



FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANÁLISIS NUMÉRICO

Trabajo Fin de Grado:

**La ecuación de Hamilton-Jacobi y el nacimiento de un
nuevo concepto de solución:
Soluciones de viscosidad**

Autora:

Belén Zamora González

Dirigido por:

M. Teresa Pérez Pérez

2020 - 2021

Índice general

<i>Resumen</i>	III
<i>Abstract</i>	V
1. Introducción	1
1.1. Ecuaciones en Derivadas Parciales	1
1.1.1. La ecuación de Hamilton-Jacobi	2
1.1.2. Algunas aplicaciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi	2
1.2. Motivación de la definición de solución de viscosidad	6
2. Soluciones de viscosidad	11
2.1. Definición de solución de viscosidad.	11
2.1.1. Otras definiciones equivalentes	16
2.2. Propiedades sobre F	19
3. Vanishing Viscosity Method	23
3.1. Introducción al Vanishing Viscosity Method: la Ecuación Eikonal	24

3.2. Vanishing Viscosity Method para la Ecuación de Hamilton-Jacobi	28
4. Unicidad de solución	33
4.1. Principio de comparación por el método de "doblar variables"	34
5. Continuidad Lipschitz de las soluciones de viscosidad	45
6. Apéndice	51
Bibliografía	53

Resumen

En esta memoria, vamos a estudiar a nivel teórico la ecuación de Hamilton-Jacobi centrándonos en la existencia, unicidad y regularidad de su solución. Este tipo de ecuaciones engloba una infinidad de aplicaciones, desde mecánica clásica, geometría diferencial, teoría de juegos, control óptimo, finanzas, óptica, impresiones 3D, etc. Necesitaremos introducir un nuevo concepto de solución, llamada solución de viscosidad, una solución más débil que el sentido clásico, que nos permitirá demostrar los resultados necesarios para conseguir nuestros objetivos. Entre otras cosas, desarrollaremos el "Vanishing Viscosity Method" para probar la existencia y el método de "Doblar variables" para demostrar la unicidad y la regularidad.

Abstract

In this memory, we study the Hamilton-Jacobi equation under a theoretical point of view, focusing on the existence, uniqueness and regularity of its solution. This type of equations includes a great deal of applications, from classical mechanics, differential geometry, differential game theory, optimal control, finance, optics, 3D printing, etc. We will need to introduce a new solution concept, known as viscosity solution, a solution weaker than the classical sense, which will allow us to prove the necessary results to achieve our objectives. Among other techniques, we will develop the "Vanishing Viscosity Method" to prove existence and "Doubling variables method" to show uniqueness and regularity.

Capítulo 1

Introducción

Antes de entrar en materia es preciso que recordemos la definición de EDP y el concepto de solución clásica. También mencionaremos qué clase de EDP queremos abordar y motivaremos el concepto de solución de viscosidad.

1.1. Ecuaciones en Derivadas Parciales

- Una *Ecuación en Derivada Parcial* (EDP) de orden $k \geq 1$ es una ecuación que involucra a una función desconocida u y sus derivadas hasta el orden k . En particular, vamos a considerar los casos $k \geq 2$, es decir:

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

donde $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_{n,n} \rightarrow \mathbb{R}$.

- En general, asumiremos que la EDP (es decir, la función F) es continua, aunque podría presentar singularidades.

- Sea una EDP de orden $k \geq 1$, una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *solución clásica* si $u \in C^k(\Omega)$ y u resuelve la EDP para cualquier $x \in \Omega$.

1.1.1. La ecuación de Hamilton-Jacobi

En particular, en este trabajo nos vamos a centrar en el estudio de un tipo de ecuaciones con muy diversas aplicaciones.

Vamos a analizar el problema de valores iniciales o problema de Cauchy, para la ecuación de Hamilton- Jacobi:

$$(EHJ) \quad \begin{cases} u_t + H(x, u, Du, D^2u(x)) = 0 & \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{en } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

se conoce de esta forma debido a que la función H , se trata del Hamiltoniano, que tendrá diversas características según el problema.

También trataremos el caso estacionario del problema anterior, es decir,

$$\lambda u(x) + H(x, u, Du(x), D^2u(x)) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n$$

para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.1.2. Algunas aplicaciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi

Existe una gran cantidad de problemas relacionados con las ecuaciones anteriores. Motivamos los siguientes:

Método de reconstrucción de imágenes 3D SfS ("Shape-from-Shading")

Si pretendemos reconstruir la imagen 3D de un objeto a partir del brillo observado en una o varias fotografías nos lleva a estudiar el siguiente problema:

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto conexo y acotado, y sea $z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la superficie visible, esto es,

$$S = \{(x, y, z(x, y)), (x, y) \in \Omega\}$$

Denotemos por $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la función brillo, donde $I(x, y) \in \mathbb{R}$ me indica pixel a pixel la imagen, y esto es considerado el nivel de gris. Por ejemplo, vamos a considerar $I(x, y) \in [0, 1]$ donde $I(x, y) = 0$ significa blanco e $I(x, y) = 1$ significa negro, y una función $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que proporciona la intensidad de la luz reflejada en función de la orientación de la superficie.



Figura 1.1: Impresión 3D de la Mona Lisa

En una superficie regular, la normal de la superficie viene dada por

$$N(x, y) = \frac{(-z_x(x, y), -z_y(x, y), 1)}{\sqrt{(z_x(x, y))^2 + (z_y(x, y))^2 + 1}}$$

Entonces, el modelo SfS se basa en la siguiente EDP:

$$R(N) = I(x, y) \text{ con } (x, y) \in \Omega$$

Ahora bien, por otro lado es habitual suponer que $R(N) = \omega \cdot N$, donde ω es un vector unitario que nos indica la fuente luminosa. Con lo que la EDP nos queda:

$$I(x, y) \sqrt{z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y) + 1} = -\omega_1 z_x(x, y) - \omega_2 z_y(x, y) + \omega_3$$

siendo $\omega_i \in \mathbb{R}$, los componentes del vector ω .

Esta ecuación es del tipo Hamilton-Jacobi estacionaria que debe ser completada con condiciones sobre la frontera. Además, si simplificamos a una fuente luminosa vertical, $\omega = (0, 0, 1)$, la ecuación anterior puede escribirse como,

$$I(x, y) \sqrt{z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y) + 1} = 1$$

o equivalentemente,

$$I^2(x, y)(z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y) + 1) = 1 \Rightarrow (z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)) = I^{-2}(x, y) - 1$$

Esta ecuación es de la forma, $|Dz| = f(x, y)$, la ecuación Eikonal bidimensional. Para más detalles sobre las impresiones 3D se puede consultar la web del IMUS [2].

Problema de Propagación de Frentes de primer orden

Sea una superficie $\Gamma_t \subset \mathbb{R}^n$ que se mueve con el tiempo $t > 0$ según cierta ley, desde una superficie inicial Γ_0 . El objetivo es estudiar como la familia $\{\Gamma_t\}_{t>0}$ evoluciona.

El ejemplo más fácil es considerar como superficie inicial $\Gamma_0 =$ esfera unidad en \mathbb{R}^n y suponer que cada punto se mueve hacia dentro en la dirección normal con un vector de velocidad constante unitario. Es sencillo ver que Γ_t es continua siendo una esfera para $t \in (0, 1)$, y que eventualmente en $t = 1$, Γ_1 se convierte en un punto situado en el centro

de dichas esferas.

En general si cada punto de la superficie Γ_t se mueve con velocidad variable, la situación se hace más delicada. Supongamos que Γ_t está definida como,

$$\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x, t) = 0\} \text{ para cada } t \geq 0$$

esto es, el conjunto de nivel cero de una función u .

Supongamos además que Γ_t es cerrada y que en la parte de dentro $u(x, t) > 0$, y en la de fuera $u(x, t) < 0$. Por último, consideramos que tanto u como Γ_t son lo suficientemente regulares para tomar derivadas. Sea $v(x) = a(x) \cdot \eta(x)$ la velocidad a la que se mueve $x \in \Gamma_t$, siendo η el vector normal interior unitario a Γ_t en x . Para un punto $x(0) \in \Gamma_0$, queremos analizar la posición a lo largo del tiempo, $x(t) \in \Gamma_t$, observamos que según la ley de movimiento,

$$v(x) = x'(t) = a(x(t)) \cdot \eta(x(t)) = a(x(t)) \frac{Du(x(t), t)}{|Du(x(t), t)|}$$

ya que el vector η normal y unitario a la superficie Γ_t será el gradiente de u (unitario). Por otro lado, el hecho de que $u(x(t), t) = 0$, nos permite tomar derivadas con respecto a t .

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t(x(t), t) + Du(x(t), t)x'(t) = 0$$

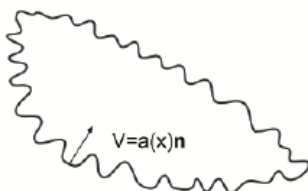


Figura 1.2: Frente de propagación de $\{\Gamma_t\}_{t>0}$

lo que implica que sustituyendo $x'(t)$ que obtuvimos anteriormente,

$$u_t(x(t), t) + a(x(t))|Du(x(t), t)| = 0$$

llegamos a una ecuación de Hamilton-Jacobi de primer orden en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$.

Evolución de los conjuntos de nivel de la curvatura media

Si en el problema anterior tomamos como velocidad de propagación, $v(x) = K(x) \cdot \eta(x)$, siendo $K(x)$ la curvatura media de la superficie Γ_t en el punto $x \in \Gamma_t$, llegamos a la ecuación

$$u_t = |Du| \operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right)$$

Además de las ya mencionadas, existen una infinidad de aplicaciones de estos problemas las cuáles son imposibles de incluir en esta memoria, en muy diversos ámbitos:

- El problema de los n cuerpos en mecánica clásica.
- Problemas de control óptimo.
- Teoría de juegos diferenciales
- Finanzas
- Propagación de ondas, tanto en óptica como en circuitos electro magnéticos, etc

1.2. Motivación de la definición de solución de viscosidad

Dadas unas condiciones iniciales y/o de frontera adecuadas, sería deseable que existiera una única solución clásica de (EHJ) y de su versión estacionaria. Sin embargo no siempre

hay existencia de solución, ni unicidad en caso de haber existencia. El concepto de existencia y unicidad es uno de los pilares en el que se construye toda la teoría de las Ecuaciones en Derivadas Parciales y dependerá esencialmente de la regularidad que se requiera sobre nuestras soluciones. El hecho de que no existan soluciones clásicas de un problema da lugar a considerar otros conceptos de soluciones, menos regulares, pero que satisfagan la ecuación en algún sentido más débil. Aunque es posible que, al debilitar la derivabilidad requerida, se pierda la unicidad de solución. Se ha de encontrar una relajación del concepto de solución lo suficientemente débil para permitir que exista solución pero sin perder la unicidad de la misma, para trabajar con un problema bien planteado. Vemos un ejemplo sencillo de este caso:

Vamos a considerar un caso particular de la *Ecuación Eikonal*, que desarrollamos anteriormente en el ámbito de la reconstrucción de imágenes 3D. Esta ecuación es muy antigua; El nombre Eikonal viene del griego y significa imagen. Es una EDP que no es lineal y que describe la propagación de ondas fundamentalmente en óptica,

$$\begin{cases} |Du(x)| = \frac{1}{f(x)} & x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

donde $Du(x)$ representa el gradiente, $|\cdot|$ denota la norma euclídea y f es un dato conocido y positivo estrictamente. Físicamente la solución $u(x)$ representa el tiempo más corto requerido para viajar desde la frontera $\partial\Omega$ al punto x en Ω , siendo $f(x)$ la velocidad en x . Cuando $f \equiv 1$, la ecuación tiene una forma muy particular:

$$\begin{cases} |Du(x)| = 1 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

y vamos a ver que no es difícil encontrar "ciertas soluciones" para este problema, pero nos tendremos que enfrentar a diversos obstáculos.

