FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

GRADO EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Título

Torneos y coloración

Realizado por:
Francisco Vilches Valle

Supervisado por:
Desamparados Fernández Ternero

2 de Julio de 2021

Índice general

Resumen / Abstract

En el transcurso de esta memoria trabajaremos con torneos, centrándonos en la noción de coloración. Para ello realizaremos una introducción a la coloración de grafos y digrafos, ya que los torneos son un caso específico de ellos.

Asimismo, estudiaremos torneos con unas propiedades concretas, como los héroes y las celebridades, debido a que son de gran importancia a la hora de determinar el número cromático de un torneo.

Por otra parte, el concepto de coloración en torneos esta intrínsecamente relacionado con los torneos transitivos, de manera que, demostraremos ciertos resultados relacionados con ellos.

In the course of this memory we will work with tournaments, focusing on the notion of colouring . For this purpose, we will make an introduction to the colouring of graphs and digraphs, since tournaments are a special case of them.

Also, we will study tournaments with specific properties, such as heroes and celebrities, because they are of great importance to establish the chromatic number of a tournament.

On the other hand, the concept of colouring in tournaments is intrinsically related to transitive tournaments, so we will demonstrate certain results related to them.

Introducción

La coloración de grafos es uno de los problemas más relevantes dentro de la Teoría de Grafos. Los primeros estudios relacionados con ella surgen por los intentos de colorear mapas a partir de grafos planares, hecho que derivó en el problema de los cuatro colores y, casi cien años después, en la prueba del teorema de los cuatro colores.

A primera vista, la coloración de grafos puede no dar más de sí, pero nada más lejos de la realidad. Multitud de fenómenos pueden explicarse de forma sencilla e intuitiva a través de la coloración, como por ejemplo, la elaboración de horarios, las redes móviles GSM o incluso, los sudokus.

En nuestro estudio, vamos a tratar la coloración de torneos, un caso particular de grafo. Las primeras investigaciones sobre torneos fueron realizadas por F. Harary y L. Moser, datadas en el año 1966, y se centraban en el estudio de los torneos "round-robin". Para generar un torneo "round-robin", es necesario enfrentar a todos los participantes entre sí una única vez y no considerar empates. Por tanto, considerando los resultados de cada enfrentamiento, se establece una relación de dominancia entre participantes. Si el participante A ha ganado a B, decimos que A domina a B. Gracias a esta caracterización de los torneos "round-robin", podemos establecer una relación directa con los grafos completos dirigidos, que llamaremos torneos, siguiendo el abuso de notación.

En un afán de recoger la mayoría de resultados y conclusiones existentes sobre torneos, J.W. Moon publicó [2] en 1968. En el desarrollo del estudio utilizaremos varios de los resultados recogidos en dicho libro. Años más tarde, un grupo de investigadores, localizados por todo el globo, publica [3], donde se desarrolla el concepto de coloración en torneos, introduciendo las nociones de héroes y celebridades, ya que están estrechamente relacionadas con el número cromático de un torneo T.

La estructura de esta memoria es la siguiente. El **capítulo 1** recoge una colección de resultados básicos de la Teoría de Grafos, en particular, aquellos relacionados con la coloración, tanto de grafos no dirigidos como de digrafos, y con la isomorfía de grafos, ya que nos será muy necesario reconocer ciertos grafos con propiedades muy específicas contenidos en otros de mayor tamaño.

Durante el **capítulo 2** se realiza una extensa introducción a la noción de torneo, exponiendo los principales objetos de estudio de la memoria, los héroes y las celebridades. Para ello, daremos una secuencia de propiedades y proposiciones que serán probadas en capítulos posteriores. Además, se introduce el principal resultado del trabajo, el Teorema 2.21, el cuál establece una equivalencia entre héroes y celebridades.

En el **capítulo 3**, encontraremos un procedimiento para construir héroes. Dicha construcción se encuentra recogida en la Proposición 3.11: usando el concepto de trisección, generaremos un héroe a partir de un héroe fuerte y un torneo transitivo.

El **capítulo 4** recoge la comprobación de la primera parte de la Proposición 2.19, a partir de la prueba de un resultado más general. Usaremos tanto una colección de definiciones (r-montañas, (r, s)-cliques, ...) como una serie de resultados auxiliares en base a dichas definiciones.

El foco del **capítulo 5** es la prueba, de forma más general de la Proposición 3.11. Para este fin, estudiaremos las (r, s)-joyas y su relación con los torneos transitivos junto con cotas de ciertos torneos con propiedades específicas.

Dada la restricción existente a la hora de hallar héroes, nuestro objetivo en el **capítulo 6** es encontrar aquellos torneos minimales tales que, si un torneo contiene alguna copia de ellos, podemos asegurar que no se trata de un héroe.

Para concluir, el **capítulo 7** nos proporciona una equivalencia directa entre héroes y celebridades. Para llegar a dicha equivalencia se exponen multitud de resultados previos, cuyas pruebas requieren técnicas de diferentes ámbitos, tales como álgebra, probabilidad, combinatoria o análisis.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo vamos a introducir nociones y resultados básicos de la Teoría de Grafos. Para ello vamos a comentar las definiciones básicas de dicha teoría que han sido estudiadas en la asignatura de *Matemática Discreta*, tomándose como referencia el libro de W.D. Wallis [1].

Definición 1.1 *Llamamos* ***grafo*** *a un par* $G = (V, A)$ *compuesto por* $V \neq 0$ *un conjunto de nodos o vértices y* A *una colección de parejas no ordenadas de nodos pertenecientes a* V*, llamadas aristas.*

Notación 1.2 *Usaremos de forma habitual* $V(G)$ *para referirnos al conjunto* V *de vértices de* G *y* $E(G)$ *para denotar el conjunto de aristas* A *de* G*.*

Definición 1.3 *Dado un grafo* G*, su* ***grafo complementario*** $\overline{G} = (V, A')$ *es aquel formado por el mismo conjunto de vértices y todas las aristas posibles entre vértices de* V *que no existen en* G*.*

Definición 1.4 *Se conocen como* ***grafos dirigidos*** *o* ***digrafos*** *aquellos grafos a los que se les ha dado una orientación concreta a cada arista.*

Definición 1.5 *Un camino en un grafo* G *es una secuencia finita de vértices* $x_0, x_1, ..., x_r$ *de* G *y aristas* $a_1, a_2, ..., a_r$ *de* G *donde los puntos finales de cada* a_i *son* x_{i-1} *y* x_i *para* $i \in \{1, ..., r\}$*.*

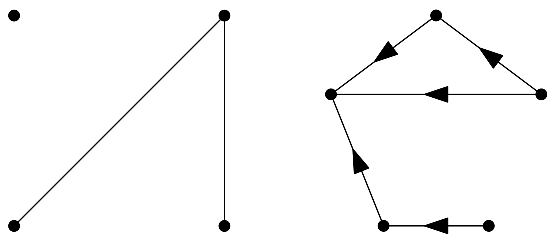


Figura 1.1: Grafo y Digrafo.

Definición 1.6 *Decimos que G es un grafo conexo si para cada par de vértices de G existe un camino entre ellos.*

Definición 1.7 *Sea G un grafo, la longitud de un camino es el cardinal del conjunto de aristas que conforman dicho camino.*

Definición 1.8 *Dado un grafo G, un **ciclo** es un camino en el que todos los vértices son distintos, salvo el primero y el último.*

Definición 1.9 *Sea G un grafo, si cada par de vértices de G esta unido por un solo camino, decimos que G es un **árbol**. La unión de árboles disjuntos genera un **bosque**.*

Observación 1.10 *Los bosques no contienen ciclos ya que para cada par de vértices solo existe un único camino que los une.*

Definición 1.11 *Dado un grafo G, el **contorno** de G es la longitud del ciclo mínimo contenido en G. Si no existen ciclos en un grafo, su contorno es infinito.*

Definición 1.12 *Una **k-coloración** de un grafo G es una partición de V en k subconjuntos, llamados clases de colores, tal que dos vértices adyacentes no pertenecen a la misma clase.*

Definición 1.13 *El **número cromático** de un grafo G, denotado por $\chi(G)$, es el menor k para el cuál G admite una k-coloración.*

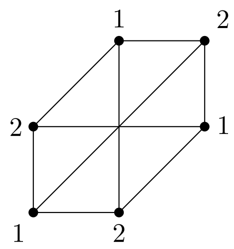


Figura 1.2: 2-coloración.

Para grafos dirigidos tenemos que añadir una condición más para definir una k-coloración.

Definición 1.14 *Una* ***k-coloración*** *de un grafo dirigido G es una partición de V en k clases de colores tal que:*

- *Dos vértices adyacentes no pertenecen a la misma clase de color.*
- *Todas las aristas que conectan dos vértices de clases de color tienen el mismo sentido.*

Se define de forma análoga el **número cromático dirigido** para grafos dirigidos.

Definición 1.15 *Sea $G = (V, A)$ un grafo y sea $M \subseteq V$, llamamos grafo inducido, o generado, al grafo formado por los vértices de M y cuyas aristas son todas las aristas de A compuestas por vértices de M. Se denota como $G|M$.*

Definición 1.16 *Un* ***homorfismo*** *f de un grafo $G = (V, A)$ a un grafo $G' = (V', A')$ es una aplicación de V en V' tal que para toda arista (x, y) en G, la imagen $(f(x), f(y))$ es una arista de G'.*

Definición 1.17 *Diremos que un* ***homorfismo*** *f de un grafo $G = (V, A)$ a un grafo $G' = (V', A')$ es un* ***isomorfismo*** *si f es una biyección entre los conjuntos de vértices, de modo que f y f^{-1} son homomorfismos.*

Así, dos grafos G y G' son **isomorfos** si existe una biyección entre sus conjuntos de vértices que preserva la relación de adyacencia en los dos sentidos.

Los homomorfismos e isomorfismos de grafos dirigidos se definen de forma similar, añadiendo la condición de orientación de aristas.

Capítulo 2

Torneos

Durante este capítulo, recogemos los principales resultados sobre torneos, tomando como referencia el libro de J.W. Moon [2].

Definición 2.1 *Un **torneo** es un digrafo tal que cada par de vértices distintos u, v están unidos por una y solo una de las aristas dirigidas uv o vu.*

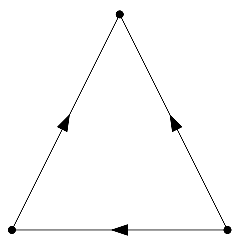


Figura 2.1: Un 3-torneo.

Notación 2.2 *Sea T un torneo, si la arista uv pertenece a T, decimos que u domina v (denotado por $u \rightarrow v$).*

Definición 2.3 *Dado un torneo T con n vértices, la **valencia de salida** de un vértice p_i es el número s_i de vértices que p_i domina. La **secuencia de valencias de salidas** de T es la n-tupla ordenada en orden creciente $(s_1, s_2, ..., s_n)$.*

Definición 2.4 *Un torneo T es* ***reducible*** *si existe una partición del conjunto de vértices, no vacía, en dos subconjuntos A y B tal que todos los vértices de A dominan a todos los vértices de B.*

Para cualquier subconjunto de vértices A de un torneo T, consideramos:

$$\Gamma(A) = \{q : p \to q \text{ para algún } p \in A\},$$

y de forma recursiva:

$$\Gamma^m(A) = \Gamma(\Gamma^{m-1}(A)), \text{para } m = 2, 3, ...$$

Definición 2.5 *Un torneo T con n vértices es* ***fuerte****, o es* ***fuertemente conexo****, si y solo si para cada vértice p de T el conjunto*

$$\{p\} \cup \Gamma(p) \cup \Gamma^2(p) \cup ... \cup \Gamma^{n-1}(p)$$

contiene a todos los vértices de T.

Después de esta definición, se puede enunciar el siguiente resultado.

Teorema 2.6 *Un torneo T es fuerte si y solo si es irreducible.*

Definición 2.7 *Un torneo T es* ***transitivo*** *si, para cualesquiera vértices p, q y r, si se tiene que $p \to q$ y $q \to r$, entonces también se tiene $p \to r$.*

Definición 2.8 *Dado un torneo T, decimos que $W \subseteq V(T)$ es un subconjunto transitivo en T si $T|W$ es un torneo transitivo.*

Teorema 2.9 *Un torneo de n vértices es transitivo si y solo si su secuencia de valencias de salida es de la forma $(0, 1, ..., n-1)$.*

Por tanto, para cada n, existe un único torneo transitivo con n vértices, salvo isomorfismo.

Notación 2.10 *Denotaremos por T_k al torneo transitivo de k vértices.*

Definición 2.11 *Sean G y H dos torneos, diremos que G* ***contiene una copia*** *de H si H es isomorfo a algún subtorneo de G. En caso contrario, diremos que G es* ***H-libre****.*

Definición 2.12 *Dado un torneo T, una k-coloración es una aplicación $\phi : V(T) \longrightarrow \{1, ..., k\}$, tal que, para todo $1 \leq i \leq k$, el subconjunto $\{v \in T \mid \phi(v) = i\}$ es transitivo.*

Definición 2.13 *El número cromático de un torneo T, denotado por $\chi(T)$, es el mínimo número k para el que T acepta una k-coloración.*

Llegados a este punto vamos a introducir una de las nociones más importantes de nuestro estudio: los héroes.

Definición 2.14 *Un torneo T es un* ***héroe*** *si existe un número c (que depende de T) tal que todo torneo T-libre tiene número cromático a lo sumo c.*

Por ejemplo, el triángulo cíclico es un héroe, ya que todo torneo que no lo contiene es 1-coloreable. El siguiente resultado es inmediato.

Lema 2.15 *Todo subtorneo de un héroe es un héroe.*

Para proseguir con el estudio, vamos a definir una serie de conceptos claves.

Notación 2.16 *Si T es un torneo y X e Y son subconjuntos disjuntos de vértices de T, y todo vértice de X domina a todos los vértices de Y, se escribe $X \Rightarrow Y$. Escribimos $v \Rightarrow Y$ si $\{v\} \Rightarrow Y$, y $X \Rightarrow v$ si $X \Rightarrow \{v\}$.*

Definición 2.17 *Si T es un torneo y (X, Y, Z) es una partición no vacía del conjunto de vértices de T verificando que $X \Rightarrow Y$, $Y \Rightarrow Z$ y $Z \Rightarrow X$, decimos que (X, Y, Z) es una* ***trisección*** *de T.*

Notación 2.18 *Sean A, B, C y T torneos, si existe una trisección (X, Y, Z) de T tal que $T|X, T|Y$ y $T|Z$ son isomorfos a A, B y C, respectivamente, entonces $T = \Delta(A, B, C)$. Por último, se denotará k por T_k en este contexto, de forma que $\Delta(T_1, T_1, T_1) = \Delta(1, 1, 1)$ y $\Delta(H, T_1, T_k) = \Delta(H, 1, k)$.*

En este momento podemos establecer uno de los resultados principales del estudio.

Proposición 2.19 *Un torneo es un héroe si y solo si todas sus componentes fuertes son héroes. Un torneo fuerte con más de un vértice es un héroe si y solo si es una trisección $\Delta(H, 1, k)$ o $\Delta(H, k, 1)$ para algún héroe H y algún $k \geq 1$.*

Volveremos más adelante a este resultado para dar una prueba adecuada.

Definición 2.20 *Un torneo A es una **celebridad** si $\exists c > 0$ tal que todo torneo A-libre T tiene un subconjunto transitivo con cardinalidad al menos $c|V(T)|$.*

Teorema 2.21 *Un torneo es un héroe si y solo si es una celebridad.*

Es claro que todo héroe es una celebridad, posteriormente probaremos el recíproco.

Capítulo 3

Torneos con un número crómatico grande

Para clasificar torneos con un número cromático elevado, vamos a recurrir a dos construcciones, ya que, como hemos visto anteriormente, todo héroe tiene que ser subtorneo de otros dos. Este hecho restringe las posibilidades de que un torneo T sea un héroe.

Proposición 3.1 *Si H es un héroe fuerte con al menos dos vértices, entonces $H = \Delta(P, Q, 1)$ para ciertos héroes P, Q no vacíos.*

Demostración: Consideramos la familia de torneos S_i ($i \geq 1$) definida de la siguiente forma: S_1 es el torneo de un vértice y, para $i \geq 2$, $S_i = \Delta(S_{i-1}, S_{i-1}, 1)$. Se tiene que: para $i \geq 1$, $\chi(S_i) \geq i$, lo que vamos a probar por inducción. Para $i = 1$, $\chi(S_1) = 1$. Supongamos que es cierto para $i - 1$, por la definición de la familia, sabemos que S_i admite una trisección (X, Y, Z) tal que X e Y son isomorfos a S_{i-1} y Z es isomorfo al torneo de un vértice, así, $Z = \{z\}$. Razonemos por reducción al absurdo, supongamos que existe una $(i-1)$-coloración ϕ de S_i y que $\phi(z) = i - 1$.

