EL TEOREMA DE RADON-NIKODYM Y SUS CONSECUENCIAS

Por Marta Martín Maya

Dirigido por:
D. Guillermo Curbera Costello

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

30 de junio de 2021

Índice general

Resumen

El propósito de este trabajo es dar una prueba del Teorema de Radon-Nikodym, y también presentar algunas de sus consecuencias más importantes. En primer lugar, presentamos algunas propiedades preliminares sobre medidas. Para entender el Teorema de Radon-Nikodym definimos la continuidad absoluta de una medida.

Una vez tenemos las herramientas necesarias, probamos el Teorema de Radon-Nikodym para una medida positiva y finita de dos formas diferentes. Después de esto, extendemos el teorema a otros tipos de medidas y damos algunas consecuencias importantes, como por ejemplo el Teorema de Descomposición de Jordan.

Con el Teorema de Radon-Nikodym somos capaces de probar un resultado muy importante: la identificación isométrica del dual de los espacios L^p para $1 \leq p < \infty$.

Después de presentar la teoría para medidas positivas, reales y complejas, proporcionamos algunas definiciones importantes y resultados sobre medidas vectoriales, y probamos que en este caso el Teorema de Radon-Nikodym no se cumple en general. Finalmente, presentamos alguna condiciones bajo las cuales se cumple el Teorema de Radon Nikodym para medidas vectoriales.

Abstract

The aim of this project is to give a proof of the Radon-Nikodym Theorem; we also present some of its most important consequences. First of all, we present some preliminary properties about measures. In order to understand the Radon-Nikodym Theorem, we define the absolute continuity of a measure.

Once we have all the necessary tools, we prove the Radon-Nikodym Theorem for a positive and finite measure in two different ways. After that, we extend the theorem to differents types of measures and we give some important consequences, like, for example, the Jordan Descomposition Theorem.

With the Radon-Nikodym Theorem we are able to prove a very important result: the isometric identification of the dual of the L^p spaces for $1 \leq p < \infty$.

After presenting the theory for positive, real and complex measures, we provide some important definitions and results for vector measures and we prove that in this case the Radon-Nikodym Theorem does not hold in general. Finally, present some conditions which ensure the validity of the Radon Nikodym Theorem for vector measures.

Introducción

Este trabajo tiene como propósito presentar la prueba del Teorema de Radon-Nikodym desde dos puntos de vista diferentes. Veremos también algunas consecuencias importantes de este resultado y estudiaremos qué ocurre en el caso de una medida vectorial.

El trabajo está estructurado en cinco capítulos. En los cuatro primeros, se desarrollan los conceptos importantes sobre medidas, así como se prueba el resultado principal para el caso de medidas positivas y finitas, que después extenderemos a otros tipos de medida. En el último capítulo, presentamos las medidas vectoriales y vemos que ocurre en ese caso con el Teorema de Radon-Nikodym.

En el primer capítulo se dan algunas nociones básicas sobre medidas. Se comienza enunciando algunas definiciones y resultados previos que serán útiles a lo largo del trabajo. Definimos los conceptos de medida absolutamente continua y variación total de una medida, algo que será crucial para entender el Teorema de Radon-Nikodym. Por último, se estudian tanto la singularidad como la concentración de medidas y algunas propiedades básicas.

En el segundo capítulo se prueba el Teorema de Radon-Nikodym para medidas positivas y finitas desde dos puntos de vista diferentes. En la primera de ellas, usamos herramientas de Teoría de la medida e integración, como se ve en el libro *Measure Theory* (véase [1]). En la segunda, vemos la demostración debida a Von Neumann (véase [4]) que usa el Teorema de Representación de Fréchet-Riesz de identificación de funcionales lineales y continuos sobre un espacio de Hilbert (Teorema 2.2.1).

En el tercer capítulo extendemos el teorema a otros tipos de medidas en los que se sigue cumpliendo (medidas σ-finitas, con signo, complejas ...) Además, vemos algunas primeras consecuencias, como una demostración del Teorema de Hahn (Teorema 3.2.3) diferente a la vista en el capítulo primero, o el Teorema de Descomposición de Jordan (Teorema 3.2.4).

En el cuarto capítulo usamos el Teorema de Radon-Nikodym para probar que el dual del espacio L^p con $1 \leq p < \infty$ se puede identificar de forma isomorfa e isométrica con el espacio L^q, donde q es el exponente conjugado de p. Antes de esto, vemos que el mismo resultado se cumple para los espacios de sucesiones ℓ^p, pero que su prueba es más sencilla ya que no requiere el uso del Teorema de Radon-Nikodym. Para ello, recordamos algunos resultados básicos como la definición de isomorfismo lineal isométrico o la Desigualdad de Hölder en su versión discreta (Proposición 4.1.4) y también en su versión contínua (Proposición 4.2.2).

Por último, en el capítulo cinco comenzamos dando algunos resultados previos y ejemplos sobre medidas vectoriales. Necesitamos además la definición de una nueva integral, la integral de Bochner, que se trata de una abstracción de la integral de Lebesgue al caso de valores vectoriales. Una vez hemos definido esto, vemos que el Teorema de Radon-Nikodym no tiene por qué ser cierto para la integral de Bochner en general, usando para ello algunos ejemplos (Ejemplos 5.3.1 y 5.3.3). A continuación, comprobamos la relación que existe entre el Teorema de Radon-Nikodym y el Teorema de Representación de Riesz para operadores $T\colon L^1(\mu) \to E$, donde E es un espacio de Banach. Además, vemos una pequeña introducción a las bases de Schauder, que nos permite alcanzar el último resultado del trabajo, el Teorema de Dunford, que nos da una condición bajo la que se cumple el Teorema de Radon-Nikodym para una medida vectorial (Teorema 5.6.4).

Capítulo 1

Propiedades de medidas

1.1. Algunos resultados previos

En esta sección veremos algunas propiedades útiles sobre medidas que luego usaremos para la demostración de nuestro teorema principal, el Teorema de Radon-Nikodym.

Definición 1.1.1. Sea X un conjunto no vacío y $\Sigma \subset P(X)$, decimos que Σ es un σ-álgebra sobre X si:

(a) $X \in \Sigma$.

(b) Si $A \in \Sigma$ entonces se tiene $A^c \in \Sigma$.

(c) Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

Se llama espacio medible al par (X, Σ).

Definición 1.1.2. Sea (X, Σ) espacio medible, una medida σ-aditiva o numerablemente aditiva es una aplicación μ definida en el σ-álgebra Σ que cumple:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ con A_n disjuntos, entonces $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

La terna (X, Σ, μ) se llama espacio de medida.

Definición 1.1.3. Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida σ-aditiva en Σ.

(a) Se dice que μ es una medida positiva si toma valores en $[0, \infty]$.

(b) Se dice que μ es una medida signada o con signo, si toma valores en $[-\infty, +\infty]$. Observemos que para cada A medible, la suma $\mu(A) + \mu(A^c)$ debe estar definida y ser igual a $\mu(X)$. Por lo tanto, si hay algún conjunto $A \in \Sigma$ para el que $\mu(A) = +\infty$, entonces $\mu(X) = +\infty$, y si hay algún conjunto $A \in \Sigma$ para el que $\mu(A) = -\infty$ entonces $\mu(X) = -\infty$. Por lo tanto, una medida signada, puede alcanzar como mucho uno de los dos valores $+\infty$ o $-\infty$.

(c) Se dice que μ es una medida real si toma valores en $\mathbb{R}$.

(d) Se dice que μ es una medida compleja si toma valores en $\mathbb{C}$.

(e) Se dice que μ es una medida finita si es una medida positiva y $\mu(X) < \infty$.

(f) Se dice que μ es una medida positiva y σ-finita si existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\mu(A_n) < \infty$ y $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Definición 1.1.4. Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida con signo. Un subconjunto A de X es un conjunto positivo para μ si A medible y cada subconjunto medible $E \subset A$ satisface $\mu(E) \geq 0$. Análogamente, un subconjunto A de X es un conjunto negativo para μ si A medible y cada subconjunto medible $E \subset A$ satisface $\mu(E) \leq 0$.

Lema 1.1.5. *Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida con signo. Sea A un subconjunto de X que cumple $-\infty < \mu(A) < 0$, entonces hay un conjunto medible B que es negativo para μ y tal que $B \subset A$ con $\mu(B) \leq \mu(A)$.*

Demostración. Eliminamos una sucesión adecuada de subconjuntos de A y tomamos B como el conjunto de puntos de A restantes. Para comenzar, sea

$$\delta_1 := \sup\{\mu(E) : E \text{ } medible, \ E \subseteq A\}.$$

Tomamos un subconjunto A_1 medible de A que cumpla que $\mu(A_1) \geq \text{mín}(\frac{1}{2}\delta_1, 1)$. Entonces δ_1 y $\mu(A_1)$ son no negativos (porque $\delta_1 \geq \mu(\emptyset) = 0$). Por inducción , construimos sucesiones $\{\delta_n\}$ y $\{A_n\}$ siendo

$$\delta_n = \sup\left\{\mu(E) : E \in \Sigma, \quad E \subseteq \left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right\},$$

y luego eligiendo A_n en $A \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ que cumpla que $\mu(A_n) \geq \text{mín}(\frac{1}{2}\delta_n, 1)$. Definimos ahora

$$A_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad B = A \setminus A_\infty.$$

Veamos que B tiene las propiedades requeridas. Como A_n son disjuntos y $\mu(A_n) \geq 0$ entonces $\mu(A_\infty) \geq 0$ y por lo tanto

$$\mu(A) = \mu(A_\infty) + \mu(B) \geq \mu(B).$$

Por lo que efectivamente se cumple la desigualdad.

Falta entonces ver la negatividad de B. Como $\mu(A)$ es finito, también lo es $\mu(A_\infty)$ y como $\mu(A_\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ entonces $\lim_n \mu(A_n) = 0$ luego $\lim_n \delta_n = 0$. Entonces por como hemos definido B se tiene que $B \subset (A - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)$ y por eso, como δ_n es el supremo de los $\mu(E)$ tal que $E \subseteq (A - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)$, dado un $E \subset B$ arbitario se tiene que $\mu(E) \leq \delta_n$ y por tanto $\mu(E) \leq 0$ por lo que B es un conjunto negativo para μ como queriamos ver. □

Teorema 1.1.6 (Descomposición de Hahn). *Sea (X, Σ) un espacio medible y sea μ una medida con signo. Entonces hay subconjuntos medibles disjuntos P y N de X tal que P es un conjunto positivo para μ, N es un conjunto negativo para μ y $X = P \cup N$.*

Demostración. Como sabemos que una medida signada solo puede alcanzar el $+\infty$ o el $-\infty$, podemos suponer en este caso que no toma el valor $-\infty$. Definimos

$$L = \inf\{\mu(A) : A \text{ conjunto negativo para } \mu\}. \tag{1.1}$$

Este conjunto es no vacío, porque $\emptyset$ es un conjunto negativo para μ. Tomamos entonces una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos negativos para μ tal que $L = \lim_n \mu(A_n)$ y sea $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Es fácil ver que N es un conjunto negativo para μ, porque cada subconjunto $E \subset N$ es la unión de conjuntos medibles disjuntos E_j, tales que $E_j \subset A_n$ para algún n y por lo tanto $\mu(E) \leq 0$. Entonces, $L \leq \mu(N) \leq \mu(A_n)$ para cada n, luego $L = \mu(N)$. Además, $\mu(N)$ es finito (porque no se alcanza el valor $-\infty$ como hemos supuesto).

Sea $P = N^c$, nuestro objetivo es probar que P es un conjunto positivo para μ. Supongamos que P tiene incluido algún conjunto A medible tal que $\mu(A) < 0$, entonces por el Lema 1.1.5, este incluiría un conjunto negativo B tal que $\mu(B) < 0$ y entonces $N \cup B$ sería un conjunto negativo tal que $\mu(N \cup B) = \mu(N) + \mu(B) < \mu(N) = L$, lo que supone una contradicción con la ecuación (1.1). Por lo tanto P es un conjunto positivo para μ . □

1.2. Continuidad absoluta

En esta sección veremos un concepto importante sobre las medidas, que es la continuidad absoluta de una medida respecto a otra, y estableceremos algunos resultados importantes relacionados con este concepto.

Definición 1.2.1. Sea (X, Σ) un espacio medible y μ, υ medidas positivas. Se dice que υ es absolutamente continua respecto a μ si para cada conjunto A medible con $\mu(A) = 0$ se cumple $\upsilon(A) = 0$. Escribimos $\upsilon \ll \mu$ para indicar que υ es absolutamente continua con respecto a μ.

Una vez dada la definición, veamos algunos resultados.

Proposición 1.2.2. *Sea (X,Σ) un espacio medible y μ una medida positiva. Sea $f\colon X \to [0,+\infty]$ una función medible. Definimos $\upsilon\colon \Sigma \to [0,+\infty]$ como*

$$\upsilon(A) := \int_A f d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

Entonces υ es una medida positiva en Σ. Además, en el caso en el que f sea integrable, la medida υ es finita.

Demostración. Se comprueba directamente que $\upsilon(\emptyset) = 0$.

Sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ medible. Entonces por el Teorema de Beppo Levi obtenemos que:

$$\begin{aligned}\upsilon\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) &= \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f\, d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f\, \chi_{A_n} d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_X f\, \chi_{A_n} d\mu \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_{A_n} f\, d\mu \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon(A_n),\end{aligned}$$

donde hemos usado que como f es medible, también lo es $f\chi_{A_n}$.

Por lo tanto como se cumplen ambas propiedades υ es una medida. Además, como la función f es no negativa, dicha medida $\upsilon(A) = \int_A f\, d\mu$ es positiva. □

Corolario 1.2.3. *Sea (X,Σ) un espacio medible y μ una medida positiva. Sea $f\colon X \to [0,+\infty]$ una función medible. Sea υ definida como en la proposición anterior. Se cumple que si $\mu(A) = 0$ entonces $f\chi_A$ se anula en casi todo, entonces $\upsilon(A) = 0$, por lo que υ es absolutamente continua respecto a μ.*

El siguiente lema caracteriza esas medidas positivas finitas absolutamente continuas respecto a una medida positiva arbitraria.

Lema 1.2.4. *Sea (X,Σ) un espacio medible y sean μ medida positiva, υ medida positiva y finita. Entonces se cumple que $\upsilon \ll \mu$ si y solo si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\text{si } \mu(A) < \delta, \text{ entonces } \upsilon(A) < \varepsilon, \quad A \in \Sigma.$$

Demostración. $\Leftarrow$) Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$ existe un δ correspondiente. Sea A medible con $\mu(A) = 0$. Se tiene que $\mu(A) < \delta$ para cada δ y por tanto $\upsilon(A) < \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$. Por lo que $\upsilon(A) = 0$. Por tanto, υ es absolutamente continua respecto a μ.

$\Rightarrow$) Veremos la demostración por reducción al absurdo. Sea υ absolutamente continua respecto de μ. Supongamos que hay un $\varepsilon > 0$ que fijamos para el que no existe el correspondiente δ. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ elegimos A_k medible que cumple que $\mu(A_k) < 1/2^k$ y $\upsilon(A_k) \geq \varepsilon$. Se tiene que

$$\mu\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) < \frac{1/2^n}{1-1/2} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

y también
$$\upsilon\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) \geq \upsilon(A_n) \geq \varepsilon.$$
Por lo tanto, el conjunto
$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$
es medible y cumple que
$$\mu(A) = \lim_n \mu\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = 0,$$
y
$$\upsilon(A) = \lim_n \upsilon\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n\Big) \geq \varepsilon.$$
Es decir, tenemos que $\mu(A) = 0$ y no se cumple que $\upsilon(A) = 0$ lo que es una contradicción porque υ es absolutamente continua respecto de μ. □

1.3. Variación total

Definición 1.3.1. Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida. Dado E medible la variación total de μ en E es
$$|\mu|(E) = \sup \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(E_j)|,$$
donde el supremo se toma sobre todas las particiones medibles $\{E_j\}$ de E.

Notemos que se cumple que $|\mu|(E) \geq |\mu(E)|$ pero en general no se da la igualdad.

Observación 1.3.2. Esta definición admite medidas reales, complejas, positivas y signadas.

Teorema 1.3.3. *Sea (X, Σ) espacio medible y μ una medida. La variación total $|\mu|$ de μ es una medida positiva.*

Demostración. Sea $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ una partición de E medible. Sean t_i números reales tal que $t_i < |\mu|(E_i)$. Entonces cada E_i tiene una partición $\{A_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ tal que:
$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_{ij})| > t_i \quad (i = 1, 2, 3...).$$

Por lo tanto, $\{A_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ es una partición de E así que se sigue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_i \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} |\mu(A_{ij})| \leq |\mu|(E).$$

Tomando supremo en el lado izquierdo sobre todas las opciones posibles de $\{t_i\}$ vemos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i) \leq |\mu|(E). \tag{1.2}$$

Para probar la desigualdad contraria, sea $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ una partición de E. Para cualquier j fijado se tiene que $\{A_j \cap E_i : i \geq 1\}$ es una partición de A_j, y para cada i fijo, $\{A_j \cap E_i : j \geq 1\}$ es una partición de E_i. Entonces :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| &= \sum_{j=1}^{\infty} \Big| \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_j \cap E_i)) \Big| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(A_j \cap E_i)| \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j \cap E_i)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i).
\end{aligned}$$

Como esto se da para cualquier partición $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ de E se tiene que

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i). \tag{1.3}$$

Entonces por las ecuaciones (1.2) y (1.3) se tiene que $|\mu|$ es numerablemente aditiva.

Por otra parte, $|\mu|(\emptyset) = 0$ y por tanto efectivamente $|\mu|$ es una medida positiva como queríamos. $\square$

Definición 1.3.4. Sea (X, Σ) espacio medible y μ una medida. Sea $|\mu|$ su variación total. Definimos

$$\mu^+ := \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu^- := \frac{1}{2}(|\mu| - \mu).$$

Entonces ambas son medidas positivas en Σ, y se tiene que

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^-. \tag{1.4}$$

Que son medidas positivas se sigue de que $|\mu|(E) \geq |\mu(E)|$.

Definición 1.3.5. Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida. Decimos que μ es acotada si existe $M > 0$ tal que $|\mu(A)| \leq M$ para todo A medible.

Teorema 1.3.6. *Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida compleja, entonces μ es acotada.*

Demostración. Supongamos que la medida μ no es acotada. Entonces se tiene que

$$\sup\{|\mu(A)| : A \in \Sigma\} = \infty,$$

lo que significa que existe A_1 tal que $|\mu(A_1)| \geq 1 + |\mu(X)|$. Por lo tanto

$$|\mu(A_1^c)| = |\mu(X) - \mu(A_1)| \geq |\mu(A_1)| - |\mu(X)| \geq 1.$$

Es decir, tenemos que $|\mu(A_1)|, |\mu(A_1^c)| \geq 1$. Entonces debe ocurrir que

$$\sup_{B \subset A_1} |\mu(B)| = \infty, \text{ o } \quad \sup_{B \subset A_1^c} |\mu(B)| = \infty,$$

pues si no la medida sería acotada, pues para cualquier D medible se tendría

$$|\mu(D)| \leq |\mu(D \cap A_1)| + |\mu(D \cap A_1^c)| \leq \sup_{B \subset A_1} |\mu(B)| + \sup_{B \subset A_1^c} |\mu(B)| < \infty,$$

donde la cota no depende de D.

Escogemos entonces A_1 o A_1^c que denotamos E_1, de forma que cumpla que $|\mu(E_1)| \geq 1$ y también se tenga $\sup_{B \subset E_1^c} |\mu(B)| = \infty$.