Si consideramos la dimensión $n = 1$, obtenemos un problema de esta forma:

$$\begin{cases} |u'| = 1 & \Omega = (-1, 1) \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

1. Primera dificultad: No puede haber una solución derivable de la ecuación.

Nos preguntamos si habrá una solución verificando el problema anterior con $u \in C^1$. Pero si existiera $u \in C^1([-1, 1])$ por el teorema del valor medio $\exists \xi \in (-1, 1) : u'(\xi) = 0$ y entonces u en ξ no cumpliría (1.1). De hecho, no se satisface en todo un entorno de ξ (por continuidad de u'). Esta situación nos lleva a pensar que tenemos que usar conceptos de soluciones más débiles.

2. Segunda dificultad: No es un problema en forma de divergencia.

Nuestra primera idea sería usar la fórmula de Green de integrar por partes frente a una función test, y así rebajar la regularidad de la solución. Sin embargo, no está escrito en forma de divergencia.

¿Y si tomamos como "soluciones buenas" aquellas que cumplan la condición en la frontera y la ecuación salvo en un número de puntos aislados, donde no sean derivables? Una "solución" para (1.1) podría ser $u = 1 - |x|$, que podemos ver a simple vista que es derivable en todos los puntos salvo en $x = 0$.

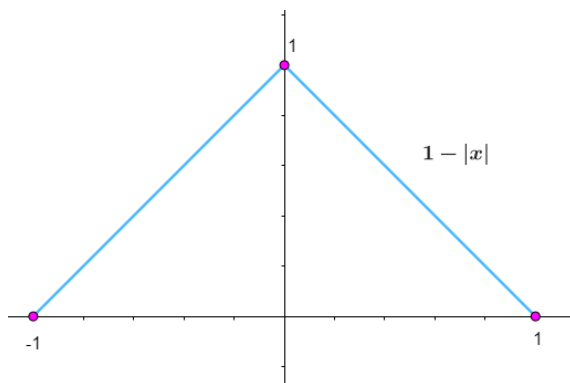


Figura 1.3: Gráfica de la función $1 - |x|$

Pero nos encontramos con un nuevo inconveniente.

3. Tercera dificultad: Falta de unicidad.

Ejemplo. Observamos que de la misma forma, tenemos dos soluciones que verifican la ecuación (1.1) en casi todo punto, $u(x) = 1 - |x|$ y $v(x) = |x| - 1$ e incluso una colección infinita de soluciones. Para construir tantas soluciones como queramos, partiremos de $u(x)$ (la renombraremos como $u_1(x)$):

$$u_1(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{en } (-1, 0) \\ 1 - x & \text{en } (0, 1) \end{cases}$$

la cuál resuelve el problema (1.1) en $(-1, 0) \cup (0, 1)$. Luego, por simetría de la gráfica con respecto a la línea horizontal $u = 1/2$, la función

$$u_2(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{en } (-1, -1/2) \\ -x & \text{en } (-1/2, 0) \\ x & \text{en } (0, 1/2) \\ 1 - x & \text{en } (1/2, 1) \end{cases}$$

es también solución de (1.1) en $(-1, -1/2) \cup (-1/2, 0) \cup (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$. De nuevo, por simetría con respecto a la línea horizontal $u = 1/4$ podríamos crear una nueva solución u_3 . Las funciones así construídas son las llamadas funciones Rademacher,

las cuáles están definidas de manera general como:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 - \frac{i}{2^{k-1}} & \text{si } x \in \left[-1 + \frac{i}{2^{k-1}}, -1 + \frac{2i+1}{2^k}\right) \\ -x - 1 + \frac{i+1}{2^{k-1}} & \text{si } x \in \left[-1 + \frac{2i+1}{2^k}, -1 + \frac{i+1}{2^{k-1}}\right) \end{cases} \quad (1.2)$$

$$i = 0, 1, \dots, 2^k - 1$$

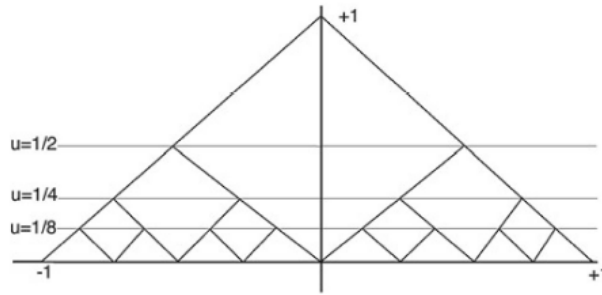


Figura 1.4: Construcción de las funciones Rademacher

Todo ello nos motiva a definir un concepto de solución para el cuál tengamos una única solución de la Ecuación Eikonal y no necesitemos que u sea C^1 . Nos surge la pregunta natural, si no es C^1 , ¿cuál es la mejor regularidad que puedo tener?

Capítulo 2

Soluciones de viscosidad

2.1. Definición de solución de viscosidad.

Si tomamos u una función convexa, por ejemplo, de la forma:

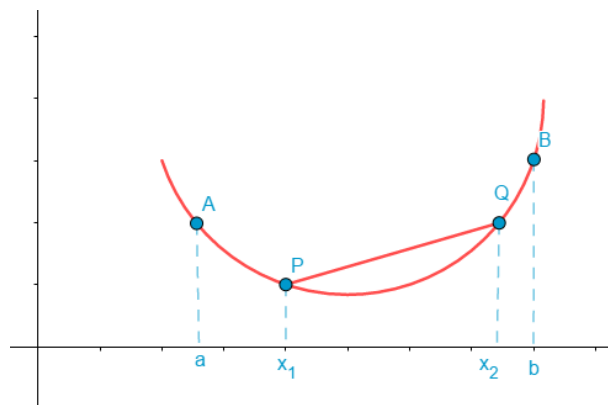


Figura 2.1: Función convexa

observamos que para decir que es convexa en un intervalo no necesitamos derivadas, basta con unir segmentos dentro del intervalo y ver si queda por encima de la función. Dicho de manera rigurosa, una función real f es convexa si está definida en un conjunto convexo C y para cualesquiera dos puntos $x, y \in C$, y para $t \in [0, 1]$ se cumple que

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

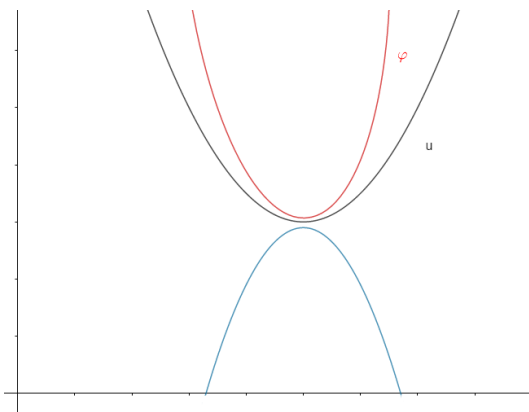


Figura 2.2: φ tocando por arriba a u

Si tomamos una función $\varphi \in C^2$, tocando a u convexa por arriba en algún punto x_0 , lo que significa que $\varphi \geq u$ y $\varphi(x_0) = u(x_0)$; es decir, $u - \varphi$ tiene un máximo local en el punto x_0 . Entonces, φ tendrá que ser una función convexa. Si además u fuera C^2 , entonces

$$0 \geq \Delta(u - \varphi)(x_0) = \Delta u(x_0) - \Delta \varphi(x_0) \geq -\Delta \varphi(x_0) \Rightarrow -\Delta \varphi(x_0) \leq 0$$

Es decir, hemos probado que u es subsolución (se definirá con rigor más adelante) de la sencilla ecuación de orden 2

$$F = F(D^2u) = -\Delta u = 0$$

Con esto, observamos que solo tenemos información por arriba.

De manera análoga, se define la función cóncava como aquella en la que el segmento se queda por debajo de la función. De hecho, nuestra solución de la ecuación Eikonal es cóncava y no tenemos que hablar necesariamente de la segunda derivada. Ahora bien, siguiendo el razonamiento anterior, consideramos una función $\varphi \in C^2$ tocando por abajo, podemos deducir la desigualdad inversa en el punto mínimo, es decir, $-\Delta \varphi(x_0) \geq 0$, en

algún punto x_0 donde $u - \varphi$ tiene un mínimo local.

Esto nos motiva a dar las siguientes definiciones para una ecuación más general con una condición de contorno de la forma,

$$\begin{cases} F(x, u, Du, D^2u) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continuas.

Nota 2.1. \mathcal{S}^n son las matrices simétricas de dimensión $n \times n$.

Definición 2.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y consideremos u continua en Ω .

- Decimos que u es subsolución de viscosidad de (2.1) en un punto $x_0 \in \Omega$, si y solo si, para cualquier función-test $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ tiene un máximo local en x_0 , entonces

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0,$$

y además se verifica la condición de contorno en $\partial\Omega$.

- Decimos que u es supersolución de viscosidad de (2.1) en un punto $x_0 \in \Omega$, si y solo si, para cualquier función-test $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ tiene un mínimo local en x_0 , entonces

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0,$$

y además se verifica la condición de contorno en $\partial\Omega$.

- Decimos que u es solución de viscosidad en el conjunto abierto Ω si u es subsolución de viscosidad y supersolución de viscosidad, en cualquier punto $x_0 \in \Omega$.

Ejemplo. Consideramos de nuevo el problema $|u'| - 1 = 0$ en el intervalo $(-1, 1)$ con $u(1) = u(-1) = 0$. Vamos a probar que $u(x) = -|x| + 1$ es una solución de viscosidad de dicho problema.

Veamos si u es subsolución. Tomamos $\varphi \in C^1(-1, 1)$ tal que $u - \varphi$ tiene un máximo local en algún $x_0 \in (-1, 1)$. Vamos a distinguir dos casos:

Caso 1: $x_0 \neq 0$

En este caso tenemos que u es derivable, de hecho, $u \in C^1$ en un entorno de x_0 . Como $u - \varphi$ tiene un máximo local (coloquialmente, la toca por arriba) entonces $(u - \varphi)'(x_0) = 0$.

$$(u - \varphi)'(x_0) = 0 \Rightarrow u'(x_0) = \varphi'(x_0) \Rightarrow \underbrace{|u'(x_0)|}_{=1} = |\varphi'(x_0)| \quad (2.2)$$

Por lo tanto, obtenemos que $|\varphi'(x_0)| = 1$ y en particular, $|\varphi'(x_0)| \leq 1$. Deducimos que u es subsolución.