Sabemos que X e Y no admiten una $(i-2)$-coloración ya que por hipótesis de inducción $\chi(S_{i-1}) \geq i - 1$, entonces $\exists x \in X$ tal que $\phi(x) = i - 1$, de forma análoga, $\exists y \in Y$ con $\phi(y) = i - 1$. El subtorneo inducido por $\{x, y, z\}$, $S_i \,|\, \{x, y, z\}$ es el triángulo cíclico (recordemos que hemos partido de una trisección de S_i), pero hemos llegado a una contradicción ya que, si recordamos la definición de una k-coloración, el conjunto $\{v \in V(S_i \,|\, \{x, y, z\}) : \phi(v) = i - 1\}$ tiene que ser transitivo. Por tanto, $\chi(S_i) \geq i$.

Una vez demostrado este resultado y usando que H es un héroe, $\exists i \geq 1$ tal que S_i contiene a H. Veamos porque ocurre esto. Al ser H un héroe, todo torneo H-libre tiene número cromático a lo sumo c y si tomamos $i = c$, tenemos que S_i contiene una copia de H. Consideremos el mínimo i para el que se cumple este hecho. Sea $T = S_i$, gracias a la construcción de S_i, podemos dar una trisección (X, Y, Z) de T tal que $T|X$ y $T|Y$ son isomorfos a S_{i-1} y $T|Z = \{z\}$. Como hemos tomado el mínimo i tal que S_i contiene a H, si consideramos $W \subseteq V(T)$ con $T|W$ isomorfo a H, está claro que $W \nsubseteq X$ y $W \nsubseteq Y$.

$T|W$ es isomorfo a H, por tanto, $T|W$ es fuerte (pues H es fuerte), entonces, W tiene intersección no vacía con X, Y, Z. Usando que $Z = \{z\}$, tenemos que $(Z \cap W) = \{z\}$, por lo tanto, $(W \cap X, W \cap Y, W \cap Z)$ es una trisección de H, es decir, $H = \Delta(P, Q, 1)$ donde $P = T|(W \cap X)$ y $Q = T|(W \cap Y)$. Además, P y Q son héroes por ser subtorneos de un héroe (Lema 2.15). □

Para proseguir con nuestro estudio debemos introducir varios conceptos que nos serán de utilidad más adelante.

Definición 3.2 *Dado un grafo G, $W \subseteq V(G)$ es un* ***conjunto estable*** *o* ***independiente*** *si todos sus vértices no son adyacentes entre sí.*

Existe otro enfoque para definir los conjuntos estables, si consideramos de nuevo el conjunto W, decimos que es independiente si el subgrafo generado por $\overline{W}$ es un grafo completo.

Definición 3.3 *Sea T un torneo y $(v_1, v_2, ..., v_n)$ una enumeración de los vértices de T. Si $v_i v_j$ es una arista de T con $j < i$, entonces, $v_i v_j$ es una* ***arista de retroceso****.*

Si consideramos el grafo B formado por los vértices de T y por las aristas de retroceso de T (sin orientación), se dice que B es el **grafo "*backedge*"**.

Lema 3.4 *Sea T un torneo, $(v_1, v_2, ..., v_n)$ una enumeración de los vértices de T y B su grafo backedge. Si B tiene contorno al menos 4 y $W \subseteq V(T)$ es transitivo en T, entonces W es la unión de dos conjuntos estables de B.*

Demostración: Basta probarlo para el caso $W = V(T)$. Consideramos el conjunto X formado por todos los vértices de W tales que no son inicio de

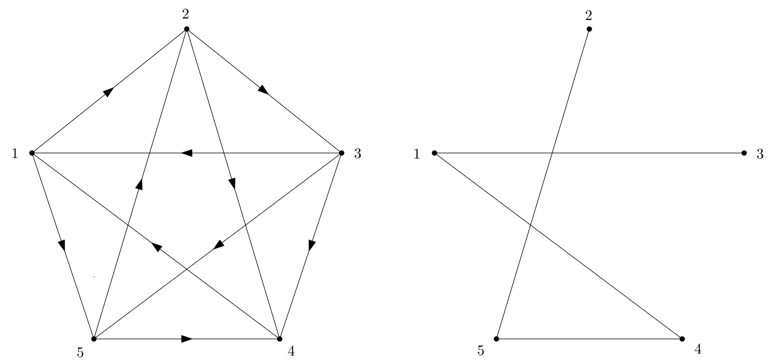


Figura 3.1: Un torneo y su grafo *backedge*.

ninguna arista de retroceso y el conjunto Y formado por todos los vértices de W que no son final de ninguna arista de retroceso. Veamos que ambos conjuntos son estables en B.

Sean v_{i_0} y $v_{i_1} \in X$, tenemos que ver si la arista $v_{i_0}v_{i_1}$ o la arista $v_{i_1}v_{i_0}$ existen en el grafo *backedge*. Supongamos que $i_0 < i_1$ (podemos razonar de igual forma para $i_0 > i_1$), entonces $v_{i_1}v_{i_0}$ no pertenece al conjunto de aristas de T ya que $v_{i_1} \in X$. Por tanto, X es un conjunto estable de vértices en B. Para Y se deduce de modo análogo.

Veamos ahora que $W = X \cup Y$ por reducción al absurdo. Supongamos que existe un vértice $v \in W \setminus (X \cup Y)$, por lo que existen $u, w \in W$ tal que uv y vw son aristas de retroceso. Como W es transitivo tenemos que uw es una arista de T y, por tanto, una arista de retroceso en B. Hemos encontrado un ciclo de longitud 3 en B, pero en nuestras hipótesis hemos considerado que el contorno de B es de al menos 4, por lo que hemos llegado a una contradicción. Entonces, $W = X \cup Y$. $\square$

Notación 3.5 *Sea T un torneo, denotamos por $\alpha(T)$ al cardinal del mayor subconjunto transitivo de $V(T)$.*

Lema 3.6 *Sea H un torneo. Si H es una celebridad, entonces podemos encontrar una enumeración de sus vértices $v_1, v_2, ..., v_n$ tal que su grafo backedge es un bosque.*

Para la prueba de este lema, necesitaremos demostrar el siguiente resultado recogido en [4].

Lema 3.7 *Para cada $k \geq 0$ y $h \geq 1$, existe un grafo G_k, tal que todo conjunto estable A de G_k satisface que $|A| < |V(G_k)|/(2k)$ y que todo ciclo tiene más de* $\max(3, h)$ *vértices.*

Demostración: Sea $f(r,r)$ el menor entero tal que todo grafo con $f(r,r)$ vértices contiene un subgrafo completo con r vértices o un conjunto de r puntos independientes. Consideremos $\tilde{k} < f(r,r)$, entonces existe al menos un grafo $G_{\tilde{k}}$ tal que $K_r \subsetneq G_{\tilde{k}}$ y $K_r \subsetneq \overline{G_{\tilde{k}}}$, donde K_r denota el grafo completo con r vértices.

Por tanto, si A es un conjunto estable de $G_{\tilde{k}}$, al generar un subgrafo completo en $G_{\tilde{k}}$ o en $\overline{G_{\tilde{k}}}$, debe tener un cardinal menor que r, es decir, $|A| < r$. Tenemos las siguientes desigualdades para $f(r,r)$:

$$2^{r/2} < f(r,r) \leq \binom{2r-2}{r-1}.$$

Veamos que ocurre si $\tilde{k} = 2^{r/2} = |V(G_{\tilde{k}})|$. Se tiene que

$$\frac{|V(G_{\tilde{k}})|}{2k} = \frac{2^{r/2}}{2k} = \frac{2^{(r/2)-1}}{k},$$

y pretendemos que $|V(G_{\tilde{k}})|/(2k)$ sea mayor que r. ¿Para que valores de r se cumple la desigualdad?

$$\frac{k}{2^{(r/2)-1}} < \frac{1}{r} \iff k < \frac{2^{(r/2)-1}}{r} \xrightarrow{r\to\infty} +\infty.$$

Por tanto, dado $k \geq 0$, existe r tal que $\dfrac{2^{(r/2)-1}}{k} > r$ y esto es equivalente a $\dfrac{2^{r/2}}{2k} > r$.

Si consideramos $\tilde{k} = 2^{r/2} < f(r,r)$, entonces existe al menos un grafo G_k tal que $K_r \subsetneq G_{\tilde{k}}$ y $K_r \subsetneq \overline{G_{\tilde{k}}}$. Así, cualquier A conjunto estable de G_k al generar un subgrafo completo en $G_{\tilde{k}}$ o en $\overline{G_{\tilde{k}}}$, debe tener un cardinal menor que r. Luego, $|A| < |V(G_k)|/(2k)$.

Sea $h(r,l)$ el menor entero tal que todo grafo con $h(r,l)$ vértices contiene un circuito cerrado de r o menos aristas o un conjunto de l puntos independientes. Siguiendo esta definición, es claro que $h(3,l) = f(3,l)$. De forma general, se tiene que $h(r,l) \leq f(r,l)$ si $r > 3$, pues si un grafo contiene un subgrafo completo con r vértices, entonces también contiene un circuito con r aristas.

Si $\tilde{k} < h(r,l)$, entonces existe al menos un grafo $G_{\tilde{k}}$ con $\tilde{k}$ vértices y tal que cualquier ciclo contenido en $G_{\tilde{k}}$ tiene más de r aristas y $K_l \subsetneq \overline{G_{\tilde{k}}}$ y en consecuencia, $K_r \subsetneq G_{\tilde{k}}$.

Si A es un subconjunto estable de $G_{\tilde{k}}$, al generar un subgrafo completo en $\overline{G_{\tilde{k}}}$, debe tener cardinal menor que r y l.

Tenemos que $h(r,l) > l^{1+1/(2r)}$, si tomamos $\tilde{k} = |V(G_{\tilde{k}})| = l^{1+1/(2r)}$, entonces

$$\frac{|V(G_{\tilde{k}})|}{2k} = \frac{l^{1+1/(2r)}}{2k} \quad (r = |V(H)|),$$

y pretendemos que sea mayor que l.

Al igual que vimos para la función f, tenemos que encontrar para que valores de r se cumple la desigualdad.

$$2k > l \iff \frac{l^{1/(2r)}}{2k} > 1 \iff \frac{2k}{l^{1/(2r)}} < 1$$
$$\iff k < \frac{l^{1/(2r)}}{2} \xrightarrow{l \to \infty} +\infty \quad (\text{pues } r > 0).$$

Dado $k \geq 0$, existe l suficientemente grande tal que $l > h = r$ y $k < \dfrac{l^{1/(2r)}}{2}$.

Por tanto, si tomamos $\tilde{k} = l^{1+1/(2h)}$, entonces existe al menos un grafo $G_{\tilde{k}}$ tal que cualquier subconjunto estable A verifica que $|A| < |V(G_{\tilde{k}})|/(2k)$ y todo ciclo tiene más de h vértices. Como $\tilde{k}$ depende de l, que a su vez, depende de k, podemos denotar el grafo por G_k. $\square$

Demostración del Lema 3.6: Sea G_k el grafo que nos proporciona el Lema 3.7 y $v_1, v_2, ..., v_n$ una enumeración arbitraria de $V(G_k)$. Sea R_k el torneo con vértices los de G_k, en el cuál para $1 \leq i < j \leq n$, $v_j v_i$ es una arista de R_k si v_i y v_j son adyacentes y, en caso contrario, $v_i v_j$ es una arista de R_k. Por tanto, G_k es el grafo *backedge* de R_k según la enumeración dada.

Primero vamos a probar que $\alpha(R_k) < |V(R_k)|/k$. Cada conjunto transitivo de R_k es unión de dos conjuntos estables en G_k por el Lema 3.4, ya que el contorno de G_k es de al menos 4. Entonces, G_k tiene un conjunto estable con cardinal al menos $\alpha(R_k)/2$. Pero como $|A| < |V(G)|/(2k)$ por la elección de G_k, tenemos que $\alpha(R_k) < |V(R_k)|/k$.

Como H es una celebridad, existe un k tal que R_k contiene una copia de H. Sea $R_k|X$ el torneo isomorfo a H. Tenemos que $G_k|X$ es un bosque, ya que $|X| = |V(H)|$ y cada ciclo de G_k tiene más de $|V(H)|$ vértices. Por tanto, $G_k|X$ es el grafo *backedge* de $R_k|X$, inducido por la enumeración $v_1, ..., v_n$, y, al no contener ciclos, es un bosque. □

Notación 3.8 *Denotamos por C_3 al torneo* $\Delta(1, 1, 1)$.

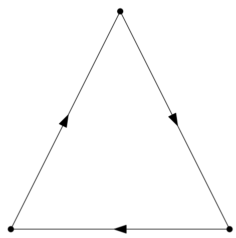


Figura 3.2: $C_3 = \Delta(1, 1, 1)$.

Lema 3.9 *Toda celebridad es 2-coloreable.*

Demostración: Sea H una celebridad, aplicando el Lema 3.6 podemos encontrar una enumeración de sus vértices tal que el grafo *backedge* B es un bosque y por el Lema 3.4, $V(H)$ es la unión de dos conjuntos estables de B. Sabemos que cada conjunto estable de B es transitivo en H, por lo que H es 2-coloreable, ya que se usa un color por cada subconjunto estable. □

Corolario 3.10 $\Delta(C_3, C_3, 1)$ *no es 2-coloreable, entonces, no es una celebridad.*

Gracias a la colección de lemas anteriores, podemos ofrecer un resultado más preciso que la Proposición 3.1.

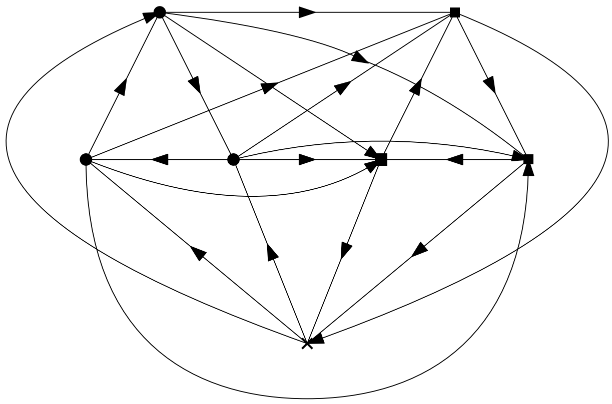


Figura 3.3: $\Delta(C_3, C_3, 1)$.

Proposición 3.11 *Si H es un héroe con al menos 2 vértices, entonces $H = \Delta(J, k, 1)$ o $H = (J, 1, k)$ para algún héroe J no nulo y para algún $k \geq 1$.*

Demostración: Sabemos que dado un héroe H, se pueden encontrar dos héroes no nulos P y Q tales que $H = \Delta(P, Q, 1)$, por la Proposición 3.1. Al ser H un héroe, no contiene a $\Delta(C_3, C_3, 1)$, de modo que P o Q tiene que ser transitivo, ya que C_3 no puede estar contenido en P y en Q a la vez. Si suponemos que C_3 no esta contenido en P, entonces P es transitivo. Podemos usar un razonamiento similar para Q. Por ende, P o Q es isomorfo a un cierto T_k, con lo que queda demostrada la proposición. □

Por último, podemos enunciar la siguiente conjetura, que no somos capaces de demostrar a partir de $k = 2$.

Conjetura 3.12 *Para todo $k \geq 0$ existe un número c tal que, si T es un torneo en que el conjunto de vecinos de salida de cada vértice tiene número cromático a lo sumo k, entonces $\chi(T) \leq c$.*

Capítulo 4

Componentes fuertes de héroes

En este capítulo probaremos que un torneo es un héroe si y solo si todas sus componentes fuertes son héroes. Dicho resultado es la primera parte de la Proposición 2.19.

La implicación hacia la izquierda se tiene por el Lema 2.15. Para demostrar la implicación hacia la derecha, es suficiente probar que si H_1 y H_2 son héroes, entonces, $H_1 \Rightarrow H_2$ es un héroe. Recordemos que $H_1 \Rightarrow H_2$ denota un torneo T tal que $X \Rightarrow Y$ y $T|X$ y $T|Y$ son isomorfos a H_1 y H_2, respectivamente, para alguna partición (X, Y) de $V(T)$. Nos será de gran utilidad demostrar un resultado más general.

Definición 4.1 *Si $\mathcal{H}$ es una familia de torneos, decimos que un torneo T es **$\mathcal{H}$-libre** si ningún subtorneo de T es isomorfo a un elemento de $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son dos familias de torneos, la familia*

$$\{H_1 \Rightarrow H_2 \mid H_1 \in \mathcal{H}_1, H_2 \in \mathcal{H}_2\}$$

se representa por $\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2$.

