



**POLINOMIO DE JONES Y
HOMOLOGÍA DE KHOVANOV
DE NUDOS Y ENLACES:
VERSIÓN CLÁSICA Y ANULAR**

Sergio García Rodrigo



**POLINOMIO DE JONES Y
HOMOLOGÍA DE KHOVANOV
DE NUDOS Y ENLACES:
VERSIÓN CLÁSICA Y ANULAR**

Sergio García Rodrigo

Memoria presentada como parte de los requisitos
para la obtención del título de Máster Universitario
en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Prof. Marithania Silvero Casanova

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi tutora Marithania Silvero por su ayuda incondicional, por su implicación y por todo lo que he aprendido con ella.

A mi profesor Marco Antonio López, el mejor tutor de TFG que podía tener y un referente absoluto para mí, a quien debo mi interés por la Topología, y a mi profesora Clemen Alonso por presentarme esta área tan bonita que es la Teoría de Nudos.

A Robert, que me ha acompañado y soportado todo este año en nuestra aventura en Sevilla, y a Elsa, Rosa y Lucía, a las que admiro profundamente.

A mi familia, en especial a mis padres, que siempre me han apoyado en todas las decisiones que he tomado.

Resumen

Este trabajo se encuentra dentro de la Teoría de Nudos. En él, se presentan dos de los invariantes más relevantes de esta área, por haber supuesto grandes avances en el problema de clasificación de nudos y enlaces: el polinomio de Jones, introducido por Vaughan Jones en 1984 y la homología de Khovanov, el primer invariante homológico, introducido por Mikhail Khovanov en el año 2000 como una categorificación del polinomio de Jones.

Comenzamos con una revisión de los conceptos básicos de Teoría de Nudos y de homología y cohomología clásicas.

Posteriormente, se define el polinomio de Jones a partir de la aproximación de Kauffman, se demuestra su invarianza y se exponen algunas de sus propiedades principales.

A continuación se introduce la homología de Khovanov exponiendo algunas de sus propiedades y probando su invarianza. También se muestra el cálculo de la homología de Khovanov del nudo trébol a izquierda.

La última parte de este trabajo está dedicada al estudio de estos invariantes en el caso anular, esto es, cuando se consideran los enlaces en el anillo engrosado $\mathbb{A} \times I$.

Abstract

This work falls within Knot Theory. We present two of the most relevant invariants in this area. They have represented great advances in the problem of classification of knots and links: Jones polynomial, introduced by Vaughan Jones in 1984 and Khovanov homology, the first homological invariant, introduced by Mikhail Khovanov in 2000 as a categorification of the Jones polynomial.

We start with a review of some basic concepts of Knot Theory and classical homology and cohomology.

Subsequently, we define Jones polynomial following Kauffman approach, we prove its invariance and present some of its main properties.

Then, we introduce Khovanov homology, present some of its properties and prove that it is a link invariant. We also compute Khovanov homology of the left-handed trefoil knot.

The last part of this work is devoted to the study of these invariants in the annular setting, that is, when links are considered in the thickened annulus $\mathbb{A} \times I$.

Índice

1. Introducción	9
2. Preliminares	11
2.1. Teoría de nudos	11
2.2. Homología y cohomología clásicas	20
3. El polinomio de Jones	23
3.1. El corchete de Kauffman	23
3.2. El polinomio de Jones: definición y propiedades	28
3.3. Cambios de variable: relación de madeja y cubo de resoluciones.	32
4. Homología de Khovanov	39
4.1. Definición y propiedades	39
4.2. Prueba de la invarianza	47
4.3. Cálculo de la homología de Khovanov del nudo trébol a izquierda	58
5. Versión anular del polinomio de Jones y la homología de Khovanov	69
5.1. Polinomio de Jones anular	71
5.2. Homología de Khovanov anular	75
Referencias	81

1. Introducción

La teoría de nudos es un área de las matemáticas que se centra en el estudio de los nudos como objetos matemáticos y está ubicada dentro de la topología algebraica. El origen de la teoría de nudos se remonta al año 1771 cuando Vandermonde notó la importancia de estudiar las propiedades topológicas de los nudos. También fueron importantes los estudios de Gauss y Klein en el desarrollo de esta área. La teoría de nudos tiene aplicación en otras ciencias como la biología, en el estudio del ADN, y la física, en el estudio de la física cuántica. Además, una de las motivaciones originales de la teoría de nudos se debe a la teoría de Lord Kelvin de que los átomos describían trayectorias anudadas en el éter. Así, clasificar los tipos de trayectorias (los nudos) equivaldría a dar una clasificación de los elementos. La primera tabla de nudos se debe a Tait. Con el tiempo se probó que la teoría de Kelvin era errónea, pero el problema de clasificación de nudos quedó como un problema matemático.

El problema de la clasificación de nudos es uno de los problemas principales de la teoría de nudos. Este problema nos lleva a plantearnos muchas preguntas de formulación sencilla, pero cuya respuesta puede ser muy complicada. Algunas de estas preguntas son si un nudo dado es equivalente al nudo trivial o si dos nudos son equivalentes. Esta última pregunta es el problema principal de la teoría de nudos y, en general, es muy difícil de resolver. Para dar respuesta a estas preguntas, se utilizan invariantes de nudos. Por tanto, uno de los principales objetivos en la teoría de nudos es definir nuevos invariantes que permitan distinguir nudos no equivalentes.

En este trabajo estudiaremos dos invariantes de nudos (o enlaces) que han supuesto una revolución en el área: el polinomio de Jones y su categorificación, la homología de Khovanov. Estudiaremos el polinomio de Jones mediante la aproximación de Kauffman, que utilizará un polinomio distinto conocido como corchete de Kauffman para definirlo. Para calcular la homología de Khovanov, construiremos un complejo de cadenas a partir de espacios vectoriales graduados, sobre el que definiremos las aplicaciones diferenciales. Entonces, podremos calcular los grupos de cohomología del complejo, que serán invariantes de enlace. Hoy día se buscan refinamientos de la homología de Khovanov, esto es, espacios topológicos asociados a un nudo, cuya cohomología coincida con la homología de Khovanov del nudo. Decimos que estos espacios geometrizan la homología de Khovanov.

La estructura del trabajo es la siguiente:

Comenzaremos introduciendo los conceptos básicos de teoría de nudos y homología y cohomología clásicas que serán necesarios para las secciones posteriores.

En la Sección 3 se introduce el polinomio de Jones y se prueba su invarianza. Se exponen algunas propiedades destacadas, así como su definición a partir del cubo de resoluciones, que será de utilidad para definir la homología de Khovanov.

En la Sección 4 se introduce el complejo de Khovanov, que da lugar a la homología de Khovanov. Se muestran algunas de las propiedades principales de estos grupos de (co)homología y se prueba que, efectivamente, es un invariante de enlace. Finalmente calcularemos la homología de Khovanov del nudo trébol en detalle.

Completamos el trabajo con la Sección 5, en la que se presentan las versiones anulares del polinomio de Jones y de la homología de Khovanov, esto es, una versión de los invariantes para nudos en el anillo engrosado $\mathbb{A} \times I$, con \mathbb{A} el anillo e I el intervalo $[0, 1]$.

Los conceptos explicados se ilustrarán con ejemplos y figuras de elaboración propia. Todas las figuras del trabajo han sido creadas mediante el editor Inkscape, salvo las Figuras 1-3,5 y 6, que han sido extraídas de Wikipedia.

2. Preliminares

2.1. Teoría de nudos

En esta sección se introducen conceptos básicos y resultados en Teoría de Nudos que serán necesarios en las siguientes secciones. Seguiremos [1] y [5] como referencia. Empezaremos definiendo qué es un nudo.

Definición 2.1 *Un nudo $K \subseteq \mathbb{R}^3$ es un subconjunto de puntos homeomorfo a una circunferencia.*



Figura 1: *Nudo trivial.*

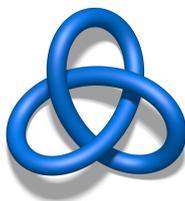


Figura 2: *Nudo trébol.*



Figura 3: *Nudo ocho.*

Es decir, un nudo es la imagen de un embebimiento de S^1 en \mathbb{R}^3 .

En ocasiones, los nudos pueden ser considerados en otros espacios, como la esfera de tres dimensiones S^3 . En la Sección 5 consideraremos los nudos en el anillo engrosado.

Queremos introducir el concepto de equivalencia de nudos. Podemos pensar en un nudo como una cuerda atada en la que pegamos los extremos entre sí. Las Figuras 1, 2 y 3 son ejemplos de nudos. La idea intuitiva será que dos nudos son equivalentes si podemos deformar uno de ellos, moviendo y estirándolo, en el otro, como si de una cuerda atada se tratase. Podríamos pensar en utilizar homeomorfismos. Sin embargo, todos los nudos son homeomorfos a S^1 por definición, por lo que este enfoque no es de utilidad. Podríamos pensar en usar una homotopía, sin embargo, esta permite que una curva pase por encima de sí misma, lo que hace que todo nudo sea homótopo al nudo trivial y, por tanto, todos los nudos serían equivalentes. La isotopía tampoco sirve pues estaría permitido ir reduciendo la parte anudada hasta que prácticamente desapareciese, como se ve en la Figura 4.

Para evitar esto, utilizaremos una isotopía ambiente, que deforma el espacio a la vez que deforma el nudo, evitando que el truco anterior pueda ser usado.

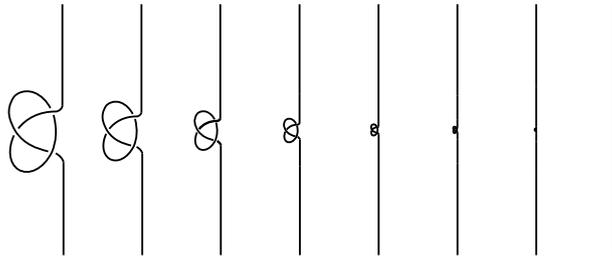


Figura 4: Bachelor's trick

Definición 2.2 Sean N, M dos variedades y g, h dos embebimientos de N en M . Decimos que la aplicación continua

$$F : M \times [0, 1] \longrightarrow M$$

es una isotopía ambiente entre g y h si F_t es un homeomorfismo para todo $t \in [0, 1]$, $F_0 = Id$ y $F_1 \circ g = h$.

Definición 2.3 Sean K_1 y K_2 dos nudos. Diremos que K_1 y K_2 son equivalentes si existe una isotopía ambiente $F : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F(K_1, 0) = F_0(K_1) = K_1$ y $F(K_1, 1) = F_1(K_1) = K_2$. Lo denotaremos por $K_1 \sim K_2$.

Observamos que los embebimientos g y h de la Definición 2.2 estarían implícitos y corresponden a K_1 y K_2 , que recordemos que son las imágenes de dos embebimientos de S^1 en \mathbb{R}^3 . La equivalencia de nudos es una relación de equivalencia. En general, usaremos la palabra nudo para referirnos a toda su clase de equivalencia.

Definición 2.4 Un enlace L es una unión disjunta finita de nudos $L = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n$. Llamaremos número de componentes de L , $\mu(L)$, a n , esto es, al número de nudos que componen L .

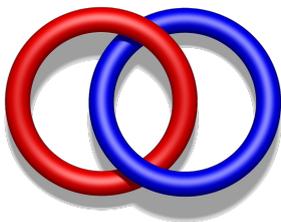


Figura 5: Enlace de Hopf.

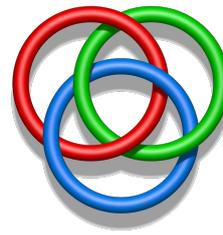


Figura 6: Enlace de Borromeo.

Salvo que se indique expresamente lo contrario, las definiciones y resultados sobre nudos que utilizaremos en el trabajo pueden ser extendidos de forma natural a enlaces, incluyendo el concepto de equivalencia.

Definición 2.5 *Un invariante de enlace es una función del conjunto de enlaces en otro conjunto cuyo valor depende únicamente de la clase de equivalencia del enlace. Así, el valor del invariante puede ser un valor numérico, un polinomio, un grupo o una propiedad.*

Uno de los invariantes más sencillos es el número de componentes $\mu(L)$. Este invariante no distingue un nudo de otro, pues todos los nudos son enlaces con una componente.

Nótese que dos enlaces que tomen el mismo valor para un invariante no son necesariamente equivalentes. Sin embargo, si toman distintos valores para un invariante, entonces los enlaces no son equivalentes. Esta es la importancia de los invariantes a la hora de distinguir enlaces.

Los nudos son subconjuntos de \mathbb{R}^3 , pero en ocasiones resulta muy adecuado reducir la dimensión y representar los nudos en \mathbb{R}^2 . Esto se hace mediante diagramas. Reducir la dimensión no está exento de limitaciones, sin embargo, los beneficios superan los inconvenientes.

Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una proyección sobre un plano en una dirección no contenida en este. Diremos que un punto $x \in \pi(L)$ es regular si $\pi^{-1}(x)$ es un único punto y singular en caso contrario. Queremos que la proyección de nuestro enlace tenga un número finito de puntos singulares, que serán necesariamente aislados, y que tengan únicamente dos puntos en la preimagen, es decir, $|\pi^{-1}(x)| = 2$ para todo $x \in \pi(L)$ punto singular. No queremos que dos arcos sean tangentes en la proyección. Además, buscamos estabilidad, esto es, que modificar ligeramente la dirección sobre la que se proyecta no altere los puntos singulares de la proyección, que la proyección sea esencialmente la misma. Diremos que π es una proyección regular si tiene esas propiedades.

Definición 2.6 *Un diagrama D de un nudo K es una proyección regular sobre la que se realizan las siguientes modificaciones. Sobre cada punto singular $x \in \pi(D)$, que llamamos cruce, representamos con un “arco partido” el entorno de la proyección más alejado del foco de proyección, y con un “arco continuo” el entorno de la proyección más cercano.*



Figura 7: Diagramas del nudo trivial, el nudo trébol y el enlace de Hopf.

Los diagramas de la Figura 7 representan los enlaces mostrados en las Figuras 1, 2 y 5. Tienen 0, 3 y 1 cruces, respectivamente.

Observación 2.7 *Todo nudo admite una proyección regular, y por tanto, puede representarse mediante un diagrama. De hecho, un nudo tiene infinitos diagramas que lo representan.*

Definición 2.8 *Sea D un diagrama de un nudo K . Se define la imagen especular de D , D^* , como el diagrama que se obtiene tras intercambiar los arcos partidos por los arcos continuos en cada cruce. Denotaremos por K^* al nudo que representa D^* , la imagen especular de K . Diremos que K es aquiral si es equivalente a su imagen especular K^* , y diremos que es quirral en caso contrario.*

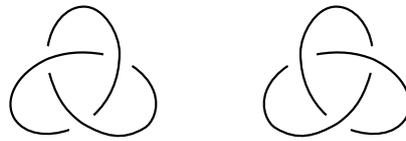


Figura 8: Diagrama del nudo trébol a derecha y de su imagen especular, el nudo trébol a izquierda.

Definición 2.9 *Diremos que dos diagramas D y D' son equivalentes si representan enlaces equivalentes.*

Podemos preguntarnos cuándo dos diagramas representan nudos equivalentes. Para responder a esta pregunta Kurt Reidemeister introdujo en 1927 [17] una serie de transformaciones que corresponden con cambios en un entorno de un diagrama que dejan fijo el resto del mismo, y que son conocidos como movimientos de Reidemeister.

Definición 2.10 *Un movimiento de Reidemeister de tipo 1, $R1$, permite transformar una región del diagrama por otra, como se indica en la Figura 9.*

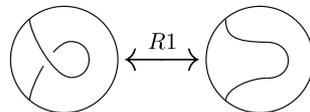


Figura 9: Movimiento de Reidemeister de tipo 1.

Definición 2.11 *Un movimiento de Reidemeister de tipo 2, $R2$, permite transformar una región del diagrama por otra, como se indica en la Figura 10.*

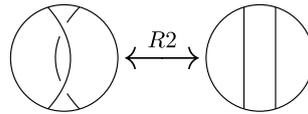


Figura 10: Movimiento de Reidemeister de tipo 2.

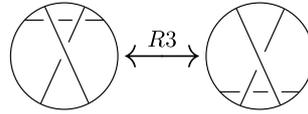


Figura 11: Movimiento de Reidemeister de tipo 3.

Definición 2.12 *Un movimiento de Reidemeister de tipo 3, $R3$, permite transformar una región del diagrama por otra, como se indica en la Figura 11.*

Es claro que los movimientos de Reidemeister no alteran la clase de equivalencia del enlace. Más importante aún, Reidemeister probó que estos tres movimientos, junto con la isotopía plana, son suficientes para transformar un diagrama de un enlace en cualquier otro diagrama del mismo enlace. Este resultado fundamental se conoce como Teorema de Reidemeister, que enunciamos a continuación.

Teorema 2.13 (Teorema de Reidemeister) [17]

Sean D y D' dos diagramas. Entonces, D y D' representan enlaces equivalentes si y solo si existe una secuencia finita de movimientos de Reidemeister que transforma D en D' .

Ejemplo 2.14 *Los diagramas $D = \text{diagrama con un bucle} \text{ y } D' = \text{diagrama con un nudo trébol}$ son equivalentes. En la Figura 12 mostramos la secuencia de movimientos de Reidemeister que transforma un diagrama en el otro, así como los diagramas intermedios.*

Así, D' es otro diagrama que representa al nudo trébol.

El Teorema de Reidemeister da una respuesta teórica a si dos diagramas, y por tanto dos nudos, son equivalentes. En la práctica no es sencillo encontrar una secuencia de movimientos de Reidemeister que pruebe la equivalencia de dos diagramas, pero el teorema abre una vía a la hora de encontrar invariantes: podemos definir invariantes de enlace a partir de diagramas, ya que una función definida sobre un diagrama cuyo valor no se vea alterado tras realizar cualquier movimiento de Reidemeister será un invariante de enlace. Algunos ejemplos de invariantes definidos sobre diagramas son el número de cruce, que

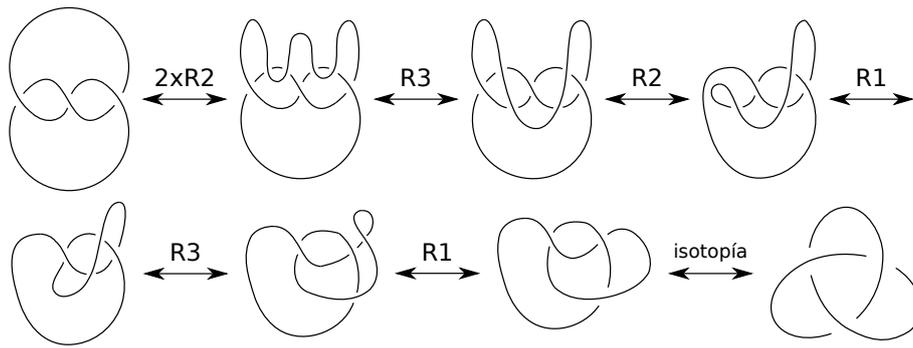


Figura 12: Secuencia de movimientos de Reidemeister.

se define a continuación, el polinomio de Jones y la homología de Khovanov, que se presentarán en las Secciones 3 y 4, respectivamente.

Definición 2.15 Dado un nudo K , se define su número de cruce, $c(K)$, como el menor número de cruces tomado entre todos los diagramas que representan a K , es decir:

$$c(K) = \min\{c(D) \mid D \text{ es diagrama de } K\},$$

donde $c(D)$ es el número de cruces del diagrama D .

Este invariante puede ser difícil de calcular. Resulta evidente que no podemos calcular el número de cruces de los infinitos diagramas de un enlace, por lo que el número de cruces de un diagrama nos da una cota superior del número de cruce del enlace. Para ciertas familias de enlaces, existen diagramas cuyo número de cruces sabemos que es minimal, como veremos en el Teorema 2.18, conocido como Conjetura de Tait [19].

Definición 2.16 Diremos que un diagrama D es alternante si al recorrer cada componente a partir de un punto cualquiera los cruces que se encuentran se pasan alternando arcos partidos y continuos (pasar por arriba y por abajo alternativamente). Diremos que L es un enlace alternante si existe un diagrama alternante de L .

Definición 2.17 Diremos que un diagrama D es reducible si existe una circunferencia en el plano que corta al diagrama en exactamente un punto que corresponde a un cruce, que recibe el nombre de cruce reducible (ver Figura 13). En caso contrario, diremos que D es irreducible o reducido.

Nótese que, dado un diagrama reducible, es posible encontrar un diagrama equivalente con un cruce menos haciendo una reflexión a los puntos contenidos en la circunferencia, tal como se muestra en la Figura 13.

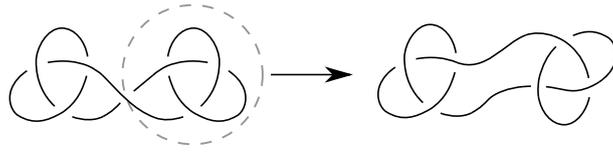


Figura 13: Diagrama reducible.

La Conjetura de Tait fue enunciada en 1900 por Peter Guthrie Tait [19] junto con otras dos conjeturas. Fue demostrada en 1987 por Kauffman [9], Murasugi [14] y Thistlethwaite [20] utilizando cotas dadas por el polinomio de Jones.

Teorema 2.18 (Conjetura de Tait) *Sea D un diagrama reducido y alternante de un enlace L . Entonces, $c(D) = c(L)$.*

Ejemplo 2.19 *Los diagramas del nudo trébol y el enlace de Hopf que se muestran en la Figura 7 son diagramas alternantes. Por tanto, el trébol y el enlace de Hopf tienen número de cruce igual a 3 y 2, respectivamente.*

Introducimos en el final de esta sección el concepto de orientación de un nudo o enlace. Podemos orientar un enlace eligiendo una orientación para cada una de sus componentes. En cada componente tenemos dos orientaciones posibles, por tanto, en un enlace de n componentes tenemos 2^n orientaciones posibles. Un diagrama hereda la orientación del enlace que representa, en cuyo caso decimos que el diagrama está orientado.

Definición 2.20 *Dado un enlace orientado L , denotamos por $-L$ al enlace obtenido al invertir la orientación en todas las componentes de L . Análogamente, dado un diagrama D , escribimos $-D$ para el diagrama obtenido al invertir la orientación de D . Si D representa a L , entonces el diagrama $-D$ representa al enlace $-L$.*

Dado un diagrama orientado, podemos clasificar sus cruces en cruces positivos o negativos, según el criterio siguiente. Nos aproximamos al cruce por el arco que está por debajo siguiendo la orientación escogida. Si el arco que va por arriba va de izquierda a derecha, decimos que el cruce es *positivo*, mientras que si va de derecha a izquierda, decimos que es *negativo*. La Figura 14 ilustra la definición de cruce positivo y negativo.

Definición 2.21 *Sea D un diagrama orientado. Llamamos contorsión o writhe de D al número de cruces positivos menos el número de cruces negativos de D y lo denotaremos por $w(D)$.*

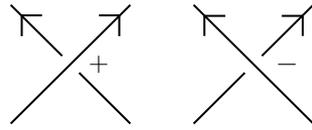


Figura 14: Cruce positivo y cruce negativo.

Ejemplo 2.22 *El siguiente diagrama del nudo trébol a izquierda tiene contorsión -3 , pues tiene 3 cruces y todos ellos son negativos.*

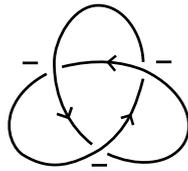


Figura 15: Diagrama orientado del nudo trébol.

Lema 2.23 *Los movimientos de Reidemeister de tipo 2 y 3 preservan la contorsión.*

Demostración.

Sean D y D' dos diagramas orientados que difieren en un movimiento de Reidemeister de tipo 2 y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $c(D) = c(D') + 2$. Es directo comprobar que los cruces adicionales tienen signo opuesto, independientemente de la orientación del diagrama; en la Figura 16 se muestra este hecho para una posible orientación. Así, $w(D) = w(D') + 1 - 1 = w(D')$, con lo que queda probado que la contorsión es invariante bajo movimientos de Reidemeister de tipo 2.

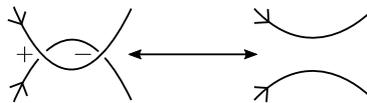


Figura 16: Signo de los cruces bajo un movimiento $R2$.

Para probar que la contorsión es invariante bajo un movimiento $R3$, basta notar que el desplazamiento de uno de los arcos del diagrama no afecta en el número ni en el signo de los cruces del diagrama. En la Figura 17 se muestra un ejemplo para una orientación posible donde se comprueba que los signos de los cruces no cambian. Es inmediato comprobar que esto es cierto para cualquiera de las orientaciones posibles.

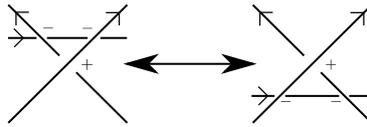


Figura 17: Signo de los cruces bajo un movimiento $R3$.

□

Observación 2.24 La contorsión no es invariante por movimientos de Reidemeister de tipo 1. De hecho, si D y D' son dos diagramas orientados que difieren en un movimiento de Reidemeister de tipo 1, es inmediato que $w(D) = w(D') \pm 1$, como se muestra en la Figura 18.



Figura 18: Signo de los cruces bajo un movimiento $R1$.

Una forma de obtener nudos nuevos a partir de otros es mediante la suma conexa.

Definición 2.25 Sean D_1 y D_2 dos diagramas orientados representando los nudos K_1 y K_2 , respectivamente. Consideremos dos arcos $a \subset D_1$ y $b \subset D_2$ que no estén implicados en ningún cruce. La suma conexa de D_1 y D_2 , que se denota por $D_1 \# D_2$, es el resultado de eliminar a y b y unir los extremos de forma que se conserve la orientación, como se muestra en la Figura 19. Escribimos $K_1 \# K_2$ para el nudo representado por $D_1 \# D_2$.

