TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Polinomio de Bernstein y singularidades aisladas de hipersuperficies complejas

Abraham del Valle Rodríguez

Máster en Matemáticas

Dirigido por: D. Luis Narváez Macarro

2 de julio de 2021

Abstract

The main aim of this work is to present as precisely as possible the results obtained by B. Malgrange in his article *"Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée"*, published in 1975, which was one of the triggers for the development of the $\mathcal{D}$-module theory in the last quarter of the last century. Specifically, we are going to analize the close relationship between the Bernstein polynomial of an isolated singularity and the Milnor monodromy automorphism, resulting that the eigenvalues of the latter are exactly the exponentials of the roots of this polynomial, and as an immediate consequence, that these roots are always rational. In order to do this, we are going to use a wide variety of tools, from the de Rham cohomology of a $\mathcal{D}$-module to Milnor's Theorem, through the Gauss-Manin differential system and the theory of regular meromorphic connections, among others.

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es exponer con toda la precisión y el detalle posibles los resultados obtenidos por B. Malgrange en su artículo *"Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée"* de 1975, el cual fue uno de los detonantes para el desarrollo de la teoría de $\mathcal{D}$-módulos en el último cuarto del siglo pasado. En concreto, se va a analizar la estrecha relación entre el polinomio de Bernstein de una singularidad aislada y el automorfismo de monodromía de Milnor, obteniendo como resultado principal que los autovalores de este último coinciden con las exponenciales de las raíces del primero, y como consecuencia inmediata, que las raíces de este polinomio son siempre racionales. Para ello, se va a hacer uso de una amplia variedad de herramientas, desde la cohomología de de Rham de un $\mathcal{D}$-módulo hasta el Teorema de Milnor, pasando por el sistema diferencial de Gauss-Manin y la teoría de conexiones meromorfas regulares, entre otras.

Índice general

Introducción

Desde el último cuarto del siglo XX, la teoría de $\mathcal{D}$-módulos ha constituido una herramienta fundamental para el desarrollo de la teoría de singularidades, proporcionándole nuevas técnicas y métodos que, en conjunción con el estudio topológico de las singularidades, han permitido una comprensión más profunda de los fenómenos que tienen lugar.

El presente texto tiene como objetivo estudiar y analizar con detalle el artículo de Malgrange [19], *"Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée"*, publicado en 1975, que constituye uno de los trabajos fundamentales en este campo. En él se demuestra que, en el caso de una hipersuperficie con una singularidad aislada, los autovalores del automorfismo de monodromía sobre la cohomología de la fibra de Milnor coinciden con las exponenciales de las raíces del polinomio de Bernstein (multiplicadas por un factor $2\pi i$) de la función, estableciendo así una relación esencial y de enormes consecuencias entre el álgebra y la topología de la singularidad. Atendiendo al hecho de que los autovalores del automorfismo de monodromía de Milnor son raíces de la unidad (esto es lo que afirma el famoso *"teorema de monodromía local"*), se obtiene inmediatamente una consecuencia: las raíces del polinomio de Bernstein de una singularidad aislada son siempre racionales.

Hay que tener presente que el artículo de Malgrange bebe de una gran cantidad de resultados muy importantes y bien conocidos en topología, teoría de haces y teoría de $\mathcal{D}$-módulos, y que cuando Malgrange lo escribió, la teoría de $\mathcal{D}$-módulos estaba aún en un estado relativamente incipiente y no existían referencias de conjunto accesibles, por ejemplo, a un nivel de iniciación a la investigación. Ejemplos de ello son el Lema de Poincaré (Lema 1.6), que establece que toda forma cerrada es localmente exacta, el Lema de de Rham (Lema 2.17) sobre la exactitud de una cierta sucesión de espacios de formas holomorfas en el caso de singularidad aislada, el Teorema de Milnor (Teorema 2.13) sobre la topología en el entorno de puntos singulares de hipersuperficies complejas con singularidades aisladas, la presentación y los resultados de F. Pham sobre la relación entre el sistema diferencial de Gauss-Manin (cuya definición precisa requiere un dominio de conceptos de teoría de haces que quedan fuera del objetivo de este trabajo) y un cierto $\mathcal{D}$-módulo relacionado con el polinomio de Bernstein (Proposición 2.14), la regularidad de la conexión de Gauss-Manin (Teorema 2.34) o la llamada *"positividad de los exponentes característicos"*, de otro artículo casi simultáneo del propio Malgrange.

Este trabajo se estructura en dos capítulos, atendiendo a las herramientas que se desarrollan en cada uno de ellos:

En el primer capítulo, tras un breve recordatorio de los aspectos de la teoría de $\mathcal{D}$-

módulos más básicos y que se manejarán a lo largo de todo el trabajo, introducimos una herramienta de geometría diferencial que resultará fundamental: los módulos Ω^p de gérmenes de p-formas holomorfas y la diferencial exterior. Esto permitirá definir la cohomología de de Rham de un $\mathcal{D}$-módulo M, cuyo cálculo, como viene siendo habitual en topología algebraica, no es sencillo en general. Por ello, se hace necesario establecer un resultado que permita relacionar esta cohomología con los espacios $\operatorname{Ext}_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}, M)$ y $\operatorname{Tor}^{\mathcal{D}}(\Omega^n, M)$, que en principio son más manejables. A este fin y al posterior cálculo de cohomologías de de Rham de algunos $\mathcal{D}$-módulos concretos se dedica el grueso del capítulo, que culmina con la introducción de un tipo particular de $\mathcal{D}$-módulos que resultará clave: los $\mathcal{D}$-módulos con soporte en el origen, de los que se obtiene una descripción completa de su cohomología de de Rham.

El segundo capítulo introduce el otro ingrediente principal de este trabajo: el polinomio de Bernstein de la singularidad. En la primera sección se define este polinomio para un germen de función holomorfa $f \in \mathcal{O}$ y se dan algunas propiedades del $\mathcal{D}$-módulo $M = \mathcal{D}[s]f^s$, obteniéndose una estrecha relación entre ambos. Posteriormente se introducen otras dos herramientas imprescindibles: el sistema diferencial de Gauss-Manin y el Teorema de Milnor, y se estudia su relación con el polinomio de Bernstein. En la última sección se añade una última pieza al puzzle: las conexiones meromorfas regulares, y se termina de desarrollar la prueba del principal resultado del trabajo de Malgrange, objeto de esta memoria. Con no mucho esfuerzo extra, aunque apelando a otro resultado importante de Malgrange (la positividad de los exponentes característicos), se consigue probar que las raíces del polinomio de Bernstein, además de ser racionales, son estrictamente negativas. Finalmente, se prueba la finitud de M como $\mathcal{D}$-módulo, resultado con el que concluye el trabajo.

Para finalizar esta introducción, me gustaría señalar que este proyecto ha pretendido servir como etapa inicial para el aprendizaje de estas técnicas y que la intención es continuar con la aplicación de la teoría de $\mathcal{D}$-módulos al estudio de singularidades arbitrarias de hipersuperficies complejas como proyecto de tesis doctoral. Agradecer a mi tutor Luis Narváez todo su esfuerzo y dedicación en hacerme un poco más “digerible” este trabajo y a todos los que me rodean el apoyo incondicional que, consciente o inconscientemente, me han prestado.

Abraham del Valle Rodríguez

Capítulo 1

$\mathcal{D}$-módulos y cohomología de de Rham

En este capítulo recordaremos los aspectos esenciales de la teoría de $\mathcal{D}$-módulos, estableceremos una equivalencia entre los $\mathcal{D}$-módulos a la izquierda y a la derecha y definiremos la cohomología de de Rham de un $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda. También estableceremos resultados que nos permitirán calcular cómodamente esta cohomología en algunos casos concretos y que nos serán útiles más adelante.

1.1. Preliminares sobre $\mathcal{D}$-módulos

Sea U un abierto de $\mathbb{C}^n$, consideremos la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$ de funciones holomorfas en n variables $f : U \to \mathbb{C}$. Recordemos que, por las propiedades de las funciones holomorfas, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ resulta ser un haz, denominado el *haz de funciones holomorfas en* $\mathbb{C}^n$.

Podemos considerar entonces su fibra en el origen $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, que denotaremos simplemente por $\mathcal{O}$ y que será un anillo local de ideal maximal:

$$\mathfrak{m} = \{\tilde{f} \in \mathcal{O} \mid f(0, \ldots, 0) = 0\}.$$

Además, sabemos que $\mathcal{O}$ se identifica con $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$, el anillo de series convergentes en n variables, a través del desarrollo en serie de Taylor que caracteriza a las funciones holomorfas.

También podemos considerar la completación de $\mathcal{O}$ respecto de $\mathfrak{m}$, que denotaremos $\widehat{\mathcal{O}}$ y que se identificará con el anillo de series formales en n variables:

$$\widehat{\mathcal{O}} = \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]].$$

Sea $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ la derivada parcial con respecto a la variable x_i, podemos definir el *anillo de operadores diferenciales lineales con coeficientes en* $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{D} = \mathcal{O}[\partial_1, \ldots, \partial_n] \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}).$$

Obsérvese que $\mathcal{D}$ es un anillo no conmutativo y está sujeto a las relaciones de conmutación bien conocidas:

- $[\partial_i, \partial_j] = 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

- $[\partial_i, f] = \partial f/\partial x_i$ para $i = 1, \ldots, n$ y $f \in \mathcal{O}$ (ya que $\partial_i(fg) = (\partial_i f)g + f(\partial_i g)$ para cualesquiera $f, g \in \mathcal{O}$).

Igualmente, podemos considerar $\widehat{\mathcal{D}} = \widehat{\mathcal{O}}[\partial_1, \ldots, \partial_n]$, y un primer resultado nos dice que tanto $\mathcal{D}$ como $\widehat{\mathcal{D}}$ son noetherianos:

Lema 1.1. *$\mathcal{D}$ y $\widehat{\mathcal{D}}$ son noetherianos a izquierda y derecha.*

Demostración. Sea $P \in \mathcal{D}$, podemos definir su orden, $\operatorname{ord}(P)$, como el grado de P como elemento de $\mathcal{D}$, de manera que podemos considerar $\mathcal{D}_r = \{P \in D \mid \operatorname{ord}(P) \leq r\}$. Es claro que:

- $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{D}$,
- $\mathcal{D} = \cup_{i=0}^{\infty} \mathcal{D}_i$,
- $\mathcal{D}_i \cdot \mathcal{D}_j \subseteq \mathcal{D}_{i+j}$,

de modo que $\{\mathcal{D}_i\}_{i \geq 0}$ es una filtración de $\mathcal{D}$. Entonces, su graduado respecto de esta filtración (tomando $\mathcal{D}_{-1} = \{0\}$) será:

$$\operatorname{gr} \mathcal{D} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \frac{\mathcal{D}_r}{\mathcal{D}_{r-1}}.$$

Si denotamos por $\sigma_k : \mathcal{D}_k \to \mathcal{D}_k/\mathcal{D}_{k-1}$ a la proyección canónica, podemos definir el producto (extendiéndolo por linealidad):

$$\sigma_k(P) \cdot \sigma_l(Q) = \sigma_{k+l}(PQ),$$

Este producto está bien definido, pues si $\sigma_k(P) = \sigma_k(P')$ y $\sigma_l(Q) = \sigma_l(Q')$, entonces $P - P' \in \mathcal{D}_{k-1}$ y $Q - Q' \in \mathcal{D}_{l-1}$, de donde:

$$PQ - P'Q' = P(Q - Q') + (P - P')Q' \in \mathcal{D}_{k+l-1},$$

y por tanto $\sigma_{k+l}(PQ) = \sigma_{k+l}(P'Q')$.

Sea $\xi_i = \sigma_1(\partial_i)$ para $i = 1, \ldots, n$, tenemos entonces que $\operatorname{gr} \mathcal{D} = \mathcal{O}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ y además las variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ahora conmutan entre ellas y con los elementos de $\mathcal{O}$, pues para todo $i, j = 1, \ldots, n$ y $f \in \mathcal{O}$ se tiene:

$$\xi_i \xi_j = \sigma_1(\partial_i)\sigma_1(\partial_j) = \sigma_2(\partial_i \partial_j) = \sigma_2(\partial_j \partial_i) = \sigma_1(\partial_j)\sigma_1(\partial_i) = \xi_j \xi_i,$$

$$f\xi_i = \sigma_1(f)\sigma_1(\partial_i) = \sigma_2(f \cdot \partial_i) = \sigma_2\left(\partial_i \cdot f - \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sigma_2(\partial_i \cdot f) = \sigma_1(\partial_i)\sigma_1(f) = \xi_i f,$$

donde se han usado las relaciones de conmutación y el hecho de que $\partial f/\partial x_i \in \mathcal{O} = \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_1$, de manera que $\sigma_2(\partial f/\partial x_i) = 0$.

Así, tenemos expresado $\operatorname{gr}\mathcal{D}$ como un anillo de polinomios en n variables con coeficientes en $\mathcal{O}$ (que es noetheriano por serlo $\mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_n\}$), y por tanto es noetheriano. Esto implica, por un resultado bien conocido, que $\mathcal{D}$ es noetheriano a izquierda y derecha.

Por último, exactamente el mismo argumento es aplicable a $\widehat{\mathcal{D}}$, dado que $\operatorname{gr}\widehat{\mathcal{D}}$ será un anillo de polinomios en n variables con coeficientes en $\widehat{\mathcal{O}}$ (que también es noetheriano por ser la completación de un anillo local noetheriano respecto de su ideal maximal, o bien por serlo $\mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_n]]$).

□

Nota. En lo que sigue, por comodidad, emplearemos la notación del multiíndice: dado un multiíndice $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, denotaremos $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\partial_n^{\alpha_n}$ y $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}$. Además, diremos que α es de *longitud* $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Nos proponemos ahora ver que $\mathcal{D}$ es un $\mathcal{O}$-módulo libre a la izquierda y a la derecha y calcular una base, para lo cual necesitamos en primer lugar un pequeño lema técnico:

Lema 1.2. *Sean $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n), \beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n) \in \mathbb{N}^n$ tales que $|\alpha| \leq |\beta|$, entonces:*

$$\partial^\beta(x^\alpha) = \begin{cases} \beta! & \text{si } \beta = \alpha, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

donde estamos denotando $\beta! = \beta_1!\ldots\beta_n!$.

Demostración. En primer lugar, dado que $\partial_i^m(x_i^m) = m!$ para cualquier $m \geq 0$ e $i = 1,\ldots,n$, es claro que si $\alpha = \beta$, entonces:

$$\partial^\alpha(x^\beta) = \partial_1^{\beta_1}\ldots\partial_n^{\beta_n}(x_1^{\beta_1}\ldots x_n^{\beta_n}) = \partial_1^{\beta_1}(x_1^{\beta_1})\ldots\partial_n^{\beta_n}(x_n^{\beta_n}) = \beta_1!\ldots\beta_n!.$$

En cualquier otro caso, ha de existir un cierto índice j tal que $\alpha_j < \beta_j$ (pues en caso contrario tendríamos $|\alpha| \geq |\beta|$, lo que implicaría $|\alpha| = |\beta|$ y por tanto $\alpha = \beta$), de manera que $\partial_j^{\beta_j}(x_j^{\alpha_j}) = 0$ y $\partial^\beta(x^\alpha) = 0$.

□

Proposición 1.3. *$\mathcal{D}$ es un $\mathcal{O}$-módulo libre a la izquierda y a la derecha de base $\mathfrak{B} = \{\partial^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$.*

Demostración. Es claro que $\mathfrak{B}$ es un sistema generador de $\mathcal{D}$ como $\mathcal{O}$-módulo a la izquierda (si el operador no está inicialmente escrito como combinación $\mathcal{O}$-lineal de elementos de la forma ∂^α con $\alpha \in \mathbb{N}^n$, puede llevarse a ella a través de las reglas de conmutación). Veamos que también es linealmente independiente:

Supongamos que $\sum_{\alpha\in\Lambda} a_\alpha \partial^\alpha = 0$ con $\Lambda \subseteq \mathbb{N}^n$ finito y $a_\alpha \in \mathcal{O}$ para todo $\alpha \in \Lambda$ pero al menos uno de los a_α es no nulo. Sea $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $a_{\alpha_0} \neq 0$ y $a_\beta = 0$ para todo $\beta \in \Lambda$ tal que $|\beta| < |\alpha_0|$, tenemos que:

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} a_\alpha \partial^\alpha (x^{\alpha_0}) = a_{\alpha_0}\partial^{\alpha_0}(x^{\alpha_0}) + \sum_{\substack{|\beta|\geq|\alpha_0| \\ \beta\neq\alpha_0}} a_\beta \partial^\beta (x^{\alpha_0}) = a_{\alpha_0}\alpha_0! \neq 0,$$

donde en la primera igualdad hemos suprimido los términos con $|\beta| < |\alpha_0|$ por ser los correspondientes a_β nulos y en la segunda hemos aplicado el lema anterior (el primer sumando es $a_{\alpha_0}\alpha_0!$ y el segundo es nulo).