Vamos a comprobar ahora que u es supersolución. Tomamos $\varphi \in C^1(-1, 1)$ tal que $u - \varphi$ tiene un mínimo local (coloquialmente, la toca por abajo) en algún $x_0 \in (-1, 1)$. Análogamente, obtenemos (2.2). En consecuencia, $|\varphi'(x_0)| \geq 1$, y con esto deducimos que u es supersolución. Hemos probado por tanto que u es solución de viscosidad para todo $x_0 \neq 0$.

Caso 2: $x_0 = 0$

Nuevamente, veamos si es subsolución en este caso. Tomamos $\varphi \in C^1(-1, 1)$ tal que $u - \varphi$ tiene un máximo local en $x_0 = 0$, tenemos que $(u - \varphi)(x) \leq (u - \varphi)(x_0)$. En nuestro caso, $(u - \varphi)(x) \leq (u - \varphi)(0)$ para $x \in B_\varepsilon(0)$. Agrupando:

$$\begin{aligned} u(x) - u(0) \leq \varphi(x) - \varphi(0) &\Rightarrow 1 - |x| - \overbrace{u(0)}^{=1} \leq \varphi(x) - \varphi(0) \Rightarrow \\ &-|x| \leq \varphi(x) - \varphi(0) \end{aligned}$$

Esto implica,

- $x > 0$: $-x \leq \varphi(x) - \varphi(0) \Rightarrow -1 \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$
- $x < 0$: $x \leq \varphi(x) - \varphi(0) \Rightarrow 1 \geq \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$

Haciendo ahora $x \rightarrow 0$, tenemos:

- $x > 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = D^+ \varphi(0) \geq -1$
- $x < 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = D^- \varphi(0) \leq 1$

Como $\varphi \in C^1$, debe cumplirse $D^+ \varphi(0) = D\varphi(0) = D^- \varphi(0)$, hemos obtenido $-1 \leq \varphi'(0) \leq 1$ por lo que $|\varphi'(0)| \leq 1$. Concluimos pues que u es subsolución. Veamos ahora si u cumple la condición de supersolución. Tomamos $\varphi \in C^1(-1, 1)$ tal que $u - \varphi$ tiene un mínimo local en $x_0 = 0$, tenemos que $(u - \varphi)(x) \geq (u - \varphi)(x_0)$. En nuestro caso, $(u - \varphi)(x) \geq (u - \varphi)(0)$ para $x \in B_\varepsilon(0)$. De nuevo, agrupando:

$$\begin{aligned} u(x) - u(0) \geq \varphi(x) - \varphi(0) &\Rightarrow 1 - |x| - u(0) \geq \varphi(x) - \varphi(0) \Rightarrow \\ &-|x| \geq \varphi(x) - \varphi(0) \end{aligned}$$

Luego:

- $x > 0$: $-x \geq \varphi(x) - \varphi(0) \Rightarrow -1 \geq \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$
- $x < 0$: $x \geq \varphi(x) - \varphi(0) \Rightarrow 1 \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$

Análogamente, si $x \rightarrow 0$ tenemos:

- $x > 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = D^+ \varphi(0) \leq -1$
- $x < 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = D^- \varphi(0) \geq 1$

Luego, $D^+\varphi(0) \neq D^-\varphi(0)$ y por tanto, no existe una función $\varphi \in C^1$ que toque a $u(x) = -|x| + 1$ por abajo. Con esto, concluimos que u es supersolución, y consecuentemente, solución de viscosidad cuando $x_0 = 0$.

Vamos a ver que $|x| - 1$ no es solución del problema $|u'| - 1 = 0$ en el intervalo $(-1, 1)$ con $u(1) = u(-1) = 0$. Consideramos como función test $\varphi(x) = x^2 - 1$. Es fácil ver que φ es una función C^1 que toca por abajo en $x_0 = 0$. Como toca en x_0 , tenemos que $u(x_0) = \varphi(x_0)$ en nuestro caso, $u(0) = \varphi(0)$, entonces $|\varphi'(0)| - 1 = -1 \leq 0$ por lo que llegamos a que no se cumple la condición de supersolución de viscosidad y por tanto, no es solución de viscosidad.

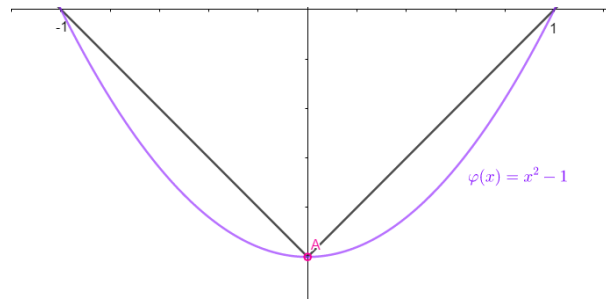


Figura 2.3: φ tocando por abajo a $|x| - 1$

2.1.1. Otras definiciones equivalentes

Centrándonos en las definiciones anteriores, resaltamos que podemos realizar las siguientes hipótesis sin pérdida de generalidad.

- **La solución y la función test coinciden en el punto $x_0 = 0$**

En el caso de las subsoluciones, si tuviéramos que φ no toca a u , podríamos tomar $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - C$ (C una constante positiva).

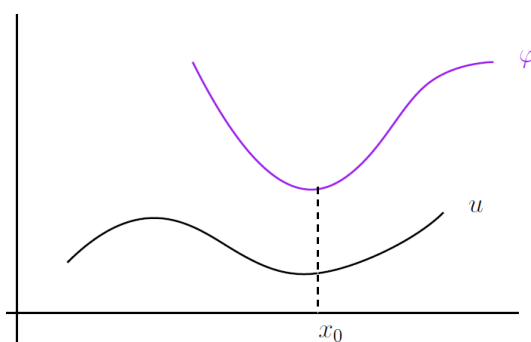


Figura 2.4: Primera situación

De esta forma, podríamos suponer que $\tilde{\varphi}$ toca a u , es decir, $\tilde{\varphi}(x_0) = u(x_0)$. En el caso de las supersoluciones haríamos la rectificación análoga, $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) + C$ (C una constante positiva).

Cabe destacar que no tendríamos ningún problema en hacer esto ya que las derivadas no cambian, o equivalentemente,

$$D\tilde{\varphi}(x_0) = D\varphi(x_0)$$

$$D^2\tilde{\varphi}(x_0) = D^2\varphi(x_0)$$

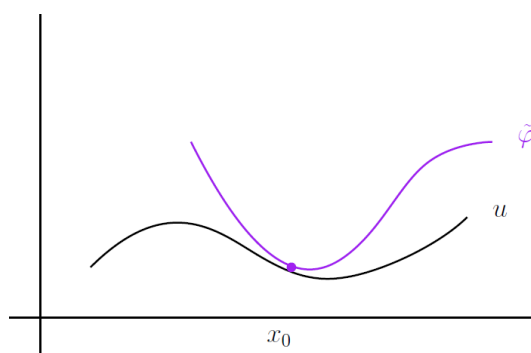


Figura 2.5: Forma de solucionar la primera situación para que se toquen

- **El máximo o mínimo que alcanza $u - \varphi$ en x_0 es estricto.** Supongamos por ejemplo, nuevamente en el caso de las subsoluciones, que el máximo no fuese estricto, sino que $u - \varphi$ valga lo mismo en un intervalo I .

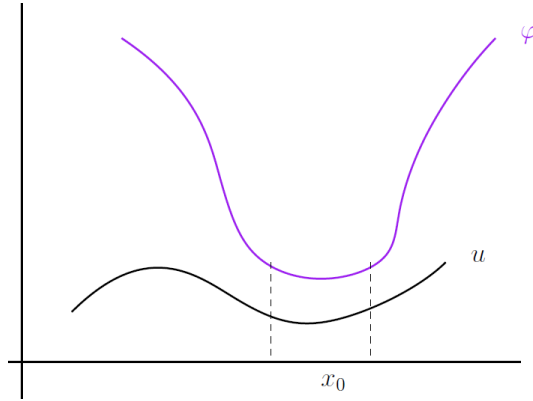


Figura 2.6: Segunda situación

Del mismo modo, si tomamos $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) + |x - x_0|^4$, $u - \tilde{\varphi}$ presenta un máximo estricto en x_0 , y además,

$$\tilde{\varphi}(x_0) = u(x_0), D\tilde{\varphi}(x_0) = D\varphi(x_0) \text{ y } D^2\tilde{\varphi}(x_0) = D^2\varphi(x_0).$$

Para las supersoluciones, haremos de forma análoga las rectificaciones en las funciones test:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) + C & \text{primer caso} \\ \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - |x - x_0|^4 & \text{segundo caso} \end{array} \right.$$

Luego las siguientes definiciones son equivalentes:

Definición 2.3. ■ Decimos que u es subsolución de viscosidad de (2.1) en un punto $x_0 \in \Omega$, si y solo si, para cualquier función-test $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $\varphi(x_0) = u(x_0)$ y $\varphi(x) > u(x) \forall x \in B_r(x_0), x \neq x_0$, entonces,

$$F(x_0, \varphi(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0,$$

y además se verifica la condición de contorno en $\partial\Omega$.

- Decimos que u es supersolución de viscosidad de (2.1) en un punto $x_0 \in \Omega$, si y solo si, para cualquier función-test $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $\varphi(x_0) = u(x_0)$ y $\varphi(x) < u(x) \forall x \in B_r(x_0)$, $x \neq x_0$, entonces,

$$F(x_0, \varphi(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0,$$

y además se verifica la condición de contorno en $\partial\Omega$.

- Decimos que u es solución de viscosidad en el conjunto abierto Ω si u es subsolución de viscosidad y supersolución de viscosidad, en cualquier punto $x_0 \in \Omega$.

Nota 2.4. 1. Utilizaremos la definición que más nos convenga.

2. Que el máximo (mínimo) sea estricto, será importante más adelante en el capítulo 3, cuando tomemos ciertos límites en la ecuación.
3. Notemos que puede resultar de utilidad el supuesto de que u y φ coinciden en el punto en cuestión a la hora de pasar al límite en las ecuaciones, para evitar situaciones como pasar al límite en $u_\epsilon(x_\epsilon)$, escribiendo $\varphi(x_\epsilon)$.

2.2. Propiedades sobre F

A continuación vamos a mencionar varias propiedades sobre F para que nuestro problema esté bien definido.

En primer lugar, como ya habíamos mencionado anteriormente, F debe ser continua en todas las variables. Es posible definir soluciones de viscosidad en casos donde F no sea continua, pero quedan fuera de los objetivos de este trabajo.