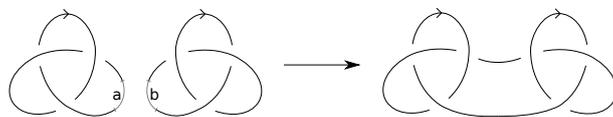


Figura 19: Suma conexa de los nudos trébol a derecha y a izquierda.

Si no exigiésemos que los nudos fuesen orientados, habría dos formas de llevar a cabo la suma conexa, lo que podría dar lugar a dos nudos diferentes.

Definición 2.26 Diremos que L es un enlace separado o split si existe una esfera (topológica) embebida en el complemento $\mathbb{R}^3 \setminus L$ tal que hay componentes de L en ambos lados de la esfera, a saber, L_1 y L_2 . Decimos entonces que L_1 y L_2 son componentes separadas de L y lo denotamos por $L = L_1 \sqcup L_2$.

En el otro sentido, dados dos enlaces L_1 y L_2 , podemos construir $L = L_1 \sqcup L_2$ como la unión separada de L_1 y L_2 situándolos en esferas disjuntas en \mathbb{R}^3 .

2.2. Homología y cohomología clásicas

Introducimos algunos conceptos básicos de homología clásica que necesitaremos en las Secciones 4 y 5. En nuestro caso trabajaremos con \mathbb{Z} -módulos, aunque las definiciones son generales para cualquier anillo R . Para esta sección hemos tomado como referencia [6] y [12].

Definición 2.27 Un complejo de cadenas sobre un anillo R es un conjunto $\mathcal{C} = \{(C_n, d_n)\}$ de R -módulos y R -homomorfismos $\{d_n : C_n \rightarrow C_{n-1} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ que satisfacen $d_n \circ d_{n+1} = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Diremos que un elemento de C_n tiene dimensión n y que d_n es una diferencial. Denotaremos por (\mathcal{C}_*, d) al complejo de cadenas.

Así, la situación que tenemos es

$$\dots \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots$$

Nótese que la condición $d_n \circ d_{n+1} = 0$ es equivalente a la inclusión $\text{Im } d_{n+1} \subseteq \ker d_n$. Cuando el contexto no de lugar a dudas, omitiremos los subíndices de las diferenciales.

Definición 2.28 Sea (\mathcal{C}_*, d) un complejo de cadenas. Decimos que $(\mathcal{C}'_*, d) = (\mathcal{C}'_*, d|_{\mathcal{C}'_*})$ es un subcomplejo de (\mathcal{C}_*, d) si $C'_n \subseteq C_n$ y $d_{n+1}(C'_{n+1}) \subseteq C'_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 2.29 Sean (\mathcal{C}_*, d) un complejo de cadenas y (\mathcal{C}'_*, d) un subcomplejo de cadenas de (\mathcal{C}_*, d) . El complejo de cadenas cociente de \mathcal{C}_* módulo \mathcal{C}'_* es $(C_n/C'_n, d'')$ donde $d''(x + C'_n) = d_n(x) + C'_{n-1}$, para todo $x \in C_n/C'_n$.

Definición 2.30 Sean (\mathcal{C}'_*, d') y (\mathcal{C}''_*, d'') dos complejos de cadenas. Se define el complejo suma directa como $(\mathcal{C}_*, d) = (\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'', d' \oplus d'')$ donde $C_n = C'_n \oplus C''_n$ y $d_n(x', x'') = (d'_n \oplus d''_n)(x', x'') = (d'_n(x'), d''_n(x''))$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Introducimos el concepto de exactitud, que será de utilidad cuando definamos la homología.

Definición 2.31 Decimos que un complejo de cadenas (C_*, d) es exacto en la etapa n si $\text{Im } d_{n+1} = \ker d_n$ y que es exacto si lo es para todo $n \in \mathbb{Z}$. Un complejo exacto de la forma $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ se llama sucesión exacta corta.

De la definición anterior se deducen las siguientes propiedades:

1. $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ es exacto si y solo si $\ker \alpha = 0$, esto es, α es inyectiva.
2. $A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$ es exacto si y solo si $\text{Im } \alpha = B$, esto es, α es sobreyectiva.
3. $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$ es exacto si y solo si α es un isomorfismo, por los dos apartados anteriores.
4. $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ es exacto si y solo si α es inyectiva, β es sobreyectiva y $\ker \beta = \text{Im } \alpha$.

A continuación definimos el concepto de homología.

Definición 2.32 Dado un complejo de cadenas (C_*, d) , se define su n -ésimo R -módulo de homología como el cociente

$$H_n(C_*) = \frac{\ker d_n}{\text{Im } d_{n+1}}.$$

La homología mide de algún modo la separación de un complejo de cadenas de la exactitud. Nótese que si un complejo de cadenas C_* es exacto, entonces $H_n(C_*) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 2.33 Una aplicación en cadenas entre dos complejos de cadenas (C_*, d) y (C'_*, d') es un conjunto de R -homomorfismos $\{f_n : C_n \rightarrow C'_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ satisfaciendo $d'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Así, $f : C_* \rightarrow C'_*$ es un diagrama de cuadrados conmutativos del tipo

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & \dots \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \dots & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n-1} & \xrightarrow{d'_{n-1}} & \dots \end{array}$$

Definición 2.34 Una homotopía en cadenas entre dos aplicaciones en cadenas $f, g : C_* \rightarrow C'_*$, es una sucesión de homomorfismos $\{D_n : C_n \rightarrow C'_{n+1} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ que satisface $d'_{n+1} \circ D_n + D_{n-1} \circ d_n = f_n - g_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se denota por $D : f \simeq g$.

La situación que tenemos es

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & \dots \\
 & \searrow & \downarrow f_n & \downarrow g_n & \downarrow f_{n-1} & \downarrow g_{n-1} & \searrow \\
 \dots & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n-1} & \xrightarrow{d'_{n-1}} & \dots
 \end{array}$$

Lema 2.35 *Las aplicaciones homótopas en cadenas inducen aplicaciones iguales en homología, esto es, si $f \simeq g$, entonces $H_n(f) = H_n(g)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, donde $H_n(f) : H_n(C_*) \rightarrow H_n(C'_*)$. Además, los complejos homotópicamente equivalentes, esto es, que existen $f : C_* \rightarrow C'_*$, $g : C'_* \rightarrow C_*$ tales que $f \circ g \simeq 1_{C'_*}$, $g \circ f \simeq 1_{C_*}$, tienen módulos de homología isomorfos.*

Ahora introducimos el concepto de cohomología, que es la dualización de la homología y que mantiene algunas de sus propiedades y axiomas. Nótese que al tratarse de una dualización, las aplicaciones diferenciales irán en dirección contraria, esto es, una sucesión de R -módulos en un complejo de cadenas es decreciente, mientras que en una cocadena es creciente.

Definición 2.36 *Un complejo de cocadenas sobre un anillo R es un conjunto $C^* = \{(C^n, d^n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ de R -módulos y R -homomorfismos $\{d^n : C^n \rightarrow C^{n+1} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ que satisfacen $d^n \circ d^{n-1} = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Diremos que un elemento de C^n tiene dimensión n y que d^n es un operador derivado. Denotaremos por (C^*, d) al complejo de cocadenas.*

La situación que tenemos es

$$\dots \xrightarrow{d^{n+1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} \dots$$

Definición 2.37 *Sea (C^*, d) un complejo de cocadenas. Se define el n -ésimo R -módulo de cohomología de C^* como el cociente*

$$H^n(C^*) = \frac{\ker d^n}{\text{Im } d^{n-1}}.$$

Igual que ocurre con la homología, la cohomología mide de alguna forma la separación de un complejo de cocadenas de la exactitud. Nótese que si un complejo de cocadenas C es exacto, entonces $H^n(C) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

En la sección de la homología de Khovanov, nos referiremos a los complejos de cocadenas y a los grupos de cohomología como complejos de cadenas y grupos de homología, a pesar de que las sucesiones sean ascendentes, siguiendo la denominación comúnmente aceptada en la literatura.

3. El polinomio de Jones

El polinomio de Jones es un invariante de enlace orientados descubierto en 1984 por Vaughan Jones [7]. Fue el primer invariante polinómico descubierto después del polinomio de Alexander, lo que probó que el polinomio de Alexander no era el único invariante polinómico y provocó que se empezasen a buscar nuevos polinomios que fuesen invariantes. Además, el polinomio supuso un hito ya que fue el primer invariante polinómico que permitía distinguir un nudo de su imagen especular; en particular, el polinomio de Jones permite distinguir el nudo trébol a la derecha y a la izquierda.

Originalmente, Jones definió el polinomio partiendo del grupo de trenzas de n cuerdas \mathbb{B}_n . Por un lado, el Teorema de Alexander asegura que todo enlace puede representarse por una trenza cerrada, que no es única necesariamente. El Teorema de Markov asegura que la clausura de dos trenzas representan el mismo enlace si y solo si existe una secuencia de los llamados movimientos de Markov que transforma una trenza en la otra. Los movimientos de Markov son conjugaciones, estabilizaciones y desestabilizaciones. Así, una función definida sobre el grupo de trenzas cuyo valor se preserve al hacer una conjugación, una estabilización o una desestabilización, es un invariante de enlace. Por otro lado, Werner Burau dio un homomorfismo del grupo de trenzas \mathbb{B}_n en el grupo de matrices $GL(n, \mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$. A partir de la traza de estas matrices, Jones definió el invariante posteriormente conocido como polinomio de Jones, por el que recibió la medalla Fields en el año 1990.

En el año 1987, Louis Kauffman dio una definición combinatoria del polinomio de Jones [9], a partir de un polinomio distinto, hoy conocido como corchete de Kauffman. En esta sección presentamos la definición del polinomio de Jones bajo la aproximación de Kauffman.

3.1. El corchete de Kauffman

El corchete de Kauffman es un polinomio definido sobre diagramas no orientados, no sobre enlaces, porque como veremos más adelante, no es un invariante. Sin embargo, será el primer paso para definir el polinomio de Jones. Antes de introducirlo, necesitamos introducir el concepto de *estado de Kauffman*.

Definición 3.1 *Dado un diagrama D , un estado de Kauffman s de D es una asignación de una etiqueta 0 o 1 a cada cruce del diagrama.*

Por tanto, si D tiene c cruces, existen 2^c estados de Kauffman asociados a D .

Definición 3.2 Dado un cruce \times de un diagrama, llamamos suavizado de tipo 0 y suavizado de tipo 1 del cruce al cambio en el diagrama de este cruce por \smile y \frown , respectivamente.

Si ordenamos los c cruces de un diagrama D , un estado de Kauffman s puede representarse mediante un vector en $\{0, 1\}^c$. Identificaremos s con el diagrama que se obtiene al suavizar cada cruce de D con un suavizado de tipo 0 o 1, según la etiqueta asignada por s . Así, s es una unión disjunta de circunferencias en el plano (posiblemente anidadas). Por ejemplo, en la Figura 20 se muestra un diagrama del trébol con los cruces ordenados y el conjunto de círculos obtenidos al considerar el suavizado $(0, 1, 0)$ o 010 .

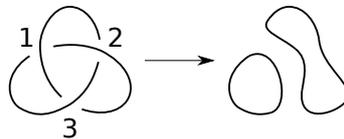


Figura 20: Nudo trébol con sus cruces suavizados de la forma 0, 1 y 0.

Ahora, pasamos a definir el corchete de Kauffman, siguiendo los pasos que motivaron su definición. Inicialmente, Kauffman definió un polinomio con coeficientes en \mathbb{Z} en tres variables A , B y δ de forma que verificase las tres condiciones siguientes:

1. $\langle \bigcirc \rangle = 1$,
2. $\langle D \sqcup \bigcirc \rangle = \delta \langle D \rangle$,
3. $\langle \times \rangle = A \langle \smile \rangle + B \langle \frown \rangle$,

donde las figuras del tercer enunciado representan diagramas que solo difieren en la parte dibujada y cuyos corchetes de Kauffman se relacionan en la forma que se indica. Una relación de este tipo se llama *relación de madeja*. Ahora, nos interesaría que este polinomio fuese invariante por movimientos de Reidemeister. Para que fuese invariante por un movimiento de Reidemeister de tipo $R2$ debería verificarse que $\langle \curvearrowright \rangle = \langle \curvearrowleft \rangle$. Si imponemos esta condición obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \curvearrowright \rangle &= A \langle \smile \rangle + B \langle \frown \rangle = A^2 \langle \overline{\smile} \rangle + AB \langle \overline{\frown} \rangle + AB \langle \overline{\smile} \rangle + B^2 \langle \overline{\frown} \rangle \\ &= (AB\delta + A^2 + B^2) \langle \smile \rangle + AB \langle \frown \rangle \end{aligned}$$

por lo que tenemos que $\langle \overline{\delta} \rangle = \langle \delta \rangle$ si y solo si $AB = 1$ y $AB\delta + A^2 + B^2 = 0$. Esto se verifica si y solo si $B = A^{-1}$ y $\delta = (-A^2 - A^{-2})$. Por tanto, el polinomio depende únicamente de una variable y podemos definirlo como sigue.

Definición 3.3 *Sea D un diagrama no orientado de un enlace L . Se define el corchete de Kauffman como el polinomio de Laurent en la variable A con coeficientes enteros que satisface los siguientes axiomas:*

1. $\langle \bigcirc \rangle = 1$,
2. $\langle D \sqcup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2})\langle D \rangle$,
3. $\langle \overline{\times} \rangle = A\langle \overline{\smile} \rangle + A^{-1}\langle \overline{\frown} \rangle$.

Ejemplo 3.4 *Vamos a calcular el corchete de Kauffman de un diagrama del nudo trivial con un cruce.*

$$\langle \infty \rangle = A\langle \bigcirc \rangle + A^{-1}\langle \bigcirc \rangle = (A + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}))\langle \bigcirc \rangle = -A^{-3}\langle \bigcirc \rangle = -A^{-3}.$$

Nótese que el corchete de Kauffman del diagrama es distinto de 1 a pesar de que el diagrama representa al nudo trivial, por lo que no es invariante por movimientos de Reidemeister de tipo 1.

A la hora de calcular el corchete de Kauffman de un diagrama, puede ser útil utilizar un árbol de resolución, una técnica que consiste en reordenar los sumandos del cálculo del corchete de Kauffman. Se tiene el diagrama D como raíz, que tiene dos hijos, resultados de realizar un suavizado tipo 0 y tipo 1 a un cruce concreto. Se repite el proceso hasta llegar a los 2º suavizados completos. En la rama que une un padre con su hijo se indica el factor por el que se multiplica, A o A^{-1} en este caso. Finalmente, el corchete de Kauffman es el sumatorio del corchete de Kauffman de todos los estados multiplicados por los factores correspondientes a las ramas que los unen con la raíz. El árbol de resolución permite calcular el corchete de Kauffman de un diagrama de forma sencilla y visual, reordenando los sumandos.

Ejemplo 3.5 *Calculemos el corchete de Kauffman del nudo trébol a izquierda mediante su árbol de resolución, que se expone en la Figura 21.*

$$\langle \bigcirc \rangle = A^3(-A^2 - A^{-2})^2 + 3A(-A^2 - A^{-2}) + 3A^{-1} + A^{-3}(-A^2 - A^{-2}) = A^7 - A^3 - A^{-5}.$$

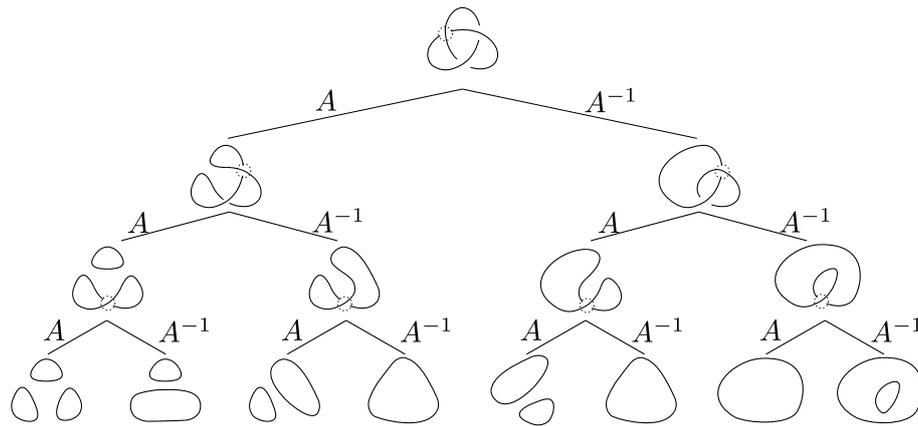


Figura 21: Árbol de resolución correspondiente al nudo trébol.

Lema 3.6 *El corchete de Kauffman es invariante bajo movimientos de Reidemeister de tipo 2 y 3.*

Demostración.

Sabemos que el corchete de Kauffman es invariante bajo movimientos de Reidemeister de tipo 2 por construcción. Para ver que también es invariante bajo movimientos de tipo 3, hay que probar que $\langle \text{diagrama} \rangle = \langle \text{diagrama} \rangle$. En las Figuras 22 y 23 se muestran los árboles de resolución que codifican los corchetes de Kauffman de cada uno de los diagramas.

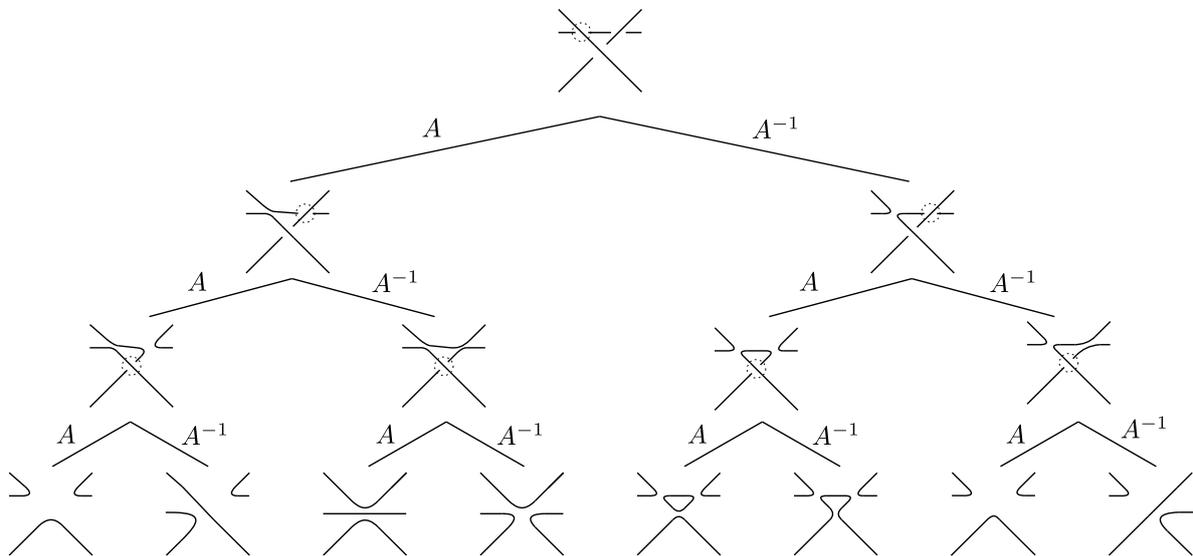


Figura 22: Árbol de resolución correspondiente a uno de los diagramas involucrados en R3.

De esta forma, agrupando estados equivalentes, tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle \overline{\times} \rangle &= (A^3 + 2A^{-1}) \langle \overline{\curvearrowright} \rangle + A \langle \overline{\curvearrowleft} \rangle + A \langle \overline{\times} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\curvearrowright} \rangle + A \langle \overline{\curvearrowleft} \rangle + A^{-3} \langle \overline{\curvearrowleft} \rangle = \\ &= A^{-1} \langle \overline{\curvearrowright} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\curvearrowright} \rangle + A \langle \overline{\curvearrowleft} \rangle + A \langle \overline{\times} \rangle + A^{-3} \langle \overline{\curvearrowleft} \rangle \end{aligned}$$

Análogamente, obtenemos el árbol de resolución asociado a la Figura 23:

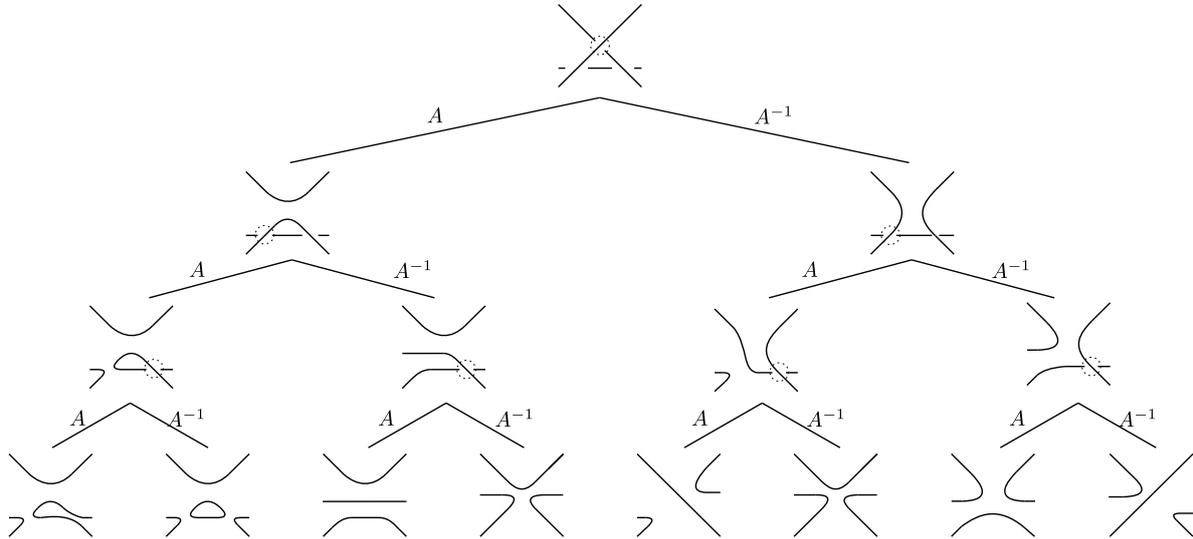


Figura 23: Árbol de resolución correspondiente a uno de los diagramas involucrados en R3.

cuyo corchete de Kauffman es

$$\begin{aligned} \langle \overline{\times} \rangle &= (A^3 + 2A^{-1}) \langle \overline{\curvearrowright} \rangle + A \langle \overline{\curvearrowleft} \rangle + A \langle \overline{\times} \rangle + A \langle \overline{\curvearrowleft} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\curvearrowright} \rangle + A^{-3} \langle \overline{\curvearrowleft} \rangle = \\ &= A^{-1} \langle \overline{\curvearrowright} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\curvearrowright} \rangle + A \langle \overline{\curvearrowleft} \rangle + A \langle \overline{\times} \rangle + A^{-3} \langle \overline{\curvearrowleft} \rangle. \end{aligned}$$

Ambos polinomios son iguales, por lo que el corchete de Kauffman es invariante por movimientos de Reidemeister de tipo 3.

□

Hemos probado que el corchete de Kauffman es invariante por movimientos de Reidemeister de tipo 2 y 3. Sabemos, por el Ejemplo 3.4, que no es invariante por movimientos de tipo 1. Veamos qué ocurre exactamente al polinomio cuando efectuamos un movimiento de este tipo.

$$\begin{aligned} \langle \overline{\curvearrowright} \rangle &= A \langle \circ \rangle + A^{-1} \langle \overline{\curvearrowright} \rangle = (A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1}) = -A^3 \langle \overline{\curvearrowright} \rangle. \\ \langle \overline{\curvearrowleft} \rangle &= A \langle \overline{\curvearrowright} \rangle + A^{-1} \langle \circ \rangle = (A + A^{-1}(-A^2 - A^{-2})) = -A^{-3} \langle \overline{\curvearrowright} \rangle. \end{aligned}$$

Observación 3.7 *Los tres axiomas son suficientes para calcular el corchete de Kauffman de cualquier diagrama. El primer axioma garantiza que el corchete de un diagrama sin cruces del nudo trivial es 1 (conocido como normalización). El tercer axioma es una relación de madeja que permite eliminar un cruce. Por tanto, tras aplicarlo tantas veces como cruces tenga el diagrama llegaremos a una unión disjunta de círculos. Aplicando el segundo axioma podemos ir eliminando estos círculos multiplicando por $(-A^2 - A^{-2})$, de forma que el corchete de Kauffman de una unión disjunta de k círculos es $(-A^2 - A^{-2})^{k-1}$.*

Proposición 3.8 *El corchete de Kauffman de un diagrama D de c cruces es*

$$\langle D \rangle = \sum_s A^{c-2r} (-A^2 - A^{-2})^{k-1},$$

donde el sumatorio se toma sobre los 2^c estados de Kauffman asociados a D , r es la “altura” o el número de suavizados de tipo 1 del estado s y k es el número de círculos asociados a s .

Demostración.

El resultado se sigue de manera directa a partir de la construcción del árbol de resolución, como se aprecia en el Ejemplo 3.5.

□

3.2. El polinomio de Jones: definición y propiedades

Buscamos un invariante que se obtenga a partir del corchete de Kauffman, que hemos probado que es invariante por movimientos de Reidemeister de tipo 2 y 3, pero no de tipo 1. Hemos visto que el corchete de Kauffman se comporta de una manera muy concreta al realizar un movimiento de tipo 1. También conocemos cómo se comporta la contorsión bajo movimientos de Reidemeister de tipo 1. Combinando ambas propiedades, Kauffman dio la siguiente definición del polinomio de Jones.

Definición 3.9 *Sea D un diagrama orientado de un enlace L . Se define el polinomio de Jones de D como*

$$V(D) = (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle.$$

Teorema 3.10 *El polinomio de Jones $V(D)$ es un invariante de enlace.*

Demostración.

