, se tiene*

$$|(x|y)|^2 \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Finalizaremos esta sección preliminar con el *teorema de la gráfica cerrada*, pero antes definiremos qué es la gráfica de una aplicación.

Definición 1.3 (Gráfica). *Sean X e Y dos espacios vectoriales. Se define la gráfica de la aplicación lineal $T : X \to Y$ como el subespacio vectorial $G := \{(x, TX) : x \in X\}$.*

Ahora ya estamos listos para ver el teorema.

Teorema 1.8 (Teorema de la gráfica cerrada). *Sean X e Y espacios de Banach y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Entonces, son equivalentes:*

1. *T es continua.*
2. *La gráfica de T es cerrada.*

2 Convergencia absoluta y convergencia incondicional de series infinitas en espacios de Banach

2.1 Teorema de Dvoretzky-Rogers

Recordemos que una sucesión (x_n) en un espacio normado es *absolutamente convergente* si $\sum_n \|x_n\| < \infty$, y es *incondicionalmente convergente* si $\sum_n x_{\sigma(n)}$ converge, independientemente de la permutación de índices σ.

Dirichlet asegura en un teorema de análisis elemental que una sucesión de escalares es absolutamente convergente cuando es incondicionalmente convergente. Con una pequeña modificación de la prueba se tendría el mismo resultado para cualquier espacio normado de dimensión finita.

A continuación veremos qué pasa en un espacio de dimensión infinita.

Proposición 2.1. Un espacio normado es un espacio de Banach si y solo si toda serie absolutamente convergente es incondicionalmente convergente.

Demostración. Nos basta con probar que toda sucesión de Cauchy (x_n) es convergente. Es suficiente con encontrar una subsucesión de Cauchy.

Por ejemplo, escogemos una sucesión creciente de enteros positivos (n_k) tal que si $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$, entonces $\|y_k\| \leq 2^{-k}$. Como (y_k) es absolutamente convergente, es incondicionalmente convergente. La convergencia de (x_{n_k}) se tiene por la identidad $x_{n_1} + y_1 + \cdots + y_n = x_{n_{k+1}}$.

Además, se tiene que en un espacio de Banach, una serie de sumas parciales de una serie absolutamente convergente es una sucesión de Cauchy, y por lo tanto convergente.

Una aplicación del *teorema de Dirichlet* para la suma de normas nos permite obtener la convergencia incondicional. ▮

En espacios de dimensión infinita suele haber ejemplos sencillos de series incondicionalmente convergentes que no son absolutamente convergentes. Por ejemplo, en ℓ^2 la serie $\sum(\lambda_n e_n)$ es incondicionalmente convergente cuando $(\lambda_n) \in \ell^2$, pero no es absolutamente convergente a menos que $(\lambda_n) \in \ell^1$.

Teorema 2.1 (Teorema de Dvoretzky-Rogers). *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. No importa como escojamos $(\lambda_n) \in \ell^2$, que siempre hay una serie incondicionalmente convergente $\sum x_n$ en X con $\|x_n\| = |\lambda_n|$, para todo n.*

Luego, escogiendo (λ_n) en ℓ^2 pero no en ℓ^1, tenemos series en un espacio de Banach de dimensión infinita, las cuales son incondicionalmente convergentes pero no absolutamente convergentes.

El corazón del *teorema de Dvoretzky-Rogers* reside en el siguiente lema.

Lema 2.1. Sea E un espacio de Banach $2n$-dimensional. Se tiene que existen n vectores $x_1, \dots, x_n \in B_E$, con la norma de cada vector $\geq 1/2$, de forma que independientemente de los escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tenemos:

$$\Big\| \sum_{j\leq n} \lambda_j x_j \Big\| \leq \left(\sum_{j\leq n} |\lambda_j| \right)^{1/2}.$$

Demostración. En primer lugar vamos a establecer la notación que usaremos a continuación. Si w es una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión k, cada uno con sus respectivas bases, entonces $\det(w)$ y $\operatorname{tr}(w)$ denotan el determinante y la traza de la matriz representante de w con respecto a sus bases elegidas. Si cambiamos las bases, el determinante puede variar por un factor constante, pero la traza permanece invariante.

Nuestro objetivo es encontrar un isomorfismo en norma $u : \ell_2^{2n} \to E$ satisfaciendo

$$|\operatorname{tr}(u^{-1}v)| \leq 2n\|v\| \tag{2.1}$$

para cualquier operador $v : \ell_2^{2n} \to E$.

Encontrar esa u no es un problema, escogemos una u que cumpla:

$$\det(u) = \text{máx}\{|\det(v)| \,:\, v \in \mathcal{L}(\ell_2^{2n}, E), \|v\| = 1\}.$$

La compacidad de la esfera unidad en $\mathcal{L}(\ell_2^{2n}, E)$ y la continuidad del determinante garantiza la existencia del operador u.

Establecer (2.1) requiere más cuidado. Sea ε un escalar no nulo y $v \in \mathcal{L}(\ell_2^{2n}, E)$. Entonces, con la elección de u y la naturaleza de los determinantes tenemos:

$$\frac{|\det(u + \varepsilon v)|}{\|u + \varepsilon v\|^{2n}} \leq \det(u),$$

luego

$$|\det(u + \varepsilon v)| \leq \det(u) \cdot \|u + \varepsilon v\|^{2n} \leq \det(u) \cdot (1 + |\varepsilon| \cdot \|v\|)^{2n}.$$

Consideramos id como la identidad en ℓ_2^{2n}. La invertibilidad de u nos proporciona las siguientes operaciones:

$$|\det(u + \varepsilon v)| = \det(u) \cdot |\det(\mathrm{id} + \varepsilon u^{-1} v)| = \det(u) \cdot |1 + \varepsilon \cdot \mathrm{tr}(u^{-1} v) + c(\varepsilon)|$$

donde $|c(\varepsilon)| = \mathcal{O}(|\varepsilon|^2)$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Con esta igualdad y la desigualdad previa, podemos establecer:

$$|1 + \varepsilon \cdot \mathrm{tr}(u^{-1} v) + c(\varepsilon)| \leq (1 + |\varepsilon| \cdot \|v\|)^{2n} = 1 + 2n \cdot |\varepsilon| \|v\| + \mathcal{O}(|\varepsilon|^2)$$

para un ε pequeño. Escogiendo ε de forma minuciosa para que satisfaga $\varepsilon \cdot \mathrm{tr}(u^{-1} v) = |\varepsilon \cdot \mathrm{tr}(u^{-1} v)|$, tendremos para un $|\varepsilon|$ pequeño

$$1 + |\varepsilon| \cdot |\mathrm{tr}(u^{-1} v)| \leq 1 + |\varepsilon| \cdot 2n \cdot \|v\| + \mathcal{O}(|\varepsilon|^2),$$

y despejando obtenemos

$$|\mathrm{tr}(u^{-1} v)| \leq 2n \cdot \|v\| + \mathcal{O}(|\varepsilon|).$$

Haciendo tender ε a cero llegamos a (2.1).

Si consideramos ahora a P como la proyección ortogonal en ℓ_2^{2n} con rango m-dimensional, podemos trabajar en (2.1) para obtener

$$m = \mathrm{tr}(P) = \mathrm{tr}(u^{-1} u P) \leq 2n \cdot \|uP\|.$$

En otras palabras, $\|uP\| \geq m/2n$.

Por fin podemos abordar el problema de seleccionar adecuadamente $x_1, \dots, x_n$ en E. La clave reside en escoger de forma apropiada unos vectores ortogonales $y_1, \dots, y_n$ en ℓ_2^{2n} para establecer $x_j = u(y_j)$ para cada j.

Como $\|u\| = 1$, existe un $y_1 \in \ell_2^{2n}$ con $\|y_1\| = 1$ y $\|uy_1\| = 1$. Consideramos P_1 la proyección ortogonal de ℓ_2^{2n} en el complemento ortogonal de y_1, notado $[y_1]^\perp$. Entonces, $\|uP_1\| \geq (2n-1)/2n$, por lo que hay un $y_2 \in [y_1]^\perp$ con $\|y_2\| = 1$ y $\|uy_2\| = \|uP_1y_2\| \geq (2n-1)/2n$. Sea P_2 la proyección ortogonal de ℓ_2^{2n} en el complemento ortogonal $[y_1, y_2]^\perp$. Entonces, $\|uP_2\| \geq (2n-2)/2n$, por lo que hay un $y_3 \in [y_1, y_2]^\perp$ con $\|y_3\| = 1$ y $\|uy_3\| = \|uP_2y_3\| \geq (2n-2)/2n$. Y así sucesivamente.

Después de n iteraciones obtenemos unos vectores ortogonales $y_1, \dots, y_n$ en ℓ_2^{2n}. Estableciendo $x_j = uy_j$ para $1 \leq j \leq n$, tenemos $\|x_j\| \geq (2n - j + 1)/2n \geq 1/2$ para toda j, y al mismo tiempo, para $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares tenemos

$$\Big\| \sum_{j\leq n} \lambda_j x_j \Big\| = \Big\| u \Big(\sum_{j\leq n} \lambda_j y_j \Big) \Big\| \leq \|u\| \cdot \Big\| \sum_{j\leq n} \lambda_j y_j \Big\| = \Big(\sum_{j\leq n} |\lambda_j|^2 \Big)^{\frac{1}{2}},$$

por la ortonormalidad de los y_j. Luego ya tenemos probado el resultado.

∎

Para probar el *teorema de Dvoretzky-Rogers*, conviene introducir una noción alternativa de serie incondicionalmente convergente.

Lema 2.2. Una serie $\sum_n x_n$ en un espacio de Banach es incondicionalmente convergente si y solo si es convergente por signos, es decir, si $\sum_n \varepsilon_n x_n$ converge para cualquier elección de signo $\varepsilon = \pm 1$.

La demostración de este lema requiere bastantes manipulaciones, las cuales veremos mejor más adelante cuando introduzcamos algunas equivalencias de convergencia incondicional. De momento asumimos este lema como cierto.

Demostración. (*del teorema de Dvoretzky-Rogers*). Fijado $(\lambda_n) \in \ell^2$, escogemos enteros positivos $n_1 < n_2 < \dots$ tales que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n\geq n_k} |\lambda_n|^2 \leq 2^{-2k}.$$

Como X es de dimensión infinita, el lema 2.1 se aplica de forma excepcional. Por lo tanto, podemos encontrar unos vectores $y_1, \dots, y_n$ en B_X, cada uno con norma $\geq 1/2$, tales que para cualesquiera escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ y cualquier k tenemos

$$\Big\| \sum_{n=n_k}^{N} \alpha_n y_n \Big\| \leq \left(\sum_{n=n_k}^{N} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2},$$

sin importar como escojamos $n_k \leq N < n_{k+1}$. Establecemos los y_j como $x_j = \lambda_j y_j / \|y_j\|$. Prestemos especial atención a lo siguiente: sin importar el signo $\varepsilon = \pm 1$ ni el $n_k \leq N < n_{k+1}$ tenemos

$$\Big\| \sum_{n=n_k}^{N} \varepsilon_n x_n \Big\| \leq \left(\sum_{n=n_k}^{N} \frac{|\lambda_n|^2}{\|y_n\|^2} \right)^{1/2} \leq 2^{-k+1}.$$

Se tiene que las sumas parciales de $(\varepsilon_n x_n)$ son de Cauchy. Por lo tanto, (x_n) es convergente por signos, y por el lema anterior tenemos que es incondicionalmente convergente. Además, por nuestra elección de los y_j tenemos que $\|x_n\| = |\lambda_n|$ para todo n. ∎

2.2 Teorema de Orlicz-Pettis

En los resultados anteriores hemos visto que en un espacio de Banach de dimensión infinita las nociones de absoluta e incondicionalmente convergente no son equivalentes. En consecuencia, nos surge la duda sobre qué podemos decir de la convergencia incondicional.

A lo largo de esta sección veremos un gran arsenal de equivalencias de ser incondicionalmente convergente. Aunque algunos pueden resultar ligeramente elementales, veremos otros, como el *teorema de Orlicz-Pettis*, que son sutiles y obtienen resultados sorprendentes.

Teorema 2.2. *Para una serie $\sum_n x_n$ en un espacio de Banach, son equivalentes:*

(1) $\sum_n x_n$ es incondicionalmente convergente.
(2) $\sum_n x_n$ es desordenadamente convergente, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo n_ε tal que cuando M sea un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ con $\min M > n_\varepsilon$ tenemos $\| \sum_{n\in M} x_n \| < \varepsilon$.
(3) $\sum_n x_n$ es convergente por subseries, esto es, para cualquier sucesión estrictamente creciente (k_n) de enteros positivos, $\sum_n x_{k_n}$ converge.

