



# La sucesión espectral de Adams

Juan Antonio Delgado Tejada





# La sucesión espectral de Adams

Juan Antonio Delgado Tejada

Trabajo de fin de máster que forma parte de los requisitos para la obtención del título de Máster Universitario en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Dirigido por  
Fernando Muro Jiménez



## Abstract

Without doubts, calculating homotopy groups of spheres is one of the main open problems in Algebraic Topology. After Toda and Serre's computations, the Adams spectral sequence rose up as one of the most powerful tools for computing homotopy groups. Spectral sequences are one of the most useful and difficult to understand tools in homological algebra, they can be viewed as pages of a book: one does not know the content of the book until it has read all of its pages. This analogy is very clear because the terms of a spectral sequence are also named pages. The work of Adams, Steenrod, Novikov, May and many other authors help to understand the second page of the Adams spectral sequence. However, in the last decades, Baues and Jibladze with some other authors, have developed a theory to understand and compute the third page. The main goal of this Master Thesis is to understand those works and use these results to improve the computations of the stable homotopy groups of the spheres.

## Resumen

El cálculo de los grupos de homotopía de las esferas es, sin duda, uno de los problemas abiertos más importantes de la Topología Algebraica. Tras los cálculos de Toda y Serre, la sucesión espectral de Adams aparece como una poderosa herramienta para su cómputo. Las sucesiones espectrales son uno de los objetos más útiles y a su vez más difíciles de tratar del álgebra homológica, estas pueden entenderse como las páginas de un libro: no sabremos el contenido del libro hasta que hayamos leído todas sus páginas. Esta analogía es bastante acertada pues, de hecho, los términos de una sucesión espectral también se llaman páginas. Los trabajos de Adams, Steenrod, Novikov y May entre otros autores arrojaron luz sobre la segunda página de la sucesión espectral de Adams; sin embargo, en las últimas décadas, Baues y Jibladze junto a otros colaboradores se han dedicado al estudio de la tercera. El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Máster es presentar y desarrollar estas nuevas herramientas, especialmente con el fin de mostrar cómo pueden mejorarse los cálculos sobre los grupos de homotopía estable de las esferas con ellas.



# Índice general

Introducción	3
Capítulo 1. Conceptos clásicos	7
1.1. Operaciones cohomológicas y álgebra de Steenrod	7
1.2. Sucesión espectral de Adams	10
1.3. Cálculo de grupos de homotopía estable de las esferas	11
Capítulo 2. Herramientas algebraicas	17
2.1. Categorías track, módulos de pares y álgebras de pares	17
2.2. $\Sigma$ -estructura	21
2.3. La diferencial secundaria de los álgebras de pares	22
Capítulo 3. Término $E_3$ de la sucesión espectral de Adams	25
3.1. $E_3(S^0, S^0)$	25
3.2. La aplicación multiplicación en $\mathcal{B}$	26
3.3. Algoritmo para el cálculo de las diferenciales secundarias	28
3.4. Cálculos explícitos	30
Capítulo 4. Conclusiones y nuevas líneas	35
Apéndice	37
Bibliografía	41



## Introducción

What is courage? Courage is knowing  
fear and making that fear your own!

---

William A. Zeppeli

La topología algebraica surge como la rama de la topología que se dedica al estudio de los espacios topológicos utilizando herramientas del álgebra abstracta: como grupos, módulos o espacios vectoriales. El objetivo es encontrar invariantes algebraicos que clasifiquen los espacios topológicos en clases de homeomorfía, o tipos de homotopía. Unos de los pioneros en utilizar herramientas de carácter algebraico para estudiar las propiedades cualitativas de los espacios fue Poincaré con la introducción del grupo fundamental. Este grupo se define sobre un espacio punteado  $(X, x_0)$  como las clases de homotopía de lazos basados en  $x_0$ , este grupo se denota  $\pi_1(X, x_0)$ , aunque solemos omitir el punto base pues está implícito en la definición, de manera que lo más habitual es verlo como  $\pi_1(X)$ . Sin embargo, ¿por qué no extender esta definición y en lugar de considerar lazos, considerar las clases de homotopía de aplicaciones de  $S^n$  en un espacio  $X$ ?, esto mismo se preguntó Cech en un congreso en Zürich en el año 1932. Estos grupos pasarían a conocerse como los grupos de homotopía de orden superior, denotados habitualmente como  $\pi_n(X)$ . Como sabemos que  $\mathbb{R}^n$  tiene el tipo de homotopía de un punto, sus grupos de homotopía de orden superior también van a ser triviales, por lo que el primer ejemplo no trivial que merece la pena estudiar son las esferas.

El primer resultado que podemos obtener es que  $\pi_n(S^1) = 0$  para todo  $n > 1$ . Esto que ocurría para  $S^1$  y el hecho de que los grupos de homotopía de orden superior son todos abelianos hizo pensar que estos grupos no tendrían ningún interés, ya que incluso se conjeturó erróneamente que estos grupos iban a coincidir con los grupos de homología. En los siguientes años los matemáticos Hopf, Freudenthal y Hurewicz entre otros se dedicaron al estudio de estos nuevos grupos. Los resultados que más destacan en esta primera etapa son los siguientes:

**Teorema de Hurewicz.** [Hat02, Teorema 4.32] *Si  $X$  es un espacio  $(n - 1)$ -conexo, entonces  $\tilde{H}(X) = 0$  para todo  $i < n$  y  $\pi_n(X) \cong H_n(X)$ . En particular si  $X = S^n$  se tiene que  $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ .*

**Teorema de Freudenthal.** [Fre38] *Sea  $X$  un espacio  $(n - 1)$ -conexo, entonces la aplicación suspensión  $\Sigma_*: \pi_i(X) \rightarrow \pi_{i+1}(\Sigma X)$  es un isomorfismo si  $i < 2n - 1$  y sobreyectiva si  $i = 2n - 1$ .*

**Teorema de Hopf.** [Hop31]  $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$

El Teorema de Hurewicz nos da una relación entre los grupos de homología y los grupos de homotopía de las esferas; se sigue pues que los grupos de homotopía que debemos estudiar son  $\pi_i(S^n)$  cuando  $i > n$ , pues el resto ya conocemos cuáles son. El Teorema de

Freudenthal supone el punto de partida para lo que conocemos como teoría de homotopía estable. Como bien sabemos  $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$ , por lo que deducimos de este resultado que  $\pi_{n+k}(S^n)$  depende únicamente de  $k$  si y sólo si  $n > k + 1$ , es por ello que podemos hablar sin pérdida de generalidad del  $k$ -ésimo grupo de homotopía estable de la esferas, [Rav86, Corolario 1.1.5]. Finalmente, el Teorema de Hopf nos da el primer ejemplo de un grupo de homotopía  $\pi_i(S^n)$  con  $i > n$  no trivial. La demostración de este resultado se basa en la construcción de una fibración  $S^1 \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{\eta} S^2$ . La aplicación  $\eta$  verifica que la antimagen de cualquier punto de  $S^2$  es una circunferencia, y que dos de estas circunferencias dadas por las preimágenes están siempre enlazadas, de esta manera  $\pi_3(S^2)$  está generado por la clase de esta aplicación  $\eta$ . Siguiendo este proceso Hopf da las fibraciones  $S^3 \hookrightarrow S^7 \xrightarrow{\nu} S^4$  y  $S^7 \hookrightarrow S^{15} \xrightarrow{\sigma} S^8$  y demuestra que tanto  $\nu$  como  $\sigma$  generan  $\mathbb{Z}$  en los grupos de homotopía  $\pi_7(S^2)$  y  $\pi_{15}(S^8)$ .

Consideremos ahora una aplicación continua  $\phi: S^{2n-1} \rightarrow S^n$  y consideramos el complejo celular  $C_\phi = S^n \smile_\phi D^{2n}$ , no es muy difícil comprobar que la cohomología de este espacio es  $H^i(C_\phi) = \mathbb{Z}$  si  $i = 0, n, 2n$  y que su anillo de cohomología es  $H^*(C_\phi) = \mathbb{Z}[\alpha, \beta]/\langle \beta \smile \beta = 0, \alpha \smile \beta = 0, \alpha \smile \alpha = h(\phi)\beta \rangle$  con  $h(\phi)$  un entero que llamaremos invariante de Hopf. Hopf demostró que las aplicaciones anteriores tienen invariante de Hopf igual a uno, la pregunta que cabe esperar es si estas son las únicas que tienen invariante uno o existen algunas más. Aquí es donde Adams, en su celebrado artículo [Ada58a] demuestra que para tener invariante de Hopf igual a uno es necesario y suficiente que  $n = 2, 4, 8$ . Es en este artículo donde aparece por primera la sucesión espectral que lleva su nombre y cuya tercera página es el objeto de estudio de este trabajo. Sin embargo, como puede observarse en la siguiente figura, las consecuencias de este resultado van más allá de las referidas al cálculo de los grupos de homotopía, pues nos da una caracterización de cuándo una esfera tiene estructura de  $H$ -espacio y cuándo podemos obtener estructura de álgebras de división sobre los reales, siendo las únicas posibilidades  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$ .

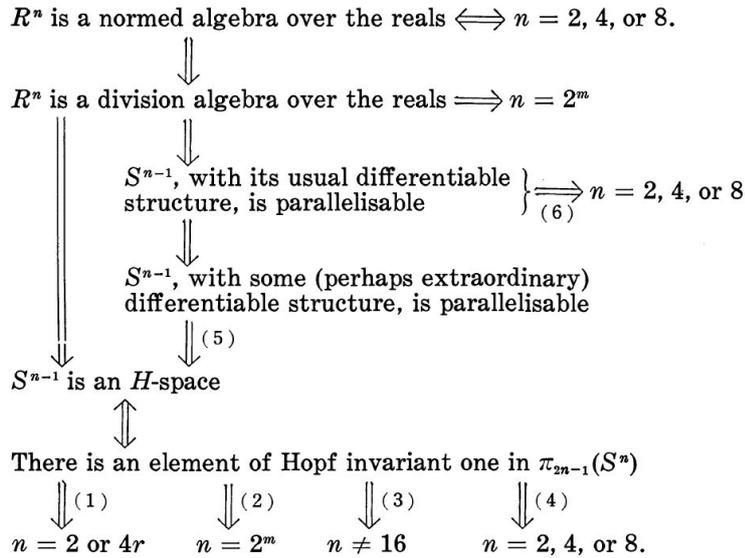


FIGURA 1. [Ada58a, Introducción] Esquema original de la demostración del Teorema de Adams del invariante uno de Hopf.

En [Jam99] puede encontrarse más información acerca de los inicios de la teoría de homotopía así como de la topología algebraica en general.

El capítulo primero, de naturaleza introductoria, tiene como objetivo asentar el contexto sobre el que se va a trabajar en el resto de la presente memoria. Comenzaremos introduciendo el álgebra de Steenrod  $\mathcal{A}_p$ , es decir, el álgebra de las operaciones cohomológicas estables. Este álgebra es de suma importancia en topología algebraica, pues otorga al anillo de cohomología de un espacio,  $H^*(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  con  $p$  primo, de estructura de  $\mathcal{A}_p$ -álgebra. Tras esto, hablaremos de la sucesión espectral de Adams, que no es más que una sucesión espectral que converge a la  $p$ -componente (Definición 1.2.3) de los grupos de homotopía estable de un espectro, y que en el caso del espectro de las esferas, su segunda página es la cohomología del álgebra de Steenrod. Esto nos permitirá, mediante la construcción de una resolución minimal, obtener algunos términos de la página segunda y a partir de ellos dar algunos resultados sobre los grupos de homotopía estable de las esferas.

El principal objetivo del segundo capítulo es construir el funtor derivado secundario  $\text{Ext}^n$  obtenido a través de resoluciones secundarias. Esto generaliza el concepto del funtor derivado clásico. Para ello, será necesario introducir los conceptos de módulos de pares y álgebras de pares con los que podremos establecer los complejos secundarios de cadenas y resoluciones secundarias que serán indispensables para la construcción del nuevo  $\text{Ext}^n$ . Como ya habremos visto en el capítulo anterior, el funtor clásico  $\text{Ext}^n$  juega un papel fundamental para describir el término  $E_2$  de la sucesión espectral de Adams, veremos en el capítulo siguiente que este nuevo funtor derivado nos da información sobre el término  $E_3$ .

En el tercer capítulo enunciaremos el resultado más importante de [BJ04a] y del presente trabajo:

$$E_3(S^0, S^0) = \text{Ext}_{\mathcal{A}}(\mathbb{G}^\Sigma, \mathbb{G}^\Sigma)$$

que no es más que el análogo del Teorema 1.2.5 para la página tercera. Este resultado supone un enorme avance en el estudio de la sucesión espectral de Adams, pues aunque dista mucho de ser la página infinito, está más próxima que la página segunda, además de que abre nuevas vías para el estudio de las siguientes páginas de la sucesión. Sin embargo, nosotros no nos centraremos en la demostración de este resultado, nos centraremos en dar un algoritmo para su cómputo. El Algoritmo 3.3.5 nos proporciona las diferenciales secundarias, lo que es equivalente a conocer la tercer página de la sucesión espectral. Veremos explícitamente cómo se construye dicho algoritmo, y elaboraremos una serie de cálculos detallados para facilitar su comprensión.

Finalmente, el cuarto y último capítulo supone un compendio de ideas que han ido surgiendo a lo largo de la elaboración de este proyecto, y que podrían dar lugar a futuras líneas de investigación. Estas nuevas ideas se basan principalmente en los trabajos de Nassau, [Nas12] y [Nas19].



## Conceptos clásicos

A spectral sequence is an algebraic object, like an exact sequence, but more complicated.

---

J.F. Adams

En este primer capítulo enunciaremos los conceptos necesarios para entender el resto del presente trabajo. Comenzaremos con la definición de operación cohomológica secundaria y continuaremos dando una caracterización del álgebra de Steenrod a partir de los cuadrados y potencias de Steenrod. En las siguientes secciones daremos una descripción general de la sucesión espectral de Adams y aplicaremos los resultados ya conocidos para realizar algunos sencillos cálculos relativos a los grupos de homotopía estable de las esferas.

### 1.1. Operaciones cohomológicas y álgebra de Steenrod

**Definición 1.1.1.** Sean  $G$  y  $H$  dos grupos y  $m, n \in \mathbb{N}$ , una operación cohomológica de tipo  $(G, m, H, n)$  es una familia de aplicaciones  $\Theta = \Theta_X: H^m(X; G) \rightarrow H^n(X; H)$ , para cada espacio  $X$ ; cumpliendo la condición natural  $f^*\Theta_Y = \Theta_X f^*$  para toda aplicación  $f: X \rightarrow Y$ . Es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^m(Y; G) & \xrightarrow{\Theta_Y} & H^n(Y; H) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ H^m(X; G) & \xrightarrow{\Theta_X} & H^n(X; H) \end{array}$$

**Ejemplo 1.1.2.** Tomemos la cohomología con coeficientes en un anillo  $R$ , entonces la aplicación

$$\begin{array}{ccc} H^m(X; R) & \rightarrow & H^{mp}(X; R) \\ \alpha & \mapsto & \alpha^p \end{array}$$

es una operación cohomológica, pues  $f^*(\alpha^p) = (f^*(\alpha))^p$ . Tomando en particular  $R = \mathbb{Z}$ , tenemos que en general una operación cohomológica no tiene por qué ser un homomorfismo.

**Definición 1.1.3.** [MT68, Capítulo 3, Teorema 1] Los cuadrados de Steenrod  $\text{Sq}^i$ , con  $i \geq 0$ , son aplicaciones

$$\text{Sq}^i: H^n(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^{n+i}(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

que verifican las siguientes propiedades:

1.  $\text{Sq}^i(f^*(\gamma)) = f^*(\text{Sq}^i(\gamma))$  para  $f: X \rightarrow Y$ .
2.  $\text{Sq}^i(\gamma + \tau) = \text{Sq}^i(\gamma) + \text{Sq}^i(\tau)$ .
3. Si  $i > p$ ,  $\text{Sq}^i(\gamma) = 0$  para todo  $\gamma \in H^p(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

4.  $Sq^i(\gamma) = \gamma^2$  para todo  $\gamma \in H^i(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .
5.  $Sq^0$  es el homomorfismo identidad.
6.  $Sq^i$  es el homomorfismo de Bockstein.
7.  $\delta(Sq^i(\gamma)) = Sq^i(\delta(\gamma))$  donde  $\delta : H^n(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^{n+1}(\Sigma X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  es el homomorfismo suspensión dado por el producto cruz reducido con un generador en  $H^i(S^1, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .
8. Fórmula de Cartan:  $Sq^i(\gamma \smile \tau) = \sum_i Sq^i(\gamma) \smile Sq^{i-j}(\tau)$ .
9. Relaciones de Adem: Para  $a < 2b$ ,  $Sq^a Sq^b = \sum_k \binom{b-k-1}{a-2k} Sq^{a+b-k} Sq^k$

Estas propiedades nos vienen a decir que los cuadrados de Steenrod son operaciones cohomológicas que extienden la operación de elevar al cuadrado  $\gamma \mapsto \gamma^2$ , y son estables bajo la acción de suspensiones. Los cuadrados de Steenrod juegan un papel fundamental en el desarrollo de la teoría de homotopía estable, como veremos posteriormente.