Obtenemos así una contradicción con la suposición de que $\sum_{\alpha\in\Lambda} a_\alpha \partial^\alpha = 0$, y concluimos que $\mathfrak{B}$ es linealmente independiente (y, por tanto, una base de $\mathcal{D}$ como $\mathcal{O}$-módulo a la izquierda).

De forma completamente análoga se prueba que $\mathfrak{B}$ es también base de $\mathcal{D}$ como $\mathcal{O}$-módulo a la derecha.

$\square$

Veamos a continuación dos ejemplos de $\mathcal{D}$-módulos, que resultarán fundamentales en lo que sigue:

Ejemplos:

- $\mathcal{O}$ es un $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda:

  Dados $P \in \mathcal{D}$ y $\tilde{f} \in \mathcal{O}$, podemos definir el producto $P \cdot \tilde{f} = \widetilde{P(f)}$, que será un elemento de $\mathcal{O}$ ya que las derivadas parciales de una función holomorfa siguen siendo holomorfas. Además, es claro que se verifican las propiedades de distributividad y asociatividad por la linealidad de las derivadas parciales y que $1\cdot\tilde{f} = \tilde{f}$ para cualquier $\tilde{f} \in \mathcal{O}$.

- Ω^n, el espacio de las n-formas holomorfas con coeficientes en $\mathcal{O}$, es un $\mathcal{D}$-módulo a la derecha:

  Fijando un sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en un entorno del origen y denotando $dx = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, sabemos que cualquier $\omega \in \Omega^n$ se escribe de manera única de la forma $\omega = gdx$ con $g \in \mathcal{O}$ (pues dx es base de Ω^n como $\mathcal{O}$-módulo). Dado $P = \sum_\alpha a_\alpha \partial^\alpha \in \mathcal{D}$, definimos su *operador adjunto* como:

  $$P^\# = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha a_\alpha,$$

  donde $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Es fácil ver a partir de esta definición que $f^\# = f$ para cualquier $f \in \mathcal{O}$ y para cualesquiera $P, Q \in \mathcal{D}$ se verifica $(P+Q)^\# = P^\# + Q^\#$ y $(PQ)^\# = Q^\# P^\#$.

Ahora, definimos el producto $\omega \cdot P = (P^{\#}(g))dx \in \Omega^n$. Veamos que, con dicho producto, Ω^n es un $\mathcal{D}$-módulo a la derecha:

Sean $\omega = gdx$, $\eta = hdx$, y $P, Q \in \mathcal{D}$:

- $(\omega + \eta) \cdot P = (g + h)dx \cdot P = P^{\#}(g + h)dx = (P^{\#}(g) + P^{\#}(h))dx = gdx \cdot P + hdx \cdot P = \omega \cdot P + \eta \cdot P$.
- $\omega \cdot (P + Q) = (P + Q)^{\#}(g)dx = P^{\#}(g)dx + Q^{\#}(g)dx = \omega \cdot P + \omega \cdot Q$.
- $\omega \cdot (PQ) = (PQ)^{\#}(g)dx = Q^{\#}(P^{\#}(g))dx = P^{\#}(g)dx \cdot Q = (\omega \cdot P) \cdot Q$.
- $\omega \cdot 1 = 1^{\#}(g)dx = 1(g)dx = gdx = \omega$.

Cabe observar que esta estructura de $\mathcal{D}$-módulo a la derecha es, en realidad, intrínseca, esto es, independiente del sistema de coordenadas elegido. Para dar una definición intrínseca equivalente se emplea la derivada de Lie, la cual permite definir la acción de un campo de vectores (operador diferencial de grado 1 sin término constante), y posteriormente se extiende de manera única en una estructura de $\mathcal{D}$-módulo a la derecha (ver [19]).

Veamos ahora que se puede establecer una equivalencia entre los $\mathcal{D}$-módulos a izquierda y a derecha:

Dado un $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda M, podemos considerar $\Omega^n \otimes_{\mathcal{O}} M$ y dotarlo naturalmente de una estructura de $\mathcal{D}$-módulo a la derecha. Para ello, dados $m \in M$, $\omega \in \Omega^n$, $f \in \mathcal{O}$ y un campo de vectores $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_i$ con $a_i \in \mathcal{O}$ para todo $i = 1, \ldots, n$, definimos los productos:

- $(\omega \otimes m) \cdot f = \omega f \otimes m$.
- $(\omega \otimes m) \cdot X = \omega X \otimes m - \omega \otimes Xm$.

Imponiendo la asociatividad y la distributividad, y teniendo en cuenta que cualquier elemento de $\mathcal{D}$ puede obtenerse a partir de sumas y productos de elementos de $\mathcal{O}$ y campos de vectores, deducimos que estas dos operaciones se prolongan de manera única en un producto que dota a $M \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^n$ de estructura de $\mathcal{D}$-módulo.

Recíprocamente, dado un $\mathcal{D}$-módulo a la derecha Q, podemos considerar $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Omega^n, Q)$ y dotarlo de una estructura de $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda. Para ello definimos análogamente, dados $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Omega^n, Q)$, $f \in \mathcal{O}$ y un campo de vectores X, los siguientes productos:

- $(f \cdot \phi)(\omega) = \phi(\omega) \cdot f$ para todo $\omega \in \Omega^n$.
- $(X \cdot \phi)(\omega) = \phi(\omega X) - \phi(\omega) \cdot X$ para todo $\omega \in \Omega^n$.

E imponiendo, como antes, que se verifiquen las propiedades correspondientes, podemos extender estas operaciones en un producto que dota a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Omega^n, Q)$ de estructura de

$\mathcal{D}$-módulo a la izquierda.

Más aún, puede probarse que los funtores $M \mapsto \Omega^n \otimes_{\mathcal{O}} M$ y $Q \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Omega^n, Q)$ son equivalencias de categorías entre las categorías de los $\mathcal{D}$ módulos a izquierda y derecha, ${}_{\mathcal{D}}\,\mathrm{Mod}$ y $\mathrm{Mod}_{\mathcal{D}}$, respectivamente. Se puede consultar [13] para más información al respecto.

1.2. Cohomología de de Rham de un $\mathcal{D}$-módulo

Consideremos un sistema de coordenadas locales $(x_1, \dots, x_n)$ en un entorno del origen. Recordemos que, dado un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ y un punto $p \in U$, el *espacio cotangente de* U *en* p se define como $T_p^*U = \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$, siendo $\mathfrak{m}_p$ el único ideal maximal del anillo local $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,p}$ de gérmenes de funciones holomorfas en p. Se definen entonces las 1-formas (en realidad, gérmenes de 1-formas en el origen) como:

$$\Omega^1 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i\ (dx_i)_0 \;\middle|\; a_i \in \mathcal{O} \text{ para todo } i = 1, \dots, n \right\} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}\ (dx_i)_0.$$

donde $(dx_i)_0$ designa el germen en el origen de las aplicaciones $dx_i : U \to T^*U$ (siendo $T^*U = \bigsqcup_{p \in U} T_p^*U$) dadas por $dx_i(p) = (x_i - p_i)_p + \mathfrak{m}_p^2 \in T_p^*U$ para cada entorno abierto del origen $U \subset \mathbb{C}^n$ y $p = (p_1, \dots, p_n) \in U$. Por simplicidad, estos gérmenes se denotarán a partir de ahora simplemente por dx_i.

Para generalizar este concepto al de k-forma, necesitamos introducir la noción de *producto exterior*:

Sea A un anillo conmutativo, M un A-módulo y un entero $k \geq 2$, definimos la *k-ésima potencia exterior de* M como el cociente:

$$\bigwedge^k M = \frac{M \otimes_A \overset{k}{\cdots} \otimes_A M}{J},$$

siendo J el submódulo de $M \otimes_A \overset{k}{\cdots} \otimes_A M$ generado por elementos de la forma $m_1 \otimes \ldots \otimes m_k$ tales que existen $i, j = 1, \dots, k$ distintos con $m_i = m_j$. A la clase del elemento $m_1 \otimes \ldots \otimes m_k$ en $\bigwedge^k M$ la denotaremos por $m_1 \wedge \ldots \wedge m_k$ y se denomina *producto exterior de* $m_1, \dots, m_k$. Por consistencia, definimos $\bigwedge^1 M = M$ y $\bigwedge^0 M = A$.

Este producto permite definir, dados $k, l \geq 0$, una operación $\wedge : \bigwedge^k M \times \bigwedge^l M \to \bigwedge^{k+l} M$, que también llamaremos *producto exterior*, dada por la extensión bilineal de:

$$(a_1 \wedge \ldots \wedge a_k) \wedge (b_1 \wedge \ldots \wedge b_l) = a_1 \wedge \ldots \wedge a_k \wedge b_1 \wedge \ldots \wedge b_l,$$

para cualesquiera $a = a_1 \wedge \ldots \wedge a_k \in \bigwedge^k M$ y $b = b_1 \wedge \ldots \wedge b_l \in \bigwedge^l M$. Puede comprobarse fácilmente que no depende de los representantes $a_i \otimes \ldots \otimes a_k$ y $b_1 \otimes \ldots \otimes b_l$ elegidos.

A partir de las propiedades del producto tensorial y de su propia definición, se obtienen fácilmente las siguientes propiedades del producto exterior:

- Bilinealidad: $(\alpha a + \beta b) \wedge c = \alpha a \wedge c + \beta b \wedge c$ para cualesquiera a, b, c y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
- Asociatividad: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ para cualesquiera a, b, c.
- Anticonmutatividad: $a \wedge b = (-1)^{kl} b \wedge a$ si $a \in \bigwedge^k M$, $b \in \bigwedge^l M$. En particular, $a \wedge a = 0$ si k es impar.

Además, si M es un A-módulo libre generado por $\{e_1, \ldots, e_n\}$, entonces $\bigwedge^p M$ también es un A-módulo libre de base:

$$B_p = \{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n\}$$

En particular, el rango de $\bigwedge^p M$ como A-módulo es $\binom{n}{p}$ (y por tanto $\bigwedge^p M \cong M^{\binom{n}{p}}$ como A-módulos). Como el rango de M es n, para $p > n$ se tiene que cualquier conjunto $\{m_1, \ldots, m_p\}$ de elementos de M es linealmente dependiente, luego por las propiedades anteriores $m_1 \wedge \ldots \wedge m_p = 0$ y $\bigwedge^p M = 0$.

Podemos definir entonces el espacio de *(gérmenes de) p-formas holomorfas* como:

$$\Omega^p = \bigwedge\nolimits^p \Omega^1,$$

y en virtud de lo anterior resultará un $\mathcal{O}$-módulo libre (y en particular un $\mathbb{C}$-espacio vectorial) de rango $\binom{n}{p}$ con base:

$$\{dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n\},$$

de manera que toda p-forma $\omega \in \Omega^p$ se podrá escribir como:

$$\omega = \sum_{(i_1,\ldots,i_p) \in I_p} g_{i_1,\ldots,i_p} dx_{i_1,\ldots,i_p},$$

siendo $I_p = \{(i_1, \ldots, i_p) \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n\}$, $dx_{i_1,\ldots,i_p} = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ y $g_{i_1,\ldots,i_p} \in \mathcal{O}$ para todo $(i_1, \ldots, i_p) \in I_p$.

Consideremos ahora la aplicación $d : \Omega^p \to \Omega^{p+1}$, denominada *diferencial exterior*, dada por:

$$d\omega = d\left(\sum_{(i_1,\ldots,i_p) \in I_p} g_{i_1,\ldots,i_p} dx_{i_1,\ldots,i_p}\right) = \sum_{(i_1,\ldots,i_p) \in I_p} dg_{i_1,\ldots,i_p} \wedge dx_{i_1,\ldots,i_p},$$

donde recordemos que si $f \in \mathcal{O}$, df es la 1-forma $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$, denominada *diferencial de f*.

Veamos algunas propiedades de esta aplicación:

Proposición 1.4. *La diferencial exterior verifica:*

(1) Es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal.

(2) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$ si $w \in \Omega^p$.

(3) $d^2 = 0$ (donde d^2 designa la composición $\Omega^p \xrightarrow{d} \Omega^{p+1} \xrightarrow{d} \Omega^{p+2}$ para $p \geq 0$).

Demostración.

(1) Por la linealidad de las derivadas parciales, sabemos que si $f, g \in \mathcal{O}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces $d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$. Aplicando ahora la bilinealidad del producto exterior deducimos que d es $\mathbb{C}$-lineal.

(2) Por linealidad, basta probarlo para $\omega = g dx_{i_1,\ldots,i_p}$ y $\eta = h dx_{j_1,\ldots,j_q}$. Dado que $\partial_i(gh) = (\partial_i g)h + (\partial_i h)g$, tenemos que $d(gh) = dg \cdot h + g \cdot dh$ y entonces:

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \eta) &= d(gh\, dx_{i_1,\ldots,i_p} \wedge dx_{j_1,\ldots,j_q}) = (dg \cdot h + g \cdot dh) \wedge dx_{i_1,\ldots,i_p} \wedge dx_{j_1,\ldots,j_q} \\
&= dg \wedge dx_{i_1,\ldots,i_p} \wedge h dx_{j_1,\ldots,j_q} + (-1)^p g dx_{i_1,\ldots,i_p} \wedge dh \wedge dx_{j_1,\ldots,j_q} \\
&= d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta.
\end{aligned}$$

donde hemos usado la bilinealidad y la anticonmutatividad del producto exterior.

(3) Primero, para una 0-forma $g \in \mathcal{O}$:

$$d^2 g = d\left(\sum_{i=1}^{n} (\partial_i g) dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d(\partial_i g) \wedge dx_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i = 0,$$

por la igualdad de derivadas cruzadas y el hecho de que $dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$ (ya que cada par de sumandos $\partial_{ij} g\, dx_i \wedge dx_j$ y $\partial_{ij} g\, dx_j \wedge dx_i$ con $i \neq j$ se cancelará y los sumandos $\partial_{ii} g dx_i \wedge dx_i$ serán nulos directamente).

Para el caso general, una vez más, por linealidad, bastará probarlo para formas del tipo $\omega = g dx_{i_1,\ldots,i_p}$. Usando la propiedad (2):

$$d^2 \omega = d(dg \wedge dx_{i_1,\ldots,i_p}) = d^2 g \wedge dx_{i_1,\ldots,i_p} + g \wedge d(dx_{i_1,\ldots,i_p}) = 0,$$

donde hemos empleado que $d^2 g = 0$ por lo ya probado para 0-formas y $d(dx_{i_1,\ldots,i_p}) = 0$ por la propia definición, ya que $d1 = 0$ (es una función constante y por tanto sus derivadas parciales son todas nulas).

□

Observemos que la última propiedad permite definir el complejo de cocadenas:

$$0 \to \mathcal{O} \to \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \to \ldots \to \Omega^n \to 0,$$

que denominaremos *complejo de de Rham*.

Recordemos que el *p-ésimo grupo de cohomología de un complejo de cocadenas* $(C^\bullet, d^\bullet)$ se define como:

$$H^p(C^\bullet) = \frac{\ker d^p}{\operatorname{Im} d^{p-1}}.$$

Definición 1.5. Decimos que una p-forma $\omega \in \Omega^p$ es:

(a) *cerrada*, si $d\omega = 0$.

(b) *exacta*, si existe una $(p-1)$-forma $\eta \in \Omega^{p-1}$ tal que $\omega = d\eta$.

Observación. El hecho de que $d^2 = 0$ nos dice que toda forma exacta es cerrada. Sin embargo, a priori, no toda forma cerrada tendría por qué ser exacta. Esto justamente es lo que ocurre cuando trabajamos con formas definidas sobre un abierto U. Pero recordemos que para nuestros propósitos estamos tomando gérmenes de formas, de manera que si toda p-forma cerrada fuese localmente exacta (i.e. para cada punto del abierto donde esté definida existe un entorno de manera que la restricción de la forma a dicho entorno es exacta), entonces tendríamos la equivalencia entre ambos conceptos a nivel de gérmenes. Esto es justamente lo que nos dice el *Lema de Poincaré*.

Lema 1.6 (Lema de Poincaré I)**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto, si ω es una p-forma holomorfa cerrada en U con $p > 0$, entonces para cada $x \in U$ existe un entorno abierto $V \subset U$ de x y una $(p-1)$-forma η en V tal que $\omega|_V = d\eta$.*

Demostración. La prueba de este conocido resultado puede encontrarse por ejemplo en [11].