Lema 4.2 *Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dos familias de torneos tales que todo elemento de $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ tiene como máximo c vértices (con $c \geq 3$). Sea T un torneo $(\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2)$-libre tal que, para $i = 1, 2$, cada subtorneo $\mathcal{H}_i$-libre de T tiene número cromático a lo sumo c. Entonces,*

$$\chi(T) \leq (2c)^{4c^2}.$$

Para probar este resultado tenemos que definir varios conceptos por inducción en r y s.

Definición 4.3 *Si $e = uv$ es una arista de un torneo T, llamamos $C(e)$ al conjunto de todos los vértices $w \neq u, v$ tales que w domina a u y v domina a w. Una 1-**montaña** es el torneo de un vértice. Para $r \geq 1$,*

- *una arista e es r-**pesada** si $T|C(e)$ contiene una r-montaña;*
- *un (r, s)-**clique** de T es un subconjunto $X \subseteq V(T)$ tal que $|X| = s$, y cada arista de $T|X$ es r-pesada en T;*
- *una $(r+1)$-**montaña** en T es un conjunto minimal $M \subseteq V(T)$ tal que el torneo $S = T|M$ contiene un $(r, r+1)$-clique (en S).*

Es importante recalcar que las aristas del (r, s)-clique tienen que ser r-pesadas en S, no en T, para la definición de $(r+1)$-montaña.

Ejemplo 4.4 *Veamos que $\Delta(1, 1, 1)$ es una 2-montaña. Sea T el siguiente torneo*

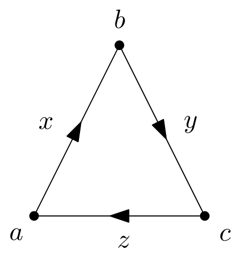


Figura 4.1: 2-montaña

Consideramos $M = \{a, b, c\} \subseteq V(T)$ y el torneo inducido por M, es decir, $S = T|M$ (en este caso es el propio T). Para probar que M es una 2-montaña, tenemos que encontrar un $(1, 2)$-clique en S. Sea $X = \{a, b\} \subseteq V(S)$, claramente $|X| = 2$ y $S|X$ es el torneo constituido por los vértices a, b y la arista $x = ab$. Vamos a probar que x es 1-pesada, el conjunto $C(x)$ está formado por c ya que es el único vértice que domina a a y es dominado por b. Entonces, $S|C(x)$ es el torneo formado por un solo vértice y, por tanto, una 1-montaña. Con esto, hemos probado que x es 1-pesada y que X es un $(1, 2)$-clique en S, por lo que M es una 2-montaña.

Ejemplo 4.5 *También podemos estudiar la estructura de una 3-montaña. Sea T el siguiente torneo*

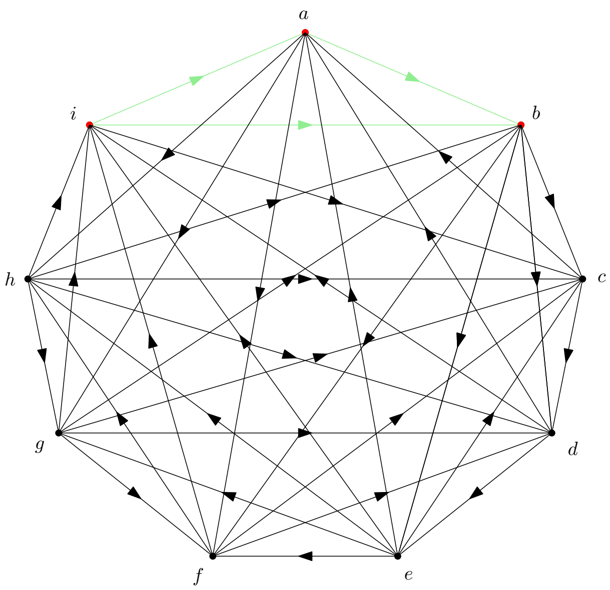


Figura 4.2: 3-montaña

Sea $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ y sea S el torneo inducido por M en T. Para probar que M es una 3-montaña, tenemos que buscar un $(2, 3)$-clique en S. Consideramos $X = \{i, a, b\}$, X será un $(2, 3)$-clique si todas las aristas de $S|X$ son 2-pesadas. Comprobemos si es cierto, usando que $\Delta(1, 1, 1)$ es una 2-montaña, tenemos que

- *Arista $ia \to C(ia) = \{f, g, h\}$ y $S|C(ia)$ es una 2-montaña.*
- *Arista $ab \to C(ab) = \{c, d, e\}$ y $S|C(ab)$ es una 2-montaña.*
- *Arista $ib \to C(ib) = \{d, e, f\}$ y $S|C(ib)$ es una 2-montaña.*

Por tanto, X es un $(2, 3)$-clique en S y en consecuencia, M es una 3-montaña.

Lema 4.6 *Una r-montaña tiene al menos r como número cromático, y tiene como máximo $(r!)^2$ vértices.*

Demostración: Probaremos este resultado por inducción en r. Para $r = 1$, sabemos que una 1-montaña es el torneo con un único vértice, por lo que, $\chi(T_1) = 1$. Supongamos que el resultado es cierto para r y probémoslo para $r + 1$.

Sea M una $(r + 1)$-montaña, veamos que $\chi(M) \geq r + 1$ por reducción al absurdo. Supongamos que $\chi(M) \leq r$, entonces existe una r-coloración de M. Existen $X_1, ..., X_r \subseteq M$ dos a dos disjuntos y tales que $X_1 \cup ... \cup X_r = M$ y $S|X_i$ es transitivo, $\forall i$, donde M es una $(r + 1)$-montaña en el torneo T y $T|M = S$.

Como M es una $(r+1)$-montaña, M contiene un $(r, r+1)$-clique X en S. Por la definición de (r, s)-clique, $|X| = r+1$ y toda arista de $S|X$ es r-pesada en S.

Al ser $|X| = r + 1$, existe $i_0 \in \{1, ..., r\}$ tal que $X \cap X_{i_0}$ contiene al menos dos vértices u y v (supongamos que $u \to v$). Entonces $e = uv$ es una arista en $S|X$ y, por tanto, es r-pesada en S.

Consideremos $C(e) = \{w \in V(S) = M \mid wu \text{ y } vw \text{ son aristas en } S\}$. Se tiene que $S|C(e)$ contiene una r-montaña M'. Veamos que $M' \cap X_{i_0} = \emptyset$.

Si existe $z \in M' \cap X_{i_0}$, entonces $\phi(z) = i_0$, $\phi(u) = \phi(v)$ y las aristas zu, uv y vz estarían en S, por lo que formarían un ciclo con color i_0, lo cuál sería una contradicción ya que X_{i_o} es transitivo.

Así, ϕ restringida a M' nos daría una coloración de M' con $r - 1$ colores al no utilizar el color i_0, lo que es una contradicción. Luego, $\chi(M) \geq r + 1$.

Se puede encontrar por inducción una cota superior del número de vértices de una $(r + 1)$-montaña. Es claro que $V(1 - \text{montaña}) \leq (1!)^2$. Supongamos que $V(r - \text{montaña}) \leq (r!)^2$. Si un torneo T contiene una $(r + 1)$-montaña, existe un subconjunto $M \subseteq V(T)$ tal que el torneo $S = T|M$ contiene un $(r, r+1)$-clique. Por tanto, existe un $X \subseteq V(S)$ con $|X| = r+1$ tal que todas las aristas de $S|X$ son r-pesadas, que son un total de $\binom{r+1}{2}$. Si consideramos $e \in E(S|X)$, al ser e una arista r-pesada, $S|C(e)$ contiene una r-montaña, que por hipótesis de inducción, tiene como máximo $(r!)^2$ vértices. Entonces, M tiene a lo sumo $\binom{r+1}{2}(r!)^2$ vértices, por las posibles elecciones de e. Podemos comprobar que $((r+1)!)^2 \geq \binom{r+1}{2}(r!)^2$. Podemos desarrollar la primera parte como

$$((r + 1)!)^2 = ((r + 1)(r!))^2 = (r + 1)^2(r!)^2 \geq r^2(r!)^2,$$

y la segunda por

$$\binom{r+1}{2}(r!)^2 = \frac{(r+1)!}{2!((r+1)-2)!}(r!)^2 = \frac{(r+1)r(r-1)!}{2(r-1)!}(r!)^2 = \frac{r^2+r}{2}(r!)^2.$$

Así, obtenemos la desigualdad $r^2(r!)^2 \geq \frac{r^2+r}{2}(r!)^2$, que es equivalente a $r^2 \geq \frac{r^2+r}{2}$. Dicha desigualdad se verifica para todo $r \geq 1/2$ y, por tanto, para todo $r \geq 1$. En consecuencia, toda r-montaña tiene a lo sumo $(r!)^2$ vértices. □

Notación 4.7 *Dado un torneo T y un subconjunto $X \subseteq V(T)$, denotamos como $A(X)$ y $B(X)$ a los conjuntos de vértices $u \in V(T) \setminus X$ tales que $X \Rightarrow u$ y $u \Rightarrow X$, respectivamente. Si $v \in V(T)$, escribimos $A(v)$ para $A(\{v\})$ y $B(v)$ para $B(\{v\})$. También expresamos $\chi(X)$, en el caso de $\chi(T|X)$.*

En los siguientes lemas encontraremos herramientas para la demostración del Lema 4.2.

Lema 4.8 *Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dos familias de torneos, tales que cada elemento de $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ tiene como máximo h vértices. Sea T un torneo $(\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2)$-libre tal que para $i = 1, 2$, cada subtorneo $\mathcal{H}_i$-libre de T tiene número cromático a lo sumo c. Sea $r \geq 1$ y $s \geq 2$ y supongamos que*

- *T no contiene ningún (r, s)-clique,*
- *cada subtorneo de T que no contiene una r-montaña tiene número cromático a lo sumo p,*
- *cada subconjunto X de $V(T)$ que no contiene $(r, s-1)$-clique en T tiene $\chi(X) \leq q$.*

Entonces

$$\chi(T) \leq \text{máx}\{2q + 2c, ph^2 + c(h+1)\}.$$

Demostración: Dado un vértice $v \in V(T)$, se denota como $N(v)$ al conjunto de vértices de $V(T)\backslash\{v\}$ que son adyacentes desde o hacia v a través de una arista r-pesada. Tenemos el siguiente resultado: si $v \in V(T)$, se tiene que $\chi(N(v)) \leq q$. Para probarlo, recordamos una de las hipótesis del lema, como T no contiene ningún $(r,s)-$*clique*, entonces el subtorneo inducido por $N(v)$ no contiene ningún $(r, s-1)-$clique en T, por tanto, $\chi(N(v)) \leq q$.

Otro resultado que podemos obtener es el siguiente,

(1) para cada vértice v, $\chi(A(v)) \leq c + ph$ o $\chi(B(v)) \leq c + q$; y además, $\chi(A(v)) \leq c + q$ o $\chi(B(v)) \leq c + ph$.

Para demostrar la primera afirmación, supongamos que $\chi(B(v)\backslash N(v)) > c$, en caso contrario, $\chi(B(v)) \leq c + q$ por el resultado anterior y la afirmación sería cierta. Elegimos un subconjunto X de $B(v)\backslash N(v)$ tal que $T|X$ es isomorfo a un elemento de $\mathcal{H}_1$. Consideramos el subconjunto de vértices W de $A(v)$ que pertenecen a $C(e)$ para alguna arista e con principio en X y final v. Gracias a la elección de X, cada arista e de $T|X$ no es r-pesada y, por tanto, $T|C(e)$ no contiene ninguna r-montaña, entonces, $\chi(C(e)) \leq p$; y como a lo sumo existen h aristas desde X a v, tenemos que $\chi(W) \leq ph$. Además, $\chi(A(X)) \leq c$ debido a que $T|A(X)$ es $\mathcal{H}_2$-libre, al ser T un torneo $(\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2)$-libre, sin embargo, $A(v)\backslash W \subseteq A(X)$, entonces, $\chi(A(v)\backslash W) \leq c$. Por tanto, $\chi(A(v)) \leq c + ph$, lo que prueba la primera parte de **(1)**. La segunda parte se demuestra de forma análoga.

Sea P el conjunto de todos los vértices v tales que $\chi(A(v)) \leq c+ph$, y sea Q el conjunto de todos los vértices w tales que $\chi(B(w)) \leq c+ph$. Si la unión $P \cup Q \neq V(T)$, entonces por **(1)** existe un vértice z tal que $\chi(A(z)) \leq c+q$ y $\chi(B(z)) \leq c+q$ y, por tanto, $\chi(T) \leq 2c+2q$ como queremos probar.

Supongamos que $P \cup Q = V(T)$ y que $T|P$ contiene algún miembro de la familia $\mathcal{H}_2$, y elegimos $X \subseteq P$ tal que $T|X$ es isomorfo al miembro de $\mathcal{H}_2$. Entonces, cada vértice de $V(T)\backslash X$ pertenece a un $A(v)$ para algún $v \in X$ o pertenece a $B(X)$. Cada conjunto $A(v) \cup \{v\}$, con $v \in X$, tiene número crómatico a lo sumo $c + ph$, y $\chi(B(X)) \leq c$ ya que T es $(\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2)$)-libre. Entonces, $\chi(T) \leq |X|(c+ph) + c \leq ph^2 + c(h+1)$, tal y como se requiere.

Si $T|P$ fuera $\mathcal{H}_2$-libre, se tiene que $\chi(P) \leq c$ y $\chi(Q) \leq c$, pero entonces $\chi(T) \leq 2c$ y, por tanto, el lema también se verifica. $\square$

Utilizando el Lema 3.7, podemos deducir el siguiente lema por inducción en s.

Lema 4.9 *Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dos familias de torneos, tales que cada elemento de $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ tiene como máximo $h \geq 1$ vértices. Sea T un torneo $(\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2)$-libre tal que para $i = 1, 2$, cada subtorneo $\mathcal{H}_i$-libre de T tiene número cromático a lo sumo c. Sea $r \geq 1$ y supongamos que*

- *T no contiene ninguna $(r+1)$-montaña, y*
- *cada subtorneo de T que no contiene una r-montaña tiene número cromático a lo sumo p.*

Entonces, $\chi(T) \leq 2^{r-1}(ph^2 + c(h+3))$.

Demostración: Consideramos la función f tal que, $f(1) = 0$ y para $s \geq 2$, $f(s) = 2^{s-2}(ph^2 + c(h+3)) - 2c$. Vamos a probar por inducción en s que para $1 \leq s \leq r+1$, si $X \subseteq V(T)$ contiene ningún (r,s)-clique, entonces $\chi(X) \leq f(s)$. Para $s = 1$, todo torneo en el cuál no esté contenido un $(r,1)$-clique, no tiene vértices y, por tanto, $\chi(X) = 0 \leq 0 = f(1)$. Suponemos cierto para $s-1$, es decir, se verifica que $\chi(X) \leq f(s-1)$ para todo $X \subseteq V(T)$ que no contenga un $(r, s-1)$-clique. Veamos si se cumple para s. Por el Lema 4.7, solo hace falta comprobar que $f(s) \geq \text{máx}\{2f(s-1) + 2c, ph^2 + c(h+1)\}$. Es claro que

$$2^{s-2}(ph^2 + c(h+3)) - 2c \geq \text{máx}\{2f(s-1) + 2c, ph^2 + c(h+1)\},$$

ya que,

$$\begin{aligned} 2^{s-2}(ph^2 + c(h+3)) - 2c &\geq 2(2^{s-3}(ph^2 + c(h+3)) - 2c) + 2c \\ \cancel{2^{s-2}(ph^2 + c(h+3))} - 2c &\geq \cancel{2^{s-2}(ph^2 + c(h+3))} - 4c + 2c \\ \cancel{-2c} &\geq \cancel{-2c} \\ 0 &\geq 0, \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} 2^{s-2}(ph^2 + c(h+3)) - 2c &\geq ph^2 + c(h+1) \\ 2^{s-2}(ph^2) + 2^{s-2}(ch) + 2^{s-2}(3c) - 2c &\geq ph^2 + ch + c, \end{aligned}$$

que se verifica para $s \geq 2$ (la igualdad se da con $s = 2$).

Dado que T no contiene ninguna $(r+1)$-montaña y, en consecuencia, ningún $(r, r+1)$-clique, se tiene que $\chi(T) \leq f(r+1)$, es decir, $\chi(T) \leq 2^{r-1}(ph^2 + c(h+3))$. $\square$

Podemos obtener el siguiente resultado por inducción en r.