(4) $\sum_n x_n$ *es convergente por signos.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Lo abordamos por reducción al absurdo, suponiendo que (2) es falso y buscando una permutación σ de $\mathbb{N}$ que hace que las sumas parciales de $\left(x_{\sigma(n)}\right)$ no sean de Cauchy. Consideramos $\delta > 0$ tal que, independientemente de $m \in \mathbb{N}$, encontramos siempre un conjunto finito $M \subset \mathbb{N}$ con $\text{mín}\, M > m$ y $\|\sum_{k\in M} x_k\| \geq \delta$. Esto nos permite construir una sucesión (M_n) de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{máx}\, M_n < \text{mín}\, M_{n+1} \quad \text{y} \quad \Big\|\sum_{k\in M_n} x_k\Big\| \geq \delta.$$

Pero, si σ es una permutación de $\mathbb{N}$ que asigna cada intervalo de enteros

$$\left[\text{mín}\, M_n, \text{mín}\, M_n + |M_n|\right]$$

a M_n, las sumas parciales de $(x_{\sigma(n)})$ no son de Cauchy, por lo que llegamos a una contradicción.

(2) $\Rightarrow$ (1): Sea σ una permutación de $\mathbb{N}$. Fijamos $\varepsilon > 0$ y escogemos $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ según la definición de desordenadamente convergente. Podemos afirmar que hay un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\{1, \dots, n_\varepsilon\} \subset \sigma(\{1, \dots, m_\varepsilon\})$, y con esto, tenemos que si $q > p > m_\varepsilon$, entonces $\|\sum_{n=p}^{q} x_{\sigma(n)}\| < \varepsilon$, es decir, $\sum x_{\sigma(n)}$ converge.

(2) $\Rightarrow$ (3): Fijado $\varepsilon > 0$, elegimos $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\|\sum_{n\in M} x_n\| < \varepsilon$ para todo subconjunto finito M de $\mathbb{N}$ con $\text{mín}\, M > m_\varepsilon$. Ahora, si (k_n) es una sucesión estrictamente creciente de números naturales, tenemos que $k_n \geq n$ para cada n, luego si $q > p > m_\varepsilon$, entonces $\|\sum_{n=p}^{q} x_{k_n}\| < \varepsilon$, es decir, $\sum x_{k_n}$ converge.

(3) $\Rightarrow$ (4): Sea (ε_n) una sucesión de ± 1. Si $\sum_n x_n$ es convergente por subseries y establecemos $S^+ = \{n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n = 1\}$ y $S^- = \{n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n = -1\}$, entonces debe darse que ambas series $\sum_{n\in S^\pm} x_n$ sean convergentes. Fijamos $\varepsilon > 0$. Cabe destacar que si $p < q$ son números naturales y $M^\pm = \{n \in S^\pm : p \leq n \leq q\}$, entonces:

$$\sum_{n=p}^{q} \varepsilon_n x_n = \sum_{n\in M^+} x_n - \sum_{n\in M^-} x_n.$$

Se sigue de la convergencia de $\sum_{n\in S^\pm} x_n$ que $\|\sum_{n\in M^\pm} x_n\| < \varepsilon/2$ para p suficientemente grande. Entonces $\|\sum_{n=p}^{q} \varepsilon_n x_n\| < \varepsilon$ para cada p, y esto es suficiente para asegurar la convergencia por signos.

(4) ⇒ (2): Para acabar, volveremos a razonar por reducción al absurdo. Asumimos que $\sum_n x_n$ no es convergente por signos. No tenemos otra opción que admitir la existencia de $\delta > 0$ y de una sucesión (M_k) de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ para los cuales $\text{máx}\, M_k < \text{mín}\, M_{k+1}$ y $\| \sum_{n \in M_k} x_n \| \geq \delta$. Asignamos a ε_n el valor $+1$ si $n \in \cup_k M_k$, y -1 en caso contrario. Las sumas parciales de $((1+\varepsilon_n)x_n)$ no son de Cauchy, luego por lo menos una de las series $\sum x_n$ y $\sum \varepsilon_n x_n$ será imposible que converja. Así vemos que hemos llegado a una contradicción, con lo que probamos el resultado.

En el siguiente diagrama observamos como hemos hecho la cadena de demostraciones con sus respectivas implicaciones, que como observamos, es un diagrama cerrado, por lo que la demostración es válida.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & (4) \\ & & & \swarrow & \uparrow \\ (1) & \leftrightarrow & (2) & \rightarrow & (3) \end{array}$$

∎

Hemos visto que la convergencia incondicional de $\sum x_n$ nos proporciona la convergencia de $\sum b_n x_n$ para ciertas sucesiones especiales en ℓ^∞ - la sucesión de los signos. Estos b_n especiales son, al menos en el caso real, los puntos extremos de B_{ℓ^∞}, luego, teniendo en cuenta el *teorema de Krein-Milman*, el siguiente resultado no nos sorprenderá en exceso.

Lema 2.3 (Bounded Multiplier Test). En cualquier espacio de Banach, la serie $\sum x_n$ es incondicionalmente convergente si y solo si la serie $\sum b_n x_n$ es convergente para todo $b_n \in \ell^\infty$.

Demostración. Una implicación es trivial, ya que sabemos que convergencia por signos implica convergencia incondicional. Teniendo en cuenta esto, fijamos una serie incondicionalmente convergente $\sum x_n$ en un espacio de Banach X y vemos que $\sum b_n x_n$ converge cuando $b = b_n \in \ell^\infty$. La completitud de X nos allana el camino, ya que solo necesitamos ver que $\| \sum_{k=m}^n b_k x_k \|$ converge a cero cuando $m, n \to \infty$. Usando dualidad,

$$\Big\| \sum_{k=m}^{n} b_k x_k \Big\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\langle x^*, \sum_{k=m}^{n} b_k x_k \rangle| \leq \|b\|_\infty \cdot \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{k=m}^{n} |\langle x^*, x_k \rangle|,$$

y esto nos lleva a intentar demostrar que

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{k \geq m} |\langle x^*, x_k \rangle| = 0. \tag{2.2}$$

El método más apropiado es ver la convergencia desordenada. Para un $\varepsilon > 0$ dado, tenemos un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo conjunto finito $M \subset \mathbb{N}$ con mín $M > m_\varepsilon$ tenemos $\| \sum_{k \in M} x_k \| < \varepsilon$. Centrémonos en $\mathrm{Re}\langle x^*, x_k \rangle$ para un $x^* \in B_{X^*}$ fijado. Elegimos $n > m > m_\varepsilon$ y establecemos

$$M^+ = \{m \leq k \leq n : \mathrm{Re}\langle x^*, x_k \rangle \geq 0\}$$

y

$$M^- = \{m \leq k \leq n : \mathrm{Re}\langle x^*, x_k \rangle < 0\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} |\,\mathrm{Re}\langle x^*, x_k \rangle| &= |\,\mathrm{Re}\langle x^*, \sum_{k \in M^+} x_k \rangle + |\,\mathrm{Re}\langle x^*, \sum_{k \in M^-} x_k \rangle| \\ &\leq \Big\| \sum_{k \in M^+} x_k \Big\| + \Big\| \sum_{k \in M^-} x_k \Big\| < 2 \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

De forma análoga tenemos que $\sum_{k=m}^{n} |\,\mathrm{Im}\langle x^*, x_k \rangle| < 2\varepsilon$. Con esto y tomando límites mientras hacemos tender ε a cero tenemos el resultado. ∎

Ahora tenemos una buena lista de condiciones de convergencia en norma equivalentes a convergencia incondicional. Hay que destacar que muchas de estas condiciones son equivalentes a converger débilmente, y ahora nuestro objetivo será configurar el proceso de transferencia probando dos sutiles teoremas de intercambio de límites, primero el de Schur, y luego como consecuencia el *teorema de Orlicz-Pettis.*

Teorema 2.3 (Teorema de Schur en ℓ^1). *En ℓ^1, convergencia débil de sucesiones y convergencia en norma son lo mismo.*

Demostración. Para la implicación no trivial podemos trabajar sin pérdida de generalidad con una sucesión débilmente nula $(x^{(n)})$ en ℓ^1. Hay que ver que se tiene que $\sum_k |x_k^{(n)}| \to 0$ cuando $n \to 0$.

La naturaleza débilmente nula de $(x^{(n)})$ nos asegura que para cualquier entero N fijado, $\sum_{k=1}^{N} |x_k^{(n)}| \to 0$ cuando $n \to \infty$. La parte más complicada es controlar las colas. Para lograr esto, hay que recalcar que B_{ℓ^∞} es débilmente compacto, e incluso es débilmente metrizable, ya que ℓ^∞ es el dual del espacio separable ℓ^1. Quizás venga bien señalar que una buena métrica en B_{ℓ^∞} viene dada por $d(f,g) = \sum_k 2^{-k} |f_k - g_k|$. Ahora, tengamos en cuenta que una base de un entorno débil para algún $\tilde{f} \in B_{\ell_\infty}$ viene dada por todo

$$U(\tilde{f}, \delta, N) = \{f \in B_{\ell_infty} : |f_k - \tilde{f}_k| < \delta, 1 \leq k \leq N\},$$

donde $\delta > 0$ y $N \in \mathbb{N}$.

La combinación de la topología débil - que es finita en los naturales- y la métrica compacta - que nos permitirá utilizar el *teorema de categorización de Baire* - resulta ser justo lo que necesitamos para tener un control uniforme de las colas.

Fijado $\varepsilon > 0$, y para cada $m \in \mathbb{N}$, establecemos el conjunto

$$\boldsymbol{B}_m = \bigcap_{n \geq m} \left\{ f \in \boldsymbol{B}_{\ell_\infty} : |\langle f, x^{(n)} \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right\}.$$

Cada $\boldsymbol{B}_m$ es un subconjunto débilmente cerrado de $\boldsymbol{B}_{\ell_\infty}$, ya que es intersección de tales conjuntos. Claramente tenemos que los b_m crecen conforme crece m, y la nulidad débil de $(x^{(n)})$ nos proporciona que

$$\boldsymbol{B}_{\ell_\infty} = \bigcup_m \boldsymbol{B}_m.$$

Ahora, el *teorema de categorización de Baire* nos revela que uno de los $\boldsymbol{B}_m$, llamémoslo $\boldsymbol{B}_{m_0}$, tiene interior no vacío. Esto nos asegura que podemos encontrar $\tilde{f} \in \boldsymbol{B}_{m_0}$, $\delta > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$U(\tilde{f}, \delta, N) \subset \boldsymbol{B}_{m_0} \subset \boldsymbol{B}_m$$

para todo $m \geq m_0$. Si ajustamos m_0 (en caso de ser necesario), también podemos asumir

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k^{(m)}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $m \geq m_0$.

Ahora fijamos $m \geq m_0$. Aprovechamos las limitaciones que rigen el número de miembros de $U(\tilde{f}, \delta, N)$, y definimos $f \in \boldsymbol{B}_{\ell_\infty}$ como

$$f_k = \tilde{f}_k \quad \text{si} \quad 1 \leq k \leq N \qquad \text{y} \qquad f_k = \operatorname{sign} x_k^{(m)} \quad \text{si} \quad k > N.$$

Entonces $f \in U(\tilde{f}, \delta, N) \subset \boldsymbol{B}_{m_0}$, luego $|\langle f, x^{(m)} \rangle| \leq \varepsilon/3$. De esto se sigue que

$$\begin{aligned} \sum_k |x_k^{(m)}| &= \sum_{k \leq N} |x_k^{(m)}| + |\sum_k f_k x_k^{(m)} - \sum_{k \leq N} f_k x_k^{(m)}| \\ &\leq \sum_{k \leq N} (1 + |f_k|)|x_k^{(m)}| + |\langle f, x^{(m)} \rangle| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

∎

Con este teorema en mente, decimos que un espacio de Banach tiene la *propiedad de Schur* si todas las series débilmente convergentes son convergentes en norma.

El *teorema de Schur en ℓ^1* es la piedra angular de nuestra demostración del *teorema de Orlicz-Pettis*. También haremos un uso crítico de otro resultado fundamental, debido a S.Mazur: *para subconjuntos convexos, en particular subespacios, la clausura débil y la clausura en norma coinciden.*

Teorema 2.4 (Teorema de Orlicz-Pettis). *Para sucesiones en un espacio de Banach, convergencia débil de subseries y convergencia (en norma) de subseries son lo mismo.*

Observamos con facilidad que la definición de convergencia débil de subseries es casi una copia de carbón de convergencia de subseries: basta con reemplazar la topología en norma por la topología débil.

Demostración. Obviamente, las propiedades de la norma implican las de la débil, pero el recíproco requiere una demostración formal.

Sea (x_n) convergente débilmente en subseries. Podemos suponer que nuestro espacio de Banach es separable. Procedemos a la prueba creando un operador natural $v : X^* \to \ell^1$ dado por $v(x^*) = (\langle x^*, x_n \rangle)$. Usaremos el *teorema de Schur en ℓ_1* para ver que v es compacto. Una vez tengamos esto, solo tendremos que dar un pequeño paso para obtener la convergencia en subseries de (x_n).