Podemos repetir el proceso en E_1^c buscando un $E_2 \subset E_1^c$ con $|\mu(E_2)| \geq 1$ y $\sup_{B \subset E_2^c} |\mu(B)| = \infty$. Así sucesivamente, encontramos una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos dos a dos disjuntos tal que $|\mu(E_n)| \geq 1$ para todo n. Sin embargo, tenemos que

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

que es convergente. Esto implicaría que $\mu(E_n) \to 0$, pero entonces se tendría $|\mu(E_n)| < 1$ para $n \geq n_0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto efectivamente μ es acotada como queríamos. $\square$

Corolario 1.3.7. *Sea (X, Σ) un espacio de medida y μ una medida compleja. Sea $|\mu|$ su variación total. Se cumple que $|\mu|(X) < \infty$.*

Demostración. Procediendo como en la demostración anterior, si suponemos $|\mu|(X) = \infty$, podemos dividir el conjunto X en E_1 y E_1^c de forma que $|\mu(E_1)| > 1$ y $|\mu|(E_1^c) = \infty$. Dividimos de nuevo el conjunto E_1^c en E_2 y E_2^c de manera que $|\mu(E_2)| > 1$ y $|\mu|(E_2^c) = \infty$.

Así sucesivamente, encontramos una sucesión disjunta dos a dos $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $|\mu(E_n)| > 1$ para todo n. De nuevo, tenemos que

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

que es convergente, lo que implica que $\mu(E_n) \to 0$, luego $|\mu(E_n)| < 1$ lo que es una contradicción. Por lo tanto, efectivamente $|\mu|(X) < \infty$. □

1.4. Singularidad y concentración de medidas

Definición 1.4.1. Sea (X, Σ) un espacio de medida y sean μ, υ medidas positivas.

1. Se dice que υ está concentrada en E medible si se cumple

$$\upsilon(A) = \upsilon(A \cap E), \quad A \in \Sigma.$$

   Esto es equivalente a decir que $\upsilon(A) = 0$ si $A \cap E = \emptyset$.

2. Supongamos que existe un par disjunto de conjuntos A y B tal que μ está concentrada en A y υ está concentrada en B. Entonces decimos que μ y υ son mutuamente singulares (y escribimos $\mu \perp \upsilon$).

Veamos ahora un resultado sobre estos conceptos junto con el concepto de continuidad absoluta que vimos al principio del capítulo.

Proposición 1.4.2. *Sea (X, Σ) un espacio de medida y sean υ, λ medidas y μ medida positiva.*

(a) Si υ está concentrada en E entonces también lo está $|\upsilon|$.

(b) Si $\lambda \perp \upsilon$ entonces $|\lambda| \perp |\upsilon|$.

(c) Si $\lambda \perp \mu$ y $\upsilon \perp \mu$ entonces $(\lambda + \upsilon) \perp \mu$.

(d) Si $\lambda \ll \mu$ y $\upsilon \ll \mu$ entonces $\lambda + \upsilon \ll \mu$.

(e) Si $\upsilon \ll \mu$ entonces $|\upsilon| \ll \mu$.

(f) Si $\lambda \ll \mu$ y $\upsilon \perp \mu$ entonces $\lambda \perp \upsilon$.

(g) Si $\upsilon \ll \mu$ y $\upsilon \perp \mu$ entonces $\upsilon = 0$.

Demostración. (a) Si $E \cap A = \emptyset$ y $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una partición de A entonces $\upsilon(A_j) = 0$ para todo j porque υ está concentrada en E. Entonces se tiene que $|\upsilon(A_j)| = 0$, para todo j. Por lo tanto efectivamente $|\upsilon|$ está concentrada en E.

(b) Si $\lambda \perp \upsilon$ entonces λ está concentrada en A y υ está concentrada en B siendo A y B disjuntos, luego por el apartado (a), tenemos que $|\lambda|$ está concentrada en A y que $|\upsilon|$ está concentrada en B con A y B disjuntos. Por lo tanto $|\lambda| \perp |\upsilon|$.

(c) Como $\lambda \perp \mu$, hay conjuntos A_1 y B_1 disjuntos tales que λ está concentrada en A_1 y μ está concentrada en B_1. Además, como $\upsilon \perp \mu$, hay conjuntos A_2 y B_2 disjuntos tales que υ está concentrada en A_2 y μ está concentrada en B_2. Entonces se tiene que $\lambda + \upsilon$ está concentrada en $A = A_1 \cup A_2$ y μ está concentrada en $B = B_1 \cap B_2$ y se cumple que A y B disjuntos. Por lo tanto, $(\lambda + \upsilon) \perp \mu$.

(d) Como $\lambda \ll \mu$ entonces $\lambda(A) = 0$ para todo A medible tal que $\mu(A) = 0$. Como $\upsilon \ll \mu$ entonces $\upsilon(A) = 0$ para todo A medible tal que $\mu(A) = 0$. Si tenemos por tanto A medible con $\mu(A) = 0$ entonces $(\lambda + \upsilon)(A) = \lambda(A) + \upsilon(A) = 0$. Por lo tanto $\lambda + \upsilon \ll \mu$

(e) Supongamos que $\mu(E) = 0$ y $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una partición de E. Entonces $\mu(E_j) = 0$ y como $\upsilon \ll \mu$, $\upsilon(E_j) = 0$ para todo j, asi que se tiene que $\sum_{j=1}^{\infty} |\upsilon(E_j)| = 0$. Por lo tanto, $|\upsilon|(E_j) = 0$, luego $|\upsilon| \ll \mu$.

(f) Como $\upsilon \perp \mu$, hay un conjunto A con $\mu(A) = 0$ (porque μ está concentrada en B con A y B disjuntos) en el que υ está concentrada. Como $\lambda \ll \mu$ entonces $\lambda(E) = 0$ para todo $E \subset A$. Por lo tanto λ está concentrado en el complementario de A y como υ está concentrada en A y son disjuntos, entonces $\lambda \perp \upsilon$.

(g) Por el apartado (f), como $\upsilon \ll \mu$ y $\upsilon \perp \mu$ se tiene que $\upsilon \perp \upsilon$ lo que fuerza necesariamente a que $\upsilon = 0$. $\square$

Capítulo 2

Demostración del Teorema de Radon-Nikodym

En este capítulo presentaremos dos formas diferentes para demostrar el Teorema de Radon-Nikodym

2.1. Primera demostración del Teorema de Radon-Nikodym

Una vez definidos los conceptos del capítulo anterior nos surge una pregunta importante. Si μ y υ son dos medidas finitas tales que υ absolutamente continua respecto de μ, nos preguntamos si existe $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$\upsilon(A) = \int_A g\, d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

La respuesta a esta pregunta es afirmativa y la veremos en el Teorema de Radon-Nikodym. Veamos el enunciado del Teorema así como una primera demostración con herramientas de Teoría de la medida e integración.

Teorema 2.1.1 (Teorema de Radon-Nikodym)**.** *Sea (X, Σ) un espacio medible y sean μ y υ medidas positivas y finitas. Si υ es absolutamente continua respecto a μ, entonces existe una función $g\colon X \to [0, +\infty)$ medible e integrable respecto de μ tal que*

$$\upsilon(A) = \int_A g\, d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

Además dicha g es única en casi todo.

Demostración. Sea $\mathscr{F}$ el conjunto formado por las funciones medibles $f\colon X \to [0,+\infty]$ que cumplen que $\int_A f\,d\mu \leq \upsilon(A)$ para cada A medible. La estrategia que seguiremos será probar que $\mathscr{F}$ contiene una función g tal que

$$\int g\,d\mu = \sup\left\{\int f\,d\mu : f \in \mathscr{F}\right\}, \tag{2.1}$$

y luego veremos que dicha función g cumple que $\upsilon(A) = \int_A g\,d\mu$ para cada A medible. Finalmente observaremos que g puede ser modificada de forma que solo tome valores finitos. Tenemos que $\mathscr{F}$ es no vacío (pues la función constante 0 pertenece a $\mathscr{F}$).

Empecemos comprobando que si f_1 y f_2 pertenecen a $\mathscr{F}$ entonces el supremo de f_1 y f_2, que escribiremos como $f_1 \vee f_2$, está tambien en $\mathscr{F}$. Para verlo notemos que si A es un conjunto arbitrario medible y tenemos $A_1 = \{x \in A : f_1(x) > f_2(x)\}$ y $A_2 = \{x \in A : f_1(x) \leq f_2(x)\}$ entonces:

$$\int_A (f_1 \vee f_2)\,d\mu = \int_{A_1} f_1\,d\mu + \int_{A_2} f_2\,d\mu \leq \upsilon(A_1) + \upsilon(A_2) = \upsilon(A),$$

luego efectivamente $(f_1 \vee f_2) \in \mathscr{F}$.

Tomemos ahora una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de $\mathscr{F}$ para las que:

$$\lim_n \int f_n\,d\mu = \sup\left\{\int f\,d\mu : f \in \mathscr{F}\right\}.$$

Sustituyendo f_n por $f_1 \vee \cdots \vee f_n$, podemos asumir que $\{f_n\}$ es creciente. Sea $g = \lim_n f_n$ y sea A medible, por el Teorema de Convergencia Monótona tenemos que:

$$\int_A g\,d\mu = \lim_n \int_A f_n\,d\mu = \sup\left\{\int_A f\,d\mu : f \in \mathscr{F}\right\} \leq \upsilon(A).$$

Por lo tanto tenemos que $g \in \mathscr{F}$ y que $\int g\,d\mu = \sup\{\int f\,d\mu : f \in \mathscr{F}\}$ como queríamos ver.

Veamos ahora que $\upsilon(A) = \int_A g\,d\mu$ para cada A medible. Como g pertenece a $\mathscr{F}$, la fórmula

$$\upsilon_0(A) = \upsilon(A) - \int_A g\,d\mu,$$

define una medida positiva. Veámoslo. Se comprueba fácilmente que se cumple que $\upsilon_0(\emptyset) = \upsilon(\emptyset) - \int_\emptyset g\,d\mu = 0$.

Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ medibles:

$$\begin{aligned}
\upsilon_0\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) &= \upsilon\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) - \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} g\, d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon(A_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} g\, d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\upsilon(A_n) - \int_{A_n} g\, d\mu\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_0(A_n).
\end{aligned}$$

Nuestro objetivo es ahora probar que $\upsilon_0 = 0$. Veámoslo por reducción al absurdo. Supongamos entonces lo contrario. Como μ es finita, tenemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\upsilon_0(X) > \varepsilon\mu(X). \tag{2.2}$$

Sea (P, N) una descomposición de Hahn (Teorema 1.1.6) para la medida con signo $\upsilon_0 - \varepsilon\mu$. Tenemos que para cada A medible,

$$\upsilon_0(A \cap P) \geq \varepsilon\mu(A \cap P),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\upsilon(A) &= \int_A g\, d\mu + \upsilon_0(A) \\
&\geq \int_A g\, d\mu + \upsilon_0(A \cap P) \\
&\geq \int_A g\, d\mu + \varepsilon\mu(A \cap P) \\
&= \int_A (g + \varepsilon\chi_P) d\mu.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Notemos que $\mu(P) > 0$, porque si no tendría que ser $\mu(P) = 0$ (porque la medida μ es positiva) y tendriamos que $\upsilon_0(P) = 0$ (porque la medida υ es absolutamente continua respecto de μ). Entonces se daría que:

$$\upsilon_0(X) - \varepsilon\mu(X) = (\upsilon_0 - \varepsilon\mu)(N) \leq 0.$$

Lo que contradice la ecuación (2.2). Por lo tanto efectivamente $\mu(P) > 0$.

Se sigue entonces que

$$\int g\, d\mu < \int (g + \varepsilon\chi_P)\, d\mu \leq \upsilon(X) < +\infty.$$

Por la ecuación (2.3) tenemos que $g+\varepsilon\chi_P$ pertenece a $\mathscr{F}$ y cumple $\int(g+\varepsilon\chi_P)\,d\mu > \int g\,d\mu$ lo que contradice la ecuación (2.1) porque $\int g\,d\mu$ es el supremo. Por lo tanto como hemos llegado a contradicción, tenemos $\upsilon_0 = 0$. Así que efectivamente, $\upsilon(A) = \int_A g\,d\mu$ para cada A medible como queriamos ver.

Por último, como g puede tomar valores infinitos en un conjunto de medida μ nula, podemos redefinirla para que tome solamente valores finitos y con esto hemos construido la función requerida para el caso en el que μ y υ sean finitas.

Veamos ahora la unicidad de g. Sean $g, h : X \to [0, +\infty)$ funciones medibles que cumplen

$$\upsilon(A) = \int_A g\,d\mu = \int_A h\,d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

Como υ es finita, $g - h$ es integrable y $\int_A g - h\,d\mu = 0$ para cada A medible. Lo que significa que g y h coinciden en casi todo entonces $g = h$ e.c.t., por lo que queda probada la unicidad de g. $\square$

2.2. Segunda demostración del TRN

En esta ocasión, veremos la demostración del Teorema de Radon-Nikodym debida a von Neumann que usa el teorema de representación de Fréchet-Riesz de identificación de funcionales lineales y continuos sobre un espacio de Hilbert que recordamos a continuación.

Teorema 2.2.1 (de representación de Fréchet-Riesz)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y sea F un funcional lineal continuo en H. Entonces existe un único $y \in H$ tal que*

$$F(x) = \langle x, y\rangle, \quad x \in H.$$

También usaremos el siguiente resultado:

Proposición 2.2.2. *Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida finita. Sea $f \in L^1(\mu)$ y S un conjunto cerrado en el plano complejo tal que*

$$A_E(f) = \frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,d\mu \in S, \quad E \in \Sigma,$$

con $\mu(E) > 0$. Entonces $f(x) \in S$ para casi todo $x \in X$.

Teorema 2.2.3 (Teorema de Radon-Nikodym)**.** *Sea (X, Σ) un espacio medible y sean μ y υ medidas positivas y finitas. Si υ es absolutamente continua respecto a μ, entonces existe una función $g\colon X \to [0, +\infty)$ medible e integrable respecto de μ tal que*

$$\upsilon(A) = \int_A g\,d\mu, \quad A \in \Sigma. \tag{2.4}$$

Además dicha g es única en casi todo.

Demostración. Definiendo

$$\varphi = \upsilon + \mu$$

se tiene que φ es una medida positiva y finita en Σ, y por la definición de suma de dos medidas se tiene que

$$\int_X f\, d\varphi = \int_X f\, d\upsilon + \int_X f\, d\mu \tag{2.5}$$

para $f = \chi_A$ y, por tanto, para f simple ($f = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i}$) y por tanto también para f medible no negativa.

Si $f \in L^2(\varphi)$ entonces $|f|^2 \in L^1(\varphi)$ y por tanto $|f|^2 \in L^1(\upsilon)$. Como υ es finita, se sigue que $f \in L^1(\upsilon)$ y entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\left| \int_X f\, d\upsilon \right| \leq \int_X |f|\, d\upsilon \leq \int_X |f|\, d\varphi \leq \left\{ \int_X |f|^2\, d\varphi \right\}^{1/2} \{\varphi(X)\}^{1/2}.$$

Como se cumple que $\varphi(X) < \infty$, la aplicación

$$f \longmapsto \int_X f\, d\upsilon, \tag{2.6}$$

es un funcional lineal y acotado en $L^2(\varphi)$ (con norma menor o igual a $\varphi(X)^{1/2}$). Tenemos por el Teorema de representación de Fréchet-Riesz, Teorema 2.2.1, que existe $h \in L^2(\varphi)$ tal que

$$\int_X f\, d\upsilon = \int_X fh\, d\varphi, \qquad \text{para toda } f \in L^2(\varphi). \tag{2.7}$$

Observemos que h está definida únicamente como un elemento de $L^2(\varphi)$.

Si ponemos $f = \chi_A$ en la ecuación (2.7), para cualquier A medible con $\varphi(A) > 0$, como se cumple que $0 \leq \upsilon \leq \varphi$, tenemos que:

$$\upsilon(A) = \int_X \chi_A\, d\upsilon = \int_X h\, \chi_A\, d\varphi = \int_A h\, d\varphi,$$

entonces

$$0 \leq \upsilon(A) = \int_A h\, d\varphi \leq \varphi(A).$$

Por lo que llegamos a que

$$0 \leq \frac{1}{\varphi(A)} \int_A h\, d\varphi \leq 1 \tag{2.8}$$

para todo A tal que $\varphi(A) > 0$. Por lo tanto, por la Proposición 2.2.2 podemos afirmar que $h(x) \in [0, 1]$ para casi todo x (con respecto a φ) y podemos asumir ahora que $0 \leq h(x) \leq 1$ para todo $x \in X$ sin afectar a (2.7) y la reescribimos como:

$$\int_X f\, d\upsilon = \int_X fh\, d\varphi = \int_X fh\, d\upsilon + \int_X fh\, d\mu,$$

luego

$$\int_X (1-h)\, f\, d\upsilon = \int_X f\, h\, d\mu. \tag{2.9}$$

Si tomamos entonces

$$E := \{x : 0 \leq h(x) < 1\} \text{ y } B := \{x : h(x) = 1\}, \tag{2.10}$$

como h es acotada, podemos aplicar la ecuación (2.9) para $f = (1 + h + \cdots + h^n)\chi_A$:

$$\begin{aligned}\int_X (1-h)(1 + h + \cdots + h^n)\chi_A\, d\upsilon &= \int_A (1 - h^{n+1})\, d\upsilon \\ &= \int_X h\,(1 + h + \cdots + h^n)\chi_A\, d\mu \\ &= \int_A h\,(1 + h + \cdots + h^n)\, d\mu.\end{aligned} \tag{2.11}$$

En cualquier punto $x \in B$, $h(x) = 1$ así que $1 - h^{n+1}(x) = 0$ y $h(1+h+\cdots+h^n) = n+1$, por lo tanto tenemos

$$0 = \int_{B\cap A} (n+1)\, d\mu,$$

entonces

$$\mu(B \cap A) = 0,$$

por lo que

$$\upsilon(B \cap A) = 0,$$

donde hemos usado que υ es absolutamente continua respecto de μ.

En cualquier punto de E, se tiene $h^{n+1} \to 0$ monótonamente. Por lo tanto el lado izquierdo de (2.11) converge hacia $\upsilon(E \cap A) = \upsilon(A)$ cuando $n \to \infty$. El integrando del lado derecho de (2.11) crece monótonamente a un límite medible no negativo g, y por el Teorema de Convergencia Monótona se tiene que el lado derecho de (2.11) tiende a $\int_A g\, d\mu$. Por lo tanto tenemos que

$$\upsilon(A) = \int_A g\, d\mu, \quad A \in \Sigma,$$

con lo que queda probado el Teorema.

□

Observación 2.2.4. La unicidad se vio en la demostración anterior del teorema. La función g es llamada derivada de Radon-Nikodym de υ respecto de μ. La relación

$$\upsilon(A) = \int_A g\, d\mu, \quad A \in \Sigma,$$

se puede expresar de la forma

$$d\upsilon = g\, d\mu$$

y de la forma
$$g = \frac{d\upsilon}{d\mu}.$$

Definición 2.2.5. Sea (X, Σ) un espacio medible, μ una medida positiva y υ una medida. Se define la descomposición de Lebesgue de υ relativa a μ como el par de medidas υ_a y υ_s que cumplen que υ_a es absolutamente continua respecto a μ, υ_s es singular con respecto a μ y
$$\upsilon = \upsilon_a + \upsilon_s.$$

Observación 2.2.6. La unicidad de la descomposición es fácil de ver. Si υ'_a y υ'_s es otro par que satisface lo mismo, entonces se tiene:
$$\upsilon'_a - \upsilon_a = \upsilon_s - \upsilon'_s. \tag{2.12}$$

Se tiene que si $\upsilon \ll \mu$ significa que dado A medible con $\mu(A) = 0$, entonces $\upsilon(A) = 0$ y por eso $-\upsilon(A) = 0$ lo que significa que $-\upsilon \ll \mu$. Se tiene que si $\upsilon \perp \mu$ significa que υ está concentrada en A y μ está concentrada en B siendo A y B disjuntos. Esto quiere decir que $\upsilon(E) = 0$ si $E \cap A = \emptyset$ entonces $-\upsilon(E) = 0$ si $E \cap A = \emptyset$ por lo tanto $-\upsilon$ está concentrada en A lo que nos lleva a que también se tiene $-\upsilon \perp \mu$.