Sabemos que el corchete de Kauffman es invariante por movimientos de Reidemeister de tipo 2 y 3. Por el Lema 2.23, tenemos que la contorsión también es invariante por movimientos de Reidemeister de tipo 2 y 3. Por tanto, el polinomio de Jones es invariante por movimientos de Reidemeister de tipo 2 y 3. Veamos ahora que también es invariante por movimientos $R1$. En este caso, el corchete de Kauffman no es invariante por movimientos $R1$, igual que la contorsión. Veamos cómo están relacionados:

Al final de la sección anterior vimos que

$$\langle \nearrow \rangle = -A^3 \langle \searrow \rangle \quad \langle \searrow \rangle = -A^{-3} \langle \nearrow \rangle.$$

Además, podemos observar que hacer un movimiento $R1$ hace que la contorsión aumente o disminuya en una unidad.



En concreto, $w(\nearrow) = w(\searrow) + 1$ y $w(\searrow) = w(\nearrow) - 1$. De esta forma, tenemos

$$\begin{aligned} V(\nearrow) &= (-A)^{-3w(\nearrow)} \langle \nearrow \rangle = (-A)^{-3(w(\searrow) + 1)} (-A)^3 \langle \searrow \rangle = (-A)^{-3w(\searrow)} \langle \searrow \rangle = V(\searrow), \\ V(\searrow) &= (-A)^{-3w(\searrow)} \langle \searrow \rangle = (-A)^{-3(w(\nearrow) - 1)} (-A)^{-3} \langle \nearrow \rangle = (-A)^{-3w(\nearrow)} \langle \nearrow \rangle = V(\nearrow), \end{aligned}$$

donde las figuras representan diagramas que difieren únicamente en un movimiento de Reidemeister de tipo 1. Por tanto, el polinomio de Jones es invariante bajo este movimiento.

Así, el polinomio de Jones es un invariante de enlace.

□

Dado un diagrama D que representa un enlace L , podemos escribir $V(L)$ en lugar de $V(D)$.

Ejemplo 3.11 *Vamos a calcular el polinomio de Jones del nudo trivial a partir del diagrama \circlearrowleft . En el Ejemplo 3.4, calculamos el corchete de Kauffman de este diagrama. Además, es claro que $w(\circlearrowleft) = -1$ pues el único cruce que tiene es negativo independientemente de la orientación tomada. Así, tenemos*

$$V(\circlearrowleft) = (-A)^{-3w(\circlearrowleft)} \langle \circlearrowleft \rangle = (-A)^3 (-A)^{-3} \langle \circ \rangle = 1 = V(\circ).$$

Ejemplo 3.12 Ahora calcularemos el polinomio de Jones del nudo trébol a la izquierda. Recordemos que en el Ejemplo 3.5 habíamos calculado el corchete de Kauffman del nudo trébol a izquierda, obteniendo:

$$\langle \bigcirc \rangle = A^7 - A^3 - A^{-5}.$$

Ahora, teniendo en cuenta que $w(\bigcirc) = -3$, tenemos que

$$V(\bigcirc) = (-A)^{-3w(\bigcirc)} \langle \bigcirc \rangle = A^4 + A^{12} - A^{16}.$$

A continuación veremos algunas propiedades que verifica este invariante.

Proposición 3.13 Sean L, L_1 y L_2 enlaces orientados. El polinomio de Jones satisface las siguientes propiedades:

1. $V(-L) = V(L)$,
2. $V(L^*)(A) = V(L)(A^{-1})$,
3. $V(L_1 \sqcup L_2) = (-A^2 - A^{-2})V(L_1)V(L_2)$,
4. $V(L_1 \# L_2) = V(L_1)V(L_2)$.

Demostración.

1. $V(-L) = V(L)$.

Sea D un diagrama que representa el enlace L . Recordemos que $-D$ es el diagrama obtenido al invertir la orientación de D y que representa a $-L$. Por un lado, el corchete de Kauffman no tiene en cuenta la orientación del enlace, por lo que los corchetes de Kauffman son iguales para ambos diagramas, esto es, $\langle -D \rangle = \langle D \rangle$. Por otro lado, la contorsión también coincide ya que al invertir la orientación de todas las componentes de D , el signo que se le asocia a cada cruce no se ve alterado, como se muestra en la Figura 24:



Figura 24: Signo de un cruce al invertir la orientación.

Así, $w(-D) = w(D)$ y por tanto $V(-L) = (-A)^{-3w(-D)} \langle -D \rangle = (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle = V(L)$.

$$2. V(L^*)(A) = V(L)(A^{-1}).$$

Sea D un diagrama que representa el enlace L , y D^* el diagrama obtenido como imagen especular de D . En primer lugar, veamos qué ocurre con el corchete de Kauffman al tomar la imagen especular de un cruce. Por la relación de madeja que define al corchete de Kauffman, sabemos que $\langle D \rangle(A) = \langle D^* \rangle(A^{-1})$, como se aprecia a continuación:

$$\langle \times \rangle = A \langle \smile \rangle + A^{-1} \langle \oslash \rangle, \quad \langle \oslash \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \smile \rangle.$$

Por otro lado, al tomar la imagen especular, cada cruce cambia de signo, por lo que $w(D^*) = -w(D)$, como se puede ver en la Figura 25:

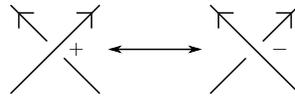


Figura 25: Signo de un cruce y su imagen especular.

$$\text{Así, } V(L^*) = (-A)^{-3w(D^*)} \langle D^* \rangle(A) = (-A)^{3w(D)} \langle D \rangle(A^{-1}) = V(L)(A^{-1}).$$

$$3. V(L_1 \sqcup L_2) = (-A^2 - A^{-2})V(L_1)V(L_2).$$

Sea $D_1 \sqcup D_2$ un diagrama de $L_1 \sqcup L_2$ donde D_1, D_2 son diagramas de L_1, L_2 , respectivamente. Por un lado, tenemos que $w(D_1 \sqcup D_2) = w(D_1) + w(D_2)$. Por otro lado, aplicamos el tercer axioma de la Definición 3.3 del corchete de Kauffman, la relación de madeja, a D_1 , dejando intacto D_2 . De esta forma llegaremos al nudo trivial a partir de D_1 , por lo que tendremos la unión disjunta del nudo trivial y D_2 , con lo que $\langle D_1 \sqcup D_2 \rangle = \langle D_1 \rangle \cdot \langle \bigcirc \sqcup D_2 \rangle$. Ahora, aplicando el segundo axioma de la Definición 3.3 tenemos que este polinomio coincide con $(-A^2 - A^{-2})\langle D_1 \rangle \langle D_2 \rangle$.

$$\text{Así, } V(L_1 \sqcup L_2) = (-A)^{-3w(D_1 \sqcup D_2)} \langle D_1 \sqcup D_2 \rangle = (-A)^{-3(w(D_1) + w(D_2))} (-A^2 - A^{-2}) \langle D_1 \rangle \langle D_2 \rangle = (-A^2 - A^{-2}) (-A)^{-3w(D_1)} \langle D_1 \rangle (-A)^{-3w(D_2)} \langle D_2 \rangle = (-A^2 - A^{-2}) V(L_1) V(L_2).$$

$$4. V(L_1 \# L_2) = V(L_1) V(L_2).$$

Sea $D_1 \# D_2$ un diagrama de $L_1 \# L_2$ donde D_1, D_2 son diagramas de L_1, L_2 , respectivamente. Por un lado, tenemos que $w(D_1 \# D_2) = w(D_1) + w(D_2)$ ya que los cruces y su orientación son iguales localmente. Por otro lado, aplicamos la relación de madeja a D_1 dejando intacto D_2 . De esta forma llegaremos al nudo trivial a partir de D_1 , por lo que tendremos la suma conexa del nudo trivial y D_2 , que es igual a D_2 mediante una isotopía plana, es decir, $\langle D_1 \# D_2 \rangle = \langle D_1 \rangle \langle D_2 \# \bigcirc \rangle = \langle D_1 \rangle \langle D_2 \rangle$.

$$\begin{aligned} \text{Así, } V(L_1 \# L_2) &= (-A)^{-3w(D_1 \# D_2)} \langle D_1 \# D_2 \rangle = (-A)^{-3(w(D_1) + w(D_2))} \langle D_1 \rangle \langle D_2 \rangle = \\ &= (-A)^{-3w(D_1)} \langle D_1 \rangle (-A)^{-3w(D_2)} \langle D_2 \rangle = V(L_1) V(L_2). \end{aligned}$$

□

Observación 3.14 *De la segunda propiedad de la Proposición 3.13 se deduce que si L es un enlace aquiral, es decir, que es equivalente a su imagen especular L^* , entonces $V(L)(A) = V(L)(A^{-1})$. En el otro sentido, si $V(L)(A) \neq V(L)(A^{-1})$, entonces L es un enlace quiral.*

Observación 3.15 *En general, $L_1 \# L_2$ no está definido si L_1 y L_2 tienen más de una componente. La cuarta propiedad de la Proposición 3.13 garantiza que el polinomio de Jones de la suma conexa de enlaces no depende de la manera en que se unan las componentes.*

El polinomio de Jones proporciona cotas superiores del número de cruces de un diagrama, lo que es clave para dar cotas sobre el número de cruce de un enlace (Definición 2.15).

Teorema 3.16 *Sea D un diagrama conexo. Entonces,*

$$\text{ancho } V(D) \leq 4c(D).$$

Además, si D es alternante e irreducible, entonces se alcanza la igualdad.

La idea de la prueba, que puede encontrarse en [5, Teorema 9.6.2, páginas 228-235], es la siguiente: por un lado, el ancho de un polinomio de una variable es la diferencia entre el grado máximo y el grado mínimo del polinomio. Así, es directo que $\text{ancho } V(D) = \text{ancho } \langle D \rangle$, pues los polinomios difieren en una potencia de A , $A^{-3w(D)}$. El siguiente paso consistiría en calcular ciertas cotas que relacionan el ancho del corchete de Kauffman de D con el número de cruces del diagrama D . Se utiliza la familia de enlaces adecuados, que contiene a la familia de enlaces alternantes y cuya definición puede encontrarse en [5, Definición 9.54].

3.3. Cambios de variable: relación de madeja y cubo de resoluciones.

En esta subsección vamos a dar dos definiciones alternativas del polinomio de Jones. La segunda de ellas será de gran utilidad en la Sección 4, pues definiremos los complejos

de cadenas partiendo de esta versión.

En ocasiones, el polinomio de Jones se define en la variable t .

Definición 3.17 *El polinomio de Jones es el único polinomio $V(L) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ que toma el valor 1 en cualquier diagrama del nudo trivial (normalizado) y tal que satisface la relación de madeja*

$$t^{-1}V(\overrightarrow{\times}) - tV(\overleftarrow{\times}) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(\overleftrightarrow{\times}).$$

Teorema 3.18 *La definición anterior del polinomio de Jones es equivalente a la Definición 3.9 bajo el cambio de variable $A = t^{-1/4}$.*

Demostración.

Partimos de la relación de madeja del corchete de Kauffman:

$$\langle \overrightarrow{\times} \rangle = A\langle \overleftrightarrow{\times} \rangle + A^{-1}\langle \rangle \quad \langle \overleftarrow{\times} \rangle = A^{-1}\langle \overleftrightarrow{\times} \rangle + A\langle \rangle.$$

Multiplicando por A la primera igualdad y restando la segunda multiplicada por A^{-1} llegamos a

$$A\langle \overrightarrow{\times} \rangle - A^{-1}\langle \overleftarrow{\times} \rangle = (A^2 - A^{-2})\langle \overleftrightarrow{\times} \rangle.$$

Ahora, solo hay una orientación posible para los tres diagramas de forma que se respete la orientación al realizar el suavizado de tipo 0, a saber $\overrightarrow{\times}, \overleftarrow{\times}, \overleftrightarrow{\times}$. Nótese que hemos omitido la orientación hasta ahora porque el corchete de Kauffman se define sobre diagramas no orientados. Comparando la contorsión de los diagramas, tenemos $w(\overrightarrow{\times}) - 1 = w(\overleftrightarrow{\times}) = w(\overleftarrow{\times}) + 1$. Además, $\langle D \rangle = (-A)^{3w(D)}V(D)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} A\langle \overrightarrow{\times} \rangle - A^{-1}\langle \overleftarrow{\times} \rangle &= (A^2 - A^{-2})\langle \overleftrightarrow{\times} \rangle \iff \\ \iff A(-A)^{3w(\overrightarrow{\times})}V(\overrightarrow{\times}) - A^{-1}(-A)^{3w(\overleftarrow{\times})}V(\overleftarrow{\times}) &= (A^2 - A^{-2})(-A)^{3w(\overleftrightarrow{\times})}V(\overleftrightarrow{\times}) \iff \\ \iff A(-A)^{3(w(\overleftrightarrow{\times})+1)}V(\overrightarrow{\times}) - A^{-1}(-A)^{3(w(\overleftrightarrow{\times})-1)}V(\overleftarrow{\times}) &= (A^2 - A^{-2})(-A)^{3w(\overleftrightarrow{\times})}V(\overleftrightarrow{\times}) \iff \\ \iff -A^4V(\overrightarrow{\times}) + A^{-4}V(\overleftarrow{\times}) &= (A^2 - A^{-2})V(\overleftrightarrow{\times}) \iff \\ \iff t^{-1}V(\overrightarrow{\times}) - tV(\overleftarrow{\times}) &= (t^{1/2} - t^{-1/2})V(\overleftrightarrow{\times}), \end{aligned}$$

que es la relación de madeja del enunciado, con lo que queda probado el Teorema. \square

Ejemplo 3.19 *Calculemos el polinomio de Jones de la unión distante de dos nudos triviales. Teniendo en cuenta que el polinomio de Jones del nudo trivial es 1 y usando la relación de madeja, tenemos*

$$t^{-1}V(\infty) - tV(\infty) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(\circ\circ) \implies V(\circ\circ) = \frac{t^{-1} - t}{t^{1/2} - t^{-1/2}} \implies V(\circ\circ) = -t^{-1/2} - t^{1/2}.$$

El polinomio de Jones puede ser definido partiendo de una versión alternativa del corchete de Kauffman. Esta definición será de utilidad en la próxima sección y será la que utilicemos a partir de ahora.

Definición 3.20 *Sea D un diagrama de un enlace L . Se define el polinomio corchete como el polinomio de Laurent en la variable q que satisface los siguientes axiomas:*

1. $\langle\langle \bigcirc \rangle\rangle = 1$,
2. $\langle\langle D \sqcup \bigcirc \rangle\rangle = (q + q^{-1})\langle\langle D \rangle\rangle$,
3. $\langle\langle \times \rangle\rangle = \langle\langle \smile \rangle\rangle - q \langle\langle \rangle \rangle$.

Observación 3.21 *El polinomio corchete no es invariante por movimientos de Reidemeister de tipo 2.*

Consideremos un diagrama del nudo trivial obtenido tras realizar un movimiento de Reidemeister de tipo 2 al diagrama usual del nudo trivial. Si el polinomio corchete fuese invariante bajo movimientos de Reidemeister de tipo 2, entonces el polinomio corchete de este diagrama debería ser 1.

$$\langle\langle \Sigma \rangle\rangle = \langle\langle \bar{\Sigma} \rangle\rangle - q \langle\langle \mathcal{Q} \rangle\rangle = \langle\langle \bar{\bigcirc} \rangle\rangle - q \langle\langle \bar{\Sigma} \rangle\rangle - q \langle\langle \bigcirc \rangle\rangle + q^2 \langle\langle \mathcal{Q} \rangle\rangle = q + q^{-1} - q(q + q^{-1})^2 - q + q^2(q + q^{-1}) = -q.$$

El polinomio corchete de este diagrama del nudo trivial es $-q$ en lugar de 1, por lo que el polinomio corchete no es invariante bajo movimientos de Reidemeister de tipo 2.

Proposición 3.22 *Sea D un diagrama. Entonces,*

$$\langle\langle D \rangle\rangle = \sum_s (-q)^r (q + q^{-1})^{k-1},$$

donde el sumatorio se toma sobre todos los estados de Kauffman s de D y r y k son, respectivamente, la altura (número de suavizados de tipo 1) y el número de círculos en el estado de Kauffman s .

Demostración.

La prueba es análoga a la de la Proposición 3.8.

□

Definición 3.23 Sea D un diagrama de un enlace L , y sean p y n el número de cruces positivos y negativos, respectivamente, de D . Se define el polinomio de Jones normalizado (en la variable q) de L como

$$J(L) = (-1)^n q^{p-2n} \langle\langle D \rangle\rangle.$$

Observación 3.24 En ocasiones, resulta más conveniente considerar el polinomio de Jones no normalizado, definido como

$$\tilde{J}(L) = (-1)^n q^{p-2n} (q + q^{-1}) \langle\langle D \rangle\rangle.$$

Este polinomio toma el valor $q + q^{-1}$ para el nudo trivial. En la Sección 4 usaremos esta versión del polinomio de Jones.

Proposición 3.25 El polinomio de Jones en la variable A es equivalente al polinomio de Jones en la variable q bajo el cambio de variable $q = -A^{-2}$, esto es, $V(L) = J(L)|_{q=-A^{-2}}$.

Demostración.

Sea D un diagrama con c cruces que representa el enlace L . Se tiene que $c = p + n$ y $w(D) = p - n$. Por tanto, se tiene la igualdad $\frac{3w(D)-c}{2} = p - 2n$, que utilizaremos más adelante.

Por definición, tenemos que

$$V(D) = (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle = (-A)^{-3w(D)} \sum_s A^{c-2r} (-A^2 - A^{-2})^{k-1}$$

y

$$J(D) = (-1)^n q^{p-2n} \langle\langle D \rangle\rangle = (-1)^n q^{p-2n} \sum_s (-q)^r (q + q^{-1})^{k-1},$$

donde k es el número de círculos y r el número de suavizados de tipo 1 del estado s . Veamos que los polinomios son equivalentes bajo el cambio de variable $q = -A^{-2}$. Bastará probar que $(-A)^{-3w(D)} A^{c-2r} = (-1)^n q^{p-2n} (-q)^r$ para cada estado de Kauffman s , ya que si fuese cierto, entonces cada sumando del sumatorio coincidiría con el correspondiente sumando en la otra variable. En primer lugar, manipulemos el término en la variable A para poder hacer el cambio de variable.

$$\begin{aligned} (-A)^{-3w(D)} A^{c-2r} &= (-1)^{-3w(D)} (A^{-2})^{\frac{3w(D)}{2}} (A^{-2})^{\frac{c-2r}{-2}} = \\ &= (-1)^{-3w(D)} (-q)^{\frac{3w(D)}{2}} (-q)^{\frac{c-2r}{-2}} = (-1)^{-3w(D)} (-q)^{\frac{3w(D)-c}{2}} (-q)^r. \end{aligned}$$

Así, igualando la contribución de cada estado a ambos sumatorios, tenemos:

$$\begin{aligned} (-A)^{-3w(D)} A^{c-2r} &= (-1)^n q^{p-2n} (-q)^r \iff \\ (-1)^{-3w(D)} (-q)^{\frac{3w(D)-c}{2}} (-q)^r &= (-1)^n q^{p-2n} (-q)^r \iff \\ (-1)^{-3w(D)} (-1)^{\frac{3w(D)-c}{2}} q^{\frac{3w(D)-c}{2}} &= (-1)^n q^{p-2n} \iff \\ (-1)^{-3(p-n)+p-2n} q^{p-2n} &= (-1)^n q^{p-2n} \iff \\ (-1)^{n-2p} &= (-1)^n, \end{aligned}$$

lo cual es cierto.

Así, hemos demostrado que ambas versiones del polinomio de Jones son equivalentes bajo el cambio de variable $q = -A^{-2}$.

□

Ejemplo 3.26 *Calculemos el polinomio de Jones del nudo trébol a izquierda en la variable q . Empecemos calculando el polinomio corchete, representado en la Figura 26.*

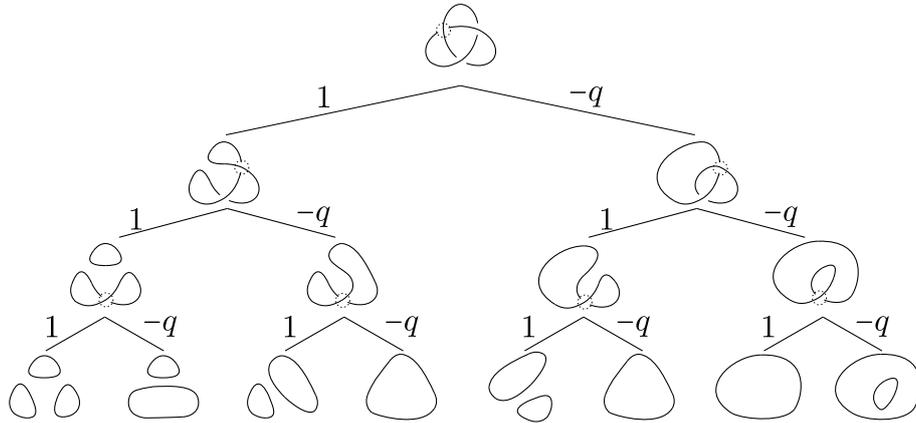


Figura 26: *Árbol de resolución del trébol.*

Por tanto, el polinomio corchete del nudo trébol a izquierda es

$$\langle\langle \text{trébol a izquierda} \rangle\rangle = (q + q^{-1})^2 + (-3q - q^3)(q + q^{-1}) + 3q^2 = (q^{-2} - 1 - q^4).$$

Ahora, teniendo en cuenta que $(c, p, n) = (3, 0, 3)$ para el diagrama dado del trébol, podemos calcular el polinomio de Jones:

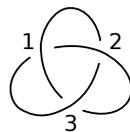
$$J(\text{trébol}) = (-1)^3 q^{-6} \langle\langle \text{trébol} \rangle\rangle = (-1)^3 q^{-6} (q^{-2} - 1 - q^4) = -q^{-8} + q^{-6} + q^{-2}.$$

Haciendo el cambio de variable $q = -A^{-2}$ obtenemos $V(\text{trébol}) = A^4 + A^{12} - A^{16}$, que coincide con el valor que habíamos calculado en el Ejemplo 3.12.

Al igual que ocurría con los árboles de resoluciones, en ocasiones para calcular el polinomio de Jones resulta conveniente disponer los estados en forma de cubo c -dimensional según el llamado cubo de resoluciones. En realidad se trata de una reordenación de los sumandos del polinomio corchete que explicamos a continuación:

Dado un diagrama D , ordenamos los cruces y colocamos los estados de Kauffman (la etiqueta y el diagrama resultante de suavizar los cruces) por columnas según su altura (el número de suavizados de tipo 1), de forma que cada estado corresponderá con un vértice del cubo. Unimos con una arista aquellos estados que difieran exactamente en el suavizado de un cruce, por lo que las aristas unen estados de alturas consecutivas. Bajo cada estado s se coloca el polinomio $q^r (q + q^{-1})^k$, esto es, q elevado a la altura del estado multiplicado por $(q + q^{-1})$ elevado al número de círculos del estado, k . Nótese que este polinomio es, salvo signo, el sumando que aporta el estado s al polinomio corchete (ver Proposición 3.22), multiplicado por $(q + q^{-1})$. La decisión de colocar $q^r (q + q^{-1})^k$ en lugar de $q^r (q + q^{-1})^{k-1}$, en cuyo caso obtendríamos el polinomio corchete, no es casual (en la Sección 4 veremos el motivo de esta decisión). El sumatorio se divide en un sumatorio sobre todos los estados de altura r y otro sobre todas las alturas posibles. Esto permite extraer $(-1)^r$ como factor común y convertir el sumando sobre las alturas en una suma alternada. Finalmente se multiplica por el factor normalizador $(-1)^n q^{p-2n}$ para obtener el polinomio de Jones no normalizado y se divide por $(q + q^{-1})$ para obtener el polinomio de Jones normalizado. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo, que corresponde con el cálculo del polinomio de Jones del trébol a la izquierda, ya calculado previamente en el Ejemplo 3.26 usando un árbol de resolución.

Ejemplo 3.27 Calculemos el polinomio de Jones del trébol en la variable q . En primer lugar, ordenamos los cruces del diagrama del trébol:



En segundo lugar, construimos el cubo de resoluciones, escribiendo bajo cada estado el polinomio asociado como se muestra en la Figura 27. Ahora, calculamos el polinomio

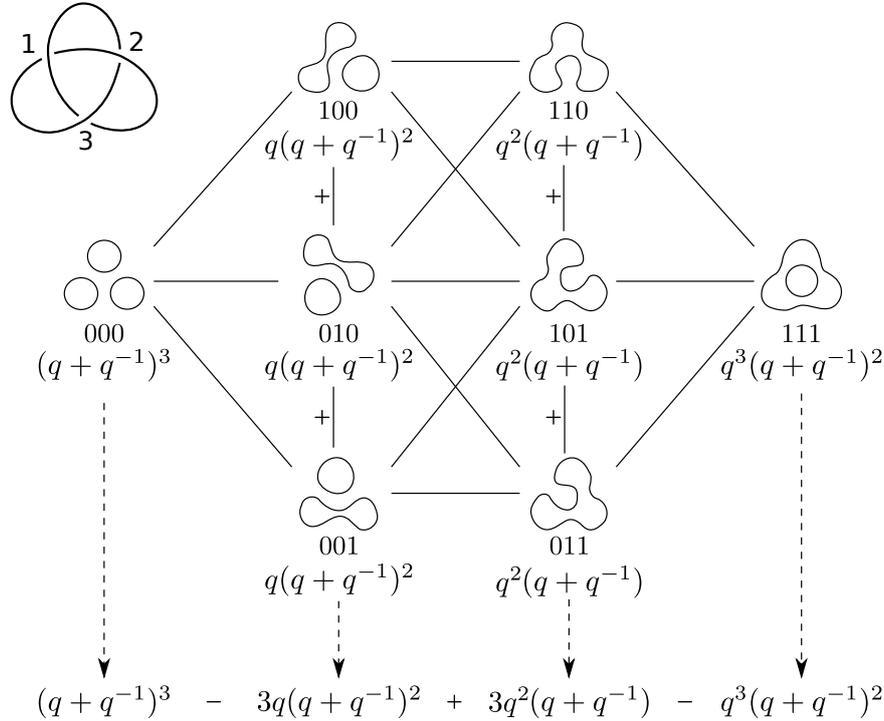


Figura 27: Cubo de resolución asociado al diagrama usual del trébol a izquierda.

corchete:

$$\langle\langle \text{Trefoil} \rangle\rangle = (q + q^{-1})^3 - 3q(q + q^{-1})^2 + 3q^2(q + q^{-1}) - q^3(q + q^{-1})^2 = -q^5 - q^3 - q + q^{-3}.$$

Por último, calculamos el polinomio de Jones normalizado:

$$J(\text{Trefoil}) = (-1)^n \frac{q^{p-2n}}{q + q^{-1}} \langle\langle \text{Trefoil} \rangle\rangle = (-1)^3 \frac{q^{-6}}{q + q^{-1}} (-q^5 - q^3 - q + q^{-3}) = -q^{-8} + q^{-6} + q^{-2}.$$

Observamos que el resultado es igual al obtenido en el Ejemplo 3.26.

