

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas



Grado en Matemáticas

**Superficies con una dirección
principal canónica**

Realizado por: Sergio González Padilla

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de
Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Índice general

Abstract	1
Resumen	1
1. Introducción	2
2. Fundamentos de Geometría Local	6
3. Parametrización de superficies DPC	11
3.1. Construcción	11
3.2. Observaciones	15
3.3. Interpretación geométrica	17
3.3.1. Superficie parametrizada con g constante	18
3.3.2. Superficie parametrizada con γ una recta	18
3.3.3. Superficie parametrizada con γ una circunferencia	19
4. Teorema de Clasificación para Superficies DPC con Curvatura Media fijada	23
4.1. Superficies capilares DPC	24
4.2. Solitones λ -trasladados DPC	26
4.3. Superficies λ -contraídas DPC	28
5. Apéndice: Idea de cómo se generaliza el problema para las hipersuperficies de \mathbb{R}^n	31
Referencias	33

Abstract

We say that a regular surface in a Euclidean space has a canonical principal direction with respect to a fixed direction if its tangent part is a principal direction along the surface. Based on the article [12], the objective of this work is to classify those surfaces with a canonical principal direction which prescribed mean curvature is given by one of the following affine functions: height, angle and support.

Resumen

Se dice que una superficie regular en un espacio euclídeo tiene una dirección principal canónica respecto a una dirección fija si su componente tangente es una dirección principal a lo largo de la superficie. Basándose en el artículo [12], el objetivo de esta memoria es clasificar aquellas superficies con una dirección principal canónica cuya curvatura media venga dada por una de las siguientes funciones afines: altura, ángulo y soporte.

Capítulo 1

Introducción

Una superficie angular constante en \mathbb{R}^3 es una superficie orientable cuya aplicación de Gauss forma un ángulo constante con un vector director fijo \mathbf{d} . En particular, la proyección de \mathbf{d} sobre el plano tangente a la superficie es una dirección principal y su correspondiente curvatura principal es cero. En [1] se generalizó este concepto sin la necesidad de tener curvatura principal cero.

Definición 1.1. *Sea $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ un vector unitario. Una superficie M en \mathbb{R}^3 tiene una dirección principal canónica con respecto a \mathbf{d} si la componente tangente de \mathbf{d} a lo largo de M es una dirección principal. Lo abreviaremos diciendo que M es una superficie DPC cuando se sobrentienda la dirección tomada.*

El problema que trataremos consiste en clasificar un grupo específico de superficies DPC, aquellas cuya curvatura media viene dada por una de las siguientes funciones lineales:

$$\begin{aligned} \text{función altura} & f(p) = \langle p, \mathbf{v} \rangle, \\ \text{función ángulo} & f(p) = \langle \mathbf{N}(p), \mathbf{v} \rangle, \\ \text{función soporte} & f(p) = \langle \mathbf{N}(p), p \rangle. \end{aligned}$$

Aquí, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ es un vector fijo y $\mathbf{N} : M \rightarrow \mathbf{S}^2$ es la aplicación de Gauss sobre M .

La clasificación es uno de los problemas fundamentales de las Matemáticas. Poder clasificar conceptos y objetos, en nuestro caso superficies, significa que tenemos la capacidad de conocer y diferenciar aquello con lo que trabajamos, asociando cada uno de ellos a un grupo u otro según sus características y propiedades y así con cada nuevo elemento que obtengamos. Hay una infinidad de maneras de clasificar, cada una con un propósito dependiendo del propio estudio y de los elementos que se manejen.

En los últimos años, la teoría de superficies ha sido uno de los campos de la Geometría Diferencial más desarrollados. Muchos de estos estudios se han

centrado en las superficies angulares constantes en diferentes espacios [1, 2, 7, 13] y, por tanto, la clasificación de estas superficies se hace necesaria. El interés que tiene este tipo de clasificación determinada por la curvatura media viene por su relación con las superficies elásticas.

La curvatura media de una superficie en un punto se define como la semisuma de las curvaturas principales. Este concepto lo introdujo Thomas Young en 1805 como herramienta para el desarrollo de cálculos en la teoría de superficies capilares. Cuantificó el cambio de presión a través de una superficie mediante la fórmula: $\Delta p = 2\sigma H$, con σ la tensión de la superficie [5]. Por otro lado, también tiene un papel importante en las memorias que Sophie Germain presentó a la Academia de Ciencias de París en 1811, 1813 y 1815 sobre el estudio de las superficies elásticas. A partir de los trabajos de Euler, *Recherches sur la courbure des surfaces (1760)* donde introdujo las direcciones y curvaturas principales, Sophie Germain enunciaría en su primera memoria una hipótesis sobre la relación entre la fuerza elástica y las curvaturas principales:

“La fuerza elástica en un punto de una superficie es proporcional a la curvatura media de la superficie en dicho punto”.

Además, siguiendo con el estudio de las superficies elásticas, surge un procedimiento para dar una expresión matemática a la noción de deformación de la superficie como la suma de todas las curvas de las diferentes secciones planas de la superficie. Sophie Germain postula que este cálculo integral será proporcional a la curvatura media (ver [14]).

Con respecto a las funciones altura, ángulo y soporte que definirán la curvatura media, seguirán modelos y comportamientos de fluidos representados por las superficies DPC correspondientes.

1. **Función altura:** Una superficie cuya curvatura media $H(p)$ satisface

$$H(p) = \lambda \langle p, \mathbf{v} \rangle + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

sigue el modelo de un fluido cayendo, donde la dirección de la gravedad está indicada por \mathbf{v} , la constante λ solo depende de las propiedades físicas del fluido y μ es un volumen limitado. Este tipo de superficies se denominan *superficies capilares* y describen la zona de contacto entre dos materiales adyacentes que no se mezclan [5, 6].

2. **Función ángulo:** Una superficie cuya curvatura media $H(p)$ satisface

$$H(p) = \lambda \langle \mathbf{N}(p), \mathbf{v} \rangle + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

se denomina *solitón λ -trasladado*. Los solitones son un tipo de ondas que se propagan sin deformarse y que podemos encontrar como soluciones de

EDOs no lineales. El caso de los solitones trasladados aparecen en la teoría del flujo de la curvatura media [10, 11, 15].

3. **Función soporte:** Una superficie cuya curvatura media $H(p)$ satisface

$$H(p) = \lambda \langle \mathbf{N}(p), p \rangle + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

se llamará *superficie λ -contraída*. Esto generaliza el concepto de autoexpansiva ($\lambda > 0$) y autocontraída ($\lambda < 0$). Ambos tipos aparecen también en el estudio del flujo de la curvatura media como soluciones en modelos del comportamiento de fluidos, donde M no cambia de forma, pero es contraída (autocontraída) o dilatada (autoexpansiva) por el fluido [4, 9, 11].

Para abordar este problema empezaremos por introducir en el Capítulo 2 las herramientas de Geometría Local con las que trabajaremos. Continuaremos en el Capítulo 3 viendo que las superficies DPC se pueden parametrizar como

$$\mathbf{x}(s, t) = \gamma(s) + f(t)\mathbf{n}(s) + g(t)\mathbf{d}, \quad (1.4)$$

lo que explicaremos con detalle en su momento, además de algunos resultados que se deducen a partir de esta parametrización. El Capítulo 4 se centrará en demostrar el siguiente teorema de clasificación específicamente para cada superficie DPC cumpliendo (1.1), (1.2) ó (1.3):

Teorema 1.1. *Sea M una superficie DPC con respecto a un vector unitario $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ parametrizada como (1.4). Si M satisface (1.1), (1.2) ó (1.3), entonces M es una de las siguientes superficies:*

1. *Una superficie cilíndrica donde la directriz es $\alpha(t) = f(t)\mathbf{n} + g(t)\mathbf{d}$, \mathbf{n} es constante, las generatrices son ortogonales a \mathbf{d} y α satisface el caso unidimensional de (1.1), (1.2) ó (1.3).*
2. *Una superficie de revolución generada por α cuyo eje de rotación es paralelo a \mathbf{d} . La curva α satisface una EDO de segundo orden dependiendo de las condiciones de (1.1), (1.2) ó (1.3).*
3. *Una superficie cilíndrica donde la directriz es $\gamma_a(s) = \gamma(s) + a\mathbf{n}(s)$, que satisface el caso unidimensional de (1.1), (1.2) ó (1.3) y las generatrices son paralelas a \mathbf{d} .*

Nota 1.1. Si suponemos que $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ es una parametrización de M y dado un punto $p \in M$, se tendrá que $p = \mathbf{x}(s, t)$ para algún $(s, t) \in U$. Por tanto, las tres expresiones definidas en (1.1), (1.2) y (1.3) son ecuaciones de dos variables. Las curvas paramétricas $\alpha(t)$ y $\gamma_a(s)$ están contenidas en M , luego sus puntos también verifican (1.1), (1.2) y (1.3). Para los casos en el que M sea una

superficie cilíndrica, se demostrará que la expresión de $H(p)$ para los puntos de $\alpha(t)$ ó $\gamma_a(s)$ solo dependerá de t ó s , respectivamente, es decir, se reducirán a ecuaciones de una variable que serán estos *casos unidimensionales*.

Finalmente, en el Capítulo 5, veremos una generalización para hipersuperficies de \mathbb{R}^n y podremos deducir, al igual que en el Capítulo 3 para las superficies, una parametrización que nos defina las hipersuperficies DPC.

Capítulo 2

Fundamentos de Geometría Local

Antes de entrar de lleno en el objetivo principal de este trabajo, debemos tener claro los conceptos y resultados base de Geometría Local de Curvas y Superficies que utilizaremos a partir de ahora. Se ha tomado como referencia general [3].

Empezaremos con una definición clásica de curva que también nos servirá para aclarar poco a poco las diferentes notaciones que irán apareciendo.