Estas operaciones fueron introducidas por primera vez por Norman Steenrod en [Ste47]. A su vez, las relaciones de Adem, fueron conjeturadas por Wen-tsün Wu y demostradas por José Adem en [Ade52]. Merece la pena recalcar que las anteriores propiedades caracterizan completamente los cuadrados de Steenrod. Esto puede verse en [Ste62], donde recibe un tratamiento axiomático.

**Nota 1.1.4.** El lector interesado en conocer más en profundidad cómo pueden construirse los cuadrados de manera explícita puede consultar la construcción de [MT68, Capítulos 2,3].

De la misma forma, puede definirse el álgebra de Steenrod para un primo arbitrario  $p > 2$ . Redirigimos al lector interesado en ver la construcción a [Hat02, Sección 4L]. Steenrod introduce esta versión general de las potencias en [Ste57], y nuevamente las relaciones de Adem son demostradas por Adem en [Ade53]. Las propiedades quedan completamente caracterizadas a partir de la siguiente definición.

**Definición 1.1.5.** [Hat02, Página 489] Las potencias de Steenrod  $P^i$  con  $i \geq 0$ , son aplicaciones

$$P^i : H^n(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow H^{n+2i(p-1)}(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

con  $p > 2$  primo que verifican las siguientes propiedades:

1.  $P^i(f^*(\gamma)) = f^*(P^i(\gamma))$  para  $f : X \rightarrow Y$ .
2.  $P^i(\gamma + \tau) = P^i(\gamma) + P^i(\tau)$ .
3. Si  $2i > p$ ,  $P^i(\gamma) = 0$  para todo  $\gamma \in H^p(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ .
4.  $P^i(\gamma) = \gamma^p$  para todo  $\gamma \in H^{2i}(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ .
5.  $P^0$  es el homomorfismo identidad.
6.  $\beta$  es el homomorfismo de Bockstein.
7.  $\delta(P^i(\gamma)) = P^i(\delta(\gamma))$  donde  $\delta : H^n(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow H^{n+1}(\Sigma X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  es el homomorfismo suspensión dado por el producto cruz reducido con un generador en  $H^i(S^1, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ .
8. Fórmula de Cartan:  $P^i(\gamma \smile \tau) = \sum_i P^i(\gamma) \smile P^{i-j}(\tau)$ .
9. Relaciones de Adem:
  - para  $a < 2b$ ,  $P^a P^b = \sum_k (-1)^{a+k} \binom{(p-1)(b-k)-1}{a-pj} P^{a+b-k} P^k$
  - para  $a \leq 2b$ ,  $P^a \beta P^b = \sum_k (-1)^{a+k} \binom{(p-1)(b-k)-1}{a-pk} \beta P^{a+b-k} P^k$   
 $- \sum_k (-1)^{a+k} \binom{(p-1)(b-k)-1}{a-pk-1} P^{a+b-k} \beta P^k$

**Nota 1.1.6.** Los números combinatorios se toman mod  $p$  y se entienden que son nulos cuando alguno de los índices es negativo.

**Definición 1.1.7.** Definimos el álgebra de Steenrod  $\mathcal{A}_2$  como el álgebra sobre  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  que es el cociente del álgebra de los polinomios en las variables no conmutativas  $Sq^1, Sq^2, \dots$  por el bi-ideal generado por las relaciones de Adem, esto es, los polinomios dados por las diferencias entre ambos lados de la expresión de las relaciones de Adem.

De la misma manera, dado  $p > 2$  primo, definimos el álgebra de Steenrod  $\mathcal{A}_p$  como el álgebra sobre  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  formada por los polinomios en las variables no conmutativas  $\beta, P^1, P^2, \dots$  cociente por las relaciones de Adem y la relación  $\beta^2 = 0$ .

**Nota 1.1.8.** Es bien sabido que el cup producto dota de estructura de anillo a la cohomología de un espacio  $X$ . Sin embargo, las propiedades de los cuadrados y potencias anteriormente vistos hacen que  $H^*(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  tenga estructura de  $\mathcal{A}_p$ -módulo.

**Teorema 1.1.9.** [Hat02, Proposición 4L.8] Para  $p = 2$ ,  $\mathcal{A}_2$  está generado por  $\{Sq^{2^i}\}_{i \geq 0}$ . Para  $p > 2$  primo,  $\mathcal{A}_p$  está generado por  $\{\beta\} \cup \{P^{p^i}\}_{i \geq 0}$ .

**Nota 1.1.10.** Aunque generen el álgebra de Steenrod, no lo hacen de forma libre. Basta tomar por ejemplo

$$Sq^2 Sq^2 = Sq^1 Sq^2 Sq^1$$

y

$$Sq^1 Sq^1 = 0$$

**Teorema 1.1.11.** [MT68, Página 50]  $\mathcal{A}_p$  es un álgebra de Hopf.

Vamos ahora a dar dos ejemplos: primero vamos a ver cómo se comporta el álgebra de Steenrod cuando actúa sobre  $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , y posteriormente, vamos a estudiar el subálgebra de Steenrod generada por  $\{Sq^0, Sq^1, Sq^2\}$ .

**Ejemplo 1.1.12.** [MT68, Capítulo 3, Proposición 2] Sabemos que  $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\alpha]$  con  $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Vamos a ver cómo es la acción de los cuadrados en este anillo de cohomología. Sabemos por las propiedades de los cuadrados que:

$$Sq^0 \alpha = \alpha$$

$$Sq^1 \alpha = \alpha^2$$

$$Sq^i \alpha = 0$$

A partir de esto, podemos calcular  $Sq^i(\alpha^n)$  utilizando la fórmula de Cartan. Esto es bastante tedioso, pero podemos simplificarlo todo si definimos la operación

$$Sq := Sq^0 + Sq^1 + Sq^2 + \dots$$

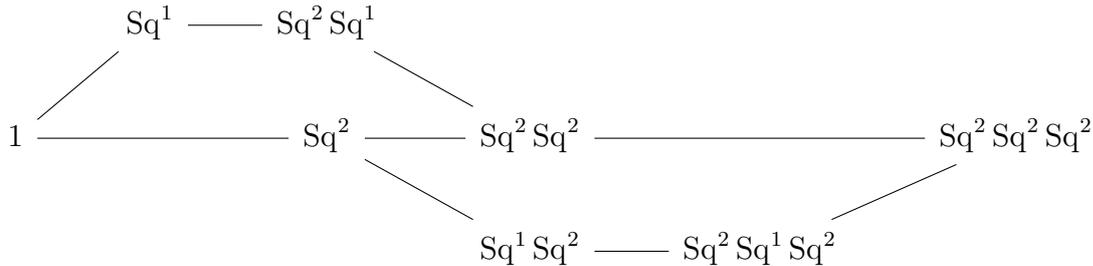
Esto no es un elemento del álgebra de Steenrod, pues sólo se admiten sumas finitas. Sin embargo, es una acción bien definida sobre cualquier clase de cohomología  $X$ , pues sólo un número finito de cuadrados nos van a dar términos no nulos. Más aún, se tiene que la fórmula de Cartan es equivalente a decir que

$$Sq : H^*(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

es un homomorfismo de anillos. De esta manera obtenemos que

$$Sq(\alpha^n) = (Sq \alpha)^n = (\alpha + \alpha^2)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \alpha^{n+i}$$

**Ejemplo 1.1.13.** [Hat02, Sección 4L, Ejercicio 5] A partir del Teorema 1.1.9 uno puede construir subálgebras de la siguiente manera: sea  $\mathcal{A}_2(k)$  al subálgebra de Steenrod generada por  $\{Sq^{2^i} \mid i \leq k\}$ , de manera análoga podemos definir  $\mathcal{A}_p(k)$  para  $p$  un primo cualquiera. El ejemplo más inmediato es  $\mathcal{A}_2(1)$  pues está formado únicamente por  $\{Sq^0, Sq^1\}$  debido a la relación de Adem  $Sq^1 Sq^1 = 0$ . El primer ejemplo no trivial, y que nos una permite hacernos una idea de la complejidad interna del álgebra de Steenrod es  $\mathcal{A}_2(2)$ . El siguiente diagrama permite entender su estructura; las líneas diagonales representan el producto por  $Sq^1$  y las líneas horizontales representan el producto por  $Sq^2$ .



### 1.2. Sucesión espectral de Adams

En esta sección vamos a presentar las principales propiedades de la sucesión espectral de Adams. Como el principal objetivo de este trabajo se centra en las siguientes partes, vamos a dar algunas referencias bibliográficas para el lector interesado en profundizar en los conceptos que vamos a ver a continuación. La definición de sucesión espectral y el método de la pareja exacta puede consultarse en [McC01], una construcción de la sucesión espectral de Adams en un lenguaje moderno puede encontrarse en [Mas11] y [Hat04], así como en [Rav86].

**Definición 1.2.1.** La sucesión espectral de Adams con cohomología módulo  $p$  es la sucesión espectral asociada a la pareja exacta, [McC01, Teorema 2.8].

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus_s \pi_t^Y X_s & \xrightarrow{i} & \bigoplus_s \pi_t^Y X_s \\
 & \swarrow k \quad \searrow j & \\
 & \bigoplus_s \pi_t^Y K_s & 
 \end{array}$$

donde  $X$  es un CW-espectro conectivo de tipo finito,  $Y$  es un espectro finito,  $\pi_t^Y$  es el funtor  $\pi_t^Y(Z) = [\Sigma^t Y, Z]$  y los  $K_s$  vienen dados por el siguiente diagrama, donde  $K_0$  es un espectro de Eilenberg-MacLane.

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & K_2 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & K_0/X = X_1 & & K_1/X_1 = X_2 & & K_2/X_2 = X_3 & & 
 \end{array}$$

Con esta onstrucción, los términos  $E_1$  y  $E_2$  de la sucesión espectral son sencillos de identificar.

**Proposición 1.2.2.** [Hat04, Sección 2.2] *Para la sucesión espectral de Adams se verifica que*

- $E_1^{s,t}(Y, X) = \text{Hom}_{\mathcal{A}_p}^t(H^*(K_s), H^*(Y))$
- $E_2^{s,t}(Y, X) = \text{Ext}_{\mathcal{A}_p}^{s,t}(H^*(X), H^*(Y))$

**Definición 1.2.3.** Sea  $p$  un número primo y  $G$  un grupo abeliano, definimos la  $p$ -componente de  $G$  como el subgrupo de  $G$  que es un  $p$ -grupo (el orden de cada elemento del grupo es una potencia de  $p$ ) y que no es subgrupo propio de ningún otro  $p$ -subgrupo de  $G$ . Lo denotaremos  $G_{(p)}$ .

**Ejemplo 1.2.4.** Sea  $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ , se sigue de la definición anterior que  $G_{(2)} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  y  $G_{(3)} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

El siguiente teorema condensa las propiedades más importantes de esta sucesión espectral. Dicho resultado fue obtenido por Adams, publicado por primera vez en [Ada58b].

**Teorema 1.2.5.** [MT68, Capítulo 18, Teorema 2][Hat04, Teorema 2.6] *Sea  $X$  un CW-espectro conexivo de tipo finito y un espectro finito  $Y$ , entonces la sucesión espectral de Adams converge a la  $p$ -componente de  $\pi_*^Y(X)$ .*

*Es decir, existe una filtración decreciente  $F^*$  y un sucesión espectral  $(E_r, d_r)$  con las siguientes propiedades:*

- $E_r$  es un grupo bigraduado y  $d_r$  es un homomorfismo de grupos bigraduados,  $d_r^{s,t} : E_r^{s,t} \rightarrow E_r^{s+r, t+r-1}$  tal que  $d_r d_r = 0$ .
- $E_2$  es naturalmente isomorfo a  $\text{Ext}_{\mathcal{A}_p}^{s,t}(H^*(X), H^*(Y))$  con  $p$  un primo.
- Existe un monomorfismo natural  $E_{r+1}^{s,t} \rightarrow E_r^{s,t}$  para cualesquiera  $r > s$  y  $E_\infty = \bigcap_{r>s} E_r^{s,t}$
- $E_\infty$  es naturalmente isomorfo a  $F^s\{S^{t-s}Y, X\}/F^{s+1}\{S^{t-s}Y, X\}$
- $F^\infty\{Y, X\} = \bigcap_n F^{s+n, t+n}$  es la  $p$ -componente de  $\pi_{t-s}^Y(X)$

### 1.3. Cálculo de grupos de homotopía estable de las esferas

Nos restringiremos a partir de ahora al caso en el que  $X = S^0$  e  $Y = S^0$ , es decir, el caso en que ambos espectros sean el espectro de la esfera. A partir del resultado anterior obtenemos un método para el cómputo de los grupos de homotopía estables de las esferas, lo resumiremos como un corolario del Teorema 1.2.5

**Corolario 1.3.1.** [MT68, Capítulo 18, Teorema 2] *Sea  $X = Y = S^0$  el espectro de la esfera y  $p$  un primo. Entonces se tiene que*

$$E_2^{s,t}(S^0, S^0) = \text{Ext}_{\mathcal{A}_p}^{s,t}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

*Además se verifican las siguientes propiedades:*

- Cada  $E_r$  tiene una estructura multiplicativa compatible con la bigraduación, y  $d_r$  es una derivación.
- El producto en  $E_2$  es el producto usual en  $\text{Ext}$ .
- El producto en  $E_{r+1}$  viene inducido por  $E_r$  mediante paso al cociente.
- El producto en  $E_\infty$  puede ser obtenido bien mediante el producto inducido por  $E_r$ , o bien mediante el paso al cociente del anillo de composición de los grupos de homotopía estables de las esferas.

El teorema anterior, y en particular este corolario, es uno de los pilares de la teoría de homotopía estable, pues separa el problema de calcular el cálculo de los grupos de homotopía estable en tres problemas diferentes. Por un lado está la parte meramente algebraica, que es calcular  $\text{Ext}_{\mathcal{A}_p}^{s,t}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ; determinar las diferenciales de la sucesión espectral; y resolver el problema de la extensión.

Vamos a ver ahora cómo calcular esta parte algebraica. Veremos también que para  $t - s \leq 14$  hay muy pocas diferenciales que sean no triviales. Por lo que para rangos bajos

el problema de determinar la  $p$ -componente de los grupos de homotopía de las esferas es accesible, incluso calculable a mano. Sin embargo, a medida que aumenta el rango la complejidad incrementa de forma muy elevada. Para determinar  $\text{Ext}_{\mathcal{A}_p}^{s,t}(H^*(X), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ , para ello introduciremos la noción de resolución minimal. En lo que sigue trabajaremos con  $p = 2$ .

**Definición 1.3.2.** Una aplicación  $\epsilon: \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  diremos que es un aumento si el núcleo de  $\epsilon$  consiste en todos los elementos de  $\mathcal{A}_2$  excepto la unidad multiplicativa, llamaremos ideal de aumentación a dicho núcleo y lo denotaremos  $I(\mathcal{A}_2)$ , es decir,  $I(\mathcal{A}_2)$  está formado por todos los elementos de grado positivo junto con el cero y  $\epsilon$  es el único homomorfismo con núcleo  $I(\mathcal{A}_2)$ . Si  $M$  es un  $\mathcal{A}_2$ -módulo izquierda denotaremos por  $J(M)$  a  $I(\mathcal{A}_2)M$ , esto es el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas  $\sum a_i m_i$  donde  $a_i \in I(\mathcal{A}_2)$  y  $m_i \in M$ .