Primero debemos justificar la existencia de v como un operador lineal acotado. Como (x_n) converge débilmente por subseries, existe el límite débil de $\sum_{j=1}^{n} x_{k_j}$ para toda sucesión creciente de enteros positivos (k_j). Se sigue de esto que la sucesión de escalares $(\langle x^*, x_n \rangle)$ converge incondicionalmente, luego converge absolutamente, para cada x^* de X^*. Por lo tanto, la aplicación $v : X^* \to \ell^1$ existe. Se tiene fácilmente que v es lineal y tiene gráfica cerrada, por eso v es un operador lineal acotado.

Para ver que v es compacto, empezamos con la sucesión (x_m^*) en B_{X^*}. Por la suposición de separabilidad de X tenemos que B_{X^*} es compacto y metrizable en la topología débil. Esto nos permite extraer una sucesión débilmente convergente $(x_{m_k}^*)$ de (x_m^*), con límite débil x_0^*. Si podemos demostrar que vx_0^* es la norma de límite de $(vx_{m_k}^*)$, habremos establecido la compacidad de v. Pero, como v toma valores en ℓ^1, podemos usar el *teorema de Schur en ℓ^1*, y lo único que nos hace falta ver es que vx_0^* es el límite débil de $(vx_{m_k}^*)$. Para esto basta con probar que $\langle f, vx_0^* \rangle = \text{lím}_k \langle f, vx_{m_k}^* \rangle$ para cualquier f en un subconjunto denso de ℓ^∞. Recordemos que las funciones simples forman un subconjunto denso de ℓ^∞, por lo que la linealidad nos permite restringir nuestra búsqueda de conjuntos a la colección de funciones características $f = \xi_M$ de subconjuntos M de $\mathbb{N}$. Para tal f, tenemos por la convergencia débil por subseries de (x_n)

$$\begin{aligned}\langle f, vx_0^*\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle x_0^*, x_n\rangle = \langle x_0^*, \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle x_{m_k}^*, \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\rangle \\ &= \lim_{k\to\infty}\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle x_{m_k}^*, x_n\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle f, vx_{m_k}^*\rangle.\end{aligned}$$

Hay una gran variedad de formas de terminar la prueba. Quizás, la más elemental empiece recordando cómo identificar los subconjuntos relativamente compactos de ℓ^1: estos son los subconjuntos acotados K con colas uniformemente pequeñas, queremos decir que independientemente del $\varepsilon > 0$ hay un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>n_\varepsilon} |a_n| \leq \varepsilon$ para cualquier $(a_n) \in K$. Tomaremos $v(B_{X^*})$ como nuestra K. Entonces, para cualquier subconjunto finito M de $\mathbb{N}$ con mín $M > n_\varepsilon$,

$$\Big\|\sum_{n\in M} x_n\Big\| \leq \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sum_{n\in M} |\langle x^*, x_n\rangle| \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto, nuestra serie converge desordenadamente. ▮

Si nos paramos a pensar un momento, nos damos cuenta que hemos demostrado más de lo que habíamos enunciado en el *teorema de Orlicz-Pettis*: la compacidad del operador natural $v : X^* \to \ell^1$ también es equivalente a la convergencia por subseries de (x_n).

El *teorema de Orlicz-Pettis* abre la puerta de la topología débil. Usando como modelo las demostraciones de las equivalencias elementales de la convergencia (en norma) de subseries vistas en el apartado 2.2, de forma rutinaria organizamos una lista de equivalencias de propiedades débiles y convergencia débil por subseries. Recapitulemos lo que hemos visto anteriormente.

Teorema 2.5 (Teorema Omnibus de convergencia incondicional). *Para una sucesión (x_n) en un espacio de Banach X, son equivalentes:*

(1) (x_n) es incondicionalmente convergente.
(2) (x_n) es desordenadamente convergente.
(3) (x_n) es convergente por subseries.
(4) (x_n) es convergente por signos.
(5) $(b_n x_n)$ es convergente para cualquier (b_n) en ℓ^∞.
(6) (x_n) es débilmente convergente por subseries.

(7) *(x_n) es débilmente convergente por signos, es decir, $\sum_n \varepsilon_n x_n$ converge débilmente en X para cualquier elección de signos $\varepsilon_n = \pm 1$.*
(8) *$(b_n x_n)$ es convergente débilmente en X para cualquier $(b_n) \in \ell^\infty$.*
(9) *$v : X^* \to \ell^1$ tal que $x^* \mapsto (\langle x^*, x_n \rangle)_n$ es un operador compacto.*
(10) *$(b_n) \mapsto \sum_n b_n x_n$ define un operador compacto $\ell^\infty \to X$.*
(11) *$(b_n) \mapsto \sum_n b_n x_n$ define un operador compacto $c_0 \to X$.*
(12) *$(b_n) \mapsto \sum_n b_n x_n$ define un operador acotado $\ell^\infty \to X$.*

Demostración. Las primeras nueve equivalencias las tenemos como consecuencia de lo visto en las páginas anteriores. Las equivalencias de la (1) a la (4) son las que componen el teorema 2.2. Sabemos que (1) y (5) son equivalentes por el lema 2.3. El *teorema de Orlicz-Pettis* nos proporciona de manera inmediata la equivalencia entre (3) y (6), y por como hemos realizado la prueba tenemos también que (3)↔(9). Por otra parte, tenemos la implicación en ambos sentidos entre (1) y (7), gracias al lema 2.2. De forma trivial tenemos las equivalencias entre (7) y (8) y entre (5) y (8).

Para ver las implicaciones que faltan, tenemos que recordar el *teorema de Schauder: un operador en un espacio de Banach es compacto si su adjunto (o biadjunto) lo es.* Con esto presente, tenemos que gracias a (5), el operador en (10) es justo el inducido por el adjunto del (9), y v en (9) es el adjunto del operador en (11). Luego, tenemos como consecuencia del *teorema de Schauder* que (9)→(10), y que (10) implica tanto (11), ya que el operador de (10) se puede restringir para tener el de (11), como (12), que a su vez este último implica (5), de forma trivial por el lema 2.3.

A continuación mostramos de forma esquemática la cadena de implicaciones, de manera que podremos observar sin dificultad que es una cadena cerrada.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & (7) & & & & (6) & & \\
 & \nearrow\swarrow & \updownarrow & & & & \updownarrow & & \\
(8) & & (1) & \leftrightarrow & (2) & \leftrightarrow & (3) & \leftrightarrow & (4) \\
 & \searrow\nwarrow & \updownarrow & & & & \updownarrow & & \\
 & & (5) & & (10) & \leftarrow & (9) & & \\
 & & \uparrow & \swarrow & \downarrow & \nearrow & & & \\
 & & (12) & & (11) & & & &
\end{array}
$$

∎

La omisión de una analogía débil de (1) en nuestra lista es inevitable. Por ejemplo, si consideramos (e_n) la base de vectores unitarios en c_0, la sucesión dada por $x_1 =$

e_1 y $x_n = e_n - e_{n-1}$ para $n \geq 2$ muestra que $\sum_n x_{\sigma(n)}$ converge débilmente en un espacio de Banach para cualquier permutación σ de $\mathbb{N}$ sin ser (x_n) incondicionalmente convergente.

2.3 Desigualdad de Khinchin

Una vez visto que convergencia incondicional y convergencia absoluta no son siempre equivalentes, buscaremos conclusiones analíticas sobre series incondicionalmente convergentes. En esta sección introduciremos unas herramientas muy interesantes que nos servirán para futuros razonamientos matemáticos. Todo esto se basará en las más que famosas funciones de Rademacher y su papel en la desigualdad de Khinchin.

Definimos formalmente las funciones de Rademacher como

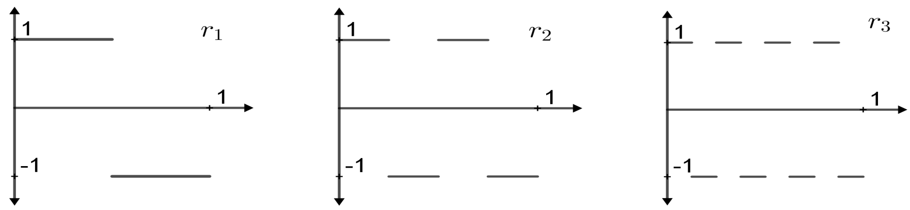
$$r_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde

$$r_n(t) := \operatorname{sign}(\sin 2^n \pi t),$$

siendo $\operatorname{sign}(\sin 2^n \pi t)$ el signo de $\sin(2^n \pi t)$.

Esta definición se entiende mejor de formar gráfica, por lo que a continuación veremos una representación de r_1, r_2 y r_3.



Observamos con facilidad, que las funciones de Rademacher no son más que una unión de 2^n segmentos disjuntos de longitud $1/2^n$, estando la mitad en el primer cuadrante y la otra mitad en el cuarto.

Una vez introducidas las funciones de Rademacher, tenemos que destacar su característica más importante: sus buenas propiedades de ortogonalidad. Si $0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ y $p_1, \ldots, p_k \geq 0$ son enteros, entonces

$$\int_0^1 r_{n_1}^{p_1}(t)\cdots r_{n_k}^{p_k}(t)dt = \begin{cases} 1 \text{ si cada } p_j \text{ es par} \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

Este resultado lo podemos comprobar observando las imágenes anteriores, por lo que no haremos la prueba de forma analítica.

Una consecuencia inmediata es que los r_n forman una sucesión ortonormal en $L^2[0,1]$, así que tenemos

$$\int_0^1 \left|\sum a_n r_n(t)\right|^2 dt = \sum |a_n|^2$$

para todo $(a_n) \in \ell^2$. Tenemos que tener cuidado, ya que no forman una base ortonormal: $\cos(2\pi t)$ y $r_1 \cdot r_2$, por ejemplo, son ortogonales para todos los r_n.

El principal resultado de las funciones de Rademacher es una desigualdad muy potente.

Lema 2.4 (Desigualdad de Khinchin). Para cualquier $0 < p < \infty$, existen dos constantes positivas A_p y B_p tales que, independientemente de la sucesión de escalares (a_n) en ℓ^2 tenemos

$$A_p \cdot \left(\sum_n |a_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 |\sum_n a_n r_n(t)|^p dt\right)^{1/p} \leq B_p \cdot \left(\sum_n |a_n|^2\right)^{1/2}.$$

Podemos reformular este enunciado diciendo que en el generador de las funciones de Rademacher todas las métricas L^p son equivalentes. La mejor elección de A_p y B_p depende de la elección del campo escalar. Será suficiente con probar la desigualdad de Khinchin para números reales, ya que en el caso de los números complejos basta con descomponerlos en su parte real e imaginaria.

Teniendo en cuenta la monotonía de las métricas en L^p, podemos establecer la desigualdad de Khinchin concentrándonos en potencias de 2, es decir, tomando $p = 2^n$, y usando inducción. El paso general de inducción suele resultar tedioso, pero nos resultará elemental y nos transmitirá bastante información para el caso $p = 4$. Este es el caso que debemos utilizar cuando vayamos a probar otra desigualdad, formulada por Grothendieck.

Demostración (Prueba de la desigualdad de Khinchin para $p = 4$). Tomando límites podemos simplificar la prueba y trabajar con una sucesión finita de escalares reales

$(a_1, \dots, a_m)$. Ahora desarrollamos el interior del paréntesis del centro de la desigualdad

$$\int_0^1 \Big|\sum_{n\le m} a_n r_n(t)\Big|^4 dt =$$
$$= \int_0^1 \left(\sum_{i\le m} a_i r_i(t)\right)\cdot\left(\sum_{j\le m} a_j r_j(t)\right)\cdot\left(\sum_{k\le m} a_k r_k(t)\right)\cdot\left(\sum_{\ell\le m} a_\ell r_\ell(t)\right)$$
$$= \sum_{i,j,k,\ell\le m} a_i a_j a_k a_\ell \int_0^1 r_i(t) r_j(t) r_k(t) r_\ell(t) dt = 3\cdot \sum_{i,j\le m} a_i^2 a_j^2 - 2\cdot \sum_{i\le m} a_i^4.$$

Observamos que gracias a la ortogonalidad de las funciones de Rademacher se anulan las integrales a no ser que sus exponentes sean iguales por pares. En el último término, aparece un 3 multiplicando al sumatorio, ya que hay tres posibles formas de combinar los exponentes para que sean iguales dos a dos, sin embargo, tenemos que tener en cuenta los casos en los que los cuatro exponentes son iguales, ya que los estamos contando como si fuesen tres casos diferentes, por eso introducimos ese sumatorio negativo, para restar los dos casos repetidos.

Una vez explicado estos pasos seguimos y llegamos a que

$$\int_0^1 \Big|\sum_{n\le m} a_n r_n(t)\Big|^4 dt \le 3\cdot \sum_i a_i^2 \cdot \sum_j a_j^2 = 3\cdot \left(\sum_n a_n^2\right)^2$$

lo cual nos ayuda a obtener la siguiente desigualdad

$$\Big\|\sum_{n\le m} a_n r_n\Big\|_2 \le \Big\|\sum_{n\le m} a_n r_n\Big\|_4 \le 3^{1/4}\cdot \Big\|\sum_{n\le m} a_n r_n\Big\|_2.$$

Con esto hemos visto que $B_4 \le 3^{1/4}$ y $A_4 \ge 1$, es más, $A_4 = 1$.