Tenemos entonces que $-\upsilon_a \ll \mu$ y $\upsilon'_a \ll \mu$, luego $\upsilon'_a - \upsilon_a \ll \mu$ (por el apartado(c) de la Proposición 1.4.2). Por otro lado tenemos que $\upsilon_s \perp \mu$ y $-\upsilon'_s \perp \mu$ así que $\upsilon_s - \upsilon'_s \perp \mu$ (por el apartado (d) de la Proposición 1.4.2). Por último, como tenemos que $\upsilon'_a - \upsilon_a = \upsilon_s - \upsilon'_s$, tenemos que se cumple también que $\upsilon'_a - \upsilon_a \perp \mu$ y que $\upsilon_s - \upsilon'_s \ll \mu$ por lo que por el apartado (g) de la Proposición 1.4.2 se tiene que $\upsilon'_a - \upsilon_a = 0$ y que $\upsilon_s - \upsilon'_s = 0$ luego efectivamente $\upsilon'_a = \upsilon_a$ y $\upsilon'_s = \upsilon_s$.

Capítulo 3

Extensiones del teorema y algunas consecuencias

3.1. Extensión del teorema

Hemos visto en el capítulo anterior como el Teorema de Radon-Nikodym se cumple para μ y υ medidas positivas. Veremos en esta primera parte del capítulo que ocurre cuando consideramos otro tipo de medidas.

3.1.1. Medida μ σ-finita

Teorema 3.1.1. *Sea (X, Σ) un espacio medible, μ una medida σ-finita y υ una medida positiva y finita. Si υ es absolutamente continua respecto a μ, entonces existe una función $g\colon X \to [0, +\infty)$ medible e integrable respecto de μ tal que*

$$\upsilon(A) = \int_A g\, d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

Además dicha g es única en casi todo.

Demostración. Si μ es σ-finita, entonces por definición $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ con X_n medibles y $\mu(X_n) < \infty$. Podemos suponer que los X_n son disjuntos ya que si no, podemos reemplazar $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ por $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ siendo $Y_1 = X_1$ y $Y_n = X_n - (Y_1 \bigcup \cdots \bigcup Y_{n-1})$.

Como $\upsilon(X) < \infty$, podemos aplicar el Teorema de Radon-Nikodym, Teorema 2.1.1 a cada X_n. Obtenemos funciones g_n en X_n, que cumplen que

$$\upsilon(A) = \int_A g_n\, d\mu$$

para cada subconjunto medible $A \subset X_n$. Estas g_n definen una función g en X de la forma

$$g(x) = g_n(x) \quad \text{si } x \in X_n.$$

Como $\upsilon(X) < \infty$ entonces $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$. Además, se cumple

$$\upsilon(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon(A \cap X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap X_n} g_n \, d\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap X_n} g \, d\mu = \int_A g \, d\mu.$$

Observemos que seguimos teniendo υ finita como en la demostración anterior del teorema, y como esta es la única condición que necesitabamos para probar la unicidad en el caso anterior, se sigue teniendo que la función g es única. □

3.1.2. Medidas μ y υ σ-finitas

Teorema 3.1.2. *Sea (X, Σ) un espacio medible y μ, υ medidas σ-finitas. Si υ es absolutamente continua respecto a μ, entonces existe una función $g\colon X \to [0, +\infty)$ medible tal que*

$$\upsilon(A) = \int_A g \, d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

Además dicha g es única en casi todo.

Demostración. Supongamos que μ y υ son σ-finitas. Entonces X es la unión de una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos medibles disjuntos, cada uno de los cuales tiene medida finita sobre μ y υ. Como antes, para cada n, la pruebas vistas anteriormente del Teorema de Radon-Nikodym, Teorema 2.1.1, proporcionan una función medible $g_n\colon B_n \to [0, +\infty)$ tal que $\upsilon(A) = \int_A g_n \, d\mu$ para cada subconjunto medible $A \subset B_n$. Entonces la función $g\colon X \to [0, +\infty)$ que coincide con g_n en cada B_n es medible y cumple

$$\upsilon(A) = \int_A g \, d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

Veamos ahora la unicidad. Si υ es σ-finita y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de medida finita sobre υ con $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Sean g y h dos funciones medibles no negativas tales que

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu \quad \text{y } \nu(A) = \int_A h \, d\mu.$$

Si restringimos la igualdad anterior a conjuntos medible $A \subseteq B_n$, deducimos como en el teorema anterior que $g = h$ en casi todo B_n. Como esto ocurre para todo $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $g = h$ e.c.t. □

Observación 3.1.3. Hay que tener en cuenta que en este caso no podemos afirmar que $g \in \mathscr{L}^1$ aunque si es "localmente $\mathscr{L}^1$", en el sentido de que $\int_{X_n} g \, d\mu < \infty$ para cada n.

3.1.3. Medida real

Teorema 3.1.4. *Sea* (X, Σ) *un espacio medible,* μ *una medida positiva y* υ *una medida real. Si* υ *es absolutamente continua respecto a* μ*, entonces existe una función* $g\colon X \to \mathbb{R}$ *medible e integrable respecto de* μ *tal que*

$$\upsilon(A) = \int_A g\, d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

Además dicha g *es única en casi todo.*

Demostración. Si υ es una medida real, por la Definición 1.3.4 sabemos que podemos escribir $\upsilon = \upsilon^+ - \upsilon^-$ con υ^+ y υ^- medidas positivas. Observemos que por la Proposición 1.4.2, si υ absolutamente continua respecto de μ, también lo es $|\upsilon|$, lo que significa que se tiene que si $\mu(A) = 0$ entonces

$$|\upsilon|(A) = \upsilon^+(A) + \upsilon^-(A) = 0,$$

de donde vemos que se cumple que $\upsilon^+(A) = -\upsilon^-(A)$. Como υ^+ y υ^- son medidas positivas, la única forma de que esto ocurra es que $\upsilon^+(A) = \upsilon^-(A) = 0$ y por lo tanto υ^+ y υ^- son absolutamente continuas respecto de μ. Por el Teorema 1.3.6 sabemos que la medida ν es acotada, luego también lo son las medidas ν^+ y ν^-, luego son medida positivas finitas. Entonces, podemos aplicar el Teorema de Radon-Nikodym, Teorema 2.1.1, a cada una de ellas por separado y por tanto tenemos que existen $f, h\colon X \to [0, +\infty)$ integrables tales que

$$\upsilon^+(A) = \int_A f\, d\mu \quad \text{y} \quad \upsilon^-(A) = \int_A h\, d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

Además, ambas funciones son únicas. Entonces se tiene que

$$\upsilon(A) = \upsilon^+(A) - \upsilon^-(A) = \int_A f\, d\mu - \int_A h\, d\mu = \int_A (f-h)\, d\mu.$$

Por lo tanto, definiendo $g : X \to \mathbb{R}$ como $g = f - h$ vemos de nuevo que se cumple el Teorema, y g es integrable al ser diferencia de funciones integrables.. □

3.1.4. Medida compleja

Teorema 3.1.5. *Sea* (X, Σ) *un espacio medible,* μ *una medida positiva y* υ *una medida compleja. Si* υ *es absolutamente continua respecto a* μ*, entonces existe una función* $g\colon X \to \mathbb{C}$ *integrable tal que*

$$\upsilon(A) = \int_A g\, d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

Además dicha g *es única en casi todo.*

Demostración. Si υ es una medida compleja, entonces se cumple que $\nu = \nu_1 + i\nu_2$, donde

$$\nu_1(A) = \Re(\nu(A)), \quad \nu_2(A) := \Im(\nu(A)), \quad A \in \Sigma.$$

Veamos que ν_1, ν_2 son medidas reales. En primer lugar tenemos que

$$\upsilon(\emptyset) = \upsilon_1(\emptyset) + i\upsilon_2(\emptyset) = 0$$

porque υ es una medida. Por lo tanto, necesariamente se tiene que $\upsilon_1(\emptyset) = 0$ y que $\upsilon_2(\emptyset) = 0$.

Por otro lado, sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ conjuntos medibles disjuntos, sabemos que como υ es una medida, se tiene que $\upsilon(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon(A_n)$. Entonces

$$\upsilon\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \upsilon_1\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) + i\upsilon_2\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)$$

y también

$$\sum_{n=1}^{\infty} \upsilon(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} [\upsilon_1(A_n) + i\upsilon_2(A_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_1(A_n) + i\sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_2(A_n)$$

por lo tanto se tiene que $\upsilon_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_1(A_n)$ y también que $\upsilon_2(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_2(A_n)$ como queríamos, por lo que efectivamente υ_1 y υ_2 son medidas reales (porque al ser υ una medida compleja, no toma valores infinitos).

Como ahora υ_1 y υ_2 son medidas reales, podemos aplicar el Teorema 3.1.4 y por lo tanto sabemos que se tiene que existen $f_1, f_2 \colon X \to [0, +\infty)$ tales que

$$\upsilon_1(A) = \int f_1 \, d\mu, \quad A \in \Sigma,$$

y

$$\upsilon_2(A) = \int f_2 \, d\mu, \quad A \in \Sigma,$$

con f_1, f_2 medibles e integrables respecto de μ, y por lo tanto la función que buscamos es $f := f_1 + if_2$.

□

3.1.5. Más allá de la σ-finitud

Finalmente, si vamos más allá de la σ-finitud, nos encontramos situaciones en las que el Teorema falla. Por ejemplo, si consideramos como ν la medida de Lebesgue en $[0, 1]$ y como μ la medida cardinal restringida al σ-álgebra de medibles Lebesgue de $[0, 1]$, es decir:

$$\mu(A) = \mathrm{card}(A).$$

Los conjuntos de medida finita para μ son los conjuntos con una cantidad finita de puntos, y la unión de una cantidad numerable de ellos es un conjunto numerable. Por lo tanto un conjunto no numerable, tiene medida μ no σ-finita, en el σ-álgebra de todos los conjuntos medibles Lebesgue en $[0,1]$. Entonces, aunque $\upsilon \ll \mu$ (porque si $\mu(A) = 0$ para $A \in [0,1]$ significa que $\mathrm{card}(A) = 0$, es decir, A no tiene ningún punto luego $A = \emptyset$ y por lo tanto $\upsilon(A) = \upsilon(\emptyset) = 0$) y υ está acotada, no hay $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ tal que $\upsilon(A) = \int_A g\, d\mu$. Porque si fuera así, para cada $x \in (0,1)$ se tendría

$$0 = \upsilon(\{x\}) = \int_{\{x\}} g\, d\mu = g(x)\mu(\{x\}) = g(x),$$

lo que llevaría a $g(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$ y por tanto a $\nu = 0$.

3.2. Consecuencias del Teorema de Radon-Nikodym

Veremos en esta sección algunos resultados que surgen como consecuencia del Teorema de Radon-Nikodym

Teorema 3.2.1. *Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida compleja. Entonces existe una función medible h tal que $|h(x)| = 1$ para todo $x \in X$ y tal que*

$$\mu(A) = \int_A h\, d|\mu|, \quad A \in \Sigma,$$

lo que se puede escribir abreviadamente como

$$d\mu = h\, d|\mu| \tag{3.1}$$

Demostración. Es trivial que $\mu \ll |\mu|$ porque si $|\mu(A)| = 0$, entonces $\mu(A) = 0$ y por tanto el Teorema de Radon-Nikodym garantiza la existencia de $h \in L^1$ que cumpla la ecuación (3.1).

Sea

$$A_r = \{x \in X : |h(x)| < r\}$$

donde r es un número positivo, y sea $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ una partición de A_r entonces:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(E_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_{E_j} hd|\mu| \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} r|\mu|(E_j) = r|\mu|(A_r)$$

Por lo tanto llegamos a que $|\mu|(A_r) \leq r|\mu|(A_r)$. Pero se tiene que si fuera $r < 1$, necesariamente $|\mu|(A_r) = 0$. Por lo tanto, se llega a que $|h| \geq 1$ e.c.t.

Por otra parte, si $|\mu|(E) > 0$ por la ecuación (3.1) se tiene que

$$\left| \frac{1}{|\mu|}(E) \int_E h \, d|\mu| \right| = \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leq 1 \tag{3.2}$$

Por el Teorema 2.2.2 podemos concluir entonces que $|h| \leq 1$ e.c.t.. Por tanto, sea $B = \{x \in X : |h(x)| \neq 1\}$ hemos visto que se tiene que $|\mu|(B) = 0$ así que efectivamente tenemos la función que queríamos. $\square$

Teorema 3.2.2. *Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida positiva. Sea $g \in L^1(\mu)$ con*

$$v(A) = \int_A g \, d\mu, \quad E \in \Sigma,$$

entonces

$$|v|(A) = \int_A |g| \, d\mu, \quad E \in \Sigma.$$

Demostración. Por el Teorema 3.2.1, sabemos que hay una función medible h, de valor absoluto 1, tal que

$$dv = h \, d|v|.$$

Por hipótesis, sabemos que $dv = g \, d\mu$. Entonces,

$$g \, d\mu = h \, d|v|.$$

Por lo tanto, como $|h| = 1$ se tiene que $h\overline{h} = 1$ y entonces $d|v| = \overline{h} g \, d\mu$. Como $|v| \geq 0$ y también $\mu \geq 0$, se sigue que $\overline{h} g \geq 0$ e.c.t., por lo tanto $\overline{h} g = |g|$ por lo que

$$|v|(A) = \int_A |g| \, d\mu$$

como queríamos. $\square$

Vimos en el primer capítulo, una demostración del Teorema de Descomposición de Hahn, Teorema 1.1.6. Veremos ahora que dicho teorema también se puede deducir del Teorema de Radon-Nikodym.

Teorema 3.2.3 (Hahn)**.** *Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida real. Existen conjuntos A, B medibles tales que $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$ y tal que se tiene que*

$$\mu^+(E) = \mu(A \cap E); \quad \mu^-(E) = -\mu(B \cap E).$$

Demostración. Por el Teorema 3.2.1 tenemos que $d\mu = h \cdot d|\mu|$ donde $|h| = 1$. Como μ es real, entonces h también lo es y por tanto solo puede ser $h = \pm 1$. Sea $A = \{x : h(x) = 1\}$ y $B = \{x : h(x) = -1\}$. Entonces, como $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ se tiene que

$$\frac{d}{d|\mu|}(\mu^+) = \frac{1}{2}(1 + h) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{en A} \\ 0 & \text{en B} \end{array} \right. .$$

Entonces para cualquier $E \in \Sigma$ se tiene que:

$$\mu^+(E) = \frac{1}{2}\int_E (1+h)d|\mu| = \int_{E\cap A} d|\mu| = \mu(E\cap A),$$

Y por tanto, como $\mu(E) = \mu(E\cap A) + \mu(E\cap B)$ y $\mu = \mu^+ - \mu^-$ tenemos que

$$\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E) = \mu(E\cap A) - \mu^-(E).$$

Entonces

$$\mu^-(E) = -\mu(E\cap B),$$

como queríamos. □

Corolario 3.2.4 (Descomposición de Jordan). *Si $\mu = \lambda_1 - \lambda_2$ donde λ_1, λ_2 son medidas positivas, entonces se tiene que $\lambda_1 \geq \mu^+$ y $\lambda_2 \geq \mu^-$.*

Demostración. Como $\mu \leq \lambda_1$ tenemos que por el teorema de Hahn

$$\mu^+(E) = \mu(E\cap A) \leq \lambda_1(E\cap A) \leq \lambda_1(E).$$

Por otro lado, como $\mu \geq -\lambda_2$ se tiene que

$$\mu^-(E) = -\mu(B\cap E) \leq \lambda_2(B\cap E) \leq \lambda_2(E).$$

Por tanto efectivamente se cumple lo que queríamos. □

Capítulo 4

Dualidad de espacios L^p

En este capítulo usaremos el Teorema de Radon-Nikodym para probar que el dual del espacio L^p con $1 \leq p < \infty$ se identifica con el espacio L^q, donde q es el exponente conjugado de p, es decir, se cumple $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y para $p = 1$ se toma $q = \infty$.

4.1. Espacios de sucesiones

Antes de ver el resultado que hemos mencionado para funciones, veremos que se tiene un resultado análogo para los espacios de sucesiones ℓ^p con $1 \leq p < \infty$, pero con una prueba más sencilla que no requiere el uso del Teorema de Radon-Nikodym. Para ello, recordemos algunas definiciones y resultados.

Definición 4.1.1. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Para $1 \leq p < \infty$, se define

$$\ell^p = \Big\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \Big\},$$

siendo su norma

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

Para $p = \infty$

$$\ell^\infty = \Big\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sup\{|(x_n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty \Big\},$$

siendo su norma

$$\|x\|_\infty := \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Definición 4.1.2. Sea $1 < p < \infty$. El dual de ℓ^p, notado como $(\ell^p)^*$, es el conjunto de los funcionales $\psi \colon \ell^p \to \mathbb{C}$ que son lineales y continuos.

Lema 4.1.3 (Desigualdad de Young)**.** *Sea* $1 < p < \infty$ *y* q *su exponente conjugado. Si* $x, y \geq 0$ *entonces se tiene*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Demostración. Consideramos la función exponencial $f(s) = e^s$ que es convexa en $\mathbb{R}$, de manera que para todo $s, t \in \mathbb{R}$ y para cada $\alpha, \beta \geq 0$ con $\alpha + \beta = 1$, se tiene

$$e^{\alpha s + \beta t} \leq \alpha e^s + \beta e^t. \tag{4.1}$$

Si $x = 0$ o $y = 0$, la desigualdad de Young es trivial, por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x, y > 0$. Si tomamos ahora

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q}, \quad s = p \log x, \quad t = q \log y,$$

se sigue de la desigualdad (4.1) que

$$xy = e^{\left(\frac{s}{p} + \frac{t}{q}\right)} \leq \frac{e^s}{p} + \frac{e^t}{q} = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

□

Proposición 4.1.4 (Desigualdad de Hölder discreta)**.** *Sea* $1 < p < \infty$ *y* q *su conjugado. Sea* $n \in \mathbb{N}$ *y* $x_1 \dots x_n \in \mathbb{C}$*,* $y_1 \dots y_n \in \mathbb{C}$*, entonces*

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \Big)^{1/p} \Big(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \Big)^{1/q}.$$

Demostración. Consideremos los números reales no negativos

$$u = \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \Big)^{1/p}, \quad v = \Big(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \Big)^{1/q}.$$

Si $u = 0$ o $v = 0$, la desigualdad de Hölder se cumple trivialmente, luego podemos suponer sin pérdida de generalidad que $u, v > 0$. Aplicando el Lema 4.1.3 con $|x_j|/u$, $|y_j|/v$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |x_j||y_j| &= uv \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j|}{u} \cdot \frac{|y_j|}{v} \\
&\leq uv \Big(\frac{1}{p} \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j|^p}{u^p} + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{n} \frac{|y_j|^q}{u^q} \Big) \\
&= uv \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \\
&= uv.
\end{aligned}$$

□

Definición 4.1.5. Se dice que un funcional $T \in B(X, Y)$ es un isomorfismo lineal isométrico, si T es un isomorfismo lineal tal que $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in X$.

Teorema 4.1.6. *Sea $1 < p < \infty$ y q su exponente conjugado. Existe un isomorfismo lineal isométrico entre $(\ell^p)^*$ y ℓ^q.*

Demostración. Dados $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^p, y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^q$ se tiene por la desigualdad de Hölder que, fijado $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} |x_n y_n| &\leq \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^q \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{1/q} \\ &= \|x\|_p \|y\|_q.\end{aligned}$$

Tomando supremo en N en la suma de la izquierda, llegamos a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_q. \tag{4.2}$$

Si mantenemos fijo $y \in \ell^q$, tenemos que

$$x \in \ell^p \mapsto S_y(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \in \mathbb{C}$$

es un funcional lineal y continuo en ℓ^p que verifica que $\|S_y\| = \|y\|_q$, donde $\|S_y\|$ es la norma de S_y como funcional.

Veamos esto último por doble desigualdad. De la ecuación (4.2) se sigue directamente que $\|S_y\| \leq \|y\|_q$.