Lema 4.10 *Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dos familias de torneos, tales que cada elemento de $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ tiene como máximo $h \geq 3$ vértices. Sea T un torneo $(\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2)$-libre tal que para $i = 1, 2$, cada subtorneo $\mathcal{H}_i$-libre de T tiene número cromático a lo sumo c. Para $r \geq 1$, si T no contiene una $(r+1)$-montaña, se cumple que $\chi(T) \leq 2^{\frac{1}{2}r(r-1)+1}h^{2r-2}c$.*

Demostración: Sea f una función tal que $f(1) = 1$ y para $r \geq 2$, $f(r) = 2^{\frac{1}{2}r(r-1)+1}h^{2r-2}c - c$. Vamos a probar por inducción en r que si T no contiene ninguna $(r+1)$-montaña, entonces $\chi(T) \leq f(r)$. Para $r = 1$, todo torneo que no contiene una 2-montaña es transitivo y por tanto, se verifica que $\chi(T) \leq 1 = f(1)$ (recordemos que toda 2-montaña contiene una copia de $\Delta(1,1,1)$). Supongamos cierto para $r-1$, es decir, $\chi(T) \leq f(r-1)$ ya que T no contiene una r-montaña. Probemos que $\chi(T) \leq f(r)$. Por el Lema 4.8, es suficiente demostrar que $f(r) \geq 2^{r-1}(f(r-1)h^2 + c(h+3))$.

$$
\begin{aligned}
2^{\frac{1}{2}r(r-1)+1}h^{2r-2}c - c &\geq 2^{r-1}(f(r-1)h^2 + c(h+3)) \\
2^{\frac{1}{2}r(r-1)+1}h^{2r-2}c - c &\geq 2^{r-1}((2^{\frac{1}{2}(r-1)(r-2)+1}h^{2(r-1)-2}c - c)h^2 + c(h+3)) \\
2^{\frac{1}{2}r(r-1)+1}h^{2(r-1)}c - c &\geq (2^{\frac{1}{2}(r^2-r+2)}h^{2(r-1)}c - 2^{r-1}ch^2) + 2^{r-1}c(h+3)) \\
-c &\geq -2^{r-1}ch^2 + 2^{r-1}c(h+3) \\
-c &\geq -2^{r-1}c(h^2 - (h+3)) \\
\cancel{c} &\leq 2^{r-1}\cancel{c}(h^2 - h - 3) \\
1 &\leq h^2 - h - 3,
\end{aligned}
$$

pues $h \geq 3$. Por tanto, queda probado el Lema 4.9.

Después de la colección de resultados que hemos demostrado, estamos en condiciones de probar el Lema 4.2.

Demostración del Lema 4.2: Si suponemos que T no contiene una $(2c+1)$-montaña, utilizando el Lema 4.8 con $r = 2c$ y $h = c$, se tiene que

$$\chi(T) \leq 2^{c(2c-1)+1}c^{4c-1} = 2^{2c^2-c+1}c^{4c-1} \leq (2c)^{4c^2},$$

como queríamos probar.

En cambio, si suponemos que T contiene una $(2c+1)$-montaña, por el Lema 4.6, existe $M \subseteq V(T)$ con $|M| \leq (2c+1)!^2$ y $\chi(M) \geq 2c+1$. Sea P el conjunto de todos los vértices $v \in V(T)\backslash M$ tal que $T|(A(v) \cap M)$ contiene un elemento de la familia $\mathcal{H}_2$, y sea Q el conjunto de todos los $v \in V(T)\backslash M$ tal que $T|(B(v) \cap M)$ contiene un elemento de la familia $\mathcal{H}_1$. Cada vértice $v \in V(T) \cap M$ pertenece a la unión $P \cup Q$ ya que si $v \notin P$, entonces $\chi(A(v) \cap M) \leq c$, y si $v \notin Q$, entonces $\chi(B(v) \cap M) \leq c$. No se cumplen ambas desigualdades a la vez, debido a que $\chi(M) \leq 2c+1$.

Para cada subconjunto $Y \subseteq M$ con $|Y| = c$, si $T|Y$ contiene un elemento de la familia $\mathcal{H}_2$, decimos que $P(Y) = P \cap B(Y)$, en caso contrario $P(Y) = \emptyset$. Vamos a probar que $\chi(P(Y)) \leq c$ independiente de la elección de Y. Si $T|Y$ contiene un elemento de $\mathcal{H}_2$, entonces, $T|P(Y)$ es $\mathcal{H}_1$-libre y por tanto, $\chi(P(Y)) \leq c$ ya que T es $(\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{H}_2)$-libre. Por contra, si $T|Y$ es $\mathcal{H}_2$-libre, entonces, $P(Y) = \emptyset$ y se cumple que $\chi(P(Y)) \leq c$. Por tanto, para cada $Y \subseteq M$ con $|Y| = c$, se tiene que, $\chi(Y \cup P(Y)) \leq c$.

Como cada vértice de $P \cup M$ pertenece a $Y \cup P(Y)$ para alguna elección de Y y existen a lo sumo $|M|^c$ elecciones de Y, unido a que $|M| \leq (2c+1)!^2 \leq (2c+1)^{4c-1}$, se tiene que, $\chi(M \cup P) \leq c(2c)^{c(4c-1)}$ y que $\chi(M \cup Q) \leq c(2c)^{c(4c-1)}$.

En conclusión, $\chi(T) \leq (2c)^{c(4c-1)+1} \leq (2c)^{4c^2}$, ya que $4c^2 \geq 4c^2 - c + 1$, por lo que queda probado el Lema 4.2 y el resultado inicial del capítulo. $\square$

Capítulo 5

Generando un héroe

En el transcurso de este capítulo completaremos la prueba de la Proposición 2.19, demostrando que si H es un héroe y dado un entero $k \geq 1$, entonces $\Delta(H, k, 1)$ y $\Delta(H, 1, k)$ es un héroe. Por simetría, solo sería necesario probar uno de los dos casos. Para ayudarnos en este proceso, vamos a dar una colección de lemas que serán de gran utilidad.

Lema 5.1 *Sea T un torneo, y sea $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una partición de $V(T)$. Supongamos que*

- $\chi(X_i) \leq d$ *para* $1 \leq i \leq n$, *y*
- *para* $1 \leq i < j \leq n$, *si existe una arista uv con $u \in X_j$ y $v \in X_i$, entonces*

$$\chi(X_i \cup X_{i+1} \cup ... \cup X_j) \leq d.$$

Entonces se tiene que $\chi(T) \leq 2d$.

Demostración: Suponemos que $n \geq 1$. Vamos a definir $1 \leq k_1, ..., k_t \leq n$, con $t \geq 1$. Tomamos $k_1 = 1$ y, por inducción, si existe j cumpliendo que $k_s < j \leq n$ y que

$$\chi\left(\bigcup\{X_i \mid k_s \leq i \leq j\}\right) > d,$$

entonces tomamos como k_{s+1} el menor de esos j y, en caso contrario, hacemos $t = s$.

Para $1 \leq s < t$, sea $Y_s = \bigcup\{X_i \mid k_s \leq i < k_{s+1}\}$ y sea $Y_t = \bigcup\{X_i \mid k_t \leq i \leq n\}$. Se tiene que $Y_1, ..., Y_t$ es una colección de conjuntos disjuntos dos a dos y su unión es $V(T)$.

Llegados a este punto, necesitamos el siguiente resultado auxiliar. Para $1 \leq s \leq t$, $\chi(Y_s) \leq d$ y para $2 \leq s \leq t-1$, no existe ninguna arista desde $Y_{s+1} \cup ... \cup Y_t$ hacia $Y_1 \cup ... \cup Y_{s-1}$.

Aplicando que $\chi(X_{k_s}) \leq d$, por la definición de k_{s+1}, se tiene que $\chi(Y_s) \leq d$. La segunda parte del resultado puede probarse mediante reducción al absurdo. Supongamos que $2 \leq s \leq t-1$ y que existe una arista uv con $u \in X_j$ para algún $j \geq k_{s+1}$ y $v \in V_h$ para algún $h < k_s$. Entonces, por hipótesis, $\chi\left(\bigcup\{X_i \mid h < i \leq j\}\right) \leq d$, pero la definición de k_{s+1} nos dice que $\chi\left(\bigcup\{X_i \mid k_s \leq i \leq k_{s+1}\}\right) > d$, por lo que hemos llegado a una contradicción.

Una vez probado este resultado auxiliar, podemos considerar los conjuntos $\bigcup\{Y_i \mid 1 \leq i \leq t,\ i \text{ es impar}\}$ y $\bigcup\{Y_i \mid 1 \leq i \leq t,\ i \text{ es par}\}$. Ambos tienen número cromático a lo sumo d, veamos porque ocurre esto.

Sabemos que $\chi(Y_i) \leq d$ $\forall i$ impar, entonces, existen particiones en d subconjuntos transitivos de cada Y_i. Supongamos que dichas particiones son $Y_i^1, ..., Y_i^d$. Debemos preguntarnos si $\bigcup_{i \text{ impar}} Y_i^j$, con $j = 1, ..., d$, es transitivo. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un $j \in \{1, ..., d\}$ tal que $\bigcup_{i \text{ impar}} Y_i^j$ no es transitivo. Entonces, existe $i_1 < i_2 < i_3$ y v_1, v_2 y v_3 tales que $v_k \in Y_{i_k}^k$, con v_1 dominando a v_2, v_2 dominando a v_3 y v_3 dominando a v_1. Sea $s = i_3 - 1$ e $i_1 \leq s-1$, entonces, $v_1 \in Y_1 \cup ... \cup Y_{s-1}$ y $v_3 \in Y_s \cup ... \cup Y_t$, pero por el resultado probado anteriormente, hemos llegado a una contradicción, ya que no existe ninguna arista desde $Y_{s+1} \cup ... \cup Y_t$ hacia $Y_1 \cup ... \cup Y_{s-1}$. Podemos razonar de forma análoga para $\bigcup\{Y_i \mid 1 \leq i \leq t,\ i \text{ es par}\}$, por tanto, $\chi(T) \leq 2d$. $\square$

Para proseguir nuestro estudio, debemos recordar el siguiente lema, recogido en [5].

Lema 5.2 *Para cada entero $k \geq 1$, todo torneo con al menos 2^{k-1} vértices, contiene una copia del torneo T_k.*

Demostración: Para demostrar este resultado, tenemos que acotar un entero $k = k(n) > 0$ a partir del cuál, todo torneo de al menos n vértices contiene un T_k. La prueba concluiría con una cota inferior de k, pero también incluiremos la demostración de una cota superior.

Para encontrar la cota inferior seguiremos el siguiente procedimiento. Dado un torneo T con n vértices, reordenamos sus vértices según su valencia de salida en orden decreciente, de forma $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_n$. Por un resultado de [2], sabemos que $\sum_{i=1}^{n} s_i = \binom{n}{2}$, entonces $s_1 \geq [\frac{n}{2}]$. Queremos construir un conjunto transitivo de $[\log_2 n] + 1$ vértices. Sea p_1 el vértice de valencia de salida s_1 y utilizando inducción podemos encontrar un conjunto transitivo de $\left[\log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right] + 1$ vértices dentro del subtorneo de $\frac{n}{2}$ formado por los vértices dominados por p_1. La unión de este conjunto junto con p_1 genera el conjunto transitivo de $[\log_2 n] + 1$ requerido. Por tanto, $[\log_2 n] + 1 \leq k$ y, en consecuencia, para un torneo T de n vértices con n mayor que 2^{k-1}, se tiene que T contiene un T_k.

Si queremos encontrar la cota superior, asumimos que todo torneo contiene un conjunto transitivo de k vértices. Entonces, dicho subconjunto transitivo tiene que ser uno de los $\binom{n}{k}$ subconjuntos de k vértices del torneo T. Cualquiera de estos subconjuntos puede ser ordenado de $k!$ formas. Si ya tenemos fijado el conjunto transitivo, podemos encontrarlo en $2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$ torneos, ya que un torneo queda definido por la orientación de sus $\binom{n}{2}$ vértices, $\binom{k}{2}$ de las cuáles ya están fijadas. Por tanto, se tiene la siguiente desigualdad:

$$\binom{n}{k} k! 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}} \geq 2^{\binom{n}{2}}.$$

Utilizando la aproximación de Stirling, $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$, se tiene que $n^k \geq 2^{\binom{k}{2}}$. Podemos deducir la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned}
n^k &\geq 2^{\binom{k}{2}} \\
k \log_2 n &\geq \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} \\
2 \log_2 n &\geq k - 1 \\
2 \log_2 n + 1 &\geq k.
\end{aligned}$$

Por tanto, la cota superior es $k \leq [2 \log_2 n] + 1$. $\square$

La Definición 3.3 puede considerarse desde otra perspectiva.

Definición 5.3 *Sea $(X_1, ..., X_n)$ una colección de subconjuntos de $V(T)$, dos a dos disjuntos. Diremos que uv es una arista de retroceso de T (con respecto a esa colección) si $u \in X_j$ y $v \in X_i$ para algún i, j con $1 \leq i < j \leq n$.*

Definición 5.4 *El grafo B con un conjunto de vértices de $X_1 \cup ... \cup X_n$ y con aristas las aristas de retroceso de T es el grafo **backedge**.*

Lema 5.5 *Sea $k \geq 1$, sea T un torneo $(\Delta(H, 1, k))$-libre tal que todo subtorneo H-libre de T tiene número cromático a lo sumo c. Sea $(X_1, ..., X_n)$ una partición de $V(T)$, tal que, para $1 \leq i \leq n$, $\chi(X_i) \leq c$ y para cada $v \in X_i$, $\chi(A(v) \cap (X_1 \cup ... \cup X_{i-1})) \leq c$ y $\chi(B(v) \cap (X_{i+1} \cup ... \cup X_n)) \leq c$. Entonces, $\chi(T) \leq c(k+3)2^k$.*

Demostración: Para cada arista de retroceso uv de T, definimos su amplitud como $j - i$ con $u \in X_j$ y $v \in X_i$. Para cada vértice u, consideramos F_u el conjunto de todas las aristas de retroceso con u como inicio si existen a lo sumo $2^{k-1} - 2$ aristas de retroceso con inicio en u. En caso contrario, F_u es el conjunto de $2^{k-1} - 1$ aristas de retroceso con la mayor amplitud posible. Sea $F = \bigcup\{F_u \mid u \in T\}$. Vamos a probar que para cada arista de retroceso $uv \notin F$, si $u \in X_j$ y $v \in X_h$, entonces, $\chi(\bigcup\{X_i \mid h < i \leq j\}) \leq c(k+3)$.

Consideremos una arista de retroceso $uv \not{i}nF$, con $u \in X_j$ y $v \in X_u$, y sea $W = \bigcup\{X_i \mid h < i \leq j\}$. Como $uv \notin F_u$ por la definición de F_u, se tiene que $|F_u| = 2^{k-1} - 1$. El conjunto de todos los finales de aristas de $F_u \cup \{uv\}$ esta formado por 2^{k-1} elementos y, por tanto, contiene un torneo isomorfo a T_k (Lema 5.2). Sea Y el conjunto de vértices de dicho torneo, por la definición de F_u, se tiene que $Y \subseteq X_1 \cup ... \cup X_h$.

Sea P el conjunto de todos los vértices en $W \backslash X_j$ que son dominados por u o dominan un elemento de Y, y sea $Q = W \backslash (P \cup X_j)$. Si p pertenece a P y domina a $y \in Y$, entonces, la arista py es una arista de retroceso, ya que $Y \subseteq X_1 \cup ... \cup X_n$ y $p \in X_i$ con $h < i < j$. Para cada y, el conjunto de todos los vértices $p \in P$ que dominan a y tiene número cromático a lo sumo c, por hipótesis. Análogamente, si $p \in P$ y u domina a p, entonces, up es una arista de retroceso, por lo que el conjunto de dichos p tiene número cromático a lo sumo c. Por tanto, $\chi(P) \leq c(|Y| + 1) = c(k+1)$. Por otra parte, $T|Q$ no contiene a H, ya que si fuera así, la copia de H junto con $Y \cup \{u\}$ formaría $\Delta(H, 1, k)$, lo que es una contradicción con que T es $\Delta(H, 1, k)$-libre. Así, Q es H-libre y $\chi(Q) \leq c$.

Por hipótesis, tenemos que $\chi(X_j) \leq c$, entonces, $\chi(\bigcup\{X_i \mid h < i \leq j\}) \leq c(k+3)$.

Sea B el grafo con conjunto de vértices $V(T)$ en el que que $u, v \in V(T)$ son adyacentes si $uv \in F$ o $vu \in F$. Como cada subgrafo de B tiene un vértice de valencia a lo sumo $2^{k-1} - 1$ (el vértice en X_i con i máximo), se tiene que B es 2^{k-1}-coloreable. Si elegimos una partición de $V(T)$ en 2^{k-1} conjuntos estables, por ejemplo, $(Z_1, ..., Z_{2^{k-1}})$. Entonces, si aplicamos a $X_1 \cup Z_i, X_2 \cap Z_i, ..., X_n \cap Z_i$ lo probado anteriormente en esta demostración y por el Lema 5.1 para cada Z_i, tenemos que, $\chi(Z_i) \leq 2c(k+3)$ y, por tanto, $\chi(T) \leq c2^k(k+3)$. $\square$

Para proseguir nuestro estudio, debemos introducir el concepto de **joya**.