4. Homología de Khovanov

Mikhail Khovanov introdujo en el año 2000 [10] un nuevo invariante homológico conocido hoy día por el nombre de homología de Khovanov. Este invariante, que es una homología bigraduada, categorifica el polinomio de Jones y es, de hecho, un invariante más fino, como se verá en el Ejemplo 4.16.

A raíz de la publicación de Khovanov han surgido nuevas aproximaciones a este invariante, como la aportada por Oleg Viro [21] y por Bar-Natan [4], que será la que tomaremos como referencia en esta sección.

4.1. Definición y propiedades

El objetivo de esta sección es explicar la manera en que, dado un diagrama, se le asocia un complejo de cadenas cuyos grupos de homología asociados son invariantes de enlace. La idea es partir del cubo de resoluciones de la Figura 27 y asociar a cada estado un espacio vectorial graduado cuya dimensión (graduada) sea justamente el polinomio que aparece en el cubo debajo del mismo. En particular, asociaremos un espacio vectorial graduado a cada círculo en un estado, de forma que el producto tensorial de estos espacios sea el espacio vectorial graduado descrito antes. Las diferenciales se definirán sobre las aristas del cubo.

Comenzamos introduciendo algunos conceptos sobre espacios vectoriales graduados que nos serán útiles a la hora de definir el complejo de cadenas de Khovanov. Recordemos que un espacio vectorial graduado no es más que un espacio vectorial sobre el que se define una función grado que asocia, a cada elemento del espacio vectorial, un número entero que recibe el nombre de grado.

Definición 4.1 Sea $W = \bigoplus_m W_m$ un espacio vectorial graduado con componentes homogéneas $\{W_m\}$. La dimensión graduada de W es la serie de potencias $\dim W = \sum_m q^m \dim W_m$.

Definición 4.2 Sea $W = \bigoplus_m W_m$ un espacio vectorial graduado. Se define la operación “cambio de grado”, denotada por $\{l\}$, como $W\{l\} = \bigoplus_m W\{l\}_m$ donde $W\{l\}_m = W_{m-l}$, de forma que $\dim W\{l\} = q^l \dim W$.

Definición 4.3 Sea \bar{C} un complejo de cadenas $\dots \rightarrow \bar{C}^r \rightarrow \bar{C}^{r+1} \rightarrow \dots$ de espacios vectoriales, posiblemente graduados. Se define la operación de “cambio de altura”, que denotamos

por $[s]$, como $\bar{\mathcal{C}}[s] = \mathcal{C}$, el complejo de cadenas tal que $\mathcal{C}^r = \bar{\mathcal{C}}^{r-s}$, donde las aplicaciones diferenciales quedan desplazadas como corresponde.

Pasamos a definir el complejo de cadenas de Khovanov. Sea D un diagrama con c cruces de un enlace orientado L . Sean p y n el número de cruces positivos y negativos de D , respectivamente. Consideremos V el espacio vectorial graduado generado por los elementos v_+ y v_- , cuyos grados son 1 y -1 , respectivamente. Así, $\dim V = q + q^{-1}$. Ahora, a cada estado s le asociamos el espacio vectorial graduado $V_s(D) = V^{\otimes k}\{r\}$, donde k es el número de círculos en s y r es la altura o el número de suavizados de tipo 1 del estado s . De esta forma, $\dim V_s(D) = q^r(q + q^{-1})^k$, que coincide con el polinomio que aparece en el vértice del cubo de resolución correspondiente al estado de Kauffman s (ver Figura 27 para un ejemplo).

Ahora, definimos el r -ésimo grupo de cadenas $[[D]]^r$ como la suma directa de todos los espacios vectoriales de altura r , es decir, $[[D]]^r = \bigoplus_{s:|s|=r} V_s(D)$. La Figura 28 recoge esta primera parte del proceso. Finalmente, definimos el complejo de cadenas $\mathcal{C}(D) = [[D]][-n]\{p-2n\}$, a falta de dotarlo de las aplicaciones diferenciales.

Observación 4.4 *Los ajustes en $\mathcal{C}(D)$ corresponden con los ajustes del polinomio de Jones respecto al polinomio corchete (Definición 3.23). El cambio de grado $\{p-2n\}$ hace que la dimensión quede multiplicada por q^{p-2n} y corresponde con el factor q^{p-2n} que multiplica al polinomio corchete. El cambio de altura $[-n]$ se corresponde con el factor $(-1)^n$, ya que cada cambio de altura desplaza la cadena una posición, haciendo que la suma alternada cambie de signo.*

Proposición 4.5 *Sea L un enlace orientado y D un digrama que lo representa. Entonces, la suma alternada de las dimensiones graduadas de los grupos de cadenas de $\mathcal{C}(D)$ coincide con el polinomio de Jones no normalizado $\tilde{J}(L)$.*

Demostración.

La prueba es inmediata teniendo en cuenta las Figuras 27 y 28. La dimensión del r -ésimo grupo de cadenas $[[D]]^r$ es, por definición, la suma de las dimensiones de los espacios vectoriales graduados asociados a los estados de altura r , esto es, $(q + q^{-1})^k$. Como se explica en la Observación 4.4, el cambio de grado $\{p-2n\}$ corresponde a la multiplicación por q^{p-2n} en la Observación 3.24 y el cambio de altura $[-n]$ garantiza que al tomar la suma alternada los signos coincidan con los dados por $(-1)^n$. Así, la suma alternada de las dimensiones graduadas de los grupos de cadenas de $\mathcal{C}(D)$ coincide con $\tilde{J}(L)$.

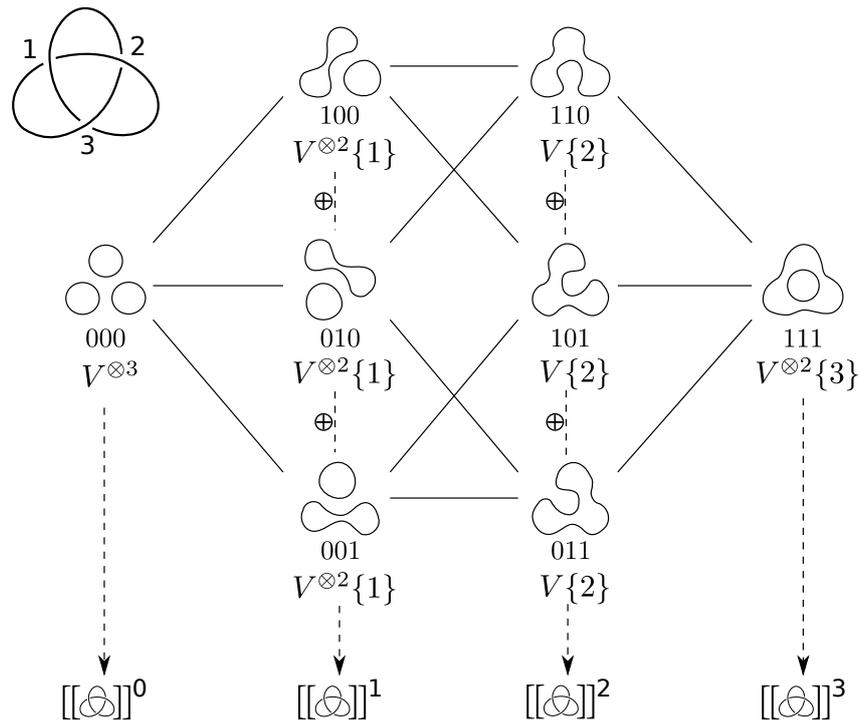


Figura 28: Cubo del trébol a izquierda con los espacios vectoriales graduados.

□

Definición 4.6 La característica de Euler graduada de un complejo de cadenas (\mathcal{C}, d) , $\chi_q(\mathcal{C})$, es la suma alternada de las dimensiones graduadas de los grupos de homología asociados a (\mathcal{C}, d) . Además, si el grado de la diferencial d es 0 y todos los grupos de cadenas son de dimensión finita, entonces la característica de Euler graduada coincide con la suma alternada de las dimensiones graduadas de los grupos de cadenas.

Corolario 4.7 Sea D un diagrama de un enlace orientado L . Si dotamos a $\mathcal{C}(D)$ de una diferencial de grado 0, entonces la característica de Euler graduada de $\mathcal{C}(D)$ coincide con el polinomio de Jones no normalizado de L , esto es, $\chi_q(\mathcal{C}(D)) = \tilde{J}(L)$.

El objetivo, por tanto, es dotar a $\mathcal{C}(D)$ de las aplicaciones diferenciales necesarias para que sea un complejo de cadenas. Sea ξ una arista del cubo de resoluciones del diagrama D que conecta dos estados $s_1, s_2 \in \{0, 1\}^c$ con $|s_1| = |s_2| - 1$ o, dicho de otro modo, la altura o número de unos en s_2 es mayor en una unidad que la altura de s_1 . Diremos que s_1 es el estado de origen de ξ y s_2 el estado de llegada, y definimos la altura de ξ como $|\xi| = |s_1|$.

Asociamos una etiqueta en $\{0, 1, \star\}^c$ a ξ , de forma que \star sustituya la coordenada en que difieren s_1 y s_2 . Así, cambiando \star por 0 obtenemos el estado de origen s_1 y cambiando \star por 1 obtenemos el estado de llegada s_2 . Definimos el signo $(-1)^\xi = (-1)^{\sum_{i < j} \xi_i}$ donde j es la posición que ocupa \star en la etiqueta de ξ , es decir, -1 elevado al número de unos en la etiqueta antes de \star .

Los estados de Kauffman unidos por una arista ξ difieren únicamente en el suavizado de un cruce, de manera que dos círculos se fusionan en un único círculo o un círculo se separa en dos, dejando el resto de círculos intactos en ambos casos. En la Figura 29 se muestran tres estados del diagrama usual del trébol que difieren en un suavizado y que corresponden a un camino de longitud 2 en el cubo de resoluciones de la Figura 28.

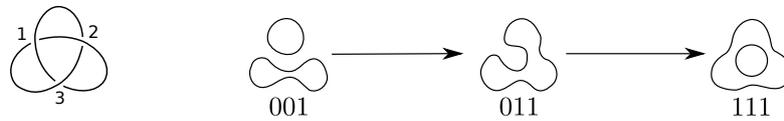


Figura 29: Tres estados del trébol que difieren en un suavizado.

Consideremos primero el caso en que dos círculos se unen al cambiar una etiqueta de tipo 0 por una etiqueta de tipo 1 en un cruce. Así, definimos una aplicación $m: V \otimes V \rightarrow V$, que llamamos multiplicación, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 m: \quad V \otimes V &\longrightarrow V \\
 v_+ \otimes v_+ &\longmapsto m(v_+ \otimes v_+) = v_+, \\
 v_+ \otimes v_- &\longmapsto m(v_+ \otimes v_-) = v_-, \\
 v_- \otimes v_+ &\longmapsto m(v_- \otimes v_+) = v_-, \\
 v_- \otimes v_- &\longmapsto m(v_- \otimes v_-) = 0.
 \end{aligned}$$

De manera análoga, en el caso en que cambiar una etiqueta tipo 0 por una etiqueta tipo 1 provoque que un círculo se separe en dos, definimos una aplicación $\Delta: V \rightarrow V \otimes V$, que llamamos comultiplicación, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \Delta: \quad V &\longrightarrow V \otimes V \\
 v_+ &\longmapsto \Delta(v_+) = v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+, \\
 v_- &\longmapsto \Delta(v_-) = v_- \otimes v_-.
 \end{aligned}$$

Con estas dos aplicaciones, definimos la diferencial asociada a la arista ξ , d_ξ , como la aplicación que aplica m a los dos círculos que se unen, o Δ al círculo que se separa, según sea el caso, y la identidad al resto de círculos. Se define la diferencial $d^r = \sum_{|\xi|=r} (-1)^\xi d_\xi$. Con todos los elementos introducidos hasta ahora, el cubo de resoluciones y el complejo

de cadenas asociado al trébol a izquierda quedarían como se muestra en la Figura 30, donde las aristas ξ para las que $(-1)^\xi = -1$ se indican con un círculo \bullet en su origen.

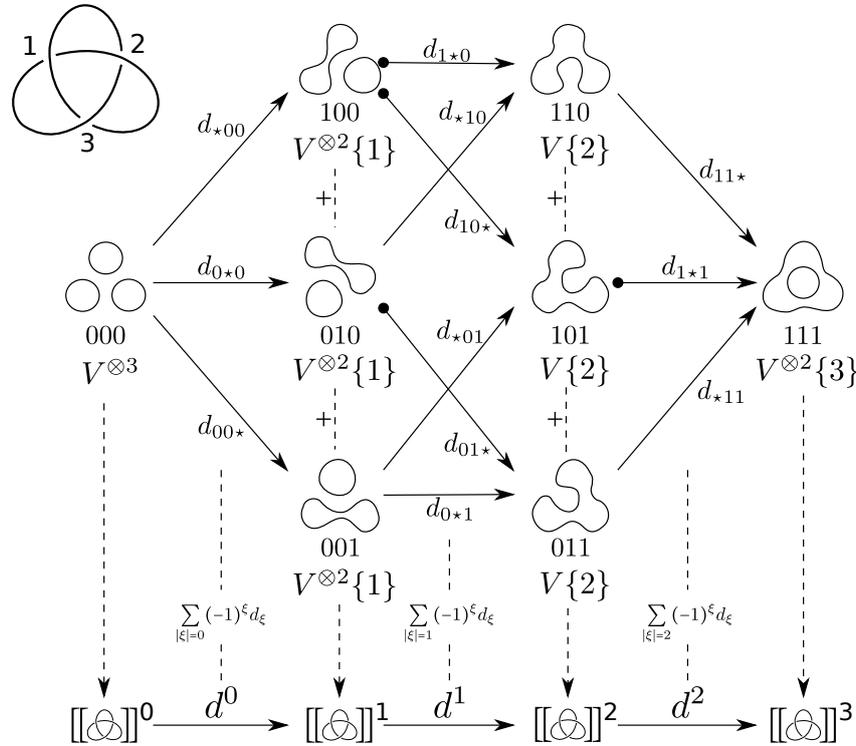


Figura 30: Cubo de resoluciones y complejo de cadenas asociado al trébol a izquierda.

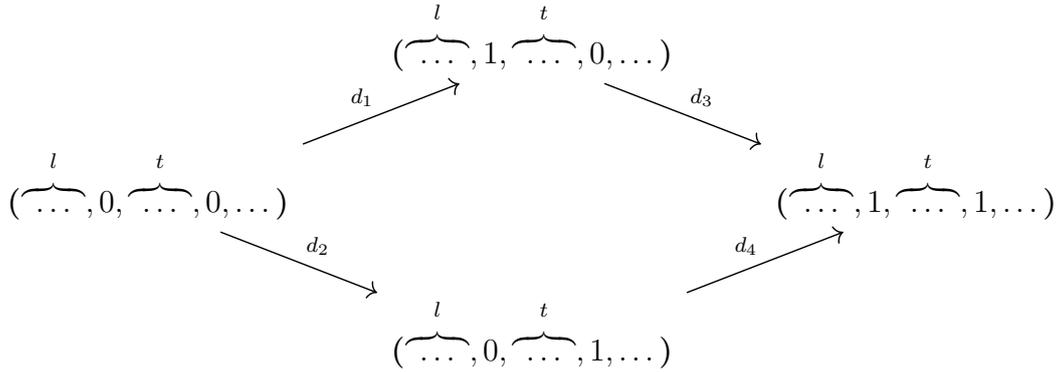
Teorema 4.8 *Sea D un diagrama de un enlace. Entonces, el cubo de resoluciones correspondiente (como en la Figura 30) es conmutativo al ignorar el signo de las diferenciales d_{ξ} . Además, al incorporar el signo a las diferenciales, las caras del cubo anticonmutan y, por tanto, las sucesiones $[[D]]$ y $\mathcal{C}(D)$ son complejos de cadenas.*

Demostración.

Consideremos una cara del cubo de resoluciones y las aplicaciones de las aristas, d_{ξ} , sin signo. Cada una de estas aplicaciones une dos círculos en uno o bien separa un círculo en dos, y aplica la identidad al resto. Al hacer las dos composiciones, notamos que el orden en que se unan o separen los círculos no influye en el resultado, por lo que la cara del cubo es conmutativa. Por tanto, el cubo de resoluciones es conmutativo, siempre que ignoremos el signo.

Por otro lado, veamos que si tenemos en cuenta el signo, las caras anticonmutan. Esto es equivalente a ver que exactamente una de las cuatro aplicaciones que conforman cada

cara tiene el signo opuesto al de las otras tres aplicaciones. Consideremos los estados de estas caras. Serán de la forma $(\dots, i, \dots, j, \dots)$, donde i y j corresponden a las posiciones de los cruces en los que cambia el suavizado y los puntos suspensivos representan cruces cuya etiqueta no se altera. Supongamos que hay l unos antes de la coordenada i y t unos entre las coordenadas i y j , no incluidas. Tenemos la siguiente situación:



Los signos de las aplicaciones d^1, d^2, d^3 y d^4 serán, respectivamente, $(-1)^l, (-1)^{l+t}, (-1)^{l+t+1}$ y $(-1)^l$. Claramente la segunda y la tercera tienen paridad diferente, y las otras dos tienen la misma paridad. Necesariamente habrá tres aplicaciones con el mismo signo, y una con el opuesto. Por tanto, la cara es anticonmutativa, es decir, $d_3 \circ d_1 + d_4 \circ d_2 = 0$. Así, $d^{r+1} \circ d^r = 0$, por lo que $[[D]]$ y $\mathcal{C}(D)$ son complejos de cadenas.

□

Lema 4.9 *La diferencial d tiene grado 0.*

Demostración.

Si no tenemos en cuenta el cambio de grado, m y Δ tienen grado -1, ya que llevan cada elemento del espacio de salida a un elemento cuyo grado es el mismo menos uno. Basta fijarse en la definición de las aplicaciones y en los grados de los elementos de la base y de sus imágenes. Ahora, teniendo en cuenta el cambio de grado que proviene del cambio de grado $\{1\}$, m y Δ tienen grado 0 y, por tanto, la diferencial d tiene grado 0.

□

Nótese que las definiciones de m y Δ vienen forzadas para que tengan grado -1. Ahora, estamos en condiciones de definir la homología de Khovanov.

Definición 4.10 Sea D un diagrama de un enlace orientado. El complejo de cadenas $\mathcal{C}(D)$ se llama complejo de Khovanov.

Observación 4.11 El complejo de Khovanov $\mathcal{C}(D)$ depende del diagrama D . En particular, si D_1 y D_2 son dos diagramas que representan a un enlace L con distinto número de cruces, entonces la dimensión del cubo de resoluciones sobre el que se define el complejo de Khovanov será diferente.

Definición 4.12 Sea D un diagrama de un enlace orientado L . Consideremos el complejo de Khovanov $\mathcal{C}(D)$. Se define la homología de Khovanov, $\mathcal{H}(D)$, como el conjunto de grupos de homología asociados a $\mathcal{C}(D)$.

Definición 4.13 Sea D un diagrama de un enlace orientado L . Se define el polinomio de Poincaré graduado del complejo de Khovanov $\mathcal{C}(D)$ en la variable t como

$$Kh(D) = \sum_r t^r \dim \mathcal{H}^r(D).$$

Introducimos el teorema que motiva esta sección.

Teorema 4.14 [10]

Los grupos de homología $\mathcal{H}^r(D)$ son invariantes de enlace. Más aún, $Kh(D)$, polinomio en las variables t y q , es un invariante de enlace que generaliza el polinomio de Jones no normalizado. En particular, si $t = -1$ entonces ambos polinomios coinciden, esto es,

$$\tilde{J}(L) = \sum_r (-1)^r \dim \mathcal{H}^r(D).$$

En la próxima sección se probará el teorema anterior.

Proposición 4.15 La homología de Khovanov es un invariante más fino que el polinomio de Jones. No obstante, no es un invariante completo, pues existen nudos no equivalentes cuya homología de Khovanov coincide.

Los Ejemplos 4.16 y 4.17 dan una prueba de la Proposición anterior.

Ejemplo 4.16 Veamos que la homología de Khovanov es más fina que el polinomio de Jones. Para ello, consideramos los nudos 5_1 y 10_{132} de la tabla de Rolfsen [18], cuyos polinomios de Jones coinciden:

$$J(5_1) = -q^{-7} + q^{-6} - q^{-5} + q^{-4} + q^{-2} = J(10_{132}).$$

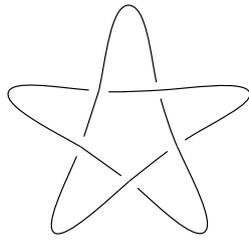


Figura 31: Diagrama del nudo 5_1 .

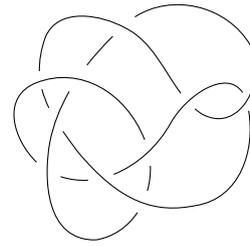


Figura 32: Diagrama del nudo 10_{132} .

El polinomio de Jones de los nudos 5_1 y 10_{132} es $z^5 - z^3 + z$. Por otro lado, la homología de Khovanov de los nudos 5_1 y 10_{132} se recoge en las tablas siguientes, tomadas de [8]:

$j \backslash i$	-5	-4	-3	-2	-1	0
-3						\mathbb{Z}
-5						\mathbb{Z}
-7				\mathbb{Z}		
-9						
-11		\mathbb{Z}	\mathbb{Z}			
-13						
-15	\mathbb{Z}					

$j \backslash i$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
-1							\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
-3								\mathbb{Z}
-5					\mathbb{Z}	\mathbb{Z}^2		
-7				\mathbb{Z}				
-9				\mathbb{Z}	\mathbb{Z}			
-11		\mathbb{Z}	\mathbb{Z}					
-13								
-15	\mathbb{Z}							

Claramente, los grupos de la homología de Khovanov no coinciden, por lo que los nudos 5_1 y 10_{132} no son equivalentes. Nótese que al recuperar el polinomio de Jones los grupos sombreados en gris se cancelan (en el caso del nudo 10_{132} , en grado cuántico $j = -5$ queda una copia de \mathbb{Z} en el grado homológico $i = -2$).

Además, la homología de Khovanov distingue el nudo 9_{42} de su imagen especular, que tienen el mismo polinomio de Jones. Esto prueba, no solo que la homología de Khovanov es más fina que el polinomio de Jones, sino también que el polinomio de Jones no siempre distingue un nudo de su imagen especular.

Ejemplo 4.17 La homología de Khovanov no es un invariante completo, pues el nudo de Kinoshita-Terasaka y el nudo de Conway tienen la misma homología de Khovanov y, sin embargo, no son equivalentes, por tener distinta homología de Heegaard Floer (un invariante homológico que categorifica el polinomio de Alexander).

Una propiedad importante de la homología de Khovanov es que detecta el nudo trivial, esto es, si la homología de Khovanov de un nudo K coincide con la del nudo trivial, entonces K es equivalente al nudo trivial.

Teorema 4.18 [11]

Un nudo es trivial si y solo si su homología de Khovanov (reducida) es \mathbb{Z} .

A pesar de que el polinomio de Jones es un invariante mucho más estudiado, se desconoce si existen nudos no triviales cuyo polinomio de Jones sea igual a 1. Saber si el polinomio de Jones detecta el nudo trivial es un problema abierto de gran relevancia en el área.

4.2. Prueba de la invarianza

Demostraremos que la homología de Khovanov es un invariante de enlace. Para ello, probaremos que es invariante bajo los tres movimientos de Reidemeister, es decir, veremos que los grupos de homología de dos diagramas que difieren únicamente en un movimiento de Reidemeister son iguales. Seguiremos la prueba de Bar-Natan [4], completando y ampliando los detalles que deja al lector. Antes de pasar a la demostración, enunciaremos y demostraremos un lema que será de utilidad en la prueba.

Lema 4.19 Sean \mathcal{C} un complejo de (co)cadenas y $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ un subcomplejo de (co)cadenas de \mathcal{C} .

1. Si \mathcal{C}' es exacto, entonces la homología de \mathcal{C} , $H(\mathcal{C})$, es igual a la homología de \mathcal{C}/\mathcal{C}' , $H(\mathcal{C}/\mathcal{C}')$.
2. Si \mathcal{C}/\mathcal{C}' es exacto, entonces $H(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}')$.