La ecuación debe ser *elíptica degenerada*, esto es,

$$F(x, Z, P, M) \leq F(x, Z, P, N) \text{ cuando } M \geq N$$

Nota 2.5. *La primera variable x es la variable independiente, la variable Z se corresponde con la función u , P denota su gradiente y la cuarta variable es la que corresponde a la matriz Hessiana. Cuando decimos que $M \geq N$ nos referimos a que $M - N$ es una matriz definida positiva (no necesariamente estricta).*

Un ejemplo muy importante es el Laplaciano:

$$-\Delta u = f(x) \rightarrow F(x, Z, P, M) = -\text{Tr}(M) - f(x) = 0$$

Esta propiedad será esencial para obtener consistencia, es decir, para que una solución clásica de (2.1) sea solución de viscosidad.

F debe ser propia:

$$F(x, Z, P, M) \leq F(x, Z', P, M) \text{ siempre que } Z \leq Z'.$$

Lo usaremos para principios de comparación. No trataremos ecuaciones como la de Burgers, $b(u)u_x = f(x)$ ya que no podemos determinar si es decreciente o creciente en u_x .

Una vez definido el concepto de solución de viscosidad, más débil que el sentido clásico, el primer aspecto que debemos verificar es que, efectivamente se trata de una extensión de éste último. Es decir, que si una solución es clásica, será de viscosidad, aunque esta última sea una clase de soluciones más amplia.

Proposición 2.6. *Propiedad de consistencia.*

Supongamos que $u \in C^2(\Omega)$ es una solución clásica de (2.1), entonces u es una solución de viscosidad de (2.1).

Demostración. Sea $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ tiene un máximo local en x_0 . Entonces, $Du(x_0) = D\varphi(x_0)$ y $D^2u(x_0) \leq D^2\varphi(x_0)$. Distinguiamos dos casos:

a) La ecuación (2.1) no depende de D^2u . Luego, trivialmente se verifica

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0)) = 0$$

En particular, $F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0)) \leq 0$.

b) Si depende de D^2u , como $D^2u(x_0) \leq D^2\varphi(x_0)$, por la propiedad de elipticidad, obtenemos

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq F(x_0, u(x_0), Du(x_0), D^2u(x_0)) \underbrace{= 0}_{u \text{ clásica}}$$

Luego u es subsolución de viscosidad.

Análogamente, si x_0 es un mínimo local para $u - \varphi$, entonces $D^2u(x_0) \geq D^2\varphi(x_0)$, de la misma forma, deducimos que $F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0$, por lo que u es supersolución de viscosidad y finalmente, u es solución de viscosidad.

□

De hecho, el recíproco también es cierto.

Proposición 2.7. Si $u \in C^2(\Omega)$ es solución de viscosidad de (2.1), entonces u es una solución clásica de (2.1).

Demostración. La prueba es muy simple ya que es consecuencia del hecho de que podemos tomar $\varphi = u$ como función-test y por lo tanto, $F(x_0, u(x_0), Du(x_0), D^2u(x_0))$ es positivo y negativo en cualquier punto $x_0 \in \Omega$ ya que cualquier $x_0 \in \Omega$ es un máximo y mínimo local de $u - u$. □

Nota 2.8. El resultado anterior relativo a la consistencia del concepto de solución de viscosidad, nos da pie para resaltar la siguiente observación. Podríamos caracterizar las soluciones

clásicas de (2.1) como aquellas que verifican el Principio del Máximo, considerado anteriormente. Nos parece interesante el hecho de haber encontrado una noción equivalente a la solución clásica, que no involucra la existencia de derivadas para dicha solución:

$u \in C^2(\Omega)$ es solución clásica de

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0$$

si y solo si, para cada $x_0 \in \Omega$ y

- para cualquier función-test $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ tiene un máximo local en x_0 , entonces

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0;$$

- para cualquier función-test $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ tiene un mínimo local en x_0 , entonces

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0.$$

Capítulo 3

Vanishing Viscosity Method

Llegados a este punto, cabe preguntarse: ¿Cómo surge la idea de definir estas soluciones? La respuesta a esta pregunta está de hecho relacionada con la expresión "solución de viscosidad", con la que se denominan este tipo de soluciones. A lo largo de este capítulo vamos a estudiar lo que se conoce como *Vanishing Viscosity Method* que consiste en añadir a la ecuación un término de segundo orden, que regularice las soluciones. Este término se denomina *viscoso* ya que tenderá a cero y recuperar así la ecuación de partida. Esta idea la aportaron Pierre-Louis Lions y Michael Crandall en [3]. Para ello se inspiraron en técnicas conocidas desde los años 50, aplicadas al estudio numérico de soluciones a ciertas ecuaciones de primer orden que desarrollan ondas de choque y de rarefacción. Así nació una nueva teoría para abordar destacados problemas de primer orden relacionados con la Ecuación de Hamilton Jacobi, y que se desarrollaría posteriormente para tratar una gran diversidad de problemas, incluso de segundo orden. Hoy en día constituye aún un campo muy activo de investigación.

3.1. Introducción al Vanishing Viscosity Method: la Ecuación Eikonal

Para explicar en qué consiste este método volvamos de nuevo a la ecuación Eikonal:

$$\begin{cases} |u_x| = 1 & \Omega = (-1, 1) \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

la cuál podemos escribirla como $F(u_x) = 0$ donde $F(u_x) = |u_x| - 1$. Como ya hemos señalado con anterioridad, la idea es agregar un término a esta ecuación que tienda a cero, que se conoce como término viscoso. Con éste nuevo término añadido, podremos encontrar las soluciones explícitamente y serán regulares.

Ahora bien, para poder resolver la ecuación viscosa explícitamente, nos conviene escribir la ecuación original de la siguiente manera:

$$\begin{cases} F(u_x) = (u_x)^2 - 1 = 0, & \Omega = (-1, 1) \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Consideramos:

$$F(u_x) = \underbrace{\epsilon u_{xx}}_{\text{término viscoso}}$$

lo que nos lleva a buscar una solución u_ϵ del problema

$$\begin{cases} F_\epsilon(u_x, u_{xx}) = (u_x)^2 - 1 - \epsilon u_{xx} = 0, & \Omega = (-1, 1) \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Haciendo el cambio de variable $v = u_x$ e integrando una vez, obtendremos esta expresión

para v :

$$v = \frac{2}{Ke^{\frac{2x}{\epsilon}} + 1} - 1 = \frac{1 - Ke^{\frac{2x}{\epsilon}}}{1 + Ke^{\frac{2x}{\epsilon}}} = \frac{1 - e^{\frac{2x}{\epsilon} + \ln(K)}}{1 + e^{\frac{2x}{\epsilon} + \ln(K)}}$$

siendo K una constante positiva. Observamos que multiplicando el denominador y numerador por $e^{-\frac{x}{\epsilon} - \frac{1}{2}\ln(K)}$

$$v = \frac{e^{-\frac{x}{\epsilon} - \frac{1}{2}\ln(K)} - e^{\frac{x}{\epsilon} + \frac{1}{2}\ln(K)}}{e^{-\frac{x}{\epsilon} - \frac{1}{2}\ln(K)} + e^{\frac{x}{\epsilon} + \frac{1}{2}\ln(K)}} = -\tanh\left(\frac{x}{\epsilon} + \frac{1}{2}\ln(K)\right)$$

Volviendo a integrar entre -1 y x obtenemos

$$u^\epsilon = \epsilon \left[\ln\left(\cosh\left(\frac{-1}{\epsilon} + \frac{1}{2}\ln(K)\right)\right) - \ln\left(\cosh\left(\frac{x}{\epsilon} + \frac{1}{2}\ln(K)\right)\right) \right]$$

Finalmente, ajustamos la constante $K > 0$ para que se verifiquen las condiciones de contorno. Observamos que $u(-1) = 0$ para cualquier valor positivo de K . Sin embargo, $u(1) = 0$ si y sólo si $K = 1$ (ya que el coseno hiperbólico es una función par). Por tanto llegamos a que la solución es

$$u^\epsilon(x) = \epsilon \left(\ln\left(\cosh\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right) - \ln\left(\cosh\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right) \right)$$

Ahora que tenemos una solución del problema con el término viscoso queremos recuperar el problema inicial del que partimos (3.2). Nos interesa ver que $\{u^\epsilon\} \rightarrow u$ uniformemente en $[-1, 1]$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Es fácil ver que el término

$$\epsilon \ln\left(\cosh\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right)$$

converge puntualmente a $|x|$ en $[-1, 1]$. Por otro lado, el término

$$\epsilon \ln\left(\cosh\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$$

es una sucesión de números reales que tiende a 1 cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Ya hemos probado que $u^\epsilon \rightarrow 1 - |x|$ puntualmente en $[-1, 1]$.

Dicho esto, podemos deducir la convergencia uniforme del siguiente modo:

En primer lugar, observamos que es equivalente a probar que la función $f_\epsilon(x) = u^\epsilon(x) - 1 + |x|$ converge a cero uniformemente en $[1, 1]$. Sabemos que $f_\epsilon \rightarrow 0$ de forma puntual para cada $x \in [-1, 1]$. Veamos que

$$\max_{c_\epsilon \in [-1, 1]} |f_\epsilon(c_\epsilon)| \rightarrow 0.$$

y entonces se tendrá convergencia uniforme.

Para ello, derivamos la expresión $f_\epsilon(x)$ y observamos los c_ϵ candidatos a máximos.

Para $x > 0$,

$$f'_\epsilon(x) = \epsilon \left[0 - \frac{\sinh\left(\frac{x}{\epsilon}\right)}{\epsilon \cosh\left(\frac{x}{\epsilon}\right)} \right] - 0 - 1$$

De la misma forma, para $x < 0$,

$$f'_\epsilon(x) = \epsilon \left[0 - \frac{\sinh\left(\frac{x}{\epsilon}\right)}{\epsilon \cosh\left(\frac{x}{\epsilon}\right)} \right] - 0 + 1$$

Observamos que para $x = 0$, f_ϵ no es derivable. Ahora bien, igualando a cero, deducimos las ecuaciones:

- Para $x > 0$, $\frac{e^{\frac{x}{\epsilon}} - e^{-\frac{x}{\epsilon}}}{e^{\frac{x}{\epsilon}} + e^{-\frac{x}{\epsilon}}} = 1$.
- Para $x < 0$, $\frac{e^{\frac{x}{\epsilon}} - e^{-\frac{x}{\epsilon}}}{e^{\frac{x}{\epsilon}} + e^{-\frac{x}{\epsilon}}} = -1$

Podemos ver que no existen puntos del interior de $[-1, 0) \cup (0, 1]$ que cumplan ninguna de las dos ecuaciones. Ahora, nos queda por estudiar los puntos $x = 0, 1, -1$:

- En $x = 1$, $f_\epsilon(1) = \epsilon \left(\ln \left(\cosh \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right) - \ln \left(\cosh \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right) \right) - 1 + 1 = 0$
- En $x = -1$, $f_\epsilon(-1) = \epsilon \left(\ln \left(\cosh \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right) - \ln \left(\cosh \left(\frac{-1}{\epsilon} \right) \right) \right) - 1 - (-1) = 0$
- En $x = 0$, $|f_\epsilon(0)| = \left| \epsilon \left(\ln \left(\cosh \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right) - \ln \left(\cosh \left(\frac{0}{\epsilon} \right) \right) \right) - 1 + 0 \right| \Rightarrow$
 $\underbrace{\left| \epsilon \ln \left(\cosh \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right) - 1 \right|}_{\rightarrow 1} \rightarrow 0$

El máximo de f_ϵ lo toma en $c_\epsilon = 0$ para cada $\epsilon > 0$. Por consiguiente, obtenemos que la convergencia $u^\epsilon \rightarrow u$ es uniforme en $[-1, 1]$.