Tomamos $y_n = \lambda_n |y_n|$ donde $\lambda_n \in \mathbb{C}$ verifica $|\lambda_n| = 1$ y definimos

$$x_n := \overline{\lambda}_n \; |y_n|^{q-1} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^{(q-1)p} = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q < \infty,$$

pues como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se sigue que $(q-1)p = q$, y por lo tanto $x \in \ell^p$. Por otro lado

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |y_n| \overline{\lambda}_n |y_n|^{q-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n \\ &= S_y(x) \\ &\leq \|S_y\| \|x\|_p \\ &= \|S_y\| \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \Big)^{1/p},\end{aligned}$$

de donde se obtiene que $\|y\|_q \leq \|S_y\|$ y por tanto se tiene la igualdad que queríamos.

Hacemos ahora variar la sucesión $y \in \ell^q$ para obtener un operador lineal e isométrico

$$S : \ell^q \to (\ell^p)^*.$$

Para probar entonces que $\ell^q \equiv (\ell^p)^*$ falta ver que S es sobreyectivo.

Dado un funcional $\psi \in (\ell^p)^*$, buscamos $y \in \ell^q$ tal que $S_y = \psi$. Tomamos

$$y_n := \psi(\rho_n) \quad n \in \mathbb{N},$$

donde ρ_n denota el n-ésimo vector unitario, es decir, $\rho_n = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots)$, con 1 en la coordenada enésima. Veamos primero que $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ como lo hemos definido pertenece a ℓ^q. Consideramos de nuevo $y_n = \lambda_n |y_n|$ con $|\lambda_n| = 1$. Fijado $N \in \mathbb{N}$ consideramos la sucesión

$$x^N = \sum_{n=1}^{N} \overline{\lambda}_n |y_n|^{q-1} \rho_n.$$

Es decir, $x_n^N = 0$ para $n > N$. Como se cumple que

$$|y_n|^q = \lambda_n \overline{\lambda_n} |y_n| |y_n|^{q-1} = y_n x_n^N,$$

entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} |y_n|^q &= \sum_{n=1}^{N} x_n^N y_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} x_n^N \psi(\rho_n) \\ &= \psi\Big(\sum_{n=1}^{N} x_n^N \rho_n \Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \psi(x^N) \\
&\leq \|\psi\| \|x^N\|_p \\
&= \|\psi\| \Big(\sum_{n=1}^{N} |\overline{\lambda_n}|^p |y_n|^{(q-1)p} |\rho_n|^p \Big)^{1/p} \\
&= \|\psi\| \Big(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^q \Big)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

De lo que claramente obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \leq \|\psi\|^q,$$

y por lo tanto $y \in \ell^q$ como queríamos.

Solo queda probar entonces que $S_y = \psi$ pero esto es inmediato. Tenemos por definición de y que $S_y(\rho_n) = y_n = \psi(\rho_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces por linealidad, S_y coincide con ψ en el espacio generado por los vectores unidad, que es denso en ℓ^p, por lo que, por continuidad, han de coincidir en ℓ^p. Por lo tanto, queda probado que el operador S con el que hemos trabajado es un isomorfismo isométrico y por lo tanto podemos escribir $\ell^q \equiv (\ell^p)^*$ como queríamos. $\square$

Teorema 4.1.7. *Existe un isomorfismo lineal isométrico entre $(\ell^1)^*$ y ℓ^∞.*

Demostración. En este caso procedemos de manera similar al resultado anterior. Dados $x \in \ell^1$, $y \in \ell^\infty$, se cumple que fijado $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n y_n| \leq \sum_{n=1}^{N} |x_n| \sup\{|y_n| : n \in \mathbb{N}\} = \|y\|_\infty \sum_{n=1}^{N} |x_n| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1.$$

Por lo tanto, tomando supremo en N en la suma de la izquierda tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty.$$

Definamos, para $y \in \ell^\infty$,

$$x \in \ell^1 \mapsto S_y(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Si mantenemos fija la y, tenemos que es un funcional lineal y continuo en ℓ^1 que verifica $\|S_y\| = \|y\|_\infty$. Veamos esto último por doble desigualdad.

De la definición se sigue directamente que $\|S_y\| \leq \|y\|_\infty$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, el vector canónico ρ_n solo con un 1 en la posicion n, tiene norma 1 en ℓ^1, luego

$$\|S_y\| \geq \|S_y(\rho_n)\|_1 = |y_n|$$

entonces $\|S_y\| \geq \sup_n |y_n| = \|y\|_\infty$ y por lo tanto se tiene la igualdad que queríamos.

Hacemos ahora variar la sucesión $y \in \ell^\infty$ para obtener un operador lineal e isométrico

$$S\colon \ell^\infty \to (\ell^1)^*.$$

Para probar entonces que $\ell^\infty \equiv (\ell^1)^*$ falta ver que S es sobreyectivo.

Dado un funcional $\psi \in (\ell^1)^*$, buscamos $y \in \ell^\infty$ tal que $S_y = \psi$. Tomamos de nuevo $y_n := \psi(\rho_n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Veamos primero que $y = (y_n)_{n=1}^\infty$ como lo hemos definido pertenece a ℓ^∞. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$|y_n| = |\psi(\rho_n)| \leq \|\psi\|\|\rho_n\|_1 = \|\psi\|.$$

Luego por tanto

$$\|y\|_\infty = \sup\{|y_n| : n \in \mathbb{N}\} \leq \|\psi\|.$$

Por lo que $y \in \ell^\infty$ como queríamos.

Solo queda probar que $S_y = \psi$ pero siguiendo el razonamiento hecho para el caso de $1 < p < \infty$, basado en la densidad de las combinaciones lineales de ρ_n, en ℓ^1 esto es inmediato. Por lo que se sigue que el operador S con el que hemos trabajado es un isomorfismo isométrico y $\ell^\infty \equiv (\ell^1)^*$. □

4.2. Dual del espacio L^p

En esta sección veremos cual es el dual del espacio $L^p(\mu)$. Para ello, será necesario el uso del Teorema de Radón Nikodym, además de la desigualdad de Hölder para el caso continuo.

Definición 4.2.1. Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida positiva. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Para $1 \leq p < \infty$, se define

$$\mathscr{L}^p = \left\{ f \text{ medible } : \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}.$$

Para $p = \infty$

$$\mathscr{L}^\infty = \left\{ f \text{ medible } : \text{ existe } a > 0 \text{ tal que } \mu\big(\{x \in X : |f(x)| > a\}\big) = 0 \right\}.$$

Si en estos espacios identificamos funciones que coinciden e.c.t, formamos los espacio L^p y L^∞ cuyos elementos son las clases de funciones de $\mathscr{L}^p$ y $\mathscr{L}^\infty$ que son iguales e.c.t. cuya norma es

$$\|f\|_p := \Big(\int_X |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p},$$

y
$$\|f\|_\infty := \text{ínf}\Big\{a > 0 : \mu\big(\{x \in X : |f(x)| > a\}\big) = 0\Big\}.$$

Proposición 4.2.2 (Desigualdad de Hölder continua)**.** *Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida positiva y σ-finita. Sea $1 < p < \infty$ con q su exponente conjugado. Si $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ son funciones medibles tales que*
$$\int_X |f|^p\, d\mu < \infty, \qquad \int_X |g|^q\, d\mu < \infty.$$
Entonces fg es integrable en X y además se tiene
$$\int_X |fg|\, d\mu \le \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q\, d\mu\right)^{1/q}.$$

Demostración. Consideremos los números reales no negativos
$$u = \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{1/p}, \quad v = \left(\int_X |g|^q\, d\mu\right)^{1/q}.$$
La desigualdad de Hölder es trivial si $u = 0$ o $v = 0$. Supongamos entonces que $u, v > 0$.

Como $f(t)$ existe y es finito para todo $t \in X$, existe un conjunto medible $A \subseteq X$ tal que $f(t)$ existe y es finito para todo $t \in A$ y tal que se cumple que $\mu(X \setminus A) = 0$. Análogamente, como $g(t)$ existe y es finito para todo $t \in X$, existe un conjunto medible $B \subset X$ tal que $g(t)$ existe y es finito para todo $t \in B$ y tal que se tiene que $\mu(X \setminus B) = 0$. Entonces en $A \cap B$ existen y son finitas $f(t)$ y $g(t)$ y se tiene que $\mu(X \setminus (A \cap B)) = 0$. Si aplicamos el Lema 4.1.3 para
$$x = \frac{|f(t)|}{u}, \quad y = \frac{|g(t)|}{v},$$
obtenemos que
$$\begin{aligned}
\int_X |f(t)g(t)|\, d\mu(t) &= \int_{A\cap B} |f(t)g(t)|\, d\mu(t) \\
&= uv \int_{A\cap B} \left|\frac{f(t)}{u}\right| \left|\frac{g(t)}{v}\right|\, d\mu(t) \\
&\le uv \left(\frac{1}{p}\int_{A\cap B} \frac{|f(t)|^p}{u^p}\, d\mu(t) + \frac{1}{q}\int_X \frac{|g(t)|^q}{v^q}\, d\mu(t)\right) \\
&= uv \left(\frac{1}{p}\frac{1}{u^p}\int_{A\cap B} |f(t)|^p\, d\mu(t) + \frac{1}{q}\frac{1}{v^q}\int_{A\cap B} |g(t)|^q\, d\mu(t)\right) \\
&= uv \left(\frac{1}{p}\frac{1}{u^p}\int_X |f(t)|^p\, d\mu(t) + \frac{1}{q}\frac{1}{v^q}\int_X |g(t)|^q\, d\mu(t)\right) \\
&= uv \left(\frac{1}{p}\frac{1}{u^p}u^p + \frac{1}{q}\frac{1}{v^q}v^q\right) \\
&= uv.
\end{aligned}$$
□

Proposición 4.2.3. *Sea* (X, Σ) *un espacio medible y* μ *una medida positiva y* σ*-finita. Sea* $1 < \ p < \infty$ *y sea* q *su exponente conjugado. Sea* ϕ *un funcional lineal acotado en* $\mathscr{L}^p(\mu)$*. Entonces, existe una función* $g \in \mathscr{L}^q(\mu)$ *tal que*

$$\phi(f) = \int_X f(x)g(x)\, d\mu(x), \quad f \in \mathscr{L}^p(\mu). \tag{4.3}$$

La función g *es única salvo medida nula. Además, se tiene que*

$$\|\phi\| = \|g\|_q, \tag{4.4}$$

donde $\|\phi\|$ *es la norma de* ϕ *como operador.*

Demostración. Veamos en primer lugar que la función g existe. Si tenemos $\|\phi\| = 0$, entonces (4.3) y (4.4) se dan para $g = 0$. Asumamos entonces $\|\phi\| > 0$.

Consideremos primero $\mu(X) < \infty$. Para cualquier conjunto medible $E \subset X$ definimos

$$\upsilon(E) := \phi(\chi_E).$$

Como ϕ es lineal y $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ si A y B son disjuntos, entonces υ es aditiva. Para probar que es numerablemente aditiva, sean $(E_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de conjuntos medibles y dos a dos disjuntos. Entonces

$$\begin{aligned}\left\|\chi_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} - \sum_{n=1}^N \chi_{E_n}\right\|_p &= \|\chi_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} - \chi_{\bigcup_{n=1}^N E_n}\|_p \\ &= \|\chi_{\bigcup_{n=N+1}^\infty E_n}\|_p \\ &= \left(\mu\Big(\bigcup_{n=N+1}^\infty E_n\Big)\right)^{1/p},\end{aligned}$$

que tiende a 0 porque $\bigcup_{n=N+1}^\infty E_n$ decrece al vacío. Por lo tanto, se tiene que en la topología de $\mathscr{L}^p$ se cumple

$$\chi_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} = \sum_{n=1}^\infty \chi_{E_n}.$$

Entonces, la continuidad de ϕ prueba que

$$\begin{aligned}\upsilon\Big(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\Big) &= \phi(\chi_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n}) \\ &= \phi\Big(\sum_{n=1}^\infty \chi_{E_n}\Big) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \phi(\chi_{E_n}) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \upsilon(E_n).\end{aligned}$$

Por lo tanto υ como la hemos definido es una medida compleja.

Está claro que $\upsilon(E) = 0$ si $\mu(E) = 0$ ya que en ese caso $\|\chi_E\|_p = 0$. Por lo tanto $\upsilon \ll \mu$ y entonces, el Teorema de Radon Nikodym asegura la existencia de una función $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ tal que para todo $E \subset X$ medible

$$\phi(\chi_E) = \int_E g(x)\, d\mu(x) = \int_X \chi_E(x) g(x)\, d\mu(x). \tag{4.5}$$

Por linealidad se sigue que

$$\phi(f) = \int_X f(x) g(x)\, d\mu(x) \tag{4.6}$$

para cualquier f simple medible, y por lo tanto también para cualquier $f \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ (porque cualquier función $f \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ es el límite uniforme de funciones simples). Queremos concluir que en realidad dicha $g \in \mathscr{L}^q(\mu)$.

Existe una función medible $\alpha(x)$ con $|\alpha(x)| = 1$ tal que $\alpha(x)g(x) = |g(x)|$. Dado

$$E_n = \{x \in X : |g(x)| \leq n\},$$

y definiendo

$$f(x) := \alpha \chi_{E_n}(x) |g(x)|^{q-1},$$

se tiene que $|f(x)|^p = |g(x)|^q$ en E_n, pues $p(q-1) = q$, y $f \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$. Entonces por (4.6):

$$\begin{aligned}
\int_{E_n} |g(x)|^q\, d\mu(x) &= \int_{E_n} |g(x)|^{q-1} \alpha(x) g(x)\, d\mu(x) \\
&= \int_X f(x) g(x)\, d\mu(x) \\
&= \phi(f) \\
&\leq \|\phi\| \|f\|_p \\
&= \|\phi\| \left(\int_X |f(x)|^p\, d\mu(x) \right)^{1/p} \\
&= \|\phi\| \left(\int_{E_n} |g(x)|^q d\mu \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_X \chi_{E_n} |g(x)|^q\, d\mu(x) \leq \|\phi\|^q. \tag{4.7}$$

Como $\chi_{E_n}|g(x)|^q$ es una sucesión que crece a $|g(x)|^q$, aplicando el Teorema de Convergencia Monótona a (4.7), obtenemos que $\|g\|_q \leq \|\phi\|$. Por lo tanto, $g \in \mathscr{L}^q(\mu)$. Si se cumple (4.3), la desigualdad de Hölder continua implica que

$$
\begin{aligned}
|\phi(f)| &= \left| \int_X f(x)g(x)\,d\mu(x) \right| \\
&\leq \int_X |f(x)||g(x)|\,d\mu(x) \\
&\leq \left(\int_X |f(x)|^p\,d\mu(x) \right)^{1/p} \left(\int_X |g(x)|^q\,d\mu(x) \right)^{1/q} \\
&= \|f\|_p \|g\|_q.
\end{aligned}
$$

De lo que se sigue que

$$\|\phi\| \leq \|g\|_q. \tag{4.8}$$

Por lo tanto, llegamos a que efectivamente $\|\phi\| = \|g\|_q$ como queríamos, y esto completa la prueba si $\mu(X) < \infty$.

Si $\mu(X) = \infty$ pero μ es σ-finita, elegimos $w \in \mathscr{L}^1(\mu)$ tal que $0 < w(x) < 1$ para todo $x \in X$. Esta función existe porque como μ es σ-finita, se tiene que existe una sucesión $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos disjuntos tales qu $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ con $0 < \mu(E_n) < \infty$. Entonces, definiendo

$$w(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1+\mu(E_n))} \chi_{E_n}(x),$$

se tiene que para cada n, $1 + \mu(E_n) > 1$, por lo tanto $0 < w(x) < 1$ como queremos. Además, se comprueba fácilmente que $w \in \mathscr{L}^1(\mu)$. Veámoslo:

$$
\begin{aligned}
\int_X w(x)\,d\mu(x) &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1+\mu(E_n))} \chi_{E_n}(x)\,d\mu(x) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} \frac{1}{2^n \mu(E_n)}\,d\mu(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(E_n)}{2^n \mu(E_n)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&= 1 < \infty.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la función $w(x)$ que queríamos existe. Entonces,

$$d\overline{\mu} = w\,d\mu,$$

define una medida finita y

$$F \in \mathscr{L}^p(\overline{\mu}) \mapsto TF := w^{1/p} F \in \mathscr{L}^p(\mu), \tag{4.9}$$

define una isometría lineal biyectiva $T\colon \mathscr{L}^p(\overline{\mu}) \mapsto \mathscr{L}^p(\mu)$, porque $w(x) > 0$ para todo $x \in X$, y entonces

$$\begin{aligned} \|TF\|_p &= \left(\int_X |w^{1/p}F|^p \, d\mu\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_X |w||F|^p \, d\mu\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_X w|F|^p \frac{1}{w} \, d\overline{\mu}\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_X |F|^p \, d\overline{\mu}\right)^{1/p} \\ &= \|F\|_p. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\psi(F) = \phi(w^{1/p}F) \tag{4.10}$$

define un funcional lineal acotado ψ en $\mathscr{L}^p(\overline{\mu})$ con $\|\psi\| = \|\phi\|$. La primera parte de la prueba, demuestra que existe $G \in \mathscr{L}^q(\overline{\mu})$tal que

$$\psi(F) = \int_X FG \, d\overline{\mu}, \quad F \in \mathscr{L}^p(\overline{\mu}). \tag{4.11}$$

Si ponemos $g := w^{1/q}G$ entonces

$$\int_X |g|^q \, d\mu = \int_X |G|^q \, d\overline{\mu} = \|\psi\|^q = \|\phi\|^q,$$

Asi que (4.4) se cumple, y como $G \, d\overline{\mu} = w^{1/p} g d\mu$, finalmente tenemos

$$\phi(f) = \psi(w^{-1/p}f) = \int_X w^{-1/p} fG \, d\overline{\mu} = \int_X fg \; d\mu, \quad f \in \mathscr{L}^p(\mu).$$

Por último, la unicidad de g está clara. Sean g y g' cumpliendo (4.3), entonces la integral de $g - g'$ sobre cualquier conjunto medible E de medida finita es 0 (como vemos tomando $f = \chi_E$). Entonces, por la σ-finitud de μ se tiene que $g - g' = 0 \quad e.c.t.$

□

Proposición 4.2.4. *Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida positiva y σ-finita. Sea ϕ un funcional lineal acotado en $\mathscr{L}^1(\mu)$. Entonces, existe una función $g \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ tal que*

$$\phi(f) = \int_X fg \, d\mu, \quad f \in \mathscr{L}^1(\mu). \tag{4.12}$$

La función g es única salvo conjuntos de medida nula. Además, se tiene que

$$\|\phi\| = \|g\|_1. \tag{4.13}$$

donde $\|\phi\|$ es la norma de ϕ como operador.

Demostración. Veamos en primer lugar que g existe. Como en el resultado anterior, podemos asumir $\|\phi\| > 0$.

Consideremos primero $\mu(X) < \infty$. Para cualquier conjunto medible $E \subset X$ definimos

$$\upsilon(E) := \phi(\chi_E).$$

Como ϕ es lineal y $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$ si A y B son disjuntos, entonces υ es aditiva. Para probar que es numerablemente aditiva, sean $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos medibles y dos a dos disjuntos. Entonces

$$\begin{aligned}
\left\| \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} - \sum_{n=1}^{N} \chi_{E_n} \right\|_1 &= \|\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} - \chi_{\bigcup_{n=1}^{N} E_n}\|_1 \\
&= \|\chi_{\bigcup_{n=N+1}^{\infty} E_n}\|_1 \\
&= \mu\Big(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} E_n \Big),
\end{aligned}$$

que tiende a 0 porque $\bigcup_{n=N+1}^{\infty} E_n$ decrece al vacío. Por lo tanto, se tiene que en la topología de $\mathscr{L}^1$ se cumple

$$\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}.$$

Entonces, la continuidad de ϕ prueba que

$$\begin{aligned}
\upsilon\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) &= \phi(\chi_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n}) \\
&= \phi\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} \Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \phi(\chi_{E_n}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon(E_n).
\end{aligned}$$

Por lo tanto υ como la hemos definido es una medida compleja.