□

El Lema de Poincaré puede reformularse, en virtud de la observación anterior, en términos de la exactitud de una sucesión:

Lema 1.7 (Lema de Poincaré II)**.** *La sucesión de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales:*

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{O} \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega^n \to 0$$

es exacta.

Demostración. Por el Lema de Poincaré I y la observación anterior, tenemos la exactitud de la sucesión en grado mayor o igual que 1. Faltaría probar que $\operatorname{Im}(\mathbb{C} \to \mathcal{O}) = \mathbb{C} = \ker(d : \mathcal{O} \to \Omega^1)$. La primera igualdad es clara, pues la flecha $\mathbb{C} \to \mathcal{O}$ es una inclusión, y la segunda se tiene de que una función holomorfa f es constante si y sólo si todas sus derivadas parciales son nulas (i.e. $df = 0$).

□

Observación. Aunque para nuestro objetivo es suficiente trabajar a nivel de fibras, cuando consideramos p-formas holomorfas definidas en cada abierto U en lugar de sus gérmenes, obtenemos un haz, *el haz de las p-formas holomorfas*. El Lema de Poincaré también es cierto a nivel de haces, reemplazando cada Ω^p por su haz correspondiente, $\mathcal{O}$ por el haz de las funciones holomorfas y $\mathbb{C}$ por el haz constante.

Este lema nos permite calcular fácilmente la cohomología del complejo de de Rham:

Corolario 1.8. *Sea $C^\bullet$ el complejo de de Rham, se tiene que:*

$$H^p(C^\bullet) = \begin{cases} \mathbb{C} & \textit{si } p = 0, \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración. Es inmediato a partir del Lema de Poincaré (II), pues, por la exactitud de la sucesión, $H^p(C^\bullet) = \ker d^p / \operatorname{Im} d^{p-1} = 0$ para todo $p \geq 1$ (y claramente también para $p < 0$), y para $p = 0$, $H^0(C^\bullet) = \ker d^0 = \mathbb{C}$.

□

Estamos ya en disposición de definir la cohomología de de Rham de un $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda M:

Definición 1.9. Sea M un $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda, definimos el *complejo de de Rham de* M, que denotaremos $\mathrm{DR}(M)$, como el complejo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales:

$$0 \to M \xrightarrow{d} \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} M \xrightarrow{d} \Omega^2 \otimes_{\mathcal{O}} M \to \ldots \to \Omega^n \otimes_{\mathcal{O}} M \to 0,$$

donde la diferencial viene dada por la extensión $\mathbb{C}$-lineal de:

$$d(dx_{i_1,\ldots,i_p} \otimes m) = \sum_{j=1}^{n} (dx_j \wedge dx_{i_1,\ldots,i_p}) \otimes \partial_j m, \quad \text{para } m \in M.$$

Observación.

i) Nótese que la definición anterior permite calcular la diferencial de cualquier p-forma, pues si $\omega = g dx_{i_1,\ldots,i_p}$, entonces $d(\omega \otimes m) = d(dx_{i_1,\ldots,i_p} \otimes gm)$ por las propiedades del producto tensorial (y $gm \in M$ ya que M es, en particular, un $\mathcal{O}$-módulo a la izquierda).

ii) Una vez más, esta definición es intrínseca, independiente del sistema de coordenadas que se haya elegido.

iii) En particular, tomando $M = \mathcal{O}$ tenemos que $\Omega^p \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O} \cong \Omega^p$ para todo p a través del isomorfismo $\omega \otimes f \mapsto f\omega$, de manera que $\omega = g dx_{i_1,\dots,i_p}$ se identifica con $dx_{i_1,\dots,i_p} \otimes g$ y:

$$\begin{aligned} d\omega \equiv d(dx_{i_1,\dots,i_p} \otimes g) &= \sum_{j=1}^{n} (dx_j \wedge dx_{i_1,\dots,i_p}) \otimes \partial_j g \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\partial_j g \cdot \ dx_j \wedge dx_{i_1,\dots,i_p}\right) \otimes 1 = \left(\sum_{j=1}^{n} \partial_j g \cdot \ dx_j\right) \wedge dx_{i_1,\dots,i_p} \otimes 1 \\ &= (dg \wedge dx_{i_1,\dots,i_p}) \otimes 1 \equiv dg \wedge dx_{i_1,\dots,i_p}. \end{aligned}$$

Observamos que, tras estas identificaciones, d coincide con la diferencial del complejo de de Rham, y por tanto tenemos que $\mathrm{DR}(\mathcal{O})$ es isomorfo al complejo de de Rham.

Lema 1.10. *Dado un $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda M, el complejo de de Rham de M es, en efecto, un complejo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales.*

Demostración. Es claro por definición que d es un homomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales (como $\mathbb{C} \subset \mathcal{D}$, M es en particular un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y por tanto también lo es $\Omega^p \otimes_{\mathcal{O}} M$ para todo p). Veamos que $d^2 = 0$, lo que, por linealidad, basta comprobar sobre elementos de la forma $dx_{i_1,\dots,i_n} \otimes m$ con $m \in M$. Tenemos entonces que:

$$d^2(dx_{i_1,\dots,i_n} \otimes m) = d\left(\sum_{i=1}^{n} (dx_i \wedge dx_{i_1,\dots,i_n}) \otimes \partial_i m\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1,\dots,i_n} \otimes \partial_j \partial_i m.$$

Ahora bien, dado que $\partial_j\partial_i m = \partial_i\partial_j m$ para todo $m \in M$ y $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, los sumandos $dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1,\dots,i_n} \otimes \partial_j\partial_i m$ y $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_{i_1,\dots,i_n} \otimes \partial_i\partial_j m$ con $i \neq j$ se cancelan. Además, dado que $dx_i \wedge dx_i = 0$, los sumandos $dx_i \wedge dx_i \wedge dx_{i_1,\dots,i_n} \otimes \partial_i^2 m$ serán directamente nulos. Concluimos así que $d^2(dx_{i_1,\dots,i_n} \otimes m) = 0$ para todo $m \in M$, y por tanto que $d^2 = 0$.

□

Definición 1.11. Sea M un $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda, denominaremos *p-ésimo grupo de cohomología de de Rham de M*, y lo denotaremos por $H^p_{\mathrm{DR}}(M)$, a $H^p(\mathrm{DR}(M))$ (i.e. el p-ésimo grupo de cohomología del complejo de de Rham de M).

Nos proponemos ahora establecer un resultado que nos permita obtener los grupos de cohomología de de Rham un $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda. Para ello, necesitaremos en primer lugar introducir los *complejos de Koszul*:

Definición 1.12. Sea A un anillo conmutativo y $a_1, \dots, a_r \in A$, definimos el *complejo de Koszul asociado a* $a_1, \dots, a_r$, que denotaremos $K(a_1, \dots, a_r, A)$, como el complejo de cadenas de A-módulos libres dado por:

$$0 \longrightarrow \bigwedge^r A^r \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \bigwedge^2 A^r \xrightarrow{d} A^r \xrightarrow{d} A \longrightarrow 0,$$

donde la diferencial viene dada por la extensión A-lineal de:

$$d(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} a_{i_j} e_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \dots \wedge e_{i_p},$$

siendo e_i el i-ésimo elemento de la base canónica de A^r (que tiene un 1 en la componente i-ésima y un 0 en el resto) y donde $\widehat{e_i}$ indica que el elemento e_i no aparece en el producto.

Observación. Es inmediato comprobar a partir de la definición de la diferencial que el complejo de Koszul es, en efecto, un complejo de cadenas (por los signos introducidos en el sumatorio, en $d^2(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})$ los sumandos $e_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{i_k}} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ aparecen dos veces con signos opuestos, de manera que se cancelan).

Cuando los elementos $a_1, \dots, a_r$ son adecuados, el complejo de Koszul resulta ser una resolución libre del A-módulo $A/A(a_1, \dots, a_r)$. Formalicemos esta afirmación:

Definición 1.13. Sea A un anillo conmutativo y $a_1, \dots, a_r \in A$, decimos que $(a_1, \dots, a_r)$ es una *sucesión regular en* A si a_1 no es divisor de cero de A y a_k no es divisor de cero de $A/A(a_1, \dots, a_{k-1})$ para todo $k = 2, \dots, r$ (si $r \geq 2$).

Proposición 1.14. *Sea A un anillo conmutativo y $(a_1, \dots, a_r)$ una sucesión regular en A, entonces $K(a_1, \dots, a_r, A)$ es una resolución libre de $A/A(a_1, \dots, a_r)$.*

Demostración. Puede encontrarse en [30] (Corolario 4.5.5).

□

El ejemplo más inmediato de sucesión regular lo da la siguiente proposición:

Proposición 1.15. *Sea A un anillo conmutativo y $R = A[x_1, \dots, x_n]$ un anillo de polinomios en n variables, entonces $(x_1, \dots, x_n)$ es una sucesión regular en R.*

Demostración. Veamos en primer lugar que x_1 no es un divisor de cero de R: supongamos que $f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in R$ es tal que $x_1 f = \sum_\alpha c_\alpha x_1 x^\alpha = 0$. Como un polinomio es nulo si y sólo si sus coeficientes son nulos, deducimos que $c_\alpha = 0$ para todo α, de donde $f = 0$ y por tanto x_1 no es divisor de cero de R.

Veamos ahora que, dado $k \geq 2$, x_k no es divisor de cero de $R/R(x_1, \dots, x_{k-1})$. Para ello, sea $\overline{f} \in R/R(x_1, \dots, x_{k-1})$, podemos tomar el representante $f = \sum_\alpha c_{0\alpha} x^{0\alpha}$, donde 0α designa el multiíndice $(0, \alpha) \in \mathbb{N}^{k-1} \times \mathbb{N}^{n-k+1}$ (de manera que f no tiene ningún término en $x_1, \dots, x_{k-1}$). Si $x_k \overline{f} = \overline{\sum_\alpha c_{0\alpha} x_k x^{0\alpha}} = 0$, entonces $\sum_\alpha c_{0\alpha} x_k x^{0\alpha} \in R(x_1, \dots, x_{k-1})$, lo que es posible si y sólo si todos los $c_{0\alpha}$ son nulos, de donde $\overline{f} = 0$ y por tanto x_k no es divisor de cero de $R/R(x_1, \dots, x_{k-1})$.

Concluimos que la sucesión $(x_1, \dots, x_n)$ es regular en R.

□

Definimos ahora los *complejos de Koszul a izquierda y derecha* de un $\mathcal{D}$-módulo:

Definición 1.16. Sean $a_1, \ldots, a_r \in \mathcal{D}$ que conmutan dos a dos, M un $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda y Q un $\mathcal{D}$-módulo a la derecha, definimos:

(a) El *complejo de Koszul de Q a la izquierda asociado a* $a_1, \ldots, a_r$ como el complejo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales (y de $\mathcal{D}$-módulos a la izquierda si Q es un $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$-bimódulo) $K_i(a_1, \ldots, a_r, Q)$ dado por:

$$0 \longrightarrow Q \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^r \mathbb{C}^r \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} Q \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^2 \mathbb{C}^r \xrightarrow{d} Q \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^r \xrightarrow{d} Q \longrightarrow 0,$$

donde la diferencial viene dada por la extensión $\mathbb{C}$-lineal ($\mathcal{D}$-lineal a la izquierda si Q es un $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$-bimódulo) de:

$$d(q \otimes e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} q a_{i_j} \otimes e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}.$$

(b) El *complejo de Koszul de M a la derecha asociado a* $a_1, \ldots, a_r$ como el complejo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales (y de $\mathcal{D}$-módulos a la derecha si M es un $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$-bimódulo) $K_d(a_1, \ldots, a_r, M)$ dado por:

$$0 \longrightarrow M \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^r \mathbb{C}^r \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} M \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^2 \mathbb{C}^r \xrightarrow{d} M \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^r \xrightarrow{d} M \longrightarrow 0,$$

donde la diferencial viene dada por la extensión $\mathbb{C}$-lineal ($\mathcal{D}$-lineal a la derecha si M es un $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$-bimódulo) de:

$$d(m \otimes e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} a_{i_j} m \otimes e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}.$$

Observación. Al igual que ocurre con el complejo de Koszul usual, es fácil comprobar que esta definición da lugar a un complejo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales. Además, si se trata de un $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$-bimódulo (como sería el caso de $\mathcal{D}$, por ejemplo), entonces resulta un complejo de $\mathcal{D}$-módulos a su lado correspondiente (de ahí que se denominen complejos de Koszul a la izquierda y a la derecha).

Para establecer la exactitud de algunos complejos de Koszul necesitamos introducir los complejos filtrados y sus complejos graduados asociados. Recordemos en primer lugar algunos conceptos relacionados:

- Un anillo A se dice *graduado* si puede escribirse como una suma directa de grupos aditivos:

$$A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n,$$

que verifican $A_m \cdot A_n \subseteq A_{m+n}$ para cualesquiera $m, n \geq 0$ (en particular, A_0 es un subanillo de A).

- Dado un anillo graduado $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ y un A-módulo a la izquierda M, se dice que M es un A-*módulo graduado* si puede escribirse como una suma directa de grupos aditivos:

$$M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n,$$

que verifican $A_m \cdot M_n \subseteq M_{m+n}$ para cualesquiera $m, n \geq 0$.

- Una *filtración* de un módulo M es una familia $\{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de submódulos de M tal que $M_k \subset M_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $M = \cup_{k\in\mathbb{Z}} M_k$. Si además existe un cierto $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $M_k = 0$ para todo $k < k_0$, se dice que la filtración es *discreta*. Un módulo dotado de una filtración se denomina *módulo filtrado*.

- Dado un módulo M dotado con una filtración $\{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, se define el *módulo graduado asociado a la filtración* como:

$$\operatorname{gr} M = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \frac{M_k}{M_{k-1}}.$$

Definición 1.17. Sea A un anillo filtrado, $(C_\bullet, d_\bullet)$ un complejo de cadenas de A-módulos filtrados y $F_k C_i$ el k-ésimo término de la filtración de C_i, diremos que $(C_\bullet, d_\bullet)$ es un *complejo filtrado* si para todo k y todo i, la diferencial d^i lleva $F_k C_i$ en $F_k C_{i-1}$.

Definición 1.18. Sea A un anillo filtrado y $(C_\bullet, d_\bullet)$ un complejo filtrado de A-módulos, definimos el *complejo graduado asociado a* $(C_\bullet, d_\bullet)$, que denotamos $\operatorname{gr} C_\bullet$, como el complejo:

$$\ldots \xrightarrow{d} \operatorname{gr} C_{i+1} \xrightarrow{d} \operatorname{gr} C_i \xrightarrow{d} \operatorname{gr} C_{i-1} \xrightarrow{d} \ldots,$$

donde la diferencial $d : \operatorname{gr} C_i \to \operatorname{gr} C_{i-1}$ es la inducida por la de $C^\bullet$:

$$d\left(\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (c_k + F_{k-1} C_i)\right) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (dc_k + F_{k-1} C_{i-1}).$$

Lema 1.19. *Sea $(C_\bullet, d_\bullet)$ un complejo filtrado donde cada término está dotado de una filtración discreta y tal que* $\operatorname{gr} C_\bullet$ *es exacto, entonces $C_\bullet$ también es exacto.*

Demostración. Sea $v \in C_k$ tal que $dv = 0$, hemos de encontrar $w \in C_{k+1}$ tal que $dw = v$. Como C_k está filtrado, existe un cierto p tal que $v \in F_pC_k$. Veámoslo por inducción en p (supongamos sin pérdida de generalidad que el primer término de la filtración es F_0C_k):

Para $p = 0$, dado que $F_{-1}C_k = 0$, tenemos que $\bar{v} = v \in \operatorname{gr} C_k$ y $d\bar{v} = dv = 0$. Por exactitud, existe $w = \sum_i(w_i + F_{i-1}C_{k+1}) \in \operatorname{gr} C_{k+1}$ tal que $dw = v$. De esta forma, $d\omega_0 = v$ con $\omega_0 \in F_0C_{k+1}$.

Supongámoslo cierto para $p-1$ y veamos que se tiene para p: sea $\bar{v} = v + F_{p-1}C_k \in \operatorname{gr} C_k$, tenemos que $d\bar{v} = dv + F_{p-1}C_{k-1} = 0$. Por ser $\operatorname{gr} C_\bullet$ exacto, existe $\bar{z} = z + F_{p-1}C_{k+1}$ tal que $d\bar{z} = \bar{v}$, de manera que $v - dz \in F_{p-1}C_k$. Además, $d(v - dz) = dv - d^2z = 0$, luego por hipótesis de inducción existe $a \in C_{k+1}$ tal que $v - dz = da$, de manera que $v = d(a + z) \in \operatorname{Im} d_{k+1}$, probando así la exactitud de $C_\bullet$.