A continuación, podemos apreciar este hecho visualmente en la gráfica,

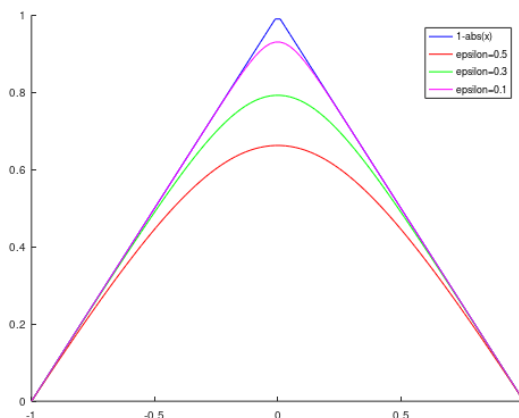


Figura 3.1: Solución u_ϵ para distintos valores de ϵ

3.2. Vanishing Viscosity Method para la Ecuación de Hamilton-Jacobi

Este hecho que hemos observado en la Ecuación Eikonal, que se trata de un estado estacionario particular, nos gustaría que se diera para ecuaciones más generales de primer orden como la ecuación de Hamilton-Jacobi (ya citada anteriormente),

$$(EHJ) \quad \begin{cases} u_t + H(x, Du) = 0 & \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{en } \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.4)$$

donde $H : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se llama Hamiltoniano, es en general continuo, además de satisfacer otra serie de propiedades que dependerán del problema que estemos considerando, y que iremos precisando conforme las vayamos a utilizar.

Notemos que la podemos escribir como una ecuación de primer orden de la forma (2.1), esto es

$$F(x, \tilde{D}u) = 0$$

donde $\tilde{D}u = (u_t, Du)$ y el dato inicial se comporta como el dato frontera de nuestro dominio $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, esto es, en $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$.

Ahora bien, queremos buscar una solución clásica u^ϵ de

$$\begin{cases} u_t^\epsilon + H(x, Du^\epsilon) = \epsilon \Delta u^\epsilon, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u^\epsilon(x, 0) = u_0(x), & \text{en } \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.5)$$

y plantearnos si u^ϵ converge uniformemente a cierta u y si ésta además u es solución del problema (3.4).

Para responder estas cuestiones, necesitaremos relacionar los puntos de máximo y mínimo entre $u^\epsilon - \varphi$ y $u - \varphi$, siendo φ una función C^2 que va a actuar como función-test del problema (3.5) y eventualmente de (3.4).

Nota 3.1. Éste es el contenido del siguiente resultado. De hecho, es válido para una sucesión arbitraria de funciones continuas que convergen uniformemente en compactos de \mathbb{R}^n a cierto límite u (por convergencia uniforme también será continuo).

Lema 3.2. Sea $u \in C(\mathbb{R}^n)$, φ continua tal que $u(x_0) = \varphi(x_0)$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$, y $u - \varphi$ tiene un máximo (mínimo) estricto en x_0 . Supongamos que $\{u^\epsilon\} \subset C(\mathbb{R}^n)$ converge uniformemente a u en compactos de \mathbb{R}^n cuando $\epsilon \rightarrow 0^+$. Entonces, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, $u^\epsilon - \varphi$ tiene un máximo (mínimo) local en x_ϵ cerca de x_0 . Es más, existe una subsucesión $\{\epsilon_j\} \searrow 0$ tal que $x_{\epsilon_j} \rightarrow x_0$ cuando $j \rightarrow \infty$.

Demostración. Sea $r > 0$ suficientemente pequeño tal que $u(x) - \varphi(x) < 0, \forall x \in B(x_0, 2r) \setminus \{x_0\}$. Como $\partial B(x_0, r)$ es compacta, al existir continuidad en un compacto sabemos que el máximo está garantizado. Notaremos

$$\alpha = \max\{u(x) - \varphi(x) < 0 : x \in \partial B(x_0, r)\} < 0$$

Luego, como $u^\epsilon \rightarrow u$ uniformemente en compactos entonces converge uniformemente en $\overline{B(x_0, r)}$, con lo que existe $\lambda_r > 0$ tal que $\forall \epsilon < \lambda_r$,

$$\frac{\max_{B(x_0, r)} |u^\epsilon(x) - u(x)|}{\underbrace{\frac{-\alpha}{2}}_{\text{¡Ojo! } \alpha \text{ es negativo}}} < \frac{\alpha}{2} < u^\epsilon(x) - u(x) < \frac{-\alpha}{2} \quad x \in B(x_0, r) \quad (3.6)$$

De este hecho deducimos

$$\begin{aligned} \max_{x \in \partial B(x_0, r)} (u^\epsilon(x) - \varphi(x)) &\leq \max_{x \in \partial B(x_0, r)} (u^\epsilon(x) - u(x)) + \max_{x \in \partial B(x_0, r)} (u(x) - \varphi(x)) \leq \\ &\frac{\max_{B(x_0, r)} |u^\epsilon(x) - u(x)|}{\underbrace{\frac{-\alpha}{2}}_{\text{¡Ojo! } \alpha \text{ es negativo}}} + \max_{x \in \partial B(x_0, r)} (u(x) - \varphi(x)) < \frac{-\alpha}{2} + \alpha = \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Pero por otro lado, $u^\epsilon(x_0) - \varphi(x_0) = u^\epsilon(x_0) - u(x_0) > \frac{\alpha}{2}$ por (3.6).

Por tanto, $u^\epsilon(x) - \varphi(x)$ debe alcanzar su máximo en $\overline{B(x_0, r)}$, y por compacidad sabemos que lo hará en algún punto $x_\epsilon \in B(x_0, r)$. Finalmente, tomamos $\epsilon_1 < \lambda_1$ y construimos $\{\epsilon_j\}$ por inducción como sigue;

Sea $r = \frac{1}{j}$, $j \geq 2$, elegimos $\epsilon_j < \min\{\lambda_{\frac{1}{j}}, \epsilon_{j-1}\}$ de esta forma nos aseguramos que va decreciendo a 0. Luego, obtenemos $\{\epsilon_j\} \searrow 0$ y que $u^{\epsilon_j} - \varphi$ tiene su máximo local sobre la bola $B(x_0, \frac{1}{j})$ en x_{ϵ_j} siendo $|x_{\epsilon_j} - x_0| < \frac{1}{j}$. Con este resultado llegamos a que $x_{\epsilon_j} \rightarrow x_0$ que es lo que necesitábamos. \square

Nota 3.3. *Notemos que en el resultado anterior necesitamos que el máximo (mínimo) sea estricto. Es por esto que incluimos las definiciones equivalentes 2.3 dadas en el capítulo anterior.*

Nota 3.4. *Observemos que en el lema previo estábamos suponiendo que $u^\epsilon \rightarrow u$ uniformemente. Este hecho ya lo habíamos probado para la Ecuación Eikonal (3.3). Sin embargo, para la ecuación viscosa general (3.5) deberemos garantizar dicha convergencia uniforme. De ahí que para el problema general vamos a incluir las siguientes hipótesis que nos permiten aplicar lo que se conoce como método de Bernstein y obtener la condición (3.9). Esta condición nos garantiza la convergencia uniforme que necesitamos.*

Para cada $\epsilon > 0$, consideramos la ecuación de Hamilton-Jacobi con el término viscoso, (3.5). Vamos a considerar las siguientes hipótesis sobre mis datos para poder aplicar el método de Bernstein. Vamos a suponer que

$$u_0(x) \in C^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{y} \quad \|u_0\|_{C^2(\mathbb{R}^n)} < \infty \quad (3.7)$$

suponiendo que $H \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ con $H, D_p H$ funciones uniformemente continuas y

acotadas en $\mathbb{R}^n \times B(0, R)$ para cada $R > 0$. Y además, suponemos también

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2} H(x, p)^2 + D_x H(x, p) \cdot p \right) = +\infty \quad (3.8)$$

Teorema 3.5. *Teorema de Bernstein.*

Suponiendo que se cumple (3.7) y (3.8). Entonces, para cada $\epsilon \in (0, 1)$, existe u^ϵ una única solución clásica de (3.5). Además, existe una constante $C > 0$ independiente de ϵ , tal que, para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$,

$$|u_t^\epsilon(x, t)| + |Du^\epsilon(x, t)| \leq C. \quad (3.9)$$

La prueba de este Teorema se sale de los objetivos del trabajo, y se puede encontrar detalladamente en [7].

Nota 3.6. *Nótese que la ecuación Eikonal es un caso particular de las hipótesis necesarias para que podamos aplicar el método de Bernstein al problema estacionario.*

Ahora ya tenemos todos los ingredientes necesarios para aplicar el vanishing viscosity method y conseguir una solución del problema (3.4).

Teorema 3.7. Existencia de las soluciones de viscosidad vía vanishing viscosity method.

Para cada $\epsilon > 0$, consideramos de nuevo la ecuación (3.5) cuyos datos u_0 y H verifican las hipótesis de Bernstein (3.7) y (3.8). Entonces, existe una subsucesión $\{\epsilon_j\} \searrow 0$ tal que $u^{\epsilon_j} \rightarrow u$ en compactos de $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$, siendo u_{ϵ_j} la solución clásica de (3.5) para ϵ_j , y $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ solución de viscosidad del problema (3.4).