**Definición 1.3.3.** Un homomorfismo de  $\mathcal{A}$  módulos  $f: M \rightarrow N$  es minimal si  $\ker(f)$  está contenido en  $J(M)$ . Una resolución proyectiva diremos que es una resolución minimal si todos los homomorfismos de la resolución son minimales.

**Proposición 1.3.4.** [MT68, Capítulo 18 Proposición 6] *Todo  $\mathcal{A}$ -módulo a izquierda graduado admite una resolución minimal.*

Nuestro objetivo es construir una resolución minimal de  $H^*(X)$

$$\cdots \rightarrow F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} H^*(X) \rightarrow 0$$

La idea es tomar una resolución proyectiva de manera que en cada etapa del proceso inductivo elegiremos el número mínimo de generadores en cada  $F_i$

**Proposición 1.3.5.** [MT68, Capítulo 18, Proposición 7] *Para una resolución minimal de  $H^*(X)$ , todas las aplicaciones  $d_r$  del complejo dual*

$$\cdots \xleftarrow{d_3} \text{Hom}_{\mathcal{A}_p}(F_2, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xleftarrow{d_2} \text{Hom}_{\mathcal{A}_p}(F_1, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xleftarrow{d_1} \text{Hom}_{\mathcal{A}_p}(F_0, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \leftarrow 0$$

son triviales.

**Corolario 1.3.6.** [MT68, Capítulo 18, Corolario 1] *En las condiciones de la proposición, se verifica*

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}_p}^{s,t}(H^*(X), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\mathcal{A}_p}^t(F_s, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

**Definición 1.3.7.** Dada una sucesión de enteros  $I = (i_1, \dots, i_k)$ , diremos que  $I$  es admisible si  $i_j \geq 2i_{j+1}$  para todo  $j < k$ . Diremos también que  $\text{Sq}^I$  es admisible si  $I$  es admisible.

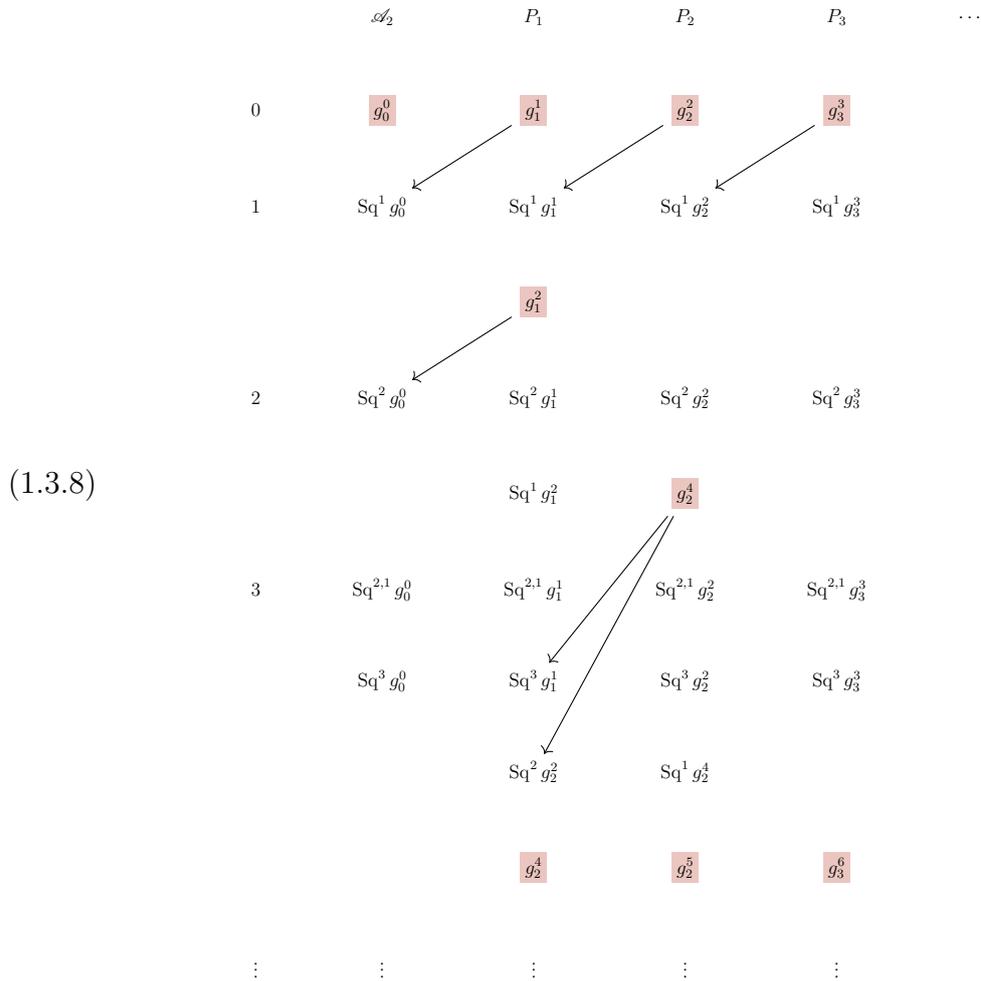
Vamos ahora a indicar cómo se calcularía  $\text{Ext}_{\mathcal{A}_2}^{s,t}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , para ello vamos a ir elaborando de forma inductiva una resolución minimal

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xleftarrow{\epsilon} \mathcal{A}_2 \xleftarrow{d_1} P_1 \xleftarrow{d_2} P_2 \leftarrow \cdots$$

La principal bibliografía para esta construcción es [Hat04]. Esta resolución minimal será además de gran utilidad en la última parte de este trabajo. Veremos que es un procedimiento lento y arduo, en el que las principales herramientas para proceder son las relaciones de Adem.

Para la primera etapa de nuestra resolución,  $\epsilon: F_0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , tomamos  $F_0$  como una copia de  $\mathcal{A}_2$  con un generador  $g_0^0$  en grado 0, cuya imagen es el generador de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , es decir,  $\epsilon(g_0^0) = 1$ . Esta copia de  $\mathcal{A}_2$  forma la primera columna de la siguiente tabla, que

consiste en los elementos  $Sq^I g_0^0$  con  $I$  recorriendo las secuencias admisibles en  $\mathcal{A}_2$ . Como puede observarse en el siguiente esquema, el núcleo de esta aplicación consiste en todos los elementos de la primera columna a excepción de  $g_0^0$ , por tanto, necesitamos un elemento  $g_1^1$  al principio de la segunda columna cuya imagen sea  $Sq^1 g_0^0$ . Una vez que tengamos  $g_1^1$  en la segunda columna, tenemos todos los elementos  $Sq^I g_1^1$  para secuencias admisibles por debajo de esa columna. Para ver qué más necesitamos en esta columna tenemos que calcular cómo los términos de esta columna son enviados a los de la primera. Como  $g_1^1$  va a  $Sq^1 g_0^0$ , entonces  $Sq^1 g_1^1$  se envía a  $Sq^1 Sq^1 g_0^0$ . Sin embargo, por las relaciones de Adem sabemos que  $Sq^1 Sq^1 = 0$ . Por lo tanto, tenemos que introducir un nuevo generador  $g_2^2$  para enviarlo a  $Sq^2 g_0^0$ . Continuamos así sucesivamente, introduciendo nuevos términos cuando hagan falta.



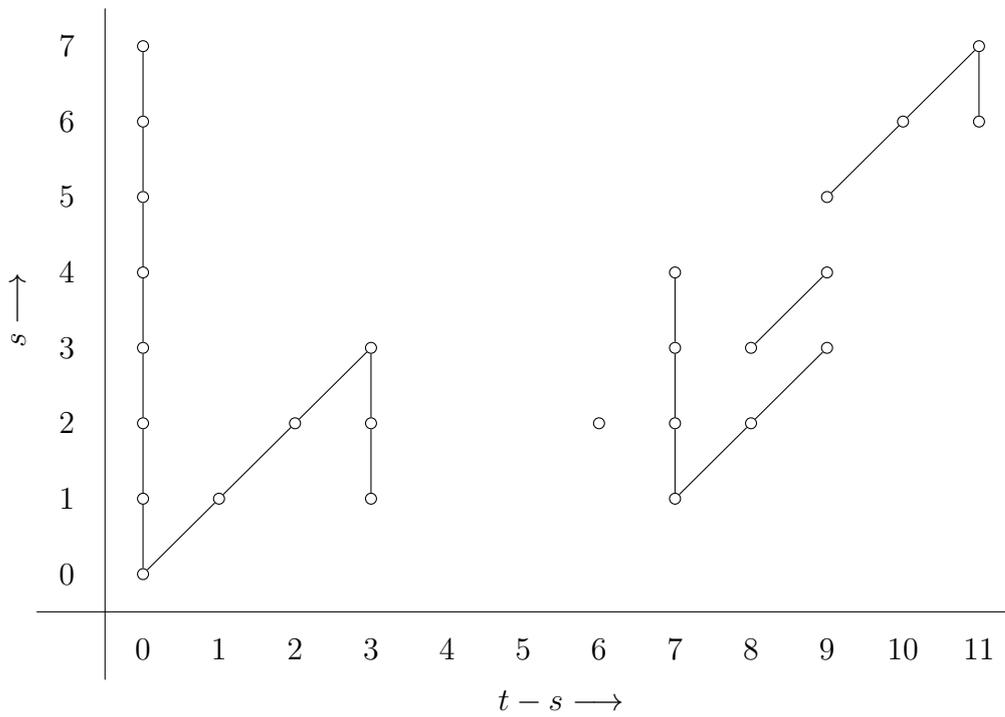
**Nota 1.3.9.** Puede consultarse [McC01, Sección 9.5] para ver la construcción de una resolución minimal

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \xleftarrow{\epsilon} \mathcal{A}_3 \xleftarrow{d_1} P_1 \xleftarrow{d_2} P_2 \leftarrow \dots$$

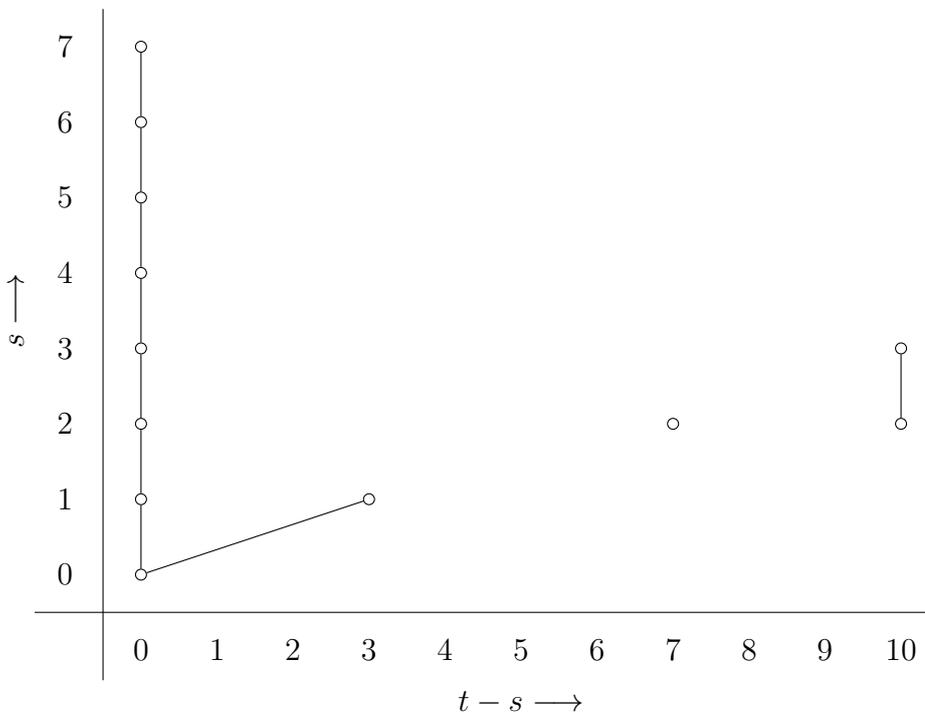
Al estar trabajando  $p \neq 2$ , hay que tener en cuenta que el álgebra de Steenrod también incluye como generador el homomorfismo Bockstein.

La manera habitual en la que se presentan el término segundo de la sucesión espectral de Adams es mediante una tabla en la que cada elemento se corresponde con un correspondiente generador de la resolución minimal. Aquí damos una porción de la sucesión para  $p = 2$  y  $p = 3$ .

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}_2}^{s,t}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$



$$\text{Ext}_{\mathcal{A}_3}^{s,t}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$$



Concluimos esta parte con estos dos teoremas acerca de los grupos de homotopía estables de las esferas. Se obtienen de forma directa a partir de los cálculos anteriores y el estudio de las diferenciales; al haber tantos términos triviales es fácil comprobar que la

mayoría de las diferenciales van a ser nulas. En cambio, cuando  $t - s$  crece el estudio de las diferenciales y resolver el problema de extensión se vuelve una tarea muy complicada.

**Teorema 1.3.10.** [MT68, Páginas 203-205] *Para  $n \leq 11$  la 2-componente de  $\pi_n(S^0)$  es*

$$\pi_n(S^0)_{(2)} = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n = 1, 2, 6, 10 \\ \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} & \text{si } n = 3, 11 \\ \mathbb{Z}/16\mathbb{Z} & \text{si } n = 7 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n = 8 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \text{si } n = 9 \\ \{0\} & \text{si } n = 4, 5 \end{cases}$$

**Teorema 1.3.11.** [McC01, Teorema 9.35] *Para  $n \leq 9$  la 3-componente de  $\pi_n(S^0)$  es*

$$\pi_n(S^0)_{(3)} = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \text{si } n = 3, 7 \\ \{0\} & \text{si } n = 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9 \end{cases}$$

**Nota 1.3.12.** Merece la pena comentar que  $\text{Ext}_{\mathcal{A}_p}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  aparece como el límite de otra sucesión espectral: la sucesión espectral de May, la cual se ha utilizado también como un método para computar el término segundo de la sucesión espectral de Adams. Para ver el desarrollo completo de esta otra sucesión espectral redirigimos a [Rav86, Capítulo 3.2]



## Herramientas algebraicas

Algebra is the offer made by the devil to the mathematician. The devil says: I will give you this powerful machine, it will answer any question you like. All you need to do is give me your soul: give up geometry and you will have this marvelous machine.

---

M. Atiyah

Nuestro objetivo en esta capítulo será introducir todas las nuevas definiciones y resultados teóricos para la comprensión del resultado principal de estas memorias, que veremos en el siguiente capítulo: el cálculo del término tercero de la sucesión espectral de Adams. Será necesario para ello la construcción de un funtor derivado secundario  $\text{Ext}^n$  que generalice al funtor derivado clásico. Para ello presentaremos las categorías track, así como los módulos de pares y álgebras de pares que son las estructuras con las que trabajaremos y a partir de las cuales podremos dar la definición de complejos de cadena secundarios y resoluciones secundarias, que serán de suma importancia para la construcción de dicho funtor derivado.

### 2.1. Categorías track, módulos de pares y álgebras de pares

El primer concepto que introducen Baues y Jibldaze en esta serie de artículos es el de categorías track, esto no es más que una categoría enriquecida en monooides. Vamos a escribir esto de una manera más manejable.

**Definición 2.1.1.** Una categoría track es una 2-categoría donde los 2-morfismos son todos invertibles.

En [Bau06, I] se dedican varios capítulos al estudio de estas categorías. De sus propiedades se derivan los principales resultados de los artículos que vamos a estudiar.

**Definición 2.1.2.** Sea  $k$  un anillo conmutativo con unidad y sea  $\mathbf{Mod}$  la categoría de  $k$ -módulos y aplicaciones  $k$ -lineales. Un módulo de pares es un morfismo

$$X = (X_1 \xrightarrow{\partial} X_0)$$

en  $\mathbf{Mod}$ . Denotaremos  $\pi_0(X) = \text{coker } \partial$  y  $\pi_1(X) = \text{ker } \partial$ .

Ahora veamos cómo son los morfismos entre módulos de pares.

**Definición 2.1.3.** Un morfismo de pares  $f : X \rightarrow Y$  de módulos de pares es un 2-morfismo que verifique que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ X_0 & \xrightarrow{f_0} & Y_0 \end{array}$$

**Nota 2.1.4.** Un módulo de pares en  $\mathbf{Mod}$ , la categoría de los módulos, no es más que un complejo de cadenas cuyos términos están concentrados únicamente en grado cero y uno.