∎

En principio debe estar claro como abordar un paso inductivo general para las potencias de dos. Pero igualmente queda claro que este procedimiento no conduciría a resolver fórmulas complicadas de combinatoria, así que mejor alejarnos de ese desafío y emplear otro camino.

Demostración (Desigualdad de Khinchin para un p general). El procedimiento a seguir será establecer el resultado para valores enteros de p. Usando la desigualdad de

Hölder y la monotonía de las normas L^p nos desharemos de los casos restantes. Como en el caso anterior, será suficiente con trabajar con números reales $a_1, \dots, a_m$, no todos nulos.

Si $p \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que $|y|^p < p! \cdot (1 + |y|^p/p!) \leq p! \cdot e^{|y|}$. Si establecemos $f(t) = \sum_{n \leq m} a_n r_n(t)$, tenemos

$$\int_0^1 |f(t)|^p dt \leq p! \cdot \int_0^1 e^{|f(t)|} dt \leq p! \cdot \int_0^1 \left(e^{f(t)} + e^{-f(t)}\right) dt.$$

Normalizamos para obtener $\|f\|_2 = \left(\sum_{n \leq m} a_n^2\right)^{1/2} = 1$, y observamos que $\int_0^1 e^{f(t)} dt = \int_0^1 \prod_{n \leq m} \exp\left(a_n r_n(t)\right) dt$. Expandiendo el integrando como producto de series de potencias, y teniendo en cuenta la ortogonalidad de las r_n, podemos intercambiar la integral y el producto. Esto mismo se podría ver también si nos llevamos el problema al campo de la estadística, y consideramos las r_n como variables aleatorias independientes. En cualquier caso tenemos

$$\int_0^1 e^{f(t)} dt = \int_0^1 \prod_{n \leq m} \exp(a_n r_n(t)) dt = \prod_{n \leq m} \cosh(a_n) \quad (*),$$

y por comparación en los términos de series de potencias llegamos a la siguiente desigualdad

$$(*) \leq \prod_{n \leq m} \exp\left(\frac{a_n^2}{2}\right) = \exp\left(\sum_{n \leq m} \frac{a_n^2}{2}\right) = e^{1/2}.$$

Por simetría tenemos que $\int_0^1 e^{-f(t)} dt \leq e^{1/2}$, y por tanto

$$\int_0^! |f(t)|^p dt \leq 2p! \cdot e^{1/2}.$$

Para $2 \leq p < \infty$, teniendo en cuenta la monotonía y la homogeneidad de las normas L^p, podemos concluir para $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ arbitrarios que

$$\left(\sum_{n \leq m} a_n^2\right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{n \leq m} a_n r_n \right\|_p \leq \left(2k! \cdot e^{1/2}\right)^{1/k} \cdot \left(\sum_{n \leq m} a_n^2\right)^{1/2},$$

donde k es el entero siguiente a p.

Nos quedamos con el caso $0 < p < 2$. Vamos a resolverlo usando una modificación de la desigualdad de Hölder. Dado $0 < p < 2$, definimos $0 < \theta < 1$ como $\theta = (2-(p/2))^{-1}$, de forma que

$$\theta = (2-(p/2))^{-1} \to 4\theta - \theta p = 2 \to 4\theta - \theta p - 4 = -2.$$

En el último paso hemos sumado -4 a cada lado, para después cambiar el signo de la ecuación y poder agrupar de manera que tenemos $p\theta + 4(1-\theta) = 2$. Con esto podemos descomponer $|f(t)|^2$ y establecer la siguiente desigualdad

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt = \int_0^1 |f(t)|^{p\theta} \cdot |f(t)|^{4(1-\theta)} dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\theta} \cdot \left(\int_0^1 |f(t)|^4 dt\right)^{1-\theta}.$$

Ya sabemos que $\|f\|_4 \leq B_4 \cdot \|f\|_2$, de donde llegamos a que $B_4^{2-4/p} \cdot \|f\|_2 \leq \|f\|_p$. Por otro lado, usando una vez más la monotonía llegamos a que $\|f\|_p \leq \|f\|_2$.

∎

Los razonamientos empleados en el caso $0 < p < 2$ se pueden utilizar para establecer un enunciado más general: si las métricas en L^p son equivalentes en un subespacio común para $0 < p_1 < p \leq p_2$, entonces son equivalentes para $0 < p \leq p_2$.

El *teorema de Dvoretzky-Rogers* indica que independientemente del espacio de Banach X de dimensión infinita e independientemente de la sucesión de escalares (λ_n) en ℓ^2 siempre habrá una sucesión incondicionalmente convergente (x_n) en X tal que $\|x_n\| = |\lambda_n|$ para todo n. Con todo lo visto hasta ahora nos puede surgir la duda sobre si podemos plantear una proposición mejor, como por ejemplo, si podemos reemplazar ℓ^2 por un subespacio mayor ℓ^q con $q > 2$. El siguiente teorema nos alejará de estas especulaciones, y además, será nuestra primera oportunidad de utilizar la desigualdad de Khinchin.

Teorema 2.6 (Teorema de Orlicz). *Si (f_n) es una sucesión incondicionalmente convergente en $L^1[0,1]$, entonces $\sum_n \|f_n\|_1^2 < \infty$.*

Demostración. Como viene siendo habitual, si consideramos las partes real e imaginaria por separado, será suficiente con trabajar con las funciones de valores reales, ya que de forma análoga se obtiene el resultado para las funciones de valores imaginarios.

Recordemos que por el *Teorema Omnibus* 2.5 tenemos que (f_n) da lugar al operador (compacto) $v : L^\infty[0,1] \to \ell^1$ tal que $g \mapsto (\langle g, f_n \rangle)$. Por la convergencia por signos, cualquier sucesión de signos $\varepsilon_n = \pm 1$ satisface

$$\Big\| \sum_n \varepsilon_n f_n \Big\|_1 \leq \sup_{g \in B_{L_\infty}} \sum_n |\langle g, f_n \rangle| = \|v\|.$$

Observamos que independientemente del número natural m, podemos utilizar la desigualdad de Minkowski seguida de la desigualdad de Khinchin para deducir que

$$\left(\sum_{n \leq m} \|f_n\|_1^2 \right)^{1/2} \leq \int_0^1 \left(\sum_{n \leq m} f_n(s)^2 \right)^{1/2} ds \leq A_1^{-1} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \Big| \sum_{n \leq m} f_n(s) r_n(t) \Big| dt\, ds.$$

Cambiando el orden de integración, la última expresión se convierte en

$$A_1^{-1} \cdot \int_0^1 \Big\| \sum_{n \leq m} r_n(t) f_n \Big\|_1 dt,$$

que está acotada superiormente por $A_1^{-1} \cdot \|v\|$ ya que $r_n(t) = \pm 1$ para todo t fuera del conjunto contable de racionales diádicos $\{k \cdot 2^{-n} : 0 \leq k \leq 2^n, n \in \mathbb{N}\}$. Como resultado tenemos

$$\left(\sum_n \|f_n\|_1^2 \right)^{1/2} \leq A_1^{-1} \cdot \|v\| < \infty.$$

Otra importante consecuencia de la desigualdad de Khinchin es la existencia de subespacios de Hilbert fácilmente descriptibles en $L^p[0,1]$. Introducimos la notación Rad_p para el generador lineal cerrado de las funciones de Rademacher en $L^p[0,1]$, para cualquier $0 < p \leq \infty$.

A continuación, veremos un teorema que engloba tres características muy interesantes de Rad_p, que nos permitirán entender mejor su comportamiento.

Teorema 2.7. *1. Para $0 < p < \infty$, Rad_p es isomorfo a ℓ^2.*

2. Rad_∞ es isomorfo a ℓ^1, isométrico en el caso real.

3. Para $1 < p < \infty$, Rad_p es un subespacio complementado en $L^p[0,1]$.

Demostración. 1. Este resultado es una consecuencia inmediata de la desigualdad de Khinchin. El isomorfismo viene dado por $(a_n) \mapsto \sum_n a_n r_n$.

2. En primer lugar veamos el caso real. Si $c_1, \dots, c_n$ son números reales, podemos encontrar un intervalo diádico de longitud 2^{-n} en el que cada r_j $(1 \le j \le n)$ concuerde en signo con su correspondiente c_j. Con esto, queda claro que

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} c_j r_j \Big\|_\infty = \sum_{j=1}^{n} |c_j|.$$

El caso complejo es una consecuencia rápida. Si $c_j = a_j + i \cdot b_j$ $(1 \le j \le n)$ son números complejos,

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{n} |c_j| \le \text{máx} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} |a_j|, \sum_{j=1}^{n} |b_j| \Big\} = \text{máx} \Big\{ \Big\| \sum_{j=1}^{n} a_j r_j \Big\|_\infty, \Big\| \sum_{j=1}^{n} b_j r_j \Big\|_\infty \Big\}$$
$$\le \Big\| \sum_{j=1}^{n} c_j r_j \Big\|_\infty \le \sum_{j=1}^{n} |c_j|.$$

En cualquier caso, el paso a sumas infinitas es elemental.

3. Para cada $1 < p < \infty$, tenemos que encontrar una proyección lineal acotada $P_p : L^p[0,1] \to L^p[0,1]$ con rango Rad_p.
Cuando $p = 2$, todo es sencillo: basta con tomar P_2 la proyección ortogonal en $L^2[0,1]$ definida por $P_2 f = \sum_n \langle f, r_n \rangle r_n$, donde $\langle f, r_n \rangle = \int_0^1 f(t) r_n(t) dt$.
Cuando $p > 2$, usamos que $L^p[0,1]$ se integra de forma continua en $L^2[0,1]$, y con la desigualdad de Khinchin, esto asegura que $f \mapsto \sum_n \langle f, r_n \rangle r_n$ define un operador acotado $P_p : L^p[0,1] \to L^p[0,1]$ con

$$\|P_p\|_p = \Big\| \sum \langle f, r_n \rangle r_n \Big\|_p \le B_p \cdot \Big\| \sum \langle f, r_n \rangle r_n \Big\|_2 \le B_p \cdot \|f\|_2 \le B_p \cdot \|f\|_p.$$

Esta aplicación es una proyección sobre Rad_p.
Cuando $1 < p < 2$, usamos la dualidad para resolverlo. La aplicación $P_p = (P_{p^*})^*$ es una proyección lineal acotada en $L^p[0,1]$. Para ver que se comporta de la forma que queremos, primero notemos que Rad_p está en el rango de P_p, ya que $\langle P_p r_n, g \rangle = \langle r_n, g \rangle$ para todo número natural n y toda g en $L^{p^*}[0,1]$, incluso tenemos

$$\langle P_p f, g \rangle = \langle f, P_{p^*} g \rangle = \langle f, \sum \langle g, r_n \rangle r_n \rangle = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \langle f, r_k \rangle \cdot \langle g, r_n \rangle$$
$$= \lim_{n \to \infty} \langle \sum_{k=1}^{n} \langle f, r_k \rangle r_k, g \rangle$$

para $f \in L^p[0,1]$ y $g \in L^{p^*}[0,1]$.

Esto nos muestra que $\sum_{n=1}^{\infty}\langle f, r_n\rangle r_n$ converge débilmente a $P_p f$, por lo que Rad_p es débilmente denso, y por tanto es denso en norma en el rango de P_p por convexidad. Como estamos tratando con espacio de Banach, Rad_p coincide con el rango de P_p.

∎

Hay que tener en cuenta que tenemos $P_p f = \sum_{n=1}^{\infty}\langle f, r_n\rangle r_n$ para $f \in L^p[0,1]$, ya que P_p obviamente extiende P_2 y $L^2[0,1]$ se incrusta densamente en $L^p[0,1]$.

Con facilidad observamos que jugando con dos vectores 2-dimensionales podríamos haber demostrado que, en el caso complejo, Rad_∞ no es isométricamente isomorfo a ℓ^1.

Para finalizar esta sección, queremos enfatizar en que Rad_1 no está complementado en $L^1[0,1]$. Para justificar esta afirmación hacen falta más herramientas, y una vez desarrollado esto, seremos capaces de ver que no hay subespacios isomorfos a espacios de Hilbert que puedan ser complementados en $L^1[0,1]$. Todo esto lo tendremos más claro al final del capítulo.

2.4 Desigualdad de Grothendieck

Aunque el *teorema de Orlicz* frustra cualquier esperanza de un refinamiento sustancial del *teorema de Dvoretzky-Rogers*, un cambio del punto de vista nos abrirá nuevos horizontes.

Consideremos $u : X \to Y$ un operador lineal continuo entre espacios de Banach. Reflexionemos un momento sobre lo que tenemos: u lleva series absolutamente convergentes en series absolutamente convergentes y series incondicionalmente convergentes en series incondicionalmente convergentes. También tenemos que u lleva series absolutamente convergentes en series incondicionalmente convergentes. Pero para cualquier espacio de Banach de dimensión infinita la identidad deja de llevar toda serie incondicionalmente convergente en una absolutamente convergente.