Definición 5.6 *Sean H y K dos torneos y sea $a \geq 1$. Decimos que un subconjunto $X \subseteq V(T)$, con $|X| = a$, es una (a, H, K)-**joya** en el torneo T si para cada partición (A, B) de X, se tiene que $T|A$ contiene a H o $T|B$ contiene a K. Una **cadena de** (a, H, K)-**joyas** de longitud t es una colección $Y_1, ..., Y_t$ de (a, H, K)-joyas, dos a dos disjuntas y con $Y_i \Rightarrow Y_{i+1}$, para $1 \leq i < t$.*

Lema 5.7 *Sean H y K dos torneos, y sea $a \geq 1$. Entonces, existen enteros $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ que cumplen la siguiente propiedad. Para cada torneo T $\Delta(H, 1, K)$-libre, si*

- *c_1 es tal que todo subtorneo H-libre de T tiene número cromático a lo sumo c_1, y para todo subtorneo K-libre de T tiene número cromático a lo sumo c_1, y*
- *c_2 es tal que todo subtorneo de T que no contiene una cadena de (a, H, K)-joyas de longitud cuatro tiene número cromático a lo sumo c_2,*

entonces T tiene número cromático a lo sumo $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$.

Demostración: Sean $k = \text{máx}(|V(H)|, |V(T)|)$, $b = 2a^{k+1}$, $\lambda_1 = (3bk+2b+1)(k+3)2^k$ y $\lambda_2 = (k+1)(k+3)2^k$. Vamos a demostrar que estas elecciones verifican el Lema. Asumimos que T contiene una cadena de (a, H, K)-joyas de longitud cuatro, ya que en caso contrario, $\chi(T) \leq c_2$ por hipótesis y habríamos terminado. Vamos a elegir $X_1, ..., X_n$, una cadena de (a, H, K)-joyas, con máximo $n \geq 1$ (y por tanto, $n \geq 4$). Sean $X = X_1 \cup ... \cup X_n$ y $W = V(T) \backslash X$. Conviene recordar que $A(v)$ denota el conjunto de vecinos de salida del vértice v y que $B(v)$ es el conjunto de vecinos de entrada. Vamos a probar que

(1) si $v \in X_i$, entonces $A(v) \cap X_h$ es K-libre para $h < i$ y, por tanto, $T|(B(v) \cap X_h)$ contiene a H. También, $B(v) \cap X_j$ es H-libre para $j > i$, y entonces $T|(A(v) \cap X_j)$ contiene a K.

Supongamos que existe un $h < i$ tal que $T|(A(v) \cap X_h)$ contiene a K, y tomamos el h máximo que lo cumpla. Entonces, $h \leq i-2$, ya que $X_{i-1} \Rightarrow X_i$. Por tanto, $h + 1 < i$, y por la elección de h, tenemos que $T|(A(v) \cap X_{h+1})$ no contiene a K. Por consiguiente, $T|(B(v) \cap X_{h+1}$ contiene a H, debido a que X_{h+1} es una (a, H, K)-joya. Entonces la copia de K en X_h, la copia de H en X_{h+1} y el vértice v inducen una copia de $\Delta(H, 1, K)$, lo que sería una contradicción por hipótesis. Luego, tenemos la primera parte de **(1)** y la segunda se tiene por simetría.

Otro resultado auxiliar que debemos probar es el siguiente:

(2) para cada $v \in W$, existe i, con $1 \leq i \leq n$, tal que

- para $1 \leq h < i$, $A(v) \cap X_h$ es K-libre y, por tanto, $T|(B(v) \cap X_h)$ contiene a H,
- para $i < j \leq n$, $B(v) \cap X_j$ es H-libre, entonces $T|(A(v) \cap X_j)$ contiene a K.

Sean P y Q dos conjuntos de $i \in \{1, ..., n\}$ tales que $T|(B(v) \cap X_i)$ contiene a H y $T|(A(v) \cap X_i)$ contiene a K, respectivamente. Ya que cada X_i es una (a, H, K)-joya, se tiene que $P \cup Q = \{1, ..., n\}$. Supongamos que existen h, j con $1 \leq h < j \leq n$, $h \in Q$ y $j \in P$, elegimos aquellos h, j con $j - h$ mínimo. Si $j > h + 1$, entonces, $h + 1 \notin Q$ (si no fuera así, el par $j, h + 1$ tendría menor diferencia), de igual forma, $h+1 \notin P$ (pues, en caso contrario, h, $h+1$ tendría menor diferencia), lo que sería una contradicción. Entonces, $j = h+1$; pero dado que $X_h \Rightarrow X_{h+1}$, la copia de K en $T|(A(v) \cap X_h)$, la copia de H en $T|(B(v) \cap X_{h+1})$ y el vértice v, forman una copia de $\Delta(H, 1, K)$, lo que vuelve a ser una contradicción. Con esto, queda probado que no existen h, j con $1 \leq h < j \leq n$, $h \in Q$ y $j \in P$. Entonces, para algún $i \in \{1, ..., n\}$, todo $h < i$ pertenece a $P \backslash Q$ y todo $j > i$ pertenece a $Q \backslash P$, por lo que queda probado **(2)**.

Para cada $v \in W$, sea $c(v)$ el valor de i dado por **(2)**. Si podemos elegir varias opciones para $c(v)$, elegimos $c(v)$ tal que v tiene un vecino de salida en $X_{c(v)}$ y un vecino de entrada en $X_{c(v)}$, si es posible. Sea W_i el conjunto de todos los $v \in W$ con $c(v) = i$. Para $1 \leq i \leq n$, sea $Z_i = X_i \cup W_i$, entonces $Z_1, ..., Z_n$ son disjuntos y tienen unión $V(T)$. El siguiente resultado es necesario para proseguir con la prueba:

(3) si $i > 1$, $v \in W_i$ y $v \Rightarrow X_i$, entonces $X_{i-1} \Rightarrow v$; y si $i < n$, $v \in W$ y $X_i \Rightarrow v$, entonces $v \Rightarrow X_{i+1}$.

Recordando **(1)**, se tiene que $B(v) \cap X_i$ es H-libre y, en consecuencia, $i-1$ es una elección alternativa de $c(v)$. Como v no tiene vecinos de entrada en X_i, nuestra elección de $c(v) = i$ implica que v no contiene a la vez un vecino de salida y de entrada en X_{i-1}. Pero $T|(B(v) \cap X_{i-1})$ si contiene a H, por lo que v tiene un vecino de entrada en X_{i-1} y, por tanto, v no tiene vecinos de salida en X_{i-1}, y queda probado **(3)**.

Otro resultado requerido para la demostración es el siguiente:

(4) para $1 \leq i \leq n$, $\chi(Z_i) \leq 2bc_1 + c_2$.

Fijamos un i entre 1 y n, sea P el conjunto de todos los $v \in Z_i$ con un vecino de salida en X_{i-2}, si $i \geq 3$, y sea $P = \emptyset$, si $i \leq 2$. Sea P_1 el conjunto de los $v \in P$ tales que $T|(B(v) \cap X_{i-1})$ contiene a K, y sea $P_2 = P \backslash P_1$.

Si $v \in P_1$, entonces v tiene un vecino de salida en X_{i-2} y existe un $Y \subseteq X_{i-1}$ con $Y \Rightarrow v$ tal que $T|Y$ es isomorfo a K. Para cada $Y \subseteq X_{i-1}$ con $T|Y$ isomorfo a K, el conjunto de todos los $v \in P_1$, con $Y \Rightarrow v \Rightarrow x$ es H-libre, recordemos que T es $\Delta(H, 1, K)$-libre y, en consecuencia, el conjunto de todos los $v \in P_1$, con $Y \Rightarrow v \Rightarrow x$, tiene número cromático a lo sumo c_1. Como existen a^{k+1} formas de elegir el par (x, Y), ya que existen a lo sumo a elecciones de x en X_{i-2} y a^k elecciones de $Y \subseteq X_{i-1}$, se tiene que $\chi(P_1) \leq a^{k+1}c_1$.

Si $v \in P_2$, entonces $T|(A(v) \cap X_{i-1})$ contiene a H, por lo que existe un $Y \subseteq X_{i-1}$ tal que $T|Y$ es isomorfo a H y v domina a todos los vértices de Y, en particular, $v \in W_i$. Dado que $v \notin P_1$ y, por tanto, $X_{i-1} \not\Rightarrow v$, se tiene que, existe un $x \in X_i$ que domina a v por **(2)**. Para cada $Y \subseteq X_{i-1}$ con $T|Y$ isomorfo a H y para cada $x \in X_i$, el conjunto de todos los $v \in P_2$ con $x \Rightarrow y \Rightarrow Y$ es K-libre, debido a que T es $\Delta(H, 1, K)$-libre. En consecuencia, dicho conjunto tiene número cromático a lo sumo c_1, por lo que, al existir, como máximo, a^{k+1} elecciones del par (x, Y), se tiene que, $\chi(P_2) \leq a^{k+1}c_1$. Si unimos que $\chi(P_1) \leq a^{k+1}c_1$ y $\chi(P_2) \leq a^{k+1}c_1$, entonces, $\chi(P) = 2a^{k+1}c_1 =$

bc_1.

Sea Q el conjunto de todos los $v \in Z_i$ con un vecino de entrada en X_{i+2}, si $i \leq n-2$, y sea $Q = \emptyset$ si $i \geq n-1$. Siguiendo el mismo razonamiento que el utilizado para P, se tiene que, $\chi(Q) \leq bc_1$. Consideramos ahora el conjunto R de todos los vértices $v \in Z_i$ tales que, o bien $i \leq 1$ o $X_{i-2} \Rightarrow v$, o bien se tiene $i \geq n-1$ o $v \Rightarrow X_{i+2}$. Supongamos que $T|R$ contiene una cadena de (a, H, K)-joyas de longitud cuatro, denotadas por Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, respectivamente. Ya que $n \geq 4$, se tiene que $i \geq 3$ o $i \leq n-2$, y debido a que podemos argumentar de forma simétrica, asumimos que $i \leq n-2$. Si además se tiene que $i \geq 3$, entonces la secuencia $X_1, ..., X_{i-2}, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, X_{i+2}, ..., X_n$ contradice que n sea máximo, ya que podríamos elegir $n' = n+2$. Si $i \leq 2$, entonces, la secuencia $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, X_{i+2}, ..., X_n$ vuelve a contradecir el hecho de que n es máximo, por lo que $T|R$ no contiene una cadena de (a, H, K)-joyas de longitud cuatro. En consecuencia, $\chi(R) \leq c_2$, por hipótesis. Entonces, como $Z_i = P \cup Q \cup R$, se verifica **(4)**, ya que, $\chi(Z_i) \leq \chi(P) + \chi(Q) + \chi(R) = bc_1 + bc_1 + c_2 = 2bc_1 + c_2$.

El penúltimo resultado necesario para la conclusión de la prueba es el siguiente:

(5) Para cada $v \in X_i$, se tiene que

$$\chi(A(v) \cap (Z_1 \cup Z_2 \cup ... \cup Z_{i-1})) \leq 3bc_1 + c_2,$$

y

$$\chi(B(v) \cap (Z_{i+1} \cup Z_{i+2} \cup ... \cup Z_n)) \leq 3bc_1 + c_2.$$

Debido a la simetría de las afirmaciones, es suficiente probar la primera parte. Para $i = 1$ es trivial, por tanto, supondremos que $i \geq 2$. Sea $P = A(v) \cap (Z_1 \cup Z_2 \cup ... \cup Z_{i-2})$. Sea P_1 el conjunto de todos los $w \in P$ tales que $T|(A(w) \cap X_{i-1})$ contiene a H y sea $P_2 = P \backslash P_1$. Entonces, para cada $w \in P_1$, existe un $Y \subseteq X_{i-1}$ tal que $w \Rightarrow Y$ y $T|Y$ isomorfo a H. Para cada elección de Y, el conjunto de todos los w cumpliendo lo anterior es K-libre y, por tanto, tiene número cromático a lo sumo c_1 (volvemos a recordar que T es $\Delta(H, 1, K)$-libre). Como existen a lo sumo a^k elecciones de Y, se tiene que, $\chi(P_1) \leq a^k c_1$.

En cambio, para cada $w \in P_2$, existe $Y \subseteq X_{i-1}$ tal que $Y \Rightarrow w$ y $T|Y$ isomorfo a K. Como $w \in P$, i tiene que ser estrictamente mayor que 2; y

$X_{i-2} \not\Rightarrow w$, ya que, si $w \in Z_{i-2}$, entonces, $w \not\Rightarrow X_{i-1}$ y por **(3)**, $X_{i-2} \not\Rightarrow w$, mientras que $w \in Z_h$ para algún $h < i-2$. Por tanto, existe un $x \in X_{i-2}$ tal que w domina a x. Para cada elección de x e Y, el conjunto de todos los $w \in P_2$ tales que $x \Rightarrow Y$ es H-libre y, en consecuencia, tiene número cromático a lo sumo c_1. Como existen a^{k+1} elecciones a lo sumo del par (x, Y), se tiene que $\chi(P_2) \leq a^{k+1}c_1$.

Por consiguiente, $\chi(P) \leq \chi(P_1) + \chi(P_2) = a^k c_1 + a^{k+1}c_1 \leq 2a^{k+1}c_1 = bc_1$. Si añadimos el hecho de que $\chi(A(v) \cap Z_{i-1}) \leq 2bc_1 + c_2$ por **(4)**, entonces, $\chi(A(v) \cap (Z_1 \cup Z_2 \cup ... \cup Z_{i-1})) \leq bc_1 + 2bc_1 + c_2 = 3bc_1 + c_2$, como queríamos probar.

El último resultado necesario para completar la prueba nos dice que,

(6) para cada $v \in W_i$, se tiene que,

$$\chi(A(v) \cap (Z_1 \cup Z_2 \cup ... \cup Z_{i-1})) \leq (3bk + 2b + 1)c_1 + (k+1)c_2,$$

y

$$\chi(B(v) \cap (Z_{i+1} \cup Z_{i+2} \cup ... \cup Z_n)) \leq (3bk + 2b + 1)c_1 + (k+1)c_2.$$

Al igual que ocurre con **(5)**, es suficiente probar la primera parte por simetría, también sumiremos que $i \geq 2$. Elegimos un $Y \subseteq X_{i-1}$ tal que $T|Y$ es isomorfo a H e $Y \Rightarrow v$. Sea $P = A(v) \cap (Z_1 \cup ... Z_{i-2})$, entonces el conjunto de todos los w pertenecientes a P tal que $w \Rightarrow Y$ es K-libre y, en consecuencia, tiene número cromático a lo sumo c_1. Además, para cada $y \in Y$, el conjunto de los $w \in P$ que son dominados por y tiene número cromático a lo sumo $3bc_1 + c_2$ por **(5)**. Por tanto, $\chi(P) \leq c_1 + k(3bc_1 + c_2)$. A partir de **(4)**, se deduce que $\chi(A(v) \cap (Z_1 \cup Z_2 \cup ... \cup Z_{i-1})) \leq c_1 + k(3bc_1 + c_2) + 2bc_1 + c_2$, lo que prueba **(6)**.

Si consideramos la secuencia $Z_1, ..., Z_n$ y aplicamos los resultados **(4)**, **(5)**, **(6)** y el Lema 5.5, se tiene que,

$$\chi(G) \leq (k+3)2^k((3bk + 2b + 1)c_1 + (k+1)c_2),$$

lo que concluye la prueba del Lema. □

Llegados a este punto, podemos demostrar el principal resultado del capítulo.

Teorema 5.8 *Si H es un héroe y K es un torneo transitivo, entonces, $\Delta(H,1,K)$ y $\Delta(H,K,1)$ son héroes.*

Demostración: Sean $k = |V(K)|$ y c_1 tal que todo torneo H-libre tiene número cromático a lo sumo c_1. Podemos suponer que $c_1 \geq 2^k$. Por el Lema 5.2, sabemos que todo torneo K-libre tiene a lo sumo 2^k vértices y, por tanto, número cromático a lo sumo c_1. Sea $a = |V(H)|2^k$. Vamos a demostrar que todo torneo que no contenga una (a,H,K)-joya, tiene número cromático a lo sumo $2^k|V(H)| + c_1$.

Sea T un torneo que no contiene una (a,H,K)-joya. Elegimos una colección de subtorneos $H_1, ..., H_n$ de T, disjuntos dos a dos e isomorfos a H, con n máximo, y sea $W = \bigcup(V(H_i))$. Si $n \geq 2^k$, entonces, $V(H_1) \cup ... \cup V(H_{2^k})$ es una (a,H,K)-joya por el Lema 5.2 y, por tanto, $n < 2^k$. Se tiene que, $\chi(W) \leq |W| \leq 2^k|V(H)|$ y $\chi(T \backslash W) \leq c_1$, ya que $T \backslash W$ es H-libre y, en consecuencia, $\chi(T) \leq 2^k|V(H)| + c_1$.