Demostración.

Consideremos la sucesión exacta corta $0 \rightarrow \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{C}' \rightarrow 0$, a la que podemos asociar la sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow H^r(\mathcal{C}') \rightarrow H^r(\mathcal{C}) \rightarrow H^r(\mathcal{C}/\mathcal{C}') \rightarrow H^{r+1}(\mathcal{C}') \rightarrow H^{r+1}(\mathcal{C}) \rightarrow H^{r+1}(\mathcal{C}/\mathcal{C}') \rightarrow \dots$$

Si \mathcal{C}' es exacto, entonces $H^r(\mathcal{C}') = 0$ para todo r , por lo que la sucesión exacta larga sería de la forma

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow H^r(\mathcal{C}) \rightarrow H^r(\mathcal{C}/\mathcal{C}') \rightarrow 0 \rightarrow H^{r+1}(\mathcal{C}) \rightarrow H^{r+1}(\mathcal{C}/\mathcal{C}') \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Como es una sucesión exacta, necesariamente $H^r(\mathcal{C}) = H^r(\mathcal{C}/\mathcal{C}')$ para todo r , por lo que $H(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}/\mathcal{C}')$. Esto prueba el caso 1.

Análogamente, si \mathcal{C}/\mathcal{C}' es exacto, entonces $H^r(\mathcal{C}/\mathcal{C}') = 0$ para todo r y tenemos la sucesión

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow H^r(\mathcal{C}') \longrightarrow H^r(\mathcal{C}) \longrightarrow 0 \longrightarrow H^{r+1}(\mathcal{C}') \longrightarrow H^{r+1}(\mathcal{C}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Por tanto, $H^r(\mathcal{C}) = H^r(\mathcal{C}')$ para todo r , por lo que $H(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}')$.

□

Pasamos ahora a la demostración del Teorema 4.14. Probaremos que la homología de Khovanov es invariante bajo movimientos de Reidemeister de tipo 1, 2 y 3.

1. Invarianza bajo movimientos de Reidemeister de tipo 1.

Queremos probar que $\mathcal{H}(\succ) = \mathcal{H}(\smile)$. Supongamos que \smile representa un diagrama con p cruces positivos y n cruces negativos, para cualquier orientación. Entonces, \succ representa un diagrama con $p + 1$ cruces positivos y n cruces negativos. Ambos diagramas difieren únicamente en el entorno indicado.

Queremos calcular $\mathcal{H}(\succ) = H(\llbracket \succ \rrbracket)[-n]\{p + 1 - 2n\})$. Para ello, consideremos el complejo

$$\mathcal{C} = \llbracket \succ \rrbracket = (\llbracket \circ \rrbracket \xrightarrow{m} \llbracket \smile \rrbracket\{1\}).$$

Nótese que los términos del complejo de cadenas son a su vez complejos de cadenas, asociados a sus correspondientes cubos de resoluciones. El complejo $\llbracket \circ \rrbracket$ corresponde con el cubo de resolución del diagrama \succ cuando el cruce que aparece en la imagen se suaviza siguiendo un suavizado de tipo 0 y $\llbracket \smile \rrbracket$ corresponde con el cubo de resolución cuando el cruce se suaviza siguiendo un suavizado de tipo 1.

Recordemos que V es el espacio vectorial graduado generado por los elementos v_+ y v_- , cuyos grados son 1 y -1 , respectivamente. Denotaremos por $\llbracket \circ \rrbracket_{v_+}$ al subespacio de $\llbracket \circ \rrbracket$ tal que el círculo que aparece en la imagen está siempre marcado con v_+ .

Sea

$$\mathcal{C}' = (\llbracket \circ \rrbracket_{v_+} \xrightarrow{m} \llbracket \smile \rrbracket\{1\}).$$

Por un lado, tenemos que \mathcal{C}' es un subcomplejo de \mathcal{C} , pues $\llbracket \circ \rrbracket_{v_+} \subseteq \llbracket \circ \rrbracket$ y $m(\llbracket \circ \rrbracket_{v_+}) \subseteq \llbracket \smile \rrbracket\{1\}$. Por otro lado, m es un isomorfismo en \mathcal{C}' ya que v_+ es una unidad, esto es, $m(v_+, v_+) = v_+$ y $m(v_-, v_+) = v_-$, y conserva el grado. Por tanto, \mathcal{C}' es exacto. Por el Lema 4.19(1), $H(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}/\mathcal{C}')$, donde

$$\mathcal{C}/\mathcal{C}' = (\llbracket \circ \rrbracket_{/v_+=0} \longrightarrow 0).$$

El subíndice $/v_+ = 0$ significa que aquellos estados de $[[\circ]]$ que asocian v_+ al círculo que aparece en la imagen se identifican con 0. Por tanto, tenemos que $H([[\circ]]) = H([[\circ]]/v_+=0)$. Por otro lado, $V/(v_+ = 0) = \langle v_- \rangle$ es el espacio unidimensional generado por v_- , por lo que $[[\circ]]/v_+=0$ y $[[\succ]]$ son isomorfos, salvo un cambio de grado de una unidad. El isomorfismo es la aplicación que lleva (v_{\pm}, v_-) a v_{\pm} . Al hacer el cambio de grado, la aplicación conserva el grado y es un isomorfismo. Así, $[[\circ]]/v_+=0\{1\} = [[\succ]]$. De esta forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\succ) &= H(\mathcal{C}(\succ)) = H([[\succ]][-n]\{p+1-2n\}) = H([[\circ]]/v_+=0[-n]\{p+1-2n\}) = \\ &= H([[\succ]][-n]\{p-2n\}) = H(\mathcal{C}(\succ)) = \mathcal{H}(\succ). \end{aligned}$$

A pesar de que no es necesario comprobar la otra versión del movimiento de Reidemeister de tipo 1 porque se deduce de este movimiento y del movimiento de Reidemeister de tipo 2, vamos a demostrarlo para completar la prueba.

En primer lugar, nótese que \succ tiene p cruces positivos y $n+1$ cruces negativos. Vamos a calcular $\mathcal{H}(\succ) = H([[\succ]][-(n+1)]\{p-2(n+1)\})$. Consideremos el complejo de cadenas

$$\mathcal{C} = [[\succ] = ([[\succ] \xrightarrow{\Delta} [[\circ]]\{1\})$$

y el subcomplejo de \mathcal{C}

$$\mathcal{C}' = ([[\succ] \xrightarrow{\Delta} [[\circ]]_{v_-}\{1\}),$$

donde el subíndice v_- indica que el círculo de la imagen tiene asociado el generador v_- . Claramente \mathcal{C}' es subcomplejo de \mathcal{C} pues $\Delta([[\succ]]) \subseteq [[\circ]]_{v_-}\{1\} \subseteq [[\circ]]\{1\}$. Además, tenemos que $\Delta(v_+) = v_+ \otimes v_-$, pues el círculo tiene asignado a v_- , y $\Delta(v_-) = v_- \otimes v_-$, por lo que Δ es un isomorfismo, pues conserva los grados. Así, \mathcal{C}' es exacto, por lo que $H(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}/\mathcal{C}')$ por el Lema 4.19(1). Consideremos el cociente

$$\mathcal{C}/\mathcal{C}' = (0 \longrightarrow [[\circ]]_{v_-=0}\{1\}) = [[\circ]]_{v_-=0}[1]\{1\}.$$

De esta forma, $[[\succ] = H([[\circ]]_{v_-=0}[1]\{1\})$. Además, $[[\circ]]_{v_-=0}\{-1\} = [[\succ]]$, pues el círculo de la imagen está generado por v_+ , cuyo grado es 1, y la aplicación que lleva (v_{\pm}, v_+) a v_{\pm} conserva los grados y es un isomorfismo.

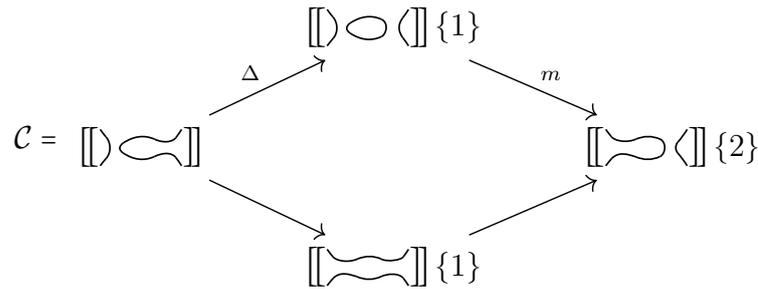
Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\succ) &= H(\mathcal{C}(\succ)) = H([[\succ]][-(n+1)]\{p-2(n+1)\}) = H([[\circ]]_{v_-=0}[1]\{1\}[-(n+1)]\{p-2(n+1)\}) = \\ &= H([[\circ]]_{v_-=0}[-n]\{p-2n-1\}) = H([[\succ]][-n]\{p-2n\}) = H(\mathcal{C}(\succ)) = \mathcal{H}(\succ). \end{aligned}$$

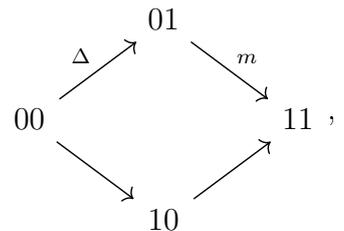
Con esto, queda probada la invarianza bajo movimientos de Reidemeister de tipo 1.

2. Invarianza bajo movimientos de Reidemeister de tipo 2: primera demostración.

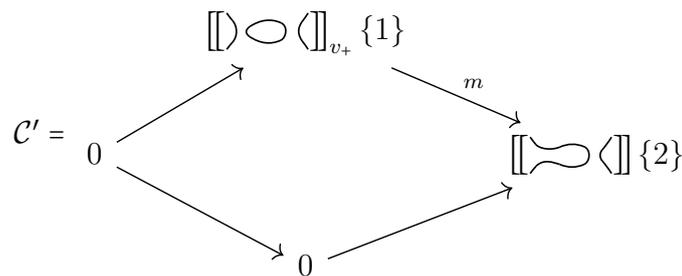
Queremos probar que $\mathcal{H}(\succ\curvearrowright) = \mathcal{H}(\simeq)$. Supongamos que \simeq representa un diagrama con p cruces positivos y n cruces negativos. Entonces, $\succ\curvearrowright$ tiene $p + 1$ cruces positivos y $n + 1$ cruces negativos, para cualquier orientación posible. Para calcular $\mathcal{H}(\succ\curvearrowright)$, consideremos el siguiente complejo $\mathcal{C} = \llbracket \succ\curvearrowright \rrbracket$:



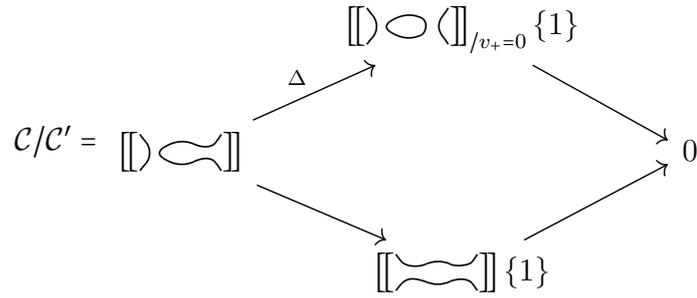
Nótese que el complejo anterior corresponde con los suavizados



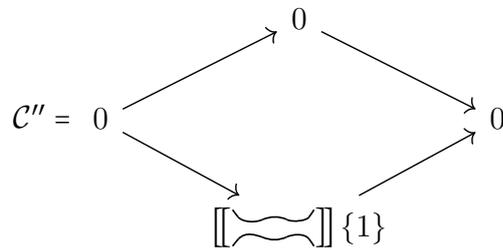
donde los dos cruces están ordenados de izquierda a derecha. Recordemos que los cambios de grado corresponden con el número de suavizados de tipo 1. Este complejo tiene como subcomplejo a \mathcal{C}' :



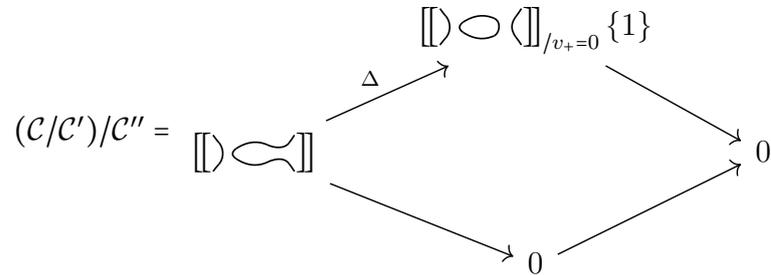
que es exacto pues m es un isomorfismo en \mathcal{C}' , ya que, ordenando los círculos de izquierda a derecha, $m(v_1, v_+, v_2) = (v_1, v_2)$ para todo $v_1, v_2 \in \{v_+, v_-\}$, esto es, v_+ es una unidad de m . Por tanto, podemos considerar el complejo cociente \mathcal{C}/\mathcal{C}' , cuya homología coincidirá con la de \mathcal{C} , por el Lema 4.19(1):



Nuevamente, consideramos un subcomplejo \mathcal{C}'' de \mathcal{C}/\mathcal{C}' :



Finalmente, consideramos el cociente $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$:



que es exacto porque al tomar módulo $v_+ = 0$ la aplicación Δ es un isomorfismo ya que $\Delta(v_1, v_2) = (v_1, v_-, v_2)$ para todo $v_1, v_2 \in \{v_+, v_-\}$. Recapitulando, tenemos que \mathcal{C}' es exacto, por lo que $H(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}/\mathcal{C}')$, por el Lema 4.19(1). Por otro lado, $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$ también es exacto, por lo que $H(\mathcal{C}/\mathcal{C}') = H(\mathcal{C}'')$, por el Lema 4.19(2). Por ambos resultados, tenemos que $H(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}'')$. Ahora bien, \mathcal{C}'' es justamente $[] \{1\}$ (nótese que en \mathcal{C}'' , $[]$ aparece en la altura 1, de ahí el cambio de altura $[1]$, con un cambio de grado $\{1\}$). Así,

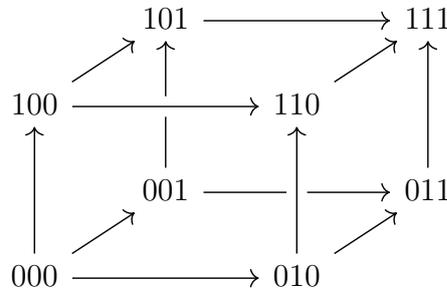
$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\infty) &= H([] \{1\}[-(n+1)]\{p+1-2(n+1)\}) = H(\mathcal{C}[-n-1]\{p-2n-1\}) = \\ &= H(\mathcal{C}''[-n-1]\{p-2n-1\}) = H([] \{1\}[-n-1]\{p-2n-1\}) = \end{aligned}$$

$$= H(\llbracket \text{---} \rrbracket [-n] \{p - 2n\}) = \mathcal{H}(\text{---}),$$

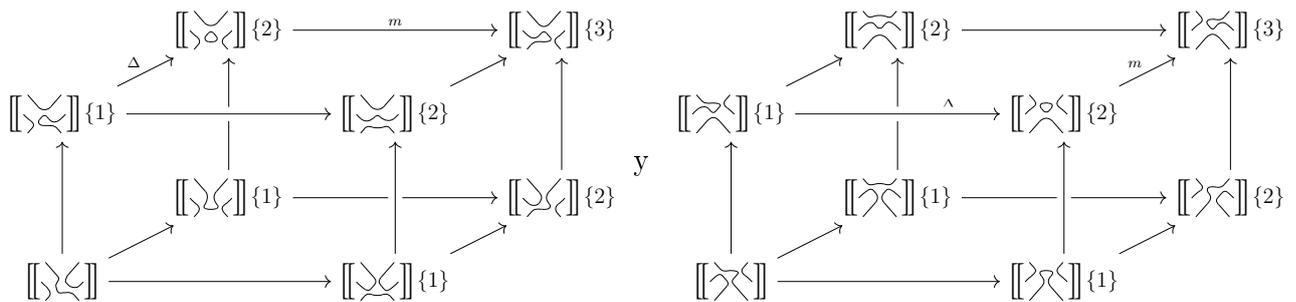
lo que prueba la invarianza por movimientos de Reidemeister de tipo 2.

3. Invarianza bajo movimientos de Reidemeister de tipo 3: primer intento.

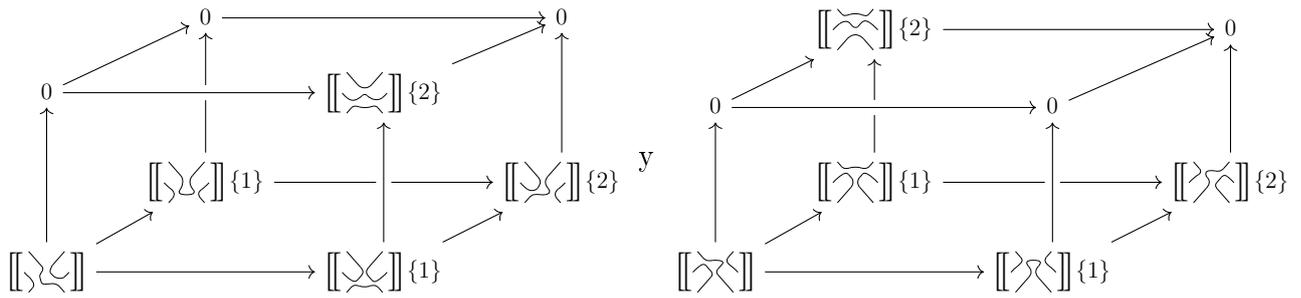
Queremos probar que $\mathcal{H}(\text{---}) = \mathcal{H}(\text{---})$. En primer lugar, nótese que ambos diagramas tienen el mismo número de cruces positivos y negativos para cualquier orientación, pues el movimiento $R3$ solo cambia de lugar los cruces, pero no altera su signo. Por este motivo, ignoraremos los cambios de altura y grado $[-n]$ y $\{p - 2n\}$, ya que bastará probar que $H(\llbracket \text{---} \rrbracket) = H(\llbracket \text{---} \rrbracket)$. Ordenamos los cruces de la siguiente forma: --- y --- . Con este orden, los cubos que aparecen a continuación corresponden con los suavizados de los cruces involucrados en el movimiento $R3$:



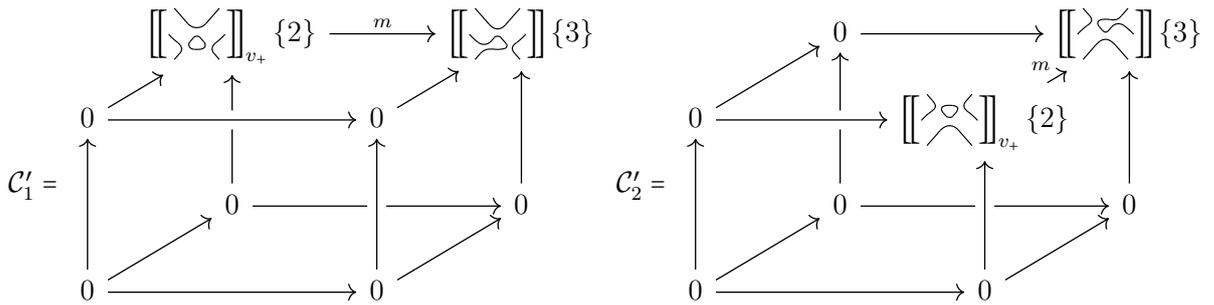
Estudiamos los complejos $\llbracket \text{---} \rrbracket$ y $\llbracket \text{---} \rrbracket$, que son, respectivamente,



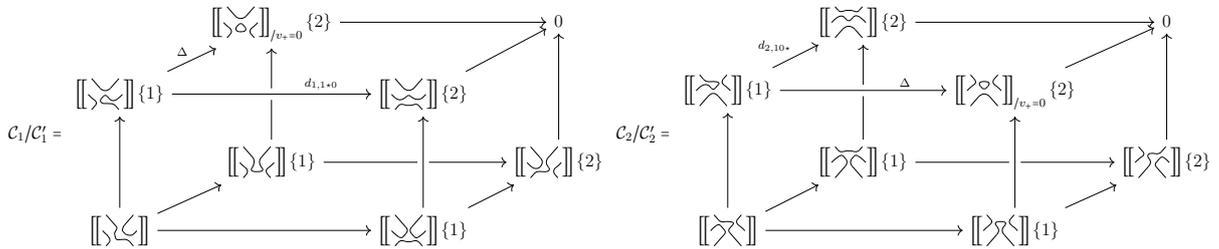
Las caras inferiores de los cubos corresponden a los complejos $\llbracket \text{---} \rrbracket$ y $\llbracket \text{---} \rrbracket$, respectivamente, que son claramente isomorfos. Las caras superiores de los cubos corresponden a los complejos $\llbracket \text{---} \rrbracket$ y $\llbracket \text{---} \rrbracket$, respectivamente. Podría parecer lógico aplicar un movimiento de Reidemeister de tipo 2, que ya hemos probado que no altera el complejo (salvo por un cambio de grado y de altura), a estos dos complejos para obtener $\llbracket \text{---} \rrbracket$ en ambos casos. Los cubos entonces serían



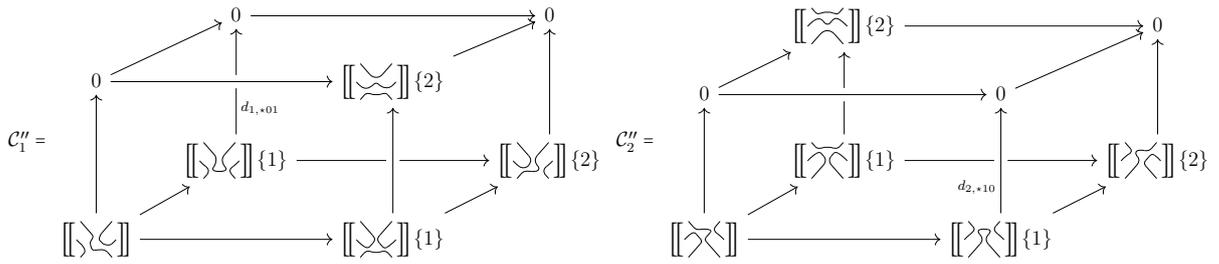
Tenemos dos problemas con este procedimiento. Si bien las caras inferiores son isomorfas y las caras superiores también lo son, los cubos completos no son isomorfos porque las aplicaciones que unen ambas caras no son iguales. Además, al aplicar el movimiento de Reidemeister de tipo 2, tendríamos que considerar una serie de complejos y subcomplejos, de forma análoga a la demostración anterior de la invarianza bajo $R2$. En particular, al adaptar dicho procedimiento al caso actual tendríamos: se toma $\mathcal{C}_1 = [[\times]]$ y $\mathcal{C}_2 = [[\times]]$. A continuación, se definen los subcomplejos \mathcal{C}'_1 y \mathcal{C}'_2 :



que son subcomplejos por el argumento de la prueba de $R2$ y son exactos por ser m un isomorfismo ya que v_+ es una unidad, por lo que $H(\mathcal{C}_1) = H(\mathcal{C}_1/\mathcal{C}'_1)$ y $H(\mathcal{C}_2) = H(\mathcal{C}_2/\mathcal{C}'_2)$ por el Lema 4.19. Los cocientes $\mathcal{C}_1/\mathcal{C}'_1$ y $\mathcal{C}_2/\mathcal{C}'_2$ son:



Ahora, tomaríamos \mathcal{C}''_1 y \mathcal{C}''_2 como los cubos que habíamos obtenido tras el movimiento $R2$:



Sin embargo, \mathcal{C}''_1 y \mathcal{C}''_2 no son subcomplejos de $\mathcal{C}_1/\mathcal{C}'_1$ y $\mathcal{C}_2/\mathcal{C}'_2$ ya que al considerar la cara inferior, la imagen del grupo de cadenas de altura 1 no está contenida en el grupo de cadenas de altura 2. En particular, $d_{1,*01}(\text{diagram}) \neq 0$ en el primer caso y $d_{2,*10}(\text{diagram}) \neq 0$ en el segundo.

Por estos motivos, este procedimiento no sirve para probar la invarianza por movimientos de Reidemeister de tipo 3. Vamos a hacer una prueba algo más complicada de la invarianza por movimientos de Reidemeister de tipo 2 que nos ayudará a sortear estos inconvenientes.

4. Invarianza bajo movimientos de Reidemeister de tipo 2: segunda demostración.

Procedemos de la misma forma que en la primera demostración. Partiendo de los complejos \mathcal{C} , \mathcal{C}' y \mathcal{C}/\mathcal{C}' , habíamos llegado a que $H(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}/\mathcal{C}')$, con

$$\mathcal{C}/\mathcal{C}' = \begin{array}{ccc} \text{diagram} \circ \langle \text{diagram} \rangle_{/v_+=0} \{1\} & \longrightarrow & 0 \\ \Delta \uparrow & \searrow \tau & \uparrow \\ \text{diagram} & \xrightarrow{d_{*0}} & \text{diagram} \{1\} \end{array}$$

En primer lugar, observamos que Δ es una aplicación biyectiva en \mathcal{C}/\mathcal{C}' , por lo que tiene una aplicación inversa Δ^{-1} . Podemos componerla con la aplicación d_{*0} para obtener $\tau = d_{*0} \circ \Delta^{-1}$. Hay dos posibilidades para $\text{diagram} \circ \langle \text{diagram} \rangle$ (según la forma en que se cierren los círculos). Podemos describir τ explícitamente en ambos casos (ordenaremos los círculos de izquierda a derecha y de arriba a abajo):

$$\begin{aligned} \tau: \text{diagram} \circ \langle \text{diagram} \rangle_{/v_+=0} \{1\} &\longrightarrow \text{diagram} \{1\} \\ (v_+, v_-, v_+) &\longmapsto v_+ \\ (v_+, v_-, v_-) &\longmapsto v_- \\ (v_-, v_-, v_+) &\longmapsto v_- \\ (v_-, v_-, v_-) &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

pues $\tau(v_1, v_-, v_2) = m(v_1, \Delta^{-1}(v_-, v_2)) = m(v_1, v_2)$, con $v_1, v_2 \in \{v_+, v_-\}$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \tau: \left[\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \right]_{/v_+=0} \{1\} &\longrightarrow \left[\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \right] \{1\} \\ (v_+, v_-) &\longmapsto v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \\ (v_-, v_-) &\longmapsto v_- \otimes v_- \end{aligned}$$

pues $\tau(v_{\pm}, v_-) = \Delta(\Delta^{-1}(v_{\pm}, v_-)) = \Delta(v_{\pm})$.