Definición 2.1. Una **curva parametrizada regular** (c.r) en \mathbb{R}^m es una aplicación

$$\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m : t \mapsto \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)),$$

tal que:

1. $\alpha \in \mathcal{C}^k$, $k \geq 1$.
2. $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$.

Notas 2.1. 1. Para $m = 2$ hablamos de curvas planas y en el caso $m = 3$ de curvas alabeadas.

2. Sea $s = s(t)$ la función longitud de arco de la curva α con referencia a $t_0 \in (a, b)$:

$$s : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\sigma)| d\sigma.$$

Se dirá que la curva α está **parametrizada naturalmente** (p.n) si se ha parametrizado por su longitud de arco.

3. La curva α está p.n. si y solo si $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in (a, b)$. Por lo general, se usará un punto para denotar la derivación respecto al parámetro natural.

4. Sea α p.n. y $k = k(s)$ su curvatura. Entonces, $k(s) = |\ddot{\alpha}(s)|$, α es una recta si y solo si k es idénticamente nula y α es una circunferencia si y solo si k es constante.

El siguiente teorema presenta las **Ecuaciones de Frenet-Serret** que nos relacionan los vectores tangente, normal y binormal (\mathbf{t}, \mathbf{n} y \mathbf{b} respectivamente) de la curva en cada punto con sus derivadas.

Teorema 2.1. *Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n en \mathbb{R}^3 , $k = k(s)$ su curvatura y $\tau = \tau(s)$ su torsión. Al triedro $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ se le conoce como el **Triedro o Referencia de Frenet**. Es un sistema de referencia ortonormal y directo de \mathbb{R}^3 en cada punto de la curva. Además se verifican las siguientes ecuaciones:*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}}(s) &= & k(s)\mathbf{n}(s) \\ \dot{\mathbf{n}}(s) &= & -k(s)\mathbf{t}(s) & +\tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \dot{\mathbf{b}}(s) &= & -\tau(s)\mathbf{n}(s) \end{cases}$$

Tras exponer las primeras definiciones relacionadas con curvas y sus propiedades podemos ya centrarnos en las superficies. Del mismo modo, comencemos por una definición para luego ver las principales superficies con las que trabajaremos y sus parametrizaciones.

Definición 2.2. *Dado un subconjunto $M \subseteq \mathbb{R}^3$ dotado de la topología euclídea relativa. Se dirá que M es una **superficie regular** si para cada punto $p \in M$ existe una **parametrización local**, es decir, una aplicación $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con U abierto, tal que:*

1. $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^\infty$.
2. Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ entonces,

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \neq 0,$$

para todo punto de U .

3. \mathbf{x} es un homeomorfismo sobre su imagen y $\mathbf{x}(U) \subseteq M$ es entorno abierto de p .

Definición 2.3. *A continuación veremos las principales superficies que ya han sido mencionadas tanto en la propia definición de superficie DPC como en el teorema de clasificación: plano tangente, superficie de revolución y superficie reglada.*

1. Sea M una superficie regular parametrizada por $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ con $p \in M$, $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$, $(u_0, v_0) \in U$. Se llama **plano tangente** a \mathbf{x} en p al plano

que tiene como vector característico a $\mathbf{X}_1(p) \times \mathbf{X}_2(p)$. Se llama **vector normal** a \mathbf{x} en p al vector

$$\mathbf{N}(u_0, v_0) = \frac{\mathbf{X}_1(p) \times \mathbf{X}_2(p)}{|\mathbf{X}_1(p) \times \mathbf{X}_2(p)|} \equiv \mathbf{N}(p).$$

Denotamos por $T_p(\mathbf{x})$ al conjunto:

$$T_p(\mathbf{x}) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \text{ es tangente a } \mathbf{x} \text{ en } p\}.$$

Se verifica que $T_p(\mathbf{x})$ es un espacio vectorial con base $\{\mathbf{X}_1(p), \mathbf{X}_2(p)\}$ y que coincide con el plano tangente a \mathbf{x} en p .

2. Sea α una c.p.r contenida en un plano H y $R \subset H$ una recta que no corta a α . Se llama **superficie de revolución** de generatriz α y eje de revolución R al conjunto M obtenido al girar α alrededor de R . Sin pérdida de generalidad, si suponemos que H es el plano $y = 0$, R el eje OZ y $\alpha(t) = (x(t), 0, z(t))$ contenida en el semiplano $x > 0$ obtenemos la superficie regular M parametrizada por:

$$\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (t, \theta) \mapsto (x(t) \cos \theta, x(t) \operatorname{sen} \theta, z(t)), \quad t \in (a, b), \theta \in [0, 2\pi).$$

3. Sea $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una c.p.r y sea $\mathbf{w} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable a lo largo de α tal que $\mathbf{w}(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$. Se define la **superficie reglada** de directriz α al subconjunto M en \mathbb{R}^3 formado por las rectas con dirección $\mathbf{w}(t)$ en cada punto $\alpha(t)$ denominadas generatrices de M . Sus parametrizaciones vienen dadas por:

$$\mathbf{x} : (a, b) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : (t, v) \mapsto \alpha(t) + v\mathbf{w}(t).$$

Una superficie reglada donde todas sus generatrices son paralelas se conoce como **superficie cilíndrica**. Se deduce pues que su directriz es una curva plana que forma un ángulo constante con sus generatrices.

Por último, como vamos a trabajar con superficies DPC habrá que definir qué es una dirección principal y, a su vez, una curvatura principal. Además, el endomorfismo de Weingarten nos dará una relación que nos ayudará a caracterizar tanto las direcciones, como las curvaturas principales. Estas últimas, las usaremos para definir la curvatura de Gauss y la curvatura media.

Definición 2.4. Sean una superficie regular M parametrizada por $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $p \in M$ y dos vectores $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_p(\mathbf{x})$ tales que:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^2 X^i \mathbf{X}_i, \quad \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^2 Y^i \mathbf{X}_i.$$

1. Se define la **primera forma fundamental** como la forma bilineal simétrica y definida positiva en $T_p(\mathbf{x})$ dada por

$$I_p : T_p(\mathbf{x}) \times T_p(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbb{R} : I_p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y},$$

es decir, el producto escalar.

2. Se define la **segunda forma fundamental** como la forma bilineal simétrica en $T_p(\mathbf{x})$ dada por

$$II_p : T_p(\mathbf{x}) \times T_p(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbb{R} : II_p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{i,j=1}^2 L_{ij}(p) X^i Y^j,$$

con L_{ij} los coeficientes de la segunda forma fundamental definidos por $L_{ij} = \mathbf{X}_{ij} \cdot \mathbf{N}$.

Definición 2.5. Sea α una curva regular contenida en una superficie regular M , parametrizada por $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, que pasa por $p \in M$, k la curvatura de α en p y $\cos \theta = \langle \mathbf{n}, \mathbf{N} \rangle$ donde \mathbf{n} es el vector normal a α en p y \mathbf{N} el vector normal a M en p . Se define la **curvatura normal** de α en p como la longitud de la proyección del vector $k\mathbf{n}$ sobre \mathbf{N} en dicho punto. Su valor viene dado por:

$$K_n = k \cos \theta.$$

Teorema 2.2. Todas las curvas contenidas en M que tienen en un punto dado $p \in M$ la misma recta tangente, tienen en ese punto la misma curvatura normal. Es decir, K_n no depende más que de la dirección en $T_p(\mathbf{x})$. Además, si $\alpha = \alpha(s)$ es una c.r.p.n en \mathbf{x} , entonces:

$$K_n(\alpha(s)) = II(\dot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s)).$$

Supongamos $\mathbf{v} \in T_p(\mathbf{x})$ y H el plano que contiene a \mathbf{v} y \mathbf{N} . Sea β la curva intersección del plano H con la superficie M , denominada sección normal. Se tiene que β es una curva plana sobre M y su vector normal en p es $\pm \mathbf{N}$, por tanto, $k_\beta = |K_n|$. Del mismo modo, para cada vector $\mathbf{v} \in T_p(\mathbf{x})$ con distinta dirección, se obtendrá una nueva sección normal con su respectiva curvatura normal.

Definición 2.6. Se denominan **curvaturas principales** en p a los valores máximo y mínimo de la curvatura normal en ese punto y se denotarán por k_1 y k_2 . Las direcciones para las que se obtienen estas curvaturas son las **direcciones principales** en p denotadas por $\mathbf{X}_{(1)}$ y $\mathbf{X}_{(2)}$.

Definición 2.7. El **endomorfismo de Weingarten** en p es la aplicación $L_p : T_p(\mathbf{x}) \rightarrow T_p(\mathbf{x})$ dada por

$$L_p(\mathbf{X}_1) = -\mathbf{N}_1(p), \quad L_p(\mathbf{X}_2) = -\mathbf{N}_2(p),$$

extendida por linealidad a todo $T_p(\mathbf{x})$, es decir,

$$L_p(\mathbf{X}) = -X^1\mathbf{N}_1(p) - X^2\mathbf{N}_2(p),$$

para cualquier $\mathbf{X} \in T_p(\mathbf{x})$, donde

$$\mathbf{N}_i(p) = \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u_i} \right) (p) \in T_p(\mathbf{x}),$$

pues $\mathbf{N}(p)$ es unitario.