□

La siguiente proposición establece que algunos complejos de Koszul son resoluciones libres de ciertos $\mathcal{D}$-módulos, lo que nos servirá para obtener las cohomologías de de Rham de algunos $\mathcal{D}$-módulos:

Proposición 1.20. *Se tiene que:*

(1) $K_i(\partial_1, \ldots, \partial_n, \mathcal{D})$ es una resolución libre de $\mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ de $\mathcal{D}$-módulos a la izquierda.

(2) $K_d(\partial_1, \ldots, \partial_n, \mathcal{D})$ es una resolución libre de $\mathcal{D}/(\partial_1, \ldots, \partial_n)\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}$-módulos a la derecha.

(3) $K_i(x_1, \ldots, x_n, \mathcal{D})$ es una resolución libre de $\mathcal{D}/\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{D}$-módulos a la izquierda.

Demostración.

(1) Sea $\{F_k\mathcal{D}\}_{k\geq 0}$ la filtración de $\mathcal{D}$ establecida por el orden de un operador (donde $F_k\mathcal{D}$ es el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de los operadores diferenciales lineales de orden menor o igual que k), dado $p \in \{1, \ldots, n\}$ consideramos la siguiente filtración de $\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n$:

$$F_k\left(\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n\right) = F_{k-p}\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n, \quad k \geq p.$$

Es claro que se tiene $F_k\left(\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n\right) \subseteq F_{k+1}\left(\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n\right)$ para todo $k \geq p$ y $\bigcup_{k\geq p} F_k\left(\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n\right) = \mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n$ por ser $\{F_k\mathcal{D}\}_{k\geq 0}$ una filtración de $\mathcal{D}$, luego en efecto $\{F_k\left(\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n\right)\}_{k\geq p}$ constituye una filtración de $\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n$.

Pero además, dado $P \otimes e_{i_1,\ldots,i_p} \in F_k\left(\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n\right)$ (siendo $e_{i_1,\ldots,i_p} = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$):

$$d(P \otimes e_{i_1,\dots,i_p}) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} P\partial_{i_j} \otimes e_{i_1,\dots,\widehat{i_j},\dots,i_p}$$

y dado que $\operatorname{ord}(P\partial_{i_j}) = \operatorname{ord} P + \operatorname{ord} \partial_{i_j} = k-p+1$ para todo $j = 1,\dots,p$, tenemos que $d(P \otimes e_{i_1,\dots,i_p}) \in F_{k-p+1}\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^{p-1} \mathbb{C}^n = F_k(\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^{p-1} \mathbb{C}^n)$, de manera que $K_i(\partial_1,\dots,\partial_n,\mathcal{D})$ es un complejo filtrado.

Consideremos ahora K' el complejo $K_i(\partial_1,\dots,\partial_n,\mathcal{D})$ aumentado con la flecha $d_0 : \mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial_1,\dots,\partial_n)$ dada por la proyección canónica sobre el cociente (dado que $\operatorname{Im}(d_1 : \mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n \to \mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}(\partial_1,\dots,\partial_n)$, tenemos que $d_0 \circ d_1 = 0$, luego K' sigue siendo un complejo). Sea $F_k(\mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial_1,\dots,\partial_n)) = \mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial_1,\dots,\partial_n)$ para $k \geq 0$ la filtración trivial, es claro que la diferencial lleva $F_k\mathcal{D}$ en $F_k(\mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial_1,\dots,\partial_n))$, luego K' sigue siendo un complejo filtrado y podemos considerar su complejo graduado $\operatorname{gr} K'$. Su p-ésimo término será:

$$\begin{aligned}\operatorname{gr}(\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge\nolimits^{p} \mathbb{C}^n) &= \bigoplus_{k\geq p} \frac{F_{k-p}\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n}{F_{k-p-1}\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n} \cong \left(\bigoplus_{k \geq p} \frac{F_{k-p}\mathcal{D}}{F_{k-p-1}\mathcal{D}} \right) \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^{p} \mathbb{C}^n \\ &= \operatorname{gr}\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge\nolimits^{p} \mathbb{C}^n \cong \operatorname{gr}\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{\binom{n}{p}} \cong (\operatorname{gr}\mathcal{D})^{\binom{n}{p}} \cong \bigwedge\nolimits^{p} (\operatorname{gr}\mathcal{D})^n,\end{aligned}$$

donde se identifican los elementos:

$$\bigwedge\nolimits^{p} (\operatorname{gr}\mathcal{D})^n \ni \left(\bigoplus_{k\geq 0} \sigma_k(P_k) \right) e_{i_1,\dots,i_p} \equiv \bigoplus_{k\geq 0} \overline{P_k \otimes e_{i_1,\dots,i_p}} \in \operatorname{gr}(\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge\nolimits^{p} \mathbb{C}^n),$$

siendo $\sigma_k(P)$ el símbolo de P (i.e. la clase de P en $F_{k-1}\mathcal{D}$). La diferencial de K' inducida por la de $K_i(\partial_1,\dots,\partial_n,\mathcal{D})$ lleva el elemento $\bigoplus_{k\geq 0} \overline{P_k \otimes e_{i_1,\dots,i_p}}$ en $\bigoplus_{k\geq 0} \left(\sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} \overline{P_k\partial_{i_j} \otimes e_{i_1,\dots,\widehat{i_j},\dots,i_p}} \right)$, que a través de las identificaciones anteriores se corresponde con la diferencial $d : \bigwedge^p (\operatorname{gr}\mathcal{D})^n \to \bigwedge^{p-1} (\operatorname{gr}\mathcal{D})^n$ dada por:

$$\begin{aligned} d\left(\left(\bigoplus_{k\geq 0} \sigma_k(P_k) \right) e_{i_1,\dots,i_p} \right) &= \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} \left(\bigoplus_{k\geq 0} \sigma_{k+1}(P_k\partial_{i_j}) \right) e_{i_1,\dots,\widehat{i_j},\dots,i_p} \\ &= \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} \left(\bigoplus_{k\geq 0} \sigma_k(P_k)\sigma_1(\partial_{i_j}) \right) e_{i_1,\dots,\widehat{i_j},\dots,i_p} \\ &= \left(\bigoplus_{k\geq 0} \sigma_k(P_k) \right) \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} \sigma_1(\partial_{i_j}) e_{i_1,\dots,\widehat{i_j},\dots,i_p}. \end{aligned}$$

Si recordamos que $\operatorname{gr}\mathcal{D} = \mathcal{O}[\xi_1,\dots,\xi_n]$ con $\xi_i = \sigma_1(\partial_i)$, vemos que coincide con la diferencial del complejo de Koszul $K(\xi_1,\dots,\xi_n,\operatorname{gr}\mathcal{D})$.

En grado -1, dado que la filtración es trivial, el correspondiente término de $\operatorname{gr} K'$ es $\operatorname{gr}(\mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial_1, \ldots, \partial_n)) = \mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial_1, \ldots, \partial_n)$, de manera que la flecha $\operatorname{gr}(\mathcal{D}) \to \mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ envía $\bigoplus_{k\geq 0} \sigma_k(P_k)$ en $\overline{P_0} = P_0 + \mathcal{D}(\partial_1, \ldots, \partial_n)$. Se corresponde por tanto con la aumentación del complejo de Koszul $K(\xi_1, \ldots, \xi_n, \operatorname{gr}\mathcal{D}) \to \operatorname{gr}\mathcal{D}/(\operatorname{gr}\mathcal{D})(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ dada por la proyección canónica. Así, $\operatorname{gr} K'$ es isomorfo a este complejo de Koszul aumentado.

Ahora, por la Proposición 1.15, $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ es una sucesión regular de $\operatorname{gr}\mathcal{D}$, de manera que según la Proposición 1.14, $K(\xi_1, \ldots, \xi_n, \operatorname{gr}\mathcal{D})$ es una resolución libre de $\operatorname{gr}\mathcal{D}/(\operatorname{gr}\mathcal{D})(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, o dicho de otra manera, el complejo aumentado $K(\xi_1, \ldots, \xi_n, \operatorname{gr}\mathcal{D}) \to \operatorname{gr}\mathcal{D}/(\operatorname{gr}\mathcal{D})(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ es exacto. Como este complejo es isomorfo a $\operatorname{gr} K'$, deducimos que $\operatorname{gr} K'$ también es exacto. Por último, aplicamos el Lema 1.19 para deducir que K' también es exacto, o lo que es lo mismo, que $K_i(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ es una resolución libre de $\mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial_1, \ldots, \partial_n)$.

(2) La prueba es totalmente análoga a la anterior. Esta vez el complejo $K_d(\partial_1, \ldots, \partial_n, \mathcal{D})$ se aumenta con la flecha $\mathcal{D} \to \mathcal{D}/(\partial_1, \ldots, \partial_n)\mathcal{D}$, dando lugar a un complejo K' cuyo graduado es exacto por ser isomorfo al mismo complejo de Koszul aumentado anterior (el hecho de que ahora la multiplicación por ∂_i se haga por la izquierda no tiene efecto sobre el graduado porque ya es conmutativo). Entonces, K' es exacto y por tanto $K_d(\partial_1, \ldots, \partial_n, \mathcal{D})$ es una resolución libre de $\mathcal{D}/(\partial_1, \ldots, \partial_n)\mathcal{D}$.

(3) La idea es la misma que la de los apartados anteriores. Tenemos que encontrar una filtración del complejo aumentado $K' = K_i(x_1, \ldots, x_n, \mathcal{D}) \to \mathcal{D}/\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$. Para ello, volvemos a usar la filtración por el orden de $\mathcal{D}$ y definimos la filtración sobre $\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n$ como:

$$F_k(\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n) = F_k\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n, \quad k \geq 0.$$

Es claro que esta definición da lugar a una filtración de $\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n$, que además es respetada por las diferenciales, pues si $P \otimes e_{i_1,\ldots,i_n} \in F_k(\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n)$, entonces:

$$d(P \otimes e_{i_1,\ldots,i_n}) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} P x_{i_j} \otimes e_{i_1,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_p} \in F_k\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^{p-1} \mathbb{C}^n = F_k(\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^{p-1} \mathbb{C}^n),$$

ya que la multiplicación por x_i no aumenta el orden del operador. Sobre el $\mathcal{D}$-módulo $\mathcal{D}/\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$ volvemos a definir la filtración trivial, de manera que la diferencial $d_0 : \mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$ la respete trivialmente.

Nuevamente, el complejo $\operatorname{gr} K'$ tiene por p-ésimo término a $\operatorname{gr}(\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n) \cong \bigwedge^p (\operatorname{gr}\mathcal{D})^n$ y la diferencial se corresponde (teniendo en cuenta que $\sigma_k(P_k x_i) = \sigma_k(P_k)\sigma_0(x_i) = \sigma_k(P_k)x_i$ ya que $x_i \in \mathcal{O}$) con la de $K(x_1, \ldots, x_n, \operatorname{gr}\mathcal{D})$. Del mismo modo, el término en grado -1 de $\operatorname{gr} K'$ es $\mathcal{D}/\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$ y la diferencial $d : \operatorname{gr}\mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$ también se corresponde con la del complejo de Koszul aumentado $K_A = K(x_1, \ldots, x_n, \operatorname{gr}\mathcal{D}) \to \operatorname{gr}\mathcal{D}/(\operatorname{gr}\mathcal{D})(x_1, \ldots, x_n)$.

Por tanto, los complejos $\operatorname{gr} K'$ y K_A son isomorfos. Ahora bien, como $(x_1, \ldots, x_n)$ es una sucesión regular en $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ (por un razonamiento totalmente análogo al de la prueba de la Proposición 1.15, con series convergentes en lugar de polinomios), entonces es fácil ver que también lo es en $\operatorname{gr}\mathcal{D} = \mathcal{O}[\xi_1 \dots, \xi_n]$ (por ser este un $\mathcal{O}$-módulo libre, y en particular plano). Así, K_A es exacto, lo que implica la exactitud de $\operatorname{gr} K'$ y por tanto de K'. Concluimos que $K_i(x_1, \dots, x_n, \mathcal{D})$ es una resolución libre de $\mathcal{D}/\mathcal{D}(x_1, \dots, x_n)$.

□

Proposición 1.21. *Sea M un $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda, para todo $p \geq 0$ se tienen los isomorfismos (de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales):*

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M) \cong \operatorname{Ext}^p_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}, M) \cong \operatorname{Tor}^{\mathcal{D}}_{n-p}(\Omega^n, M).$$

Demostración. Consideremos el homomorfismo de $\mathcal{D}$-módulos $\phi : \mathcal{D} \to \mathcal{O}$ que a cada $P = \sum_\alpha a_\alpha \partial^\alpha$ le asocia el término $P(1) = a_0 \in \mathcal{O}$ (obsérvese que en particular es un homomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales, ya que $\phi(c) = c$ para todo $c \in \mathbb{C}$). Es claro que $\ker\phi$ es el ideal generado por $\partial_1, \dots, \partial_n$ y que $\operatorname{Im}\phi = \mathcal{O}$ (pues $\phi(f) = f$ para cualquier $f \in \mathcal{O}$). Por el primer teorema de isomorfía tenemos entonces que $\mathcal{O} \cong \mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial_1, \dots, \partial_n)$ (como $\mathcal{D}$-módulos a la izquierda).

Por otro lado, por la Proposición 1.20 sabemos que el complejo de Koszul $K_i(\partial_1, \dots, \partial_n, \mathcal{D})$ es una resolución libre de $\mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial_1, \dots, \partial_n)$, y por tanto también de $\mathcal{O}$. De esta manera:

$$\operatorname{Ext}^p_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}, M) = H^p\left(\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(K_i(\partial_1, \dots, \partial_n, \mathcal{D}), M)\right).$$

Probemos ahora que los complejos $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(K_i(\partial_1, \dots, \partial_n, \mathcal{D}), M)$ y $\mathrm{DR}(M)$ son isomorfos:

En primer lugar observamos que tenemos los siguientes isomorfismos de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales:

- $\Omega^p \otimes_{\mathcal{O}} M = \bigwedge^p \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} M \cong \bigwedge^p \mathcal{O}^n \otimes_{\mathcal{O}} M \cong \mathcal{O}^{\binom{n}{p}} \otimes_{\mathcal{O}} M \cong M^{\binom{n}{p}}$,
- $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n, M) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{\binom{n}{p}}, M) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{D}^{\binom{n}{p}}, M\right) \cong M^{\binom{n}{p}}$,

de manera que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n, M) \cong \Omega^p \otimes_{\mathcal{O}} M$ y $\phi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n, M)$ se identifica a través de esta cadena de isomorfismos con:

$$\sum_{(i_1,\dots,i_p)\in I_p} dx_{i_1,\dots,i_p} \otimes \phi(1 \otimes e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) \in \Omega^p \otimes M.$$

Llamemos φ_p a este isomorfismo y comprobemos que las diferenciales se corresponden. Por un lado:

$$\begin{aligned}(d \circ \varphi_p)\phi &= d\left(\sum_{(i_1,\dots,i_p)\in I_p} dx_{i_1,\dots,i_p} \otimes \phi(1 \otimes e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{(i_1,\dots,i_p)\in I_p} dx_j \wedge dx_{i_1,\dots,i_p} \otimes \partial_j\phi(1 \otimes e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}).\end{aligned}$$

Y por otro:

$$
\begin{aligned}
(\varphi_{p+1} \circ d)\phi &= \sum_{(i_1,\ldots,i_{p+1})\in I_{p+1}} dx_{i_1,\ldots,i_{p+1}} \otimes d\phi(1 \otimes e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{p+1}}) \\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_{p+1})\in I_{p+1}} dx_{i_1,\ldots,i_{p+1}} \otimes \phi \left(\sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} \partial_{i_j} \otimes e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \ldots \wedge e_{i_{p+1}} \right) \\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_{p+1})\in I_{p+1}} \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+1} dx_{i_1,\ldots,i_{p+1}} \otimes \partial_{i_j}\phi(1 \otimes e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \ldots \wedge e_{i_{p+1}}),
\end{aligned}
$$

donde hemos usado que ϕ es $\mathcal{D}$-lineal. Dado que $dx_j \wedge dx_{i_1,\ldots,i_p} = 0$ si $j \in \{i_1, \ldots, i_p\}$, podemos considerar $j \neq i_1, \ldots, i_p$, de manera que si j va en el puesto k_j en la ordenación (i.e. j es el k_j-ésimo número más pequeño entre $i_1, \ldots, i_p, j$), podemos renombrar $i_1, \ldots, i_p$ como $i_1, \ldots, i_{k_j-1}, i_{k_j+1}, \ldots, i_{p+1}$ y tomar $i_{k_j} = j$, teniendo así un elemento $(i_1, \ldots, i_{p+1}) \in I_{p+1}$. Tras renombrar todos los índices de la suma, tendremos $p+1$ veces cada elemento $(i_1, \ldots, i_{p+1})$, una por cada $k_j = 1, \ldots, p+1$. Por las propiedades del producto exterior y dado que $(-1)^{k_j-1} = (-1)^{k_j+1}$, se tendrá que:

$$
dx_j \wedge dx_{i_1,\ldots,i_p} = (-1)^{k_j+1} dx_{i_1,\ldots,i_{k_j-1},j,i_{k_j+1},\ldots,i_{p+1}} = (-1)^{k_j+1} dx_{i_1,\ldots,i_{p+1}}.
$$

Del mismo modo, $\partial_j\phi(1 \otimes e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p})$ se escribirá ahora:

$$
\partial_{i_{k_j}}\phi(1 \otimes e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{e_{i_{k_j}}} \wedge \ldots \wedge e_{i_{p+1}}),
$$

de manera que ambas expresiones son iguales (donde k_j en la primera expresión hace las veces de j en la segunda). Así:

$$
H^p_{\mathrm{DR}}(M) = H^p(\mathrm{DR}(M)) \cong H^p\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(K_i(\partial_1, \ldots, \partial_n, \mathcal{D}), M)\right) = \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}, M),
$$

y tenemos el primero de los isomorfismos.