Construimos ahora \mathcal{C}''' como el subcomplejo de \mathcal{C}/\mathcal{C}' que contiene todos los $\alpha \in \left[\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \right]$ y todos los pares $(\beta, \tau\beta) \in \left[\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \right]_{/v_+=0} \{1\} \oplus \left[\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \right] \{1\}$, esto es,

$$\mathcal{C}''' = \begin{array}{ccc} \beta \in \left[\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \right]_{/v_+=0} \{1\} & \longrightarrow & 0 \\ \Delta \uparrow & \searrow \tau & \uparrow \\ \alpha \in \left[\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \right] & \xrightarrow{d_{*0}} & \tau\beta \in \left[\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \right] \{1\} \end{array}$$

Ahora, Δ es un isomorfismo ya que $\Delta(v_1, v_2) = (v_1, v_-, v_2)$ y τ es un isomorfismo por construcción del complejo \mathcal{C}''' (claramente conserva el grado y es una biyección, pues los elementos de $\left[\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \right] \{1\}$ son precisamente $\tau\beta$ con $\beta \in \left[\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \right]_{/v_+=0} \{1\}$). Así, $d_{*0} = \tau \circ \Delta$ es un isomorfismo por ser composición de isomorfismos. Por tanto, la diferencial es un isomorfismo y \mathcal{C}''' es exacto. Por el Lema 4.19(2), tenemos que

$$H(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}/\mathcal{C}') = H((\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''').$$

Veamos qué es $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}'''$. Hemos construido \mathcal{C}''' de forma que contenga todos los $\alpha \in \left[\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \right]$, por lo que al hacer el cociente el vértice inferior izquierdo será 0. Como tenemos todos los $\beta \in \left[\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \right]_{/v_+=0} \{1\}$, al hacer el cociente identificamos todos los elementos del vértice superior izquierdo con algunos elementos del vértice inferior derecho, es decir, tenemos la relación $\beta = \tau\beta$, esto es, $(\beta, 0) = (0, \tau\beta)$ en $\left[\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \right]_{/v_+=0} \{1\} \oplus \left[\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \right] \{1\}$. Por último, en el vértice inferior derecho no hay ninguna restricción sobre $\gamma \in \left[\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \right] \{1\}$. Es decir,

$$(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''' = \begin{array}{ccc} \beta \in \left[\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \right]_{/v_+=0} \{1\} & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & \searrow \beta=\tau\beta & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \gamma \in \left[\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \right] \{1\} \end{array}$$

Por todo esto, $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}'''$ es isomorfo al complejo \mathcal{C}'' de la primera demostración,

que recordemos era

$$\mathcal{C}'' = \begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \left[\left[\text{link} \right] \right] \{1\} \end{array}$$

Nótese que tenemos la relación $\beta = \tau\beta$, por lo que $\beta = \tau^{-1}\gamma$. Basta considerar el isomorfismo que lleva $(\tau^{-1}\gamma, \gamma)$ en $(0, \gamma)$.

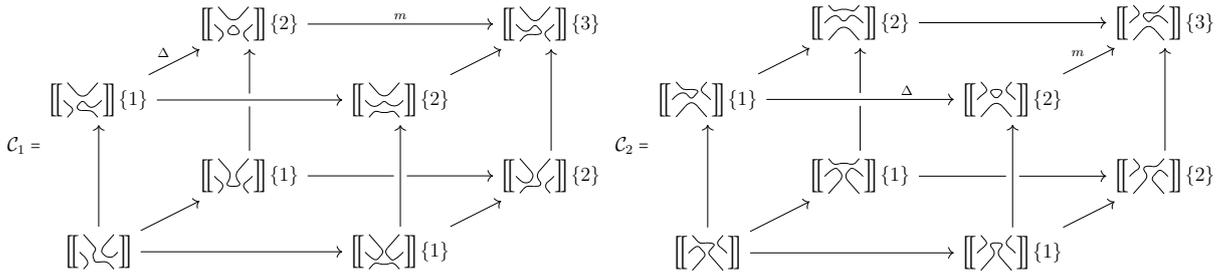
Por tanto,

$$H(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}/\mathcal{C}') = H((\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''') = H(\mathcal{C}''),$$

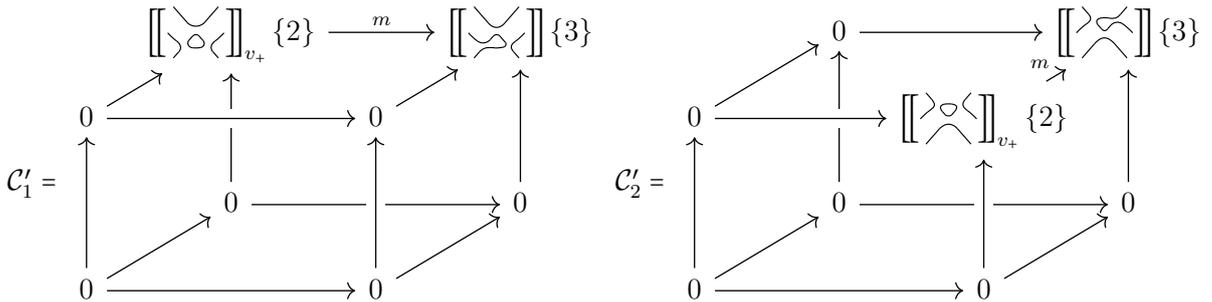
lo que concluye esta prueba utilizando el mismo argumento que en la parte final de la primera demostración de la invarianza bajo $R2$.

5. Invarianza bajo movimientos de Reidemeister de tipo 3: segundo intento.

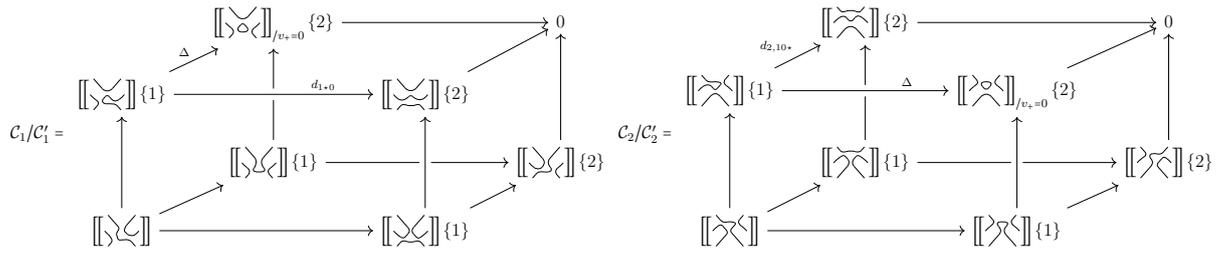
Procedemos de forma análoga al primer intento. En primer lugar, ordenamos los cruces: $\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array}$ y $\begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \end{array}$. En segundo lugar, consideramos los complejos $\mathcal{C}_1 = \left[\left[\begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} \right] \right]$ y $\mathcal{C}_2 = \left[\left[\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right] \right]$, que son de la forma



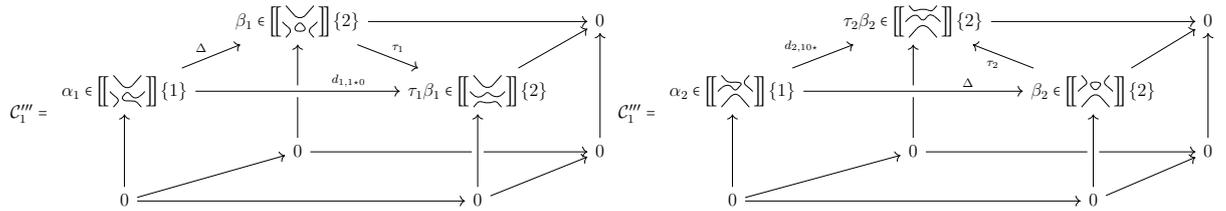
Ahora, consideremos los subcomplejos \mathcal{C}'_1 y \mathcal{C}'_2 :



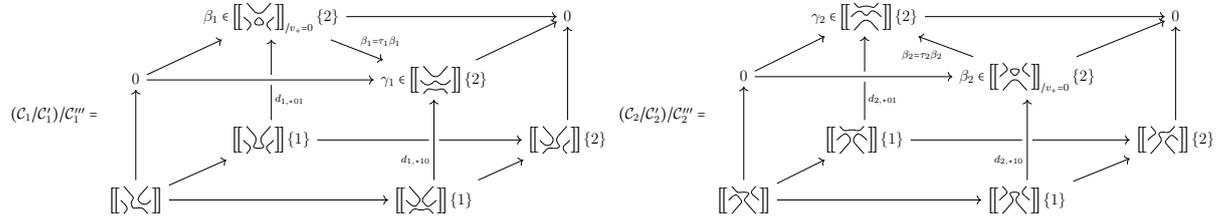
Por el mismo argumento utilizado con anterioridad, \mathcal{C}'_1 y \mathcal{C}'_2 son subcomplejos y son exactos por ser m un isomorfismo en ambos casos. Por el Lema 4.19(1), $H(\mathcal{C}_1) = H(\mathcal{C}_1/\mathcal{C}'_1)$ y $H(\mathcal{C}_2) = H(\mathcal{C}_2/\mathcal{C}'_2)$. Los complejos $\mathcal{C}_1/\mathcal{C}'_1$ y $\mathcal{C}_2/\mathcal{C}'_2$ son:



Hasta aquí hemos seguido el mismo procedimiento que en el primer intento. Utilizaremos la segunda prueba de $R2$ para definir los subcomplejos \mathcal{C}_1''' y \mathcal{C}_2''' de $\mathcal{C}_1/\mathcal{C}_1'$ y $\mathcal{C}_2/\mathcal{C}_2'$, respectivamente:



Tenemos que \mathcal{C}_1''' y \mathcal{C}_2''' son exactos, como vimos en la segunda prueba de $R2$. Así, por el Lema 4.19(2), $H(\mathcal{C}_1/\mathcal{C}_1') = H((\mathcal{C}_1/\mathcal{C}_1')/\mathcal{C}_1''')$ y $H(\mathcal{C}_2/\mathcal{C}_2') = H((\mathcal{C}_2/\mathcal{C}_2')/\mathcal{C}_2''')$. Por tanto, $H(\mathcal{C}_1) = H((\mathcal{C}_1/\mathcal{C}_1')/\mathcal{C}_1''')$ y $H(\mathcal{C}_2) = H((\mathcal{C}_2/\mathcal{C}_2')/\mathcal{C}_2''')$. Los complejos $(\mathcal{C}_1/\mathcal{C}_1')/\mathcal{C}_1'''$ y $(\mathcal{C}_2/\mathcal{C}_2')/\mathcal{C}_2'''$ son:



Ahora, los cubos $(\mathcal{C}_1/\mathcal{C}_1')/\mathcal{C}_1'''$ y $(\mathcal{C}_2/\mathcal{C}_2')/\mathcal{C}_2'''$ sí son isomorfos a través de la aplicación Υ que deja la cara inferior intacta y traspone la cara superior llevando el par (β_1, γ_1) al par (β_2, γ_2) . Claramente es un isomorfismo entre espacios vectoriales. Faltaría probar que conmuta con las aplicaciones de las aristas. Es trivial para las aplicaciones de la cara inferior (Υ es la identidad al restringirse a la cara inferior) y de la cara superior (Υ traspone los dos complejos con sus aplicaciones, por lo que hay una biyección clara), por lo que únicamente queda comprobarlo para las aplicaciones verticales. Aquellas que van al 0 son inmediatas por ser aplicaciones triviales. Así, hay que probar que $\tau_1 \circ d_{1,*01} = d_{2,*01}$ y $\tau_2 \circ d_{2,*10} = d_{1,*10}$. Probar ambas igualdades no es complicado, pero es extenso, pues habría que considerar todas las configuraciones posibles de círculos asociados a $[[><]]$ y a $[[><]]$, de manera similar a como se hacía en la segunda prueba de la invarianza bajo $R2$. Así, una vez probado que ambos

cubos son isomorfos vía el isomorfismo Υ , tenemos que

$$H(\llbracket \text{Res} \rrbracket) = H(\mathcal{C}_1) = H((\mathcal{C}_1/\mathcal{C}'_1)/\mathcal{C}''_1) = H((\mathcal{C}_2/\mathcal{C}'_2)/\mathcal{C}''_2) = H(\mathcal{C}_2) = H(\llbracket \text{Res} \rrbracket)$$

y, por tanto, $\mathcal{H}(\text{Res}) = \mathcal{H}(\text{Res})$, pues p y n coinciden. Así, queda probada la invarianza por movimientos de Reidemeister de tipo 3.

Por todo esto, la homología de Khovanov es un invariante de enlace.

4.3. Cálculo de la homología de Khovanov del nudo trébol a izquierda

Vamos a calcular la homología de Khovanov del nudo trébol a izquierda, usando para ello el diagrama usual de tres cruces que notaremos D . Nuestro punto de partida es el cubo de resoluciones mostrado en la Figura 33.

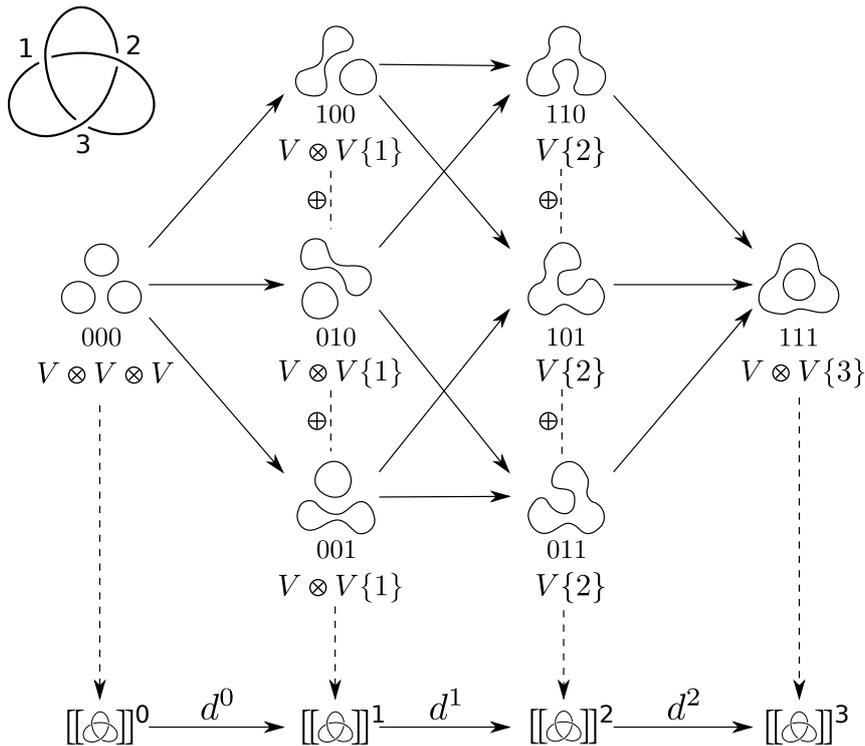


Figura 33: Cubo del trébol a izquierda.

El primer paso es definir el complejo de cadenas. Teniendo en cuenta que $(c, p, n) = (3, 0, 3)$ y que $\mathcal{C}(D) = \llbracket D \rrbracket[-n]\{p - 2n\}$, tenemos $\mathcal{C}(\text{Res}) = \llbracket \text{Res} \rrbracket[-3]\{-6\}$. Vamos a

definir el complejo de cadenas $[[\text{trébol}]]$ y ajustaremos los cambios de grado y de altura al final. Así, tenemos el siguiente complejo de cadenas:

$$0 \xrightarrow{d^{-1}} [[\text{trébol}]]^0 \xrightarrow{d^0} [[\text{trébol}]]^1 \xrightarrow{d^1} [[\text{trébol}]]^2 \xrightarrow{d^2} [[\text{trébol}]]^3 \xrightarrow{d^3} 0.$$

Recordemos que los grupos del complejo son sumas directas de productos tensoriales de V . Para facilitar los cálculos de la homología, será conveniente identificar cada copia de V con uno de los círculos del estado de Kauffman correspondiente. En primer lugar, ordenamos los arcos del diagrama, entendiéndolo por arco una sección del enlace entre dos cruces. Para cada estado de Kauffman, identificamos cada círculo del estado con un número que viene dado por el menor número tomado entre los arcos que lo componen; escribimos V_i para la copia de V asociada al círculo i . En la Figura 34 se muestra un orden para los cruces de trébol y las etiquetas de los círculos correspondientes al estado 000.

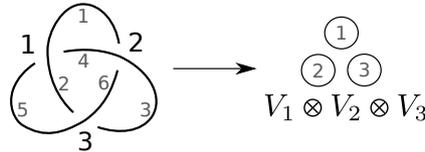


Figura 34: Etiquetas de los círculos del estado 000 del trébol.

Con esta notación, el cubo de resolución del trébol pasa a ser como se muestra en la Figura 35.

Ahora, podemos definir los grupos del complejo, dando una base de generadores para cada uno de ellos:

$$[[\text{trébol}]]^0 = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3,$$

cuyos generadores son

$$\begin{aligned} e_1^0 &= v_+ \otimes v_+ \otimes v_+ && \text{de grado } 3, \\ e_2^0 &= v_+ \otimes v_+ \otimes v_- && \text{de grado } 1, \\ e_3^0 &= v_+ \otimes v_- \otimes v_+ && \text{de grado } 1, \\ e_4^0 &= v_- \otimes v_+ \otimes v_+ && \text{de grado } 1, \\ e_5^0 &= v_+ \otimes v_- \otimes v_- && \text{de grado } -1, \\ e_6^0 &= v_- \otimes v_+ \otimes v_- && \text{de grado } -1, \\ e_7^0 &= v_- \otimes v_- \otimes v_+ && \text{de grado } -1, \\ e_8^0 &= v_- \otimes v_- \otimes v_- && \text{de grado } -3. \end{aligned}$$

Recuérdese que el grado de los elementos es la suma de los grados de sus componentes, y que v_+ tiene grado 1 y v_- grado -1.

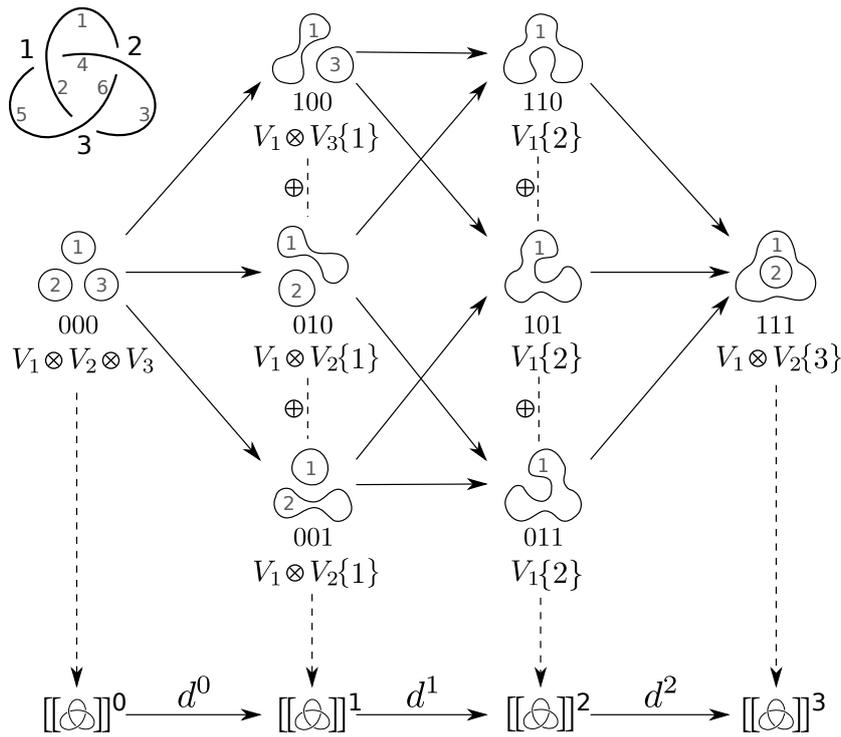


Figura 35: Cubo del trébol a izquierda con círculos etiquetados.

$$[[\text{trébol}]]^1 = V_1 \otimes V_3\{1\} \oplus V_1 \otimes V_2\{1\} \oplus V_1 \otimes V_2\{1\},$$

cuyos generadores son

- $e_1^1 = (v_+ \otimes v_+, 0, 0)$ de grado $2 + 1 = 3$,
- $e_2^1 = (v_+ \otimes v_-, 0, 0)$ de grado $0 + 1 = 1$,
- $e_3^1 = (v_- \otimes v_+, 0, 0)$ de grado $0 + 1 = 1$,
- $e_4^1 = (v_- \otimes v_-, 0, 0)$ de grado $-2 + 1 = -1$,
- $e_5^1 = (0, v_+ \otimes v_+, 0)$ de grado $2 + 1 = 3$,
- $e_6^1 = (0, v_+ \otimes v_-, 0)$ de grado $0 + 1 = 1$,
- $e_7^1 = (0, v_- \otimes v_+, 0)$ de grado $0 + 1 = 1$,
- $e_8^1 = (0, v_- \otimes v_-, 0)$ de grado $-2 + 1 = -1$,
- $e_9^1 = (0, 0, v_+ \otimes v_+)$ de grado $2 + 1 = 3$,
- $e_{10}^1 = (0, 0, v_+ \otimes v_-)$ de grado $0 + 1 = 1$,
- $e_{11}^1 = (0, 0, v_- \otimes v_+)$ de grado $0 + 1 = 1$,
- $e_{12}^1 = (0, 0, v_- \otimes v_-)$ de grado $2 + 1 = -1$.

Nótese que el cambio de grado aumenta en una unidad el grado de los elementos.

$$[[\textcircled{1}]]^2 = V_1\{2\} \oplus V_1\{2\} \oplus V_1\{2\},$$

cuyos generadores son

$$\begin{aligned} e_1^2 &= (v_+, 0, 0) && \text{de grado } 1 + 2 = 3, \\ e_2^2 &= (v_-, 0, 0) && \text{de grado } -1 + 2 = 1, \\ e_3^2 &= (0, v_+, 0) && \text{de grado } 1 + 2 = 3, \\ e_4^2 &= (0, v_-, 0) && \text{de grado } -1 + 2 = 1, \\ e_5^2 &= (0, 0, v_+) && \text{de grado } 1 + 2 = 3, \\ e_6^2 &= (0, 0, v_-) && \text{de grado } -1 + 2 = 1. \end{aligned}$$

Y, finalmente,

$$[[\textcircled{1}]]^3 = V_1 \otimes V_2\{3\},$$

cuyos generadores son

$$\begin{aligned} e_1^3 &= v_+ \otimes v_+ && \text{de grado } 2 + 3 = 5, \\ e_2^3 &= v_+ \otimes v_- && \text{de grado } 0 + 3 = 3, \\ e_3^3 &= v_- \otimes v_+ && \text{de grado } 0 + 3 = 3, \\ e_4^3 &= v_- \otimes v_- && \text{de grado } -2 + 3 = 1. \end{aligned}$$

Los grupos $[[\textcircled{1}]]^r$ son triviales para $r \notin \{0, 1, 2, 3\}$.

Pasemos ahora a definir las diferenciales. Recordemos que $d^r = \sum_{|\xi|=r} (-1)^\xi d_\xi$, donde el signo es (-1) elevado al número de unos antes de \star en ξ . En la Figura 36 se muestran las distintas d_ξ a definir, así como el signo de cada una de ellas (recordamos que el punto \bullet representa un signo negativo).