Proposición 2.1. Sea $p \in \mathbf{x}(U)$. Si $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_p(\mathbf{x})$, entonces:

$$II(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = L(\mathbf{X})\mathbf{Y} = \mathbf{X}L(\mathbf{Y}) = I(L(\mathbf{X}), \mathbf{Y}) = I(\mathbf{X}, L(\mathbf{Y})).$$

De estas igualdades se deduce que el endomorfismo de Weingarten es auto-adjunto respecto al producto de la primera forma fundamental. Luego, tiene dos autovalores reales. Las curvaturas principales se caracterizan por ser estos dos autovalores y las direcciones principales sus autovectores asociados. Finalmente, obtenemos la siguiente relación:

$$L(\mathbf{X}_{(i)}) = k_i\mathbf{X}_{(i)}, \quad K_n(\mathbf{X}_{(i)}) = k_i, \quad i = 1, 2.$$

Proposición 2.2. Si \mathbf{X} es una dirección principal en p e $\mathbf{Y} \in T_p(\mathbf{x})$ es ortogonal a \mathbf{X} , entonces \mathbf{Y} también es una dirección principal. Además, si $k_1 = k_2$ en p (punto **umbílico**), entonces todo $\mathbf{X} \in T_p(\mathbf{x})$ es una dirección principal.

Definición 2.8. Se define la **curvatura de Gauss** de \mathbf{x} en p como:

$$K(p) = (k_1k_2)(p).$$

Un punto p de la superficie se dice **elíptico** si $K(p) > 0$, **hiperbólico** si $K(p) < 0$, **parabólico** si $K(p) = 0$ y $k_1(p) \neq k_2(p)$ y **plano** si $k_1(p) = k_2(p) = 0$.

Definición 2.9. Se define la **curvatura media** de \mathbf{x} en p como:

$$H(p) = \frac{k_1 + k_2}{2}(p).$$

Una superficie se dice **mínima** si $H \equiv 0$.

Capítulo 3

Parametrización de superficies DPC

Ya hemos presentado las herramientas de Geometría Local de Curvas y Superficies con las que vamos a trabajar. El siguiente paso para empezar con la clasificación de las superficies DPC será obtener una parametrización adecuada para el desarrollo del *Teorema 1.1*. En este capítulo daremos una expresión de la parametrización en sí, demostraremos que está bien definida y es una superficie DPC. Posteriormente, veremos qué consecuencias se deducen de esta parametrización y su aplicación para el cálculo de la curvatura media.

3.1. Construcción

Sea $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ un campo vectorial unitario constante y P un plano ortogonal a \mathbf{d} . Sea $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : \gamma = \gamma(s)$ una c.r.p.n. (alabeada) contenida en P y que, por tanto, es plana. Por último, sea $\beta : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : \beta(t) = (f(t), g(t))$, una c.r.p.n. plana 2-dimensional.

Antes de entrar en el estudio de la parametrización en sí, mostraremos un pequeño esquema que nos sirva para aclarar cómo se obtiene la superficie a partir de estos datos. El primer paso es tener definidas las curvas β y γ (*Figura 3.1*). A continuación, trasladamos la curva β a una nueva base, $\{\mathbf{n}_\gamma(s_0), \mathbf{d}\}$, con origen el punto $\gamma(s_0)$ para algún $s_0 \in I$. Llamemos a esta curva α (*Figura 3.2*). Para terminar, nuestra superficie DPC la obtendremos como una superficie generada por α al recorrer la curva γ (*Figura 3.3*).

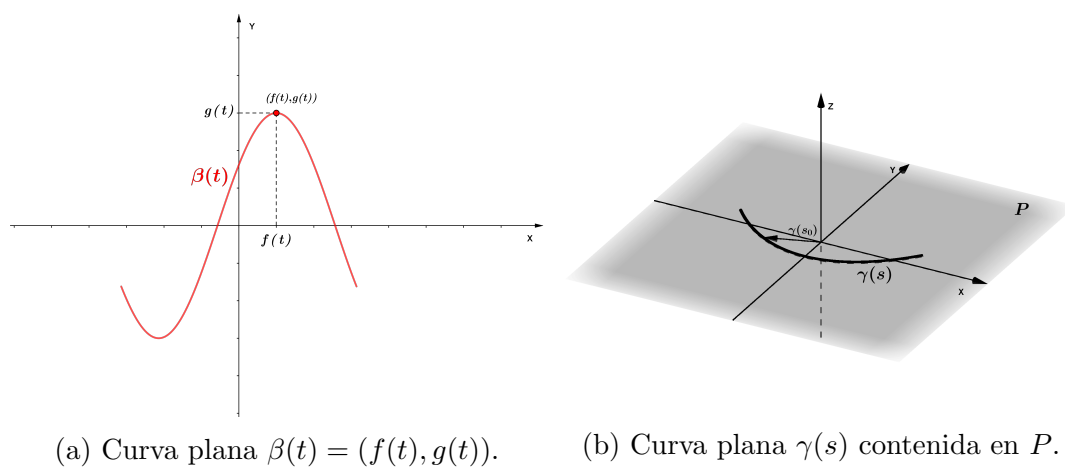


Figura 3.1: Ejemplo para las curvas β y γ .

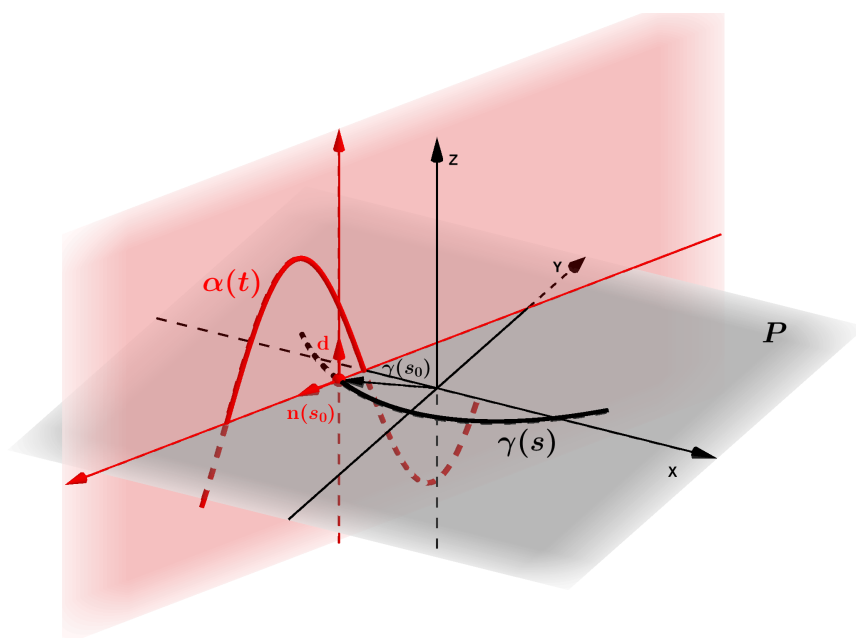


Figura 3.2: Representación de la curva $\alpha(t)$.

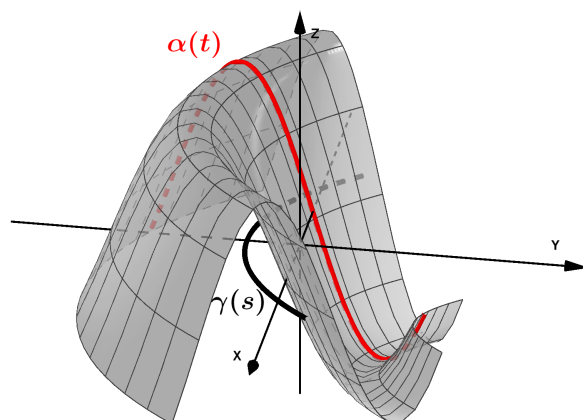


Figura 3.3: Superficie generada por α a lo largo de γ .

- Notas 3.1.**
1. Para diferenciar mejor las curvas γ y β así como sus componentes y derivadas, se utilizará el punto para las derivación de γ y la comilla para β . Puesto que las dos están parametrizadas naturalmente es importante recordar que $|\dot{\gamma}(s)| = |\beta'(t)| = 1$, para cualesquiera $(s, t) \in I \times J$.
 2. Para simplificar la notación, supondremos que $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$ son los vectores tangente y normal de γ para cada $s \in I$.

Consideremos la función definida en (1.4), $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{x}(U) \subseteq \mathbb{R}^3$, con $U = I \times J$ abierto de \mathbb{R}^2 , tal que:

$$\mathbf{x}(s, t) = \gamma(s) + f(t)\mathbf{n}(s) + g(t)\mathbf{d}.$$

Sea $M = \mathbf{x}(U)$ la superficie parametrizada por \mathbf{x} . Para ver que M es regular habrá que demostrar que \mathbf{x} es una parametrización local. Puesto que, por hipótesis, $M = \mathbf{x}(U)$, solo necesitamos comprobar que \mathbf{x} satisface las condiciones de diferenciabilidad y regularidad:

1. $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^\infty$. La condición de diferenciabilidad se cumplirá si existen sus derivadas parciales de todos los órdenes. Si tenemos en cuenta que tanto $\gamma(s)$ como $\beta(t)$ son diferenciables por definición, es inmediato que las funciones $f(t)$, $g(t)$ y \mathbf{n} también lo son. Las parciales de orden n quedan:

$$\frac{\partial^n \mathbf{x}}{\partial s^n} = \gamma^{(n)}(s) + f(t)\mathbf{n}^{(n)}(s), \quad n \geq 1,$$

$$\frac{\partial^n \mathbf{x}}{\partial t^n} = f^{(n)}(t)\mathbf{n}(s) + g^{(n)}(t)\mathbf{d}, \quad n \geq 1,$$

$$\frac{\partial^n \mathbf{x}}{\partial s^{n_1} \partial t^{n_2}} = f^{(n_2)}(t) \mathbf{n}^{(n_1)}(s), \quad n = n_1 + n_2 \geq 2, \quad n_1, n_2 > 0.$$

Teniendo en cuenta que tanto $\gamma(s)$ como $\beta(t)$ son diferenciables por definición, es inmediato que las funciones $f(t)$, $g(t)$ y $\mathbf{n}(s)$ también lo son, luego existen las derivadas parciales de cualquier orden.