Estos operadores $u : X \to Y$ que llevan series incondicionalmente convergentes (x_n) en X en series absolutamente convergentes (ux_n) en Y son llamados *operadores absolutamente sumantes*.

Antes de presentar unos de los resultados más importantes de este trabajo, el *teorema de Grothendieck*, veremos el precursor de este importante resultado, una desigualdad matricial que usaremos de múltiples formas a lo largo de la demostración de dicho teorema. Sin más demora, presentamos la desigualdad de Grothendieck.

Lema 2.5 (Desigualdad de Grothendieck). Existe una constante universal κ_G para la que, dado un espacio de Hilbert H, cualquier $n \in \mathbb{N}$, cualquier matriz $n \times n$ de escalares (a_{ij}) y cualesquiera $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ vectores en B_H, se tiene

$$(G) \qquad \Big| \sum_{i,j} a_{ij}(x_i|y_i) \Big| \leq \kappa_G \cdot \text{máx} \left\{ \Big| \sum_{i,j} a_{ij} s_i t_j \Big| \, : \, |s_i| \leq 1, |t_j| \leq 1 \right\}.$$

Antes de proceder a la demostración, vamos a destacar un par de comentarios.

En primer lugar, observamos que el máximo de la parte derecha de (G) se puede ver como la norma de (a_{ij}) considerada como un operador de ℓ_∞^n en ℓ_1^n. Como cualquier subconjunto normado de $B_{\ell_\infty^n}$ sirve para evaluar la norma de este operador, podemos reemplazar, en el caso real, (G) por

$$(G') \qquad \Big| \sum_{i,j} a_{ij}(x_i|y_i) \Big| \leq \kappa_G \cdot \text{máx} \left\{ \Big| \sum_{i,j} a_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j' \Big| \, : \, \varepsilon_i, \varepsilon_j' = \pm 1 \right\}.$$

El segundo comentario es que, la mejor posible κ_G - actualmente desconocida - llamada *constante de Grothendieck*, depende de la elección del campo de escalares.

Demostración. En esta demostración no nos vamos a preocupar de obtener una buena estimación para κ_G. Por lo tanto, tendremos suficiente con concentrarnos solamente en las matrices de coeficientes reales y los espacios de Hilbert reales. El caso complejo se tiene, con una posible duplicación de constante, descomponiendo en parte real e imaginaria.

Para simplificar la notación, escribiremos

$$\|a\| = \sup \left\{ \Big| \sum_{i,j} a_{ij} s_i t_j \Big| \, : \, |s_i| \leq 1, |t_j| \leq 1 \right\}$$

y

$$|||a||| = \sup \Big| \sum_{i,j} a_{ij}(x_i|y_i) \Big|$$

donde el último supremo se toma en todo espacio de Hilbert H y todos los vectores $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ en la bola unidad B_H. Queda claro que los espacios de Hilbert separables son suficientes para obtener este supremo, ya que en cada etapa solo usamos un número finito de vectores.

La idea central de la prueba es usar las funciones de Rademacher para poder incrustar un espacio de Hilbert separable en $L^2[0,1]$ que respete el producto interno. Si (e_n) es una base ortonormal de H, cualquier $X \in H$ posee una expansión en series de Fourier $X = \sum_n (x|e_n)e_n$. Usando $\xi_n = (x|e_n)$ podemos definir $X : [0,1] \to \mathbb{R}$ como

$$X(t) := \sum_n \xi_n r_n(t).$$

Debido a la ortonormalidad de los r_n, cada X pertenece a $L^2[0,1]$, con $\|X\|_2 = \|x\|$, y para cualquier $x, y \in H$

$$(x|y) = \int_0^1 X(t)Y(t)dt.$$

Si fuese el caso (que en principio no lo es) en el que, para todo X en $L^2[0,1]$ resultante de los x en B_H, la función $|X|$ tendría un límite superior, llamémoslo M, por lo que la desigualdad de Grothendieck sería una trivialidad. Es más, en este caso tendríamos para cada $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ en B_H

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{i,j} a_{ij}(x_i|y_j)\Big| &= \Big|\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} X_i(t)Y_j(t)dt\Big| \\ (*) \qquad &\leq M^2 \cdot \int_0^1 \Big|\sum_{i,j} a_{ij} \frac{X_i(t)}{M} \cdot \frac{Y_j(t)}{M}\Big| dt \leq M^2 \cdot \|a\|. \end{aligned}$$

De esto se sigue que $|||a||| \leq M^2 \cdot \|a\|$.

Hace falta algo para sortear la falta de acotación uniforme desplegada por la imagen de B_H en $L^2[0,1]$. La representación funcional nos permite dos ventajas: podemos truncar y ganamos acceso a la desigualdad de Khinchin.

Dados $x \in H$ y $M > 0$, definimos X^L y X^U como

$$X^L(t) := \begin{cases} X(t), & \text{si } |X(t)| \leq M \\ M \cdot \operatorname{sign} X(t), & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

y

$$X^U := X(t) - X^L(t).$$

Con esto, dividimos cada X en dos componentes. En primer lugar, X^L está uniformemente acotada por M, luego estos argumentos son aplicables en $(*)$. En segundo lugar, X^U tiene una fácil estimación de su norma en L^2. De hecho, tenemos que para cualquier $x \in B_H$

$$(**) \qquad \|X^U\|_2 \leq \frac{\sqrt{3}}{4M}.$$

Observemos que para $t \in [0,1]$ dado, $X^U(t)$ puede ser cero o no. Si no lo es, entonces $|X(t)| > M$, es más, $|X^U(t)| = |X(t)| - M$. La siguiente desigualdad elemental $s \leq m + (s^2/4m)$ $(m, s > 0)$ revela que, independientemente del estado de los $X^U(t)$, $|X^U(t)| \leq X(t)^2/4M$, luego

$$\|X^U\|_2^2 \leq \frac{1}{16M^2} \cdot \|X\|_4^4 \leq \frac{3}{16M^2}$$

gracias a una formulación básica de la desigualdad de Khinchin.

Teniendo esto presente podemos completar la demostración. Si $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ pertenecen a B_H, entonces por $(*)$ y por $(**)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{i,j} a_{ij}(x_i|y_j)\Big| &= \Big|\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} X_i(t) Y_j(t) dt\Big| \\
&\leq \Big|\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} X_i^L(t) Y_j^L(t) dt\Big| + \Big|\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} X_i^U(t) Y_j^L(t) dt\Big| \\
&\quad + \Big|\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} X_i(t) X_i(t) Y_j^U(t) dt\Big| \\
&\leq M^2 \cdot \|a\| + \frac{\sqrt{3}}{4M} \cdot \Big|\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \left(\frac{X_i^U(t) Y_j^L(t)}{\|X_i^U\|_2} + \frac{X_i(t) Y_j^U(t)}{\|Y_j^U\|_2} \right) dt\Big| \\
&\leq M^2 \cdot \|a\| + \frac{\sqrt{3}}{2M} \cdot |||a|||
\end{aligned}$$

Hemos visto que para cada $M > 0$, $|||a||| \leq M^2 \cdot \|a\| + \frac{\sqrt{3}}{2M} \cdot |||a|||$, luego operando tenemos

$$|||a||| - \frac{\sqrt{3}}{2M} \cdot |||a||| \leq M^2 \cdot \|a\| \to |||a||| \cdot \left(\frac{2M - \sqrt{3}}{2M} \right) \leq M^2 \cdot \|a\|$$

para finalmente quedarnos con

$$|||a||| \leq \frac{2M^3}{2M - \sqrt{3}} \cdot \|a\|$$

siempre que $M > \sqrt{3}/2$. Optimizamos el segundo miembro de esta desigualdad para ver cual es la mejor elección de M, para lo cual podemos obviar el término $\|a\|$ porque no influye

$$\left(\frac{2M^3}{2M-\sqrt{3}}\right)' = 0 \Leftrightarrow 2M^2 \cdot (4M - 3\sqrt{3}) = 0$$

luego la mejor elección para M es $3 \cdot \sqrt{3}/4$. Al sustituir este valor en la desigualdad anterior, obtenemos

$$|||a||| \leq \frac{81}{16} \cdot \|a\|.$$

2.5 Teorema de Grothendieck

A continuación vamos a presentar un teorema de gran transcendencia, cuyo enunciado puede parecer simple, pero sin embargo representa un resultado muy profundo.

Teorema 2.8 (Teorema de Gothendieck). *Cualquier operador lineal y continuo $u : \ell^1 \to \ell^2$ es absolutamente sumante.*

Demostración. Sin perder de vista la desigualdad que precede a este teorema, procedemos a su prueba, que veremos para $\|u\| \leq 1$ y restringido al caso real, ya que sabemos que no hay pérdida de generalidad.

Sea (x_n) una serie incondicionalmente convergente en ℓ^1. Como (x_n) es convergente por signos, $\sum_n \varepsilon_n x_n$ converge en ℓ^1 a cualquier sucesión de signos ε, y tenemos

$$\Big\| \sum_n \varepsilon_n x_n \Big\| \leq \sup_{x^* \in B_{\ell^\infty}} \sum_n |\langle x^*, x_n \rangle| = \|v\|$$

donde v es el operador de $\ell^\infty = (\ell^1)^*$ en ℓ^1 del que se hace referencia en el *Teorema Omnibus.*

Necesitamos probar que $\sum_n \|ux_n\|_2 < \infty$. El primer paso es reducir a dimensión finita para poder aplicar la desigualdad de Grothendieck.

Dados $m \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$, escogemos $n \geq m$ y los vectores $y_1, \ldots, y_n$ en $\ell_1^n \subset \ell^1$ tal que $\|x_i - y_i\| \leq \delta/2^i$ para $1 \leq i \leq m$. Si n resulta ser estrictamente mayor que m, consideramos $y_{m+1} = \cdots = y_n = 0$. Para cada i, escribimos $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$ para la expansión de y_i con respecto a las coordenadas de los vectores unitarios en ℓ_1^n. Esto nos proporciona una matriz $a = (a_{ij})$ para usarla en la desigualdad de Grothendieck.

En primer lugar pensamos en términos de convergencia absoluta:

$$\sum_{i=1}^{n} \|uy_i\|_2 = \sum_{i=1}^{n} \Big\| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} ue_j \Big\|_2 = \sum_{i,j} a_{ij}(z_i|ue_j)$$

para unos $z_1, \dots, z_n \in B_{\ell_2^n}$. Observemos que es adecuado para introducirlo en el lado izquierdo de la desigualdad de Grothendieck.

Ahora pensamos en convergencia incondicional, interpretado como convergencia por signos. Dados $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$,

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i y_i \Big\|_1 &= \Big\| \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i \Big) e_j \Big\|_1 = \sum_j \Big| \sum_i a_{ij}\varepsilon_i \Big| \\ &= \text{máx} \Big\{ \Big| \sum_{i,j} a_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j' \Big| \, : \, \varepsilon_j' = \pm 1 \Big\}. \end{aligned}$$

Esto está bien definido para introducirlo en la parte derecha de la desigualdad de Grothendieck.

Como todo esto está en función de los y_i tenemos que modificarlo para volver a la notación en función de los x_i.

$$\begin{aligned} &\sum_{i\le n} \|ux_i\|_2 \le \sum_{i\le n} \|uy_i\|_2 + \delta \le \|\!|a|\!\| + \delta \le \kappa_G \cdot \|a\| + \delta \\ &= \kappa_G \cdot \text{máx} \Big\{ \Big\| \sum_{i\le n} \varepsilon_i y_i \Big\|_1 \, : \, \varepsilon_i = \pm 1 \Big\} + \delta \\ &\le \kappa_G \cdot \text{máx} \Big\{ \Big\| \sum_{i\le n} \varepsilon_i x_i \Big\|_1 \, : \, \varepsilon_i = \pm 1 \Big\} + (1+\kappa_G)\cdot\delta \le \kappa_G \cdot \|v\| + (1+\kappa_G)\cdot\delta. \end{aligned}$$

Basta con tomar límites para completar la prueba.

∎

Como vemos, la elección de δ no tiene relevancia en la prueba tal y como la hemos desarrollado. Sin embargo, podemos hacer tender δ a 0, y obtenemos

$$\sum \|ux_i\|_2 \le \kappa_G \cdot \|u\| \cdot \sup_{\varepsilon_i = \pm} \Big\| \sum \varepsilon_i x_i \Big\|_1$$

para cualquier elección de (x_i) en ℓ^1. Luego haciendo tender δ a 0^+ se deduce que u es un operador lineal y continuo con norma menor o igual que $\kappa_G \|v\|$, en otras palabras, u lleva series incondicionalmente convergentes en ℓ^1 en series absolutamente convergentes en ℓ^2.

Para terminar esta sección, vamos a añadir como corolario una versión del *teorema de Grothendieck* para dimensión finita.