Empecemos por d^0 . Tenemos las aplicaciones

$$\begin{aligned} d_{\star 00}: V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 &\longrightarrow V_1 \otimes V_3\{1\} \\ v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 &\longmapsto m(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3. \\ d_{0\star 0}: V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 &\longrightarrow V_1 \otimes V_2\{1\} \\ v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 &\longmapsto m(v_1 \otimes v_3) \otimes v_2. \\ d_{00\star}: V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 &\longrightarrow V_1 \otimes V_2\{1\} \\ v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 &\longmapsto v_1 \otimes m(v_2 \otimes v_3). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} d^0: V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 &\longrightarrow V_1 \otimes V_3\{1\} \oplus V_1 \otimes V_2\{1\} \oplus V_1 \otimes V_2\{1\} \\ v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 &\longmapsto (m(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3, m(v_1 \otimes v_3) \otimes v_2, v_1 \otimes m(v_2 \otimes v_3)). \end{aligned}$$

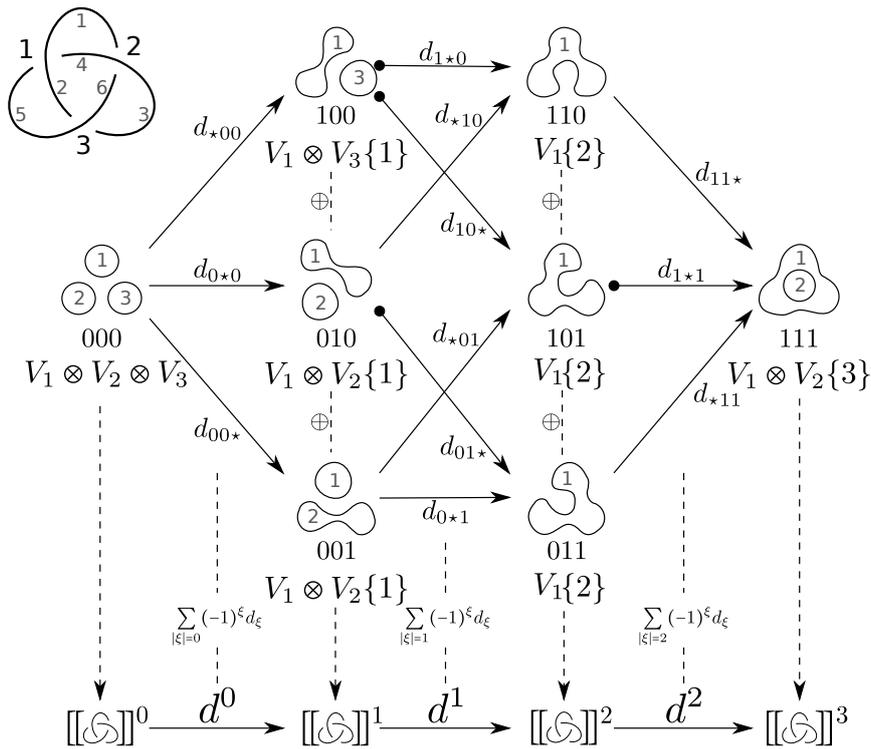


Figura 36: Cubo del trébol a izquierda con las diferenciales.

En particular, podemos calcular las imágenes de todos los elementos de la base de $[[\mathcal{G}]]^0$:

$$\begin{aligned}
 d^0: \quad & V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \longrightarrow V_1 \otimes V_3\{1\} \oplus V_1 \otimes V_2\{1\} \oplus V_1 \otimes V_2\{1\} \\
 e_1^0 = v_+ \otimes v_+ \otimes v_+ & \longmapsto (v_+ \otimes v_+, v_+ \otimes v_+, v_+ \otimes v_+) = e_1^1 + e_5^1 + e_9^1, \\
 e_2^0 = v_+ \otimes v_+ \otimes v_- & \longmapsto (v_+ \otimes v_-, v_- \otimes v_+, v_+ \otimes v_-) = e_2^1 + e_7^1 + e_{10}^1, \\
 e_3^0 = v_+ \otimes v_- \otimes v_+ & \longmapsto (v_- \otimes v_+, v_+ \otimes v_-, v_+ \otimes v_-) = e_3^1 + e_6^1 + e_{10}^1, \\
 e_4^0 = v_- \otimes v_+ \otimes v_+ & \longmapsto (v_- \otimes v_+, v_- \otimes v_+, v_- \otimes v_+) = e_3^1 + e_7^1 + e_{11}^1, \\
 e_5^0 = v_+ \otimes v_- \otimes v_- & \longmapsto (v_- \otimes v_-, v_- \otimes v_-, 0) = e_4^1 + e_8^1, \\
 e_6^0 = v_- \otimes v_+ \otimes v_- & \longmapsto (v_- \otimes v_-, 0, v_- \otimes v_-) = e_4^1 + e_{12}^1, \\
 e_7^0 = v_- \otimes v_- \otimes v_+ & \longmapsto (0, v_- \otimes v_-, v_- \otimes v_-) = e_8^1 + e_{12}^1, \\
 e_8^0 = v_- \otimes v_- \otimes v_- & \longmapsto (0, 0, 0).
 \end{aligned}$$

Codificamos d^0 en forma matricial, esto es, $d^0 = (d_{ij})$, donde la columna j -ésima representa la imagen del generador e_j^0 , de forma que $d^0(e_j^0) = \sum_{i=1}^{12} d_{ij} e_i^1$.

$$d^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Procedemos de forma análoga para d^1 , que definimos como

$$\begin{aligned} d^1: V_1 \otimes V_3\{1\} \oplus V_1 \otimes V_2\{1\} \oplus V_1 \otimes V_2\{1\} &\longrightarrow V_1\{2\} \oplus V_1\{2\} \oplus V_1\{2\} \\ (v_1 \otimes v_2, v_3 \otimes v_4, v_5 \otimes v_6) &\longmapsto \\ (m(v_3 \otimes v_4) - m(v_1 \otimes v_2), m(v_5 \otimes v_6) - m(v_1 \otimes v_2), m(v_5 \otimes v_6) - m(v_3 \otimes v_4)). \end{aligned}$$

Las imágenes de los elementos de la base de $[[\mathcal{G}]]^1$ son:

$$\begin{aligned} d^1: V_1 \otimes V_3\{1\} \oplus V_1 \otimes V_2\{1\} \oplus V_1 \otimes V_2\{1\} &\longrightarrow V_1\{2\} \oplus V_1\{2\} \oplus V_1\{2\} \\ e_1^1 = (v_+ \otimes v_+, 0, 0) &\longmapsto (-v_+, -v_+, 0) = -e_1^2 - e_3^2, \\ e_2^1 = (v_+ \otimes v_-, 0, 0) &\longmapsto (-v_-, -v_-, 0) = -e_2^2 - e_4^2, \\ e_3^1 = (v_- \otimes v_+, 0, 0) &\longmapsto (-v_-, -v_-, 0) = -e_2^2 - e_4^2, \\ e_4^1 = (v_- \otimes v_-, 0, 0) &\longmapsto (0, 0, 0), \\ e_5^1 = (0, v_+ \otimes v_+, 0) &\longmapsto (v_+, 0, -v_+) = e_1^2 - e_5^2, \\ e_6^1 = (0, v_+ \otimes v_-, 0) &\longmapsto (v_-, 0, -v_-) = e_2^2 - e_6^2, \\ e_7^1 = (0, v_- \otimes v_+, 0) &\longmapsto (v_-, 0, -v_-) = e_2^2 - e_6^2, \\ e_8^1 = (0, v_- \otimes v_-, 0) &\longmapsto (0, 0, 0), \\ e_9^1 = (0, 0, v_+ \otimes v_+) &\longmapsto (0, v_+, v_+) = e_3^2 + e_5^2, \\ e_{10}^1 = (0, 0, v_+ \otimes v_-) &\longmapsto (0, v_-, v_-) = e_4^2 + e_6^2, \\ e_{11}^1 = (0, 0, v_- \otimes v_+) &\longmapsto (0, v_-, v_-) = e_4^2 + e_6^2, \\ e_{12}^1 = (0, 0, v_- \otimes v_-) &\longmapsto (0, 0, 0), \end{aligned}$$

que quedan recogidas en la matriz

$$d^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, definimos d^2 como sigue:

$$\begin{aligned} d^2: V_1\{2\} \oplus V_1\{2\} \oplus V_1\{2\} &\longrightarrow V_1 \otimes V_2\{3\} \\ (v_1, v_2, v_3) &\longmapsto \Delta(v_1) - \Delta(v_2) + \Delta(v_3), \end{aligned}$$

y calculamos las imágenes de los elementos de la base de $[[\text{Diagram}]]^2$:

$$\begin{aligned} d^2: V\{2\} \oplus V\{2\} \oplus V\{2\} &\longrightarrow V_1 \otimes V_2\{3\} \\ e_1^2 = (v_+, 0, 0) &\longmapsto v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ = e_2^3 + e_3^3, \\ e_2^2 = (v_-, 0, 0) &\longmapsto v_- \otimes v_- = e_4^3, \\ e_3^2 = (0, v_+, 0) &\longmapsto -v_+ \otimes v_- - v_- \otimes v_+ = -e_2^3 - e_3^3, \\ e_4^2 = (0, v_-, 0) &\longmapsto -v_- \otimes v_- = -e_4^3, \\ e_5^2 = (0, 0, v_+) &\longmapsto v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ = e_2^3 + e_3^3, \\ e_6^2 = (0, 0, v_-) &\longmapsto v_- \otimes v_- = e_4^3. \end{aligned}$$

La matriz que representa a d^2 es

$$d^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular los grupos de (co)homología necesitamos calcular la imagen y el núcleo de las diferenciales. Como hemos representado las diferenciales por matrices, sabemos que la imagen de la aplicación corresponde con el espacio generado por las columnas de la matriz asociada, y el núcleo corresponde con las soluciones del sistema $dx = 0$. Empecemos por d^0 .

La imagen está generada por las columnas de la matriz asociada a d^0 , por lo que

$$\text{Im } d^0 = \langle e_1^1 + e_5^1 + e_9^1, e_2^1 + e_7^1 + e_{10}^1, e_3^1 + e_6^1 + e_{10}^1, e_3^1 + e_7^1 + e_{11}^1, e_4^1 + e_8^1, e_4^1 + e_{12}^1, e_8^1 + e_{12}^1 \rangle.$$

Para calcular el núcleo de d^0 , consideremos el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 + x_4 \\ x_5 + x_6 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_2 + x_4 \\ x_5 + x_7 \\ x_1 \\ x_2 + x_3 \\ x_4 \\ x_6 + x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_5 + x_6 = x_5 + x_7 = x_6 + x_7 = 0,$$

que tiene por solución

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0,$$

por lo que se tiene

$$\ker d^0 = \{v \in V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \mid d^0(v) = (0, 0, 0)\} = \langle e_8^0 \rangle = \langle (v_-, v_-, v_-) \rangle.$$

Continuemos con d^1 . La imagen es el espacio generado por las columnas, que es

$$\text{Im } d^1 = \langle e_1^2 - e_5^2, e_2^2 - e_6^2, e_3^2 + e_5^2, e_4^2 + e_6^2 \rangle.$$

ya que la primera columna se genera con la quinta y la novena, y la segunda columna está generada por la sexta y la décima.

Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_5 \\ -x_2 - x_3 + x_6 + x_7 \\ -x_1 + x_9 \\ -x_2 - x_3 + x_{10} + x_{11} \\ -x_5 + x_9 \\ -x_6 - x_7 + x_{10} + x_{11} \end{bmatrix}$$

Si igualamos al vector nulo, podemos calcular el núcleo a partir del sistema de ecuaciones

$$x_1 = x_5 = x_9, \quad x_2 + x_3 = x_6 + x_7 = x_{10} + x_{11}.$$

$$\ker d^1 = \langle e_1^1 + e_5^1 + e_9^1, e_2^1 + e_6^1 + e_{10}^1, e_2^1 + e_6^1 + e_{11}^1, e_7^1 - e_6^1, e_3^1 - e_2^1, e_4^1, e_8^1, e_{12}^1 \rangle.$$

Terminemos calculando el núcleo y la imagen de d^2 . La imagen de d^2 está generada por las dos primera columnas, esto es,

$$\text{Im } d^2 = \langle e_2^3 + e_3^3, e_4^3 \rangle.$$

Consideremos el sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 - x_3 + x_5 \\ x_1 - x_3 + x_5 \\ x_2 - x_4 + x_6 \end{bmatrix}$$

Para calcular el núcleo, igualamos al vector nulo y obtenemos las ecuaciones

$$x_5 = x_3 - x_1, \quad x_6 = x_4 - x_2,$$

por lo que

$$\ker d^2 = \langle e_1^2 - e_5^2, e_2^2 - e_6^2, e_3^2 + e_5^2, e_4^2 + e_6^2 \rangle.$$

Con todo esto, ya podemos calcular los grupos de cohomología. Claramente $H^r(\llbracket \mathcal{G} \rrbracket) = 0$ para todo $r < 0$ y para todo $r > 3$.

$$H^0(\llbracket \mathcal{G} \rrbracket) = \ker d^0 / \text{Im } d^{-1} = \ker d^0 = \langle e_8^0 \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} H^1(\llbracket \mathcal{G} \rrbracket) &= \ker d^1 / \text{Im } d^0 = \\ &= \frac{\langle e_1^1 + e_5^1 + e_9^1, e_2^1 + e_6^1 + e_{10}^1, e_2^1 + e_6^1 + e_{11}^1, e_7^1 - e_6^1, e_3^1 - e_2^1, e_4^1, e_8^1, e_{12}^1 \rangle}{\langle e_1^1 + e_5^1 + e_9^1, e_2^1 + e_7^1 + e_{10}^1, e_3^1 + e_6^1 + e_{10}^1, e_3^1 + e_7^1 + e_{11}^1, e_4^1 + e_8^1, e_4^1 + e_{12}^1, e_8^1 + e_{12}^1 \rangle} = \\ &= \frac{\langle e_2^1 + e_6^1 + e_{10}^1, e_4^1, e_8^1, e_{12}^1 \rangle}{\langle e_4^1 + e_8^1, e_4^1 + e_{12}^1, e_8^1 + e_{12}^1 \rangle} = \frac{\langle e_2^1 + e_6^1 + e_{10}^1, e_4^1 \rangle}{\langle 2e_4^1 \rangle} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

En primer lugar, nótese que

$$\langle e_2^1 + e_6^1 + e_{10}^1, e_2^1 + e_6^1 + e_{11}^1, e_7^1 - e_6^1, e_3^1 - e_2^1 \rangle = \langle e_2^1 + e_6^1 + e_{10}^1, e_2^1 + e_7^1 + e_{10}^1, e_3^1 + e_6^1 + e_{10}^1, e_3^1 + e_7^1 + e_{11}^1 \rangle,$$

de ahí que se tenga el segundo cociente. El denominador nos da la siguiente relación. Si $e_4^1 + e_{12}^1 = 0$, tenemos $e_{12}^1 = -e_4^1$, por lo que e_{12}^1 es redundante en el numerador. Análogamente, $e_8^1 = -e_4^1$, por lo que e_8^1 no genera el espacio. Por último, $e_8^1 + e_{12}^1 = 0$ implica $2e_4^1 = 0$.

$$H^2(\llbracket \mathcal{G} \rrbracket) = \ker d^2 / \text{Im } d^1 = \frac{\langle e_1^2 - e_5^2, e_2^2 - e_6^2, e_3^2 + e_5^2, e_4^2 + e_6^2 \rangle}{\langle e_1^2 - e_5^2, e_2^2 - e_6^2, e_3^2 + e_5^2, e_4^2 + e_6^2 \rangle} = 0.$$

$$H^3(\llbracket \mathcal{G} \rrbracket) = \ker d^3 / \text{Im } d^2 = \frac{\langle e_1^3, e_2^3, e_3^3, e_4^3 \rangle}{\langle e_2^3 + e_3^3, e_4^3 \rangle} = \langle e_1^3, e_2^3 \rangle \cong \mathbb{Z}^2.$$

Recordemos el procedimiento que hemos seguido. En primer lugar, hemos definido el complejo de cadenas $\llbracket \mathcal{G} \rrbracket$ y los generadores de los grupos del complejo. A continuación hemos definido las diferenciales y hemos calculado las imágenes y los núcleos. Por último, hemos calculado los grupos de (co)homología.

Ahora, aplicamos los ajustes de grado y altura para obtener el complejo de Khovanov $\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \llbracket \mathcal{G} \rrbracket[-3]\{-6\}$, que es

$$0 \xrightarrow{d^{-4}} \mathcal{C}^{-3}(\mathcal{G}) \xrightarrow{d^{-3}} \mathcal{C}^{-2}(\mathcal{G}) \xrightarrow{d^{-2}} \mathcal{C}^{-1}(\mathcal{G}) \xrightarrow{d^{-1}} \mathcal{C}^0(\mathcal{G}) \xrightarrow{d^0} 0.$$

De esta forma, tenemos los siguientes grupos de homología:

$$\mathcal{H}^{-3}(\text{trébol}) = \langle e_8^0 \rangle \cong \mathbb{Z},$$

cuyo generador, $e_8^0 = v_- \otimes v_- \otimes v_-$ tiene grado cuántico $-3 - 6 = -9$.

$$\mathcal{H}^{-2}(\text{trébol}) = \frac{\langle e_2^1 + e_6^1 + e_{10}^1, e_4^1 \rangle}{\langle 2e_4^1 \rangle} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2,$$

de forma que la copia de \mathbb{Z} está asociada a $e_2^1 + e_6^1 + e_{10}^1 = (v_+ \otimes v_-, v_+ \otimes v_-, v_+ \otimes v_-)$, cuyo grado cuántico es $0 + 1 - 6 = -5$, y la copia de \mathbb{Z}_2 corresponde con $e_4^1 = (v_- \otimes v_-, 0, 0)$ de grado cuántico $-2 + 1 - 6 = -7$.

$$\mathcal{H}^{-1}(\text{trébol}) = 0.$$

$$\mathcal{H}^0(\text{trébol}) = \langle e_1^3, e_2^3 \rangle \cong \mathbb{Z}^2.$$

Una copia de \mathbb{Z} está generada por $e_1^3 = v_+ \otimes v_+$, cuyo grado cuántico es $2 + 3 - 6 = -1$. La segunda copia de \mathbb{Z} está generada por $e_2^3 = v_+ \otimes v_-$, cuyo grado cuántico es $0 + 3 - 6 = -3$.

Es decir, los grupos no triviales en la homología de Khovanov son:

$$\mathcal{H}^{-3,-9} = \mathbb{Z}, \quad \mathcal{H}^{-2,-5} = \mathbb{Z}, \quad \mathcal{H}^{-2,-7} = \mathbb{Z}_2, \quad \mathcal{H}^{0,-1} = \mathbb{Z}, \quad \mathcal{H}^{0,-3} = \mathbb{Z}.$$

Podemos expresar la homología de Khovanov en una tabla, que recoge los grupos de homología del complejo de Khovanov con los grados homológico (i) y cuántico (j).

	i				
		-3	-2	-1	0
j					
	-1				\mathbb{Z}
	-3				\mathbb{Z}
	-5		\mathbb{Z}		
	-7		\mathbb{Z}_2		
	-9	\mathbb{Z}			

A partir de la tabla, podemos calcular el polinomio graduado de Poincaré asociado al trébol:

$$Kh(\text{trébol}) = \sum_r t^r \dim \mathcal{H}^r(\text{trébol}) = t^{-3}q^{-9} + t^{-2}q^{-5} + q^{-3} + q^{-1}.$$

Para recuperar el polinomio de Jones, tomamos $t = -1$ y dividimos por $q + q^{-1}$ para normalizarlo, obteniendo

$$J(\text{trébol}) = Kh(\text{trébol})|_{t=-1} / (q + q^{-1}) = \frac{-q^{-9} + q^{-5} + q^{-3} + q^{-1}}{q + q^{-1}} = -q^{-8} + q^{-6} + q^{-2},$$

que coincide con el resultado obtenido en el Ejemplo 3.26.

5. Versión anular del polinomio de Jones y la homología de Khovanov

En las secciones anteriores hemos trabajado con enlaces en \mathbb{R}^3 , pero este no es el único espacio en el que podemos considerar los enlaces. En esta sección trabajaremos con enlaces anulares. En primer lugar, definimos el anillo $\mathbb{A} = S^1 \times [0, 1]$ y consideramos el espacio $\mathbb{A} \times I$, que llamaremos anillo engrosado, donde I es el intervalo $[0, 1]$. El objetivo de esta sección es dar una versión del polinomio de Jones y la homología de Khovanov para enlaces definidos en un anillo engrosado.

Definición 5.1 *Un nudo anular es un subconjunto de puntos $K \subseteq \mathbb{A} \times I$ homeomorfo a una circunferencia. Un enlace anular es una unión disjunta de nudos anulares. Dos enlaces anulares L_1 y L_2 son equivalentes si existe una isotopía ambiente $F : [\mathbb{A} \times I] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{A} \times I$ tal que $F(L_1, 0) = F_0(L_1) = K_1$ y $F(L_1, 1) = F_1(L_1) = L_2$.*

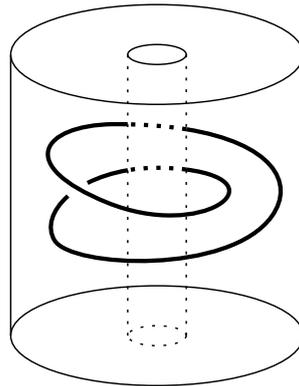


Figura 37: Ejemplo de un nudo anular.

Nótese que un enlace anular está contenido en $\mathbb{A} \times I$, por lo que cualquier movimiento o isotopía que se haga sobre el enlace debe ser considerado dentro del espacio. En particular, el enlace no puede atravesar el hueco central del anillo engrosado. Por ejemplo, el nudo de la Figura 37 no es, en principio, equivalente al nudo trivial en \mathbb{R}^3 .

Para obtener un diagrama de un enlace anular, proyectamos desde arriba sobre el primer factor \mathbb{A} y marcamos los cruces de la misma forma que en el caso clásico. Podemos identificar el anillo \mathbb{A} con el plano perforado $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, por lo que representaremos el diagrama en \mathbb{R}^2 indicando con un punto \cdot el origen o la punción del plano.

Dado un diagrama anular, se definen los movimientos de Reidemeister anulares de

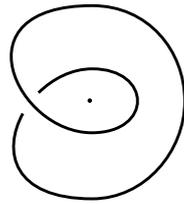


Figura 38: Diagrama anular asociado al nudo anular de la Figura 37.

manera análoga a la versión clásica, siempre que el movimiento asociado en $\mathbb{A} \times I$ esté permitido, es decir, que el enlace no atraviese el hueco central del anillo engrosado.

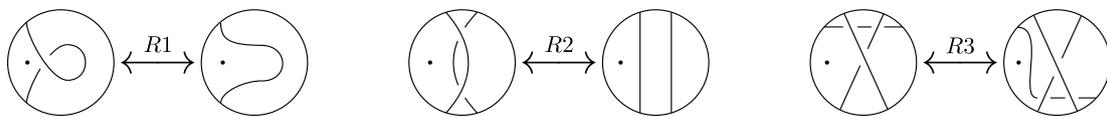


Figura 39: Movimiento $R1_{\mathbb{A}}$. **Figura 40:** Movimiento $R2_{\mathbb{A}}$. **Figura 41:** Movimiento $R3_{\mathbb{A}}$.

Nótese que hay más posibilidades para los movimientos, según donde se sitúe la puncción, pero todos se definen análogamente, siempre que el enlace no atraviese el hueco central del anillo engrosado para realizar el movimiento correspondiente en $\mathbb{A} \times I$. En la Figura 42 se muestran varios ejemplos de transformaciones que no están permitidas.

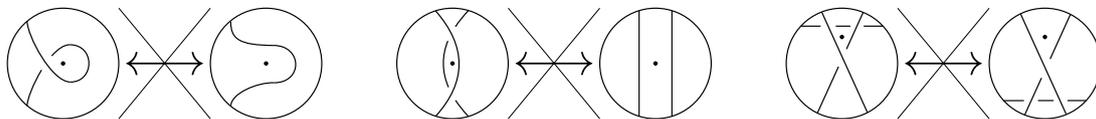


Figura 42: Ejemplos de movimientos no permitidos.

En el caso anular existe una versión del Teorema de Reidemeister análoga al caso clásico.

Teorema 5.2 [15]

Dos diagramas anulares representan el mismo enlace anular si y solo si se puede transformar uno en el otro mediante una secuencia finita de movimientos de Reidemeister anulares mostrados en las Figuras 39, 40 y 41.

La prueba del teorema es análoga a la del Teorema de Reidemeister para enlaces clásicos.

5.1. Polinomio de Jones anular

Queremos definir una versión anular del polinomio de Jones, esto es, un invariante polinómico para enlaces anulares orientados que, en el caso de que el enlace esté contenido en una bola $B^3 \subset \mathbb{A} \times I$, coincida con el polinomio de Jones clásico. Igual que hacíamos en la versión clásica, empezamos definiendo una versión anular del corchete de Kauffman, a partir de la cual se obtendrá el polinomio de Jones. Seguiremos la definición original de Hoste y Przytycki [15]¹.

Sabemos que suavizar los cruces de un diagrama da lugar a una unión disjunta de círculos. En los enlaces anulares, un estado de Kauffman tendrá asociados dos tipos de círculos. Los círculos triviales son aquellos que son borde de un disco en el plano punteado y los círculos no triviales son aquellos que no son borde de un disco en el plano punteado, es decir, que contienen la punción en su interior.

Ejemplo 5.3 *Dado el diagrama anular de la Figura 43, suavizamos el único cruce con un suavizado de tipo 1, obteniendo dos círculos. El primero de ellos es no trivial y el segundo es trivial.*

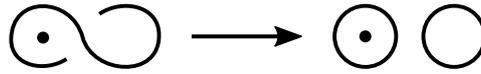


Figura 43: Suavizado de un diagrama anular.

Definición 5.4 *Sea D un diagrama anular. Se define el corchete de Kauffman anular de D como el polinomio $\langle D \rangle_{\mathbb{A}} \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}, h]$ definido por los siguientes axiomas:*

1. $\langle \cdot \circlearrowleft \rangle_{\mathbb{A}} = 1$,
2. $\langle \odot \rangle_{\mathbb{A}} = h$,
3. $\langle \times \rangle_{\mathbb{A}} = A \langle \smile \rangle_{\mathbb{A}} + A^{-1} \langle \frown \rangle_{\mathbb{A}}$,
4. $\langle \cdot \circlearrowleft \sqcup D \rangle_{\mathbb{A}} = (-A^2 - A^{-2}) \langle \cdot D \rangle_{\mathbb{A}}$,
5. $\langle \odot \sqcup D \rangle_{\mathbb{A}} = (-A^2 - A^{-2}) h \langle \cdot D \rangle_{\mathbb{A}}$.

¹Originalmente Hoste y Przytycki consideraron enlaces 1-triviales dicromáticos en S^3 , esto es, enlaces con dos componentes o más en los que una de las componentes es el nudo trivial y está pintado con el color 1 y el resto de componentes están pintadas con el color 2. Mediante una isotopía se consigue que la componente trivial sea el eje z . El resto de componentes pueden verse como un enlace anular. En esta sección adaptamos las definiciones originales de [15] a este contexto.