Para la segunda parte de la prueba, consideremos el homomorfismo de $\mathcal{D}$-módulos a la derecha (en particular de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales) $\psi : \mathcal{D} \to \Omega^n$ dado por $\psi(P) = dx \cdot P = P^{\#}(1)dx$ (el hecho de que sea un homomorfismo se tiene de la estructura de $\mathcal{D}$-módulo a la derecha de Ω^n). Es claro que ψ es sobreyectivo, pues dada $\omega = gdx \in \Omega^n$, tenemos que $\psi(g) = dx \cdot g = g^{\#}(1)dx = g(1)dx = gdx = \omega$. Sea ahora $P \in \mathcal{D}$, podemos escribir $P = a_0 + \partial_1 D_1 + \ldots + \partial_n D_n$ con $a_0 \in \mathcal{O}$ y $D_i \in \mathcal{D}$ para todo $i = 1, \ldots, n$ (mediante las reglas de conmutación), de manera que $P \in \ker\psi \iff P^{\#}(1) = 0 \iff a_0 - (D_1^{\#}\partial_1 + \ldots + D_n^{\#}\partial_n)(1) = a_0 = 0 \iff P \in (\partial_1, \ldots, \partial_n)\mathcal{D}$ y por tanto $\ker\psi = (\partial_1, \ldots, \partial_n)\mathcal{D}$. Entonces, por el primer teorema de isomorfía, tenemos el isomorfismo de $\mathcal{D}$-módulos a la derecha:

$$
\Omega^n \cong \frac{\mathcal{D}}{(\partial_1, \ldots, \partial_n)\mathcal{D}}.
$$

Por la Proposición 1.20, sabemos que $K_d(\partial_1, \ldots, \partial_n, \mathcal{D})$ es una resolución libre del $\mathcal{D}$-módulo $\mathcal{D}/(\partial_1, \ldots, \partial_n)\mathcal{D}$, y por tanto de Ω^n, por lo que acabamos de probar. De esta manera, tenemos que $\mathrm{Tor}^{\mathcal{D}}_{n-p}(\Omega^n, M) = H_{n-p}\left(K_d(\partial_1, \ldots, \partial_n, \mathcal{D}) \otimes_{\mathcal{D}} M\right)$.

Veamos entonces que los complejos $\mathrm{DR}(M)$ y $K_d(\partial_1, \ldots, \partial_n, \mathcal{D}) \otimes_{\mathcal{D}} M$ son isomorfos (identificando los términos p y $n-p$, ya que uno es un complejo de cadenas y el otro lo es de cocadenas). Primero observamos que:

- $\Omega^{n-p} \otimes_{\mathcal{O}} M \cong M^{\binom{n}{n-p}} = M^{\binom{n}{p}}$,
- $\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n \otimes_{\mathcal{D}} M \cong \bigwedge^p \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{D}} M \cong \bigwedge^p \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} M \cong M^{\binom{n}{p}}$,

de manera que $\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n \otimes_{\mathcal{D}} M \cong \Omega^{n-p} \otimes_{\mathcal{O}} M$, identificando $P \otimes e_{i_1,\ldots,i_p} \otimes m$ con $\mathrm{sg}(\sigma_{i_1,\ldots,i_p}) dx_{\overline{i_1,\ldots,i_p}} \otimes Pm$, siendo $\overline{i_1,\ldots,i_p}$ el elemento de I_{n-p} complementario a $(i_1, \ldots, i_p)$, es decir, el elemento $(k_1, \ldots, k_{n-p}) \in I_{n-p}$ tal que $k_i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_p\}$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y $\mathrm{sg}(\sigma_{i_1,\ldots,i_p})$ el signo de la permutación $\sigma_{i_1,\ldots,i_p} = (i_p, \ldots, i_1, k_1, \ldots, k_{n-p})$.

Veamos que las diferenciales se corresponden. La diferencial de $K_d(\partial_1, \ldots, \partial_n, \mathcal{D}) \otimes_{\mathcal{D}} M$ envía $P \otimes e_{i_1,\ldots,i_p} \otimes m$ en $\sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} \partial_{i_j} P \otimes e_{i_1,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_p} \otimes m$ (donde estamos denotando $e_{i_1,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_p} = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$), que se identifica con:

$$\sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} \mathrm{sg}(\tau_j) dx_{\overline{i_1,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_p}} \otimes \partial_{i_j} Pm, \tag{1.1}$$

siendo $\tau_j = (i_p, \ldots, \widehat{i_j}, \ldots, i_1, k_1, \ldots, k_{n-p+1})$.

Por otro lado, $P \otimes e_{i_1,\ldots,i_p} \otimes m$ se identifica con $\mathrm{sg}(\sigma_{i_1,\ldots,i_p}) dx_{\overline{i_1,\ldots,i_p}} \otimes Pm$, que es enviado por la diferencial de $\mathrm{DR}(M)$ en:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{sg}(\sigma_{i_1,\ldots,i_p}) dx_j \wedge dx_{\overline{i_1,\ldots,i_p}} \otimes \partial_j Pm. \tag{1.2}$$

Ver que las diferenciales conmutan se reduce entonces a ver que las expresiones (1.1) y (1.2) son idénticas. Para ello, observamos que en (1.2), los sumandos con $j \neq i_r$ para algún r son nulos, puesto que en $dx_{\overline{i_1,\ldots,i_p}}$ aparecerá dx_j y por tanto $dx_j \wedge dx_{\overline{i_1,\ldots,i_p}} = 0$. Bastará entonces comprobar que $(-1)^{j+1} \mathrm{sg}(\tau_j) dx_{\overline{i_1,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_p}} = \mathrm{sg}(\sigma_{i_1,\ldots,i_p}) dx_{i_j} \wedge dx_{\overline{i_1,\ldots,i_p}}$ para todo $j = 1, \ldots, p$.

Si $i_j = s$, entonces $i_1, \ldots, i_{j-1} \in \{1, \ldots, s-1\}$ y por tanto habrá $s - j$ índices menores que s que no formarán parte de $i_1, \ldots, i_j$, de manera que al eliminar s de estos índices, pasará a tener la etiqueta k_{s-j+1}. Así, pasar de $dx_{i_j} \wedge dx_{\overline{i_1,\ldots,i_p}}$ a $dx_{\overline{i_1,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_p}}$ requerirá de $s - j$ saltos, luego $dx_{i_j} \wedge dx_{\overline{i_1,\ldots,i_p}} = (-1)^{s-j} dx_{\overline{i_1,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_p}}$. Además, pasar de $\sigma_{i_1,\ldots,i_p}$ a τ_j requerirá de $j - 1 + s - j = s - 1$ saltos ($j - 1$ para llevar i_j entre i_1 y k_1 y otros $s - j$ para llevar i_j al puesto k_{s-j+1}), de manera que $\mathrm{sg}(\tau_j) = (-1)^{s-1} \mathrm{sg}(\sigma_{i_1,\ldots,i_p})$. De todo esto concluimos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sg}(\sigma_{i_1,\dots,i_p}) dx_{i_j} \wedge dx_{\overline{i_1,\dots,i_p}} &= \operatorname{sg}(\sigma_{i_1,\dots,i_p})(-1)^{s-j} dx_{\overline{i_1,\dots,\widehat{i_j},\dots,i_p}} \\
&= (-1)^{-2j}(-1)^{j+1}(-1)^{s-1}\operatorname{sg}(\sigma_{i_1,\dots,i_p}) dx_{\overline{i_1,\dots,\widehat{i_j},\dots,i_p}} \\
&= (-1)^{j+1}\operatorname{sg}(\tau_j) dx_{\overline{i_1,\dots,\widehat{i_j},\dots,i_p}},
\end{aligned}$$

y por tanto que $\mathrm{DR}(M) \cong K_d(\partial_1,\dots,\partial_n,\mathcal{D}) \otimes_{\mathcal{D}} M$ (con el correspondiente desplazamiento). Finalmente:

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M) = H^p(\mathrm{DR}(M)) \cong H_{n-p}(K_d(\partial_1,\dots,\partial_n,\mathcal{D}) \otimes_{\mathcal{D}} M) = \mathrm{Tor}^{\mathcal{D}}_{n-p}(\Omega^n, M).$$

□

Este resultado nos permite obtener de manera inmediata los grupos de cohomología de de Rham de $\mathcal{D}$ (visto como $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda):

Corolario 1.22. *Se tiene que:*

$$H^p_{\mathrm{DR}}(\mathcal{D}) \cong \begin{cases} \Omega^n & \textit{si } p = n, \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración. Observemos que:

$$\mathrm{Tor}^{\mathcal{D}}_p(\Omega^n, \mathcal{D}) = \begin{cases} \Omega^n \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{D} \cong \Omega^n & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

por ser $\mathcal{D}$ un $\mathcal{D}$-módulo libre. Entonces, por el resultado anterior aplicado a $M = \mathcal{D}$ concluimos que:

$$H^p_{\mathrm{DR}}(\mathcal{D}) \cong \mathrm{Tor}^{\mathcal{D}}_{n-p}(\Omega^n, \mathcal{D}) \cong \begin{cases} \Omega^n & \text{si } p = n, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

□

Corolario 1.23. *Se tiene que:*

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \cong \begin{cases} \mathbb{C} & \textit{si } p = 0, \\ 0 & \textit{en caso contrario,} \end{cases}$$

Demostración. Aplicamos el primer isomorfismo de la Proposición 1.21 a $M = \mathcal{O}$, de manera que $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \cong H^p_{\mathrm{DR}}(\mathcal{O})$. Pero ya hemos visto que $\mathrm{DR}(\mathcal{O})$ es justamente el complejo de de Rham, cuya cohomología se calculó en el Corolario 1.8. Concluimos que:

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \cong \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

como queríamos.

□

1.3. $\mathcal{D}$-módulos con soporte en el origen

Introducimos en esta sección un tipo particular de $\mathcal{D}$-módulos que resultarán fundamentales en lo que sigue: los *$\mathcal{D}$-módulos con soporte en el origen*.

Definición 1.24. Sea M un $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda, se dice que M es un $\mathcal{D}$-módulo *con soporte en el origen* si para todo $m \in M$ y todo $i = 1, \ldots, n$, existe un cierto $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_i^p m = 0$ (es decir, existe un cierto $p \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^p m = 0$).

Veamos que, en realidad, basta que la condición anterior se verifique sobre un sistema de generadores de M:

Proposición 1.25. *Sea M un $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda y $\{a_j\}_{j \in I}$ un sistema de generadores de M, entonces M es un $\mathcal{D}$-módulo con soporte en el origen si y sólo si para todo $j \in I$ y para todo $i = 1, \ldots, n$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_i^p a_j = 0$.*

Demostración. Es claro que si M es un $\mathcal{D}$-módulo con soporte en el origen, entonces, en particular, se verifica la condición para los generadores de M. Para probar el recíproco, consideremos un elemento arbitrario a del sistema de generadores. Por hipótesis, para todo $i = 1, \ldots, n$ existe un cierto p tal que $x_i^p a = 0$. Entonces, por las reglas de conmutación:

- Dada $f \in \mathcal{O}$, $x_i^p f a = f x_i^p a = 0$.
- $x_i^p \partial_j^k a = \partial_j^k x_i^p a = 0$ para todo $j \neq i$ y todo $k \geq 0$.
- $x_i^{p+k} \partial_i^k a = 0$ para todo entero $k \geq 0$. Veámoslo por inducción: para $k = 0$, $x_i^p a = 0$ por hipótesis, y supuesto cierto para $k - 1$, observamos en primer lugar que:

$$\partial_i x_i^r - x_i^r \partial_i = [\partial_i, x_i^r] = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i^r) = r x_i^{r-1},$$

de manera que $x_i^r \partial_i = \partial_i x_i^r - r x_i^{r-1}$ para todo $r \geq 1$. De aquí:

$$\begin{aligned} x_i^{p+k} \partial_i^k a &= x_i x_i^{p+k-1} \partial_i \partial_i^{k-1} a = x_i \left[\partial_i x_i^{p+k-1} - (p+k-1) x_i^{p+k-2} \right] \partial_i^{k-1} a \\ &= x_i \partial_i x_i^{p+k-1} \partial_i^{k-1} a - (p+k-1) x_i^{p+k-1} \partial_i^{k-1} a \\ &= [x_i \partial_i - (p+k-1)] x_i^{p+k-1} \partial_i^{k-1} a = 0, \end{aligned}$$

ya que $x_i^{p+k-1} \partial_i^{k-1} a = 0$ por hipótesis de inducción.

Por tanto, si $D = \sum_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha \partial^\alpha$ con $a_\alpha \in \mathcal{O}$ para todo multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Lambda$, entonces por todo lo anterior $x_i^{p+\alpha_i} a_\alpha \partial^\alpha a = 0$ y $x_i^{p+\beta_D} D a = 0$, siendo $\beta_D = \text{máx}\{\alpha_i \mid \alpha \in \Lambda\}$.

Sea finalmente $m = \sum_{j=1}^r D_j a_{k_j} \in M$ con $D_i \in \mathcal{D}$ para todo $j = 1, \ldots, r$, tenemos que $x_i^\gamma m = 0$, siendo $\gamma = \text{máx}\{p_j + \beta_{D_j} \mid j \in \{1, \ldots, r\}\}$ y $p_j \in \mathbb{N}$ tal que $x_i^{p_j} a_{k_j} = 0$.

$\square$

Ejemplo: Sea $\mathcal{E} = \mathcal{D}/\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$, dado que $\mathcal{E}$ está generado como $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda por la clase del 1 y tenemos que $x_i\overline{1} = \overline{x_i} = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, por la proposición anterior deducimos que $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{D}$-módulo con soporte en el origen.

Veremos más tarde que este ejemplo no es casual, sino que todos los $\mathcal{D}$-módulos con soporte en el origen finitamente generados son de la forma $\mathcal{E}^k$ para algún entero $k \geq 0$.

La Proposición 1.21 nos va a permitir calcular la cohomología de de Rham de $\mathcal{E}$:

Lema 1.26. *Se tiene que:*

$$H^p_{\mathrm{DR}}(\mathcal{E}) \cong \begin{cases} \mathbb{C} & \textit{si } p = n, \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración. De acuerdo con la Proposición 1.21, basta calcular $\mathrm{Tor}^{\mathcal{D}}_{n-p}(\Omega^n, \mathcal{E})$, para lo que necesitamos una resolución libre de $\mathcal{E}$. Pero ya probamos en la Proposición 1.20 que $K_i(x_1, \ldots, x_n, \mathcal{D})$ es una resolución libre de $\mathcal{D}/\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{E}$.

Así, $\mathrm{Tor}^{\mathcal{D}}_{n-p}(\Omega^n, \mathcal{E}) = H_{n-p}\left(\Omega^n \otimes_{\mathcal{D}} K_i(x_1, \ldots, x_n, \mathcal{D})\right)$. Veamos que el complejo $\Omega^n \otimes_{\mathcal{D}} K_i(x_1, \ldots, x_n, \mathcal{D})$ es isomorfo como $\mathbb{C}$-espacio vectorial a $K_i(x_1, \ldots, x_n, \Omega^n)$ (obsérvese que este último sólo es un complejo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales ya que Ω^n sólo es un $\mathcal{D}$-módulo a la derecha):

En primer lugar es claro que $\Omega^n \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n \cong \Omega^n \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^p \mathbb{C}^n$ a través del isomorfismo $\omega \otimes P \otimes e_{i_1,\ldots,i_p} \mapsto \omega P \otimes e_{i_1,\ldots,i_p}$ para $\omega \in \Omega^n$ y $P \in \mathcal{D}$, donde $\{e_i\}_{i=1}^n$ es la base canónica.