Corolario 2.1. Sean n y N enteros positivos, y sea $u : \ell_1^n \to \ell_2^n$ un operador cualquiera. Entonces, para cualquier elección de $x_1, \dots, x_m \in \ell_1^n$,

$$\sum_{i=1}^{m} \|ux_i\|_{\ell_2^N} \leq \kappa_G \cdot \|u\| \cdot \sup_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i x_i \right\|_{\ell_1^n}.$$

Para obtener esta desigualdad de la desigualdad de Grothendieck, basta simplemente con incrustar ℓ_1^n y ℓ_2^n de la forma más natural en ℓ^1 y ℓ^2, respectivamente.

El *teorema de Grothendieck* nos aporta razones suficientes para creer en lo visto en el teorema 2.7, es decir, ningún subspacio H de $L^1[0,1]$ que es isomorfo a ℓ^2 puede ser complementado en $L^1[0,1]$. Todo lo que se necesita es una ligera extensión del *teorema de Grothendieck*: cualquier operador $L^1(\mu) \to \ell^2$ es absolutamente sumante. También tendríamos que si H se complementase en $L^1[0,1]$, se tendría que la identidad de ℓ^2 sería absolutamente sumante. Esta última afirmación solo la ponemos a nivel de interés, ya que se escapa del estudio de este trabajo.

3 | Operadores en espacios de Hilbert y operadores p-sumantes

En este último capítulo, trabajaremos con espacios de Hilbert y estableceremos algunos resultados importantes a través del estudio de los operadores compactos. Para ello, primero estableceremos la nomenclatura que vamos a utilizar en esta parte del trabajo, recordaremos algunos resultados y aclararemos algunos conceptos que se utilizarán en las próximas líneas.

A partir de ahora, $H_1, H_2, \dots$ harán siempre referencia a espacios de Hilbert y utilizaremos la notación $(\cdot|\cdot)$ para el producto escalar. Además, cuando un operador u actúe entre espacios de Hilbert, u^* no denotará solamente al adjunto de espacios de Banach , sino que también al adjunto de espacios de Hilbert , luego $(ux|y) = (x|u^*y)$. Para evitar confusiones, haremos unos comentarios que aclaren la afirmación anterior, y así podamos alejar cualquier duda al respecto.

Tenemos por la teoría de los espacios de Hilbert que si H es un espacio de Hilbert, entonces también lo es H^*. Es más, podemos identificar H con H^* mediante una conjugación lineal isométricamente sobreyectiva j que envía $x \in H$ al funcional $(\cdot|x) \in H^*$. Ahora, si H_1 y H_2 son espacios de Hilbert y $u : H_1 \to H_2$ es un operador lineal acotado, entonces, el espacio de Hilbert adjunto $H_2 \to H_1$ de u se puede obtener del espacio de Banach adjunto $u^* : H_2^* \to H_1^*$ directamente: es simplemente $j_1^{-1} \circ u^* \circ j_2$ donde $j_k : H_k \to H_k^*$. Se observa con facilidad que las propiedades más significativas que posee uno de los adjuntos las tiene el otro, como por ejemplo, ser compacto o p-sumante, son propiedades que no puede tener uno sin que lo tenga el otro. Por esto, y algunas más razones, en este capítulo no haremos distinciones entre estos dos adjuntos.

3.1 Operadores compactos entre espacios de Hilbert

Los operadores compactos entre espacios de Hilbert admiten una representación particular involucrando sucesiones ortonormales, este resultado es conocido como *teorema espectral para operadores compactos.*

Teorema 3.1 (Teorema espectral para operadores compactos). *Un operador $u : H_1 \to H_2$ es compacto si y solo si tiene una representación de la forma*

$$u = \sum_n \tau_n(\cdot|e_n)f_n, \tag{3.1}$$

donde (e_n) es una sucesión ortonormal en H_1, (f_n) es una sucesión ortonormal en H_2 y (τ_n) es una sucesión de escalares que converge a cero.

Si u es un operador de rango finito, (3.1) es una suma finita. En caso contrario, (3.1) representa una serie que converge con respecto al operador norma $\|\cdot\|$ de $\mathcal{L}(H_1, H_2)$. A partir de ahora, consideraremos las sucesiones finitas como sucesiones de longitud infinita añadiendo ceros.

Nos referiremos a (3.1) como una representación ortonormal del operador compacto u. Tengamos en cuenta que (3.1) da lugar a la representación ortonormal $u^* = \sum_n \tau_n(\cdot|f_n)e_n$ del espacio de Hilbert adjunto de u.

La demostración del *teorema espectral* se obtiene por inducción, usando el siguiente lema.

Lema 3.1. Sea $u : H_1 \to H_2$ un operador compacto. Entonces existe un vector unitario $x_0 \in H_1$ tal que $u^*ux_0 = \|u\|^2x_0$.

En otras palabras, el operador u^*u tiene como valor propio $\|u\|^2$.

Demostración. Asumimos $u \neq 0$. Como u es compacto, podemos encontrar una sucesión $(x_n)_n$ en B_{H_1} tal que (ux_n) converge a algún z_0 en H y tal que $(\|ux_n\|)_n$ converge a $\|u\|$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\begin{aligned}\|u^*ux_n - \|u\|^2 \cdot x_n\|^2 &= \|u^*ux_n\|^2 - 2 \cdot \|u\|^2 \cdot \|ux_n\|^2 + \|u\|^4 \cdot \|x_n\|^2 \\ &\leq \|u\|^4 - \|u\|^2 \cdot \|ux_n\|^2,\end{aligned}$$

y por tanto, $\text{lím}_n(u^*ux_n - \|u\|^2x_n) = 0$. De esto se sigue que $(x_n)_n$ converge a $x_0 := \|u\|^{-2} \cdot u^*(z_0)$. Este límite es el vector que estamos buscando. Claramente, $\|x_0\| \leq 1$, y además

$$u^*ux_0 = \lim_{n\to\infty} u^*ux_n = \|u\|^2 \cdot x_0.$$

Así,

$$\|u\| = \lim_{n\to\infty} \|ux_n\| = \|ux_0\| \leq \|u\| \cdot \|x_0\|,$$

con lo que vemos que $\|x_0\| = 1$, y con esto concluimos la prueba. ∎

Antes de continuar, haremos un comentario que nos será muy útil para demostrar el teorema con el que hemos iniciado el capítulo.

Observamos que, para conseguir el propósito del teorema, bastaría con trabajar con los operadores biyectivos entre espacios de Hilbert separables. Para entender el porqué, consideramos $u : H_1 \to H_2$ cualquier operador compacto, $K := u^{-1}(0)$ su núcleo, y $R := \overline{u(H_1)}$ la clausura de su rango. De forma natural, u induce un operador $u_0 : K^\perp \to R$ que claramente es inyectivo con rango denso, al igual que su adjunto $u_0^* : R \to K^\perp$. Remarcamos que u_0 y u_0^*, al igual que u, son compactos y como un espacio métrico compacto es separable, podemos ver que R y $K^\perp$ son separables. Más aún, si $p : H_1 \to K^\perp$ es la proyección ortogonal canónica y $j : R \to H_2$ es la incrustación natural, con la factorización $u : H_1 \xrightarrow{p} K^\perp \xrightarrow{u_0} R \xrightarrow{j} H_2$ ya tenemos todos los argumentos para reducir la prueba a lo anunciado al principio del párrafo.

Demostración (del teorema espectral). Si u tiene una representación (3.1), entonces es aproximable por operadores de rango finito $\sum_{n=1}^m \tau_n(\cdot|e_n)f_n$ luego es compacto.

Ahora asumimos que u es compacto. Claramente podemos asumir que $u \neq 0$ y, por el procedimiento anterior, podemos tomar H_1 separable y u inyectivo. Si (e_n) es una base ortonormal de H_1, entonces $ux = \sum_n (x|e_n)ue_n$ para cada $x \in H_1$. Como u es inyectivo, $ue_n \neq 0$ para toda n, y entonces

$$ux = \sum_n \|ue_n\| \cdot (x|e_n) \cdot \frac{ue_n}{\|ue_n\|}.$$

Destacamos que (e_n) es débilmente nulo y que u, siendo compacto, es completamente continuo. Se sigue que $\lim_n \|ue_n\| = 0$. En consecuencia, si escogemos las bases (e_n) de tal forma que (ue_n) es una sucesión ortogonal en H_2, entonces podemos establecer $f_n = ue_n/\|ue_n\|$ y $\tau_n = \|ue_n\|$ para cada n para llegar a nuestra conclusión. De hecho, podemos mejorar lo anterior y organizar a (τ_n) para que sea una sucesión decreciente.

Haremos la construcción de los (e_n) adecuados de forma recursiva. Para empezar, asumimos que H_1 tiene dimensión finita, que estableceremos como N. Por el lema anterior, sabemos que existe un vector unitario $e_1 \in H_1$ con

$$u^*ue_k = \|ue_k\|^2 e_k \quad \text{para cada} \quad 1 \leq k \leq n, \tag{3.2}$$

siendo $u_0 := u$ y $u_k := u_{|_{\{e_1,\dots,e_k\}^\perp}}$ $(1 \leq k \leq n)$ y

$$\|u_k\| = \|ue_{k+1}\| \quad \text{para cada} \quad 1 \leq k \leq n-1. \tag{3.3}$$

Se tiene que (3.3) implica que $\|ue_1\| \geq \|ue_2\| \geq \cdots \geq \|ue_n\|$.

Observamos que u_n envía $\{e_1,\dots,e_n\} \neq \{0\}$ en $\{ue_1,\dots,ue_n\}^\perp$, y si x pertenece a $\{ue_1,\dots,ue_n\}^\perp$ y $1 \leq k \leq n$, entonces $(ux|ue_k) = (x|u^*ue_k) = \|ue_k\|^2(x|e_k) = 0$. Como u es un operador compacto, podemos aplicar el lema de nuevo para crear un vector unitario $e_{n+1} \in \{ue_1,\dots,ue_n\}^\perp$ que satisfaga $u_n^*u_ne_{n+1} = \|u_n\|^2e_{n+1}$ y entonces $\|ue_{n+1}\| = \|u_n\| \leq \|u_{n-1}\| = \|ue_n\|$.

De esta forma, podemos construir unas bases ortonormales $e_1,\dots,e_N$ para H_1 con $\|ue_1\| \geq \cdots \geq \|ue_N\|$. Además, si $(ue_k|ue_m) = (u^*ue_k|e_m) = \|ue_k\|^2(e_k|e_m)$ para todo $1 \leq k,m \leq n$, entonces los vectores $ue_1,\dots,ue_N$ son ortogonales en H_2.

Con esto se completa la prueba en el caso en el que H_1 tiene dimensión finita. Si H_1 tiene dimensión infinita, también podemos aplicar el proceso recursivo que hemos descrito anteriormente, llegando a una sucesión ortonormal infinita (e_n) tal que (ue_n) es una sucesión ortogonal y $(\|ue_n\|)$ es una sucesión nula decreciente. Solo nos falta comprobar que (e_n) es una base ortonormal para H_1.

Si no lo fuera, podríamos utilizar los argumentos anteriores para aplicar el lema una vez más a $\tilde{u} := u_{|_{\{e_n : n\in\mathbb{N}\}^\perp}} : \{e_n : n \in \mathbb{N}\}^\perp \to \{ue_n : n \in \mathbb{N}\}^\perp$, operador compacto que no es idénticamente cero. Pero entonces $0 < \|\tilde{u} \leq \|u_n\| = \|ue_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto impide que $(\|ue_n\|)$ sea una sucesión nula, lo cual es una contradicción. ∎

La prueba anterior muestra que cualquier operador compacto $u : H_1 \to H_2$ admite una representación ortonormal

$$u = \sum_n \tau_n(\cdot|e_n)f_n$$

donde los τ_n satisfacen

$$0 \leq \tau_{n+1} \leq \tau_n \tag{3.4}$$

para cualquiera de los índices posibles.

Nuestro próximo objetivo será mostrar que, con esta condición extra, los números τ_n están únicamente determinados por u. Para ver porqué, tendremos que introducir para un operador arbitrario $u : H_1 \to H_2$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, el n-ésimo *número de aproximación* (en algunos casos también es llamado *valor singular*)

$$a_n(u) := \operatorname{ínf}\{\|v - u\| : v \in \mathcal{L}(H_1, H_2), \dim v(H_1) < n\}.$$

Geométricamente, $a_n(u)$ es simplemente la distancia de los operadores u de rango menor que n.