2. $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \neq 0$, en todo U . Para la condición de regularidad calculamos los vectores \mathbf{X}_1 y \mathbf{X}_2 derivando respecto a s y t , respectivamente.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \mathbf{t}(s) + f(t) \dot{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{t}(s) + f(t)(-k(s)\mathbf{t}(s)) \\ &= (1 - f(t)k(s))\mathbf{t}(s), \end{aligned}$$

$$\mathbf{X}_2 = f'(t)\mathbf{n}(s) + g'(t)\mathbf{d}.$$

Para el cálculo de \mathbf{X}_1 hemos usado las ecuaciones de Frenet-Serret y que $\gamma(s)$ es plana, luego su torsión es cero. Notemos que el vector binormal de $\gamma(s)$ es el propio vector \mathbf{d} y puesto que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{d}\}$ es una base ortonormal, obtenemos que \mathbf{X}_1 y \mathbf{X}_2 son ortogonales y, por tanto, $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \neq 0$, para cualquier punto de U .

El siguiente paso será probar que M es una superficie DPC con respecto a \mathbf{d} . Tomamos los vectores unitarios de \mathbf{X}_1 y \mathbf{X}_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{X}_1}{|\mathbf{X}_1|} &= \frac{(1 - f(t)k(s))\mathbf{t}(s)}{(1 - f(t)k(s))} = \mathbf{t}(s), \\ \frac{\mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_2|} &= \frac{\mathbf{X}_2}{\sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}} = \frac{\mathbf{X}_2}{|\beta'(t)|} = \mathbf{X}_2. \end{aligned}$$

Ahora podemos calcular la proyección de \mathbf{d} sobre el plano tangente a M en cada punto $p = \mathbf{x}(s, t)$, $(s, t) \in U$.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{d}, \mathbf{t}(s) \rangle \mathbf{t}(s) + \langle \mathbf{d}, \mathbf{X}_2 \rangle \mathbf{X}_2 &= \langle \mathbf{d}, \mathbf{X}_2 \rangle \mathbf{X}_2 \\ &= \langle \mathbf{d}, f'(t)\mathbf{n}(s) + g'(t)\mathbf{d} \rangle \mathbf{X}_2 \\ &= \langle \mathbf{d}, f'(t)\mathbf{n}(s) \rangle \mathbf{X}_2 + \langle \mathbf{d}, g'(t)\mathbf{d} \rangle \mathbf{X}_2 \\ &= g'(t) \langle \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle \mathbf{X}_2 \\ &= g'(t) \mathbf{X}_2. \end{aligned}$$

Supongamos $g'(t) \neq 0$. Vamos a probar que \mathbf{X}_2 es una dirección principal y, por tanto, M es una superficie DPC con respecto a la dirección \mathbf{d} . Un campo vectorial unitario normal a M viene dado por

$$\mathbf{N}(s, t) = \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{X}_2}{|\mathbf{t} \times \mathbf{X}_2|} = \frac{-g'(t)\mathbf{n}(s) + f'(t)\mathbf{d}}{|-g'(t)\mathbf{n}(s) + f'(t)\mathbf{d}|} = -g'(t)\mathbf{n}(s) + f'(t)\mathbf{d}, \quad (3.1)$$

ya que $|\beta'(t)| = 1$, y desarrollando su parcial respecto a t ,

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} = \mathbf{N}_2 = -g''(t)\mathbf{n}(s) + f''(t)\mathbf{d}.$$

De nuevo, gracias a que $(f'(t))^2 + (g'(t))^2 = 1$, tenemos que $2f''f' + 2g''g' = 0$, entonces $f''f' = -g''g'$ y aplicándolo a \mathbf{N}_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_2 &= \frac{1}{g'(t)}(-g''(t)g'(t)\mathbf{n}(s) + f''(t)g'(t)\mathbf{d}) \\ &= \frac{1}{g'(t)}(f''(t)f'(t)\mathbf{n}(s) + f''(t)g'(t)\mathbf{d}) \\ &= \frac{f''(t)}{g'(t)}(f'(t)\mathbf{n}(s) + g'(t)\mathbf{d}) = \frac{f''(t)}{g'(t)}\mathbf{X}_2. \end{aligned}$$

Y de aquí deducimos que \mathbf{X}_2 es autovector del endomorfismo de Weingarten, es decir, dirección principal.

Si $g'(t) = 0$, la proyección de \mathbf{d} sobre el plano tangente de M es cero. Es decir, \mathbf{d} es ortogonal a $T_p(M)$ en todos los puntos de M , pero como \mathbf{d} es constante, entonces todos los puntos de M comparten el mismo plano tangente y se deduce que $T_p(M) = M$, luego M es un plano y para cada punto $p \in M$ se tiene que $k_1(p) = k_2(p) = 0$ y, por tanto, todas las direcciones son principales en p , en particular, \mathbf{X}_2 .

3.2. Observaciones

Acabamos de probar que las superficies DPC se pueden parametrizar por (1.4). Lo interesante de esta parametrización es que nos dará buenas condiciones para clasificar cada superficie. Además, obtendremos expresiones de las curvaturas principales y, por consiguiente, de la curvatura media, que serán clave en el Capítulo 4 para desarrollar las demostraciones.

Proposición 3.1. *Sea M una superficie DPC parametrizada por:*

$$\mathbf{x}(s, t) = \gamma(s) + f(t)\mathbf{n}(s) + g(t)\mathbf{d}.$$

Entonces:

1. Se tiene que $1 - f(t)k(s) \neq 0$, para todo $(s, t) \in U$.
2. Si g es constante, entonces M es un plano ortogonal a \mathbf{d} .
3. Si γ es una recta, entonces M es una superficie cilíndrica y sus generatrices son ortogonales a \mathbf{d} .
4. Si γ es una circunferencia, entonces M es una superficie de revolución cuyo eje de rotación es paralelo a \mathbf{d} .

Demostración. 1. Por la regularidad de M , sabemos que $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \neq 0$, para cualquier punto de U , luego $\mathbf{X}_1 = (1 - f(t)k(s))\mathbf{t}(s) \neq 0$ y se concluye que $1 - f(t)k(s) \neq 0$.

2. Si $g(t) = a$ constante, $g'(t) = 0$ y como se razonó en la sección anterior, M es un plano ortogonal a \mathbf{d} . Visto de otro modo, al despejar f de $(f'(t))^2 + (g'(t))^2 = 1$, se tiene $f(t) = \varepsilon t + b$ con $b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. La parametrización queda:

$$\mathbf{x}(s, t) = \gamma(s) + (\varepsilon t + b)\mathbf{n}(s) + a\mathbf{d} = (\gamma(s) + a\mathbf{d}) + (\varepsilon t + b)\mathbf{n}(s).$$

El primer sumando, $\gamma(s) + a\mathbf{d}$, es una curva plana paralela a γ y las diferentes curvas $\alpha(t) = (\varepsilon t + b)\mathbf{n}(s)$ del segundo sumando son segmentos de recta coplanarios a γ . Por tanto, M es la superficie plana formada por las curvas α a una distancia a de γ en la dirección \mathbf{d} que es ortogonal a γ , luego también a M .

3. Si γ es una recta, entonces $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ son constante. Si definimos la curva plana $\alpha(t) = f(t)\mathbf{n} + g(t)\mathbf{d}$, entonces $\mathbf{x}(s, t) = \alpha(t) + s\mathbf{t}$, es decir, M es una superficie cilíndrica con directriz α y generatrices las rectas paralelas a γ que cortan a $\alpha(t)$, para cada $t \in J$, las cuales son ortogonales a \mathbf{d} .
4. Si γ es una circunferencia, bajo una reparametrización adecuada, supongamos $\gamma(s) = (r \cos(s), r \sin(s), 0)$ y $\mathbf{d} = (0, 0, 1)$. Calculamos el vector $\mathbf{n}(s)$ como

$$\mathbf{n}(s) = \mathbf{d} \times \mathbf{t}(s) = (-r \cos(s), -r \sin(s), 0) = -\gamma(s),$$

y sustituyendo en la parametrización (1.4), se tiene

$$\mathbf{x}(s, t) = (r(1 - f(t)) \cos(s), r(1 - f(t)) \sin(s), g(t)),$$

lo que prueba que M es una superficie de revolución y su eje de rotación está sobre \mathbf{d} . \square

Proposición 3.2 (Curvaturas principales). *Sea M una superficie DPC. Dada la aplicación de Gauss definida en (3.1), $\mathbf{N}(s, t) = -g'(t)\mathbf{n}(s) + f'(t)\mathbf{d}$. Si*

M no es un plano ortogonal a \mathbf{d} , entonces sus curvaturas principales respecto a \mathbf{N} son:

$$k_1 = \frac{g'(t)k(s)}{1 - f(t)k(s)}, \quad k_2 = \frac{f''(t)}{g'(t)}. \quad (3.2)$$

Demostración. Sabemos que \mathbf{X}_2 es una dirección principal, su autovalor asociado da una expresión para la curvatura principal de M en esta dirección, es decir, $\mathbf{N}_2 = k_2\mathbf{X}_2$, y como se calculó en la sección anterior,

$$k_2 = \frac{f''(t)}{g'(t)}.$$

Por otro lado, al ser ortogonal a \mathbf{X}_1 , esta también es dirección principal y del mismo modo podemos obtener su curvatura principal asociada

$$\mathbf{N}_1 = -g'(t)\dot{\mathbf{n}}(s) = g'(t)k(s)\mathbf{t}(s) = \frac{g'(t)k(s)}{1 - f(t)k(s)}\mathbf{X}_1$$

y puesto que $\mathbf{N}_1 = k_1\mathbf{X}_1$, entonces:

$$k_1 = \frac{g'(t)k(s)}{1 - f(t)k(s)}.$$

□

Proposición 3.3 (Curvatura media). Sea M una superficie DPC. Dada la aplicación de Gauss $\mathbf{N}(s, t) = -g'(t)\mathbf{n}(s) + f'(t)\mathbf{d}$, si M no es un plano ortogonal a \mathbf{d} , entonces su curvatura media H respecto a \mathbf{N} es:

$$H(\mathbf{x}(s, t)) = \frac{1}{2} \left(\frac{f''(t)}{g'(t)} + \frac{g'(t)k(s)}{1 - f(t)k(s)} \right). \quad (3.3)$$

Demostración. Es inmediato a partir de (3.2) y la definición de curvatura media, $H = \frac{k_1+k_2}{2}$. Como estamos suponiendo que M no es un plano ortogonal a \mathbf{d} , en virtud de la *Proposición 3.1*, g no es constante, luego g' no se anula. □

3.3. Interpretación geométrica

Para finalizar este capítulo, expondremos algunos ejemplos de superficies DPC para cada caso estudiado en la *Proposición 3.1* y así tener una idea más práctica de sus demostraciones. Para mayor comodidad, en los siguientes ejemplo, supondremos que la curva plana γ está contenida en el plano $z = 0$ y que $\mathbf{d} = (0, 0, 1)$.