Demostración. El teorema de Bernstein nos garantiza la existencia de una única solución u^ϵ que verifica la condición (3.9) con $C > 0$ una constante independiente de ϵ . Gracias a esta condición, por el teorema de Arzela-Ascoli, existe una subsucesión $\{\epsilon_j\} \searrow 0$ tal que

$u^{\epsilon_j} \rightarrow u$ en compactos de $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ para alguna función $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Veamos ahora que u es solución de (3.4). Vamos a probar que es subsolución, y omitiremos la prueba de que es supersolución ya que sigue un razonamiento similar. Por la Definición 2.3, podemos elegir una función-test $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ tal que $u - \varphi$ tiene un máximo estricto en $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$. Por el Lema 3.2 podemos suponer que $u^{\epsilon_j} - \varphi$ tiene un máximo local en $(x_j, t_j) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$ para cada $j \in \mathbb{N}$, y que $(x_j, t_j) \rightarrow (x_0, t_0)$ cuando $j \rightarrow \infty$. Como $u^{\epsilon_j} - \varphi$ tiene un máximo local en (x_j, t_j) tenemos,

$$\begin{cases} D(u^{\epsilon_j} - \varphi)(x_j, t_j) = 0 \\ (u^{\epsilon_j} - \varphi)_t(x_j, t_j) = 0 \\ \Delta(u^{\epsilon_j} - \varphi)(x_j, t_j) \leq 0 \end{cases}$$

sustituyendo en (3.5), obtenemos

$$\varphi_t(x_j, t_j) + H(x_j, D\varphi(x_j, t_j)) = \epsilon_j \Delta u^{\epsilon_j}(x_j, t_j) \leq \epsilon_j \Delta \varphi(x_j, t_j)$$

Tomando $j \rightarrow \infty$ tenemos que $\varphi_t(x_0, t_0) + H(x_0, D\varphi(x_0, t_0)) \leq 0$, lo que concluye la demostración. □

Capítulo 4

Unicidad de solución

Notamos que con lo analizado en el capítulo anterior hemos demostrado que considerando el problema viscoso (3.5) obtenemos una subsucesión de soluciones (clásicas) del mismo que convergen de manera uniforme a una solución de viscosidad de (EHJ). Este hecho prueba existencia de solución de viscosidad de (EHJ) como queríamos.

Sin embargo, sería deseable demostrar que (EHJ) sólo admite una única solución viscosa, con lo que de hecho la sucesión entera de soluciones de (3.5) converge a la única solución de (EHJ).

La cuestión de unicidad de soluciones de viscosidad de (EHJ) será el objetivo del presente capítulo. Comenzaremos abordando el caso del problema estacionario para comprender con caso un más sencillo el método de "doblar las variables", para concluir estudiando el problema general.

Los argumentos se basarán en construir una función que incluya la diferencia entre una supersolución y una subsolución, u y v , de estos problemas más unos términos de penalización que tenderán a cero. Será necesario pasar al límite tanto en ciertos parámetros reales $\varepsilon, \lambda > 0$ como en puntos $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ en el caso estacionario, o en el general, $(x_\varepsilon, t_\varepsilon), (y_\varepsilon, s_\varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Al no ser éstos espacios compactos, los pasos al límite son

delicados, por lo que siempre nos pondremos en las hipótesis que garantizan que u y v sean uniformemente continuas y acotadas en dichos espacios.

4.1. Principio de comparación por el método de "doblar variables"

Vamos a considerar el siguiente problema estático:

$$u(x) + H(x, Du(x)) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \quad (4.1)$$

En esta sección vamos a suponer que H es una función Lipschitz. Recordemos que esto significa que existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $x, y, p, q \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} |H(x, p) - H(y, p)| \leq C(1 + |p|)|x - y| \\ |H(x, p) - H(x, q)| \leq C|p - q| \end{cases} \quad (4.2)$$

Teorema 4.1. (*Principio de comparación para la ecuación estática (4.1)*). Supongamos (4.2). Supongamos que u y v son funciones uniformemente continuas en \mathbb{R}^n , con u, v una subsolución de viscosidad y una supersolución de viscosidad de (4.1), respectivamente. Entonces $u(x) \leq v(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Vamos a dar una prueba usando el método clásico de "doblar variables". Como u, v están acotadas en \mathbb{R}^n , supongamos por reducción al absurdo que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (u(x) - v(x)) = \sigma > 0$$

Entonces, existe $x_1 \in \mathbb{R}^n$ tal que $u(x_1) - v(x_1) > \frac{3\sigma}{4}$. Para $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon < \frac{\sigma}{8(1 + |x_1|^2)} \Rightarrow -2\epsilon|x_1|^2 > \frac{-\sigma}{4},$$

consideramos ahora la siguiente función auxiliar

$$\begin{aligned} \phi^\epsilon : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \phi^\epsilon(x, y) = u(x) - v(y) - \frac{|x - y|^2}{\epsilon^2} - \epsilon(|x|^2 + |y|^2). \end{aligned}$$

Luego ϕ^ϵ es continua para todo $\epsilon > 0$, acotada por arriba y tiende a $-\infty$ si $|x| \rightarrow \infty$ ó $|y| \rightarrow \infty$, y por lo tanto, debe alcanzar un máximo global en algún punto $(x_\epsilon, y_\epsilon) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Notamos en primer lugar que,

$$\phi^\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon) \geq \phi^\epsilon(x_1, x_1) = u(x_1) - v(x_1) - 2\epsilon|x_1|^2 \geq \frac{3\sigma}{4} - \frac{\sigma}{4} = \frac{\sigma}{2} \quad (4.3)$$

A continuación, vamos a realizar la prueba en pequeños pasos.

- **PASO 1.** Tenemos $\phi^\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon) \geq \phi^\epsilon(0, 0)$, entonces

$$\begin{aligned} u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) - \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2} - \epsilon(|x_\epsilon|^2 + |y_\epsilon|^2) &\geq u(0) - v(0) \rightarrow \\ u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) - u(0) + v(0) &\geq \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2} + \epsilon(|x_\epsilon|^2 + |y_\epsilon|^2) \end{aligned}$$

Tomamos $C = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, con esto, vamos a obtener la ventaja de que no depende ni del punto ni de ϵ . Luego,

$$C \geq \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2} + \epsilon(|x_\epsilon|^2 + |y_\epsilon|^2)$$

Esto implica que,

$$(x_\epsilon - y_\epsilon) \rightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0 \quad (4.4)$$

y que $|x_\epsilon - y_\epsilon| \leq C\epsilon$.

- **PASO 2.** De hecho, vamos a afirmar que no solo está acotado, sino que $\frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$. Esto sigue de

$$\begin{aligned} \phi^\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon) \geq \phi^\epsilon(x_\epsilon, x_\epsilon) &\Rightarrow u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) - \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2} - \epsilon(|x_\epsilon|^2 + |y_\epsilon|^2) \geq \\ &u(x_\epsilon) - v(x_\epsilon) - 2\epsilon|x_\epsilon|^2 \\ &\Rightarrow \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2} \leq v(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) + \epsilon(|x_\epsilon|^2 - |y_\epsilon|^2) \end{aligned}$$

El término $\epsilon(|x_\epsilon|^2 - |y_\epsilon|^2)$ se anula ya que $x_\epsilon \rightarrow y_\epsilon$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ por (4.4), y como v es uniformemente continua en \mathbb{R}^n , se da que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (v(x_\epsilon) - v(y_\epsilon)) = 0$.

- **PASO 3.** Ahora observamos que $x \mapsto \phi^\epsilon(x, y_\epsilon)$ tiene un máximo en x_ϵ , lo que significa que

$$x \rightarrow u(x) - \underbrace{\left(\frac{|x - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2} + \epsilon|x|^2 \right)}_{\text{función test } \varphi(x)} \text{ tiene un máximo en } x_\epsilon.$$

Como u es una subsolución de viscosidad de (4.1), tenemos

$$u(x_\epsilon) + H \left(x_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2} + 2\epsilon x_\epsilon \right) \leq 0 \quad (4.5)$$

- **PASO 4.** Como $y \mapsto \phi^\epsilon(x_\epsilon, y)$ tiene un máximo en y_ϵ , entonces

$$y \rightarrow v(y) - \underbrace{\left(\frac{-|x_\epsilon - y|^2}{\epsilon^2} - \epsilon|y|^2 \right)}_{\text{función test } \psi(y)} \text{ tiene un mínimo en } y_\epsilon.$$

Como v es una supersolución de viscosidad de (4.1), tenemos

$$v(y_\epsilon) + H \left(y_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2} - 2\epsilon y_\epsilon \right) \geq 0 \quad (4.6)$$

- **PASO 5.** De (4.5), obtenemos

$$u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) \leq H \left(y_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2} - 2\epsilon y_\epsilon \right) - H \left(x_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2} + 2\epsilon x_\epsilon \right) \quad (4.7)$$

Usando ahora la suposición de H Lipschitz (4.2), tenemos

$$\begin{aligned} H\left(y_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2} - 2\epsilon y_\epsilon\right) - H\left(y_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2}\right) &\leq 2C\epsilon|y_\epsilon| \\ H\left(y_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2}\right) - H\left(x_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2}\right) &\leq C|x_\epsilon - y_\epsilon| \left(1 + \frac{2|x_\epsilon - y_\epsilon|}{\epsilon^2}\right) \\ H\left(x_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2}\right) - H\left(x_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2} + 2\epsilon x_\epsilon\right) &\leq 2C\epsilon|x_\epsilon| \end{aligned}$$

Por consiguiente, juntando los términos, llegamos a

$$\begin{aligned} H\left(y_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2} - 2\epsilon y_\epsilon\right) - H\left(x_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2} + 2\epsilon x_\epsilon\right) &\leq \\ 2C\left(\epsilon(|x_\epsilon| + |y_\epsilon|) + \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|}{2} + \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2}\right) & \end{aligned}$$

Combinando esto con (4.7) deducimos que

$$u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) \leq 2C\left(\epsilon(|x_\epsilon| + |y_\epsilon|) + \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|}{2} + \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2}\right) \quad (4.8)$$

Recordemos que de (4.3) teníamos

$$u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) \geq \phi^\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon) \geq \frac{\sigma}{2}$$

Así pues, conectándolo con (4.8),

$$\frac{\sigma}{2} \leq 2C\left(\epsilon(|x_\epsilon| + |y_\epsilon|) + \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|}{2} + \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2}\right)$$

Dicho esto, tomando $\epsilon \rightarrow 0$, y usando los resultados de los pasos 1 y 2, tenemos que

$$0 < \frac{\sigma}{2} \leq 0$$

lo cuál es una contradicción.

La prueba está completa. □

Ahora vamos a extrapolar las ideas para que la ecuación dependa del tiempo. Por comodidad del lector, recordamos la ecuación de Hamilton-Jacobi.

$$(EHJ) \quad \begin{cases} u_t + H(x, Du) = 0 & \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{en } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Teorema 4.2. (Principio de comparación para la ecuación (3.4)). *Supongamos que H verifica (4.2). Sean u_0 y v_0 datos iniciales que satisfacen la condición del resultado de Bernstein (3.7) tales que $u_0(x) \leq v_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Fijamos $T > 0$. Si u y v son subsolución y supersolución de viscosidad de (3.4), respectivamente, entonces $u(x, t) \leq v(x, t)$ en $\mathbb{R}^n \times (0, T)$.*

La prueba es similar a la prueba de la ecuación estática, pero vale la pena presentarlo aquí debido a la importancia de la variable "tiempo". La hipótesis (3.7) sobre las condiciones iniciales garantiza que u y v sean funciones uniformemente continuas y acotadas en $\mathbb{R}^n \times (0, T)$.

Demostración. Nuestro objetivo es demostrar que $u(x, t) \leq v(x, t)$ para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$. Luego, supongamos por contradicción que

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)} (u(x, t) - v(x, t)) = \sigma > 0$$

Entonces, existe $(x_1, t_1) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$ tal que $u(x_1, t_1) - v(x_1, t_1) > \frac{3\sigma}{4}$. Es claro que $t_1 > 0$.