Está claro que $\upsilon(E) = 0$ si $\mu(E) = 0$ ya que en ese caso $\|\chi_E\|_1 = 0$. Por lo tanto $\upsilon \ll \mu$, por lo que el Teorema de Radon Nikodym asegura la existencia de una función $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ tal que para todo $E \subset X$ medible

$$\phi(\chi_E) = \int_E g \, d\mu = \int_X \chi_E g \, d\mu. \tag{4.14}$$

Por linealidad se sigue que

$$\phi(f) = \int_X fg\, d\mu$$

para cualquier f simple medible, y por lo tanto también para cualquier $f \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ (porque cualquier función $f \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ es el límite uniforme de funciones simples). Queremos concluir que en realidad dicha $g \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$.

Por (4.14), se tiene que

$$\left| \int_E g\, d\mu \right| \leq \|\phi\| \|\chi_E\|_1 = \|\phi\| \mu(E), \quad E \in \Sigma.$$

Es decir,

$$\frac{1}{\mu(E)} \left| \int_E g\, d\mu \right| \leq \|\phi\|, \quad \mu(E) > 0.$$

Entonces, por la Proposición 2.2.2, tenemos que $|g(x)| \leq \|\phi\|$ e.c.t y por lo tanto $\|g\|_\infty \leq \|\phi\|$. Es decir, $g \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$.

Si además se cumple (4.12), se tiene que

$$\phi(f) = \int_X fg\, d\mu \leq \|g\|_\infty \int_X f\, d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1,$$

de lo que se deduce que

$$\|\phi\| \leq \|g\|_\infty. \tag{4.15}$$

Por lo tanto, $\|\phi\| = \|g\|_\infty$ como queríamos, y esto completa la prueba en el caso en el que $\mu(X) < \infty$.

Si $\mu(X) = \infty$ pero μ es σ-finita, elegimos $w \in \mathscr{L}^1(\mu)$ tal que $0 < w(x) < 1$ para todo $x \in X$. De nuevo por el mismo razonamiento que en el resultado anterior tiene sentido esta función. Entonces,

$$d\overline{\mu} = w\, d\mu$$

define una medida finita y

$$F \in \mathscr{L}^1(\overline{\mu}) \mapsto TF := wF \in \mathscr{L}^1(\mu) \tag{4.16}$$

define una isometría lineal biyectiva $T\colon \mathscr{L}^1(\overline{\mu}) \mapsto \mathscr{L}^1(\mu)$ porque $w(x) > 0$ para todo $x \in X$, y entonces

$$\begin{aligned} \|TF\|_1 &= \int_X |wF|\, d\mu \\ &= \int_X w|F|\, d\mu \\ &= \int_X w|F| \frac{1}{w}\, d\overline{\mu} \\ &= \int_X |F|\, d\overline{\mu} \\ &= \|F\|_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\psi(F) = \phi(wF) \tag{4.17}$$

define un funcional lineal acotado ψ en $\mathscr{L}^1(\overline{\mu})$ con $\|\psi\| = \|\phi\|$. La primera parte de la prueba, demuestra que existe $G \in \mathscr{L}^\infty(\overline{\mu})$tal que

$$\psi(F) = \int_X FG \, d\overline{\mu}, \quad F \in \mathscr{L}^1(\overline{\mu}). \tag{4.18}$$

Si ponemos $g := G$ entonces

$$\|g\|_\infty = \|G\|_\infty = \|\psi\| = \|\phi\|$$

Asi que (4.13) se cumple, y como $G\, d\overline{\mu} = wg \, d\mu$, finalmente tenemos

$$\phi(f) = \psi(w^{-1}f) = \int_X w^{-1}fG \, d\overline{\mu} = \int_X fg \; d\mu, \quad f \in \mathscr{L}^1(\mu).$$

Por último, la unicidad de g se ve claramente como en la Proposición 4.2.3. Si g y g' son funciones cumpliendo (4.12), entonces la integral de $g - g'$ sobre cualquier conjunto medible E de medida finita es 0 (tomando $f = \chi_E$). Entonces por la σ-finitud de μ se tiene que $g - g' = 0$ e.c.t. $\square$

Teorema 4.2.5. *Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida positiva y σ-finita. Sea $1 \leq\ p < \infty$ y sea q su exponente conjugado. Entonces $L^q(\mu)$ es isométricamente isomorfo a $(L^p(\mu))^*$.*

Demostración. Definimos el funcional

$$T : L^q(\mu) \to\ (L^p(\mu))^*,$$

lineal y continuo tal que a cada $g \in L^q(\mu)$ le asocia $T_g \in (L^p(\mu))^*$ definido por

$$T_g(f) := \int_X fg \, d\mu, \quad f \in L^p(\mu).$$

Este funcional está bien definido porque para cada $g \in L^q(\mu)$, se tiene que $T_g \in (L^p(\mu))^*$.

Para probar entonces que $L^q(\mu)$ es isométricamente isomorfo a $(L^p(\mu))^*$, solamente tenemos que ver que T es un isomorfismo lineal, es decir, que $\|T_g\| = \|g\|_q$

Por la Proposición 4.2.3, sabemos que $\|T_g\| = \|\phi\| = \|g\|_q$. Además, por el mismo resultado, sabemos que dado ϕ funcional lineal y continuo en $L^p(\mu)$ existe una única función $g \in L^q(\mu)$ tal que $T_g = \int_X fg \, d\mu = \phi$, por lo tanto T_g es sobreyectivo, lo que concluye nuestra demostración. $\square$

Capítulo 5

Sobre el Teorema de RadonNikodym vectorial

5.1. Medidas vectoriales

Definición 5.1.1. Sea (X, Σ) un espacio medible y ν una aplicación

$$\nu \colon \Sigma \to E,$$

donde E es un espacio de Banach. Se dice que ν es una medida vectorial finitamente aditiva, si para cualesquiera A_1, A_2 conjuntos medibles disjuntos, se tiene

$$\nu(A_1 \cup A_2) = \nu(A_1) + \nu(A_2).$$

Si además

$$\nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

en la norma de la topología de E, para cualquier sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos disjuntos medibles, entonces se dice que ν es una medida vectorial numerablemente aditiva.

Ejemplo 5.1.2. Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida positiva y finita. Definimos

$$A \in \Sigma \mapsto \nu(A) = \chi_A \in L^1(\mu).$$

Entonces ν es una medida finitamente aditiva, ya que dados A_1, A_2 conjuntos medibles disjuntos, se tiene que :

$$\nu(A_1 \cup A_2) = \chi_{A_1 \cup A_2} = \chi_{A_1} + \chi_{A_2} = \nu(A_1) + \nu(A_2).$$

Además, si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión disjunta de subconjuntos medibles, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_m \Big\| \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) - \sum_{n=1}^{m} \nu(A_n) \Big\|_1 &= \lim_m \Big\| \nu\Big(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n\Big) \Big\|_1 \\
&= \lim_m \Big\| \chi_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n} \Big\|_1 \\
&= \lim_m \left(\int_X |\chi_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n}| \, d\mu \right) \\
&= \lim_m \left(\int_{\cup_{n=m+1}^{\infty} A_n} d\mu \right) \\
&= \lim_m \left(\mu\Big(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n \Big) \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto ν como la hemos definido es una medida vectorial numerablemente aditiva con valores en $L^1(\mu)$.

Ejemplo 5.1.3. Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida positiva y finita. Sea $1 < \ p < \infty$, definimos

$$A \in \Sigma \mapsto \nu(A) = \chi_A \in L^p(\mu).$$

Entonces ν es una medida finitamente aditiva, ya que dados A_1, A_2 conjuntos medibles disjuntos, se tiene que :

$$\nu(A_1 \cup A_2) = \chi_{A_1 \cup A_2} = \chi_{A_1} + \chi_{A_2} = \nu(A_1) + \nu(A_2).$$

Además, si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión disjunta de subconjuntos medibles, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_m \Big\| \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) - \sum_{n=1}^{m} \nu(A_n) \Big\|_p &= \lim_m \Big\| \nu\Big(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n\Big) \Big\|_p \\
&= \lim_m \Big\| \chi_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n} \Big\|_p \\
&= \lim_m \left(\int_X |\chi_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n}|^p \, d\mu \right)^{1/p} \\
&= \lim_m \left(\int_{\cup_{n=m+1}^{\infty} A_n} d\mu \right)^{1/p} \\
&= \lim_m \left(\mu\Big(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n \Big) \right)^{1/p} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto ν como la hemos definido es una medida vectorial numerablemente aditiva con valores en $L^p(\mu)$.

Ejemplo 5.1.4. Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida positiva y finita. Definimos

$$A \in \Sigma \mapsto \nu(A) = \chi_A \in L^\infty(\mu).$$

Entonces ν es una medida finitamente aditiva, ya que dados A_1, A_2 conjuntos medibles disjuntos, se tiene que :

$$\nu(A_1 \cup A_2) = \chi_{A_1 \cup A_2} = \chi_{A_1} + \chi_{A_2} = \nu(A_1) + \nu(A_2).$$

Sin embargo, si $(A_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión disjunta de subconjuntos medibles, entonces

$$\begin{aligned}\lim_m \left\| \nu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) - \sum_{n=1}^m \nu(A_n) \right\|_\infty &= \lim_m \left\| \nu\Big(\bigcup_{n=m+1}^\infty A_n\Big) \right\|_\infty \\ &= \lim_m \left\| \chi_{\bigcup_{n=m+1}^\infty A_n} \right\|_\infty \\ &= 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto ν como la hemos definido es una medida vectorial finitamente aditiva con valores en $L^\infty(\mu)$, pero no es numerablemente aditiva.

Ejemplo 5.1.5. Sea $[[0,1], \mathscr{M}[0,1]]$ espacio medible y m la medida de Lebesgue. Definimos

$$A \in \mathscr{M}[0,1] \mapsto \nu(A) = \left(\int_A \operatorname{sen}(nx)\, dx \right)_{n=1}^\infty \in c_0.$$

En primer lugar tenemos que esta medida está bien definida, ya que el lema de Riemann-Lebesgue afirma que si $f \in L^1[0,1]$ se cumple que

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx = 0.$$

Esto demuestra que para $f = \chi_A$ se tiene que $\left(\int_A \operatorname{sen}(nx)\, dx\right)_{n=1}^\infty \in \ c_0$.

Por otro lado, ν es una medida finitamente aditiva, ya que dados A_1, A_2 conjuntos medibles Lebesgue disjuntos, se tiene que :

$$\begin{aligned}\nu(A_1 \cup A_2) &= \left(\int_{A_1 \cup A_2} \operatorname{sen}(nx)\, dx \right)_{n=1}^\infty \\ &= \left(\int_{A_1} \operatorname{sen}(nx)\, dx + \int_{A_2} \operatorname{sen}(nx)\, dx \right)_{n=1}^\infty \\ &= \left(\int_{A_1} \operatorname{sen}(nx)\, dx \right)_{n=1}^\infty + \left(\int_{A_2} \operatorname{sen}(nx)\, dx \right)_{n=1}^\infty \\ &= \nu(A_1) + \nu(A_2).\end{aligned}$$

Además, se cumple que

$$\begin{aligned}\|\nu(A)\|_\infty &= \sup\Big\{\Big|\int_A \operatorname{sen}(nx)\,dx\Big| : n\in\mathbb{N}\Big\}\\ &\le \sup\Big\{\int_A |\operatorname{sen}(nx)|\,dx : n\in\mathbb{N}\Big\}\\ &\le m(A),\end{aligned}$$

donde m es la medida de Lebesgue en $[0,1]$.

Por lo tanto, si $(A_j)_{j=1}^\infty$ es una sucesión disjunta de subconjuntos $A_j\subseteq[0,1]$ medibles Lebesgue, entonces

$$\begin{aligned}\lim_m \Big\|\nu\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big)-\sum_{j=1}^m \nu(A_j)\Big\|_\infty &= \lim_m \Big\|\nu\Big(\bigcup_{j=m+1}^\infty A_j\Big)\Big\|_\infty\\ &\le \lim_m m\Big(\bigcup_{j=m+1}^\infty A_j\Big)\\ &=0.\end{aligned}$$

Por lo tanto ν como la hemos definido es una medida vectorial numerablemente aditiva con valores en c_0.

Ejemplo 5.1.6. Sea $[[0,1],\mathscr{M}[0,1]]$ espacio medible y m la medida de Lebesgue. Definimos

$$A\in\mathscr{M}[0,1]\mapsto \nu(A)=\Big(\int_A \operatorname{sen}(nx)\,dx\Big)_{n=1}^\infty\in\ell^2.$$

En primer lugar tenemos que esta medida está bien definida, es decir,

$$\Big(\sum_{n=1}^\infty\Big|\int_A \operatorname{sen}(nx)\,d\mu\Big|^2\Big)^{1/2}<\infty.$$

Esto se debe a que el sistema $\{\cos(nx),\operatorname{sen}(nx)\}$ es una base ortonormal de $L^2[0,1]$. Por lo tanto, dada una función $f\in L^2[0,1]$, sus coeficientes de Fourier están en ℓ^2. Entonces, si tenemos $f=\chi_A\in L^2[0,1]$ tenemos que $\big(\int_A \operatorname{sen}(nx)\,dx\big)_{n=1}^\infty$ es una parte de los coeficientes de Fourier de f, y por lo tanto la suma de sus cuadrados es finita.

Por otro lado, ν es una medida finitamente aditiva, ya que dados A_1,A_2 conjuntos medibles Lebesgue disjuntos, se tiene que :

$$\begin{aligned}\nu(A_1\cup A_2) &= \Big(\int_{A_1\cup A_2}\operatorname{sen}(nx)\,dx\Big)_{n=1}^\infty\\ &= \Big(\int_{A_1}\operatorname{sen}(nx)\,dx\Big)_{n=1}^\infty+\Big(\int_{A_2}\operatorname{sen}(nx)\,dx\Big)_{n=1}^\infty\\ &=\nu(A_1)+\nu(A_2).\end{aligned}$$

Además se cumple, por la desigualdad de Bessel, que

$$\|\nu(A)\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_A \operatorname{sen}(nx)\, dx \right|^2 \right)^{1/2} \leq \|\chi_A\|_{L^2[0,1]} = m(A)^{1/2}.$$

Por lo tanto, si $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión disjunta de subconjuntos $A_j \subseteq [0,1]$ medibles Lebesgue, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_m \left\| \nu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \Big) - \sum_{j=1}^{m} \nu(A_j) \right\|_2 &= \lim_m \left\| \nu\Big(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} A_j \Big) \right\|_2 \\
&\leq \lim_m \Big(m\big(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} A_j \Big)^{1/2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto ν como la hemos definido es una medida vectorial numerablemente aditiva en ℓ^2.

Ejemplo 5.1.7. Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida positiva y finita. Sea $T\colon L^1(\mu) \to E$ un operador lineal y continuo. Definimos

$$\nu(A) := T(\chi_A), \quad A \in \Sigma.$$

Entonces ν es finitamente aditiva, ya que dados A_1, A_2 conjuntos medibles disjuntos, por la linealidad del operador T tenemos que

$$\nu(A_1 \cup A_2) = T(\chi_{A_1 \bigcup A_2}) = T(\chi_{A_1} + \chi_{A_2}) = T(\chi_{A_1}) + T(\chi_{A_2}) = \nu(A_1) + \nu(A_2).$$

Además, para cada A, se tiene que

$$\|\nu(A)\|_E = \|T(\chi_A)\|_E \leq \|T\| \|\chi_A\|_{L^1(\mu)} = \|T\| \mu(A).$$

Consecuentemente, si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión disjunta de subconjuntos medibles, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_m \left\| \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) - \sum_{n=1}^{m} \nu(A_n) \right\|_E &= \lim_m \left\| \nu\Big(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n \Big) \right\|_E \\
&\leq \lim_m \mu\Big(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n \Big) \|T\| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto ν como la hemos definido es una medida vectorial numerablemente aditiva con valores en E.

Definición 5.1.8. Sea (X, Σ) un espacio medible, $\nu\colon \Sigma \to E$ una medida vectorial y μ una medida finita real no negativa. Si

$$\lim_{\mu(A)\to 0} \nu(A) = 0,$$

entonces se dice que ν es μ-continua y se escribe como $\nu \ll \mu$.

A veces cuando $\nu \ll \mu$ diremos que ν es continua respecto de μ o que ν es absolutamente continua respecto de μ.

5.2. La integral de Bochner

En esta sección veremos la definición de integral de Bochner. Es una abstracción de la integral de Lebesgue. Normalmente se dice que la integral de Bochner es simplemente la integral de Lebesgue con los valores absolutos reemplazados por normas. Veremos que a menudo esto es así, pero hay veces que es una afirmación errónea sobre la integral de Bochner. Además, veremos más adelante que, en general, el Teorema de Radón Nikodym falla para la integral de Bochner.

Definición 5.2.1. Sea (X, Σ) un espacio de medida y μ una medida positiva y finita. Sea E un espacio de Banach. Sea f una función $f\colon X \to E$. Se dice que f es simple, si existen $x_1 \dots x_n \in E$ y $A_1 \dots A_n$ medibles tales que

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}.$$

Para una función simple f, la integral respecto de μ se define por linealidad respecto de la medida, es decir,

$$\int_X f\, d\mu = \int_X \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i} \Big)\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \int_X (\chi_{A_i})\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(A_i),$$

donde se comprueba facilmente que el valor no depende de la expresión de f como suma de vectores por funciones características.

Además, se tiene la siguiente propiedad fundamental: si f es una función simple se cumple

$$\Big\| \int_X f\, d\mu \Big\|_E \leq \int_X \|f\|_E\, d\mu, \tag{5.1}$$

cuya comprobación es directa:

$$\begin{aligned}\Big\| \int_X f\, d\mu \Big\|_E &= \Big\| \int_X \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}\, d\mu \Big\|_E = \Big\| \sum_{i=1}^n x_i \mu(A_i) \Big\|_E \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|x_i \mu(A_i)\|_E = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_E \mu(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \|x_i\|_E \int_{A_i} d\mu = \int_X \Big(\sum_{i=1}^n \|x_1\|_E \chi_{A_i} \Big)\, d\mu \\ &= \int_X \|f\|_E\, d\mu.\end{aligned}$$

Se dice f que es μ-medible si existe una sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ de funciones simples con

$$\lim_n \|f_n(x) - f(x)\|_E = 0 \quad \text{ e.c.t. } x \in X.$$

Observación 5.2.2. En la literatura, el término fuertemente medible se usa a menudo para referirse a la μ-medibilidad. A veces, la referencia a la medida μ se puede suprimir si no hay ambigüedad.

Las propiedades usuales de estabilidad de una función medible bajo sumas, multiplicaciones por escalar y límite puntual se cumplen. Lo enunciaremos en el siguiente resultado.

Proposición 5.2.3. *Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida positiva y finita.*

(a) Si $f, g\colon X \to E$ son μ-medibles, entonces $f + g$ es μ-medible.

(b) Si $f\colon X \to E$ es μ-medible y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces αf es μ-medible.

(c) Si $f_n\colon X \to E$ $(n \geq 1)$ son μ-medibles, entonces $\lim_n f_n$ es μ-medible.

Definición 5.2.4. Sea (X, Σ) espacio medible, y μ una medida positiva y finita. Sea E espacio de Banach. Sea $f\colon X \to E$ una función μ-medible, se dice que es integrable Bochner si existe una sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ de funciones simples tales que:

$$\lim_n \int_X \|f_n(x) - f(x)\|_E\, d\mu(x) = 0.$$

Se cumple en este caso, a partir de (5.1) que la sucesión en E dada por

$$\left(\int_X f_n\, d\mu \right)_{n=1}^\infty$$

es de Cauchy en E y, por tanto se define la integral de f respecto de μ como

$$\int_A f(x)\, d\mu(x) = \lim_n \int_A f_n(x)\, d\mu(x), \quad A \in \Sigma.$$

Se cumple que este límite no depende de la sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ elegida.