3.3.1. Superficie parametrizada con g constante

Tal y como se vio en la demostración de la *Proposición 3.1*, si suponemos $g(t) = a$ constante, la parametrización (1.4) se puede escribir como

$$\mathbf{x}(s, t) = (\gamma(s) + a\mathbf{d}) + (t + b)\mathbf{n}(s),$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. La interpretación es simple. Consiste en trasladar la curva γ a un plano paralelo en la dirección de \mathbf{d} y a una distancia a . Después, tomar un segmento en la dirección de $\mathbf{n}(s)$ para algún $s \in I$. Finalmente, deslizarlo a lo largo de γ para obtener una superficie plana. En la *Figura 3.4*, podemos ver un pequeño ejemplo de esta parametrización para $\gamma(s) = \sinh(s)$, $\mathbf{d} = (0, 0, 1)$ y $(f(t), g(t)) = (t, 2)$, es decir,

$$\mathbf{x}(s, t) = (\gamma(s) + 2\mathbf{d}) + t\mathbf{n}(s).$$

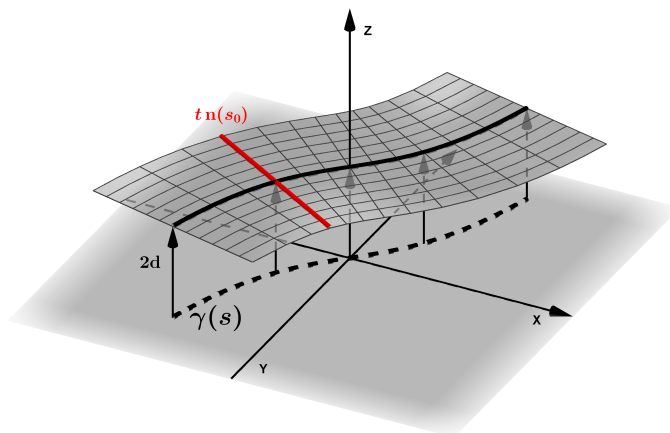


Figura 3.4: Ejemplo de superficie DPC con $g(t)$ constante.

3.3.2. Superficie parametrizada con γ una recta

Volviendo a la *Proposición 3.1*, si nos paramos en el caso donde la curva γ es una recta, la expresión (1.4) queda

$$\mathbf{x}(s, t) = \alpha(t) + \gamma(s),$$

con $\alpha(t) = f(t)\mathbf{n} + g(t)\mathbf{d}$ la directriz de esta superficie reglada. Por otro lado, sus generatrices son las rectas paralelas a γ que pasan por $\alpha(t_0)$ para cada $t_0 \in J$. En la *Figura 3.5*, podemos ver cómo se genera la superficie tomando, por ejemplo, γ paralela al eje X y $\beta(t) = (t, 2\cos(2t))$.

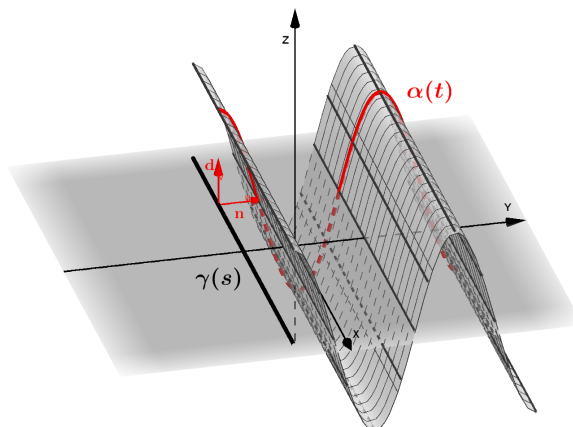


Figura 3.5: Ejemplo de superficie DPC con γ una recta.

3.3.3. Superficie parametrizada con γ una circunferencia

Este ejemplo se desarrollará de modo diferente. Esta vez además de suponer que γ es una circunferencia, vamos a imponer que M sea una superficie mínima como restricción adicional. La razón la veremos al final del ejemplo. Para simplificar los cálculos, supongamos $\gamma(s) = (\cos(s), \sin(s), 0)$ la circunferencia unidad. Además, Por la *Proposición 3.1*, sabemos que M es una superficie de revolución. Con estos datos vamos a calcular las funciones $f(t)$ y $g(t)$ de la curva $\beta(t)$ para obtener la parametrización de M como $\mathbf{x}(s, t) = ((1 - f(t)) \cos(s), (1 - f(t)) \sin(s), g(t))$. Por ser $\gamma(s)$ la circunferencia unidad, se deduce que $k(s) \equiv 1$ y como M es mínima, $H \equiv 0$. Sustituyendo estos valores en la expresión de la curvatura media dada en (3.3), obtenemos la ecuación:

$$\frac{f''(t)}{g'(t)} + \frac{g'(t)}{1 - f(t)} = 0.$$

Primero, despejamos $g'(t)$,

$$(g'(t))^2 = -f''(t)(1 - f(t)),$$

y gracias a que $(f'(t))^2 + (g'(t))^2 = 1$, podemos sustituir $(g'(t))^2$ y reordenar la ecuación,

$$f''(t)(1 - f(t)) - (f'(t))^2 + 1 = 0. \quad (3.4)$$

Así lo que nos queda es una EDO de segundo orden. El primero paso será reducir el grado con el cambio

$$u = f'(t) = \frac{df}{dt}, \quad (3.5)$$

y, a partir de aquí, deducir $f''(t)$ como:

$$f''(t) = u' = \frac{du}{dt} = \frac{du}{df} \frac{df}{dt} = u \frac{du}{df}.$$

Por tanto, la ecuación (3.4) pasa a ser:

$$u \frac{du}{df} (1 - f) - u^2 + 1 = 0.$$

Ahora podemos resolverla por el método de separación de variables. Tras despejar, se tiene:

$$\frac{u}{u^2 - 1} du = \frac{1}{1 - f} df.$$

Integramos cada lado:

$$\frac{1}{2} \log |u^2 - 1| = -\log |1 - f| + C_1.$$

Despejamos u y cambiamos e^{2C_1} por C_1 , quedando:

$$u = \frac{\sqrt{C_1 + (1 - f)^2}}{1 - f}. \quad (3.6)$$

Deshacemos el cambio dado en (3.5) y volvemos a repetir el método despejando de nuevo las variables:

$$\frac{1 - f}{\sqrt{C_1 + (1 - f)^2}} df = dt.$$

Integramos ambos lados y queda:

$$-\sqrt{C_1 + (1 - f)^2} = t + C_2.$$

Por último, despejamos f ,

$$f(t) = 1 - \sqrt{(t + C_2)^2 - C_1}.$$

Si ahora multiplicamos y dividimos dentro de la raíz por $-C_1$, queda

$$f(t) = 1 - \sqrt{-C_1} \sqrt{\frac{(t + C_2)^2 - C_1}{-C_1}},$$

es decir,

$$f(t) = 1 - \sqrt{-C_1} \sqrt{\left(\frac{t + C_2}{\sqrt{-C_1}}\right)^2 + 1}.$$

Podemos aplicar la igualdad trigonométrica

$$\cosh(\operatorname{arcsenh}(x)) = \sqrt{x^2 + 1},$$

lo que implica que

$$f(t) = 1 - \sqrt{-C_1} \cosh\left(\operatorname{arcsenh}\left(\frac{t + C_2}{\sqrt{-C_1}}\right)\right).$$

Además, teniendo en cuenta que $\cosh(x)$ es una función par y que $\operatorname{arcsenh}(x)$ es impar, si cambiamos $-\sqrt{-C_1}$ por C_1 , podemos escribir $f(t)$ como:

$$f(t) = 1 + C_1 \cosh\left(\operatorname{arcsenh}\left(\frac{t + C_2}{C_1}\right)\right). \quad (3.7)$$

Para el cálculo de $g(t)$, sustituiremos f' , obtenida en (3.6), en la igualdad $(f'(t))^2 + (g'(t))^2 = 1$ y resolveremos la ecuación:

$$(g')^2 = 1 - \frac{C_1 + (1 - f)^2}{(1 - f)^2}.$$

Operando a la derecha y despejando g' , obtenemos

$$g' = \frac{\sqrt{-C_1}}{1 - f},$$

que combinada con (3.7) y el cambio $-\sqrt{-C_1}$ por C_1 , queda:

$$g' = \frac{1}{\cosh\left(\operatorname{arcsenh}\left(\frac{t + C_2}{C_1}\right)\right)}.$$

Para acabar, usando que

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsenh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

integrarnos g' , obteniendo $g(t)$ como:

$$g(t) = C_1 \operatorname{arcsenh} \left(\frac{t + C_2}{C_1} \right) + C_3.$$

La curva plana $\beta(t) = (f(t), g(t))$ es la parametrización natural de la catenaria dada por

$$x = x_0 + a \cosh \left(\frac{y - y_0}{a} \right),$$

con $x_0 = 1$, $C_1 = a$ e $y_0 = C_3 - C_2$. Observemos que podemos tomar $C_3 = 0$ sin pérdida de generalidad pues solo variaría el dominio de definición del parámetro t . Como M está generada por la catenaria

$$\alpha(t) = \mathbf{x}(s_0, t) = ((1 - f(t)) \cos(s), (1 - f(t)) \sin(s), g(t)),$$

para algún $s_0 \in [0, 2\pi)$, se deduce que M es el catenoide en \mathbb{R}^3 . En [13], se estudia con más profundidad el catenoide como la única superficie mínima DPC.