Sean ϵ y λ números positivos tal que

$$\epsilon < \frac{\sigma}{16(|x_1|^2 + 1)} \quad \text{y} \quad \lambda < \frac{\sigma}{16(t_1 + 1)} \Rightarrow 2\epsilon|x_1|^2 + 2\lambda t_1 < \frac{\sigma}{4},$$

Para estos ϵ, λ fijados, consideramos la siguiente función auxiliar $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0, T) \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(x, y, t, s) = u(x, t) - v(y, s) - \frac{|x - y|^2 + |s - t|^2}{\epsilon^2} - \epsilon(|x|^2 + |y|^2) - \lambda(s + t).$$

Luego ϕ es continua y acotada por arriba y tiende a $-\infty$ si $|x| \rightarrow \infty$ ó $|y| \rightarrow \infty$, y por lo tanto, debe alcanzar un máximo global en algún punto $(x_\epsilon, y_\epsilon, t_\epsilon, s_\epsilon) \in \mathbb{R}^{2n} \times (0, T)^2$.

Notamos en primer lugar que,

$$\phi(x_\epsilon, y_\epsilon, t_\epsilon, s_\epsilon) \geq \phi(x_1, x_1, t_1, t_1) = u(x_1, t_1) - v(x_1, t_1) - 2\epsilon|x_1|^2 - 2\lambda t_1 \geq \frac{3\sigma}{4} - \frac{\sigma}{4} = \frac{\sigma}{2} \quad (4.9)$$

A continuación, vamos a dividir la prueba en pequeños pasos.

- **PASO 1.** Como $\phi(x_\epsilon, y_\epsilon, t_\epsilon, s_\epsilon) \geq \phi(0, 0, 0, 0)$, entonces

$$\begin{aligned} u(x_\epsilon, t_\epsilon) - v(y_\epsilon, s_\epsilon) - \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2 + |s_\epsilon - t_\epsilon|^2}{\epsilon^2} - \epsilon(|x_\epsilon|^2 + |y_\epsilon|^2) - \lambda(s_\epsilon + t_\epsilon) &\geq u_0(0) - v_0(0) \rightarrow \\ u(x_\epsilon, t_\epsilon) - v(y_\epsilon, s_\epsilon) - u_0(0) + v_0(0) &\geq \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2 + |s_\epsilon - t_\epsilon|^2}{\epsilon^2} + \epsilon(|x_\epsilon|^2 + |y_\epsilon|^2) + \lambda(s_\epsilon + t_\epsilon) \end{aligned}$$

Acotando análogamente al paso 1 del problema estático, tenemos que

$$C \geq \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2 + |s_\epsilon - t_\epsilon|^2}{\epsilon^2} + \epsilon(|x_\epsilon|^2 + |y_\epsilon|^2) + \lambda(s_\epsilon + t_\epsilon)$$

Esto implica que,

$$|x_\epsilon - y_\epsilon| + |t_\epsilon - s_\epsilon| \leq C\epsilon \quad (4.10)$$

- **PASO 2.** Vamos a usar que $\phi(x_\epsilon, y_\epsilon, t_\epsilon, s_\epsilon) \geq \phi(x_\epsilon, x_\epsilon, t_\epsilon, t_\epsilon)$ para deducir que

$$\frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2 + |s_\epsilon - t_\epsilon|^2}{\epsilon^2} \leq v(x_\epsilon, t_\epsilon) - v(y_\epsilon, s_\epsilon) + \epsilon(|x_\epsilon|^2 - |y_\epsilon|^2) + \lambda(t_\epsilon - s_\epsilon)$$

Por el mismo razonamiento que usamos en el teorema anterior, llegamos a que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2 + |s_\epsilon - t_\epsilon|^2}{\epsilon^2} = 0$$

- **PASO 3** Ahora vamos a observar que el caso no estacionario es más delicado. De hecho, necesitamos probar que t_ϵ, s_ϵ donde se alcanzaría el supuesto máximo son distintos de cero. Recordemos que en 0 tomábamos u_0 menor o igual que v_0 , luego en cero no puede estar el máximo. A continuación, vamos a comprobar que existe una constante $\mu > 0$ independiente de ϵ tal que $t_\epsilon, s_\epsilon > \mu > 0$ para todo $\epsilon > 0$, para tener t_ϵ y s_ϵ acotados fuera del 0.

Para probar esta afirmación, vamos a usar la continuidad uniforme de u, v y observamos por (4.9)

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{2} &< u(x_\epsilon, t_\epsilon) - v(y_\epsilon, s_\epsilon) \\ &= \underbrace{u(x_\epsilon, t_\epsilon) - u(x_\epsilon, 0)}_{\omega(t_\epsilon)} + \underbrace{u(x_\epsilon, 0) - v(x_\epsilon, 0)}_{\leq 0 \text{ condición inicial}} + \underbrace{v(x_\epsilon, 0) - v(x_\epsilon, t_\epsilon)}_{\omega(t_\epsilon)} + \underbrace{v(x_\epsilon, t_\epsilon) - v(y_\epsilon, s_\epsilon)}_{\omega(|x_\epsilon - y_\epsilon| + |t_\epsilon - s_\epsilon|)} \\ &\leq \omega(t_\epsilon) + \omega(|x_\epsilon - y_\epsilon| + |t_\epsilon - s_\epsilon|) \end{aligned}$$

donde $\omega(\cdot)$ es un módulo de continuidad, esto es, $\lim_{r \rightarrow 0} \omega(r) = 0$. Por lo que existe $\mu > 0$ independiente de ϵ tal que $t_\epsilon > \mu > 0$. Usando un argumento similar, obtenemos también que $s_\epsilon > \mu > 0$ para todo $\epsilon > 0$.

- **PASO 4.** La aplicación $(x, t) \mapsto \phi(x, y_\epsilon, t, s_\epsilon)$ tiene un máximo en (x_ϵ, t_ϵ) , lo que significa que

$$(x, t) \rightarrow u(x, t) - \underbrace{\left[\frac{|x - y_\epsilon|^2 + |t - s_\epsilon|^2}{\epsilon^2} + \epsilon|x|^2 + \lambda t \right]}_{\text{función test } \phi(x, t)} \text{ tiene un máximo en } (x_\epsilon, t_\epsilon).$$

Como u es una subsolución de viscosidad de (3.4), tenemos

$$\frac{2(t_\epsilon - s_\epsilon)}{\epsilon^2} + \lambda + H \left(x_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2} + 2\epsilon x_\epsilon \right) \leq 0 \quad (4.11)$$

- **PASO 5.** Como $(y, s) \mapsto \phi(x_\epsilon, y, t_\epsilon, s)$ tiene un máximo en (y_ϵ, s_ϵ) , entonces

$$(y, s) \rightarrow v(y, s) - \underbrace{\left[\frac{-|x_\epsilon - y|^2 + |t_\epsilon - s|^2}{\epsilon^2} - \epsilon|y|^2 - \lambda s \right]}_{\text{función test } \psi(y,s)} \text{ tiene un mínimo en } (y_\epsilon, s_\epsilon).$$

Como v es una supersolución de viscosidad de (3.4), tenemos

$$\frac{2(t_\epsilon - s_\epsilon)}{\epsilon^2} - \lambda + H\left(y_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2} - 2\epsilon y_\epsilon\right) \geq 0 \quad (4.12)$$

■ **PASO 6.** Combinando (4.11) con (4.12), obtenemos

$$2\lambda \leq H\left(y_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2} - 2\epsilon y_\epsilon\right) - H\left(x_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2} + 2\epsilon x_\epsilon\right) \quad (4.13)$$

Usando ahora la suposición de H Lipschitz (4.2), tenemos

$$\begin{aligned} H\left(y_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2} - 2\epsilon y_\epsilon\right) - H\left(y_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2}\right) &\leq 2C\epsilon|y_\epsilon| \\ H\left(y_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2}\right) - H\left(x_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2}\right) &\leq C|x_\epsilon - y_\epsilon| \left(1 + \frac{2|x_\epsilon - y_\epsilon|}{\epsilon^2}\right) \\ H\left(x_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2}\right) - H\left(x_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2} + 2\epsilon x_\epsilon\right) &\leq 2C\epsilon|x_\epsilon| \end{aligned}$$

Por consiguiente, juntando los términos,

$$\begin{aligned} H\left(y_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2} - 2\epsilon y_\epsilon\right) - H\left(x_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2} + 2\epsilon x_\epsilon\right) &\leq \\ &2C\left(\epsilon(|x_\epsilon| + |y_\epsilon|) + \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|}{2} + \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2}\right) \end{aligned}$$

Combinando esto con lo que habíamos obtenido deducimos que

$$2\lambda \leq 2C\left(\epsilon(|x_\epsilon| + |y_\epsilon|) + \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|}{2} + \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2}\right) \quad (4.14)$$

tomando en la ecuación anterior $\epsilon \rightarrow 0$ llegamos a una contradicción. La prueba está completa.

□

Nota 4.3. Se puede probar que de hecho $u \leq v$ en $\mathbb{R}^n \times (0, T]$ por un argumento simple de continuidad que demuestra que la ecuación (EHf) también se cumple en $\mathbb{R}^n \times (0, T]$.

Para concluir este capítulo demostramos las siguientes consecuencias del Principio de Comparación.

Corolario 4.4. (Unicidad de la solución de viscosidad del problema (3.4)). Supongamos (4.2). Si u y v son soluciones de viscosidad de (3.4) entonces, $u \equiv v$ en $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

Demostración. Supongamos que los datos iniciales están ordenados, es decir, $u(x, 0) \leq v(x, 0)$ en $(0, T]$. Como u es una subsolución de viscosidad y v es una supersolución de viscosidad de (3.4), por el principio de comparación anterior, tenemos que $u \leq v$. En cambio, si v es ahora una subsolución de viscosidad y u una supersolución de viscosidad de (3.4), teniendo en cuenta que los datos iniciales están ordenados, deducimos que $u \equiv v$. □

Además se verifica un principio del máximo.

Corolario 4.5. (Principio del máximo). Sean u, v subsolución y supersolución de (EHf) con $u_0 \leq v_0$ siendo u_0, v_0 uniformemente continuas en \mathbb{R}^n . Entonces,

$$\max_{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]} |u - v| = \|u - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T])} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

Demostración. Sea $C = \|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Como v es supersolución, notamos que $\tilde{v} = v + C$ también lo es. Y además, $u - \tilde{v} = u - v - C$. En particular, en $t = 0$ tenemos

$$u_0 - v_0 - C = u_0 - v_0 - \|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 0$$

Luego, obtenemos que en $t = 0$, $u_0 \leq \tilde{v}_0$. Ahora bien, por el principio de comparación,

$$u \leq \tilde{v} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$$

Entonces, $u - v \leq C = \|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$.