Uniendo este argumento, junto con el Lema 4.2, donde $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ es la familia de todas las (a,H,K)-joyas, tenemos que, existe un c_0 tal que todo torneo que no contenga una cadena de (a,H,K)-joyas de longitud dos, tiene número cromático a lo sumo c_0. Utilizando de nuevo el Lema 4.2, esta vez con $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ la familia de todas las cadenas de (a,H,K)-joyas de longitud dos, también existe un c_2 tal que todo torneo que contiene una cadena de (a,H,K)-joyas de longitud cuatro tiene número cromático a lo sumo c_2. Usando el Lema 5.7, existe un c_3 tal que todo torneo $\Delta(H,1,K)$-libre tiene número cromático a lo sumo c_3 y, por tanto, $\Delta(H,1,K)$ es un héroe. Análogamente, se tiene para $\Delta(H,K,1)$. $\square$

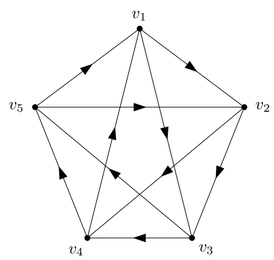
Capítulo 6

No héroes minimales

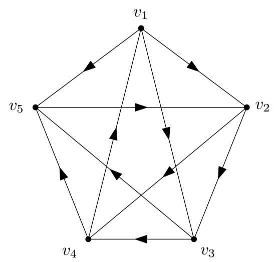
Como vimos en el Lema 2.15, todo subtorneo de un héroe es un héroe. Esta característica tan restrictiva hace que nos preguntemos que torneos minimales no son héroes. En este capítulo demostraremos que existen cinco tipos.

Notación 6.1 *Vamos a introducir los* 5 *tipos que estudiaremos.*

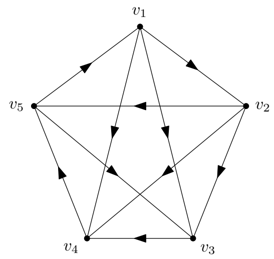
- *Sea* H_1 *el torneo de* 5 *vértices* $v_1, ..., v_5$*, donde* v_i *domina a* v_{i+1} *y a* v_{i+2} *tomando módulo* 5 *con* $1 \leq i \leq 5$.



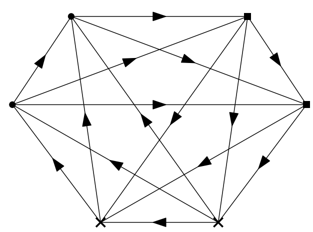
- *Sea* H_2 *el torneo obtenido tras cambiar* v_5v_1 *por* v_1v_5 *del torneo* H_1.



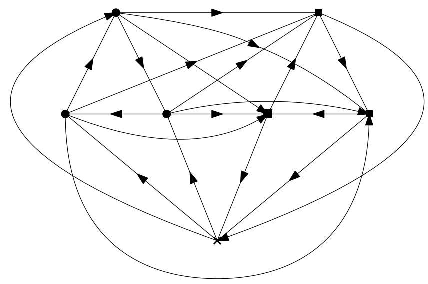
- *Sea H_3 el torneo de 5 vértices, en el cuál, el vértice v_i domina a v_j con $1 \leq i < j \leq 4$, y v_5 domina a v_1, y v_3 domina a v_2 y v_4.*



- *Sea H_4 el torneo trisección $\Delta(2,2,2)$.*



- *Sea H_5 el torneo definido por la trisección $\Delta(C_3, C_3, 1)$, siendo C_3 el torneo $\Delta(1,1,1)$.*



Lema 6.2 *Todo torneo fuerte, si no contiene ninguno de los torneos H_1, H_2 o H_3, admite una trisección.*

Demostración: Sea T un torneo fuerte que no contiene H_1, H_2, ni H_3, con $n > 1$ vértices. Probaremos por inducción en $n = |V(T)|$ que T admite una trisección. Se tiene que $n > 3$ ya que el torneo transitivo de 3 vértices, T_3, no admite una trisección. Razonemos por reducción al absurdo, suponiendo que T no admite una trisección, para llegar a una contradicción. Diremos que $X \subseteq V(T)$ es un conjunto homogéneo si $1 < |X| < |V(T)|$ y para cada vértice $v \in V(T)$ que no está en X, se tiene que $v \Rightarrow X$ o $X \Rightarrow v$.

Para seguir con la prueba, veamos que podemos suponer que no existen conjuntos homogéneos en T. Si existe un conjunto homogéneo $X \subseteq V(T)$, podemos elegir un $x \in X$ y considerar el torneo $T' = T|((V(T) \backslash X) \cup \{x\})$. Veamos que T' es un torneo fuerte, con más de un vértice. Si T' no fuera fuerte, entonces existiría una partición A, B de $V(T')$ con $A \Rightarrow B$ y, por ejemplo, $x \in B$. Entonces $A, B \cup X$ es una partición de $V(T)$ con $A \Rightarrow B \cup X$ por la definición de conjunto homogéneo y T no sería fuerte, lo que es una contradicción.

Por hipótesis de inducción, T' admite una trisección $\Delta(A', B', C')$, donde, por ejemplo, $x \in C'$. Entonces, $\Delta(A', B', C' \cup X)$ es una trisección del torneo original T, pero habíamos supuesto que T no admitía una trisección. Por tanto, podemos suponer que no existen conjuntos homogéneos en T.

Podemos suponer, además, que $n \geq 5$, pues todo torneo de 4 vértices tiene un conjunto homogéneo. Podemos encontrar fácilmente un conjunto homogéneo X en cada uno de los cuatro torneos de 4 vértices, salvo isomorfismo (ver Figura 6.1).

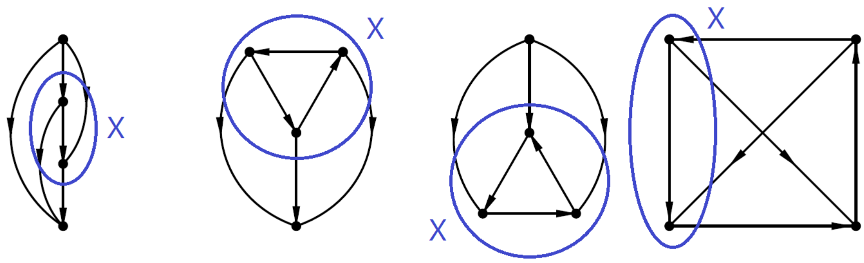


Figura 6.1: Conjuntos homogéneos en torneos de 4 vértices.

Además, T contiene un ciclo de longitud tres, ya que no es transitivo. Si T fuera transitivo, entonces contendría un conjunto homogéneo, veamos porqué ocurre esto. Sea T un torneo transitivo con vértices $v_1, ..., v_n$ ordenados en orden decreciente de sus valencias de salidas, $s_1 = n - 1$ y $s_n = 0$. Entonces, $X = \{v_2, v_3, ..., v_n\}$ es un conjunto homogéneo, ya que $v_1 \Rightarrow X$.

Como T contiene un triángulo cíclico de longitud tres, podemos elegir un subtorneo fuerte H de T con $V(H) \neq V(T)$ maximal con estas propiedades (sin conjuntos homogéneos y con al menos un C_3). Así $|V(H)| \geq 3$ y, ya que $V(H)$ no es un conjunto homogéneo, hay un vértice $v \notin V(H)$ que domina a un vértice u de $V(H)$ y es dominado por otro vértice w de $V(H)$. Veamos que de la maximalidad de H se deduce que $V(H) \cup \{v\} = T$.

Esto último se tendría si $T'' = T|(V(H) \cup \{v\})$ fuera fuerte no conteniendo conjuntos homogéneos (ya que contiene al menos un C_3, pues H es un subtorneo de T'').

Supongamos que T'' no es fuerte, entonces existe una partición A, B de $V(T'') = V(H) \cup \{v\}$ con $A \Rightarrow B$. Si $v \in B$, se tiene que $u \in B$, pues v domina a u, y $w \in A$, pues w domina a v. Así, $A, B\backslash\{v\}$ es una partición de $V(H)$ con $A \Rightarrow B\backslash\{v\}$, lo que es una contradicción con el hecho de que H sea fuerte. Por tanto, T'' es fuerte.

Veamos por reducción al absurdo que T'' no contiene conjuntos homogéneos. Supongamos que sí contiene un conjunto homogéneo X, debe tenerse entonces que $v \in X$, pues si no, X sería homogéneo en H y H no contiene conjuntos homogéneos. Entonces $\forall r \in V(T'')\backslash X$ se tiene que $r \Rightarrow X$ ó $X \Rightarrow r$, pero, en tal caso, $X\backslash\{v\}$ sería homogéneo en H pues, entonces, $\forall r \in V(T'')\backslash X = V(H)\backslash(X\backslash\{v\}$, se tendría que $r \Rightarrow X\backslash\{v\}$ ó $X\backslash\{v\} \Rightarrow r$, lo que es una contradicción.

Así, por la maximalidad de H, debe ser $V(H) \cup \{v\} = V(T)$. En consecuencia, $T\backslash\{v\}$ es fuerte.

Por hipótesis de inducción, $T\backslash\{v\}$ admite una trisección, $\Delta(P, Q, R)$. Sean A y B los conjuntos de vecinos de salida y de entrada de v, respectivamente. Como $A, B \neq \emptyset$, podemos suponer (permutando cíclicamente P, Q y R si fuera necesario) que $B \cap P \neq \emptyset \neq A \cap Q$. Elegimos $p \in B \cap P$ y $q \in A \cap Q$. Podemos distinguir tres casos.

Caso 1: Si existen $r \in A \cap R$ y $r' \in B \cap R$, entonces el subtorneo inducido por $\{v, p, q, r, r'\}$ es H_1 o H_2 (dependiendo del sentido de la arista entre r y r'), lo que es una contradicción (ver Figura 6.2).

Luego, $A \cap R$ o $B \cap R$ debe ser vacío y, a partir de la simetría al cambiar el sentido de las aristas, podemos suponer que $A \cap R = \emptyset$. Si $B \cap R \neq \emptyset$, elegimos $r \in B \cap R$. Como $P \cup \{v\}$ no es homogéneo, se tiene que $B \cap Q \neq \emptyset$ y elegimos $q' \in B \cap Q$. Entonces el subtorneo inducido por $\{v, p, r, q, q'\}$ es H_2 o H_3 (dependiendo del sentido entre q y q'), lo que es una contradicción (ver Figura 6.3).

Por último, si $A \cap R = \emptyset = B \cap R$, entonces T sería la trisección $\Delta(P, Q, R \cup \{v\}$, lo que es una contradicción.

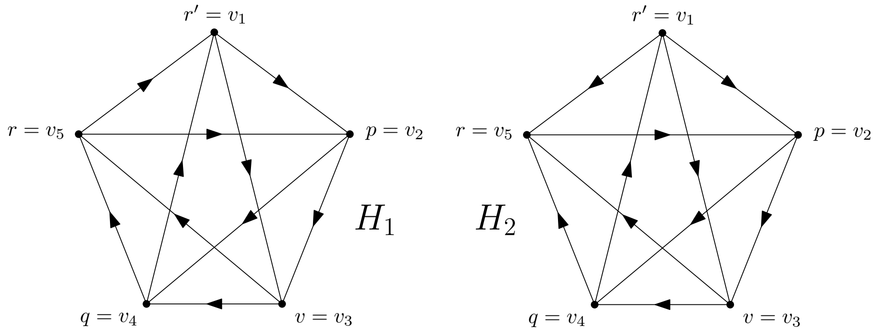


Figura 6.2: Torneo inducido por $\{v, p, q, r, r'\}$.

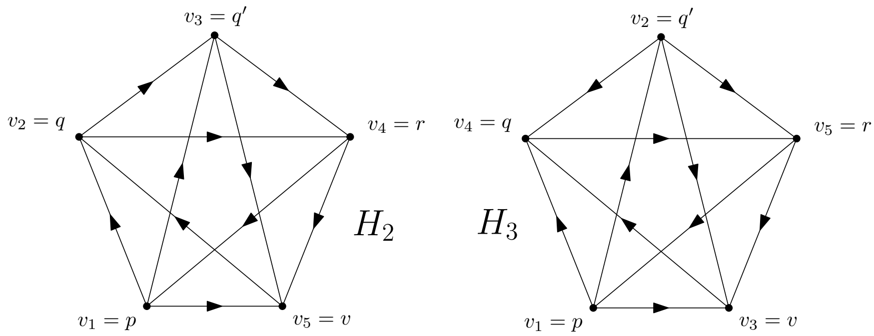


Figura 6.3: Torneos inducidos por $\{v, p, r, q, q'\}$.

En conclusión, queda probado que todo torneo fuerte admite una trisección si no contiene H_1, H_2, ni H_3. $\square$

Lema 6.3 *Un torneo T es un héroe si y solo si no contiene ninguno de los torneos H_1, H_2, H_3, H_4 o H_5.*

Demostración: Los torneos H_1, H_2, H_3 y H_4 son fuertes y no admiten una trisección de la forma $\Delta(H, k, 1)$ o $\Delta(H, 1, k)$ con H un héroe y $k \geq 1$. En consecuencia, H_1, H_2, H_3 y H_4 no son héroes. Por el Corolario 3.10, H_5 no es una celebridad y, por tanto, tampoco es un héroe. Entonces, utilizando el Lema 2.15, si T es un héroe, no contiene ninguno de los torneos H_1, H_2, H_3, H_4 y H_5, ya que todos sus subtorneos deben ser héroes.

Nos falta probar que todo torneo H, que no contiene a los subtorneos H_1, H_2, H_3, H_4 y H_5, es un héroe. Vamos a probarlo por inducción en el cardinal del conjunto de vértices de H. Asumiremos que $|V(H)| > 3$. Si H no es fuerte, sus componentes fuertes son héroes por hipótesis de inducción. Por la primera parte de la Proposición 2.19, se tiene que H es un héroe.

Si H es fuerte, entonces admite una trisección $\Delta(A, B, C)$ por el Lema 6.2. Si $|A|, |B|, |C| > 1$, H contendría a H_4, lo que es una contradicción. Supongamos que $|C| = 1$, si A y B no son transitivos, existiría una copia de H_5 en H y, por tanto, llegamos a otra contradicción. Entonces, al menos, A o B es transitivo. Supongamos que B es transitivo, entonces H puede expresarse como $\Delta(H|A, B, 1)$ y, como $H|A$ es un héroe por hipótesis de inducción, entonces se deduce que H es un héroe por la Proposición 2.19. □

Capítulo 7

Torneos transitivos de tamaño lineal

En el capítulo 2 pospusimos la prueba de que toda celebridad es un héroe, pero llegados a este punto ya podemos demostrar dicho resultado.

Teorema 7.1 *Un torneo es un héroe si y solo si es una celebridad.*

Recordemos que H es una celebridad si existe un $c > 0$ tal que para todo torneo H-libre T, se tiene que $\alpha(T) \geq c|V(T)|$. Para continuar, debemos asumir el siguiente lema.

Lema 7.2 *El torneo $H_4 = \Delta(2, 2, 2)$ no es una celebridad.*

Demostración de 7.1 asumiendo 7.2: Ya sabemos que todo héroe es una celebridad, para probar el recíproco vamos a considerar una celebridad H y probaremos por inducción en $|V(H)|$ que es un héroe. Asumimos que $|V(H)| \geq 2$. Supongamos H no es fuerte, toda componente fuerte J de H es una celebridad, ya que todo subtorneo de una celebridad es una celebridad. Por hipótesis de inducción, el subtorneo J es un héroe. Por la Proposición 2.19, H es un héroe, por lo que quedaría probado el resultado.

Supongamos ahora que H es fuerte. Para proseguir, vamos a realizar una modificación del argumento utilizado en la Proposición 3.1. Se define la familia de torneos D_i (con $i \geq 0$) como sigue. D_0 es el torneo formado por un solo vértice y de forma inductiva, $D_i = \Delta(D_{i-1}, D_{i-1}, D_{i-1})$. Vamos a probar por inducción que para $i \geq 0$, $\alpha(D_i) \leq 2^i$.

Sea $T = D_i$ y sea (X, Y, Z) una trisección de T tal que $T|X$, $T|Y$ y $T|Z$ son isomorfos a cada D_{i-1}. Si un subconjunto $W \subseteq V(T)$ es transitivo, alguna de las intersecciones $W \cap X$, $W \cap Y$ o $W \cap Z$ es vacía por la transitividad de W. Podemos suponer que $W \subseteq X \cup Y$. Por hipótesis de inducción, $|W \cap X|$ y $|W \cap Y|$ son menores o iguales que 2^{i-1}, de lo que se deduce que $|W| \leq 2^i$, como queríamos probar.