**Nota 2.1.5.** Los módulos de pares forman una categoría con los morfismos de módulos de pares que acabamos de definir, a esta categoría se le denota como  $\mathcal{P}(\mathbf{Mod})$ . Esta categoría cuenta además con los funtores

$$\begin{aligned}\pi_0, \pi_1: \mathcal{P}(\mathbf{Mod}) &\longrightarrow \mathbf{Mod} \\ \pi_0 \left( X_1 \xrightarrow{\partial} X_0 \right) &= \text{coker } \partial \\ \pi_1 \left( X_1 \xrightarrow{\partial} X_0 \right) &= \text{ker } \partial\end{aligned}$$

Además diremos que un morfismo de pares es una equivalencia débil si induce un isomorfismo entre  $\pi_0$  y  $\pi_1$ .

Recordamos ahora que dados dos módulos graduados  $A$  y  $B$ , se define su producto tensorial como el módulo graduado

$$A \otimes B = \bigoplus_{n \geq 0} \bigoplus_{i+j=n} A_i \otimes B_j$$

Vamos a dar las correspondientes versiones análogas de estos conceptos para la categoría de módulos de pares.

**Definición 2.1.6.** Un módulo de pares graduado, es un objeto graduado dentro de la categoría  $\mathcal{P}(\mathbf{Mod})$ , es decir, una sucesión de  $X^n = \left( X_1^n \xrightarrow{\partial} X_0^n \right)$  de pares en  $\mathbf{Mod}$ .

**Definición 2.1.7.** El producto tensorial  $X \bar{\otimes} Y$  de módulos de pares graduados  $X, Y$  se define como

$$(X \bar{\otimes} Y)^n = \bigoplus_{n \geq 0} \bigoplus_{i+j=n} X^i \bar{\otimes} Y^j$$

donde  $X^i \bar{\otimes} Y^j = \text{Tr}(X^i \otimes Y^j)$ , y  $\text{Tr}$  es la truncación definida de la siguiente forma: para un complejo de cadenas

$$C = \left( \cdots \rightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_1} C_1 \xrightarrow{\partial_0} C_0 \xrightarrow{\partial_{-1}} C_{-1} \rightarrow \cdots \right)$$

Esto define una estructura monoidal en la categoría de módulos de pares graduados. Los morfismos en esta categoría son de grado cero. Dados dos morfismos  $f, g: X \rightarrow Y$  con  $X, Y$  dos módulos de pares, podemos definir un morfismo  $H: f \Rightarrow g$  llamado track, que es un morfismo de grado 0 en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \xrightarrow{g_1} \end{array} & Y_1 \\ \downarrow \partial & \begin{array}{c} \nearrow H \\ \searrow f_0 \end{array} & \downarrow \partial \\ X_0 & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_0} \\ \xrightarrow{g_0} \end{array} & Y_0 \end{array}$$

que además verifica que  $f_0 - g_0 = \partial H$  y  $f_1 - g_1 = H \partial$ .

**Definición 2.1.8.** Un álgebra de pares  $B$  es un par graduado

$$\partial: B_1 \longrightarrow B_0$$

en  $\mathbf{Mod}$  con  $B_1^n = B_0^n = 0$  para  $n < 0$  tal que  $B_0$  es un álgebra graduada en  $\mathbf{Mod}$ ,  $B_1$  es un  $B_0$ - $B_0$ -bimódulo graduado y  $\partial$  es un homomorfismo de bimódulos. Más aún, para todo  $x, y \in B_1$  se verifica

$$\partial(x)y = x\partial(y)$$

en  $B_1$ .

**Nota 2.1.9.** Es sencillo probar que se tiene la siguiente sucesión exacta corta de  $B_0$ - $B_0$ -bimódulos

$$0 \rightarrow \ker \partial \rightarrow B_1 \xrightarrow{\partial} B_0 \rightarrow \text{coker } \partial \rightarrow 0$$

introduciendo la notación anterior con  $\pi_0$  y  $\pi_1$  nos queda

$$0 \rightarrow \pi_1 B \rightarrow B_1 \xrightarrow{\partial} B_0 \rightarrow \pi_0 B \rightarrow 0$$

donde, a partir de la exactitud anterior y las condiciones de la definición de álgebra de par, tenemos que  $\pi_0 B$  es un  $k$ -álgebra,  $\pi_1 B$  es un  $\pi_0 B$ - $\pi_0 B$ -bimódulo y  $B_0 \rightarrow \pi_0 B$  es un homomorfismo de álgebras.

**Definición 2.1.10.** Un módulo a la izquierda sobre un álgebra de pares  $B$  es un par graduado  $(\partial: M_1 \longrightarrow M_0)$  en  $\mathbf{Mod}$  tal que  $M_1$  y  $M_0$  son  $B_0$ -módulos a la izquierda y  $\partial$  es  $B_0$  lineal. Más aún, se da una aplicación  $B_0$  lineal

$$\bar{\mu}: B_1 \otimes_{B_0} M_0 \longrightarrow M_1$$

que encaja en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} B_1 \otimes_{B_0} M_1 & \xrightarrow{1 \otimes \partial} & B_1 \otimes_{B_0} M_0 \\ \mu \downarrow & \swarrow \bar{\mu} & \downarrow \mu \\ M_1 & \xrightarrow{\partial} & M_0 \end{array}$$

donde  $\mu(b \otimes m) = \partial(b)m$  para  $b \in B_1$  y  $m \in M_1$  o  $M_0$ .

Para un elemento indeterminado  $x$  de grado  $n = |x|$ , sea  $B[x]$  el  $B$ -módulo con  $B[x]_i$  consistente en las expresiones  $bx$  con  $b \in B_i$  con  $i = 0, 1$  con  $bx$  teniendo grado  $|b| + n$ , cuya aplicaciones de la estructura de módulo izquierda sobre un álgebra de pares viene dada por  $\partial(bx) = \partial(b)x$ ,  $\mu(b' \otimes bx) = (b'b)x$  y  $\bar{\mu}(b' \otimes bx) = (b'b)x$ .

**Definición 2.1.11.** Un  $B$ -módulo libre es una suma directa de copias de módulos de la forma  $B[x]$ , con  $x \in I$  para algún conjunto  $I$  de elementos indeterminados de grados posiblemente distintos. Se denotará

$$B[I] = \bigoplus_{x \in I} B[x]$$

**Nota 2.1.12.** Para  $M$  un  $B$ -módulo izquierda tenemos la siguiente sucesión exacta de  $B_0$ -módulos

$$0 \rightarrow \pi_1 M \rightarrow M_1 \rightarrow M_0 \rightarrow \pi_0 M \rightarrow 0$$

donde  $\pi_0 M$  y  $\pi_1 M$  son  $\pi_0 B$ -módulos.

Sea  $B\text{-Mod}$  la categoría de módulos izquierda sobre un álgebra de pares  $B$ . Los morfismos son  $f = (f_0, f_1): M \rightarrow N$  son  $B$ -lineales, esto es que son  $B_0$ -lineales y compatible con  $\bar{\mu}$ , es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} B_1 \otimes_{B_0} M_0 & \xrightarrow{\bar{\mu}} & M_1 \\ 1 \otimes f_0 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ B_1 \otimes_{B_0} N_0 & \xrightarrow{\bar{\mu}} & N_1 \end{array}$$

Sean  $f, g: M \rightarrow N$  dos morfismos como los que acabamos de definir, un track  $H: f \Rightarrow g$  es una aplicación de grado cero

$$H: M_0 \rightarrow N_1$$

que verifica  $f_0 - g_0 = \partial H$  y  $f_1 - g_1 = H\partial$  tal que  $H$  es  $B_0$ -lineal. Para dos tracks,  $H: f \Rightarrow g$ ,  $K: g \Rightarrow h$  la composición  $K \square H: f \Rightarrow h$  como  $K + H$ .

**Definición 2.1.13.** Una categoría track diremos que es aditiva si tiene un objeto estricto cero.

**Proposición 2.1.14.** [BJ04a, Proposición 1.8.] *Para un álgebra de pares  $B$ , la categoría  $B\text{-Mod}$  con esta estructura es una categoría track aditiva bien definida.*

**Definición 2.1.15.** Sean  $M$  y  $N$  objetos de una categoría, definimos  $[M, N]$  como el conjunto de morfismos entre ellos.

**Lema 2.1.16.** [BJ04a, Lema 1.9.] *Si  $M$  es un  $B$ -módulo libre entonces la aplicación canónica*

$$[M, N] \rightarrow \text{Hom}_{\pi_0 B}(\pi_0 M, \pi_0 N)$$

*es un isomorfismo para cualquier  $B$ -módulo  $N$ .*

**Ejemplo 2.1.17.** [BJ04b, Ejemplo 2.4.] El ejemplo más sencillo de categoría track es la categoría de los complejos de cadenas sobre una categoría abeliana  $\mathbf{A}$ , denotada  $\mathcal{C}_{\mathbf{A}}$ . A partir de la definición de cohomología secundaria que se encuentra en [Bau06], puede definirse el siguiente funtor track

$$\mathcal{H}: \mathcal{C}_{\mathbf{A}} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbf{A}^{\mathbb{Z}}}$$

donde  $A$  es una categoría abeliana,  $\mathbf{A}^{\mathbb{Z}}$  denota la categoría de objetos  $\mathbb{Z}$ -graduados en  $A$ , y para los complejos de cadena  $(A, d)$  en  $\mathbf{A}$  la  $n$ -ésima componente de  $\mathcal{H}(A, d)$  viene dada por

$$\mathcal{H}^n(A, d) = (d_n: \text{coker}(d_{n+1}) \rightarrow \ker(d_{n+1}))$$

**Ejemplo 2.1.18.** Otro ejemplo básico es la categoría track  $\mathbf{B}$  que es opuesta a la categoría de los espectros, aplicaciones estables cuyos tracks son las clases de homotopía estables de las homotopías estables.

## 2.2. $\Sigma$ -estructura

**Definición 2.2.1.** La suspensión  $\Sigma X$  de un objeto graduado  $X = (X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  viene dada por el desplazamiento  $\Sigma X^n = X^{n-1}$ . Sea  $\Sigma: X \rightarrow \Sigma X$  la aplicación de grado uno dada por la identidad. Si  $X$  es un  $A$ -módulo izquierda sobre el álgebra graduada  $A$ , tenemos que  $\Sigma X$  es un  $A$ -módulo izquierda mediante

$$(2.2.2) \quad a \cdot \Sigma x = (-1)^{|a|} \Sigma(a \cdot x)$$

para  $a \in A, x \in X$ . Por otra parte, si  $X$  es un  $A$ -módulo derecha entonces  $(\Sigma x) \cdot a = \Sigma(x \cdot a)$  nos da una estructura de  $A$ -módulo derecha en  $\Sigma X$ .

**Definición 2.2.3.** Un  $\Sigma$ -módulo es un módulo de pares graduado  $X = (\partial: X_1 \rightarrow X_0)$  junto con un isomorfismo

$$\sigma: \pi_1 X \cong \Sigma \pi_0 X$$

de  $k$ -módulos graduados. Llamamos entonces a  $\sigma$  una  $\Sigma$ -estructura de  $X$ . Una  $\Sigma$ -aplicación entre  $\Sigma$ -módulos es una aplicación  $f$  entre módulos de pares tal que  $\sigma(\pi_1 f) = \Sigma(\pi_0 f)\sigma$ . Si  $X$  es un álgebra de pares entonces una  $\Sigma$ -estructura es un isomorfismo de  $\pi_0 X$ - $\pi_0 X$ -bimódulos. Si  $X$  es un módulo a la izquierda sobre un álgebra de pares  $B$  entonces una  $\Sigma$ -estructura de  $X$  es un isomorfismo  $\sigma$  de  $\pi_0 B$ -módulos a la izquierda. Denotamos como  $(B\text{-Mod})^\Sigma$  la categoría track de  $B$ -módulos con  $\Sigma$ -estructura y  $\Sigma$ -aplicaciones.

**Lema 2.2.4.** [BJ04a, Lema 2.4.] *La suspensión de un  $B$ -módulo  $M$  tiene por la ecuación 2.2.2 la estructura de un  $B$ -módulo y  $\Sigma M$  tiene una  $\Sigma$ -estructura si  $M$  tiene una.*

**Ejemplo 2.2.5.** Vamos a ver que un módulo de pares puede tener dos  $\sigma$ -estructuras no isomorfas en el sentido de las  $\Sigma$ -aplicaciones. Consideramos el módulo de pares  $X = (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ . Se comprueba fácilmente que  $\pi_0 X = \pi_1 X = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . Consideramos las  $\Sigma$ -estructuras inducidas por  $\sigma_1 = id$  y  $\sigma = -id$ . Claramente se tiene  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ . Vamos a ver entonces que  $(X, \sigma_1)$  no es isomorfo a  $(X, \sigma_2)$ . Razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que sí, es decir, existe una  $\Sigma$ -aplicación  $f$  tal que se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} & \xrightarrow{3} & \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} & & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \xrightarrow{1} & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_0 & & \pi_1 f \downarrow & & \downarrow \pi_0 f \\ \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} & \xrightarrow{3} & \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} & & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \xrightarrow{-1} & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \end{array}$$

De ellos obtenemos las condiciones  $3 \cdot f_1 = 3 \cdot f_0$  y  $\pi_0 f = -\pi_1 f$ . Como  $f$  debe ser un isomorfismo, tenemos que  $f_0, f_1 \in (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$ , ahora bien, imponiendo la primera condición obtenemos que si  $f_0 = 1, 4, 7$  entonces  $f_1 = 1, 4, 7$  y de la misma manera si  $f_0 = 2, 5, 8$  entonces  $f_1 = 2, 5, 8$ , pero entonces la segunda condición no puede darse, lo que imposibilita que  $f$  exista.

**Lema 2.2.6.** [BJ04a, Lema 2.5.] *Si  $B$  es un álgebra de pares con  $\Sigma$ -estructura, entonces cada  $B$ -módulo tiene  $\Sigma$ -estructura.*

### 2.3. La diferencial secundaria de los álgebras de pares

Para un álgebra de pares  $B$  con  $\Sigma$ -estructura, un  $\Sigma$ -módulo  $M$  sobre  $B$  y un módulo  $N$  sobre  $B$ , definiremos la diferencial secundaria

$$(2.3.1) \quad d_{(2)}: \text{Ext}_{\pi_0 B}^n(\pi_0 M, \pi_0 N) \longrightarrow \text{Ext}_{\pi_0 B}^{n+2}(\pi_0 M, \pi_1 N)$$

Aquí  $d_{(2)} = d_{(2)}(M, N)$  depende del  $B$ -módulo  $M$  y  $N$  y es natural en  $M$  y  $N$  con respecto a las aplicaciones en  $(B\text{-Mod})^\Sigma$ . Para la definición de la diferencial secundaria vamos a introducir los complejos secundarios de cadenas y las resoluciones secundarias. En [BJ04b] puede verse una definición más general para categorías track, siendo lo que vamos a ver ahora un caso particular de esta construcción categórica.

**Definición 2.3.2.** Para un álgebra de pares  $B$ , un complejo secundario de cadenas  $M_\bullet$  en  $B\text{-Mod}$  viene dada por el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & M_{n+2,1} & \xrightarrow{d_{n+1,1}} & M_{n+1,1} & \xrightarrow{d_{n,1}} & M_{n,1} & \xrightarrow{d_{n-1,1}} & M_{n-1,1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow H_{n+1} & \nearrow \partial_{n+2} & \downarrow H_n & \nearrow \partial_{n+1} & \downarrow H_{n-1} & \nearrow \partial_n & \downarrow H_{n-2} & \nearrow \partial_{n-1} & \\ \cdots & \longrightarrow & M_{n+2,2} & \xrightarrow{d_{n+1,0}} & M_{n+1,2} & \xrightarrow{d_{n,0}} & M_{n,2} & \xrightarrow{d_{n-1,1}} & M_{n-1,2} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

donde cada  $M_n = (\partial_n: M_{n,1} \longrightarrow M_{n,0})$  es un  $B$ -módulo, cada  $d_n = (d_{n,0}, d_{n,1})$  es un morfismo en  $B\text{-Mod}$ , cada  $H_n$  es un track, es decir, es  $B_0$ -lineal y se verifican las identidades

$$\begin{aligned} d_{n,0}d_{n+1,0} &= \partial_n H_n \\ d_{n,1}d_{n+1,1} &= H_n \partial_{n+2} \end{aligned}$$

y se verifica

$$H_n d_{n+2,0} = d_{n,1} H_{n+1}$$

para cada  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Definición 2.3.3.** Se define el complejo total,  $\text{Tot}(M_\bullet)$ , de la siguiente forma

$$\longleftarrow M_{n-1,0} \oplus M_{n-2,1} \longleftarrow \begin{pmatrix} d_{n-1,0} & -\partial_{n-1} \\ H_{n-2} & -d_{n-2,1} \end{pmatrix} M_{n,0} \oplus M_{n-1,1} \longleftarrow \begin{pmatrix} d_{n,0} & -\partial_n \\ H_{n-1} & -d_{n-1,1} \end{pmatrix} M_{n+1,0} \oplus M_{n,1} \longleftarrow$$

Los ciclos y bordes de este complejo se llamarán respectivamente ciclos y bordes secundarios de  $M_\bullet$ . Un complejo secundario de cadenas  $M_\bullet$  se dirá exacto si su complejo total es exacto, es decir, que todos sus ciclos secundarios sean bordes secundarios.