Veamos que las diferenciales conmutan con estos isomorfismos. La diferencial del primer complejo es:

$$d(\omega \otimes P \otimes e_{i_1,,\ldots,i_p}) = \omega \otimes \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} P x_{i_j} \otimes e_{i_1,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_p}.$$

Por los isomorfismos anteriores, $\omega \otimes P \otimes e_{i_1,,\ldots,i_p}$ se identifica con $\omega P \otimes e_{i_1,\ldots,i_p}$ y por su parte, $\omega \otimes \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} P x_{i_j} \otimes e_{i_1,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_p}$ lo hace con $\sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} \omega P x_{i_j} \otimes e_{i_1,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_p}$. Pero la diferencial de $K_i(x_1, \ldots, x_n, \Omega^n)$ envía $\omega P \otimes e_{i_1,\ldots,i_p}$ a $\sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} \omega P x_{i_j} \otimes e_{i_1,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_p}$, con lo que, en efecto, conmutan.

Por tanto, $H^p_{\mathrm{DR}}(\mathcal{E}) \cong H_{n-p}(K_i(x_1, \ldots, x_n, \Omega^n))$. Ahora, observamos que $\Omega^n \cong \mathcal{O}$ como $\mathcal{O}$-módulo (a través del isomorfismo $g dx \mapsto g$ para $g \in \mathcal{O}$), de manera que tenemos un isomorfismo de complejos canónico entre $K_i(x_1, \ldots, x_n, \Omega^n)$ y $K(x_1, \ldots, x_n, \mathcal{O})$. Como este último es una resolución de $\mathcal{O}/\mathcal{O}(x_1, \ldots, x_n)$ por ser $(x_1, \ldots, x_n)$ sucesión regular de $\mathcal{O}$, concluimos que:

$$H^p_{\mathrm{DR}}(\mathcal{E}) \cong H_{n-p}(K_i(x_1, \ldots, x_n, \Omega^n)) \cong \begin{cases} \mathcal{O}/\mathcal{O}(x_1, \ldots, x_n) & \text{si } p = n, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por último, considerando el homomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales $\phi : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ tal que $\phi(g) = g(0) \in \mathbb{C}$, es claro que ϕ es sobreyectivo (pues $\phi(c) = c$ para todo $c \in$

$\mathbb{C}$) y que $\ker \phi = \mathcal{O}(x_1, \ldots, x_n)$, de manera que por el primer teorema de isomorfía, $\mathcal{O}/\mathcal{O}(x_1, \ldots, x_n) \cong \mathbb{C}$, obteniendo el resultado.

□

El siguiente lema nos permitirá obtener un par de resultados acerca del $\mathcal{D}$-módulo $\mathcal{E}$:

Lema 1.27. *El ideal a la izquierda $\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$ es maximal. En consecuencia, $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{D}$-módulo simple a la izquierda (i.e. no contiene submódulos a la izquierda propios).*

Demostración. La segunda afirmación se debe al hecho bien conocido de que un módulo sobre un anillo A es simple si y sólo si es isomorfo a un cociente A/I con I un ideal maximal de A. Por tanto, basta probar que $\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$ es maximal a la izquierda.

Dado $P \in \mathcal{D}$, es fácil ver a partir de las relaciones de conmutación que P puede escribirse como $P = \sum_{i=1}^{n} D_i x_i + R$, donde $D_i \in \mathcal{D}$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y R es un operador diferencial de coeficientes constantes. Por tanto, para ver que si $P \notin \mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$, entonces $\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n, P) = \mathcal{D}$, basta considerar que P sea un operador diferencial de coeficientes constantes (pues el resto de términos de P ya pertenecerá a $\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$).

Para ello, observamos que $x_i^r \partial_i^r \in \mathbb{C}^* + \mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y para todo $r \in \mathbb{N}$ (siendo $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$): en efecto, para $r = 1$ tenemos que $x_i \partial_i = -1 + \partial_i x_i \in \mathbb{C}^* + \mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$ y supuesto cierto para r, por las relaciones de conmutación, $x_i^{r+1} \partial_i^{r+1} = x_i (x_i^r \partial_i) \partial_i^r = x_i (\partial_i x_i^r - r x_i^{r-1}) \partial_i^r = (x_i \partial_i - r) x_i^r \partial_i^r$. Como $x_i^r \partial_i^r \in \mathbb{C}^* + \mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$ por hipótesis de inducción y $x_i \partial_i = \partial_i x_i - 1$, concluimos que $x_i^{r+1} \partial_i^{r+1} \in \mathbb{C}^* + \mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$.

Así, $x^\alpha \partial^\alpha \in \mathbb{C}^* + \mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$ para todo multiíndice α (ya que el producto de elementos de $\mathbb{C}^* + \mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$ es un elemento de $\mathbb{C}^* + \mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$). Además, si $|\beta| \geq |\alpha|$ y $\beta \neq \alpha$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\beta_i > \alpha_i$ (supongamos que $i = 1$ sin pérdida de generalidad) y entonces $x^\beta \partial^\alpha = x_2^{\beta_2} \partial_2^{\alpha_2} \ldots, x_n^{\beta_n} \partial_n^{\alpha_n} x_1^{\beta_1 - \alpha_1} x_1^{\alpha_1} \partial_1^{\alpha_1} \in \mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$. Por tanto, si $P = \sum_{\alpha \in \Lambda} c_\alpha \partial^\alpha$ con $c_\alpha \in \mathbb{C}^*$ para todo $\alpha \in \Lambda$ y tomamos $\beta \in \Lambda$ tal que $|\beta|$ sea máximo, tendremos que:

$$x^\beta P = \sum_\alpha c_\alpha x^\beta \partial^\alpha = c_\beta x^\beta \partial^\beta + D = c_\beta (c + D') + D \in \mathbb{C}^* + \mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$$

siendo $D, D' \in \mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$ y $c \in \mathbb{C}^*$. Entonces tenemos que:

$$c_\beta c = x^\beta P - c_\beta D' - D \in \mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n, P),$$

y dado que $c_\beta c \neq 0$, deducimos que $1 \in \mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n, P)$. En consecuencia, obtenemos que $\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n, P) = \mathcal{D}$, y con ello la maximalidad a la izquierda de $\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$.

□

Lema 1.28. *Se tiene que:*

$$\operatorname{Ext}_{\mathcal{D}}^p(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \cong \begin{cases} \mathbb{C} & \textit{si } p = 0, \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración. Dado que $K_i(x_1,\ldots,x_n,\mathcal{D})$ es una resolución libre de $\mathcal{E}$, tenemos que $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{D}}(\mathcal{E},\mathcal{E}) = H^p(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(K_i(x_1,\ldots,x_n,\mathcal{D}),\mathcal{E})$. Veamos ahora que $K_i(x_1,\ldots,x_n,\mathcal{D})$ es isomorfo a $\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}} K(x_1,\ldots,x_n,\mathcal{O})$:

En efecto, tenemos la cadena de isomorfismos de $\mathcal{D}$-módulos a la izquierda:

$$\mathcal{D}\otimes_{\mathbb{C}}\bigwedge^p\mathbb{C}^n\cong\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}\otimes_{\mathbb{C}}\bigwedge^p\mathbb{C}^n\cong\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^{\binom{n}{p}}\cong\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}^{\binom{n}{p}}\cong\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}}\bigwedge^p\mathcal{O}^n,$$

que identifica $D\otimes fe_{i_1,\ldots,i_p}\in\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}}\bigwedge^p\mathcal{O}^n$ con $Df\otimes e_{i_1,\ldots,i_p}\in\mathcal{D}\otimes_{\mathbb{C}}\bigwedge^p\mathbb{C}^n$, y es claro que las diferenciales de ambos complejos conmutan con estos isomorfismos.

Por otro lado, se tiene un isomorfismo canónico entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}}C^\bullet,\mathcal{E})$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(C^\bullet,\mathcal{E})$ para cualquier complejo de $\mathcal{O}$-módulos $C^\bullet$ (debido al isomorfismo de adjunción). En particular:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(K_i(x_1,\ldots,x_n,\mathcal{D}),\mathcal{E})&\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}}K(x_1,\ldots,x_n,\mathcal{O}),\mathcal{E})\\&\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(K(x_1,\ldots,x_n,\mathcal{O}),\mathcal{E}).\end{aligned}$$

Pero recordemos que $K(x_1,\ldots,x_n,\mathcal{O})$ es una resolución libre de $\mathcal{O}/\mathcal{O}(x_1,\ldots,x_n)$ como $\mathcal{O}$-módulo (que es isomorfo a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial), de manera que:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{D}}(\mathcal{E},\mathcal{E})&=H^p(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(K_i(x_1,\ldots,x_n,\mathcal{D}),\mathcal{E})\\&\cong H^p(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(K(x_1,\ldots,x_n,\mathcal{O}),\mathcal{E}))=\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/\mathcal{O}(x_1,\ldots,x_n),\mathcal{E}).\end{aligned}$$

Ahora bien, es un hecho conocido que $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{O}$-módulo inyectivo, luego se tiene que $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/\mathcal{O}(x_1,\ldots,x_n),\mathcal{E})=0$ para todo $p>0$.

Para el caso $p=0$ tenemos un isomorfismo:

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}/\mathcal{O}(x_1,\ldots,x_n),\mathcal{E})\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/\mathcal{O}(x_1,\ldots,x_n),\mathcal{E}),$$

y dado un morfismo $\mathcal{O}$-lineal $\varphi:\mathcal{O}/\mathcal{O}(x_1,\ldots,x_n)\to\mathcal{E}$, como $\mathcal{O}/\mathcal{O}(x_1,\ldots,x_n)$ está generado por la clase de $1\in\mathcal{O}$, φ queda completamente determinado por el elemento $e=\varphi(\overline{1})\in\mathcal{E}$. Veamos entonces qué elementos de $\mathcal{E}$ pueden definir a φ:

Si $\varphi(\overline{1})=e$, entonces $0=\varphi(\overline{0})=\varphi(\overline{x_i})=x_i\varphi(\overline{1})=x_ie$ para todo $i=1,\ldots,n$. Recíprocamente, si $e\in\mathcal{E}$ es tal que $x_ie=0$ para todo $i=1,\ldots,n$, entonces el morfismo $\mathcal{O}$-lineal φ dado por $\varphi(\overline{1})=e$ está bien definido. En efecto, si $f,g\in\mathcal{O}$ son tales que $\overline{f}=\overline{g}\in\mathcal{O}/\mathcal{O}(x_1,\ldots,x_n)$, entonces $f-g=\sum_{i=1}^n h_ix_i\in\mathcal{O}(x_1,\ldots,x_n)$ y:

$$\varphi(\overline{f})-\varphi(\overline{g})=\varphi(\overline{f-g})=\varphi\left(\sum_{i=1}^n h_i\overline{x_i}\right)=\sum_{i=1}^n h_ix_ie=0.$$

Ahora bien, es claro que para todo $c\in\mathbb{C}$ el elemento $\overline{c}\in\mathcal{E}$ satisface esta propiedad. Para ver que son los únicos, recordemos que en la prueba del Lema 1.27 vimos que todo elemento de $\mathcal{E}$ está representado por un operador diferencial P de coeficientes constantes. Además, si P es no constante, existe un multiíndice $\beta \in \mathbb{N}^n$ con $|\beta| \geq 1$ tal que $x^\beta P \in \mathbb{C}^* + \mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$, de manera que $\overline{x^\beta P} = \overline{c}$ con $c \in \mathbb{C}^*$ y por tanto no puede tenerse que $x_i\overline{P} = \overline{x_i P} = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Así, la aplicación $\phi : \mathbb{C} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/\mathcal{O}(x_1, \ldots, x_n), \mathcal{E})$ dada por $c \mapsto \varphi_c$ con $\varphi_c(\overline{f}) = f\overline{c}$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales, concluyendo el resultado.

□

Veamos que la estructura de los $\mathcal{D}$-módulos con soporte en el origen finitamente generados es muy especial:

Teorema 1.29. *Sea M un $\mathcal{D}$-módulo con soporte en el origen finitamente generado, entonces existe un cierto entero $k \geq 0$ tal que M es isomorfo a $\mathcal{E}^k$. De hecho, este entero k es justamente la longitud de M como $\mathcal{D}$-módulo.*

Demostración. Si M es trivial, entonces $k = 0$ y no hay nada que probar. En caso contrario, sea $m \in M$ no nulo y consideremos $\mathcal{O}m$ el $\mathcal{O}$-módulo generado por m. Sea $\mathfrak{m} = \{f \in \mathcal{O} \mid f(0) = 0\} = \mathcal{O}(x_1, \ldots, x_n)$ el ideal maximal de $\mathcal{O}$. Por hipótesis, para cada $i = 1, \ldots, n$ existe un cierto entero p_i (tomaremos el mínimo de ellos) tal que $x_i^{p_i} m = 0$, de manera que si tomamos $k = \sum_{i=1}^n p_i$, entonces $\mathfrak{m}^k m = 0$ (pues en un monomio x^α con $|\alpha| \geq k$, al menos uno de los x_i ha de estar elevado a una potencia $\alpha_i \geq p_i$, de manera que $x_i^{\alpha_i} m = 0$ y $x^\alpha m = 0$).

Sea $n_1 = x_1^{p_1 - 1} \ldots x_n^{p_n - 1} m$, es claro que $n_1 \neq 0$ y que $x_i n_1 = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ (pues los p_i son los menores enteros tales que $x_i^{p_i} m = 0$). De esta forma, tenemos que $\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n) \subseteq \mathrm{ann}_{\mathcal{D}}(n_1)$, siendo $\mathrm{ann}_{\mathcal{D}}(n_1) = \{P \in \mathcal{D} \mid Pn_1 = 0\}$ el ideal anulador de n_1 a la izquierda. Pero como $\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$ es maximal a la izquierda (Lema 1.27), $\mathrm{ann}_{\mathcal{D}}(n_1) = \mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$ (ya que al ser $n_1 \neq 0$, $\mathrm{ann}_{\mathcal{D}}(n_1) \neq \mathcal{D}$).

Sea ahora $N_1 = \mathcal{D}n_1$, sabemos que el homomorfismo $\mathcal{D} \to N_1$ tal que $P \mapsto Pn_1$ es sobreyectivo y tiene por núcleo justamente a $\mathrm{ann}_{\mathcal{D}}(n_1)$, de manera que el primer teorema de isomorfía nos dice que $N_1 \cong \mathcal{D}/\mathrm{ann}_{\mathcal{D}}(n_1) = \mathcal{D}/\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{E}$.

Si $N_1 = M$, entonces hemos terminado, y en caso contrario definimos $M_2 = M/N_1$. Es claro que M_2 sigue siendo un módulo con soporte en el origen (ya que dado $\overline{m} \in M_2$, existe un cierto p_i tal que $x_i^p m = 0$ en M, de manera que $x_i^p \overline{m} = \overline{x_i^p m} = 0$ en M_2) finitamente generado (por ser un cociente de un módulo finitamente generado). Podemos aplicar por tanto el mismo razonamiento anterior a M_2, encontrando $n_2 \neq 0 \in M$ tal que $\mathcal{D}\overline{n_2} \cong \mathcal{E}$. Definiendo $N_2 = \mathcal{D}(n_1, n_2)$, tendremos que $\mathcal{D}\overline{n_2} = N_2/N_1 \cong \mathcal{E}$.