Para cada i, $|V(D_i)| = 3^i$. Si unimos este hecho con que H es un celebridad, existe un mínimo i a partir del cuál, H está contenido en D_i. Veamos porque ocurre esto. Al ser H una celebridad, el cardinal del mayor subconjunto transitivo de todo torneo H-libre T tiene que ser menor que una constante por el cardinal de vértices de T ($\alpha(T) \geq c|V(T)|$). Pero hemos demostrado que $\alpha(D_i) \leq 2^i$ y $|V(D_i)| = 3^i$, entonces para $c \geq 1$ se tiene que $\alpha(D_i) \leq c|V(D_i)|$. Si $|V(H)| \leq |V(D_i)|$, entonces D_i contiene a H. Consideremos el mínimo i que cumple este hecho.

Sea $T = D_i$ y consideramos la trisección (X, Y, Z), dada gracias a la construcción de la familia D_i, tal que $T|X, T|Y$ y $T|Z$ son isomorfos a D_{i-1}. Sea $W \subseteq V(T)$ tal que $T|W$ es isomorfo a H. Por la elección de i, D_{i-1} no contiene a H, entonces W no es un subconjunto de X, Y o Z. Como H es fuerte, W tiene intersección no vacía con X, Y y Z. Alguna de las intersecciones no puede tener más de un elemento por el Lema 7.2, por lo que asumimos que $|W \cap Z| = 1$. Al menos X o Y debe ser transitivo, ya que $\Delta(C_3, C_3, 1)$ no es una celebridad por el Corolario 3.10. Entonces, $H = \Delta(J, k, 1)$ o $H = \Delta(J, 1, k)$ para alguna celebridad J y un entero $k \geq 1$. Por la hipótesis de inducción J es un héroe y, por tanto, H es un héroe por la Proposición 2.19. $\square$

Todavía debemos probar el Lema 7.2, pero demostraremos un resultado más robusto.

Proposición 7.3 *Para cada $\varepsilon > 0$ real y para todo n entero suficientemente grande (dependiendo de ε), existe un torneo T con n vértices, que no contiene a $\Delta(2, 2, 2)$ y*

$$\alpha(T) \leq \frac{n}{(\ln(n))^{-\varepsilon} + 1/3}$$

Para probar la proposición, nos será necesario demostrar una colección de lemas previos.

Lema 7.4 *Sea* $a_1, ..., a_k$ *reales con* $0 \leq a_1 < ... < a_k \leq 1$. *Entonces*

$$\sum_{1 \leq i < j \leq k} (a_j - a_i)^{-1} \geq k^2 \ln(k/3).$$

Demostración: Supongamos que $k \geq 4$, ya que en caso contrario, la desigualdad se cumple para cualquier colección de reales que verifiquen las hipótesis del Lema. Sea $1 \leq h \leq k-1$, entonces existen $k-h$ pares (i,j) con $1 \leq i < j \leq k$ y cuya diferencia es h. Consideramos P como el conjunto de esos pares. Para cada $0 \leq x \leq 1$, existen a lo sumo h pares $(i,j) \in P$ con $a_i \leq x \leq a_j$. Si existieran $h+1$ pares $(i,j) \in P$ tales que $a_i \leq x \leq a_j$, entonces $a_{i_1}, ..., a_{i_n}, a_{i_{n+1}} \leq x$ y $a_{j_1}, ..., a_{j_n}, a_{j_{n+1}} \geq x$. Además,

$$j_1 - i_1 = h = ... = j_n - i_n = j_{n+1} - i_{n+1},$$

y

$$i_1 < i_2 < ... < i_n < i_{n+1} \leq j_1.$$

Por tanto, se tendría que $h = j_1 - i_1 \geq h+1$, lo que es una contradicción. Entonces,

$$\sum_{(i,j) \in P} (a_j - a_i) \leq h.$$

Multiplicando la desigualdad anterior por $\sum_{(i,j) \in P} (a_j - a_i)^{-1}$ y desarrollando por pares, se obtiene que

$$\sum_{(i,j) \in P} (a_j - a_i) \sum_{(i,j) \in P} (a_j - a_i)^{-1} \geq |P|^2.$$

Veamos porque ocurre esto. Es claro que $(a_j - a_i)(a_j - a_i)^{-1} = 1$, nos faltaría comprobar que $(a_{j_1} - a_{i_1})(a_{j_2} - a_{i_2})^{-1} + (a_{j_2} - a_{i_2})(a_{j_1} - a_{i_1})^{-1} \geq 2$, con $i_1 \neq i_2$ o $j_1 \neq j_2$. Esto es equivalente a

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{a} \geq 2 \equiv a^2 + 1 &\geq 2a \\ &\equiv a^2 + 1 - 2a \geq 0 \\ &\equiv (a-1)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

que se verifica para cualquier valor de a. De aquí se deduce que

$$\sum_{(i,j)\in P} (a_j - a_i)^{-1} \geq \frac{(k-h)^2}{h}.$$

Si sumamos todos los $h = 1, ..., k-1$, obtenemos que

$$\sum_{1\leq i<j\leq k} (a_j - a_i)^{-1} \geq \sum_{1\leq h\leq k-1} \frac{(k-h)^2}{h}.$$

Vamos a descomponer la parte derecha de la desigualdad.

$$\begin{aligned} \sum_{1\leq h\leq k-1} \frac{(k-h)^2}{h} &= \sum_{1\leq h\leq k-1} \frac{k^2 - 2kh + h^2}{h} \\ &= \sum_{1\leq h\leq k-1} \frac{k^2}{h} - 2\sum_{1\leq h\leq k-1} k + \sum_{1\leq h\leq k-1} h \\ &= \sum_{1\leq h\leq k-1} \frac{k^2}{h} - 2k(k-1) + \frac{k(k-1)}{2} \\ &= \left(\sum_{1\leq h\leq k-1} \frac{k^2}{h}\right) - \frac{3}{2}k(k-1) \geq \sum_{3\leq h\leq k-1} \frac{k^2}{h}. \end{aligned}$$

Podemos acotar por separado $\displaystyle\sum_{3\leq h\leq k-1} \frac{1}{h}$, debido a que es la suma superior de la integral $\displaystyle\int_3^k \frac{1}{t}dt$ en la partición $\{3, 4, ..., k-1, k\}$.

$$\sum_{3\leq h\leq k-1} \frac{1}{h} \geq \ln\left(\frac{k}{3}\right) = \ln k - \ln 3 = \int_3^k \frac{1}{t}dt.$$

En consecuencia,

$$\sum_{1\leq i<j\leq k} (a_j - a_i)^{-1} \geq k^2 \ln(k/3),$$

como queríamos probar. $\square$

Sea $S(k)$ el conjunto de todas las permutaciones de $\{1, ..., k\}$ para $k \geq 1$ entero. Para $\sigma \in S(k)$ y para $1 \leq i < j \leq k$, decimos que el par (i, j) es una **inversión** de σ si $\sigma(i) > \sigma(j)$. Sea $I(\sigma)$ el conjunto de todas las inversiones de σ. Vamos a probar el siguiente lema.

Lema 7.5 *Sea* $0 \leq c < 1$ *y* $W_k(c) = \sum_{\sigma\in S(k)} c^{|I(\sigma)|}$ *para* $k \geq 1$. *Entonces,* $W_k(c) \leq \left(\frac{1}{1-c}\right)^k$.

Demostración: Se puede probar que $W_k(c) = W_{k-1}(c)(1 + c + ... + c^{k-1})$ para $k \geq 2$. Dada una permutación $\tilde{\sigma}$ en $S(k-1)$, el cardinal del conjunto de inversiones de $\tilde{\sigma}$ viene dado por $|I(\tilde{\sigma})|$. Para realizar la inmersión de $\tilde{\sigma}$ en $S(k)$ debemos introducir un k dentro de la permutación, cuya posición es determinante en la producción, o no, de nuevas inversiones. Si k se inserta en la posición final de $\tilde{\sigma}$, no da lugar a ninguna nueva inversión y, por tanto, $|I(\sigma)| = |I(\tilde{\sigma})|$. Si k es introducido en la penúltima posición, se origina una nueva inversión, entonces $|I(\sigma)| = |I(\tilde{\sigma})| + 1$. Siguiendo este proceso, es claro que, para cualquier $\tilde{\sigma}$ de $S(k-1)$, se tiene que $c^{|I(\sigma)|} = c^{|I(\tilde{\sigma})|}(1 + c + c^2 + ... + c^{k-1})$ y, en consecuencia, $W_k(c) = \sum_{\sigma\in S(k)} c^{|I(\sigma)|} = \sum_{\tilde{\sigma}\in S(k-1)} c^{|I(\tilde{\sigma})|}(1 + c + c^2 + ... + c^{k-1})$, como queríamos probar.

Además, el polinomio $1 + c + c^2 + ... + c^{k-1}$ surge del cociente entre $\frac{1-c^k}{1-c}$ y, por tanto, se deduce que $W_k(c) = W_{k-1}(c)\frac{1-c^k}{1-c}$. Como $0 \leq c \leq 1$, entonces $W_k(c) \leq \frac{W_{k-1}(c)}{1-c}$.

Si continuamos acotando el valor de $W_k(c)$ y recordando que $W_1(c) = 1$, obtenemos que

$$W_k(c) \leq \frac{W_{k-1}(c)}{1-c} \leq \frac{W_{k-2}(c)}{(1-c)^2} \leq ... \leq \frac{W_1(c)}{(1-c)^k} = \left(\frac{1}{1-c}\right)^k,$$

para todo $k \geq 1$ y, por tanto, queda probado el lema. $\square$

Sean T un torneo y $\phi : V(T) \longrightarrow \mathbb{Z}$ una aplicación inyectiva. Sea B el grafo formado con los vértices de T y cuyas aristas son todos los pares u, v tal que uv es una arista de T con $\phi(u) > \phi(v)$. Al igual que señalamos anteriormente, B es el grafo *backedge*.

Notación 7.6 *Si $e = \{u, v\}$ es una arista de B, denotamos como $\phi(e)$ la diferencia en valor absoluto de $\phi(u) - \phi(v)$.*

Definición 7.7 *Sean $r, s \geq 1$ dos enteros. Decimos que dos aristas distintas e, f son (r, s)-**comparables** (en función de una aplicación ϕ) si:*

- *existe un camino P en B con a lo sumo s vértices y con e, f contenidas dentro del camino y,*
- *$\phi(e) \leq r\phi(f)$ y $\phi(f) \leq r\phi(e)$.*

En el siguiente resultado utilizaremos el Lema 7.4 y el Lema 7.5.

Teorema 7.8 *Para todo entero $r, s \geq 1$, y para cada número real $\varepsilon > 0$, y un n suficientemente grande (dependiendo de r, s y ε), existe un torneo T de n vértices con las propiedades:*

- *existe una aplicación inyectiva de $V(T)$ a $\mathbb{Z}$ tal que ningún par de aristas del grafo backedge es (r, s)-comparable y,*
- *$\alpha(T) \leq n(\ln(n))^{\frac{-1}{s+\varepsilon}}$.*

Demostración: Sean $n \geq (re)^2$ un entero y δ un número real con $\delta \leq 1/4$. Vamos a construir el torneo T con $2n$ vértices como sigue. Independientemente, cualquier par de vértices (i, j) de T con $i < j$. La arista ji pertenecerá a T con probabilidad $\delta/(j - i)$ y, en caso contrario, la arista ij aparecerá en T con probabilidad complementaria.

Para $X \subseteq \{1, ..., 2n\}$, sea $p(X)$ la probabilidad de que uv sea una arista de T para todo $u, v \in X$ y $u < v$. Vamos a demostrar que

(1) para $X \subseteq V(T)$, $p(X) \leq e^{-\delta|X|^2 \ln(|X|/3)/(2n)}$.

Sea $X = \{x(1), ..., x(k)\}$, con $x(1) < ... < x(k)$. Se tiene que,

$$p(X) = \prod_{1 \le i < j \le k} \left(1 - \frac{\delta}{x(j) - x(i)}\right).$$

Aplicando la desigualdad $1 - x \le e^{-x}$, se tiene la siguiente inecuación:

$$1 - \frac{\delta}{x(j) - x(i)} \le e^{-\frac{\delta}{x(j)-x(i)}},$$

entonces,

$$p(X) \le e^{-\sum_{1 \le i < j \le k} \frac{\delta}{x(j)-x(i)}}.$$

Usando el Lema 7.4 para $\frac{x(i)}{2n}$ con $1 \le i \le k$, se tiene que

$$\sum_{1 \le i < j \le k} \frac{\delta}{x(j) - x(i)} \le \delta k^2 \ln(k/3)/(2n),$$

$$p(X) \le e^{-\delta k^2 \ln(k/3)/(2n)},$$

como queríamos probar.

Denotamos por $P(X)$ la probabilidad de que X sea transitivo en T. El siguiente resultado necesario es

(2) para $X \subseteq V(T)$, $P(X) \le \left(\frac{1}{1-2\delta}\right)^{|X|} p(X)$.

Sea $X = \{x(1), ..., x(k)\}$, con $x(1) < ... < x(k)$. Ya sabemos que

$$p(X) = \prod_{1 \le i < j \le k} \left(1 - \frac{\delta}{x(j) - x(i)}\right).$$

Decimos que una permutación $\sigma \in S(k)$ se **satisface**, si para todo i, j con $1 \le i < j \le k$, $x(i)$ domina a $x(j)$ si y solo si $\sigma(i) < \sigma(j)$. Entonces, X es un conjunto transitivo si y solo si existe un algún elemento de $S(k)$ que se satisfaga. Si no existiera alguna σ que se satisfaga en $S(k)$, encontraríamos un ciclo de longitud tres y, por tanto, X no sería transitivo. Denotamos por $P(\sigma)$ a la probabilidad de que $\sigma \in S(k)$ se satisfaga. Se deduce que

$P(X) \leq \sum_{\sigma} P(\sigma)$, ya que todas las σ que se satisfagan, nos proporcionan una enumeración de X para la cuál X es transitivo. Para que σ sea satisfecha, necesitamos que para todo i, j con $1 \leq i < j \leq k$,

- si (i, j) no es una inversión de σ, entonces existe la arista $x(i)x(j)$, esto sucede con probabilidad $1 - \frac{\delta}{x(j)-x(i)}$.
- Si (i, j) es una inversión de σ, se tiene que $x(j)x(i)$ es una arista, con probabilidad $\frac{\delta}{x(j)-x(i)}$.

Por tanto, $P(\sigma) \leq p(X)(2\delta)^{I(\sigma)}$. Si sumamos en todos los σ posibles de $S(k)$, obtenemos que

$$P(X) \leq p(X) \sum_{\sigma \in S(k)} (2\delta)^{I(\sigma)} = W_k(2\delta)p(X).$$

Si acotamos el valor de $P(X)$ usando el Lema 7.5, se tiene que $P(X) \leq \left(\frac{1}{1-2\delta}\right)^k p(X)$ y, en consecuencia, queda probado **(2)**.

Procedemos a probar el siguiente resultado,

(3) Para todo número $t > 0$ real, si $t \leq \frac{1}{3}n^{1/3}$ y $6t\ln(4et) \leq \delta\ln(n)$, entonces $P(\alpha(T) \geq n/t)) \leq e^{-1}$.

Para empezar la demostración, asumimos que $t/n = g$ es un entero (reemplazamos t por $\frac{n}{\lceil n/t \rceil}$). Llamamos P a la probabilidad $P[\alpha(T) \geq g]$, por consiguiente, dicha probabilidad es a lo sumo la esperanza del número de subconjuntos transitivos de cardinal g. Podemos elegir $\binom{2n}{g}$ subconjuntos de cardinalidad g. La aproximación de Stirling's nos dice que $\binom{2n}{g} \leq \frac{(2n)^g}{g!}$. A partir de esta desigualdad, podemos obtener que $\binom{2n}{g} \leq \left(\frac{2ne}{g}\right)^g = (2et)^{n/t}$, ya que $\frac{1}{g!} \leq \frac{1}{g^g}$ y si multiplicamos una cota superior por un valor positivo (e, en este caso) se sigue verificando. Entonces, aplicando **(1)** y **(2)** con la suma de todas las elecciones de subconjuntos X de cardinal g , obtenemos que

$$P = P[\alpha(T) \geq g] \leq \left(\frac{2et}{1-2\delta}\right)^{n/t} e^{-\delta(n/t)^2\ln(n/(3t))/(2n)}.$$

Si aplicamos logaritmos en la anterior desigualdad y usamos que $\delta \leq 1/4$, se tiene que

$$\frac{\ln(P)}{n} \geq -\frac{4et}{t} + \frac{\delta}{2t^2}\ln(n) - \frac{\delta}{2t^2}\ln(3t).$$

Si recordamos las hipótesis previas, $6t\ln(4et) \leq \delta\ln(n)$ y $t \leq \frac{1}{3}n^{1/3}$, se deduce que $\frac{\ln(4et)}{t} \leq \frac{\delta}{6t^2}\ln(n)$ y $\frac{\delta}{2t^2}\ln(3t) \leq \frac{\delta}{6t^2}\ln(n)$.