Teorema 5.2.5. *Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida positiva y finita. Sea E espacio de Banach. Se cumple que una función $f\colon X \to E$ μ-medible es integrable Bochner si y solo si*

$$\int_X \|f(x)\|_E \, d\mu(x) < \infty.$$

Demostración. $\Rightarrow$) Si f es integrable Bochner, sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones simples que cumplen la Definicion 5.2.4, entonces

$$\int_X \|f(x)\|_E \, d\mu(x) \leq \int_X \|f(x) - f_n(x)\|_E \, d\mu(x) + \int_X \|f_n(x)\|_E \, d\mu(x) < \infty.$$

$\Leftarrow$) Recíprocamente supongamos que f es μ-medible y $\int_X \|f(x)\|_E \, d\mu(x) < \infty$. Elegimos una sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ medibles, que toman cada una de ellas una cantidad numerable de valores tal que

$$\|f(x) - f_n(x)\|_E \leq \frac{1}{n} \quad \text{para cada n},$$

(véase Diestel, Uhl, [3], p.42). Entonces, para cada entero positivo n, escribimos

$$f_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x_{n,m} \chi_{A_{n,m}}(x),$$

donde $A_{n,i} \cap A_{n,j} = \emptyset$ si $i \neq j$, $A_{n,m}$ medibles, $x_{n,m} \in E$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|f_n(x)\|_E &= \|f(x) - f_n(x) - f(x)\|_E \\
&\leq \|f(x) - f_n(x)\|_E + \|f(x)\|_E \\
&\leq \|f(x)\|_E + \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

en casi todo, y como μ es finita, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_X \|f_n(x)\|_E \, d\mu(x) &\leq \int_X \|f(x)\|_E \, d\mu(x) + \int_X \frac{1}{n} \, d\mu(x) \\
&= \int_X \|f(x)\|_E \, d\mu(x) + \frac{1}{n}\mu(X) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Para cada n, elegimos p_n grande tal que

$$\int_{\bigcup_{m=p_n+1}^{\infty} A_{n,m}} \|f_n(x)\|_E \, d\mu(x) < \frac{\mu(X)}{n},$$

y fijamos

$$g_n(x) := \sum_{m=1}^{p_n} x_{n,m}\chi_{A_{n.m}}(x).$$

Entonces, g_n es una función simple y se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_X \|f(x) - g_n(x)\|_E \, d\mu(x) &\leq \int_X \|f(x) - f_n(x)\|_E \, d\mu(x) + \int_X \|f_n(x) - g_n(x)\|_E \, d\mu(x) \\
&\leq \int_X \frac{1}{n} d\mu(x) + \int_{\bigcup_{m=p_n+1}^{\infty} A_{n,m}} \|f_n(x)\|_E \, d\mu(x) \\
&< \frac{\mu(X)}{n} + \frac{\mu(X)}{n} \\
&= \frac{2\mu(X)}{n}
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ se tiene que

$$\lim_n \int_X \|f(x) - g_n(x)\|_E \, d\mu(x) = 0.$$

Por lo tanto se tiene que f es integrable Bochner como queríamos probar. □

Teorema 5.2.6 (Convergencia Dominada)**.** *Sea (X, Σ) un espacio de medida y μ una medida positiva y finita. Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables Bochner con $f_n \colon X \to E$. Supongamos que*

$$\lim_n f_n(x) = f(x) \quad e.c.t.,$$

y que existe una función $g(x)$ con valores reales e integrable Lebesgue en X de manera que

$$\|f_n(x)\| \leq g(x) \quad e.c.t.$$

Entonces f es integrable Bochner y se cumple que

$$\lim_n \int_A f_n(x) \, d\mu(x) = \int_A f(x) \, d\mu(x), \quad A \in \Sigma.$$

Demostración. Por un lado tenemos que $\lim_n \|f(x) - f_n(x)\|_E = 0$ e.c.t. Por otro lado, se tiene que existe una función integrable Lebesgue $2g$ tal que

$$\|f(x) - f_n(x)\|_E \leq \|f(x)\|_E + \|f_n(x)\|_E \leq g(x) + g(x) = 2g(x)$$

Entonces, por el Teorema de la Convergencia Dominada en su versión escalar, tenemos que $\|f(x) - f_n(x)\|_E$ es integrable y que

$$\lim_n \int_X \|f_n(x) - f(x)\|_E = 0.$$

Por lo tanto, f es integrable Bochner y se tiene que $\lim_n \int_A f_n(x) \, d\mu(x) = \int_A f(x) \, d\mu(x)$ como queríamos. □

Definición 5.2.7. Sea (X, Σ) un espacio medible y ν una medida vectorial. Dado A medible la variación total de ν en $A \in \Sigma$ es

$$|\nu|(A) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} \|\nu(A_i)\|_E,$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones medibles $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de A. La medida variación de ν es la medida positiva dada por

$$A \in \Sigma \mapsto |\nu|(A) \in [0, \infty].$$

Teorema 5.2.8. *Sea (X, Σ) un espacio de medida y μ una medida positiva y finita. Si f es una función integrable Bochner, entonces se tiene:*

(a) $\lim_{\mu(A)\to 0} \int_A f(x)\, d\mu(x) = 0$.

(b) $\| \int_A f(x)\, d\mu(x)\|_E \leq \int_A \|f(x)\|_E\, d\mu(x), \quad A \in \Sigma$.

(c) Si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos y $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ entonces

$$\int_A f(x)\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)\, d\mu(x),$$

donde la suma es absolutamente convergente.

(d) Se define

$$\nu(A) := \int_A f(x)\, d\mu(x), \quad A \in \Sigma,$$

que es una medida vectorial con valores en E, de variación acotada, y cuya variación está dada por

$$|\nu|(A) = \int_A \|f(x)\|_E\, d\mu(x), \quad A \in \Sigma.$$

Demostración. (a) Como $\lim_{\mu(A)\to 0} \int_A \|f(x)\|_E\, d\mu(x) = 0$ para $\|f(\cdot)\|_E \in \mathscr{L}^1(\mu)$, el apartado (a) se sigue del (b).

(b) La desigualdad triangular nos da este apartado para funciones simples (visto en (5.1)). Para el caso general, solo hay que pasar al limite:

$$\begin{aligned}\Big\| \int_A f(x)\, d\mu(x) \Big\|_E &= \lim_n \Big\| \int_A f_n(x)\, d\mu(x) \Big\|_E \\ &\leq \lim_n \int_A \|f_n(x)\|_E\, d\mu(x) \\ &= \int_A \|f(x)\|_E\, d\mu(x).\end{aligned}$$

(c) Notemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f\,d\mu$ está dominada término a término por la serie convergente no negativa $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}\|f(x)\|_E\,d\mu$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f\,d\mu$ es absolutamente convergente.

Por otro lado, notemos que

$$\Big\|\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f(x)\,d\mu(x) - \sum_{n=1}^{m}\int_{A_n} f(x)\,d\mu(x)\Big\|_E = \Big\|\int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n} f(x)\,d\mu(x)\Big\|_E,$$

por la aditividad finita de la integral de Bochner. Además,

$$\lim_m \mu\Big(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n\Big) = 0,$$

luego por (a),

$$\lim_m \Big\|\int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n} f(x)\,d\mu(x)\Big\|_E = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f(x)\,d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f(x)\,d\mu(x)$$

como queríamos.

(d) Sea A medible y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ conjuntos medibles dos a dos disjuntos tales que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\|\nu(A_n)\|_E &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big\|\int_{A_n} f(x)\,d\mu(x)\Big\|_E\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}\|f(x)\|_E\,d\mu(x)\\ &= \int_A \|f(x)\|_E\,d\mu(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $|\nu|(A) \leq \int_A \|f(x)\|_E\,d\mu(x)$ por lo que ν es de variación acotada, pues $\int_X \|f(x)\|_E\,d\mu(x) < \infty$.

Falta probar la desigualdad contraria. Para ello, sea $\varepsilon > 0$ y elijamos una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples tales que

$$\lim_n \int_X \|f(x) - f_n(x)\|_E\,d\mu(x) = 0.$$

Fijamos n_0 tal que

$$\int_X \|f(x) - f_{n_0}(x)\|_E\,d\mu(x) < \varepsilon,$$

y elegimos una partición finita de A, es decir, $A = \bigcup_{i=1}^{N} B_i$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{N} \Big\| \int_{B_i} f_{n_0}(x)\, d\mu(x) \Big\|_E = \int_A \|f_{n_0}(x)\|_E\, d\mu(x),$$

esto es posible pues f_{n_0} es una función simple.

Entonces, refinando la partición anterior, es decir, subdividiendo de forma medible los conjuntos B_i, podemos obtener una partición de A, es decir, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, tal que

$$0 \leq |\nu|(A) - \sum_{n=1}^{\infty} \Big\| \int_{A_n} f(x)\, d\mu(x) \Big\|_E < \varepsilon.$$

Nótese que se sigue cumpliendo que

$$\int_A \|f_{n_0}(x)\|_E\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big\| \int_{A_n} f_{n_0}(x)\, d\mu(x) \Big\|_E.$$

Además

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \Big\| \int_{A_n} f(x)\, d\mu(x) \Big\|_E - \Big\| \int_{A_n} f_{n_0}(x)\, d\mu(x) \Big\|_E \right| \leq \int_A \|f(x) - f_{n_0}(x)\|_E\, d\mu(x) < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\left| |\nu|(A) - \int_A \|f_{n_0}(x)\|_E\, d\mu(x) \right| = \left| |\nu|(A) - \sum_{n=1}^{\infty} \Big\| \int_{A_n} f_{n_0}(x)\, d\mu(x) \Big\|_E \right| < 2\varepsilon.$$

Como esto se tiene para n_0 suficientemente grande, deducimos que

$$|\nu|(A) = \lim_n \int_A \|f_n(x)\|_E\, d\mu(x) = \int_A \|f(x)\|_E\, d\mu(x)$$

como queríamos. □

Corolario 5.2.9. *Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida positiva y finita. Si f y g son funciones integrables Bochner y*

$$\int_A f(x)\, d\mu(x) = \int_A g(x)\, d\mu(x) \quad A \in \Sigma,$$

entonces $f = g$ e.c.t.

Demostración. Definimos la medida

$$\nu(A) = \int_A (f(x) - g(x))\, d\mu(x), \quad A \in \Sigma,$$

entonces $\nu(A) = 0$ para cada A medible. Por lo tanto, $|\nu|(A) = 0$ para cada A medible, pero por el Teorema 5.2.8 apartado (d), se tiene que

$$0 = |\nu|(A) = \int_A \|f(x) - g(x)\|_E \, d\mu(x).$$

Por lo tanto, $\|f(x) - g(x)\|_E = 0$ e.c.t y esto solo ocurre si $f = g$ e.c.t como queríamos.

□

Proposición 5.2.10. *Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida positiva y finita. Sea $f\colon X \to E$ una función integrable Bochner. Entonces, dado un funcional lineal y continuo $y^* \in E^*$, se cumple:*

$$\langle y^*, \int_X f(x) \, d\mu(x) \rangle = \int_X \langle y^*, f(x) \rangle \, d\mu(x).$$

Demostración. Primero lo verificaremos para funciones simples $f = \sum_{i=1}^n z_i \chi_{A_i}$ con $z_i \in E$, para $i = 1 \ldots n$, $(A_i)_{i=1}^n$ conjuntos medibles disjuntos:

$$\begin{aligned}
\langle y^*, \int_X f(x) \, d\mu(x) \rangle &= \langle y^*, \sum_{i=1}^n z_i \mu(A_i) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle y^*, z_i \rangle \mu(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \langle y^*, z_i \rangle \int_{A_i} d\mu(x) \\
&= \int_X \Big(\sum_{i=1}^n \langle y^*, z_i \rangle \chi_{A_i}(x) \Big) \, d\mu(x) \\
&= \int_X \langle y^*, f(x) \rangle \, d\mu(x).
\end{aligned}$$

Para f μ-medible, consideramos $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ funciones simples medibles que cumplen la Definición 5.2.1. Entonces, gracias a la continuidad de y^* se tiene

$$\begin{aligned}
\langle y^*, \int_X f(x) \, d\mu(x) \rangle &= \langle y^*, \lim_n \int_X f_n(x) \, d\mu(x) \rangle \\
&= \lim_n \langle y^*, \int_X f_n(x) \, d\mu(x) \rangle \\
&= \lim_n \int_X \langle y^*, f_n(x) \rangle \, d\mu(x) \\
&= \int_X \lim_n \langle y^*, f_n(x) \rangle \, d\mu(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_X \langle y^*, \lim_n f_n(x) \rangle \, d\mu(x) \\
&= \int_X \langle y^*, f(x) \rangle \, d\mu(x).
\end{aligned}
$$

donde hemos podido intercambiar límite e integral por el Teorema de la Convergencia Dominada, pues $\int_X \|f(x)\|_E \, d\mu(x) < \infty$. $\square$

5.3. El fallo del TRN en el caso vectorial

Uno de los aspectos más interesantes de la teoría de la integral de Bochner se basa en la siguiente pregunta: ¿Cuándo surge una medida vectorial como una integral indefinida de Bochner?

Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida finito y $\nu\colon \Sigma \to E$ es una medida vectorial de la forma

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu,$$

para alguna f integrable Bochner, entonces ν es numerablemente aditiva (por el Teorema 5.2.8), μ-contínua y de variación acotada.

Recíprocamente, en el caso de medidas complejas sabemos que por el Teorema de Radon-Nikodym, si ν es una medida compleja, absolutamente continua respecto de μ, existe una función integrable f para la que $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$. Para la integral de Bochner en general, esto no tiene por que ser cierto.

Ejemplo 5.3.1. *Una medida vectorial, numerablemente aditiva, con valores en c_0 y de variación acotada que no tiene derivadad de Radon-Nikodym.*

Sea $([0,1], \mathscr{M}[0,1])$ espacio medible y μ la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Vamos a hacer una pequeña modificación en el Ejemplo 5.1.5 para obtener lo que buscamos. Definimos

$$\nu(A) := \Big(\int_A \operatorname{sen}(2^n \pi x) \, d\mu(x) \Big)_{n=1}^{\infty}.$$

La prueba de que esta medida está bien definida, es decir, $\nu(A) \in c_0$, y de que es numerablemente aditiva, sigue los pasos de el Ejemplo 5.1.5.

De la acotación

$$\|\nu(A)\|_{c_0} \leq \sup_n \int_A |\operatorname{sen}(2^n \pi x)| \, d\mu(x) \leq \mu(A), \quad A \in \mathscr{M}([0,1]),$$

se sigue que ν es μ-continua y de variación acotada, pues

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\nu(A_i)\|_{c_0} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \mu(A) < \infty.$$

Supongamos ahora que existe una función $f\colon [0,1] \to c_0$ integrable Bochner tal que

$$\nu(A) = \int_A f(x)\, d\mu(x), \quad A \in \mathscr{M}([0,1]),$$

donde f es de la forma

$$x \in [0,1] \mapsto f(x) = (f_n(x))_{n=1}^{\infty} \in c_0,$$

donde $\lim_{n\to\infty} f(x) = 0$ para casi todo x.

Como el dual de c_0 es ℓ_1, las coordenadas de un funcional lineal en c_0 son todas funcionales lineales continuos, es decir, consideramos $\rho_n = (0,\dots,1,\dots,0) \in \ell^1$, entonces

$$\langle \rho_n, \nu(A) \rangle = \int_A \operatorname{sen}(2^n \pi x)\, d\mu(x), \quad A \in \mathscr{M}([0,1]).$$

Utilizando la Proposición 5.2.10, se tiene que

$$\langle \rho_n, \int_A f(x)\, d\mu(x) \rangle = \int_A \langle \rho_n, f(x) \rangle\, d\mu(x) = \int_A f_n(x)\, d\mu(x), \quad A \in \mathscr{M}([0,1]).$$

Por lo tanto,

$$\int_A f_n(x)\, d\mu(x) = \int_A \operatorname{sen}(2^n \pi x)\, d\mu(x), \quad A \in \mathscr{M}([0,1]).$$

Entonces, como lo anterior se tiene para todo A medible, se deduce que

$$f_n(x) = \operatorname{sen}(2^n \pi x) \quad \text{e.c.t.},$$

por lo que el candidato a función densidad de Bochner es

$$f(x) = \big(\operatorname{sen}(2^n \pi x)\big)_{n=1}^{\infty}.$$

Veamos ahora que esta función no toma valores en c_0 en un conjunto de medida positiva. Definimos

$$A_n := \Big\{ x \in [0,1] : f_n(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Big\}.$$

Entonces $\mu(A_n) = \frac{1}{4}$ para cada n. Veámoslo. Sabemos que $x \in A_n$ si se tiene que

$$\operatorname{sen}(2^n \pi x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto, haciendo cálculos y despejando la x se tiene que

$$\frac{1}{2^{n+2}} + \frac{k}{2^{n-1}} \leq x \leq \frac{3}{2^{n+2}} + \frac{k}{2^{n-1}}.$$

Definimos

$$I_k := \Big[\frac{1}{2^{n+2}} + \frac{k}{2^{n-1}}, \frac{3}{2^{n+2}} + \frac{k}{2^{n-1}}\Big].$$

Determinemos para qué valores de k se tiene $I_k \subseteq [0,1]$. Debe ser $k \geq 0$ y debe ocurrir que

$$\frac{3}{2^{n+2}} + \frac{k}{2^{n-1}} \leq 1.$$

Por lo tanto,

$$\frac{3}{8} + k \leq 2^{n-1},$$

así que

$$k \leq 2^{n-1} - 1,$$

porque k debe ser entero. Por lo tanto, para $k = 0 \ldots 2^{n-1} - 1$ se tiene que $I_k \subseteq [0,1]$ y son disjuntos. Por lo tanto, hay 2^{n-1} intervalos, y como $\mu(I_n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$, entonces

$$\mu(A_n) = \frac{2^{n-1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{4},$$

como queríamos.

Consideremos ahora el conjunto de los puntos que pertenecen a una infinidad de conjuntos A_n:

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j.$$

Podemos acotar inferiormente la medida de A:

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\Big) = \lim_n \mu\Big(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\Big) \geq \lim_n \mu(A_n) = \frac{1}{4}.$$

Por otro lado, consideremos el conjunto B de los puntos $x \in [0,1]$ tales que $f(x) \notin c_0$

$$B := \Big\{x \in [0,1] : f(x) \notin c_0\Big\}.$$

Como si $x \in A$ se tiene que x pertenece a una infinitud de conjuntos A_n, entonces $f_n(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ para infinitos valores de $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\lim_n f_n(x) \neq 0$, luego $x \in B$. Se sigue que $\mu(B) \geq \frac{1}{4}$. En particular, $\mu(B) > 0$. Se deduce que la función f no toma valores en c_0 en casi todo $x \in [0,1]$, luego la medida ν no tiene una densidad Bochner integrable.

Observación 5.3.2. El fallo del Teorema de Radon-Nikodym para la integral de Bochner no es un aspecto negativo. En realidad, este fallo en casos especiales tiene poderosas repercusiones en la teoría de operadores, la geometría de los espacios de Banach, la teoría de dualidad de los espacios de Banach, la teoría de probabilidad vectorial y la teoría de integración.