Llegados a este punto, nos preguntamos si $N_2 = M$, y en caso de obtener una respuesta negativa repetimos el procedimiento definiendo $M_3 = M/N_2$. Tras k pasos en los que la respuesta es negativa, obtenemos una sucesión $0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq N_k \subseteq M$ de submódulos a la izquierda de M tales que $N_i/N_{i-1} \cong \mathcal{E}$ para todo $i = 1, \ldots, k$ (tal sucesión se denomina *serie de composición*). Ahora bien, como $\mathcal{D}$ es noetheriano a la izquierda y M es finitamente generado, M también es noetheriano. Por tanto, este procedimiento no puede repetirse infinitas veces (pues tendríamos una cadena ascendente de submódulos de M no estacionaria), de manera que debe existir un cierto k tal que $M = N_k$. Razonemos entonces por inducción en k:

- Si $k = 1$, entonces, por lo anterior, $M = N_1 \cong \mathcal{E}$ y ya lo tenemos.
- Supongamos cierto que para cualquier $\mathcal{D}$-módulo M' finitamente generado y con soporte en el origen tal que en dicha construcción se tiene $M' = N_{k-1}$, se verifica que $M' \cong \mathcal{E}^{k-1}$, y sea M un $\mathcal{D}$-módulo finitamente generado con soporte en el origen tal que $M = N_k$. Entonces, podemos aplicar la hipótesis de inducción a $M' = N_{k-1}$, de manera que $M' \cong \mathcal{E}^{k-1}$. Tenemos entonces la siguiente sucesión exacta:

  $$0 \to M' \to M \to M/M' \to 0,$$

  y dado que $M/M' \cong \mathcal{E}$ por construcción, tenemos la sucesión exacta:

  $$0 \to \mathcal{E}^{k-1} \to M \to \mathcal{E} \to 0.$$

  Ahora bien, por el Lema 1.28, sabemos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 0$, y por aditividad, tendremos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}^{k-1}, \mathcal{E}) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}, \mathcal{E})^{k-1} = 0$. Entonces, dado que este grupo se interpreta como el grupo de clases de equivalencia de sucesiones exactas cortas (por relación de isomorfía) que tienen por primer término no nulo a $\mathcal{E}^{k-1}$ y por último término no nulo a $\mathcal{E}$, al ser trivial, todas las sucesiones exactas cortas de esta forma han de ser isomorfas al elemento neutro del grupo, que viene dado por la sucesión exacta corta de la suma directa:

  $$0 \to \mathcal{E}^{k-1} \to \mathcal{E}^{k-1} \oplus \mathcal{E} \to \mathcal{E} \to 0.$$

  Deducimos entonces que la sucesión exacta corta que hemos construido es isomorfa a esta última, de donde $M \cong \mathcal{E}^{k-1} \oplus \mathcal{E} \cong \mathcal{E}^k$, como queríamos.

Por último, el Teorema de Jordan-Hölder establece que un módulo tiene longitud finita l (i.e. cualquier cadena maximal estrictamente creciente de submódulos de M' tiene longitud l) si y sólo si tiene una serie de composición de longitud l, de donde deducimos que tal entero k es justamente la longitud de M como $\mathcal{D}$-módulo.

□

Una consecuencia inmediata de este teorema es la siguiente:

Corolario 1.30. *Sea M un $\mathcal{D}$-módulo con soporte en el origen finitamente generado, se tiene que:*

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M) \cong \begin{cases} \mathbb{C}^k & \textit{si } p = n, \\ 0 & \textit{en caso contrario,} \end{cases}$$

siendo $k \geq 0$ la longitud de M como $\mathcal{D}$-módulo.

Demostración. Por el teorema anterior, sabemos que $M \cong \mathcal{E}^k$, de manera que:

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M) \cong H^p_{\mathrm{DR}}(\mathcal{E}^k) \cong H^p_{\mathrm{DR}}(\mathcal{E})^k \cong \begin{cases} \mathbb{C}^k & \text{si p = n,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

donde hemos utilizado que la cohomología conmuta con la suma directa y el resultado del Lema 1.26.

□

Este resultado nos va a permitir caracterizar los $\mathcal{D}$-módulos con soporte en el origen finitamente generados:

Proposición 1.31. *Sea M un $\mathcal{D}$-módulo con soporte en el origen, se verifica que:*

(1) $H^p_{\mathrm{DR}}(M) = 0$ para $p \neq n$.

(2) M es un $\mathcal{D}$-módulo finitamente generado si y sólo si $H^n_{\mathrm{DR}}(M)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita.

Demostración.

(1) Observemos que M puede escribirse como el límite directo de todos sus submódulos M_i finitamente generados, $M = \varinjlim M_i$, de manera que:

$$\Omega^n \otimes_{\mathcal{O}} M = \Omega^n \otimes_{\mathcal{O}} \varinjlim M_i \cong \varinjlim \left(\Omega^n \otimes_{\mathcal{O}} M_i\right).$$

Por otro lado, sabemos que el límite directo de un complejo es el complejo que tiene en cada término el límite directo de los términos correspondientes (con las diferenciales inducidas), de manera que:

$$\mathrm{DR}(M) = \mathrm{DR}(\varinjlim M_i) \cong \varinjlim(\mathrm{DR}(M_i)).$$

Ahora, dado que la cohomología conmuta con el límite directo (por ser este un funtor exacto), tenemos que:

$$\begin{aligned} H^p_{\mathrm{DR}}(M) = H^p(\mathrm{DR}(M)) &\cong H^p\left(\varinjlim(\mathrm{DR}(M_i))\right) \\ &\cong \varinjlim\left(H^p(\mathrm{DR}(M_i))\right) = \varinjlim(H^p_{\mathrm{DR}}(M_i)). \end{aligned}$$

Por último, como cada M_i es un módulo finitamente generado con soporte en el origen, por el corolario anterior, $H^p_{\mathrm{DR}}(M_i) = 0$ para $p \neq n$, de donde deducimos que $H^p_{\mathrm{DR}}(M) = 0$ para $p \neq n$.

(2) Por el corolario anterior, si M es finitamente generado, entonces existe un cierto $k \in \mathbb{N}$ tal que $H^n_{\mathrm{DR}}(M) \cong \mathbb{C}^k$, luego es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión k (finita).

Para el recíproco, sea M un $\mathcal{D}$-módulo con soporte en el origen tal que $H^n_{\mathrm{DR}}(M)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita, digamos k, de manera que $H^n_{\mathrm{DR}}(M) \cong \mathbb{C}^k$. Sea ahora M' un submódulo de M finitamente generado, podemos considerar la sucesión exacta:

$$0 \to M' \to M \to M/M' \to 0,$$

y dado que Ω^p es libre de rango $\binom{n}{p}$ como $\mathcal{O}$-módulo, el funtor $\Omega^p \otimes_{\mathcal{O}}$ es exacto, luego para cualquier $p = 1, \dots, n$ la siguiente sucesión también es exacta:

$$0 \to \Omega^p \otimes_{\mathcal{O}} M' \to \Omega^p \otimes_{\mathcal{O}} M \to \Omega^p \otimes_{\mathcal{O}} \frac{M}{M'} \to 0.$$

Además, es claro que las diferenciales de los correspondientes complejos de de Rham conmutan con estas flechas, de manera que tenemos la siguiente sucesión exacta de complejos de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales:

$$0 \to \mathrm{DR}(M') \to \mathrm{DR}(M) \to \mathrm{DR}(M/M') \to 0,$$

lo que a partir de la sucesión exacta larga de cohomología permite obtener la sucesión exacta:

$$0 = H^{n-1}_{\mathrm{DR}}(M/M') \to H^n_{\mathrm{DR}}(M') \to H^n_{\mathrm{DR}}(M) \to H^n_{\mathrm{DR}}(M/M') \to 0.$$

Por tanto, la flecha $H^n_{\mathrm{DR}}(M') \to H^n_{\mathrm{DR}}(M)$ es inyectiva, lo que implica que $H^n_{\mathrm{DR}}(M')$ es isomorfo a $\mathbb{C}^l$ con $l \leq k$.

Del Corolario 1.30 se deduce inmediatamente que un $\mathcal{D}$-módulo M' finitamente generado con soporte en el origen verifica $H^n_{\mathrm{DR}}(M') \cong \mathbb{C}^l$ si y sólo si M' es de longitud l. Así, deducimos que todos los submódulos finitamente generados de M tienen longitud menor o igual que k. Si M no fuera finitamente generado, entonces existiría una sucesión de elementos $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset M$ tal que:

$$0 \subsetneq \mathcal{D}m_1 \subsetneq \mathcal{D}(m_1, m_2) \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{D}(m_1, m_2, \dots, m_{k+1}) \subsetneq \dots \subseteq M,$$

y el submódulo $\mathcal{D}(m_1, m_2, \dots, m_{k+1})$ tendría longitud mayor o igual que $k + 1$, llegando a contradicción. Concluimos que M ha de ser un $\mathcal{D}$-módulo finitamente generado.

□

Capítulo 2

El polinomio de Bernstein de una singularidad aislada

En este capítulo introduciremos el polinomio de Bernstein asociado a una función $f \in \mathcal{O}$, otro de los ingredientes fundamentales en la teoría de $\mathcal{D}$-módulos. El resto del presente trabajo se centrará en demostrar ciertas propiedades de las raíces de este polinomio en el caso en que f tenga una singularidad aislada en el origen. Para ello, necesitaremos estudiar el sistema diferencial de Gauss-Manin y el Teorema de Milnor, entre otros conceptos.

2.1. El polinomio de Bernstein

Si bien posteriormente formularemos una versión más general que será con la cual trabajemos, conviene comenzar enunciando el teorema original, demostrado por el propio Bernstein. Para ello, hemos de introducir brevemente los elementos de los que consta:

Sea K un cuerpo de característica cero, definimos el *álgebra de Weyl sobre K* como:

$$A_n(K) = K[x_1, \ldots, x_n][\partial_1, \ldots, \partial_n],$$

que es una subálgebra de $\mathrm{End}_K(K[x_1, \ldots, x_n])$.

Sea ahora s una nueva variable y $K(s)$ el cuerpo de funciones racionales sobre la variable s, podemos considerar $A_n(K(s))$, el álgebra de Weyl sobre $K(s)$. Sea $p \in K[x_1, \ldots, x_n]$, consideramos $A_n(K(s))p^s$, el $A_n(K(s))$-módulo generado por el símbolo formal p^s, sobre el que ∂_i actúa como:

$$\partial_i \cdot p^s = sp^{-1} \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot p^s.$$

Por consistencia, el elemento $p^k \cdot p^s$ lo escribiremos como p^{k+s}.

Observación. Nótese que el motivo de denotar al símbolo p^s es que las derivadas parciales actúan sobre él como lo harían sobre la función p^s según la regla de la cadena.

Estamos ya en disposición de enunciar el teorema:

Teorema 2.1 (Bernstein)**.** *Sea K un cuerpo de característica cero y $p \in K[x_1, \ldots, x_n]$, existen un polinomio $B(s) \in K[s]$ no nulo y un operador diferencial $D(s) \in A_n(K)[s]$ tales que en $A_n(K(s))p^s$ se satisface la ecuación:*

$$B(s)p^s = D(s)p^{s+1}.$$

Demostración. Puede encontrarse en [7] (Teorema 10.3.3). □

Obsérvese que los polinomios $D(s)$ y $B(s)$ no están únicamente determinados (pues, por ejemplo, se podrían multiplicar ambos por un elemento cualquiera de K y se seguiría cumpliendo la ecuación). Sin embargo, es claro que el conjunto de polinomios $B(s)$ que satisfacen la ecuación anterior es un ideal de $K[s]$. Como $K[s]$ es un dominio de ideales principales por ser K un cuerpo, existe un único generador mónico de dicho ideal. Tal generador es el denominado *polinomio de Bernstein de* p, y se denota por $b_p(s)$.

Ejemplo: Sea $p(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ y sea $D(s) = \partial_1^2 + \ldots + \partial_n^2$, observamos que:

$$\partial_i^2 \cdot p^{s+1} = \left(2(s+1)p + 4s(s+1)x_i^2\right) p^{s-1},$$

de manera que:

$$\begin{aligned} D(s)p^{s+1} &= (2n(s+1)p + 4s(s+1)p)p^{s-1} \\ &= (2n(s+1) + 4s(s+1))p^s = 4(s+1)\left(s + \frac{n}{2}\right) p^s, \end{aligned}$$

y por tanto $b_p(s) = (s+1)\left(s + \frac{n}{2}\right)$.

Observación. En general, el cálculo del polinomio de Bernstein es muy complicado. Sin embargo, existen algoritmos implementables en un ordenador que permiten obtenerlo.

Como un germen de función holomorfa no es más que una serie convergente en un entorno del origen, es de esperar que este resultado pueda extenderse a ellas. Esto es justamente lo que hizo Björk en [1]:

Sea $f \in \mathcal{O}$ un germen de función holomorfa tal que $f(0) = 0$ y $f \neq 0$, consideramos una nueva variable s, el anillo $\mathcal{O}[f^{-1}, s]$ y el $\mathcal{O}[f^{-1}, s]$-módulo generado por el símbolo f^s, $\mathcal{O}[f^{-1}, s]f^s$. Lo dotamos de estructura de $\mathcal{D}$-módulo definiendo, para $g \in \mathcal{O}[f^{-1}, s]$:

$$\partial_i(gf^s) = (\partial_i g)f^s + sgf^{-1}(\partial_i f)f^s,$$

siguiendo de nuevo las reglas de derivación usuales, donde la variable s no se ve afectada por la acción de las derivadas parciales. Una vez más, denotaremos $f^k f^s$ como f^{k+s}.

Esto define a su vez en $\mathcal{O}[f^{-1}, s]f^s$, con la multiplicación por s, una estructura de $\mathcal{D}[s]$-módulo, de manera que podemos considerar el sub-$\mathcal{D}[s]$-módulo generado por f^s, que a partir de ahora llamaremos M.

Teorema 2.2 (Björk)**.** *En las condiciones anteriores, existen un polinomio $B(s) \in \mathbb{C}[s]$ no nulo y un operador diferencial $D(s) \in \mathcal{D}[s]$ tales que en $M = \mathcal{D}[s]f^s$ se verifica la ecuación:*

$$B(s)f^s = D(s)f^{s+1}.$$

Demostración. Puede encontrarse en [1]. □

Nuevamente, el conjunto de los $B(s) \in \mathbb{C}[s]$ tales que existe un cierto $D(s) \in \mathcal{D}[s]$ satisfaciendo la ecuación anterior es un ideal de $\mathbb{C}[s]$, de manera que existe un generador mónico de dicho ideal. Dicho generador, que denotaremos $b_f(s)$, se denominará el *polinomio de Bernstein de f.*

El objetivo que se propuso Malgrange en su artículo era demostrar que, en el caso en que f tiene una singularidad aislada en el origen, se verifica que:

- Las raíces de b_f son racionales y menores que 0.
- M es un $\mathcal{D}$-módulo finitamente generado.

Para abordar este problema es necesario estudiar la relación existente entre la cohomología de de Rham de M y la monodromía de las soluciones de un cierto sistema diferencial.

El siguiente lema permite establecer de forma precisa la relación entre $\mathcal{O}[f^{-1}, s]f^s$ y $M[f^{-1}]$, el localizado de M con respecto a f^{-1}:

Lema 2.3. *Se tiene que $\mathcal{O}[f^{-1}, s]f^s = M[f^{-1}]$.*

Demostración. Veámoslo por doble contención:

$\boxed{\subseteq}$ Sea $a = \sum_{i,j} g_{i,j} f^{-i} s^j f^s \in \mathcal{O}[f^{-1}, s]f^s$, podemos reescribir:

$$a = \sum_i f^{-i} \left(\sum_j g_{i,j} s^j f^s \right),$$

y dado que $\mathcal{O} \subset \mathcal{D}$, tenemos que $\sum_j g_{i,j} s^j f^s \in \mathcal{D}[s]f^s = M$ para todo i. Luego efectivamente $a \in M[f^{-1}]$.

$\boxed{\supseteq}$ Como $M \subset \mathcal{O}[f^{-1}, s]f^s$ y $\mathcal{O}[f^{-1}, s]f^s$ es, en particular, un $\mathcal{O}[f^{-1}]$-módulo, deducimos que $M[f^{-1}] \subset \mathcal{O}[f^{-1}, s]f^s$.

□

Ahora dotaremos a $M[f^{-1}]$ de una estructura de $\mathbb{C}\{t\}$-módulo:

Lema 2.4. *$\mathcal{O}[f^{-1}, s]f^s$ (y por tanto $M[f^{-1}]$) es un $\mathbb{C}\{t\}$-módulo con la operación:*

$$t(g(s)f^s) = g(s+1)f^{s+1}, \quad g(s) \in \mathcal{O}[f^{-1}, s].$$

Demostración. En primer lugar, hay que ver que esta operación se extiende efectivamente en una acción de $\mathbb{C}\{t\}$ sobre $M[f^{-1}]$. Como queremos que tenga estructura de $\mathbb{C}\{t\}$-módulo, definimos, dada $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \in \mathbb{C}\{t\}$:

$$\varphi(g(s)f^s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k (g(s)f^s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k g(s+k) f^{s+k}.$$

Para que esta definición sea válida, hemos de comprobar que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k g(s+k) f^k$ es convergente. Para ello, como $g(s)$ es un polinomio en s con coeficientes en $\mathcal{O}[f^{-1}]$ y la suma de series convergentes es convergente, basta probarlo para un $g(s)$ de la forma $g(s) = hs^m$ con $h \in \mathcal{O}[f^{-1}]$ y $m \in \mathbb{N}$, de manera que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k g(s+k) f^k = h \sum_{k=0}^{\infty} c_k (s+k)^i f^k = h \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} s^{m-i} \sum_{k=0}^{\infty} c_k k^i f^k.$$

Entonces, para probar la convergencia de esta serie es suficiente probar que $\sum_{k=0}^{\infty} c_k k^i f^k$ para cualquier $i \geq 0$. Esto a su vez se reduce a probar la convergencia de $\sum_{k=0}^{\infty} c_k k^i t^k$ para $i \geq 0$, ya que la composición de series convergentes es convergente. Veámoslo por inducción:

- Para $i = 0$ esta serie es $\varphi(t)$ y se tiene la convergencia por hipótesis.
- Supuesto que $\sum_{k=0}^{\infty} c_k k^i t^k$ converge, tenemos que:

  $$\sum_{k=0}^{\infty} c_k k^{i+1} t^k = t \sum_{k=1}^{\infty} k c_k k^i t^{k-1} = t \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k k^i t^k \right),$$

  que es convergente, pues la serie derivada de una función convergente es convergente.