**Nota 2.3.4.** Consideramos un complejo secundario de cadenas  $M_\bullet$  en  $B\text{-Mod}$ . Entonces se tiene que

$$\pi_0 M_\bullet: \quad \cdots \longrightarrow \pi_0 M_{n+2} \xrightarrow{\pi_0 d_{n+1}} \pi_0 M_{n+1} \xrightarrow{\pi_0 d_n} \pi_0 M_n \xrightarrow{\pi_0 d_{n-1}} \pi_0 M_{n-1} \longrightarrow$$

es un complejo de cadenas de  $\pi_0 B$ -módulos.

El siguiente lema que vamos a ver se corresponde con el resultado [BJ04b, Lema 3.5] en el caso particular de los complejos de cadena secundarios y los  $\Sigma$ -módulos y las  $\Sigma$ -aplicaciones.

**Lema 2.3.5.** [BJ04a, Lema 2.4.] *Sea  $M_\bullet$  un complejo secundario de cadenas consistente en  $\Sigma$ -módulos y  $\Sigma$ -aplicaciones entre ellos. Si  $\pi_0(M_\bullet)$  es un complejo exacto entonces  $M_\bullet$  es un complejo secundario exacto. Recíprocamente, si  $\pi_0 M_\bullet$  está acotado inferiormente entonces la exactitud secundaria de  $M_\bullet$  implica la exactitud de  $\pi_0 M_\bullet$ .*

**Definición 2.3.6.** Sea  $B$  un álgebra de pares con  $\Sigma$ -estructura. Una resolución secundaria de un  $\Sigma$ -módulo  $M = (\partial: M_1 \rightarrow M_0)$  sobre  $B$  es un complejo secundario exacto  $F_\bullet$  en  $(B\text{-Mod})^\Sigma$  de la forma

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & F_{3,1} & \xrightarrow{d_{2,1}} & F_{2,1} & \xrightarrow{d_{1,1}} & F_{1,1} & \xrightarrow{d_{0,1}} & F_{0,1} & \xrightarrow{\epsilon_1} & M_1 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 & & H_2 & \partial_3 & H_1 & \partial_2 & H_0 & \partial_1 & \partial_0 & \partial & & & & & \\
 & & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & F_{3,0} & \xrightarrow{d_{2,0}} & F_{2,0} & \xrightarrow{d_{1,0}} & F_{1,0} & \xrightarrow{d_{0,0}} & F_{0,0} & \xrightarrow{\epsilon_0} & M_0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

donde cada  $F_n = (\partial_n: F_{n,1} \rightarrow F_{n,0})$  es un  $B$ -módulo libre.

Se sigue de la proposición anterior que para cualquier resolución secundaria  $F_\bullet$  de un  $B$ -módulo  $M$  con  $\Sigma$ -estructura,  $\pi_0 F_\bullet$  será una resolución libre del  $\pi_0 B$ -módulo  $\pi_0 M$ , por tanto, en particular uno tiene que

$$\text{Ext}_{\pi_0 B}^n(\pi_0 M, U) = H^n \text{Hom}(\pi_0 F_\bullet, U)$$

para todo  $n$  y para cualquier  $\pi_0 B$ -módulo  $U$ .

**Definición 2.3.7.** Dado un álgebra de pares  $B$  con  $\Sigma$ -estructura, un  $\Sigma$ -módulo  $M$  sobre  $B$ , un módulo  $N$  sobre  $B$  y una resolución secundaria  $F_\bullet$  de  $M$ , definimos la diferencial secundaria

$$d_{(2)}: \text{Ext}_{\pi_0 B}^n(\pi_0 M, \pi_0 N) \longrightarrow \text{Ext}_{\pi_0 B}^{n+2}(\pi_0 M, \pi_1 N)$$

de la siguiente manera. Sea  $[c] \in \text{Ext}_{\pi_0 B}^n(\pi_0 M, \pi_0 N)$  una clase dada. Primero la representaremos por un elemento en  $\text{Hom}_{\pi_0 B}(\pi_0 F_n, \pi_0 N)$  que sea un cociclo, es decir, que si se compone con  $\pi_0(d_n)$  el resultado da cero. Por el Lema 2.1.16 sabemos que las aplicaciones naturales

$$[F_n, N] \longrightarrow \text{Hom}_{\pi_0 B}(\pi_0 F, \pi_0 N)$$

son isomorfismos; por lo tanto, para cualquier elemento de esta forma le corresponde una clase de homotopía en  $[F_n, N]$  que es también un cociclo, es decir, que evaluada en  $[d_n, N]$  sea cero. Tomamos una aplicación representante  $c: F_n \rightarrow N$  de la clase de homotopía. Se tiene que  $cd_n$  es nulhomotópica, por lo que podemos encontrar una aplicación  $B_0$ -lineal  $H: F_{n+1,0} \rightarrow N_1$  tal que se tenga el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 F_{n+2,1} & \xrightarrow{d_{n+1,1}} & F_{n+1,1} & \xrightarrow{d_{n,1}} & F_{n,1} & \xrightarrow{c_1} & N_1 \\
 \downarrow \partial_{n+2} & & \downarrow & \nearrow H_n & \downarrow & \nearrow H & \downarrow \partial \\
 & & H_n & \partial_{n+1} & H & \partial_n & \\
 & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 F_{n+2,0} & \xrightarrow{d_{n+1,0}} & F_{n+1,0} & \xrightarrow{d_{n,1}} & F_{n,0} & \xrightarrow{c_0} & N_0
 \end{array}$$

y tal que  $c_0 d_{n,0} = \partial H$ ,  $c_1 d_{n,1} = H \partial_{n+1}$  y  $\partial c_1 = c_0 \partial_n$ . Tomando entonces  $\Gamma = c_1 H_n - H d_{n+1,0}$  uno tiene  $\partial \Gamma = 0$ ,  $\Gamma \partial_{n+2} = 0$ , de manera que  $\Gamma$  determina una aplicación  $\Gamma: \text{coker } \partial_{n+2} \rightarrow \text{ker } \partial$ , es decir, de  $\pi_0 F_{n+2}$  a  $\pi_1 N$ . Más aún  $\bar{\Gamma} \pi_0(d_{n+2}) = 0$ , por lo que es un cociclo en  $\text{Hom}(\pi_0(F_\bullet), \pi_1 N)$  y por lo que definimos

$$d_{(2)}[c] = [\bar{\Gamma}] \in \text{Ext}_{\pi_0 B}^{n+2}(\pi_0 M, \pi_1 N)$$

**Definición 2.3.8.** Sean  $M$  y  $N$  dos  $B$ -módulos con  $\Sigma$ -estructuras, entonces todos los  $B$ -módulos  $\Sigma^k M$ ,  $\Sigma^k N$  tienen  $\Sigma$ -estructuras, tenemos por la definición anterior la diferencial secundaria:

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\pi_0 B}^n(\pi_0 M, \pi_0 \Sigma^k N) & \xrightarrow{d_{(2)}(M, \Sigma^k N)} & \text{Ext}_{\pi_0 B}^{n+2}(\pi_0 M, \pi_0 \Sigma^k N) \\ \cong \uparrow & & \downarrow \cong \\ \text{Ext}_{\pi_0 B}^n(\pi_0 M, \Sigma^k \pi_0 N) & \xrightarrow{d} & \text{Ext}_{\pi_0 B}^{n+2}(\pi_0 M, \Sigma^{k+1} \pi_0 N) \end{array}$$

La siguiente sucesión

$$\text{Ext}_{\pi_0 B}^{n-2}(\pi_0 M, \Sigma^{k-1} \pi_0 N) \xrightarrow{d} \text{Ext}_{\pi_0 B}^n(\pi_0 M, \Sigma^k \pi_0 N) \xrightarrow{d} \text{Ext}_{\pi_0 B}^{n+2}(\pi_0 M, \Sigma^{k+1} \pi_0 N)$$

se anula, por lo que se define el grupo Ext secundario como el cociente de grupos

$$\text{Ext}_B^n(M, N)^k := \text{ker } d / \text{im } d$$

siendo  $d$  la aplicación inducida por la conmutatividad del diagrama.

## Término $E_3$ de la sucesión espectral de Adams

Let us calculate!

---

G.W. Liebnez

Dedicaremos este tercer capítulo a presentar el ya mencionado teorema sobre la tercera página de la sucesión espectral de Adams. Para el espectro de la esfera, Baues y Jibldaze nos proporcionan un algoritmo para el cálculo de las diferenciales secundarias; nuestro objetivo será ver cómo se construye este algoritmo y facilitar su comprensión mediante la elaboración de cálculos explícitos.

### 3.1. $E_3(S^0, S^0)$

De la misma manera que en la Sección 1.1 introducimos el álgebra de las operaciones cohomológicas estables, vamos ahora a ver el álgebra de las operaciones cohomológicas secundarias que denotaremos por  $\mathcal{B}$ . No entraremos en detalle de qué son de forma rigurosa las operaciones cohomológicas secundarias, pues se escapan de los capacidades de este trabajo, diremos que son operaciones cohomológicas definidas sobre algunas clases de cohomología y toman valor módulo alguna indeterminación [Agu82]. En [Bau06] uno de los objetivos principales es otorgarle a las operaciones cohomológicas secundarias una estructura algebraica, del mismo modo que sus análogas primarias. Finalmente, se llega a que  $\mathcal{B}$  tiene estructura de par de álgebras con una aplicación multiplicación asociativa y bilineal dentro de la categoría de los módulos de pares, es por ello que en ocasiones la denotaremos como  $\mathcal{B} = (\partial: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_0)$ . En la siguiente sección daremos más detalle de dicha estructura y de su aplicación multiplicación, pues esta última será fundamental para nuestros cálculos.

Previo a ver el resultado principal de esta sección, es necesario remitir a [Bau06, Sección 2.5] en el que se establecen todas las propiedades de la categoría track de los espectros. En [Bau06, Sección 6.3.] se introduce la noción de cohomología secundaria de un espacio, y en [BJ04a, Sección 5] se introduce la noción de cohomología secundaria de un espectro,  $\mathcal{H}(X) = (\partial: \mathcal{H}(X)_1 \rightarrow \mathcal{H}(X)_0)$ , aunque no entraremos en detalles técnicos, se define  $\mathcal{H}(X)_0$  como

$$\mathcal{H}(X)_0 := \mathcal{B}[[X, \Sigma^* Z]]_0$$

y  $\mathcal{H}(X)_1$  como el pullback del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & & \Sigma H^*(X) \\
 & & \downarrow \\
 \mathcal{H}(X)_1 & \longrightarrow & [[X, \Sigma^* Z]]_1^0 \\
 \downarrow & & \downarrow \partial \\
 \mathcal{H}(X)_0 & \longrightarrow & [[X, \Sigma^* Z]]_0 \\
 & & \downarrow \\
 & & H^*(X)
 \end{array}$$

donde  $Z^n = K(\mathbb{F}, n)$  es un espectro de Eilenberg-MacLane y, para un espectro  $X$ , se define  $[[X, \Sigma^k Z]]_0$  y  $[[X, \Sigma^k Z]]_1^0$  los conjuntos de aplicaciones estables y 0-tracks estables respectivamente. La cohomología secundaria de un espectro verifica que es un módulo de pares graduados con estructura de  $\mathcal{B}$ -módulo, además de que tiene  $\Sigma$ -estructura.

Vamos a introducir la siguiente notación,  $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  con  $p$ ,  $\mathbb{G} = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$  con  $p$  un primo.

**Definición 3.1.1.** Se define  $\mathbb{G}^\Sigma$  como el par de álgebras

$$\mathbb{G}^\Sigma = (\partial: \mathbb{F} \oplus \Sigma\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{G})$$

donde  $\partial = (i, 0)$ , siendo  $i: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{G}$  la aplicación  $i(a) = p \cdot a$  en grado cero y  $0: \mathbb{F} \rightarrow 0$  en grado uno y cero en el resto de grados.

**Teorema 3.1.2.** [Bau06, Subsección 12.1.5][BJ04a, Ejemplo 5.2] *Sea  $S^0$  el espectro de la esfera, entonces  $S^0$  admite la equivalencia débil de  $\mathcal{B}$ -módulos*

$$\mathcal{H}(S^0) \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}^\Sigma$$

Ya hemos visto en el capítulo anterior que para  $X$  un espectro de tipo finito,  $Y$  un espectro de dimensión finita y  $p$  un primo se tiene que la sucesión espectral de Adams verifica

$$\begin{aligned} E_* &\Longrightarrow [Y, \Sigma^* X]_p \\ E_2^{s,t} &= \text{Ext}_{\mathcal{A}_p}^{s,t}(H^*(X), H^*(Y)) \end{aligned}$$

El siguiente resultado presenta entonces un descripción algebraica equivalente del término  $E_3$  de esta sucesión espectral, la demostración se basa en [BJ04b, Teorema 5.1.] y [BJ04b, Teorema 7.3.]

**Teorema 3.1.3.** [BJ04a, Teorema 6.1] *El término  $E_3(Y, X)$  de la sucesión espectral de Adams viene dado por el grupo  $\text{Ext}$  secundario que hemos introducido anteriormente*

$$E_3(Y, X) = \text{Ext}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H}^*(X), \mathcal{H}^*(Y))$$

**Corolario 3.1.4.** [BJ04a, Corolario 6.2] *Si  $X, Y$  son ambos el espectro de la esfera se tiene que*

$$E_3(S^0, S^0) = \text{Ext}_{\mathcal{B}}(\mathbb{G}^\Sigma, \mathbb{G}^\Sigma)$$

Al estar  $\text{Ext}_{\mathcal{B}}(\mathbb{G}^\Sigma, \mathbb{G}^\Sigma)$  algebraicamente determinado, el término tercero de la sucesión espectral de Adams es computable. En lo que sigue, vamos a elaborar un algoritmo para calcular las diferenciales secundarias, lo que es equivalente a computar la tercera página de la sucesión espectral de Adams.

### 3.2. La aplicación multiplicación en $\mathcal{B}$

Los conceptos que van a introducirse en esta sección están fundamentalmente extraídos de [Bau06, Sección 16]. En lo que sigue, vamos a trabajar con  $p = 2$ , por lo que  $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{G} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ . Denotaremos  $\pi$  el homomorfismo cociente  $\mathbb{G} \twoheadrightarrow \mathbb{F}$  y por  $i$  al isomorfismo anteriormente mencionado en la Definición 3.1.1  $\mathbb{F} \cong 2\mathbb{G}$ . Consideramos la siguiente aplicación  $\chi: \mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{G}$  por  $\chi(0) = 0$  y  $\chi(1) = 1$ . En el álgebra de pares  $\mathcal{B}$ , definimos  $\mathcal{B}_0$  como el  $\mathbb{G}$ -álgebra asociativa libre graduada en los generadores  $\text{Sq}^n$  de grado  $n$  para  $n \geq 1$ ; por tanto, existe un homomorfismo sobreectivo de álgebras graduadas  $\pi: \mathcal{B}_0 \twoheadrightarrow \mathcal{A}$  en

el álgebra de Steenrod mod 2. El núcleo de este homomorfismo lo denotaremos por  $R$ , tenemos así la siguiente sucesión exacta corta

$$(3.2.1) \quad 0 \rightarrow R \rightarrow \mathcal{B}_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

Se sabe que  $R$  es un bi-ideal graduado generado por  $2\mathcal{B}_0$  y por los elementos de Adem

$$[a, b] = \text{Sq}^a \text{Sq}^b + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \chi \binom{b-k-1}{a-2k} \text{Sq}^{a+b-k} \text{Sq}^k$$

con  $a < 2b$ . En el caso de que  $a \geq 2b$  ó  $a = 0$  entonces  $[a, b] = 0$ . Como se prueba en [Bau06, Sección 16.4], uno puede generar  $R$  como  $\mathcal{B}_0$  par de bimódulos por  $2 \in R^0$  y las relaciones admisibles  $\text{Sq}^{a_k} \text{Sq}^{a_{k-1}} \cdots \text{Sq}^{a_1} [a_0, b] \in R^{a_k + \cdots + a_0 + b}$  con  $a_{j+1} \geq 2a_j$  para todo  $k > j \geq 0$  y  $a_0 \leq 2b$ .