Además, la primera desigualdad puede reducirse a $\frac{1}{n} \leq \frac{\delta}{6t^2}\ln(n)$, usando que $\ln(4et) \geq 1 \geq t/n$.

Llegados a este punto, podemos sumar las cuatro desigualdades y obtener que $-\frac{1}{n}\ln(P) \geq \frac{1}{n}$ y, por tanto, $P \leq e^{-1}$, como queríamos probar.

Sea B el grafo *backedge* de T.

(4) Para cada $k \geq 1$ y $v \in \{1, ..., 2n\}$, el número esperado de caminos de B con k vértices y primer vértice v es a lo sumo $(4\delta\ln(n))^{k-1}$.

Denotamos por $E_k(v)$ dicho número esperado. Demostraremos el resultado por inducción en k. Es claro que $E_1(v)$, supongamos entonces que $k \geq 2$. Para proseguir, enumeraremos todos los posibles caminos de k vértices con inicio en k dando los posibles segundos vértices u. Para cada $u \neq v$, $E'(v)$ es el número esperado de caminos en B con $k-1$ vértices, con primer vértice u y no conteniendo a v, condicionado a que u y v son adyacentes en B. Sabemos que la probabilidad de que exista la arista $\{u, v\}$ es de $\frac{\delta}{|v-u|}$ y, por tanto,

$$E_k(v) = \sum_{1\leq u\leq 2n, u\neq v} E'(u)\frac{\delta}{|v-u|}.$$

Por hipótesis de inducción, $E'(u) \leq E_{k-1}(u) \leq (4\delta\ln(n))^{k-2}$, entonces

$$E_k(v) \leq (4\delta\ln(n))^{k-2} \sum_{1\leq u\leq 2n, u\neq v} \frac{\delta}{|v-u|}.$$

En consecuencia,

$$\sum_{1\leq u\leq 2n, u\neq v} \frac{\delta}{|v-u|} \leq 2\sum_{1\leq i\leq 2n} \frac{\delta}{i} \leq 2\delta(1+\ln(2n)) \leq 4\delta\ln(n),$$

ya que $n \geq 6$. Por tanto, $E_k(v) \leq 4\delta\ln(n)$.

Para cada $v \in \{1, ..., 2n\}$ y cada entero $x \geq 1$, sea $Z_v(x)$ la suma, sobre todos los $u \neq v$ con $x \leq |u - v| \leq rx$, de la probabilidad de que $\{u, v\}$ sea una arista de retroceso. Necesitamos demostrar que

(5) $Z_v(x) \leq 2\delta(1 + \ln(r))$ para cada $v \in \{1, ..., 2n\}$ y $x \geq 1$ entero.

Tenemos que

$$Z_v(x) \leq \sum_{v+x \leq u \leq v+rx} \frac{\delta}{u - v} \leq \sum_{v-rx \leq u \leq v-x} \frac{\delta}{v - u} \leq 2 \sum_{x \leq i \leq rx} \frac{\delta}{i}.$$

Pero también, acotando por la suma superior en la partición $\{x, ..., rx\}$,

$$\sum_{x \leq i \leq rx} \frac{1}{i} \leq \frac{1}{x} + \ln(r) \leq 1 + \ln(r).$$

En consecuencia, $Z_v(u) \leq 2\delta(1 + \ln(r))$, por lo que queda probado **(5)**.

Sea $\phi(v) = v$ para $1 \leq v \leq 2n$, decimos que un camino de B, con al menos dos aristas y cuyos finales sean las aristas e, f, es **balanceado** si $\phi(e) \leq r\phi(f)$ y $\phi(f) \leq r\phi(e)$. Recordemos que para una arista e, $\phi(e)$ es $|\phi(v) - \phi(u)|$. Para proseguir con la demostración, necesitamos el siguiente resultado.

(6) Para cada $k \geq 2$, el número esperado de caminos balanceados en B con k vértices es a lo sumo $(4\delta)^k(1 + \ln(r))(\ln(n))^{k-1}n$.

La suma sobre todos los $v \in \{1, ..., 2n\}$ del número esperado de pares (e, R) acota superiormente al número esperado de caminos balanceados de B. Los pares (e, R) son de la forma:

- e es una arista de B, con inicio en v y final en u.
- R es un camino de k vértices de B con final en v y no contiene a u.
- $\phi(f) \leq \phi(e) \leq r\phi(f)$, tal que f es una arista perteneciente al camino R, incidente con el final de R diferente de v.

Antes de comenzar con la demostración, tenemos que observar que un camino balanceado se corresponde con dos pares, tales que sus aristas finales tienen el mismo valor de ϕ. Para reanudar la prueba, fijaremos v y sea E_v el número esperado de pares (e, R) descritos anteriormente. Sea M el conjunto de secuencias $(v_1, ..., v_k)$ de elementos distintos de $\{1, ..., n\}$ con $v_1 = v$. Para cada miembro $(v_1, ..., v_k) \in M$, sea $P(v_1, ..., v_k)$ la probabilidad de que $\{v_i, v_{i+1}\}$, con $1 \leq i \leq k-1$, sean todas aristas de retroceso. Sea $Q(v_1, ..., v_k)$ la suma sobre todos los v_0 diferentes de $v_1, ..., v_n$ con $|v_0 - v_1| \leq |v_{k-1} - v_k| \leq r|v_0 - v_1|$ de la probabilidad de que $\{v_0, v_1\}$ sea una arista de retroceso.

Entonces, la suma de $P(v_1, ..., v_k)Q(v_1, ..., v_k)$ sobre todos los $(v_1, ..., v_k) \in M$ se corresponde con E_v. Pero, para cada $(v_1, ..., v_k) \in M$, se tiene que $Q(v_1, ..., v_k) \leq Z_v(|v_k - v_{k-1}|) \leq 2\delta(1 + \ln(r))$, usando **(5)**. Por tanto, E_v se corresponde con la suma sobre todos los $(v_1, ..., v_k) \in M$ de $2\delta(1 + \ln(r))P(v_1, ..., v_k)$. Además, $E_v \leq 2\delta(1 + \ln(r))(4\delta \ln(n))^{k-1}$ por **(4)**.

Si sumamos sobre los $2n$ valores de v, se tiene que

$$E_v \leq (4\delta)^k(1 + \ln(r))(4\delta \ln(n))^{k-1}n,$$

como queríamos probar.

Antes de probar el último resultado auxiliar, vamos a concretar el valor de δ, acotado por $1/4$ hasta este momento. Elegiremos $\delta = \frac{1}{4}(2 + 2\ln(r))^{-1/s} \cdot \ln(n)^{\frac{s-1}{s}}$. Es claro que $\delta \leq 1/4$.

(7) El número esperado de aristas (r, s)-comparables en B es a lo sumo $n/2$.

Recurriendo a la cota proporcionada en **(6)** y sumando para $2 \leq k \leq s$, se tiene que el número esperado de aristas (r, s)-comparables esta acotado por dicha suma.

Usando que $n \geq (re)^2$,

$$4\delta \ln(n) \geq 1 \text{ y } (4\delta)^k(\ln(n))^{k-1} \leq (4\delta)^s(\ln(n))^{s-1},$$

para $k \geq 2$, la suma anterior es a lo sumo $(1 + \ln(r))(4\delta)^s(\ln(n))^{s-1}n = n/2$, por la elección que hemos hecho anteriormente de δ y, por tanto, queda probado **(7)**.

Llegados a este punto, vamos a probar el principal resultado de este teorema. Sea $\varepsilon > 0$ un número real y $t = (\ln(n))^{1/s-\varepsilon}$. Para un n suficientemente grande, se tiene que $t \leq \frac{1}{3}n^{1/3}$ y $6t\ln(4et) \leq \delta \ln(n)$. Aplicamos la desigualdad de Markov, $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$, con X el número de aristas (r,s)-comparables de B y $a = n$. $E(X)$ denota la esperanza de un suceso X en este contexto. En el resultado **(7)**, hemos probado que $E(X) \leq \frac{n}{2}$, por tanto, podemos deducir que la probabilidad de que existan n aristas (r,s)-comparables es a lo sumo $1/2$. Además, por **(3)**, la probabilidad de $\alpha(T) \geq n/t$ es a lo sumo $1/e$. Por tanto, la probabilidad de que existan a lo sumo n aristas (r,s)-comparables y $\alpha(T) < n/t$ es al menos de $1/2 - 1/e > 0$. Consideramos T el torneo que cumple estas propiedades, entonces existe un subconjunto $X \subseteq V(T)$ con cardinal n, tal que todo par de aristas (r,s)-comparables f y g, al menos f o g es incidente con un vértice de X. En consecuencia, el torneo T' generado por $V(T) \backslash X$ satisface el teorema. $\square$

Antes de probar el Lema 7.2, vamos a probar el siguiente resultado.

Lema 7.9 *Sea T un torneo isomorfo a $\Delta(2,2,2)$ y $\phi : V(T) \longrightarrow \mathbb{Z}$ una aplicación inyectiva. Entonces, existe un par de aristas $(2,3)$-comparables en el grafo backedge de T.*

Demostración: Sea B el grafo *backedge* de T, tenemos que encontrar un par de aristas $(2,3)$-comparables en B.

Si $e \in E(B)$, decimos que $\phi(e)$ es la longitud de e. Consideramos el torneo T, conformado por los vértices $V(T) = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}$ tales que $(\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2\})$ es una trisección de T. Supongamos que $\phi(a_1) < \phi(a_2), \phi(b_1) < \phi(b_2)$ y $\phi(c_1) < \phi(c_2)$. El torneo T tiene la siguiente forma:

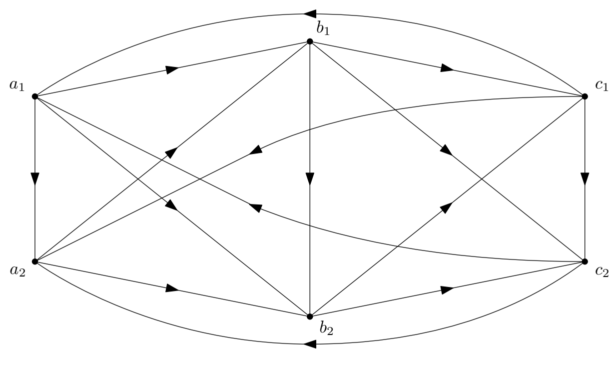


Figura 7.1: La trisección $\Delta(2,2,2)$.

La aplicación ϕ da lugar a 3 casos dependiendo de los valores asignados.

El primer caso viene dado con la asignación $\phi(a_1) = 1, \phi(a_2) = 2, \phi(b_1) = 3, \phi(b_2) = 4, \phi(c_1) = 5$ y $\phi(c_2) = 6$. Entonces, el grafo *backedge* tiene la siguiente forma:

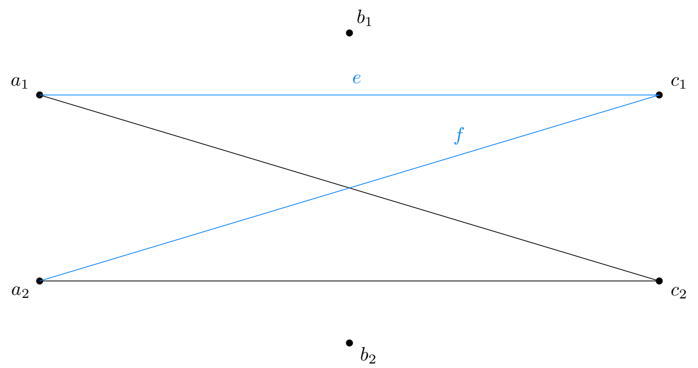


Figura 7.2: Grafo *backedge* para la primera asignación de ϕ.

El camino elegido para encontrar el par de aristas $(2,3)$-comparables es $P = \{a_1c_1a_2\}$, con $e = a_1c_1$ y $f = c_1a_2$. Se tiene que $\phi(e) = 4$ y $\phi(f) = 3$, por tanto, se verifica que $\phi(e) \leq 2\phi(f)$ y $\phi(f) \leq 2\phi(e)$. En consecuencia, el par de aristas e, f es $(2,3)$-comparable.

El siguiente caso se origina con la asignación $\phi(a_1) = 3, \phi(a_2) = 4, \phi(b_1) = 1, \phi(b_2) = 2, \phi(c_1) = 5$ y $\phi(c_2) = 6$. El grafo *backedge* asociado a este ϕ es

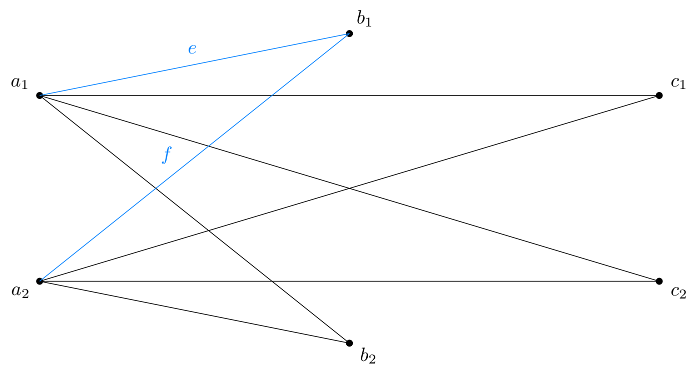


Figura 7.3: Grafo *backedge* para la segunda asignación de ϕ.

En este caso, el par de aristas $(2,3)$-comparables viene dado por $e = a_1b_1$ y $f = b_1a_2$, que pertenecen a $E(P)$ con $P = \{a_1b_1a_2\}$. Calculamos las longitudes de ambas aristas, $\phi(e) = 2$ y $\phi(f) = 3$. Claramente $\phi(e) \leq 2\phi(f)$ y $\phi(f) \leq 2\phi(e)$.

Por último, consideramos la asignación $\phi(a_1) = 5, \phi(a_2) = 6, \phi(b_1) = 3, \phi(b_2) = 4, \phi(c_1) = 1$ y $\phi(c_2) = 2$. Su grafo *backedge* sería

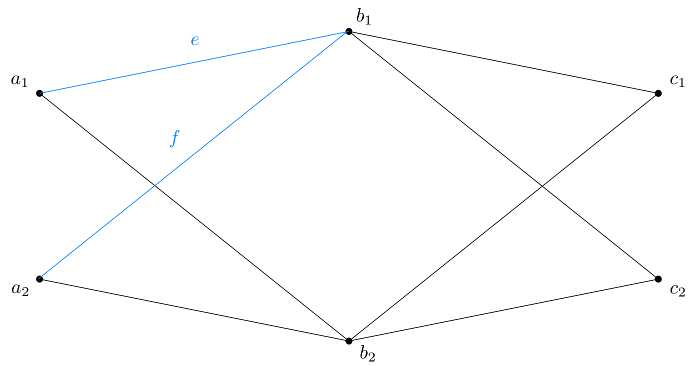


Figura 7.4: Grafo *backedge* para la tercera asignación de ϕ.

Elegimos el camino $P = \{a_1 b_1 a_2\}$ con $e = a_1 b_1$ y $f = b_1 a_2$. Sus longitudes son $\phi(e) = 2$ y $\phi(f) = 3$. Entonces, $\phi(e) \leq 2\phi(f)$ y $\phi(f) \leq 2\phi(e)$ y, por tanto, e, f son un par de aristas $(2,3)$-comparables.

En consecuencia, cualquier torneo T isomorfo a la trisección $\Delta(2,2,2)$ contiene al menos un par de aristas $(2,3)$-comparables, dada una aplicación ϕ inyectiva. $\square$

Después de esta colección de resultados, estamos preparados para demostrar el Lema 7.2 y la Proposición 7.3.

Demostración de 7.2 y 7.3: Dado un $\varepsilon > 0$ real, sea n suficientemente grande, entonces podemos encontrar un torneo T de n vértices que verifica las propiedades dadas en el Teorema 7.8. Si tomamos $(r,s) = (2,3)$, por el Lema 7.9, T no contiene a $\Delta(2,2,2)$. Por tanto, queda probada la Proposición 7.3 y el Lema 7.2. $\square$

Bibliografía

[1] W. D. Wallis, *A Beginner's Guide to Graph Theory*, Springer, 2000.

[2] J. W. Moon, *Topics on Tournament*, University of Alberta, 1968.

[3] E. Berger, K. Choromanski, M. Chudnovsky, J. Fox, M. Loebl, A. Scott, P. Seymour y S. Thomassé, *Tournaments and colouring*, J. Combin. Theory, Series B **103** (2013), 1–20.

[4] P. Erdös, *Graph theory and probability*, Canad. J. Math. **11** (1959) 34–38.

[5] R. Stearns, *Voting Problem*, Am. Math. Mon. **66**, (9) (Nov., 1959), 761–763.