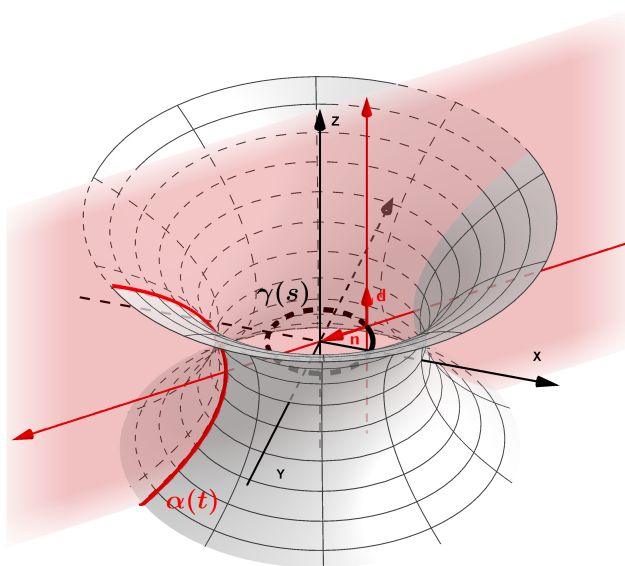


Figura 3.6: Ejemplo de catenoide para $C_1 = 2$ y $C_2 = 0$.

Capítulo 4

Teorema de Clasificación para Superficies DPC con Curvatura Media fijada

Como se mencionó al comienzo de esta memoria, el objetivo principal es clasificar aquellas superficies DPC con curvatura media fijada por una de las tres funciones afines: altura (1.1), ángulo (1.2) y soporte (1.3). Demostraremos el *Teorema 1.1* dividiéndolo en tres secciones distintas, cada una tratando un tipo de superficie DPC según la función que satisfaga su curvatura media. Daremos por hecho que las superficies DPC que aparecen a continuación están parametrizadas como (1.4), manteniendo la misma notación explicada en el Capítulo 3.

Antes de empezar con el primer tipo, observemos que si suponemos $\lambda = 0$ en las definiciones de (1.1), (1.2) y (1.3), $H(p)$ es constante en toda la superficie. Este caso particular lo estudiaremos aparte con la siguiente proposición.

Proposición 4.1. *Si M es una superficie DPC con curvatura media constante, entonces M es un plano, un cilindro circular con eje ortogonal a \mathbf{d} o una superficie de revolución con eje paralelo a \mathbf{d} .*

Demostración. Es inmediato que un plano ortogonal a \mathbf{d} es una superficie DPC con curvatura media nula pues para todos sus puntos $k_1 = k_2 = 0$. Supongamos M una superficie distinta a un plano. En particular, se deduce de la *Proposición 3.1* que la función $g(t)$ no es constante y tenemos la expresión de la curvatura media vista en (3.3). Si derivamos respecto a s ,

$$\frac{g'(t)\dot{k}(s)}{(1 - f(t)k(s))^2} = 0,$$

lo que implica que $g'(t)\dot{k}(s) = 0$, luego $\dot{k}(s) = 0$ y entonces, $k(s) = cte$. Por tanto, γ es una recta o una circunferencia. Aplicamos de nuevo la *Proposición 3.1* a los

dos casos. Si γ es una recta, M es una superficie cilíndrica con generatrices paralelas a γ , luego su eje también es paralelo a γ y, por consiguiente, ortogonal a \mathbf{d} . Si γ es una circunferencia, M es una superficie de revolución con eje paralelo a \mathbf{d} . \square

4.1. Superficies capilares DPC

Sea M una superficie DPC. Supongamos que su curvatura media $H(p)$ satisface (1.1):

$$H(p) = \lambda \langle p, \mathbf{v} \rangle + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0.$$

Usando la expresión de H obtenida en (3.3), la ecuación (1.1) queda

$$\frac{1}{2} \left(\frac{f''(t)}{g'(t)} + \frac{g'(t)k(s)}{1 - f(t)k(s)} \right) = \lambda (\langle \gamma(s), \mathbf{v} \rangle + f(t) \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{v} \rangle + g(t) \langle \mathbf{d}, \mathbf{v} \rangle) + \mu \quad (4.1)$$

y derivando respecto a s , se obtiene:

$$\frac{g'(t)\dot{k}(s)}{(1 - f(t)k(s))^2} = 2\lambda(1 - f(t)k(s)) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{v} \rangle. \quad (4.2)$$

Nos encontramos con dos casos dependiendo del valor de $\dot{k}(s)$:

1. Si $\dot{k}(s) = 0$, para todo $s \in I$, k es constante y entonces, γ es una recta o una circunferencia. Además, la ecuación (4.2) implica que $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{v} \rangle = 0$, luego $\langle \gamma(s), \mathbf{v} \rangle$ también es constante. Por la *Proposición 3.1*, la superficie M será una superficie cilíndrica con generatrices ortogonales a \mathbf{d} o una superficie de revolución con eje paralelo a \mathbf{d} . Definimos $\alpha(t) = f(t)\mathbf{n} + g(t)\mathbf{d}$ y $\tilde{\mu} = \lambda \langle \gamma(s), \mathbf{v} \rangle + \mu$. Observamos que $\tilde{\mu}$ es constante, α está parametrizada naturalmente y su curvatura k_α satisface:

$$\begin{aligned} k_\alpha(t) &= |\alpha''(t)| = \sqrt{(f'')^2 + (g'')^2} = \sqrt{(f'')^2 + \left(-\frac{f''f'}{g'}\right)^2} \\ &= \sqrt{(f'')^2 \left(1 + \left(\frac{f'}{g'}\right)^2\right)} = f'' \sqrt{\frac{(g')^2 + (f')^2}{(g')^2}} \\ &= \frac{f''}{g'} \sqrt{(g')^2 + (f')^2} = \frac{f''(t)}{g'(t)}. \end{aligned}$$

Como k es constante, distinguimos otros dos casos:

- a) Si $k = 0$, γ es una recta, entonces \mathbf{n} es constante y la ecuación (4.1) se reescribe como

$$\frac{1}{2} \frac{f''(t)}{g'(t)} = \lambda \langle f(t)\mathbf{n} + g(t)\mathbf{d}, \mathbf{v} \rangle + \lambda \langle \gamma(s), \mathbf{v} \rangle + \mu,$$

y, por consiguiente, la curva plana α satisface el caso unidimensional de (1.1) como una combinación lineal de su función altura,

$$\frac{k_\alpha(t)}{2} = \lambda \langle \alpha(t), \mathbf{v} \rangle + \tilde{\mu}.$$

- b) Si $k \neq 0$, γ es una circunferencia y M una superficie de revolución con eje paralelo a \mathbf{d} . Como $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{v} \rangle = 0$, derivando respecto a s , $k(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{v} \rangle = 0$, entonces $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{v} \rangle = 0$ y λ es ortogonal a \mathbf{t} y \mathbf{n} , luego \mathbf{v} es paralelo a \mathbf{d} . La curva generadora α satisface la EDO

$$\frac{1}{2} \left(\frac{f''(t)}{g'(t)} + \frac{g'(t)k}{1 - f(t)k} \right) = \varepsilon \lambda g(t) + \tilde{\mu},$$

donde $\varepsilon = \langle \mathbf{d}, \mathbf{v} \rangle = \pm 1$.

2. Si $\dot{k}(s_0) \neq 0$, para algún $s_0 \in I$, en particular, $\dot{k}(s) \neq 0$ en $I' \subset I$ alrededor de $s = s_0$. Para simplificar, supongamos $I' = I$. La ecuación (4.2) queda

$$\frac{g'(t)}{(1 - f(t)k(s))^3} = 2 \frac{\lambda \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{v} \rangle}{\dot{k}(s)}$$

y, derivando respecto a t ,

$$g''(t)(1 - f(t)k(s)) + 3g'(t)f'(t)k(s) = 0, \quad (4.3)$$

obteniendo dos posibilidades respecto a g'' :

- a) $g''(t_0) \neq 0$, para algún $t_0 \in J$. Luego $g''(t) \neq 0$ en un intervalo $J' \subset J$ centrado en $t = t_0$. En $I \times J'$, podemos escribir (4.3) tal que:

$$\frac{1}{k(s)} = f(t) - 3 \frac{g'(t)f'(t)}{g''(t)}.$$

Como el miembro de la izquierda depende solo de s y el de la derecha solo de t , entonces deben de ser constantes. Pero $\frac{1}{k(s)}$ no puede ser constante pues $\dot{k}(s) \neq 0$, llegando a una contradicción.