### Ejemplo 3.2.2.

$$\begin{aligned} [1, 1] &= \text{Sq}^1 \text{Sq}^1 \\ [2, 2] &= \text{Sq}^2 \text{Sq}^2 + \text{Sq}^3 \text{Sq}^1 \\ [2, 3] &= \text{Sq}^2 \text{Sq}^3 + \text{Sq}^4 \text{Sq}^1 + \text{Sq}^1 \text{Sq}^4 \end{aligned}$$

Para el resto de la estructura de  $\mathcal{B}$ , como grupo abeliano  $\mathcal{B}_1$  es  $R \oplus \Sigma\mathcal{A}$ , es decir

$$\mathcal{B}_1^n = R^n \oplus \mathcal{A}^{n-1}$$

con  $\partial$  la proyección que es la inclusión en  $R$  y cero en  $\Sigma\mathcal{A}$ . Más aún, la estructura de  $\mathcal{B}_0$ -módulo de  $\mathcal{B}_1$  vienen dada por

$$(r, a)b = (rb, a\pi(b))$$

y

$$b(r, a) = (br, A(\pi(b) + r) + \pi(b)a)$$

siendo  $A$  la aplicación multiplicación que se describe en [Bau06, Sección 16]. Merece la pena comentar que una aplicación multiplicación no es más que una aplicación lineal

$$A: \mathcal{A} \otimes R_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{A}$$

de grado  $-1$  que verifica una serie de propiedades. El siguiente resultado nos garantiza la existencia de estas aplicaciones.

**Definición 3.2.3.** [Bau06, Página 410] Diremos que dos aplicaciones multiplicación  $A$  y  $A'$  son equivalentes si existe una aplicación lineal de grado  $-1$

$$\gamma: R_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{A}$$

tal que se verifica que

$$A(\alpha \otimes x) - A'(\alpha \otimes x) = \gamma(ax) - (-1)^{|\alpha|} \cdot \gamma(x)$$

**Teorema 3.2.4.** [Bau06, Proposición 16.3.3] *Existen aplicaciones multiplicación y cualesquiera dos de estas aplicaciones son equivalentes.*

Una vez con este resultado, Baues se dedica a dar un método para construir aplicaciones de este tipo, y da cálculos explícitos para una de ellas. Con la siguiente definición y el posterior teorema se establece un método para construir esta aplicación.

**Definición 3.2.5.** [Bau06, Página 414] Dada una aplicación multiplicación  $A : \mathcal{A} \otimes R_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{A}$  definimos para cada  $0 < a < 2b$  la función multiplicación asociada como la aplicación lineal de grado  $a + b - 1$  dada por

$$\begin{aligned} A_{[a,b]} : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ A_{[a,b]}(\alpha) &= A(\alpha \otimes [a, b]) \end{aligned}$$

A partir de esta definición, es claro ver que a partir de una aplicación multiplicación  $A$  uno obtiene una familia de funciones multiplicación  $A_{[a,b]}$  con  $a < 2b$ . Sin embargo, el siguiente resultado muestra que el recíproco también es cierto, salvo condiciones de compatibilidad de las que no vamos a entrar en detalles.

**Teorema 3.2.6.** [Bau06, Página 414] *Dada una familia  $\{A_{[a,b]}\}_{a < 2b}$  de funciones multiplicación, estas determinan de forma unívoca una aplicación multiplicación  $A$ .*

De esta forma conociendo  $A_{[a,b]}$  ya tendremos caracterizada la aplicación multiplicación. En [Bau06, Apéndice] tenemos una tabla de valores para estas funciones multiplicación que nos será indispensable para los cálculos explícitos.

**Ejemplo 3.2.7.** Algunas que nos serán de utilidad

$$\begin{aligned} A_{[1,2k+1]}(\alpha) &= 0 \text{ para todo } k \text{ y } \alpha \\ A_{[2,2]}(\text{Sq}^2) &= \text{Sq}^1 \text{Sq}^4 \\ A_{[2,3]}(\text{Sq}^1) &= \text{Sq}^1 \text{Sq}^4 + \text{Sq}^4 \text{Sq}^1 \end{aligned}$$

### 3.3. Algoritmo para el cálculo de las diferenciales secundarias

Partiremos de la resolución minimal sobre el  $\mathcal{A}$ -módulo izquierda  $\mathbb{F}$ . Esto es lo que comentamos en el primer capítulo en la Resolución 1.3.8.

$$(3.3.1) \quad \mathbb{F} \leftarrow \mathcal{A} \langle g_0^0 \rangle \leftarrow \mathcal{A} \langle g_1^{2^n} : n \geq 0 \rangle \leftarrow \mathcal{A} \langle g_2^{2^i+2^j} : |i-j| \neq 1 \rangle \leftarrow \dots$$

donde  $g_m^d$  con  $d \geq m$  es un generador del  $m$ -ésimo modulo resolvente de grado  $d$ . Hay ocasiones en las que hay más de un generador para un mismo  $m$  y  $d$ , en ese caso se denotaría por  $'g_m^d, ''g_m^d, \dots$

Estos generadores y los valores de sus diferenciales pueden ser calculados de forma efectiva, por ejemplo, se tiene que  $d(g_1^{2^n}) = \text{Sq}^{2^n} g_0^0$  y  $d(g_m^m) = \text{Sq}^1 g_{m-1}^{m-1}$ . En [BJ04a, Sección 8] pueden consultarse más cálculos de diferenciales de la resolución minimal, estas se han obtenido mediante el Algoritmo de Bruner [Bru89].

Una vez obtenida nuestra resolución, nuestro objetivo será 'levantarla' hacia una resolución secundaria, para ello lo primero que hacemos es aplicar la operación  $\chi$  grado a grado, esto nos da una sucesión 'levantada' de homomorfismo de  $\mathcal{B}$ -módulos

$$\mathbb{G}^\Sigma \leftarrow \mathcal{B} \langle g_0^0 \rangle \leftarrow \mathcal{B} \langle g_1^{2^n} : n \geq 0 \rangle \leftarrow \mathcal{B} \langle g_2^{2^i+2^j} : |i-j| \neq 1 \rangle \leftarrow \dots$$

Esta sucesión no es, ni mucho menos, exacta. De hecho, ni siquiera se verifica que la composición de las aplicaciones sea trivial. Se tienen los siguientes diagramas atendiendo al grado interno de  $\mathcal{B}$ .

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & R^n g_0^0 \oplus \mathcal{A}^{n-1} g_0^0 & \xleftarrow{\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}} & \bigoplus_{2^i \leq n} R^{n-2^i} \oplus \bigoplus_{2^i \leq n-1} \mathcal{A}^{n-1-2^i} g_1^{2^i} & \longleftarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longleftarrow & \mathcal{B}_0^n g_0^0 & \xleftarrow{d} & \bigoplus_{2^i \leq n} \mathcal{B}_0^{n-2^i} g_1^{2^i} & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

Ahora lo que vamos a tratar de hacer es completar estos diagramas hasta convertirlos en un complejo secundario exacto mediante una serie de aplicaciones de la siguiente forma

$$\delta_m = \begin{pmatrix} \delta_m^R \\ \delta_m^{\mathcal{A}} \end{pmatrix}: \mathcal{B}_0 \langle g_{m+2}^n | n \rangle \longrightarrow (R \oplus \Sigma \mathcal{A}) \langle g_m^n | n \rangle$$

Ahora bien, para que estas aplicaciones formen un complejo secundario deben verificar, como vimos en la Definición 2.3.2, que  $\partial\delta = d_0d_0$ ,  $\delta\partial = d_1d_1$  y  $d_1\delta = \delta d_0$ . Se comprueba que estas condiciones junto con el requisito de que  $\delta$  sea un homomorfismo de  $\mathcal{B}$ -módulos son equivalentes a

$$(3.3.2) \quad \delta^R = dd$$

$$(3.3.3) \quad \delta^{\mathcal{A}}(bg) = \pi(b)\delta^{\mathcal{A}}(g) + A(\pi(b), dd(g))$$

$$(3.3.4) \quad d\delta^{\mathcal{A}} = \delta^{\mathcal{A}}d$$

para  $b \in \mathcal{B}_0$ ,  $g$  un elemento de la forma  $g_m^n$  y  $A(a, rg) := A(a, r)g$  para  $a \in \mathcal{A}$ ,  $r \in R$ , como ya vimos anteriormente. Así  $\delta$  está completamente determinada por los elementos

$$\delta_m^{\mathcal{A}} \in \bigoplus_k \mathcal{A}^{n-k-1} \langle g_m^k \rangle$$

que, para formar un complejo secundario, tan sólo se requiere que satisfaga

$$d\delta_m^{\mathcal{A}}(g_{m+2}^n) = \delta_{m-1}^{\mathcal{A}}d(g_{m+2}^n)$$

donde el término  $\delta_{m-1}^{\mathcal{A}}$  se extiende a  $\mathcal{B}_0 \langle g_{m+1}^* \rangle$  gracias a la ecuación 3.3.4. Por lo que se tiene exactitud secundaria, lo que significa que el siguiente complejo (ordinario)

$$\leftarrow \mathcal{B}_0 \langle g_{m-1}^* \rangle \oplus (R \oplus \Sigma \mathcal{A}) \langle g_{m-2}^* \rangle \leftarrow \mathcal{B}_0 \langle g_m^* \rangle \oplus (R \oplus \Sigma \mathcal{A}) \langle g_{m-1}^* \rangle \leftarrow \mathcal{B}_0 \langle g_{m+1}^* \rangle \oplus (R \oplus \Sigma \mathcal{A}) \langle g_m^* \rangle \leftarrow$$

con diferenciales

$$\begin{pmatrix} d_{m+1} & i_{m+1} & 0 \\ d_m d_{m+1} & d_m & 0 \\ \delta_m^{\mathcal{A}} & 0 & d_m \end{pmatrix}: \mathcal{B}_0 \langle g_{m+2}^* \rangle \oplus R \langle g_{m+1}^* \rangle \oplus \Sigma \mathcal{A} \langle g_{m+1}^* \rangle \rightarrow \mathcal{B}_0 \langle g_{m+1}^* \rangle \oplus R \langle g_m^* \rangle \oplus \Sigma \mathcal{A} \langle g_m^* \rangle$$

es exacto. Uno puede eliminar la componente  $R$  del complejo, de manera que la exactitud anterior es equivalente a la exactitud del siguiente complejo:

$$\leftarrow \mathcal{B}_0 \langle g_{m-1}^* \rangle \oplus \Sigma \mathcal{A} \langle g_{m-2}^* \rangle \leftarrow \mathcal{B}_0 \langle g_m^* \rangle \oplus \Sigma \mathcal{A} \langle g_{m-1}^* \rangle \leftarrow \mathcal{B}_0 \langle g_{m+1}^* \rangle \oplus \Sigma \mathcal{A} \langle g_m^* \rangle \leftarrow$$

con diferenciales

$$\begin{pmatrix} d_{m+1} & 0 \\ \delta_m^{\mathcal{A}} & d_m \end{pmatrix}: \mathcal{B}_0 \langle g_{m+2}^* \rangle \oplus \Sigma \mathcal{A} \langle g_{m+1}^* \rangle \rightarrow \mathcal{B}_0 \langle g_{m+1}^* \rangle \oplus \Sigma \mathcal{A} \langle g_m^* \rangle$$

**Teorema 3.3.5.** [BJ04a, Teorema 8.3] *Las completaciones de la resolución primaria 3.3.1 para transformarlo en un complejo secundario exacto están en una correspondencia biyectiva con las aplicaciones*

$$\delta_m: \mathcal{A} \langle g_{m+2}^* \rangle \longrightarrow \Sigma \mathcal{A} \langle g_m^* \rangle$$

que verifican

$$(3.3.6) \quad d\delta g = \delta dg$$

con  $\delta(ag)$  para  $a \in \mathcal{A}$  definido por

$$\delta(ag) = a\delta(g) + A(a, ddg)$$

donde  $A(a, rg)$  para  $r \in R$  se interpreta como  $A(a, r)g$ .

Con este resultado podemos construir la resolución secundaria inductivamente. Introduciremos  $\delta$  con valores en los generadores con coeficientes a determinar, es decir, expresamos  $\delta$  de la siguiente forma

$$(3.3.7) \quad \delta(g_m^d) = \sum_{m-2 \leq d' \leq d-1} \sum_a \eta_m^d(a) a g_{m-2}^{d'}$$

con  $a$  recorriendo una base de  $\mathcal{A}^{d-1-d'}$  y siendo  $\eta_m^d(a) \in \mathbb{F}$  unos coeficientes que se determinan imponiendo la condición 3.3.6 del teorema anterior, obtendremos entonces una serie de ecuaciones lineales. Resolviendo estas ecuaciones y dando valores arbitrarios al resto obtendremos una expresión de nuestras diferenciales  $\delta$  de la resolución secundaria.

Finalmente, para obtener nuestras diferenciales secundarias

$$d_{(2)}: \text{Ext}_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}, \mathbb{F})^m \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+2}(\mathbb{F}, \mathbb{F})^{m+1}$$

a partir de las  $\delta$  que hemos obtenido, uno simplemente tiene que aplicar el functor  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot, \mathbb{F})$  a la resolución minimal inicial y calcular la aplicación inducida por  $\delta$  en la cohomología del complejo de cocadenas resultantes. La resolución 3.3.1 es una resolución minimal, por lo que el valor de  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot, \mathbb{F})$  en ella coincide con el de su propia cohomología y es el  $\mathbb{F}$ -espacio vectorial de las aplicaciones lineales  $\mathcal{A}\langle g_*^* \rangle \longrightarrow \mathbb{F}$  que se anula en todos los elementos de la forma  $ag_*^*$ , con  $a$  de grado positivo.

Identificamos entonces  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}, \mathbb{F})$  con este espacio y elegimos una base en él consistente en los elementos  $\widehat{g}_m^d$  definidos como las aplicaciones que envían el generador  $g_m^d$  a 1 y cualquier otro generador a 0. Por tanto, uno tiene que

$$(d_{(2)}(\widehat{g}_m^d))(g_{m'}^{d'}) = \widehat{g}_m^d \delta(g_{m'}^{d'})$$

La parte derecha de la ecuación es no nula precisamente cuando  $g_m^d$  aparece en  $\delta(g_{m'}^{d'})$  con coeficiente 1, es decir, uno tiene

$$d_{(2)}(\widehat{g}_m^d) = \sum_{g_m^d \text{ apareciendo en } \delta(g_{m+2}^{d+1})} \widehat{g}_{m+2}^{d+1}$$

### 3.4. Cálculos explícitos

Con el procedimiento que hemos visto en la última parte de la sección anterior vamos a dar ejemplos de cálculos de las diferenciales  $\delta$ , así como los cálculos correspondiente a la obtención de las diferenciales secundarias. Primero escribimos  $\delta(g_m^d)$

$$\blacksquare \quad \delta(g_3^3) = \eta_3^3(\text{Sq}^1) \text{Sq}^1 g_1^1 + \eta_3^3(1) g_1^2$$

$$d(\delta g_3^3) = \eta_3^3(\text{Sq}^1) \text{Sq}^1 d(g_1^1) + \eta_3^3(1) d(g_1^2) = \eta_3^3(1) \text{Sq}^2 g_0^0$$

$$\delta(dg_3^3) = \delta(\text{Sq}^1 g_2^2) = \text{Sq}^1 \delta(g_2^2) + A(\text{Sq}^1, dd(g_2^2))$$

$$= \eta_2^2(\text{Sq}^1) \text{Sq}^1 \text{Sq}^1 g_0^0 + A(\text{Sq}^1, \text{Sq}^1 \text{Sq}^1 g_0^0)$$

$$= A(\text{Sq}^1, \text{Sq}^1 \text{Sq}^1) g_0^0 = A_{[1,1]}(\text{Sq}^1) g_0^0 = 0$$

Por lo que de aquí deducimos que  $\eta_3^3(\text{Sq}^1) = 0$ , el coeficiente  $\eta_3^3(1)$  lo imponemos nulo pues al no tener restricciones dadas por la condición 3.3.6 podemos elegir un coeficiente arbitrario en  $\mathbb{F}$ , elegiremos en tales situaciones siempre el 0. Concluimos de esta forma que  $\delta(g_3^3) = 0$ .