Ejemplo 5.3.3. *Una medida vectorial con valores en $L^1([0,1])$ que no tiene derivada de Radon-Nikodym.*

Sea $([0,1], \mathscr{M}([0,1]))$ y μ la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Definimos $\nu\colon \mathscr{M}[0,1] \to L^1([0,1])$ como

$$A \in \mathscr{M}[0,1] \mapsto \nu(A) = \chi_A \in L^1([0,1]).$$

Entonces ν es numerablemente aditiva (por el Ejemplo 5.1.2), μ-continua y de variación acotada. De hecho, se tiene que

$$|\nu|(A) = \sup \sum_{n=1}^{\infty} \|\nu(A_i)\|_{L^1(\mu)} = \sup \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \mu(A), \quad A \in \mathscr{M}([0,1]).$$

Supongamos que existe $g\colon [0,1] \to L^1([0,1])$ integrable Bochner tal que

$$\nu(A) = \int_A g\, d\mu, \quad A \in \mathscr{M}([0,1]).$$

Definimos un operador $T\colon L^\infty([0,1]) \to L^1([0,1])$ como

$$Tf = \int_{[0,1]} fg\, d\mu, \quad f \in L^\infty([0,1]).$$

Veamos que este operador es compacto, es decir, que $T(B_{L^\infty[0,1]})$ es un conjunto relativamente compacto en $L^1[0,1]$. Sea $\varepsilon > 0$, como g es integrable Bochner, por la Definición 5.2.4, existe una función g_n simple tal que

$$\int_{[0,1]} \|g(x) - g_n(x)\|_1\, d\mu(x) < \varepsilon.$$

Sea $g_n(x) = \sum_{i=1}^m \eta_i \chi_{A_i}(x)$ donde $\eta_i \in L^1[0,1]$ y $(A_i)_{i=1}^m$ son conjuntos medibles disjuntos. Sea $f \in B_{L^\infty[0,1]}$, es decir, $|f(x)| \le 1$ e.c.t. y $x \in [0,1]$. Entonces

$$\begin{aligned} \Big\| \int_{[0,1]} f(x)g(x)\, d\mu(x) - \int_{[0,1]} f(x)g_n(x)\, d\mu(x) \Big\|_1 &= \Big\| \int_{[0,1]} f(x)(g(x) - g_n(x))\, d\mu(x) \Big\|_1 \\ &\le \int_{[0,1]} \|f(x)(g(x) - g_n(x)\|_1\, d\mu(x) \\ &= \int_{[0,1]} |f(x)| \|g(x) - g_n(x)\|_1\, d\mu(x) \\ &\le \int_{[0,1]} \|g(x) - g_n(x)\|_1\, d\mu(x) \\ &< \varepsilon \end{aligned} \tag{5.2}$$

Desarrollemos $\displaystyle\int_{[0,1]} f(x)g_n(x)\,d\mu(x)$

$$\int_{[0,1]} f(x)g_n(x)\,d\mu(x) = \int_{[0,1]} f(x)\Big(\sum_{i=1}^{m} \eta_i \chi_{A_i}(x)\Big)\,d\mu(x) = \sum_{i=1}^{m} \eta_i \int_{A_i} f(x)\,d\mu(x),$$

donde $\int_{A_i} f(x)\,d\mu(x)$ son escalares que cumplen:

$$\sum_{i=1}^{m} \Big| \int_{A_i} f(x)\,d\mu(x) \Big| \leq \sum_{i=1}^{m} \int_{A_i} |f(x)|\,d\mu(x) \leq \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) \leq 1.$$

Por lo tanto se cumple que el vector $\displaystyle\int_{[0,1]} g_n(x)f(x)\,d\mu(x)$ pertenece a la envolvente convexa de las funciones $\eta_1 \ldots \eta_m$ de $L^1[0,1]$. Este conjunto es un conjunto compacto que denotamos $K = co\{\eta_1, \ldots, \eta_m\}$.

Se sigue de (5.2) que $T(B_{L^\infty[0,1]}) \subset K + \varepsilon$, y como $K + \varepsilon$ es relativamente compacto, se deduce que $T(B_{L^\infty[0,1]})$ es relativamente compacto como queríamos.

Por otro lado consideremos una sucesión de conjuntos medibles (A_n) tales que

$$\mu(A_n) = \frac{1}{2}, \quad \mu(A_n \Delta A_m) = \frac{1}{4}.$$

Una forma de obtenerlos es considerar particiones díadicas sucesivas de [0,1] y formar A_n escogiendo los subintervalos impares de cada partición. Es decir,

$$\begin{aligned}
n = 1; \quad & I_1 = \Big[0, \frac{1}{2}\Big], \quad I_2 = \Big[\frac{1}{2}, 1\Big] \\
n = 2; \quad & I_3 = \Big[0, \frac{1}{4}\Big], \quad I_4 = \Big[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\Big], \quad I_5 = \Big[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\Big], \quad I_6 = \Big[\frac{3}{4}, 1\Big] \\
n = 3; \quad & I_7 = \Big[0, \frac{1}{8}\Big], \quad I_8 = \Big[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\Big], \quad I_9 = \Big[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\Big], \quad I_{10} = \Big[\frac{3}{8}, 12\Big] \\
& I_{11} = \Big[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\Big], \quad I_{12} = \Big[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\Big], \quad I_{13} = \Big[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\Big], \quad I_{14} = \Big[\frac{7}{8}, 1\Big] \\
& \ldots
\end{aligned}$$

De esta forma se tiene:

$$\|\chi_{A_n} - \chi_{A_m}\|_1 = \mu(A_n \Delta A_m) = \frac{1}{4}.$$

Como tenemos que T es compacto, es decir $T(B_{L^\infty[0,1]})$ relativamente compacto, se tiene que como $\chi_A \in B_{L^\infty[0,1]}$, existe una subsucesión $(\chi_{A_{n_k}})$ de la sucesión (χ_{A_n}) tal que

$$\|T(\chi_{A_{n_k}}) - T(\chi_{A_{m_k}})\|_1 \to 0.$$

Sin embargo, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|T(\chi_{A_n}) - T(\chi_{A_m})\|_1 &= \left\| \int_{A_n} g(x)\, d\mu(x) - \int_{A_m} g(x)\, d\mu(x) \right\|_1 \\
&= \|\nu(A_n) - \nu(A_m)\|_1 \\
&= \|\chi_{A_n} - \chi_{A_m}\|_1 \\
&= \mu(A_n \Delta A_m) \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, no puede existir dicha subsucesión y entonces T no puede ser compacto. Sin embargo, habíamos visto antes que si existiera la función g integrable Bochner, T sería compacto. Esto significa que entonces no puede existir la función g como la hemos definido.

5.4. Teorema de Radon-Nikodym y representación de operadores

Este capítulo se centra en la relación que hay entre el Teorema de Representación de Riesz y el Teorema de Radon-Nikodym. Recordemos primero lo que dicen estos teoremas.

Definición 5.4.1. Una función $g\colon X \to E$ μ-medible es esencialmente acotada si cumple

$$
\text{ínf}\left\{ a > 0 : \mu\big(\{x \in X : \|g(x)\|_E > a\}\big) = 0 \right\} < \infty.
$$

Teorema 5.4.2 (Representación Riesz)**.** *Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida positiva y finita. Sea E espacio de Banach y $T\colon L^1(\mu) \to E$ un operador lineal y continuo. Entonces existe una función $g : X \to E$ μ-medible y esencialmente acotada tal que*

$$
Tf = \int_X fg\, d\mu, \quad f \in L^1(\mu). \tag{5.3}
$$

Teorema 5.4.3 (Radon-Nikodym)**.** *Sea (X, Σ) un espacio medible y μ una medida positiva y finita. Sea E espacio de Banach. Sea $\nu\colon \Sigma \to E$ es una medida vectorial, μ-continua y de variación acotada. Entonces existe una función g integrable Bochner respecto de μ tal que*

$$
\nu(A) = \int_A g\, d\mu, \quad A \in \Sigma. \tag{5.4}
$$

Veremos que la conexión entre ellos es básicamente formal y que si E es un espacio de Banach fijo, entonces el Teorema de Representación de Riesz describe todos los operadores T como en (5.3) si y sólo si el Teorema de Radón-Nikodym describe todas las medidas ν como en (5.4).

Ejemplo 5.4.4. *Fallo del Teorema de Representación de Riesz para un operador* $T\colon L^1[0,1] \to c_0$

Sea $([0,1], \mathscr{M}[0,1])$ y μ la medida de Lebesgue. Definimos un operador $T\colon L^1(\mu) \to c_0$ como

$$Tf = \Big(\int_{[0,1]} f(t) \mathrm{sen}(2^n \pi t)\, d\mu(t) \Big)_{n=1}^{\infty}.$$

De nuevo por el Lema de Riemann-Lebesgue se prueba que T es un operador lineal en $L^1(\mu)$ con valores en c_0.

Además,

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{c_0} &= \sup_n \Big| \int_{[0,1]} f(t) \mathrm{sen}(2^n \pi t)\, d\mu(t) \Big| \\
&\leq \sup_n \int_{[0,1]} |f(t) \mathrm{sen}(2^n \pi t)|\, d\mu(t) \\
&\leq \int_{[0,1]} |f(t)|\, d\mu(t) \\
&= \|f\|_1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, T está acotado. Supongamos entonces que existe una función $g : X \to E$ μ-medible y esencialmente acotada tal que

$$Tf = \int_{[0,1]} fg\, d\mu, \quad f \in L^1(\mu).$$

Entonces, si ν es la medida vectorial del Ejemplo 5.3.1 y A medible, se sigue que

$$\nu(A) = T(\chi_A) = \int_A g\, d\mu,$$

pero por dicho ejemplo sabemos que esta función g no existe.

Ejemplo 5.4.5. *Fallo del Teorema de Representación de Riesz para el operador identidad en* $L^1([0,1])$

Sea $([0,1], \mathscr{M}[0,1])$ y μ la medida de Lebesgue. Sea T el operador identidad en $L^1([0,1])$. Si el Teorema de Representación de Riesz se cumple para este operador, existe una función $g\colon [0,1] \to L^1([0,1])$ acotada, μ-medible tal que

$$f = Tf = \int_{[0,1]} fg\, d\mu, \quad f \in L^1([0,1]).$$

En particular, tenemos que $\chi_A = \int_A g\, d\mu$, $A \in \mathscr{M}[0,1]$. Pero entonces, sabemos que g sería la derivada de Radon-Nikodym de la medida ν definida en el Ejemplo 5.3.3, lo que es imposible porque habíamos demostrado que no existe.

La relación entre los Ejemplos 5.3.1, 5.3.3 de la sección anterior y los Ejemplos 5.4.4, 5.4.5 no es accidental. Precisaremos con los siguientes resultados esta relación.

Definición 5.4.6. Sea (X, Σ) espacio medible, μ una medida positiva y finita y E un espacio de Banach. Se dice que E tiene la propiedad de Radon-Nikodym respecto a (X, Σ, μ) si para cada medida vectorial $\nu\colon \Sigma \to E$ μ-continua, de variación acotada, existe g integrable Bochner tal que

$$\nu(A) = \int_A g\, d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

Se dice que E tiene la propiedad de Radon-Nikodym si la tiene respecto a cada espacio de medida finita.

Sea $T\colon L^1(\mu) \to E$ un operador lineal y acotado, se dice que es representable Riesz si existe $g : X \to E$ tal que

$$Tf = \int_X fg\, d\mu, \quad f \in L^1(\mu),$$

donde g es μ-medible y esencialmente acotada.

Teorema 5.4.7. *Sea (X, Σ) un espacio medible, μ una medida positiva finita y E un espacio de Banach. Entonces E tiene la propiedad de Radon-Nikodym respecto de (X, Σ, μ) si y solo si cada $T\colon L^1(\mu) \to E$ es representable Riesz.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que E tiene la propiedad de Radón-Nikodym respecto a (X, Σ, μ). Sea $T\colon L^1(\mu) \to E$ un operador lineal y continuo. Definimos $\nu\colon \Sigma \to E$ como

$$\nu(A) := T(\chi_A), \quad A \in \Sigma.$$

Como $\|\nu(A)\|_E = \|T(\chi_A)\|_E \leq \|T\|\|\chi_A\|_{L^1(\mu)} = \|T\|\mu(A)$, se sigue que ν es numerablemente aditiva, μ-continua y de variación acotada. Entonces, como E tiene la propiedad de Radón-Nikodym, existe una función g integrable Bochner tal que

$$\nu(A) = T(\chi_A) = \int_A g\, d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

Por lo tanto se tiene que

$$T(f) = \int_X fg\, d\mu,$$

para f simple y por lo tanto para $f \in L^\infty(\mu)$, porque cualquier función $f \in L^\infty(\mu)$ es el límite uniforme de funciones simples. Por lo tanto tenemos que

$$T(f) = \int_X fg\, d\mu, \quad f \in L^\infty(\mu).$$

Como $\|\nu(A)\|_E \leq \|T\|\mu(A)$ para todo A medible, se sigue que $|\nu|(A) \leq \|T\|\mu(A)$. Por lo tanto, para A medible con $\mu(A)$ positivo,

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A \|g\|_E\, d\mu \leq \|T\|.$$

Entonces por la Proposición 2.2.2, llegamos a que $\|g\|_E \leq \|T\|$ e.c.t. Por lo tanto, g es μ-medible y esencialmente acotada y por eso T es representable.

$\Leftarrow$) Supongamos que cada operador lineal y continuo $T\colon L^1(\mu) \to E$ es representable. Sea $\nu\colon \Sigma \to E$ una medida vectorial μ-continua de variación acotada. Como ν es numerablemente aditiva, entonces también lo es $|\nu|$. Además, como $|\nu|$ se anula en cada conjunto de medida μ nula, la medida $|\nu|$ también es μ-continua.

Existe una sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos medibles disjuntos tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ con la propiedad de que

$$(n-1)\mu(A) \leq |\nu|(A) \leq n\mu(A),$$

para cada A medible contenido en A_n para $n = 1, 2, \ldots$ Para eso, elegimos una función no negativa $h \in L^1(\mu)$ tal que

$$|\nu|(A) = \int_A h \, d\mu, \quad A \in \Sigma,$$

y entonces consideramos $A_n = \{x \in X : n-1 \leq h(x) < n\}$

Fijado n y para una función simple $f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{B_i}$ con B_i medible, $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$, definimos el operador

$$T_n(f) := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \nu(A_n \cap B_i) = \int_{A_n} f \, d\nu.$$

Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned}
\|T_n(f)\|_E &= \Big\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \nu(A_n \cap B_i) \Big\|_E \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| |\nu|(A_n \cap B_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| n\mu(A_n \cap B_i) \\
&= n\|f\|_1.
\end{aligned}$$

Se sigue entonces que T_n se extiende a un operador lineal y continuo de $L^1(\mu)$ en E. Como cada operador $T\colon L^1(\mu) \to E$ es representable, existe $g_n\colon X \to E$ μ-medible y esencialmente acotada tal que

$$T_n(f) = \int_X f g_n \, d\mu, \quad f \in L^1(\mu).$$

Además, se tiene que

$$\nu(A \cap A_n) = T_n(\chi_A) = \int_A g_n \, d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

Haciendo esto para cada n, construimos una sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ μ-medible y esencialmente acotada tal que $\nu(A\cap\ A_n)=\int_A g_n\,d\mu$ para A medible. Definimos $g\colon X\to E$ como

$$g(w):=g_n(w),\quad w\in A_n.$$

Entonces, como ν es numerablemente aditiva,

$$\nu(A)=\lim_m\left(\nu\Big(A\cap\Big(\bigcup_{n=1}^{m}A_n\Big)\Big)\right)=\lim_m\int_{A\cap(\bigcup_{n=1}^{m}A_n)}g\,d\mu.$$

Tomando $A=\cup_{n=1}^{m}A_n$, se deduce que

$$\nu(\cup_{n=1}^{m}A_n)=\int_{\cup_{n=1}^{m}A_n}g\,d\mu.$$

Así,

$$\int_{\cup_{n=1}^{m}A_n}\|g\|_E\,d\mu=|\nu|(\cup_{n=1}^{m}A_n)\leq|\nu|(X).$$

Tomando supremo en $m\in\mathbb{N}$, se deduce, como ν es de variación acotada, que

$$\int_X\|g\|_E\,d\mu\leq|\nu|(X)<\infty,$$

y por lo tanto $\|g\|\in L^1(\mu)$ por el Teorema de la Convergencia Monótona. Por último, por el Teorema de la Convergencia Dominada, se tiene que

$$\nu(A)=\lim_m\int_{A\cap\bigcup_{n=1}^{m}A_n}g\,d\mu=\int_A g\,d\mu.$$

Por lo tanto, E tiene la propiedad de Radón-Nikodym respecto de (X,Σ,μ) como queríamos probar. □

5.5. Bases de Schauder

En cualquier tratamiento de sucesiones y series en espacios de Banach, un papel importante está reservado para las sucesiones básicas. La discusión de esta importante noción, ocupará esta sección del capítulo. Se sentará una base en la que construiremos varios de los aspectos más importantes de la teoría de sucesiones y series en espacios de Banach.

Definición 5.5.1. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach E, se llama base de Schauder para E si para cada $x\in E$ existe una única sucesión $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ de escalares tal que

$$x=\lim_n\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k.$$

Es fácil ver que una base de Schauder está formada por vectores linealmente independientes.

Una sucesión básica es una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que es base del subespacio vectorial cerrado que genera. Es decir, la clausura de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, que notaremos como $[x_n]$.

Definición 5.5.2. Sea E espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Schauder. Llamamos funcionales coeficientes a $x_k^*\colon E \to \mathbb{C}$ para $k \in \mathbb{N}$, siendo

$$x_k^*\colon \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \mapsto \alpha_n,$$

Teorema 5.5.3. *Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder para el espacio de Banach E, entonces, cada uno de los funcionales coeficientes son continuos en E.*

Demostración. Denotemos S el espacio lineal de todas las sucesiones escalares $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ para las que existe $\lim_n \sum_{k=1}^{n} s_k x_k$ en E. Definimos

$$\|(s_n)\|_S := \sup_n \Big\| \sum_{k=1}^{n} s_k x_k \Big\|_E.$$

Usando la unicidad de expansiones respecto al sistema $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, vemos que el operador $B\colon (S, \|\cdot\|_S) \to (E, \|\cdot\|_E)$ dado por

$$B(s_n) := \lim_n \sum_{k=1}^{n} s_k x_k, \quad (s_n) \in S,$$

es un operador lineal de S en E que cumple $\|B(s_n)\|_E \leq \|(s_n)\|_S$. Se cumple que B es un isomorfismo. Para ver que se da esto, solo necesitamos probar que $(S, \|\cdot\|_S)$ es un espacio de Banach y apelar al Teorema de la Aplicación Abierta.

Se ve fácilmente que $(S, \|\cdot\|_S)$ es un espacio lineal normado, por lo que solo falta ver que es completo. Sea $(y_p)_{p=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en S, para cada $p \in \mathbb{N}$ se tiene que $y_p = (s_{p,i})_{i=1}^{\infty} \in S$. Entonces

$$\begin{aligned}
|s_{p,i} - s_{q,i}| \|x_i\|_E &= \Big\| \sum_{n=1}^{i} (s_{p,n} - s_{q,n}) x_n - \sum_{n=1}^{i-1} (s_{p,n} - s_{q,n}) x_n \Big\|_E \\
&\leq \Big\| \sum_{n=1}^{i} (s_{p,n} - s_{q,n}) x_n \Big\|_E + \Big\| \sum_{n=1}^{i-1} (s_{p,n} - s_{q,n}) x_n \Big\|_E \\
&\leq 2 \sup_i \Big\| \sum_{n=1}^{i} (s_{p,n} - s_{q,n}) x_i \Big\|_E \\
&= 2 \|y_p - y_q\|_S.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión$(s_{p,i})_{p=1}^{\infty}$ converge para cada i. Sea $s = (s_i)_{i=1}^{\infty}$ la sucesión de escalares obtenida al hacer $p \to \infty$, es decir, $s_i := \lim_p s_{p_i}$. Sea r un índice elegido tal que para $p \geq r$ tenemos $\|y_p - y_r\|_S < \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, que existe pues la sucesión $(y_p)_{p=1}^{\infty}$ es de Cauchy en S. Por la definición de la norma de S, para $p \geq r$ tenemos

$$\sup_n \Big\| \sum_{i=1}^{n} (s_{p,i} - s_{r,i}) x_i \Big\|_E \leq \varepsilon.$$

Como $y_r = (s_{r,i})_{i=1}^{\infty} \in S$, existe n_ε tal que para todo $m, n \geq n_\varepsilon$ con $m \geq n$, $\big\| \sum_{i=n}^{m} s_{r,i} x_i \big\|_E < \varepsilon$. Entonces tomando límite cuando $p \to \infty$, para $m \geq n \geq n_\varepsilon$, tenemos que

$$\Big\| \sum_{i=n}^{m} s_i x_i \Big\|_E \leq 3\varepsilon,$$

y por lo tanto, $s = (s_i)_{i=1}^{\infty} \in S$, y s es el limite en S de la sucesión $(y_p)_{p=1}^{\infty}$.