- b) $g''(t) = 0$. De la ecuación (4.3) se deduce que $f'(t)k(s) = 0$, para todo $(s, t) \in I \times J$, pero $\dot{k}(s) \neq 0$ y $k(s) \neq 0$ para algún $s \in I$. Eso implica que $f'(t) = 0$, para cualquier $t \in J$. Por consiguiente, $g'(t) = \varepsilon \in$

$\{-1, 1\}$ puesto que $(f'(t))^2 + (g'(t))^2 = 1$. Además, $f(t) = a$, $a \in \mathbb{R}$ y $g(t) = \varepsilon t + b$, $b \in \mathbb{R}$. La parametrización de M queda:

$$\mathbf{x}(s, t) = \gamma(s) + a\mathbf{n}(s) + (\varepsilon t + b)\mathbf{d}.$$

Esto prueba que M es una superficie cilíndrica cuya directriz es la curva plana $\gamma_a(s) = \gamma(s) + a\mathbf{n}(s)$ y sus generatrices paralelas a \mathbf{d} . En estas condiciones, la ecuación (4.1) se escribe:

$$\frac{\varepsilon k(s)}{2(1 - ak(s))} = \lambda(\langle \gamma_a(s), \mathbf{v} \rangle + (\varepsilon t + b)\langle \mathbf{d}, \mathbf{v} \rangle) + \mu.$$

Al derivar con respecto a t , $\lambda\varepsilon\langle \mathbf{d}, \mathbf{v} \rangle = 0$, es decir, \mathbf{d} y \mathbf{v} son ortogonales y podemos simplificarla en:

$$\frac{k(s)}{1 - ak(s)} = 2\varepsilon\lambda\langle \gamma_a(s), \mathbf{v} \rangle + 2\varepsilon\mu.$$

Finalmente, concluimos que γ_a satisface el caso unidimensional de (1.1) pues al calcular su curvatura, se obtiene:

$$k_{\gamma_a} = \frac{k(s)}{1 - ak(s)}.$$

□

4.2. Solitones λ -trasladados DPC

Sea M una superficie DPC. Supongamos que su curvatura media $H(p)$ satisface (1.2):

$$H(p) = \lambda\langle \mathbf{N}(p), \mathbf{v} \rangle + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0.$$

De nuevo, usaremos la expresión de H dada en (3.3):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{f''(t)}{g'(t)} + \frac{g'(t)k(s)}{1 - f(t)k(s)} \right) = \lambda\langle \mathbf{N}(p), \mathbf{v} \rangle + \mu.$$

Para calcular $\langle \mathbf{N}(p), \mathbf{v} \rangle$ usaremos la aplicación de Gauss definida en (3.1). Así la expresión final queda:

$$\frac{f''(t)}{g'(t)} + \frac{g'(t)k(s)}{1 - f(t)k(s)} = -2\lambda g'(t)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{v} \rangle + 2\lambda f'(t)\langle \mathbf{d}, \mathbf{v} \rangle + 2\mu. \quad (4.4)$$

Derivamos respecto a s y dividimos por $g'(t)$, que suponemos distinto de cero para descartar el caso, ya estudiado en el Capítulo 3, en el que la superficie M es un plano. Entonces:

$$\frac{\dot{k}(s)}{(1 - f(t)k(s))^2} = -2\lambda\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{v} \rangle = 2\lambda k(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{v} \rangle. \quad (4.5)$$

Si ahora derivamos respecto a t ,

$$\frac{2k(s)\dot{k}(s)f'(t)}{(1 - f(t)k(s))^3} = 0,$$

luego $2k(s)\dot{k}(s)f'(t) = (k^2(s))'f'(t) = 0$. Tenemos dos casos para $f'(t)$:

1. $f'(t_0) \neq 0$, para algún $t_0 \in J$. Entonces $k(s)$ es constante y nos volvemos a encontrar en los dos últimos puntos de la *Proposición 3.1* concluyendo que la superficie M será una superficie cilíndrica con generatrices ortogonales a \mathbf{d} , si γ es una recta, o una superficie de revolución con eje paralelo a \mathbf{d} , si γ es una circunferencia.

- a) Si $k = 0$. La curva γ es una recta y \mathbf{n} es constante. Aplicándolo a la ecuación (4.4), obtenemos:

$$\frac{f''(t)}{g'(t)} = -2\lambda g'(t)\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle + 2\lambda f'(t)\langle \mathbf{d}, \mathbf{v} \rangle + 2\mu. \quad (4.6)$$

Si definimos la curva plana $\alpha(t) = f(t)\mathbf{n} + g(t)\mathbf{d}$, su normal principal es $\mathbf{N}_\alpha(t) = -g'(t)\mathbf{n} + f'(t)\mathbf{d}$ y su curvatura $k_\alpha(t) = \frac{f''(t)}{g'(t)}$. A partir de estos datos, (4.6) se puede escribir como

$$k_\alpha(t) = 2\lambda\langle \mathbf{N}_\alpha(t), \mathbf{v} \rangle + 2\mu,$$

lo que prueba que α satisface el caso unidimensional de (1.2).

- b) Si $k \neq 0$, γ es una circunferencia y la ecuación (4.5) nos dice que $2\lambda k\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{v} \rangle = 0$. Esto implica que $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{v} \rangle = 0$ y, entonces, $\langle \gamma(s), \mathbf{v} \rangle = cte$. Además, volviendo a derivar respecto a s , $k\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{v} \rangle = 0$ y, por tanto, \mathbf{v} es ortogonal a \mathbf{t} y \mathbf{n} y paralelo a \mathbf{d} . Ahora, la ecuación (4.4) se convierte en

$$\frac{f''(t)}{g'(t)} + \frac{g'(t)k}{1 - f(t)k} = 2\varepsilon\lambda f'(t) + 2\mu,$$

con $\varepsilon = \langle \mathbf{d}, \mathbf{v} \rangle = \pm 1$.

2. $f'(t) = 0$, para todo $t \in J$. Entonces $f(t) = a$, $a \in \mathbb{R}$ y $g(t) = \varepsilon t + b$, $b \in \mathbb{R}$. La parametrización de M queda:

$$\mathbf{x}(s, t) = \gamma(s) + a\mathbf{n}(s) + (\varepsilon t + b)\mathbf{d}.$$

Como ya se demostró en la *Proposición 3.1*, esto prueba que M es una superficie cilíndrica y su directriz es la curva plana $\gamma_a(s) = \gamma(s) + a\mathbf{n}(s)$ y sus generatrices paralelas a \mathbf{d} . La ecuación (4.4) se reescribe como:

$$\frac{k(s)}{1 - ak(s)} = -2\lambda\langle\mathbf{n}(s), v\rangle + 2\varepsilon\mu.$$

De nuevo, el miembro izquierdo es la curvatura de γ_a y se satisface el caso unidimensional de (1.2). \square

4.3. Superficies λ -contraídas DPC

Sea M una superficie DPC. Supongamos que su curvatura media $H(p)$ satisface (1.3):

$$H(p) = \lambda\langle\mathbf{N}(p), p\rangle + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0.$$

Utilizaremos el mismo procedimiento para hallar $\langle\mathbf{N}(p), p\rangle$ y la nueva expresión de (1.3). Para $\langle\mathbf{N}(p), p\rangle$, tenemos la aplicación de Gauss definida en (3.1) y junto a la parametrización (1.4) para el punto p , se tiene:

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{N}(p), p\rangle &= \langle -g'(t)\mathbf{n}(s) + f'(t)\mathbf{d}, \gamma(s) + f(t)\mathbf{n}(s) + g(t)\mathbf{d} \rangle \\ &= -g'(t)\langle\mathbf{n}(s), \gamma(s)\rangle - f(t)g'(t) + f'(t)g(t). \end{aligned}$$

Una vez calculado y usando la expresión de H en (3.3), la ecuación (1.3) queda:

$$\frac{f''(t)}{g'(t)} + \frac{g'(t)k(s)}{1 - f(t)k(s)} = -2\lambda g'(t)\langle\mathbf{n}(s), \gamma(s)\rangle - 2\lambda f(t)g'(t) + 2\lambda f'(t)g(t) + 2\mu. \quad (4.7)$$

Ahora podemos dividir por $g'(t)$, obteniendo:

$$\frac{f''(t)}{g'(t)^2} + \frac{k(s)}{1 - f(t)k(s)} = -2\lambda\langle\mathbf{n}(s), \gamma(s)\rangle - 2\lambda f(t) + 2\lambda \frac{f'(t)g(t)}{g'(t)} + 2\frac{\mu}{g'(t)}.$$

El miembro de la derecha es una suma de funciones que dependen o solo de s o solo de t , así que al derivar respecto a s y luego respecto a t se anulará. Por otro lado, el miembro de la izquierda tras derivar en el mismo orden nos queda:

$$\frac{2k(s)\dot{k}(s)f'(t)}{(1 - f(t)k(s))^3} = \frac{(k^2(s))'f'(t)}{(1 - f(t)k(s))^3} = 0.$$

Análogamente a la Sección 4.2 para los solitones, $(k^2(s))'f'(t) = 0$ y tenemos dos casos según el valor de $f'(t)$:

1. $f'(t_0) \neq 0$, para algún $t_0 \in J$. Entonces k es constante y nos encontramos, de nuevo, en los dos últimos puntos de la *Proposición 3.1* concluyendo que la superficie M será una superficie cilíndrica con generatrices ortogonales a \mathbf{d} , si γ es una recta, o una superficie de revolución con eje paralelo a \mathbf{d} , si γ es una circunferencia.

- a) Si $k = 0$, γ es una recta y entonces, \mathbf{t} y \mathbf{n} son constantes, coplanarios y ortogonales. Sea la curva plana $\alpha(t) = f(t)\mathbf{n} + g(t)\mathbf{d}$, su normal principal es $\mathbf{N}_\alpha(t) = -g'(t)\mathbf{n} + f'(t)\mathbf{d}$ y su curvatura $k_\alpha(t) = \frac{f''(t)}{g'(t)}$. Ahora la ecuación (4.7) se escribe:

$$k_\alpha(t) = 2\lambda\langle\mathbf{N}_\alpha(t), \gamma(s) + \alpha(t)\rangle + 2\mu = 2\lambda\langle\mathbf{N}_\alpha(t), \alpha(t)\rangle + 2\mu.$$

Observemos que $\langle\mathbf{N}_\alpha(t), \gamma(s)\rangle = 0$ para todo $s \in I$ porque γ es ortogonal a \mathbf{d} por definición y, al ser una recta, también lo es a \mathbf{n} , así que α satisface el caso unidimensional de (1.3).