- $\delta(g_2^4) = \left( \eta_2^4(\text{Sq}^{2,1}) \text{Sq}^{2,1} + \eta_2^4(\text{Sq}^3) \text{Sq}^3 \right) g_0^0$

$$\begin{aligned}
d(\delta g_2^4) &= \left( \eta_2^4(\text{Sq}^{2,1}) \text{Sq}^{2,1} + \eta_2^4(\text{Sq}^3) \text{Sq}^3 \right) d(g_0^0) \\
&= \eta_2^4(\text{Sq}^{2,1}) \text{Sq}^{2,1} + \eta_2^4(\text{Sq}^3) \text{Sq}^3 \\
\delta(dg_2^4) &= \delta(\text{Sq}^3 g_1^1 + \text{Sq}_2^2 g_1^2) \\
&= \text{Sq}^3 \delta(g_1^1) + \text{Sq}^2 \delta(g_1^2) + A(\text{Sq}^3, ddg_1^1) + A(\text{Sq}^2, ddg_1^2) \\
&= A(\text{Sq}^3, d(\text{Sq}^1 g_0^0)) + A(\text{Sq}^2, d(\text{Sq}^2 g_0^0)) \\
&= A(\text{Sq}^3, \text{Sq}^1) g_0^0 + A(\text{Sq}^2, \text{Sq}^2) g_0^0 \\
&= A_{[1,0]}(\text{Sq}^3) g_0^0 + A_{[2,0]}(\text{Sq}^2) g_0^0 = 0
\end{aligned}$$

Se tiene que  $d(g_0^0) = 1$ . Igualando las expresiones anteriores obtenemos que  $\eta_2^4(\text{Sq}^{2,1}) = 0$  y  $\eta_2^4(\text{Sq}^3) = 0$ , por lo que  $\delta(g_2^4) = 0$ .

- $\delta(g_4^4) = \eta_4^4(\text{Sq}^1) \text{Sq}^1 g_2^2$

$$\begin{aligned}
d(\delta g_4^4) &= \eta_4^4(\text{Sq}^1) \text{Sq}^1 d(g_2^2) = \eta_4^4(\text{Sq}^1) \text{Sq}^1 \text{Sq}^1 g_1^1 = 0 \\
\delta(dg_4^4) &= \delta(\text{Sq}^1 g_3^3) = \text{Sq}^1 \delta(g_3^3) + A(\text{Sq}^1, ddg_3^3) \\
&= A(\text{Sq}^1, \text{Sq}^1 \text{Sq}^1 g_1^1) = A_{[1,1]}(g_1^1) = 0
\end{aligned}$$

Por lo que al no tener ninguna condición podemos tomar  $\eta_4^4(\text{Sq}^1) = 0$  y establecer así  $\delta(g_4^4) = 0$ .

- $\delta(g_2^5) = \left( \eta_2^5(\text{Sq}^{3,1}) \text{Sq}^{3,1} + \eta_2^5(\text{Sq}^4) \text{Sq}^4 \right) g_0^0$

$$\begin{aligned}
d\delta(g_2^5) &= \left( \eta_2^5(\text{Sq}^{3,1}) \text{Sq}^{3,1} + \eta_2^5(\text{Sq}^4) \text{Sq}^4 \right) d(g_0^0) = \eta_2^5(\text{Sq}^{3,1}) \text{Sq}^{3,1} + \eta_2^5(\text{Sq}^4) \text{Sq}^4 \\
\delta(dg_2^5) &= \delta(\text{Sq}^4 g_1^1 + \text{Sq}^{2,1} g_1^2 + \text{Sq}^1 g_1^4) = \delta(\text{Sq}^4 g_1^1) + \delta(\text{Sq}^{2,1} g_1^2) + \delta(\text{Sq}^1 g_1^4) \\
&= A(\text{Sq}^4, ddg_1^1) + A(\text{Sq}^{2,1}, ddg_1^2) + A(\text{Sq}^1, ddg_1^4) \\
&= A(\text{Sq}^4, d(\text{Sq}^1 g_0^0)) + A(\text{Sq}^{2,1}, d(\text{Sq}^2 g_0^0)) + A(\text{Sq}^1, d(\text{Sq}^4 g_0^0)) \\
&= A_{[1,0]}(\text{Sq}^4) + A_{[2,0]}(\text{Sq}^{2,1}) + A_{[4,0]}(\text{Sq}^1) = 0
\end{aligned}$$

Por lo que  $\eta_2^5(\text{Sq}^{3,1}) = \eta_2^5(\text{Sq}^4) = 0$  y obtenemos que  $\delta(g_2^5) = 0$ .

- $\delta(g_3^6) = \left( \eta_3^6(\text{Sq}^4) \text{Sq}^4 + \eta_3^6(\text{Sq}^{3,1}) \text{Sq}^{3,1} \right) g_1^1 + \left( \eta_3^6(\text{Sq}^3) \text{Sq}^3 + \eta_3^6(\text{Sq}^{2,1}) \text{Sq}^{2,1} \right) g_1^2 + \eta_3^6(\text{Sq}^1) \text{Sq}^1 g_1^4$

$$\begin{aligned}
d\delta(g_3^6) &= \eta_3^6(\text{Sq}^4) \text{Sq}^4 \text{Sq}^1 g_0^0 + \eta_3^6(\text{Sq}^{2,1})[\text{Sq}^{4,1} + \text{Sq}^5]g_0^0 + \eta_3^6(\text{Sq}^1) \text{Sq}^5 g_0^0 \\
&= [\eta_3^6(\text{Sq}^4) + \eta_3^6(\text{Sq}^{2,1})] \text{Sq}^{4,1} g_0^0 + [\eta_3^6(\text{Sq}^{2,1}) + \eta_3^6(\text{Sq}^1)] \text{Sq}^{1,4} g_0^0 \\
\delta(dg_3^6) &= \delta(\text{Sq}^4 g_2^2 + \text{Sq}^2 g_2^4 + \text{Sq}^1 g_2^5) = \delta(\text{Sq}^4 g_2^2) + \delta(\text{Sq}^2 g_2^4) + \delta(\text{Sq}^1 g_2^5) \\
&= A(\text{Sq}^4, ddg_2^2) + A(\text{Sq}^2, ddg_2^4) + A(\text{Sq}^1, ddg_2^5) \\
&= A(\text{Sq}^4, d(\text{Sq}^1 g_1^1)) + A(\text{Sq}^2, d(\text{Sq}^3 g_1^1 + \text{Sq}^2 g_1^2)) \\
&\quad + A(\text{Sq}^1, d(\text{Sq}^4 g_1 + \text{Sq}^2 \text{Sq}^1 \text{Sq}^2 + \text{Sq}^1 g_1^4)) \\
&= A(\text{Sq}^4, \text{Sq}^1 \text{Sq}^1)g_0^0 + A(\text{Sq}^2, \text{Sq}^{3,1} + \text{Sq}^{2,2})g_0^0 \\
&\quad + A(\text{Sq}^4, \text{Sq}^{1,4} + \text{Sq}^{4,1} + \text{Sq}^{2,3})g_0^0 \\
&= A_{[1,1]}(\text{Sq}^4)g_0^0 + A_{[2,2]}(\text{Sq}^2)g_0^0 + A_{[2,3]}(\text{Sq}^1)g_0^0 \\
&= 0 + \text{Sq}^5 g_0^0 + (\text{Sq}^5 + \text{Sq}^{4,1})g_0^0 = \text{Sq}^{4,1} g_0^0
\end{aligned}$$

Por tanto, podemos tomar  $\eta_3^6(\text{Sq}^{2,1}) = \eta_3^6(\text{Sq}^1) = 0$  lo que nos da  $\eta_3^6(\text{Sq}^4) = 1$ , tomando el resto de coeficientes nulos obtenemos  $\delta(g_3^6) = \text{Sq}^4 g_1^1$ .

El siguiente resultado es original de este trabajo, aunque su deducción es inmediata a partir del algoritmo, tiene cierto grado de relevancia, al darnos una generalización de ciertos cálculos que hemos hecho anteriormente. A partir de él se confirma lo esperado, que  $d_{(2)}(g_n^n) = 0$ .

**Lema 3.4.1.** *Para todo  $n \in \mathbb{N}$  se cumple  $\delta(g_n^n) = 0$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Lo probaremos por inducción. Los casos  $n = 3, 4$  los hemos probado de manera explícita y los casos  $n = 1, 2$  son triviales por cuestiones de dimensión. Vamos a suponerlo cierto para  $n - 1$ , es decir,  $\delta(g_{n-1}^{n-1}) = 0$ , y veremos entonces que se verifica para  $n$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $n > 4$ . Lo primero que vamos a hacer es expresar  $\delta(g_n^n)$  como suma de coeficientes, esto es

$$\delta(g_n^n) = \sum_{n-2 \leq d' \leq n-1} \sum_a \eta_n^n(a) a g_{n-2}^{d'} = \eta_n^n(\text{Sq}^1) \text{Sq}^1 g_{n-2}^{n-2}$$

Ahora imponemos la condición 3.3.6:

$$\begin{aligned}
d\delta(g_n^n) &= \eta_n^n(\text{Sq}^1) \text{Sq}^1 \text{Sq}^1 g_{n-3}^{n-3} = 0 \\
\delta(dg_n^n) &= \delta(\text{Sq}^1 g_{n-1}^{n-1}) = \text{Sq}^1 \delta(g_{n-1}^{n-1}) + A(\text{Sq}^1, ddg_{n-1}^{n-1}) \\
&= A(\text{Sq}^1, d(\text{Sq}^1 dg_{n-2}^{n-2})) = A(\text{Sq}^1, \text{Sq}^1 \text{Sq}^1 g_{n-3}^{n-3}) \\
&= A(\text{Sq}^1, \text{Sq}^1 \text{Sq}^1)g_{n-3}^{n-3} = A_{[1,1]}(\text{Sq}^1)g_{n-3}^{n-3} = 0
\end{aligned}$$

Podemos tomar  $\eta_n^n(\text{Sq}^1) = 0$  y concluimos que  $\delta(g_n^n) = 0$ .  $\square$

El resto de las diferenciales  $\delta$  pueden encontrarse en [BJ04a, Sección 9]. Hay que tener en cuenta que estas diferenciales no tienen ningún significado de invariancia, y dependen de las elecciones de coeficientes arbitrarias además de la elección de la aplicación multiplicación  $A$ , sin embargo el valor de  $d_{(2)}$  asociado a ellas sí está canónicamente determinado. Vamos ahora a continuar con un ejemplo del cómputo de las diferenciales secundarias. Si uno observa la tabla de valores de la diferencial  $\delta$  en [BJ04a] observa que

$$\delta(g_3^{17}) = g_1^{16} + \text{Sq}^{12} g_1^4 + \text{Sq}^{10} \text{Sq}^4 g_1^2 + (\text{Sq}^9 \text{Sq}^4 \text{Sq}^2 + \text{Sq}^{10} \text{Sq}^5 + \text{Sq}^{11} \text{Sq}^4) g_1^1$$

Esto quiere decir que

$$d_{(2)}(\widehat{g}_1^{16}) = \widehat{g}_3^{17}$$

y más aún  $d_{(2)}(\widehat{g}_m^d) = 0$  para todo  $\widehat{g}_m^d$  con  $d < 16$ , se pueden comprobar todos los casos para cada  $d$  fija pues el número de generadores  $g_m^d$  para cada  $d$  es finito.

De la misma manera podemos seguir calculando las diferenciales secundarias. La siguiente figura, obtenida de [BJ04a, Sección 2.8.] representa las únicas diferenciales secundarias no triviales hasta grado 39. Estos cálculos confirman los realizados por Ravenel en [Rav86].

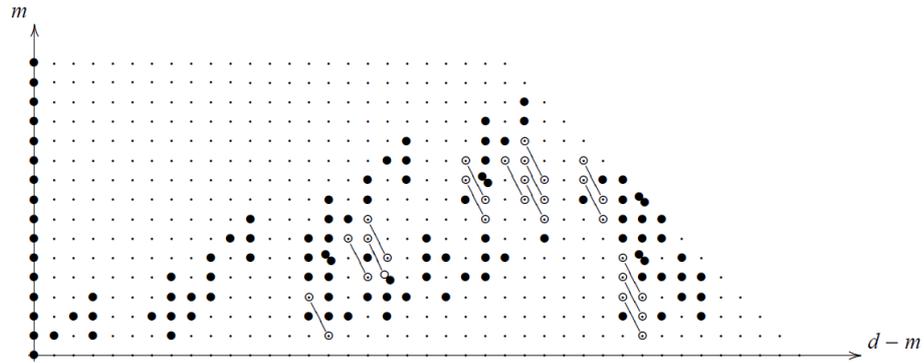


FIGURA 1. [BJ04a, Figura 1] Diferenciales secundarias no triviales en  $E_3(S^0, S^0)$  con  $p = 2$ .



## Conclusiones y nuevas líneas

The beauty of mathematics only  
shows itself to more patient followers.

---

Maryam Mirzakhani

No podemos concluir estas memorias sin antes sugerir algunas ideas que podrían servir para continuar la línea de investigación que hemos visto en esta última parte.

En el artículo original, Baues y Jibladze trabajan con el Algoritmo de Bruner [Bru89], un algoritmo desarrollado en los años noventa para el cálculo del Ext de módulos grandes. Como hemos visto, obtener una resolución minimal del álgebra de Steenrod es un paso fundamental a la hora de obtener las diferenciales secundarias, por este motivo una posible mejora sería implementar un algoritmo más eficiente: el Algoritmo de Nassau [Nas19]. Durante la realización de este proyecto se planteó como una posible línea de investigación utilizar este algoritmo para ampliar los cálculos del artículo, aunque finalmente el tiempo no lo permitió. Sin embargo, merece la pena destacar que en el tiempo en que se estaba desarrollando este trabajo, los matemáticos Dexter Chua y Hood Chatman han trabajado en esto que acabamos de mencionar. En [Chu21] puede verse cómo se han calculado las diferenciales secundarias de la esfera hasta  $t - s = 140$  mediante la implementación del Algoritmo de Nassau en el Algoritmo 3.3.5. Además se resuelve el problema de extensión hasta  $t - s = 95$  calculando las diferenciales restantes. No se limitan al espectro de la esfera, se calculan las diferenciales secundarias para otros espectros de los que se calculan hasta el término  $t - s = 112$ . El cómputo, en palabras del artículo, tardó cinco días y fueron requeridos 40 GB de memorias, esto muestra una vez más la complejidad computacional que tienen los problemas de esta índole en la topología algebraica.

Otra posible línea de investigación que se plantea es estudiar el álgebra de las operaciones cohomológicas secundarias según la descripción que da Nassau en [Nas12]. No nos vamos a adentrar mucho en el contenido de este artículo, pues se escapa a las competencias de este trabajo. La descripción que da Nassau es equivalente a la que da Baues en [Bau06], sin embargo, la aplicación multiplicación presenta una fórmula cerrada, a diferencia de la inductiva de Baues. Utilizando esta descripción podrían facilitarse los cálculos de las diferenciales secundarias.

Cuando hablamos de númeos primos en topología algebraica solemos estar refiriéndonos al dos, pero recordemos que hay infinitos de ellos... Todo el trabajo de Baues y Jibladze está hecho para  $p = 2$ , sin embargo, lo que hemos estudiado puede extrapolarse a un primo  $p$  cualquiera. Queda pendiente realizar los cálculos correspondientes al resto de primos. Incluimos en el apéndice de esta memoria las resoluciones minimales para  $p = 2, 3, 5, 7$  realizadas según [Nas19] por Nassau, quien muy amablemente las ha calculado para que pueda incluirlas en este trabajo, estas son el primer paso a resolver el

problema de calcular las diferenciales secundarias; después habría que establecer la aplicación multiplicación en el álgebra de las operaciones cohomológicas secundarias con un primo  $p$  cualquiera y con ello, estaríamos en disposición de hacer el mismo procedimiento que se ha seguido en este trabajo.