Lema 3.2. Sea el operador compacto $u : H_1 \to H_2$ representado como (3.1) con los τ_n satisfaciendo (3.4). Entonces

$$\tau_n = a_n(u)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Para empezar, fijamos $n \in \mathbb{N}$. Como $v := \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k(\cdot|e_k)f_k \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ tiene rango menor que n,

$$\begin{aligned} a_n(u) \le \|u - v\| &= \sup\left\{ \left\| \sum_{k \ge n} \tau_k (x|e_k) f_k \right\| : x \in B_{H_1} \right\} \\ &= \sup\left\{ \left(\sum_{k \ge n} \tau_k |(x|e_k)|^2 \right)^{1/2} : x \in B_{H_1} \right\} \le \tau_n. \end{aligned}$$

Para probar la desigualdad contraria, tomamos un operador cualquiera $v \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ de rango menor que n, y consideramos $x_0 = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ un vector unitario en el núcleo de v. Como $ux_0 = \sum_{k=1}^{n} \tau_k \xi_k f_k$ tenemos, gracias a nuestra hipótesis,

$$\|u - v\| \ge \|ux_0 - vx_0\| = \|ux_0\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \tau_k^2 |\xi_k|^2 \right)^{1/2} \ge \tau_n.$$

De esto se sigue que $a_n(u) \ge \tau_n$. ∎

3.2 Clases de Schatten-von Neumann

Una vez introducidos en los operadores en espacios de Hilbert, daremos un paso más hacia delante para conocer las *clases de Schatten-von Neumann*, para $1 \le p < \infty$, centrándonos al final del capítulo en los casos particulares $p = 1$, que llamaremos *operadores nucleares* y $p = 2$, los operadores conocidos como *operadores de Hilbert-Schmidt*. Empezaremos dando una definición formal sobre las ya mencionadas clases de Schatten-von Neumann, para posteriormente trabajar con ellas y establecer algunas de sus características más significativas.

Definición 3.1 (Clases de Schatten-von Neumann). *Para todo $1 \leq p < \infty$, la p-ésima clase de Schatten-von Neumann, $\mathcal{S}_p(H_1, H_2)$, consiste en todos los operadores compactos $u : H_1 \to H_2$ que admiten una representación ortonormal* (3.1) *con* $(\tau_n) \in \ell^p$.

Con esto se tiene que si alguna representación ortonormal tiene esta propiedad, entonces cualquier representación ortonormal la tiene, y de hecho

$$\sigma_p(u) := \left(\sum_n |\tau_n|^p \right)^{1/p}$$

no depende de la representación específica. En particular,

$$\sigma_p(u) = \left(\sum_n a_n(u)^p \right)^{1/p}.$$

Tengamos en cuenta que $\sigma_p\big((\cdot|x)y\big) = \|x\| \cdot \|y\|$ para todo $x \in H_1$ y todo $y \in H_2$.

Aunque no lo probaremos, se tiene que $[\mathcal{S}_p(H_1, H_2), \sigma_p]$ es un espacio de Banach.

A continuación, veremos una proposición que engloba una serie de consecuencias inmediatas de la definición anterior.

Proposición 3.1.
1. Para cada $1 \leq p \leq \infty$, los operadores de rango finito forman un subespacio vectorial denso de $[\mathcal{S}(H_1, H_2), \sigma_p]$.
2. Si $1 \leq p < q \leq \infty$, $\mathcal{S}_p(H_1, H_2)$ es un subespacio vectorial denso de $[\mathcal{S}_q(H_1, H_2), \sigma_q]$, y $\sigma_q(u) \leq \sigma_p(u)$ para todo $u \in \mathcal{S}_p(H_1, H_2)$.
3. Consideramos $1 \leq p \leq \infty$ y $u \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Entonces, $u \in \mathcal{S}_p(H_1, H_2)$ si y solo si $u^* \in \mathcal{S}_p(H_2, H_1)$, y en ese caso, $\sigma_p(u) = \sigma_p(u^*)$.
4. Sea $1 \leq p \leq \infty$ y sean $w : H_0 \to H_1$, $v : H_1 \to H_2$ y $u : H_2 \to H_3$ operadores en espacios de Hilbert. Si v pertenece a $\mathcal{S}_p(H_1, H_2)$, entonces uvw pertenece a $\mathcal{S}_p(H_0, H_3)$, y $\sigma_p(uvw) \leq \|u\| \cdot \sigma_p(v) \cdot \|w\|$.

Ahora, vamos a ver un teorema muy útil que nos servirá como criterio para identificar a aquellos operadores que pertenecen a las clases de Schatten von-Neumann.

Teorema 3.2. *1. Un operador $u : H_1 \to H_2$ es compacto si y solo si no importa como escojamos sucesiones ortonormales (e_n) en H_1 y (f_n) en H_2, la sucesión $\big((ue_n|f_n)\big)_n$ pertenece a c_0.*

2. Sea $1 \leq p < \infty$. Un operador $u : H_1 \to H_2$ pertenece a $S_p(H_1, H_2)$ si y solo si la sucesión $\big((ue_n|f_n)\big)_n$ pertenece a l_p sin importar como escojamos las sucesiones ortonormales (e_n) en H_1 y (f_n) en H_2.

Demostración. Para evitar trivialidades asumiremos $u \neq 0$.

1. En primer lugar supondremos que u es compacto y que tenemos (e_n) en H_1 y (f_n) en H_2 sucesiones ortonormales. Como (e_n) es una sucesión débilmente nula y los operadores compactos son completamente continuos, $\text{lím}_n \|ue_n\| = 0$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que $\text{lím}_n (ue_n|f_n) = 0$.
   Para probar lo contrario veremos que para cualquier $0 < \varepsilon < \|u\|$ existe un operador de rango finito $v : H_1 \to H_2$ tal que $\|u - v\| \leq \varepsilon$.
   Hagamos una observación. Sea $u \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ un operador cualquiera (no nulo), y sea $0 < \varepsilon < \|u\|$. Entonces, existen vectores unitarios $x \in H_1$ e $y \in H_2$, tales que $|(ux|y)| > \varepsilon$. En consecuencia, la colección Φ de todos los pares $\big((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\big)$ de familias ortonormales $(x_i)_{i\in I}$ en H_1 e $(y_i)_{i\in I}$ en H_2 que satisfacen $|(ux_i|y_i)| > \varepsilon$ para todo $i \in I$ es no vacío. Ordenamos parcialmente Φ escribiendo
   $$\big((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\big) \leq \big((x'_j)_{j\in J}, (y'_j)_{j\in J}\big)$$
   cuando $I \subset J$ y $x_i = x'_i$ e $y_i = y'_i$ para cada $i \in I$. Podemos ver con facilidad que el lema de Zorn nos da el máximo de Φ, que nombraremos $\big((e_i)_{i\in I_\varepsilon}, (f_i)_{i\in I_\varepsilon}\big)$.
   Si u satisface la condición de convergencia de (1), entonces I_ε tiene que ser finito, $I_\varepsilon = \{1, \dots, N\}$. Definimos las proyecciones ortogonales $p = \sum_{i=1}^{N} (\cdot|e_i)e_i \in \mathcal{L}(H_1)$ y $q = \sum_{i=1}^{N} (\cdot|f_i)f_i \in \mathcal{L}(H_2)$, cada una con rango N, luego $v := up + qu - qup$ es un operador de rango finito en (H_1, H_2). Con esto podemos afirmar que $\|u - v\| \leq \varepsilon$.
   Asumimos por el contrario que $\|u - v\| > \varepsilon$. Entonces existen vectores unitarios $x \in H_1$ e $y \in H_2$ tales que $|((u - v)x|y)| > \varepsilon$. Establecemos $e_0 := x - px$ y $f_0 := y - qy$ y observamos que $e_0 \in \{e_i : i \in I_\varepsilon\}^\perp$ y $f_0 \in \{f_i : i \in I_\varepsilon\}^\perp$. Ambos tienen norma menor o igual que uno. Como $(id_{H_2} - q)u(id_{H_1 - p}) = u - v$,
   $$\begin{aligned}|(ue_0|f_0)| &= |(u(id_{H_1} - p)x|(id_{H_2} - q)y)| = |((id_{H_2} - q)u(id_{H_1} - p)x|y)| \\ &= |((u - v)x|y)| > \varepsilon \leq \varepsilon \cdot \|e_0\| \cdot \|f_0\|.\end{aligned}$$
   Así, tenemos que e_0 y f_0 son vectores no nulos, y como
   $$\big(u(e_0/\|e_0\|)|f_0/\|f_0\|\big) > \varepsilon,$$

el problema se resuelve con la maximalidad de I_ε.

2. Supongamos que $1 \leq p < \infty$ y $u : H_1 \to H_2$ un operador tal que independientemente de las sucesiones ortonormales (e_n) en H_1 y (f_n) en H_2, la sucesión $(ue_n|f_n)$ pertenece a l_p. Por el primer apartado sabemos que u tiene que ser compacto, y por lo tanto admite una representación ortonormal $u = \sum_n \tau_n(\cdot|x_n)y_n$. Tendremos en cuenta que $\tau_n = (ux_n|y_n)$ para cada n, para ver que nuestra hipótesis establece $(\tau_n) \in \ell_p$ y concluir con que u pertenece a $S_p(H_1, H_2)$.
En cambio, si u pertenece a $S_p(H_1, H_2)$ y si $u = \sum_m \tau_m(\cdot|x_m)y_m$ es una representación ortonormal con $\tau_m \geq 0$ para cada m, entonces para cualquier sucesión (e_n) en H_1 y cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_m \tau_m|(e_n|x_m)|^2 = \sum_m \tau_m|(e_n|x_m)|^{2/p}|(e_n|x_m)|^{2/p^*}$$
$$\leq \left(\sum_m \tau_m^p|(e_n|x_m)|^2\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_m |(e_n|x_m)|^2\right)^{1/p^*} \leq \left(\sum_m \tau_m^p|(e_n|x_m)|^2\right)^{1/p}.$$

De forma similar, para cualquier sucesión ortonormal (f_n) en H_2 y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_m \tau_m|(y_m|f_n)|^2 \leq \left(\sum_m \tau_m^p|(y_m|f_n)|^2\right)^{1/p}.$$

Realmente, tal y como está escrito, este argumento cubre el caso $1 < p < \infty$. El caso que falta, $p = 1$, no requiere ningún argumento. Así, para todo n,

$$|(ue_n|f_n)| \leq \sum_m \tau_m^{1/2}|(e_n|x_m)|\tau_m^{1/2}|(y_m|f_n)|$$
$$\leq \left(\sum_m \tau_m|(e_n|x_m)|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_m \tau_m|(y_m|f_n)|^2\right)^{1/2},$$

y con esto, finalmente llegamos a

$$\sum_n |(ue_n|f_n)|^p \leq \sum_n \left(\sum_m \tau_m^p|(e_n|x_m)|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_m \tau_m^p|(y_m|f_n)|^2\right)^{1/2}$$
$$\leq \left(\sum_{m,n} \tau_m^p|(e_n|x_m)|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{m,n} \tau_m^p|(y_m|f_n)|^2\right)^{1/2} \leq \sum_m \tau_m^p.$$

Como queríamos demostrar.

Una vez visto este criterio que nos permite identificar los miembros de $S_p(H_1, H_2)$, vamos a establecer un teorema para poder estimar $\sigma_p(u)$.

Teorema 3.3. *Sea $u \in \mathcal{L}$ y sea $(g_i)_{i\in I}$ una base ortonormal de H_1.*

1. *Si $1 \leq p \leq 2$ y $\left(\|ug_i\|\right)_{i\in I} \in \ell_p^I$, entonces $u \in S_p(H_1, H_2)$ y*

$$\sigma_p(u) \leq \left(\sum_{i\in I} \|ug_i\|^p\right)^{1/p}.$$

2. *Si $2 \leq p < \infty$ y $u \in S_p(H_1, H_2)$, entonces $\left(\|ug_i\|\right)_{i\in I} \in \ell_p^I$ y*

$$\left(\sum_{i\in I} \|ug_i\|^p\right)^{1/p} \leq \sigma_p(u).$$

Demostración. 1. Empezaremos viendo que nuestras hipótesis implican la compacidad de u. Para conseguirlo, fijamos $\varepsilon > 0$ y buscamos un operador de rango finito $v \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ con $\|u - v\| \leq \varepsilon$.
Escogemos un conjunto finito $J \subset I$ tal que $\left(\sum_{i\in I\setminus J} \|ug_i\|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon$. Entonces, $v := \sum_{i\in J}(\cdot|g_i)ug_i$ es un operador de rango finito en $\mathcal{L}(H_1, H_2)$, y satisface $\|u - v\| \leq \varepsilon$ porque

$$\begin{aligned}\|(u-v)x\| = \|\sum_{i\in I\setminus J}(x|g_i)ug_i\| &\leq \left(\sum_{i\in I}|(x|g_i)|^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{i\in I\setminus J}\|ug_i\|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \|x\|\cdot\left(\sum_{i\in I\setminus J}\|ug_i\|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon\cdot\|x\|.\end{aligned}$$

Como u es compacto, admite una representación ortonormal $u = \sum_n \tau_n(\cdot|e_n)f_n$, donde podemos asumir $\tau_n \geq 0$ para cada n. Para cada $x \in H_1$, tenemos

$$\|ux\|^2 = \sum_n \tau_n^2|(x|e_n)|^2,$$

y, aplicando la desigualdad de Hölder con los índices $2/p$ y $2/(2-p)$,

$$\begin{aligned}\sum_n \tau_n^p &= \sum_n \tau_n^p \sum_{i\in I} |(g_i|e_n)|^2 = \sum_{i\in I}\sum_n \tau_n^p |(g_i|e_n)|^p |(g_i|e_n)|^{2-p} \\ &\leq \sum_{i\in I}\left(\sum_n \tau_n^2 |(g_i|e_n)|^2\right)^{p/2} \cdot \left(\sum_n |(g_i|e_n)|^2\right)^{(2-p)/2} \\ &\leq \sum_{i\in I}\left(\sum_n \tau_n^2 |(g_i|e_n)|^2\right)^{p/2} = \sum_{i\in I} \|ug_i\|^p.\end{aligned}$$

Con esto tenemos que u pertenece a $S_p(H_1,H_2)$, con $\sigma_p(u) \leq \left(\sum_{i\in I}\|ug_i\|^p\right)^{1/p}$.