- b) Si $k \neq 0$, entonces γ es una circunferencia. Si derivamos la ecuación (4.7) respecto a s , se tiene:

$$\langle\gamma(s), \mathbf{n}(s)\rangle' = 0.$$

Desarrollando la derivada, obtenemos que

$$\langle\gamma(s), \mathbf{n}(s)\rangle' = \langle\gamma(s), \dot{\mathbf{n}}(s)\rangle = -k\langle\gamma(s), \mathbf{t}(s)\rangle = 0$$

y de aquí se deduce que $\langle\gamma(s), \mathbf{t}(s)\rangle = 0$, por lo que γ es una circunferencia centrada en el origen. Si volvemos a derivar,

$$\langle\gamma(s), \mathbf{t}(s)\rangle' = \langle\gamma(s), \ddot{\gamma}(s)\rangle + \langle\mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)\rangle = k\langle\gamma(s), \mathbf{n}(s)\rangle + 1 = 0.$$

Por consiguiente,

$$\langle\gamma(s), \mathbf{n}(s)\rangle = -\frac{1}{k}$$

y la generatriz $\alpha(t) = f(t)\mathbf{n} + g(t)\mathbf{d}$ satisface la EDO obtenida al sustituir en (4.7):

$$\frac{f''(t)}{g'(t)} + \frac{g'(t)k}{1 - f(t)k} = \frac{2}{k}\lambda g'(t) - 2\lambda f(t)g'(t) + 2\lambda f'(t)g(t) + 2\mu.$$

2. $f'(t) = 0$, para todo $t \in J$. Entonces $f(t) = a$, $a \in \mathbb{R}$ y $g(t) = \varepsilon t + b$, $b \in \mathbb{R}$. La parametrización de M queda:

$$\mathbf{x}(s, t) = \gamma(s) + a\mathbf{n}(s) + (\varepsilon t + b)\mathbf{d}.$$

Tal y como se demostró en la *Proposición 3.1*, M es una superficie cilíndrica con directriz $\gamma_a(s) = \gamma(s) + a\mathbf{n}(s)$ y generatrices paralelas a \mathbf{d} . Finalmente, la ecuación (4.7) se escribe:

$$\frac{k(s)}{1 - ak(s)} = -2\lambda\langle\mathbf{n}(s), \gamma(s)\rangle - 2\lambda a + 2\varepsilon\mu.$$

Si sustituimos $\gamma(s)$ por $\gamma_a(s) - a\mathbf{n}(s)$,

$$\frac{k(s)}{1 - ak(s)} = 2\lambda\langle\mathbf{n}(s), \gamma_a(s)\rangle + 2\varepsilon\mu.$$

De nuevo, como

$$k_{\gamma_a} = \frac{k(s)}{1 - ak(s)},$$

entonces γ_a satisface el caso unidimensional de (1.3). □

Capítulo 5

Apéndice: Idea de cómo se generaliza el problema para las hipersuperficies de \mathbb{R}^n

Como cierre a este trabajo sobre la clasificación de superficies con una dirección principal canónica, cabe mencionar que este problema se podría generalizar a hipersuperficies en \mathbb{R}^n . Sin entrar en muchos detalles, podemos dar un desarrollo análogo al obtenido en el Capítulo 3. Para ello, en [8], se definen los campos vectoriales *conformes cerrados*. Una de las propiedades más interesantes que se deducen de ellos es que para cualquier campo vectorial conforme cerrado Y en \mathbb{R}^{n+1} , existe una hipersuperficie ortogonal a Y en todos sus puntos.

Sea Y un campo vectorial conforme cerrado unitario en \mathbb{R}^{n+1} , podemos suponer N una hipersuperficie ortogonal a Y en todos sus puntos. Sea una hipersuperficie $(n - 1)$ -dimensional de N parametrizada por $\gamma = \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})$ y $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ el vector normal a γ en el punto $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Y como ya se usó, tomemos $\beta(t) = (f(t), g(t))$ una curva plana parametrizada naturalmente. Definimos la hipersuperficie M de \mathbb{R}^{n+1} parametrizada como:

$$\mathbf{x}(x, t) = \gamma(x) + f(t)\mathbf{n}(x) + g(t)Y(x).$$

Si calculamos todas sus derivadas parciales, obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1 &= \gamma_1 + f(t)\mathbf{n}_1 + g(t)Y_1 = \gamma_1 + f(t)\mathbf{n}_1 + g(t)\phi\gamma_1, \\ &\vdots \\ \mathbf{X}_{n-1} &= \gamma_{n-1} + f(t)\mathbf{n}_{n-1} + g(t)\phi\gamma_{n-1}, \\ \mathbf{X}_t &= f'(t)\mathbf{n} + g'(t)Y,\end{aligned}$$

con ϕ una función diferenciable en \mathbb{R}^{n+1} (ver [8]). Por otro lado, como $\langle Y, \gamma_i \rangle = 0$

para todo $i = 1, \dots, n - 1$, se tiene:

$$\langle Y, \mathbf{X}_i \rangle = f(t) \langle Y, \mathbf{n}_i \rangle = -f(t) \langle Y_i, \mathbf{n} \rangle = -f(t) \phi \langle \gamma_i, \mathbf{n} \rangle = 0,$$

para cada $i = 1, \dots, n - 1$. De aquí, podemos deducir que la proyección de Y sobre el espacio tangente de M en cada punto queda,

$$\langle Y, \mathbf{X}_1 \rangle \mathbf{X}_1 + \dots + \langle Y, \mathbf{X}_{n-1} \rangle \mathbf{X}_{n-1} + \langle Y, \mathbf{X}_t \rangle \mathbf{X}_t = \langle Y, \mathbf{X}_t \rangle \mathbf{X}_t,$$

que podemos desarrollar, dando:

$$\begin{aligned} \langle Y, \mathbf{X}_t \rangle \mathbf{X}_t &= \langle Y, f'(t) \mathbf{n} + g'(t) Y \rangle \mathbf{X}_t \\ &= f'(t) \langle Y, \mathbf{n} \rangle \mathbf{X}_t + g'(t) \langle Y, Y \rangle \mathbf{X}_t \\ &= g'(t) \mathbf{X}_t. \end{aligned}$$

Tal y como razonamos en el caso de las superficies, supondremos una proyección no nula, es decir, $g'(t) \neq 0$. Del mismo modo, se tiene el campo vectorial normal a M como

$$\mathbf{N} = -g'(t) \mathbf{n} + f'(t) Y,$$

que derivando respecto a t , queda:

$$\mathbf{N}_t = \frac{f''(t)}{g'(t)} \mathbf{X}_t.$$

De esta manera, se demuestra que \mathbf{X}_t es una dirección principal y, por consiguiente, que M es una hipersuperficie con una dirección principal canónica con respecto a Y .

Referencias

- [1] DILLEN, F., FASTENAKELS, J., VAN DER VEKEN, J. : *Surfaces in $S^2 \times \mathbb{R}$ with a canonical principal direction*. Ann. Glob. Anal. Geom. **35**, 381-396 (2009).
- [2] DILLEN, F., MUNTEANU, M.I., NISTOR, A. : *Canonical coordinates and principal directions for surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* . Taiwan. J. Math. **15**, 2265-2289 (2011).
- [3] DO CARMO, M.P. : *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Alianza Editorial (1990).
- [4] ECKER, K., HUISKEN, G. : *Mean curvature evolution of entire graphs*. Ann. Math. **130**, 453-471 (1989).
- [5] FINN, R. : *Capillary Surface Interfaces*. Notices of the American Mathematical Society, **46**, 770-781 (1999).
- [6] FINN, R. : *Equilibrium Capillary Surfaces*. Springer, Berlin (1986).
- [7] FU, Y., NISTOR, A. : *Constant angle property and canonical principal directions for surfaces in $M^2(c) \times R_1$* . Mediterr. J. Math. **10**, 1035-1049 (2013).
- [8] GARNICA, E., PALMAS, O., RUIZ-HERNÁNDEZ, G. : *Hypersurfaces with a canonical principal direction*. Differ. Geom. Appl. **30**, 382-391 (2012).
- [9] HUISKEN, G. : *Flow by mean curvature convex surfaces into spheres*. J. Differ. Geom. **20**, 237-266 (1984).
- [10] HUISKEN, G., SINISTRARI, C. : *Mean curvature flow singularities for mean convex surfaces*. Calc. Var. **8**, 1-14 (1999).
- [11] ILMANEN, T. : *Lectures on mean curvature flow and related equations*. In: Conference on Partial Differential Equations & Applications to Geometry. ICTP, Trieste (1995).

- [12] LÓPEZ, R., RUIZ-HERNÁNDEZ, G. : *Surfaces with a canonical principal direction and prescribed mean curvature*. Annali di Matematica. **198**, 1471-1479 (2019).
- [13] MUNTEANU, M.I., NISTOR, A. : *Complete classification of surfaces with a canonical principal direction in the Euclidean space E^3* . Cent. Eur. J. Math. **9**, 378-389 (2011).
- [14] TARRÉS FREIXENET, J., ESCRIBANO, M.C., ROJO MONTIJANO, J. : *La curvatura media y Sophie Germain*. Pensamiento Matemático **4.2**, 31-46 (2014).
- [15] WA, X.-J. : *Convex solutions to the mean curvature flow*. Ann. Math. **173**, 1185-1239 (2011).