Observación 5.5 *La variable h del corchete de Kauffman anular puede entenderse como una medida del número de vueltas que da el nudo alrededor del hueco central del anillo engrosado. En la siguiente sección veremos que esta variable da lugar a un tercer índice en la homología.*

Lema 5.6 *El corchete de Kauffman anular es invariante bajo movimientos de Reidemeister de tipo 2 y 3.*

Demostración.

La demostración es análoga a la prueba del Lema 3.6, pues la punción no interviene en ningún movimiento de Reidemeister. □

Una vez definido el corchete de Kauffman anular, podemos definir el polinomio de Jones anular:

Definición 5.7 *Sea D un diagrama anular de un enlace anular orientado L . Se define el polinomio de Jones anular de D como*

$$V_{\mathbb{A}}(D) = (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle_{\mathbb{A}}.$$

Teorema 5.8 *El polinomio de Jones anular $V_{\mathbb{A}}(D)$ es un invariante de enlace anular.*

Demostración.

De manera análoga a como hicimos en la prueba del Teorema 2.13, probaremos que el polinomio de Jones anular es invariante por los tres movimientos de Reidemeister anulares.

Sabemos, por el Lema 5.6, que el corchete de Kauffman anular es invariante por movimientos de tipo 2 y 3, y por el Lema 2.23 la contorsión también lo es. Por tanto, el polinomio de Jones es invariante bajo movimientos de Reidemeister de tipo 2 y 3. Para comprobar que también es invariante bajo movimientos de Reidemeister de tipo 1, tenemos que el corchete de Kauffman satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle_{\mathbb{A}} &= A \langle \cdot \rangle_{\mathbb{A}} + A^{-1} \langle \cdot \rangle_{\mathbb{A}} = (A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1}) \langle \cdot \rangle_{\mathbb{A}} = -A^3 \langle \cdot \rangle_{\mathbb{A}}, \\ \langle \cdot \rangle_{\mathbb{A}} &= A \langle \cdot \rangle_{\mathbb{A}} + A^{-1} \langle \cdot \rangle_{\mathbb{A}} = (A + A^{-1}(-A^2 - A^{-2})) \langle \cdot \rangle_{\mathbb{A}} = -A^{-3} \langle \cdot \rangle_{\mathbb{A}}. \end{aligned}$$

Por otro lado, la contorsión satisface $w(\cdot) = w(\cdot) + 1$ y $w(\cdot) = w(\cdot) - 1$.

De esta forma, tenemos

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{A}}(\curvearrowright) &= (-A)^{-3w(\curvearrowright)} \langle \curvearrowright \rangle_{\mathbb{A}} = (-A)^{-3(w(\curvearrowright)+1)} (-A)^3 \langle \curvearrowleft \rangle_{\mathbb{A}} = (-A)^{-3w(\curvearrowright)} \langle \curvearrowleft \rangle_{\mathbb{A}} = V_{\mathbb{A}}(\curvearrowleft), \\ V_{\mathbb{A}}(\curvearrowleft) &= (-A)^{-3w(\curvearrowleft)} \langle \curvearrowleft \rangle_{\mathbb{A}} = (-A)^{-3(w(\curvearrowleft)-1)} (-A)^{-3} \langle \curvearrowright \rangle_{\mathbb{A}} = (-A)^{-3w(\curvearrowleft)} \langle \curvearrowright \rangle_{\mathbb{A}} = V_{\mathbb{A}}(\curvearrowright). \end{aligned}$$

Por tanto, el polinomio de Jones anular es un invariante de enlace anular. \square

Observación 5.9 Si L es un enlace anular contenido en una bola de dimensión 3 en $\mathbb{A} \times I$, entonces $V_{\mathbb{A}}(L) = V(L)$. De hecho, en tal caso, si D es un diagrama que representa a L , entonces $\langle D \rangle_{\mathbb{A}} = \langle D \rangle$, pues no habría necesidad de aplicar los los axiomas 2 y 5 de la Definición 5.4.

Ejemplo 5.10 Calculemos el polinomio de Jones anular del nudo representado por el diagrama $\odot \circlearrowright$. Nótese que la contorsión es 1 para cualquier orientación, por lo que no representaremos la orientación en el diagrama.

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{A}}(\odot \circlearrowright) &= (-A)^{3w(\odot \circlearrowright)} \langle \odot \circlearrowright \rangle_{\mathbb{A}} = (-A)^{-3} (A \langle \odot \circ \rangle_{\mathbb{A}} + A^{-1} \langle \odot \circlearrowleft \rangle_{\mathbb{A}}) = \\ &= (-A)^{-3} (A(-A^2 - A^{-2}) \langle \odot \rangle_{\mathbb{A}} + A^{-1} \langle \odot \rangle_{\mathbb{A}}) = (-A)^{-3} (-A)^3 \langle \odot \rangle_{\mathbb{A}} = \langle \odot \rangle_{\mathbb{A}} = h. \end{aligned}$$

Así, tenemos que $V_{\mathbb{A}}(\odot \circlearrowright) = h$, que era el resultado que podíamos esperar, pues podemos obtener \odot tras aplicar un movimiento de Reidemeister anular de tipo 1 a $\odot \circlearrowright$.

Terminaremos esta subsección mostrando algunas propiedades del polinomio de Jones anular.

Proposición 5.11 Sean L, L_1 y L_2 enlaces anulares orientados. El polinomio de Jones anular satisface las siguientes propiedades:

1. $V_{\mathbb{A}}(-L) = V_{\mathbb{A}}(L)$.
2. $V_{\mathbb{A}}(L^*)(A, h) = V_{\mathbb{A}}(L)(A^{-1}, h)$.

Demostración.

1. $V_{\mathbb{A}}(-L) = V_{\mathbb{A}}(L)$.

La demostración es análoga al caso clásico. Dado un diagrama anular D que representa el enlace L , basta notar que la contorsión no varía al invertir la orientación de un diagrama y que el corchete de Kauffman anular ignora la orientación. Así, $V_{\mathbb{A}}(-L) = (-A)^{-3w(-D)} \langle -D \rangle_{\mathbb{A}} = (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle_{\mathbb{A}} = V_{\mathbb{A}}(L)$.

$$2. V_{\mathbb{A}}(L^*)(A, h) = V_{\mathbb{A}}(L)(A^{-1}, h).$$

Sea D un diagrama anular que representa el enlace L . Nótese que $w(D^*) = -w(D)$ y que la relación de madeja es

$$\langle \times \rangle_{\mathbb{A}} = A \langle \smile \rangle_{\mathbb{A}} + A^{-1} \langle \rangle_{\mathbb{A}}, \quad \langle \times \rangle_{\mathbb{A}} = A \langle \rangle_{\mathbb{A}} + A^{-1} \langle \smile \rangle_{\mathbb{A}}.$$

Los axiomas relacionados con la variable h no se ven alterados al tomar la imagen especular. Así, $V_{\mathbb{A}}(L^*) = (-A)^{-3w(D^*)} \langle D^* \rangle_{\mathbb{A}}(A, h) = (-A)^{3w(D)} \langle D \rangle_{\mathbb{A}}(A^{-1}, h) = V_{\mathbb{A}}(L)(A^{-1}, h)$.

□

Observación 5.12 *De la misma forma que en el caso clásico, la segunda propiedad de la Proposición 5.11 implica que $V_{\mathbb{A}}(L)(A, h) = V_{\mathbb{A}}(L)(A^{-1}, h)$ si L es un enlace anular aquiral, es decir, si es equivalente a su imagen especular L^* . En el otro sentido, si el polinomio de Jones anular no es simétrico en la primera variable, esto es, $V_{\mathbb{A}}(L)(A, h) \neq V_{\mathbb{A}}(L)(A^{-1}, h)$, entonces L es un enlace quiral.*

Por último, introducimos una conjetura aún abierta enunciada en [16], que relaciona una propiedad topológica de un enlace anular L , el *wrapping number*, con el polinomio de Jones anular de L , $V_{\mathbb{A}}(L)$.

Para definir el *wrapping number* de un enlace anular, pensamos en el anillo engrosado como un toro sólido, \mathbb{T} , y consideramos $L \subset \mathbb{T}$. Se define el *wrapping number* de L , $wrap(L)$, como la intersección mínima de L con un disco meridional de \mathbb{T} .

Conjetura 5.13 (Conjetura *wrapping*) [16] *Sea L un enlace anular. Entonces, el grado anular máximo del polinomio de Jones anular de L , $V_{\mathbb{A}}(L)$, coincide con el wrapping number de L . Esto es:*

$$\max deg_h V_{\mathbb{A}}(L) = wrap(L).$$

Es evidente que $\max deg_h V_{\mathbb{A}}(L) \leq wrap(L)$ para cualquier nudo anular, por lo que quedaría abierta la prueba de la otra implicación. Terminaremos la próxima sección con una versión débil de la Conjetura 5.13.

5.2. Homología de Khovanov anular

Introducimos la versión anular de la homología de Khovanov. Como referencia usaremos [3] y [22]. Además del grado homológico i y del grado cuántico j , los grupos de homología tendrán un tercer grado k , que llamaremos grado anular, por lo que serán tri-graduados. La homología de Khovanov anular es un caso particular de la homología de Khovanov sobre superficies engrosadas $S \times I$, introducida por Asaeda, Przytycki y Sikora en [2], que es una categorificación de los módulos de madeja.

Consideremos un diagrama anular D con c cruces de un enlace anular L . Se construye el cubo de resolución del mismo modo que hacíamos en el caso clásico con los 2^c estados de Kauffman asociados a D . Recordemos que un estado de Kauffman es una unión de círculos disjuntos en el plano y que en el caso anular cada uno de ellos puede ser trivial, si la punción no está en el interior del círculo, o no trivial, si la punción está en su interior. Vamos a definir dos espacios vectoriales graduados, V y W , que asociaremos a los círculos de los estados.

Sea V el espacio vectorial graduado generado por los elementos v_+ y v_- , de grado cuántico $+1$ y -1 , respectivamente y de grado anular 0 en ambos casos. Sea W el espacio vectorial graduado generado por los elementos w_+ y w_- , de grado cuántico 0 en ambos casos y de grado anular $+1$ y -1 , respectivamente. A cada círculo trivial de un estado de Kauffman s le asociamos una copia de V y a cada círculo no trivial le asociamos una copia de W . Así, un estado de Kauffman s tendrá asociado un producto tensorial de copias de V y de W ; más precisamente $V_s(D) = V^{\otimes a} \otimes W^{\otimes b}\{r\}$, donde a y b son el número de círculos triviales y no triviales, respectivamente, y r la altura o número de suavizados de tipo 1 de s . Con estos elementos podemos definir los siguientes grupos de cadenas.

Definición 5.14 *Sea D un diagrama anular de un enlace anular L . Se define el r -ésimo grupo de cadenas $[[D]]_{\mathbb{A}}^r$ como la suma directa de todos los espacios vectoriales de altura r , es decir, $[[D]]_{\mathbb{A}}^r = \bigoplus_{s:|s|=r} V_s(D) = \bigoplus_{s:|s|=r} V^{\otimes a} \otimes W^{\otimes b}\{r\}$.*

Obsérvese que si todos los círculos son triviales para todos los estados de Kauffman asociados a D , entonces los grupos de cadenas coinciden con los del caso clásico.

El próximo paso para definir la homología de Khovanov anular es dotar a los grupos de cadenas de diferenciales de grado 0 para formar un complejo de cadenas. Para ello, definimos aplicaciones sobre las aristas del cubo, es decir, entre los espacios vectoriales graduados asociados a estados de Kauffman que difieren en el suavizado de un cruce.

Sabemos que cambiar un suavizado de tipo 0 a un suavizado de tipo 1 en un estado

nos da otro estado que es el resultado de unir dos círculos en uno o bien de separar un círculo en dos. Veamos las posibilidades que hay y definamos las aplicaciones m y Δ correspondientes. Recordemos que necesitamos que las aplicaciones sean de grado 0, y que tendremos un cambio de grado (cuántico) de una unidad. Esto implica que las aplicaciones m y Δ deben bajar el grado cuántico en una unidad y preservar el grado anular. Estas condiciones fuerzan la definición de m y Δ .

En aquellas aristas asociadas a la fusión de dos círculos en uno, actuaría la aplicación m sobre ellos. Según el tipo de círculos implicados (triviales o no triviales), tenemos tres posibilidades:

1. Dos círculos triviales se unen en un círculo trivial: $\cdot \bigcirc \bigcirc \longrightarrow \cdot \text{⋈}$

$$\begin{aligned} m: V \otimes V &\longrightarrow V \\ v_+ \otimes v_+ &\longmapsto m(v_+ \otimes v_+) = v_+, \\ v_+ \otimes v_- &\longmapsto m(v_+ \otimes v_-) = v_-, \\ v_- \otimes v_+ &\longmapsto m(v_- \otimes v_+) = v_-, \\ v_- \otimes v_- &\longmapsto m(v_- \otimes v_-) = 0. \end{aligned}$$

2. Un círculo trivial y un círculo no trivial se unen en un círculo no trivial: $\odot \bigcirc \longrightarrow \odot \text{⋈}$

$$\begin{aligned} m: V \otimes W &\longrightarrow W \\ v_+ \otimes w_+ &\longmapsto m(v_+ \otimes w_+) = w_+, \\ v_+ \otimes w_- &\longmapsto m(v_+ \otimes w_-) = w_-, \\ v_- \otimes w_+ &\longmapsto m(v_- \otimes w_+) = 0, \\ v_- \otimes w_- &\longmapsto m(v_- \otimes w_-) = 0. \end{aligned}$$

3. Dos círculos no triviales se unen en un círculo trivial: $\odot \odot \longrightarrow \bigcirc$

$$\begin{aligned} m: W \otimes W &\longrightarrow V \\ w_+ \otimes w_+ &\longmapsto m(w_+ \otimes w_+) = 0, \\ w_+ \otimes w_- &\longmapsto m(w_+ \otimes w_-) = v_-, \\ w_- \otimes w_+ &\longmapsto m(w_- \otimes w_+) = v_-, \\ w_- \otimes w_- &\longmapsto m(w_- \otimes w_-) = 0. \end{aligned}$$

Nótese que estas definiciones son forzadas si el grado de m es 0. Cuando ambos círculos son triviales, la definición de m es análoga a la definición de la versión clásica. En el segundo caso, el espacio de salida es $V \otimes W$ y el de llegada, W . Para que el grado cuántico disminuya una unidad, m debe llevar $v_- \otimes w_{\pm}$ a 0 y $v_+ \otimes w_{\pm}$ a w_{\pm} , lo que preserva el grado

Proposición 5.15 *Los grupos de cadenas $[[D]]_{\mathbb{A}}^r$ dotados con las aplicaciones diferenciales d^r forman un complejo de cadenas.*

Ahora, definimos el complejo de Khovanov anular, que será el resultado de aplicar un cambio de grado y de altura al complejo de cadenas $[[D]]_{\mathbb{A}}$. El ajuste de grado y altura coincide con el de la versión clásica.

Definición 5.16 *Sea D un diagrama con p cruces positivos y n cruces negativos de un enlace anular L . Se define el complejo de Khovanov anular como el complejo de cadenas $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}(D) = [[D]]_{\mathbb{A}}[-n]\{p - 2n\}$.*

Una vez definido el complejo de Khovanov anular, estamos en condiciones de definir la homología de Khovanov anular.

Definición 5.17 *Sea D un diagrama anular de un enlace anular orientado L . Se define la homología de Khovanov anular de D , $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}(D)$, como el conjunto de grupos de homología asociados al complejo de Khovanov anular $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}(D)$.*

Teorema 5.18 [2] *Los grupos de homología $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}^r(D)$ son invariantes de enlace.*

Obsérvese que si un enlace anular L está contenido en una bola de dimensión 3 en $\mathbb{A} \times I$ y D es un diagrama anular de L , entonces $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}(D) = \mathcal{C}(D)$, y por tanto, $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}(L) = \mathcal{H}(L)$, ya que todos los círculos de todos los estados de Kauffman asociados a D son triviales.

Teorema 5.19 *La homología de Khovanov anular categorifica el polinomio de Jones anular.*

Para recuperar el polinomio de Jones anular a partir de la homología de Khovanov anular, se toma la característica de Euler bigraduada,

$$\sum_i (-1)^i \dim \mathcal{H}_{\mathbb{A}}^{i,j,k}(L),$$

seguida de un cambio de variable, de manera similar al introducido en la versión clásica.

Ejemplo 5.20 *Calculemos la homología de Khovanov anular del nudo representado por el diagrama . En primer lugar, construimos el cubo de resolución asociado al diagrama; en este caso, al tener un único cruce, tendríamos 2 estados posibles, y el cubo quedaría como se muestra en la Figura 44: Así, el complejo de cadenas $[[\text{Diagrama}]]_{\mathbb{A}}$ vendría dado por:*

$$\dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{d^{-1}} [[\text{Diagrama}]]_{\mathbb{A}}^0 \xrightarrow{d^0} [[\text{Diagrama}]]_{\mathbb{A}}^1 \xrightarrow{d^1} 0 \longrightarrow \dots,$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \textcircled{\bullet} \quad \textcircled{} \\ W \times V \end{array} & \xrightarrow{m} & \begin{array}{c} \textcircled{\bullet} \textcircled{} \\ W\{1\} \end{array} \end{array}$$

Figura 44: Cubo de resolución del diagrama $\textcircled{\bullet}\textcircled{}$.

donde $[[\textcircled{\bullet}\textcircled{}]]_{\mathbb{A}}^0 = W \times V$ y $[[\textcircled{\bullet}\textcircled{}]]_{\mathbb{A}}^1 = W\{1\}$, dando lugar al complejo

$$\dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{d^{-1}} W \times V \xrightarrow{m} W\{1\} \xrightarrow{d^1} 0 \longrightarrow \dots$$

Teniendo en cuenta que el único cruce del diagrama es positivo para las dos orientaciones posibles, obtenemos el complejo de Khovanov anular $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}(\textcircled{\bullet}\textcircled{}) = [[\textcircled{\bullet}\textcircled{}]]_{\mathbb{A}}[-n]\{p-2n\} = [[\textcircled{\bullet}\textcircled{}]]_{\mathbb{A}}\{1\}$:

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{A}}^0(\textcircled{\bullet}\textcircled{}) \xrightarrow{d^0} \mathcal{C}_{\mathbb{A}}^1(\textcircled{\bullet}\textcircled{}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots,$$

que corresponde a

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow W \times V\{1\} \xrightarrow{d^0} W\{2\} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Sabemos que una base de $W \times V\{1\}$ viene dada por los elementos

$$\begin{array}{l} w_+ \otimes v_+ \quad \text{de grado cuántico } 1+1=2 \text{ y grado anular } 1, \\ w_+ \otimes v_- \quad \text{de grado cuántico } -1+1=0 \text{ y grado anular } 1, \\ w_- \otimes v_+ \quad \text{de grado cuántico } 1+1=2 \text{ y grado anular } -1, \\ w_- \otimes v_- \quad \text{de grado cuántico } -1+1=0 \text{ y grado anular } -1, \end{array}$$

y una base de $W\{2\}$, por

$$\begin{array}{l} w_+ \quad \text{de grado cuántico } 0+2=2 \text{ y grado anular } 1, \\ w_- \quad \text{de grado cuántico } 0+2=2 \text{ y grado anular } -1. \end{array}$$

Recordemos que, al fusionar un círculo no trivial con otro trivial para obtener un círculo no trivial, la diferencial m está definida como sigue:

$$\begin{array}{l} m: W \otimes V \longrightarrow W \\ w_+ \otimes v_+ \longmapsto m(w_+ \otimes v_+) = w_+, \\ w_+ \otimes v_- \longmapsto m(w_+ \otimes v_-) = 0, \\ w_- \otimes v_+ \longmapsto m(w_- \otimes v_+) = w_-, \\ w_- \otimes v_- \longmapsto m(w_- \otimes v_-) = 0. \end{array}$$

Podemos representar la diferencial d^0 mediante una matriz:

$$d^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

De aquí obtenemos que $\text{Im } d^0 = \langle w_+, w_- \rangle$. Considerando el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tenemos que $\ker d^0 = \langle w_+ \otimes v_-, w_- \otimes v_- \rangle$. Con esta información, podemos calcular los grupos de homología:

$$\mathcal{H}_{\mathbb{A}}^0(\bigcirc) = \frac{\ker d^0}{\text{Im } d^{-1}} = \ker d^0 = \langle w_+ \otimes v_-, w_- \otimes v_- \rangle \cong \mathbb{Z}^2.$$

$$\mathcal{H}_{\mathbb{A}}^1(\bigcirc) = \frac{\ker d^1}{\text{Im } d^0} = \frac{\langle w_+, w_- \rangle}{\langle w_+, w_- \rangle} = 0.$$

El resto de grupos de homología son claramente 0. Hemos visto que $w_+ \otimes v_- \in W \otimes V\{1\}$ tiene grado cuántico 0 y grado anular 1, y $w_- \otimes v_- \in W \otimes V\{1\}$ tiene grado cuántico 0 y grado anular -1 . Así, tenemos que los únicos grupos de homología no triviales son $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}^{0,0,1}(\bigcirc) = \mathbb{Z}$ y $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}^{0,0,-1}(\bigcirc) = \mathbb{Z}$.

Para recuperar el polinomio de Jones anular, tomamos la característica de Euler tri-graduada en las variables q y a , para los grados cuántico y anular, respectivamente, y aplicamos el cambio de variable $a + a^{-1} = h$:

$$V_{\mathbb{A}}(\bigcirc) = \sum_i (-1)^i \dim \mathcal{H}_{\mathbb{A}}^{i,j,k}(\bigcirc) = \dim \mathcal{H}_{\mathbb{A}}^{0,0,1}(\bigcirc) + \dim \mathcal{H}_{\mathbb{A}}^{0,0,-1}(\bigcirc) = a + a^{-1} = h,$$

que coincide con el polinomio de Jones anular de \bigcirc obtenido en el Ejemplo 5.10.

Terminamos esta sección introduciendo la Conjetura *wrapping* para la homología de Khovanov anular, un problema también abierto. Nuevamente, la conjetura relaciona el *wrapping number* de un enlace con el grado máximo anular de su homología de Khovanov anular.

Conjetura 5.21 (Conjetura *wrapping* II) [13] *Sea L un enlace anular. Entonces, el grado anular máximo de los grupos no triviales en la homología de Khovanov anular de L coincide con el wrapping number de L . Esto es,*

$$\max\{k \mid \mathcal{H}^{**k}(L) \text{ es no trivial}\} = \text{wrap}(L).$$

Se sabe que [13]

$$\max\{k \mid \mathcal{H}^{**k}(L) \text{ es no trivial}\} \leq \text{wrap}(L).$$

Como $\max \text{deg}_h V_{\mathbb{A}}(L) \leq \max\{k \mid \mathcal{H}^{**k}(L) \text{ es no trivial}\}$ es evidente que la Conjetura 5.21 enunciada en esta sección es una versión más débil de la Conjetura 5.13.

Referencias

- [1] Adams, C. (1994). *The knot book: An elementary introduction to the mathematical theory of knots*. New York: W.H. Freeman.
- [2] Asaeda M., Przytycki J.H. and Sikora A. (2004). Categorification of the Kauffman bracket skein module of I-bundles over surfaces. *Algebr. Geom. Topol.* **4** 1177–1210.
- [3] Akhmechet R., Krushkal V. and Willis M. (2019). Stable homotopy refinement of quantum annular homology. *Compositio Mathematica*, **157**(4), 710–769.
- [4] Bar-Natan D. (2002). On Khovanov’s categorification of the Jones polynomial. *Algebr. Geom. Topol.* **2** 337–370.
- [5] Cromwell P.R. (2004). *Knots and links*. New York: Cambridge University Press.
- [6] Hatcher A. (2002). *Algebraic topology*. New York: Cambridge University Press.
- [7] Jones V.F.R. (1985). A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **12** (1) 103–111.
- [8] Knot Atlas. (n.d.). http://katlas.org/wiki/Main_Page.
- [9] Kauffman, L.H. (1987). State Models and the Jones Polynomial. *Topology* **26**, 395–407.
- [10] Khovanov, M. (2000). A categorification of the Jones polynomial. *Duke Math. J.* **3**, 359–426.
- [11] Kronheimer, P-B. and Mrowka T.S. (2010). Khovanov homology is an unknot-detector. *Publ.math.IHES* **113**, 97—208.
- [12] Macho, M. (2004). *Homología singular*. Apuntes curso 2004/2005. Universidad del País Vasco–Euskal Herriko Unibertsitatea. <http://www.ehu.es/~mtw-mastm/CD0405.pdf>
- [13] Martin, G. (2021). Annular Khovanov homology and meridional disks.
- [14] Murasugi, K. (1987). Jones polynomials and classical conjectures in knot theory. *Topology* **26**, 187—194.
- [15] Hoste J. and Przytycki J.H. (1989). An invariant of Dichromatic Links. *Proceedings of the American Mathematical Society* **105**(4) 1003–1003.

- [16] Hoste J. and Przytycki J.H. (1995). The $(2, \infty)$ skein module of Whitehead manifolds. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* **4(3)** 411–427.
- [17] Reidemeister, K. (1927). Elementare Begründung der Knotentheorie. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **5**, 24–32.
- [18] Rolfsen, D. (2003). *Knots and Links*. AMS Chelsea.
- [19] Tait, P.G. (1898). On knots I, II, III. *Scientific Papers, Vol. I, Cambridge Univ. Press, London*, 273–347.
- [20] Thistlethwaite, M. (1987). A spanning tree expansion of the Jones polynomial. *Topology* **26**, 297–309.
- [21] Viro, O. (2002). Remarks on definition of Khovanov homology.
- [22] Xie, Y. (2018). Instantons and Annular Khovanov Homology.