En particular, se da para el máximo

$$u - v - \|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq u_0 - v_0 - \|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

□

Capítulo 5

Continuidad Lipschitz de las soluciones de viscosidad

Hasta ahora hemos conseguido probar la existencia de una única solución de (EHJ) en sentido viscoso. Ya sabemos que es uniformemente continua si partimos de un dato $\|u_0\|_{C^2} < \infty$, pero también hemos observado que no es C^1 . Luego, hacemos hincapié en la pregunta: ¿Cuál es la regularidad óptima que tiene?

Consideremos de nuevo la ecuación Eikonal. Ya vimos que una solución de viscosidad era $u(x) = 1 - |x|$ con $x \in [-1, 1]$ si bien dicha solución no es derivable en todos los puntos de $[-1, 1]$. Observamos que se verifica lo siguiente, sea $x \in [-1, 1]$ arbitrario, para cualquier $y \in [-1, 1]$

$$|u(x) - u(y)| = |1 - |x| - (1 - |y|)| = ||y| - |x|| \leq |y - x|$$

Esto significa que nuestra solución es Lipschitz continua con constante de Lipschitz unitaria.

Nos gustaría probar que las soluciones del problema general también tuvieran regularidad

Lipschitz, en tiempo y en espacio.

De la desigualdad del Método de Bernstein, obtuvimos que las soluciones clásicas de la ecuación u_ϵ , tienen las derivadas acotadas uniformemente en ϵ , por la acotación (3.9). No obstante, no podemos deducir de ahí directamente que $|D_t u| + |D_x u| \leq C$, ya que solo tenemos que $u_\epsilon \rightarrow u$ uniformemente en compactos de $\mathbb{R}^n \times [0, T]$, pero no tenemos convergencia de sus derivadas.

Vamos a partir de las siguientes hipótesis, que hemos venido asumiendo:

$$(H1) \quad |H(x, p) - H(y, p)| \leq (1 + |p|)|x - y|$$

$$(H2) \quad H \text{ es uniformemente continua en } \mathbb{R}^n \times B_R \text{ para cualquier } R > 0$$

$$(H3) \quad H(x, p) \rightarrow +\infty \text{ si } |p| \rightarrow +\infty \text{ uniformemente en } x$$

Nota 5.1. La ecuación Eikonal supone nuevamente un caso particular y estacionario de este Hamiltoniano.

Teorema 5.2. Sea u la solución de viscosidad de (EHJ), supongamos que H verifica (H1), (H2), (H3) y $u_0 \in \text{Lips}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, $u \in \text{Lips}(\mathbb{R}^n)$, es decir,

$$\|\tilde{D}u\|_\infty \leq K$$

donde $\tilde{D}u = (u_t, Du)$ y $K = K(H, u_0)$.

Demostración. Vamos a demostrar primero que es Lipschitz continua en tiempo "t". Para ello, tenemos que ver que $\|u(\cdot, h) - u(\cdot, 0)\|_\infty \leq Ch$, con $C > 0$ una constante independiente de h . Observamos que $u(x, t)$ y $u(x, t + h)$ con $h > 0$ son ambas soluciones de la ecuación (EHJ) con datos iniciales $u(\cdot, h)$ y u_0 . Por el Principio del máximo (Corolario 4.5),

$$\|u(\cdot, t + h) - u(\cdot, t)\|_\infty \leq \|u(\cdot, h) - u(\cdot, 0)\|_\infty$$

Como $u_0 \in \text{Lips}(\mathbb{R}^n)$, sea $R := \|Du_0\|_\infty$ y denotamos por $C := \max_{\mathbb{R}^n \times B(0,R)} |H(x, p)|$.

Observamos que $\underline{u}(x, t) = u_0 - Ct$ es subsolución de viscosidad. Por un lado, tenemos que $\underline{u}_t = -C$, y por otro, tenemos que $D\underline{u}(x) = Du_0(x)$, luego $\|D\underline{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq R$. Y por tanto,

$$H(x, \underbrace{Du(x)}_{\in B(0,R)}) \leq C \quad \forall (x, t)$$

Dicho esto, obtenemos que $\bar{u}_t + H(x, D\bar{u}(x)) \leq -C + C = 0$ luego, es subsolución de viscosidad. Análogamente, podemos obtener que $\bar{u}(x, t) = u_0 + Ct$ es supersolución de viscosidad.

Por el principio de comparación, tenemos

$$\underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \bar{u}(x, t), \quad \forall (x, t)$$

En particular para $t = h$,

$$u_0(x) - Ch \leq u(x, h) \leq u_0(x) + Ch$$

Restando u_0 ,

$$-Ch \leq u(x, h) - u_0(x) \leq Ch \Rightarrow |u(x, h) - u_0(x)| \leq Ch, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Es decir, $\|u(\cdot, h) - u(\cdot, 0)\|_\infty \leq Ch$, como queríamos.

Ahora vamos a deducir la continuidad de u en "x". Consideramos un punto arbitrario (x, t) con $t > 0$. Queremos ver que $u(x, t) \leq u(y, t) + K|x - y|$ para cualquier $y \in \mathbb{R}^n$. Para ello, definimos la siguiente función,

$$\psi(y, s) = u(y, s) - u(x, t) - K|x - y| - \frac{(t - s)^2}{\alpha^2}$$

Observamos que ψ es continua. Además, $|u(y, s) - u(x, t)| \leq C$ luego está acotada. Por otro lado, $\psi(y, s) \rightarrow -\infty$ cuando $|y - x| \rightarrow \infty$. Además, $\psi(x, t) = 0$. Luego esta función alcanzará su máximo en un punto (\bar{y}, \bar{s}) .

Nuestro objetivo será probar que ese punto de máximo sea el punto (x, t) . Vamos a probarlo por reducción al absurdo;

Supongamos que $\bar{y} \neq x$. Observamos que en el punto (\bar{y}, \bar{s}) , $|x - y|$ es derivable. Luego,

$$\psi(y, s) = u(y, s) - \underbrace{u(x, t) + K|x - y| + \frac{(t - s)^2}{\alpha^2}}_{\phi(y, s) \text{ va a actuar como función test}}$$

Ahora bien, como suponemos que $\bar{y} \neq x$ tenemos que ϕ es derivable cerca de (\bar{y}, \bar{s}) y podemos tomar ϕ como función test. Dado que u es solución, en particular, es subsolución de viscosidad y la función ϕ toca a u por arriba porque ψ tiene un máximo en (\bar{y}, \bar{s}) . Con esto tenemos que,

$$\phi_s(\bar{y}, \bar{s}) + H(\bar{y}, D\phi(\bar{y}, \bar{s})) \leq 0$$

Teniendo en cuenta que,

$$\begin{aligned} \phi_s &= \frac{-2(t - s)}{\alpha^2} \quad \text{y} \\ D_y \phi &= \frac{K(x - y)}{|x - y|} \Rightarrow |D_y \phi| = K \end{aligned}$$

Llegamos a

$$\frac{-2(t - s)}{\alpha^2} + H\left(\bar{y}, \frac{K(x - \bar{y})}{|x - \bar{y}|}\right) \leq 0$$

Observamos que por un lado podemos demostrar que $\frac{-2(t - s)}{\alpha^2}$ está acotado (esto ya lo hicimos con la unicidad en el Paso 1). Ahora, tomando $|p| = K$, puedo tomar K muy grande de forma que $H(\bar{y}, D\phi(\bar{y}, \bar{s})) \rightarrow +\infty$ por (H3). Luego es imposible que

$$\frac{-2(t-s)}{\alpha^2} + H\left(\bar{y}, \frac{K(x-\bar{y})}{|x-\bar{y}|}\right) \leq 0$$

si K es grande por lo que hemos llegado a una contradicción.

De este modo hemos obtenido que el máximo en y es x . Por último lugar, vamos a ver que $\bar{s} = t$. Supongamos que $\bar{s} \neq t$ por reducción al absurdo. Vemos que

$$\psi(x, \bar{s}) = -\frac{(t-\bar{s})^2}{\alpha^2} < 0$$

pero recordemos que $\psi(x, t) = 0$ luego hemos llegado a contradicción. El máximo se alcanza en (x, t) como queríamos probar y con esto queda finalizada la demostración.

□

Capítulo 6

Apéndice

A continuación incluimos algunas definiciones y conceptos de regularidad de soluciones, que nos son conocidos, pero que han sido fundamentales a la hora de obtener nuestros resultados.

- Una función f es *continua* en un punto $x_0 \in \Omega$ si:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall |x - x_0| < \delta \text{ entonces } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

- Decimos que f es *uniformemente continua* en un dominio Ω si:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x, y \in \Omega \text{ se cumple que si } |x - y| < \delta \text{ entonces } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Notemos que la continuidad uniforme no es un concepto puntual, sino que se da en el dominio. Hacemos hincapié en esto ya que esta noción es muy importante debido a que las soluciones que se han usado en este trabajo son uniformemente continuas y acotadas. Por otro lado, podemos caracterizar las funciones uniformemente continuas como aquellas que admiten un módulo de continuidad.

- Una función continua $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ se dice *módulo de continuidad* si

$$\lim_{r \rightarrow 0} \omega(r) = 0.$$

- Una función es de clase C^k con $k \geq 1$, si existen todas sus derivadas parciales de orden k y son continuas.

Podemos encontrar un concepto más débil que ser C^1 :

- Una función f se dice que es (globalmente) *Lipschitz continua* si existe una constante $K > 0$ tal que:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Notemos que una función globalmente Lipschitz es uniformemente continua ya que la propia definición es un módulo de continuidad.

- Si f es una función $C^1(\Omega)$ con derivada acotada en todo Ω , entonces es globalmente Lipschitz con constante de Lipschitz $L = \|Df\|_{L^\infty(\Omega)}$.
- Si $f \in C^1(\Omega)$ pero su derivada no está acotada en Ω , entonces sólo será localmente Lipschitz (Lipschitz en compactos, con una constante de Lipschitz que depende del compacto).

Bibliografía

- [1] Guy Barles, *An introduction to the theory of viscosity solutions for first-order Hamilton-Jacobi equations and applications*. Hamilton-Jacobi equations: approximations, numerical analysis and applications, 49–109, Lecture Notes in Math, Springer, Heidelberg, 2013.

- [2] Blog del IMUS *Impresoras 3D, casas, prótesis y la Mona Lisa*:
<https://institucional.us.es/blogimus/2021/04/impresoras-3d-casas-protesis-y-la-mona-lisa/>

- [3] Michael G. Crandall, & Pierre-Louis Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983), no. 1, 1–42.

- [4] Federica Dragoni *Introduction to Viscosity Solutions for Nonlinear PDEs* Notas disponibles en <https://www.researchgate.net/profile/Federica-Dragoni/publications>

- [5] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

- [6] Nikos Katzourakis, *An introduction to viscosity solutions for fully nonlinear PDE with applications to calculus of variations in L^∞* . SpringerBriefs in Mathematics. Springer, Cham, 2015.

- [7] Hung Vinh Tran, *Hamilton–Jacobi Equations: Theory and Applications* Notas disponibles en <http://www.math.wisc.edu/hung/HJ-equations-Tran-AMS.pdf>