Estudiar la sucesión espectral de Adams es todo un reto, no sólo por su dificultad intrínseca sino también por la dificultad de las herramientas necesarias para poder empezar a comprenderla: el álgebra de Steenrod, la noción de sucesión espectral y la categoría de los espectros. Es por ello, que esta memoria da una descripción general de las mismas para así poder centrarse en los últimos avances. En este punto, el lector ya estará en disposición de enfrentarse a las cuestiones que acabamos de plantear.

A título personal, este trabajo me ha servido para comprobar cómo preguntas de índole geométrico, como es la cuestión del invariante uno de Hopf, acaba dando una de las teorías más prolífica que he tenido el gusto de estudiar en matemáticas. El cálculo de los grupo de homotopía de orden superior ha sido una incógnita para mi desde que en el grado en matemáticas nuestro profesor los mencionó como una curiosidad. Este trabajo me ha permitido entenderlos un poco mejor y me ha permitido también haber visto una parte de las matemáticas que hasta entonces sólo me había aparecido de forma tangencial: el álgebra homológica. Como parte de la formación complementaria merece la pena destacar la lectura de [Rot09].

## Apéndice

Presentamos aquí una serie de resoluciones minimales sobre el álgebra de Steenrod  $\mathcal{A}_p$  con  $p = 2, 3, 5, 7$ . Estas tablas han sido realizadas por Christian Nassau mediante su algoritmo [Nas19] y ha sido él quien las ha facilitado para su inclusión en este trabajo.

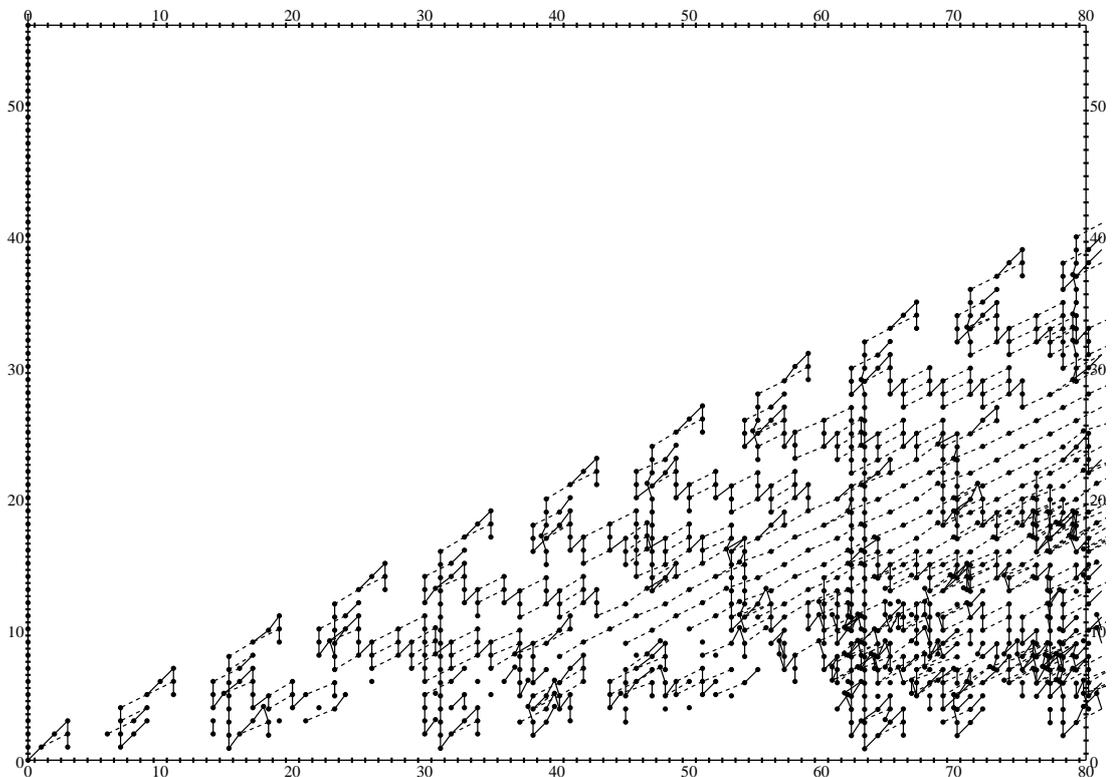


FIGURA 1.  $\text{Ext}_{\mathcal{A}_2}^{s,t}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

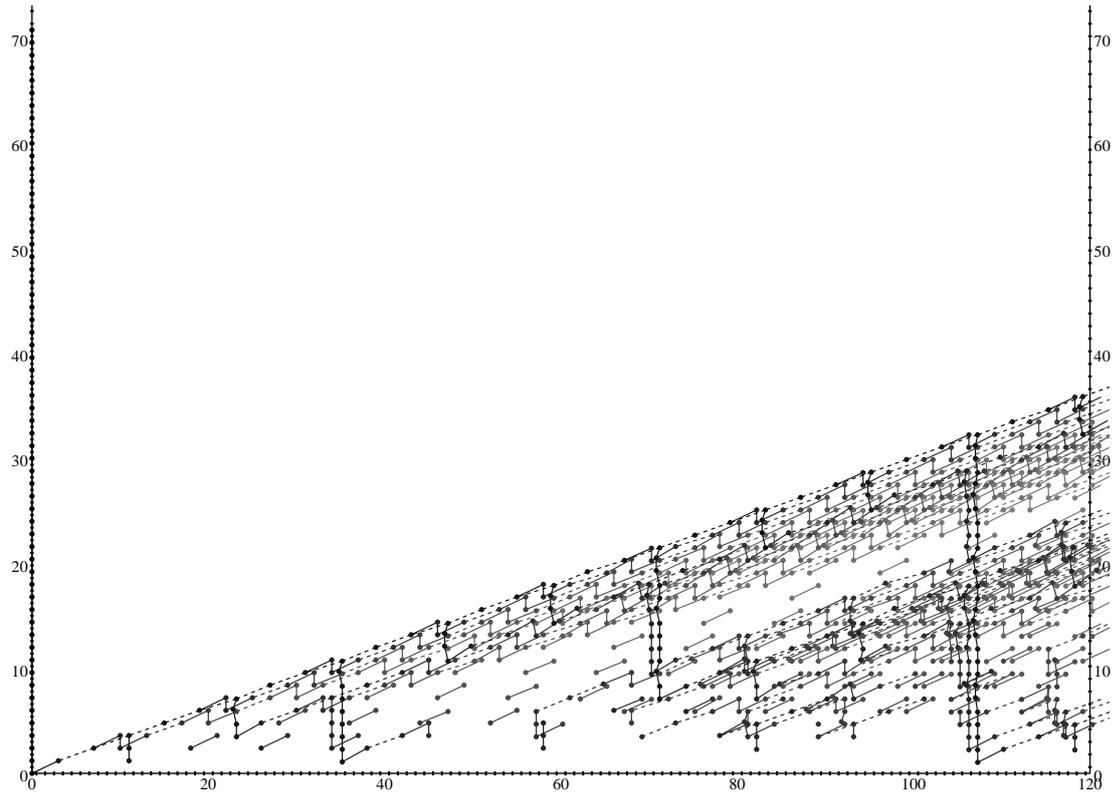


FIGURA 2.  $\text{Ext}_{\mathcal{A}_3}^{s,t}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

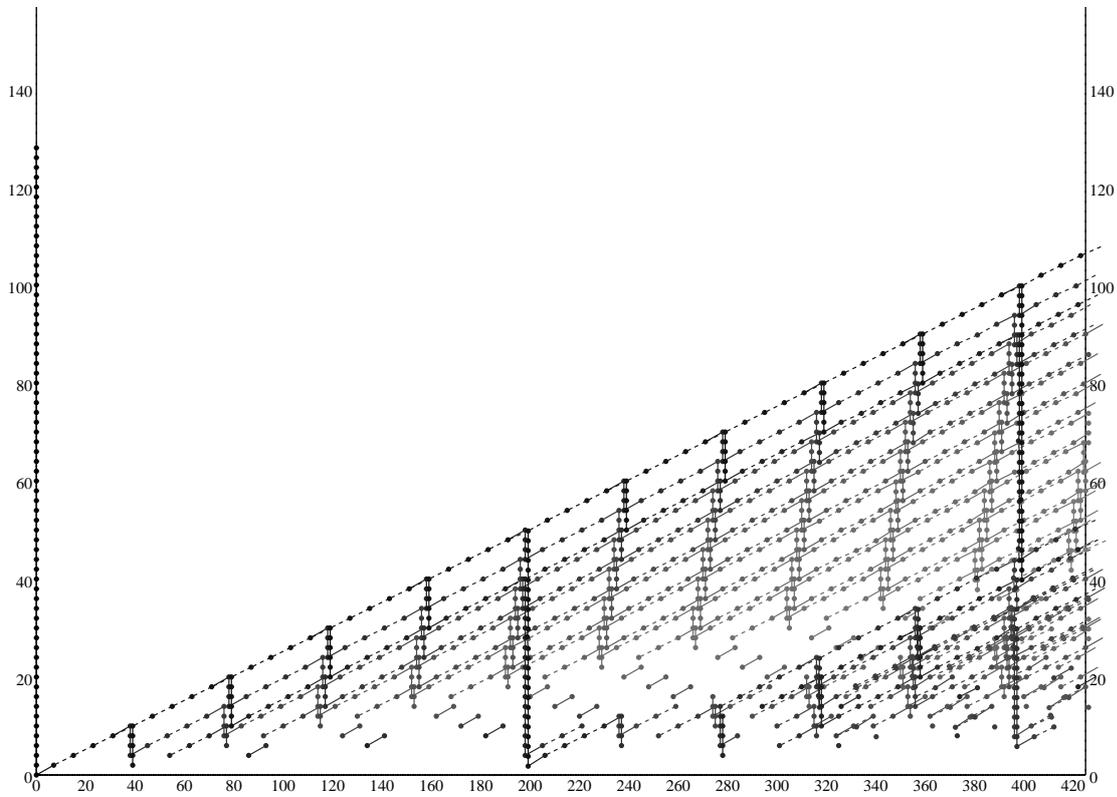


FIGURA 3.  $\text{Ext}_{\mathcal{A}_5}^{s,t}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$

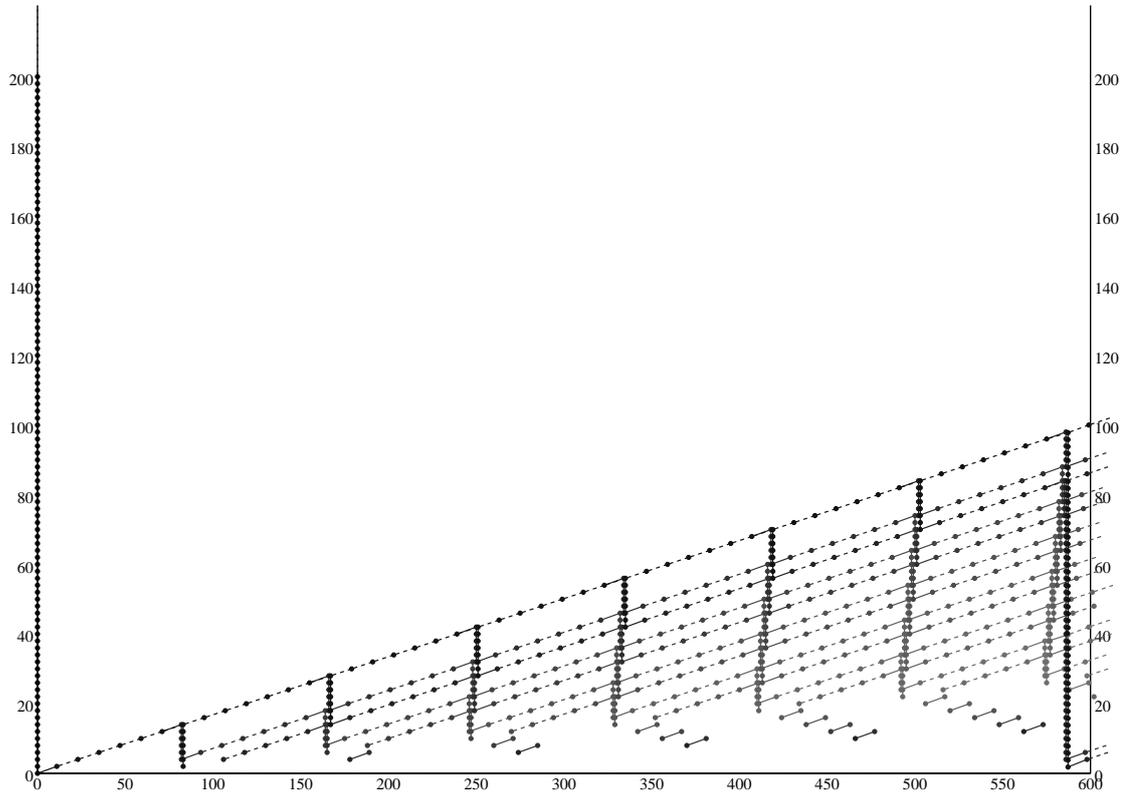


FIGURA 4.  $\text{Ext}_{\mathcal{A}_7}^{s,t}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$



## Bibliografia

- [Ada58a] J. F. Adams. On the nonexistence of elements of Hopf invariant one. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64:279–282, 1958.
- [Ada58b] J. F. Adams. On the structure and applications of the Steenrod algebra. *Comment. Math. Helv.*, 32:180–214, 1958.
- [Ade52] José Adem. The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 38:720–726, 1952.
- [Ade53] José Adem. Relations on iterated reduced powers. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 39:636–638, 1953.
- [Agu82] J. Aguadé. Realizability of cohomology algebras: a survey. *Publ. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona*, 26(2):25–68, 1982.
- [Bau06] Hans-Joachim Baues. *The algebra of secondary cohomology operations*, volume 247 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [BJ04a] Hans Joachim Baues and Mamuka Jibladze. Computation of the  $e_3$ -term of the adams spectral sequence. *arXiv preprint math/0407045*, 2004.
- [BJ04b] Hans-Joachim Baues and Mamuka Jibladze. The Steenrod algebra and theories associated to Hopf algebras. volume 12, pages 109–126. 2004. Homotopy theory.
- [Bru89] Robert R. Bruner. Calculation of large Ext modules. In *Computers in geometry and topology (Chicago, IL, 1986)*, volume 114 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 79–104. Dekker, New York, 1989.
- [Chu21] Dexter Chua. Adams differentials via the secondary steenrod algebra, 2021.
- [Fre38] Hans Freudenthal. Über die Klassen der Sphärenabbildungen I. Große Dimensionen. *Compositio Math.*, 5:299–314, 1938.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Hat04] Allen Hatcher. Spectral sequences. *preprint*, 2004.
- [Hop31] Heinz Hopf. Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. *Math. Ann.*, 104(1):637–665, 1931.
- [Jam99] I. M. James, editor. *History of topology*. North-Holland, Amsterdam, 1999.
- [Mas11] Paolo Masulli. Stable homotopy and the adams spectral sequence. *Faculty of Science. University of Copenhagen*, 2011.
- [McC01] John McCleary. *A user’s guide to spectral sequences*, volume 58 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2001.
- [MT68] Robert E. Mosher and Martin C. Tangora. *Cohomology operations and applications in homotopy theory*. Harper & Row, Publishers, New York-London, 1968.
- [Nas12] Christian Nassau. On the secondary Steenrod algebra. *New York J. Math.*, 18:679–705, 2012.
- [Nas19] Christian Nassau. Computing a minimal resolution over the steenrod algebra. *arXiv preprint arXiv:1910.04063*, 2019.
- [Rav86] Douglas C. Ravenel. *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres*, volume 121 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1986.
- [Rot09] Joseph J. Rotman. *An introduction to homological algebra*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2009.
- [Ste47] N. E. Steenrod. Products of cocycles and extensions of mappings. *Ann. of Math. (2)*, 48:290–320, 1947.
- [Ste57] N. E. Steenrod. Cohomology operations derived from the symmetric group. *Comment. Math. Helv.*, 31:195–218, 1957.
- [Ste62] N. E. Steenrod. *Cohomology operations*. Annals of Mathematics Studies, No. 50. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962. Lectures by N. E. Steenrod written and revised by D. B. A. Epstein.