Entonces, como B es un isomorfismo, está claro que los funcionales coeficientes x_k^* son continuos pues se tiene

$$|\alpha_k| \|x_k\|_E \leq 2\|B^{-1}\| \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \Big\|_E.$$

$\square$

Un espacio con una base es siempre separable, y es en realidad el caso más natural de espacios de Banach separables. Resaltemos que encontrar una base para espacios conocidos no es, en general, fácil. Veremos algunos ejemplos.

Ejemplo 5.5.4. En el caso de los espacios de sucesiones separables c_0 y ℓ_p con $1 \leq p < \infty$, la sucesión $(\rho_n)_{n=1}^{\infty}$ de vectores unidad

$$\rho_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots),$$

es una base pues para cada $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$ se cumple

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \rho_n,$$

donde la serie converge en la norma de ℓ^p es decir,

$$\lim_{N \to \infty} \Big\| x - \sum_{n=1}^{N} x_n \rho_n \Big\|_p = 0.$$

Análogamente, para cada $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ se tiene que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \rho_n$$

donde la serie converge en la norma de c_0 es decir,

$$\lim_{N\to\infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_n \rho_n \right\|_\infty = 0.$$

En el caso de c, el espacio de sucesiones convergentes, tomamos

$$\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1, \ldots).$$

Entonces, $\{\mathbf{1}, \rho_1, \ldots, \rho_n, \ldots\}$ es una base para c pues para cada $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c$ se cumple

$$x = (\lim_n x_n) \cdot \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \rho_n,$$

donde la serie converge en la norma de c es decir,

$$\lim_{N\to\infty} \left\| x - (\lim_n x_n) \cdot \mathbf{1} - \sum_{n=1}^{N} x_n \rho_n \right\|_\infty = 0.$$

Ejemplo 5.5.5. Con los espacios de funciones es más complicado. En el caso de $C[0,1]$, J. Schauder probó que la base de Schauder es una base donde los términos están dados como:

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= 1, \quad t \in [0,1] \\
f_2(t) &= t, \quad t \in [0,1] \\
f_3(t) &= \begin{cases} 2t & t \in [0,1/2] \\ 2-2t & t \in [1/2,1] \end{cases} \\
f_4(t) &= \begin{cases} 4t & t \in [0,1/4] \\ 2-4t & t \in [1/4,1/2] \\ 0 & t \in [1/2,1] \end{cases} \\
f_5(t) &= \begin{cases} 0 & t \in [0,1/2] \\ 4t-2 & t \in [1/2,3/4] \\ 4-4t & t \in [3/4,1] \end{cases} .
\end{aligned}$$

En general, si $n \geq 1$ y $1 \leq i \leq 2^n$, podemos definir

$$f_{2^n+i+1}(t) = f_3(2^n t + 1 - i), \qquad \text{donde } 2^n t + 1 - i \in [0,1].$$

Ejemplo 5.5.6. En el caso $L^p[0,1]$, con $1 \leq p < \infty$, la base de Haar viene dada como:

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= 1, \quad t \in [0,1] \\
f_2(t) &= \chi_{[0,1/2]}(t) - \chi_{(1/2,1]}(t) \\
f_3(t) &= \chi_{[0,1/4]}(t) - \chi_{(1/4,1/2]}(t) \\
f_4(t) &= \chi_{[1/2,3/4]}(t) - \chi_{(3/4,1]}(t).
\end{aligned}$$

En general, si $n \geq 1$ y $1 \leq i \leq 2^n$ entonces

$$f_{2^n+i}(t) = \chi_{[(2i-2)/2^{n+1},(2i-1)/2^{n+1}]}(t) - \chi_{((2i-1)/2^{n+1},2i/2^{n+1}]}(t).$$

Teorema 5.5.7. *Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de vectores no nulos en el espacio de Banach E. Entonces, para que $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ sea una sucesión básica, es necesario y suficiente que exista una constante finita $K > 0$ tal que para cualquier elección de escalares $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ y cualesquiera enteros $n < m$ se tiene*

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \Big\|_E \leq K \Big\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \Big\|_E. \tag{5.5}$$

Demostración. Supongamos $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es base del subespacio vectorial cerrado que genera $[x_i]$ y definimos $P_k \colon [x_i] \to [x_i]$ como

$$P_k\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i.$$

Cada P_k es un operador lineal acotado (porque cada funcional coeficiente x_i^* es continuo) y para cada $x \in [x_i]$, tenemos $x = \lim_{k\to\infty} P_k x$, se sigue por el Principio de Acotación Uniforme que $\sup_k \|P_k\| < \infty$.

Entonces, sean $n < m$ y $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in E$ entonces

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \Big\|_E &= \Big\| P_n\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\Big) \Big\|_E \\
&= \Big\| P_n P_m\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\Big) \Big\|_E \\
&= \Big\| P_n\Big(\sum_{k=1}^{m} a_k x_k\Big) \Big\|_E \\
&\leq \|P_n\| \Big\| \sum_{k=1}^{m} a_k x_k \Big\|_E \\
&\leq \sup_n \|P_n\| \Big\| \sum_{k=1}^{m} a_k x_k \Big\|_E.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando $K = \sup_n \|P_n\|$ se tiene la condición necesaria.

Veamos que también es condición suficiente. Sea ahora $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de vectores no nulos, para la que existe $K > 0$ tal que para todo $n < m$ se tiene

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \Big\|_E \leq K \Big\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \Big\|_E.$$

Claramente, si un vector x tiene una representación en la forma

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = \lim_N \sum_{i=1}^{N} a_i x_i,$$

ésta es única. Esto se sigue del hecho de que para todo $i, k \geq 1$ se tiene

$$|a_i| \|x_i\|_E = \|a_i x_i\|_E \leq K \Big\| \sum_{j=i}^{i+k} a_j x_j \Big\|_E,$$

así que

$$|a_i| \leq \frac{K}{\|x_i\|_E} \Big\| \sum_{j=i}^{i+k} a_j x_j \Big\|_E.$$

Considremos la envoltura lineal de $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$, que denotamos por $\langle x_i \rangle = \langle x_i : i \in \mathbb{N} \rangle$. Entonces cada vector en $\langle x_i \rangle$ es representable por una suma finita. La condición (5.5), asegura que los operadores $P_n \colon \langle x_i \rangle \to \langle x_i \rangle$ dados por

$$P_n\Big(\sum a_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

son operadores lineales acotados cuyas normas son menores o iguales que K. Se sigue que cada P_n tiene una extensión lineal, aún llamada P_n proyectando $[x_i : i \geq 1]$ en $\langle x_i : 1 \leq i \leq n \rangle$. Un efecto de esto, es la continuidad de los funcionales coeficiente x_k^* definidos en $\langle x_i \rangle$ como

$$x_k^*\Big(\sum a_i x_i\Big) = a_k.$$

Los x_k^*, tienen una extensión única a todo $[x_i : i \geq 1]$ dada por

$$x_k^* x_k = P_k(x) - P_{k-1}(x).$$

Veamos que entonces cada elemento de $[x_i]$, tiene representación de la forma

$$\lim_N \sum_{i=1}^{N} a_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i.$$

Sea $x \in [x_n]$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $\sigma \in \langle x_i : i = 1 \ldots n(\varepsilon) \rangle$, para algún $n(\varepsilon)$, tal que $\|x - \sigma\|_E < \varepsilon$. Si consideramos $n \geq n_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
\|x - P_n x\|_E &\leq \|x - \sigma\|_E + \|\sigma - P_n \sigma\|_E + \|P_n \sigma - P_n x\|_E \\
&= \|x - \sigma\|_E + \|\sigma - \sigma\|_E + \|P_n(\sigma - x)\|_E \\
&\leq \varepsilon + \|P_n\| \varepsilon \\
&\leq (1 + K)\varepsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $x = \lim_n P_n x = \lim_n \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) x_i$. Así $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica. $\square$

Definición 5.5.8. Una base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de un espacio de Banach E se llama acotadamente completa si para cada sucesión escalar $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\sup_n \Big\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \Big\|_E < \infty,$$

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge en E.

Ejemplo 5.5.9. La base canónica de ℓ^p para $1 \leq p < \infty$ es una base acotadamente completa. Como vimos en el Ejemplo 5.5.4 la base canónica de este espacio, es la formada por los vectores unidad ρ_n, donde $\rho_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$.

Si $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión escalar tal que $\sup_n \Big\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \rho_k \Big\|_p < \infty$, entonces significa que

$$\sup_n \Big(\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k)^p \Big)^{1/p} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k)^p \Big)^{1/p} < \infty$$

luego $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots) \in \ell^p$.

5.6. Casos positivos del Teorema de Radon-Nikodym

Definición 5.6.1. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Se dice que A medible con $\mu(A) > 0$ es un átomo, si no existe $B \in \Sigma$ tal que $B \subset A$ con $0 < \mu(B) < \mu(A)$.

Se dice que el espacio de medida (X, Σ, μ) es puramente atómico, si todo conjunto A medible, es union de una familia de átomos.

Proposición 5.6.2. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida puramente atómico, con μ positiva y finita. Entonces todo espacio de Banach tiene la propiedad de Radon-Nikodym respecto de (X, Σ, μ).*

Demostración. Para verlo, consideremos $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de átomos disjuntos medibles, con la propiedad de que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\mu(A_n) > 0$. Si $\nu \colon \Sigma \to E$ es una medida vectorial, μ-continua, de variación acotada, definimos $g \colon X \to E$ como

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(A_n)}{\mu(A_n)} \chi_{A_n}(x), \quad x \in X.$$

Entonces se tiene que

$$
\begin{aligned}
\int_X \|g\|_E \, d\mu &= \int_X \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(A_n)}{\mu(A_n)} \chi_{A_n} \Big\|_E \, d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \frac{\|\nu(A_n)\|_E}{\mu(A_n)} \, d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\nu(A_n)\|_E}{\mu(A_n)} \mu(A_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \|\nu(A_n)\|_E \\
&= |\nu|(X) \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Luego g es integrable Bochner. Comprobemos que g es una densidad para la medida ν. Como la medida μ es puramente atómica, todo conjunto medible A es unión de una familia de átomos $A = \bigcup_{n \in Z} A_n$, para $Z \subseteq \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
\nu(A) &= \sum_{n \in Z} \nu(A_n) \\
&= \sum_{n \in Z} \frac{\nu(A_n)}{\mu(A_n)} \mu(A_n) \\
&= \sum_{n \in Z} \frac{\nu(A_n)}{\mu(A_n)} \int_{A_n} d\mu(x) \\
&= \sum_{n \in Z} \frac{\nu(A_n)}{\mu(A_n)} \int_X \chi_{A_n}(x) \, d\mu(x) \\
&= \int_X \Big(\sum_{n \in Z} \frac{\nu(A_n)}{\mu(A_n)} \chi_{A_n}(x) \Big) \, d\mu(x) \\
&= \int_A \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(A_n)}{\mu(A_n)} \chi_{A_n}(x) \Big) \, d\mu(x) \\
&= \int_A g(x) \, d\mu(x).
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 5.6.3. Un ejemplo sencillo de un espacio con la propiedad de Radon-Nikodym es ℓ^1. Sea (Ω, Σ, μ) espacio de medida. Si $\nu \colon \Sigma \to \ell^1$ es una medida vectorial, μ-continua, de variación acotada, entonces podemos aplicar el teorema de Radon-Nikodym escalar a cada coordenada para producir una derivada de Radon-Nikodym de ν respecto de μ. Consideremos el funcional coeficiente ρ_n, con $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$A \in \Sigma \mapsto \langle \rho_n, \nu(A) \rangle \in \mathbb{C}$$

es una medida real y μ-continua. Por el Teorema de Radon-Nikodym, Teorema 2.1.1, existe una función f_n integrable respecto de μ tal que

$$\langle \rho_n, \nu(A) \rangle = \int_A f_n \, d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

Se sigue que

$$\nu(A) = \Big(\int_A f_n \, d\mu \Big)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1, \quad A \in \Sigma.$$

Veamos que las funciones f_n con $n \in \mathbb{N}$, permiten definir una función vectorial con valores en ℓ^1. Dado $N \in \mathbb{N}$, consideramos la medida

$$A \in \Sigma \mapsto \nu_N(A) := \Big(\int_A f_1 \, d\mu, \ldots, \int_A f_N \, d\mu, 0, \ldots \Big) \in \ell^1.$$

Se cumple

$$\|\nu_N(A)\|_1 = \Big\| \sum_{n=1}^{N} \Big(\int_A f_n(x) \, d\mu(x) \Big) \rho_n \Big\|_1 \leq \|\nu(A)\|_1.$$

Del Teorema 5.2.8(d) se sigue que

$$|\nu|_N(A) = \int_A \Big\| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \rho_n \Big\|_1 \, d\mu(x) \leq |\nu|(A).$$

entonces

$$\sup_N \int_\Omega \Big\| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \rho_n \Big\|_1 \, d\mu(x) \leq |\nu|(\Omega).$$

Como se cumple

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \rho_n \Big\|_1 \leq \Big\| \sum_{n=1}^{N+M} f_n(x) \rho_n \Big\|_1,$$

se sigue que

$$\int_\Omega \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rho_n \Big\|_1 \, d\mu(x) < \infty.$$

Se sigue que para casi todo $x \in \Omega$

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rho_n \Big\|_1 < \infty.$$

Es decir, $f(x) := (f_n(x))_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$ e.c.t $x \in \Omega$. Además, se tiene que

$$\int_\Omega \|f(x)\|_1 \, d\mu(x) \leq |\nu|(\Omega),$$

luego $f\colon \Omega \to \ell^1$ es integrable Bochner y

$$\nu(A) = \Big(\int_A f_n(x)\, d\mu(x) \Big)_{n=1}^{\infty} = \int_A f(x)\, d\mu(x).$$

Por lo tanto, si tenemos $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ la sucesión escalar de derivadas de Radon-Nykodym de cada coordenada de ν, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\rho_n(x)$$

converge a $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x), \dots) \in \ell^1$ y esa es la derivada de Radon-Nikodym de ν.

Este fenómeno ocurre en los espacios de Banach con base de Schauder acotadamente completa.

Teorema 5.6.4 (Dunford)**.** *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, μ medida positiva y finita. Sea E espacio de Banach. Si E tiene una base de Schauder acotadamente completa $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces E tiene la propiedad de Radon-Nikodym.*

Demostración. Notamos por (x_n^*) la sucesión de funcionales coeficientes de la base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces cada $x \in E$ tiene la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n.$$

Empezamos haciendo la norma "monótona" respecto a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Definimos una nueva norma $\|\cdot\|_m$ en E, escribiendo para $x \in E$

$$\|x\|_m := \sup_n \Big\| \sum_{k=1}^{n} x_k^*(x) x_k \Big\|.$$

Se puede probar que la nueva norma es equivalente a la inicial (ver más adelante). Para cualquier sucesión de escalares $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, tenemos

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \Big\|_m \le \Big\| \sum_{k=1}^{n+m} \alpha_k x_k \Big\|_m,$$

para m, n enteros positivos.

Ahora sea $\nu\colon \Sigma \to E$ una medida vectorial, μ-continua y de variación acotada. Probaremos que ν tiene una derivada de Radon-Nikodym integrable Bochner respecto de la norma $\|\cdot\|_m$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y A medible, sea

$$\lambda_n(A) := x_n^*(\nu(A)).$$

La medida λ_n es escalar, μ-continua, de medida finita en Σ, por lo que por el Teorema de Radon-Nikodym escalar, Teorema 2.1.1, existe g_n integrable en Ω tal que

$$\lambda_n(A) = \int_A g_n \, d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

También por la monotonía de $\|\cdot\|_m$ tenemos que

$$\Big\| \sum_{k=1}^{N} \Big(\int_A g_k(w) \, d\mu(w) \Big) x_k \Big\|_m \leq \Big\| \sum_{k=1}^{N+M} \Big(\int_A g_k(w) \, d\mu(w) \Big) x_k \Big\|_m \leq \|\nu(A)\|_m. \tag{5.6}$$

Se sigue que por el Teorema 5.2.8

$$\sup_n \int_\Omega \Big\| \sum_{k=1}^{n} g_k(w) x_k \Big\|_m \, d\mu(w) \leq |\nu|(\Omega).$$

Entonces,

$$\int_\Omega \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} g_k(w) x_k \Big\|_m \, d\mu(w) < \infty, \tag{5.7}$$

luego para casi todo $w \in \Omega$

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} g_k(w) x_k \Big\|_m < \infty.$$

Es decir, $\sup_n \|\sum_{k=1}^{n} g_k(w) x_k\|_m$ existe para casi todo $w \in \Omega$. Como $(x_n)_{n=1}^\infty$ es una base acotadamente completa, esto significa que

$$\operatorname{lím}_n \sum_{k=1}^{n} g_k(w) x_k = g(w)$$

existe en casi todo $w \in \Omega$, y por lo tanto $g\colon \Omega \to E$ es medible y por el Lema de Fatou y la desigualdad (5.7), g es integrable Bochner.

Finalmente, del hecho de que $\|\sum_{k=1}^{n} g_k(w) x_k\|_m \leq \|g(w)\|_m$ en casi todo, y por el Teorema de la Convergencia Dominada, se sigue que para cada A medible

$$\nu(A) = \operatorname{lím}_n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) x_k = \operatorname{lím}_n \sum_{k=1}^{n} \Big(\int_A g_k \, d\mu \Big) x_k = \int_A g \, d\mu.$$

Veamos por último que $\|\cdot\|_m$ y $\|\cdot\|_E$ son equivalentes. Por una parte, al ser $x = \operatorname{lím}_n \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, se tiene

$$\|x\|_E = \operatorname{lím}_n \Big\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \Big\|_E \leq \sup_n \Big\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \Big\|_E = \|x\|_m.$$

Consideremos la aplicación identidad entre el espacio E considerado con la dos normas

$$Id\colon (E, \|\cdot\|_m) \to (E, \|\cdot\|_E).$$

La desigualdad $\|x\|_E \leq \|x\|_m$ que acabamos de probar muestra que Id es continua. Ahora bien, es biyectiva. Se puede probar, como se hizo en la prueba del Teorema 5.5.3, que el espacio E con la norma $\|\cdot\|_m$ es completo. Se sigue del Teorema de la Aplicación Abierta que su inversa también es continua, luego existe $K > 0$ tal que

$$\|x\|_m \leq K\|x\|_E, \quad x \in E.$$

Por lo tanto

$$\|x\|_E \leq \|x\|_m \leq K\|x\|_E, \quad x \in E,$$

es decir, las dos normas son equivalentes.

Se cumple que la propiedad de Radon-Nikodym es invariante bajo isomorfismos lineales, pues si $\nu(A) = \int_A g\,d\mu$, con $g\colon X \to E$ y $T\colon E \to F$ es un operador lineal y continuo entres dos espacios de Banach E y F, entonces

$$T(\nu(A)) = \int_A T \circ g\,d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

donde la función $T \circ g\colon X \to F$ es integrable Bochner si y sólo si lo es g. Por lo que como hemos visto tiene una derivada de Radon-Nikodym integrable Bochner bajo la nueva norma $\|\cdot\|_m$ en E, tambien la tiene bajo la norma original. $\square$

Bibliografía

[1] Cohn, D.L., *Measure Theory*, Birkhauser, Basel, 1993.

[2] Diestel, J. *Sequences and Series in Banach spaces*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[3] Diestel, J. and Uhl, J.J., *Vector Measures*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1977.

[4] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1970.