2. Cogemos cualquier $u \in S_p(H_1,H_2)$, con $2 \leq p < \infty$. Sea $u = \sum_n \tau_n(\cdot|e_n)f_n$ una representación ortonormal cualquiera con $\tau_n \geq 0$ para cada n. Esta vez, aplicamos la desigualdad de Hölder con los índices $p/2$ y $p/(p-2)$ para obtener, para cada $i \in I$,

$$\begin{aligned}\|ug_i\|^2 &= \sum_n \tau_n^2 \cdot |(g_i|e_n)|^{4/p} \cdot |(g_i|e_n)|^{2(p-2)/p} \\ &\leq \left(\sum_n \tau_n^p \cdot |(g_i|e_n)|^2\right)^{2/p} \cdot \left(\sum_n |(g_i|e_n)|^2\right)^{(p-2)/p} \leq \left(\sum_n \tau_n^p \cdot |(g_i|e_n)|^2\right)^{2/p}.\end{aligned}$$

Luego se tiene

$$\sum_n \|ug_i\|^p \leq \sum_{i\in I}\sum_n \tau_n^p \cdot |(g_i|e_n)|^2 = \sum_n \tau_n^2 = \sigma_p(u)^p,$$

y con esto se completa la prueba.

∎

El caso $p = 2$ del teorema anterior es de gran importancia, por lo que lo veremos en forma de corolario.

Corolario 3.1. Un operador $u : H_1 \to H_2$ pertenece a $S_p(H_1,H_2)$ si y solo si existe una base ortonormal $(e_i)_{i\in I}$ en H_1 tal que $\sum_{i\in I}\|ue_i\|^2 < \infty$. En este caso, el valor de $\sum_{i\in I}\|ue_i\|^2$ es independiente de la elección de la base ortonormal $(e_i)_{i\in I}$, de hecho, para cualquier base ortonormal $(e_i)_{i\in I}$ de H_1

$$\sigma_2(u) = \left(\sum_{i\in I}\|ue_i\|^2\right)^{1/2}.$$

3.3 Operadores de Hilbert-Schmidt

Los elementos de $S_2(H_1, H_2)$ son llamados *operadores de Hilbert-Schmidt.* Además, como ya indicamos con anterioridad, tenemos que como $[S_p(H_1, H_2), \sigma_p]$ es un espacio de Banach, también lo es $[S_2(H_1, H_2), \sigma_2]$. De hecho, a continuación veremos una proposición que nos da un resultado más fuerte, pero primero, daremos una definición más explícita de operador de Hilbert-Schmidt.

Definición 3.2 (Operador de Hilbert-Schmidt). *Un operador lineal T en un espacio de Hilbert, H, de dimensión infinita es llamado operador de Hilbert-Schmidt si existen unas bases ortonormales (e_n) en H tales que*

$$\sum_n \|Te_n\|^2 < \infty.$$

Observamos sin dificultad que los operadores de Hilbert-Schmidt son acotados, y que para un operador lineal arbitrario T en H la suma de la definición anterior no depende de la elección particular de las bases ortonormales (e_n).

Proposición 3.2. $[S_2(H_1, H_2), \sigma_2]$ es un espacio de Hilbert.

La norma σ_2 está inducida por el producto interno

$$(u|v) = \sum_{i\in I} (ue_i|ve_i)$$

donde $(e_i)_{i\in I}$ es una base ortonormal de H_1. Por polarización, el hecho de que σ_2 sea independiente de la elección de la base ortonormal se tiene que el producto interno también tiene esta propiedad.

A partir de ahora, nos centraremos en las clases de Hilbert-Schmidt, y nos introduciremos levemente en la teoría de los operadores sumantes. Para ello, veremos primero qué son los *operadores p-sumantes.*

Definición 3.3 (Operadores absolutamente p-sumantes). *Sea F un espacio de Banach, T una transformación lineal en F y $1 \leq p < \infty$. Llamaremos operador absolutamente p-sumante a T si existe una constante $A > 0$ tal que para cualquier subconjunto finito $f_1, f_2, \dots, f_N$ de F,*

$$\sum_{n=1}^{N} \|Tf_n\|^p \leq A \cdot \sup \sum_{n=1}^{N} |\lambda(f_n)|^p,$$

donde el supremo de la derecha de la desigualdad se extiende sobre todo λ en la bola unidad del dual de F. A la menor constante A de la desigualdad anterior se le denota $\pi_p(T)$. Además, nombraremos como $\Pi_p(X,Y)$ al conjunto de todos lo operadores p-sumantes de X en Y.

Como consecuencia inmediata de esta definición tenemos que todo operador absolutamente p-sumante está acotado, con norma $\leq A^{1/p}$, es más, tenemos que todo operador absolutamente p-sumante en un espacio de Banach reflexivo es compacto.

También es importante hacer notar que según la definición anterior, la clase de los operadores absolutamente sumantes del capítulo anterior son precisamente los operadores 1-sumantes.

El siguiente teorema servirá para identificar a los operadores 2-sumantes como operadores de Hilbert-Schmidt, lo cual nos será de gran utilidad, pues si tenemos un operador 2-sumante podremos decir que es de Hilbert-Schmidt y viceversa.

Teorema 3.4. *Un operador $u : H_1 \to H_2$ es de Hilbert-Schmidt si y solo si es 2-sumante. En este caso $\sigma_2(u) = \pi_2(u)$.*

Demostración. Tomamos $u \in \Pi_2(H_2, H_2)$ y cualquier base ortonormal $(e_i)_{i\in I}$ de H_1. Entonces, para cualquier subconjunto finito dado $J \subset I$, tenemos

$$\left(\sum_{i\in J} \|ue_i\|^2\right)^{1/2} \leq \pi_2(u) \cdot \|(e_i)_{i\in J}\|_2^{d\dot{-}bil} = \pi_2(u).$$

Con esta desigualdad ya tenemos que u es un operador de Hilbert-Schmidt y que $\sigma_2(u) \leq \pi_2(u)$.

Por otra parte, tomamos $u \in S_2(H_1, H_2)$ y sea $(x_n) \in \ell_2^{weak}(H_1)$. Definimos $v \in \mathcal{L}(\ell_2, H_1)$ como $ve_n = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, además, tenemos que $\|v\| = \|(x_n)\|_2^{weak}$. Por las propiedades de S_2 sabemos que uv es de Hilbert-Schmidt, y como

$$\left(\sum_n \|ux_n\|^2\right) = \left(\sum_n \|ue_n\|^2\right) = \sigma_2(uv) \leq \sigma_2(u) \cdot \|v\| = \sigma_2(u) \cdot \|(x_n)\|_2^{weak},$$

de donde se sigue que $u \in \Pi_2(H_1, H_2)$ y $\pi_2(u) \leq \sigma_2(u)$. ∎

Como consecuencia de este teorema podemos establecer algunas propiedades de la clase de Hilbert-Schmidt. En primer lugar veremos un corolario que muestra que el rango de un operador en un espacio de Hilbert puede limitarlo a ser de Hilbert-Schmidt.

Corolario 3.2.

1. Supongamos que μ es una medida de probabilidad y que el operador $u : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ tiene su rango dentro de $L_\infty(\mu)$. Entonces u es un operador de Hilbert-Schmidt.
2. Supongamos que el operador $u : \ell_2 \to \ell_2$ tiene su rango dentro de ℓ_1. Entonces u es un operador de Hilbert-Schmidt.

Demostración.

1. Por el *teorema de la gráfica cerrada* podemos afirmar que u, visto como una aplicación en $L_\infty(\mu)$, es un operador lineal acotado. Pero esto es equivalente a decir que u tiene a $i_2 : L_\infty(\mu) \to L_2(\mu)$ como factor. Como sabemos i_2 es 2-sumante, por lo que u es también 2-sumante, y por lo tanto es de Hilbert-Schmidt.
2. Procediendo de forma similar al apartado anterior, podemos llegar a la conclusión de que u tiene a la inclusión natural $\ell_1 \hookrightarrow \ell_2$ como factor, y con esto podemos llegar a la misma conclusión.

3.4 Operadores nucleares y de la clase de la traza

Para concluir este capítulo, veremos brevemente dos subconjuntos de las clases de Schatten-von Neumann, los *operadores nucleares* y los *operadores de la clase de la traza.* También veremos la relación entre ellos y su estructura como operadores p-sumantes.

En las próximas líneas, solo enunciaremos algunos resultados sobre estos dos operadores, sin mostrar sus pruebas, e incluiremos algunos comentarios que suscitan interés.

Empezaremos viendo qué es un operador de la clase de la traza.

Definición 3.4 (Operador de la clase de la traza). *Sea H un espacio de Hilbert. Un operador lineal T en H se dice que pertenece a la clase de la traza si existen sucesiones ortogonales (e_n) y (f_n) en H con $\sum \|e_n\| \cdot \|f_n\| < \infty$, y*

$$Tx = \sum \langle x, e_n \rangle f_n$$

para cada x en H.

Si nos fijamos en esta definición, nos damos cuenta de que tanto los operadores de Hilbert-Schmidt como los de la clase de la traza son subconjuntos propios del conjunto formado por los operadores compactos. A su vez, los operadores de la clase de la traza forman un subconjunto propio de los operadores de Hilbert-Schmidt.

Dicho esto, podemos enunciar un teorema que nos dé unas equivalencias a ser un operador perteneciente a la clase de la traza, que nos mostrará algunas de sus características y nos marcará el camino a seguir para relacionarlo con los operadores nucleares que aún están por definirse.

Teorema 3.5. *Sea T un operador lineal en un espacio de Hilbert H. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T pertenece a la clase de la traza.*
2. *T es la composición de dos operadores de Hilbert-Schmidt.*
3. *Existen unas bases ortonormales (e_n) de H tales que $\sum \|Te_n\| < \infty$.*

Sin hacer más larga la espera, veamos a qué nos referimos cuando hablamos de operadores nucleares.

Definición 3.5 (Operadores nucleares). *Una transformación lineal T en un espacio de Banach F es un operador nuclear si existen sucesiones (f_n) y (λ_n) en F y en el dual de F, respectivamente, tales que*

$$\sum \|\lambda_n\|\|f_n\| < \infty,$$

y para cada f en F,

$$Tf = \sum \lambda_n(f)f_n.$$

Gracias a la primera ecuación de esta definición tenemos que la serie de la segunda ecuación converge uniformemente en la bola unidad de F. Dicho esto, podemos afirmar que cualquier operador nuclear es compacto.

Si nos fijamos en la definición dada de clase de la traza, podemos afirmar que todo operador de la clase de la traza en un espacio de Hilbert es nuclear. De hecho, el recíproco también es cierto, por lo que se puede concluir con que cualquier operador en un espacio de Hilbert es nuclear si y solo si pertenece a la clase de la traza. Esta es la relación de la que hablábamos al comienzo de esta sección.

Para finalizar este trabajo, veremos un teorema que recoge de forma esquemática y a modo de resumen los resultados más importante que se han visto recientemente.

Teorema 3.6.
1. *Para todo $1 \leq p \leq q$, se tiene que todo operador absolutamente p-sumante es absolutamente q-sumante .*

2. *La composición de dos operadores absolutamente p-sumantes es un operador absolutamente $p/2$-sumante.*
3. *La composición de dos operadores absolutamente 2-sumantes es un operador nuclear.*
4. *Todo operador nuclear es absolutamente 1-sumante.*
5. *En un espacio de Hilbert es equivalente ser un operador nuclear y ser un operador de la clase de la traza.*

Bibliografía

[1] Joe Diestel, Hans Jarchow and Andrew Tonge *Absolutely Suming Operators.*
Cambridge studies in advanced mathematics.

[2] J.H. Shapiro & P.D. Taylor *Compact, Nuclear, and Hilbert-Schmidt Composition Operators On H^2.*
Indiana University Mathematics Journal, Vol.23, No.6 (1973).

[3] Joseph Diestel *Sequences and Series in Banach Spaces.*
Springer, New York (1984).

[4] Josefina Álvarez *La convergencia de series en un espacio de Banach.*
Lecturas Matemáticas, Volumen 41 (1)(2020), páginas 21-40.

[5] Miguel Lacruz Martín *Apuntes de Análisis Funcional.*
Universidad de Sevilla, año académico 19/20.