Por tanto, esta es una buena definición.

Las propiedades distributivas y la del elemento unidad son inmediatas de verificar. Veamos la asociativa:

Sean $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ y $\psi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j t^j \in \mathbb{C}\{t\}$, y sea $g(s) \in \mathcal{O}[f^{-1}, s]$, entonces:

$$\psi(\varphi(g(s)f^s)) = \psi\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k g(s+k) f^{s+k}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} d_j c_k g(s+k+j) f^{s+k+j}, \quad \text{y}$$

$$(\psi\varphi)(g(s)f^s) = \left(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} d_j c_k t^{j+k}\right)(g(s)f^s) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} d_j c_k g(s+k+j) f^{s+j+j},$$

luego efectivamente $\psi(\varphi(g(s)f^s)) = (\psi\varphi)(g(s)f^s)$.

Concluimos que $M[f^{-1}]$ tiene estructura de $\mathbb{C}\{t\}$-módulo con la operación definida.

□

Veamos algunas propiedades relacionadas con esta estructura:

Proposición 2.5. *Se tienen las siguientes propiedades en $\mathcal{O}[f^{-1}, s]f^s = M[f^{-1}]$ (donde el corchete ha de entenderse en los endomorfismos $\mathbb{C}$-lineales de $\mathcal{O}[f^{-1}, s]f^s$):*

(a) Dados $P \in \mathcal{D}$ y $\varphi \in \mathbb{C}\{t\}$, entonces $[P, \varphi] = 0$.

(b) $[t, s] = t$.

(c) Dado $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \in \mathbb{C}\{t\}$, se tiene que $[\varphi, s] = t\varphi'$, donde $\varphi' \in \mathbb{C}\{t\}$ designa la serie derivada $\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k t^{k-1}$.

(d) La aplicación $t : M[f^{-1}] \to M[f^{-1}]$ es biyectiva.

Demostración.

(a) Sea $P \in \mathcal{D}$, $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ y $g(s) \in \mathcal{O}[f^{-1}, s]$, tenemos que:

$$(\varphi P)(g(s)f^s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P g(s+k) f^{s+k} = P \sum_{k=0}^{\infty} c_k g(s+k) f^{s+k} = (P\varphi)(g(s)f^s),$$

luego $[P, \varphi] = [P\varphi - \varphi P] = 0$.

(b) Sea $g(s) \in \mathcal{O}[f^{-1}, s]$:

$$\begin{aligned}[t,s](g(s)f^s) &= (ts - st)(g(s)f^s) = t(sg(s)f^s) - st(g(s)f^s) \\ &= (s+1)g(s+1)f^{s+1} - sg(s+1)f^{s+1} \\ &= g(s+1)f^{s+1} = t(g(s)f^s),\end{aligned}$$

de manera que $[t, s] = t$.

(c) Sea $g(s) \in \mathcal{O}[f^{-1}, s]$:

$$\begin{aligned}[\varphi,s](g(s)f^s) &= \varphi(sg(s)f^s) - s\varphi(g(s)f^s) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(s+k)g(s+k)f^{s+k} - s\sum_{k=0}^{\infty} c_k g(s+k)f^{s+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} kc_k g(s+k)f^{s+k} = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k g(s+k)f^{s+k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} kc_k t^k(g(s)f^s) = t\sum_{k=1}^{\infty} kc_k t^{k-1}(g(s)f^s) = (t\varphi')(g(s)f^s),\end{aligned}$$

y por tanto $[\varphi, s] = t\varphi'$.

(d) Es claro que si definimos $u : M[f^{-1}] \to M[f^{-1}]$ como:

$$u(g(s)f^s) = g(s-1)f^{-1}f^s = g(s-1)f^{s-1}, \quad \text{para } g \in \mathcal{O}[f^{-1}, s],$$

entonces $u \circ t = t \circ u = 1$, de manera que $u = t^{-1}$ y tenemos que t es invertible (y por tanto biyectiva).

□

Introducimos ahora el concepto de conexión sobre un $\mathbb{C}\{t\}$-módulo. En realidad se trata de un concepto generalizable a cualquier módulo sobre un anillo de series en n variables, pero la siguiente definición es válida para nuestros propósitos:

Definición 2.6. Sea N un $\mathbb{C}\{t\}$-módulo, diremos que $\nabla : N \to N$ es una *conexión sobre* N si es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal y para todo $n \in N$ y $\varphi \in \mathbb{C}\{t\}$ verifica la regla de Leibniz:

$$\nabla(\varphi n) = \varphi' n + \varphi\nabla(n).$$

La siguiente proposición establece que el módulo $M[f^{-1}]$ puede dotarse de una conexión:

Proposición 2.7. *Sea* $\nabla : M[f^{-1}] \to M[f^{-1}]$ *dada por* $\nabla = -t^{-1}(s+1)$*, entonces* ∇ *es una conexión sobre* $M[f^{-1}]$*.*

Demostración. Primero observamos que ∇ está bien definida ya que t es invertible sobre $M[f^{-1}]$ (Proposición 2.5, apartado (d)). Además, como t^{-1} no afecta a las constantes, dados $c \in \mathbb{C}$ y $g(s) \in \mathcal{O}[f^{-1}, s]$:

$$\nabla(cg(s)f^s) = -t^{-1}(c(s+1)g(s)f^s) = -ct^{-1}(s+1)(g(s)f^s) = c\nabla(g(s)f^s),$$

luego ∇ es $\mathbb{C}$-lineal.

Por otro lado, dados $\varphi \in \mathbb{C}\{t\}$ y $h \in M[f^{-1}]$, entonces:

$$\varphi' h + \varphi\nabla(h) = t^{-1}[(t\varphi')h - \varphi(s+1)h],$$

ya que $\varphi t^{-1} = t^{-1}\varphi$. Usando ahora que $t\varphi' = \varphi s - s\varphi$ según el apartado (c) de la Proposición 2.5:

$$\varphi' h + \varphi\nabla(h) = t^{-1}[\varphi sh - s\varphi h - \varphi sh - \varphi h] = -t^{-1}(s+1)\varphi h = \nabla(\varphi h),$$

de manera que ∇ satisface la regla de Leibniz y por tanto es una conexión sobre $M[f^{-1}]$.

□

Sea $M_k = \mathcal{D}[s]f^{s+k}$ para cada $k \in \mathbb{Z}$, podemos extender la acción de t (y de $\mathbb{C}\{t\}$) de forma natural a M_k:

$$t(P(s)f^{s+k}) = P(s+1)f^{s+k+1}, \quad \text{para } P(s) \in \mathcal{D}[s].$$

Obsérvese además que $M_0 = \mathcal{D}[s]f^s = M$.

Proposición 2.8. *Sea* $M_k = \mathcal{D}[s]f^{s+k}$ *para cada* $k \in \mathbb{Z}$*, se tiene que:*

(a) $M_k \subset M_{k-1}$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}$*.*

(b) $M_{k+1} = tM_k$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}$*. En particular,* M_k *es estable por* $\mathbb{C}\{t\}$*.*

(c) $M[f^{-1}] = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} M_k = M[t^{-1}]$*.*

(d) $\nabla M_k \subset M_{k-1}$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Demostración.

(a) Es inmediato, ya que si $P(s)f^{s+k} \in M_k$ con $P(s) \in \mathcal{D}[s]$, entonces se tiene que $P(s)f = Pf(s) \in \mathcal{D}[s]$, de manera que $P(s)f^{s+k} = P(s)ff^{s+k-1} \in M_{k-1}$.

(b) Dado $P(s)f^{s+k} \in M_k$, entonces $t(P(s)f^{s+k}) = P(s+1)f^{s+k+1} \in M_{k+1}$ ya que $P(s+1) \in \mathcal{D}[s]$. Recíprocamente, si $P(s)f^{s+k+1} \in M_{k+1}$, podemos escribir $P(s)f^{s+k+1} = t(P(s-1)f^{s+k})$, y dado que $P(s-1)f^{s+k} \in M_k$, deducimos que $P(s)f^{s+k+1} \in tM_k$.

Como $M_{k+1} \subset M_k$, deducimos que $tM_k \subset M_k$, de manera que M_k es estable por t y por tanto, por sus potencias. Concluimos que M_k es estable por $\mathbb{C}\{t\}$.

(c) Un elemento de $M[f^{-1}]$ será de la forma $\sum_k P_k(s)f^{s-k}$ donde cada $P_k(s) \in \mathcal{D}[s]$, de manera que el término k-ésimo de la suma se encuentra en M_{-k}. Sea k_0 el mayor de los índices de la suma (ha de ser finita), dado que, por (a), $M_{-k} \subset M_{-k_0}$ para todo $k \leq k_0$, tendremos que cada término, y por tanto dicho elemento, se encuentra en $M_{-k_0} \subset \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} M_k$. Recíprocamente, dado un elemento $m \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} M_k$, existirá un cierto k_0 tal que $m \in M_{k_0}$, y pueden darse dos situaciones: que $k_0 \geq 0$, en cuyo caso $M_{k_0} \subset M_0 = M$ y por tanto $m \in M \subset M[f^{-1}]$, o bien que $k_0 < 0$, en cuyo caso $k_0 = -|k_0|$ y m será de la forma $Pf^{s+k_0} = Pf^s f^{-|k_0|} \in M[f^{-1}]$. En cualquier caso, concluimos que $M[f^{-1}] = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} M_k$.

Para la segunda igualdad observamos que de (a) y (b) se deduce:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} M_k = \bigcup_{k\leq 0} M_k = \bigcup_{k\leq 0} t^k M.$$

Por tanto, $m \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} M_k$ si y sólo si existe un cierto $k_0 \leq 0$ tal que $m \in t^{k_0}M$, lo que a su vez se da si y sólo si $m \in M[t^{-1}]$.

(d) Sea $m = P(s)f^{s+k} \in M_k$, entonces:

$$\nabla(m) = -t^{-1}((s+1)P(s)f^{s+k}) = -sP(s-1)f^{s+k-1} \in M_{k-1},$$

de manera que $\nabla M_k \subset M_{k-1}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

□

Por la proposición anterior, tenemos que $tM = M_1 \subset M_0$, de manera que podemos considerar el módulo cociente M/tM (sobre $\mathcal{D}$ o sobre $\mathcal{D}[s]$). Veamos que el polinomio de Bernstein de f está muy relacionado con este módulo:

Proposición 2.9. *El polinomio de Bernstein de f es el polinomio mínimo de la acción de s sobre M/tM.*

Demostración. Sea $b_f(s)$ el polinomio de Bernstein de f, por el Teorema 2.2 sabemos que existe $D(s) \in \mathcal{D}[s]$ tal que $b_f(s)f^s = D(s)f^{s+1}$, de manera que para todo $m = P(s)f^s \in M$:

$$b_f(s)m = b_f(s)(P(s)f^s) = P(s)b_f(s)f^s = P(s)D(s)f^{s+1} \in M_1 = tM.$$

O, visto de otro modo, $b_f(s)\overline{m} = \overline{b_f(s)m} = 0$ para todo $\overline{m} \in M/tM$. Veamos que es el mínimo posible:

Supongamos que existe $b'_f(s)$ tal que $b'_f(s)\overline{m} = 0$ para cualquier $\overline{m} \in M/tM$. En particular, tomando $m = f^s$, tenemos que $\overline{b'_f(s)f^s} = 0$, de manera que existe $P(s) \in \mathcal{D}[s]$ tal que $b'_f(s)f^s = P(s)f^{s+1}$. Pero dado que el polinomio de Bernstein es el generador mónico del ideal de los polinomios que verifican esta condición, se ha de tener $b'_f(s) = K(s)b_f(s)$ para algún $K(s) \in \mathbb{C}[s]$.

Concluimos así que el polinomio de Bernstein es el polinomio mínimo de la acción de s sobre M/tM.

□

Como corolario de este resultado, se obtiene la finitud de M/tM como $\mathcal{D}$-módulo:

Corolario 2.10. *M/tM es un $\mathcal{D}$-módulo finitamente generado.*

Demostración. Es claro que M/tM es finitamente generado como $\mathcal{D}[s]$-módulo por la clase de f^s. Ahora bien, como el polinomio de Bernstein de f verifica $b_f(s)\overline{f^s} = 0$, si s^{k_0} es el término de mayor grado de $b_f(s)$, entonces $\overline{s^{k_0}f^s}$ puede escribirse como combinación $\mathbb{C}$-lineal de $\left\{\overline{s^i f^s} \mid 0 \le i < k_0\right\}$ (y por inducción también las potencias superiores). Así, si $\overline{m} = \overline{P(s)f^s} \in M/tM$ con $P(s) = \sum_k D_k s^k \in \mathcal{D}[s]$, podremos escribir:

$$\overline{m} = \sum_{k<k_0} D'_k \overline{s^k f^s},$$

para unos ciertos $D'_k \in \mathcal{D}$. Concluimos que $\left\{\overline{s^i f^s} \mid 0 \le i < k_0\right\}$ es un sistema generador de M/tM como $\mathcal{D}$-módulo, y por tanto que es finitamente generado.

□

2.2. Sistema diferencial de Gauss-Manin y Teorema de Milnor

Para dar una definición formal y absolutamente general de lo que se entiende por el *sistema diferencial de Gauss-Manin de una aplicación analítica compleja $f : X \to Y$* es necesario introducir el concepto de *imagen directa por f de un $\mathcal{D}_X$-módulo* (siendo $\mathcal{D}_X$ el haz de los operadores diferenciales lineales en X), lo que requiere un cierto esfuerzo y se desvía en parte de nuestro objetivo. Por ello, aunque por completitud indicamos a continuación cuál es esta definición, inmediatamente enunciaremos un resultado que, en el caso que nos ocupa, dará una versión simplificada de la misma, la cual nos permitirá trabajar con este concepto de manera más cómoda y relacionada con la teoría que venimos desarrollando. El lector interesado puede consultar [25] para más información al respecto.

Definición 2.11. Sean X e Y dos variedades analíticas complejas y $f : X \to Y$ una aplicación analítica entre ellas, denominamos *sistema de Gauss-Manin de* f a la imagen directa por f del haz $\mathcal{O}_X$ de funciones holomorfas en X, que es un complejo de haces de $\mathcal{D}_Y$-módulos, cuya cohomología k-ésima se denotará por $\displaystyle\int_f^k \mathcal{O}_X$.

En el caso que nos ocupa tenemos un germen de función holomorfa $f \in \mathcal{O}$ (o, equivalentemente, una función definida en un entorno del origen en el cual es holomorfa) con $f(0) = 0$ y una singularidad aislada en el origen. La siguiente proposición nos permitirá traducir estas propiedades a una condición puramente algebraica:

Proposición 2.12. *En las condiciones anteriores, sea $J_f = \mathcal{O}(\partial_1 f, \ldots, \partial_n f)$ el llamado ideal gradiente de f y $\mathfrak{m} = \mathcal{O}(x_1, \ldots, x_n)$ el ideal maximal de $\mathcal{O}$, entonces:*

(1) $\sqrt{J_f} = \mathfrak{m}$ (donde $\sqrt{J_f}$ designa el ideal radical de J_f).

(2) El $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathcal{O}/J_f$ es de dimensión finita.

Demostración.

(1) Como f tiene una singularidad aislada en el origen, $(\partial_i f)(0) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y por tanto $J_f \subseteq \mathfrak{m}$. Al ser $\sqrt{J_f}$ la intersección de todos los ideales primos que contienen a J_f y $\mathfrak{m}$ uno de ellos (es primo por ser maximal), tenemos la inclusión $\sqrt{J_f} \subseteq \mathfrak{m}$. Además, cualquier elemento que no esté en $\mathfrak{m}$ es unidad, luego cualquier ideal primo propio ha de estar contenido en $\mathfrak{m}$. Por tanto, si suponemos $\sqrt{J_f} \neq \mathfrak{m}$, entonces ha de existir un ideal primo I tal que $\sqrt{J_f} \subseteq I \subsetneq \mathfrak{m}$, y tomando variedades obtenemos que $0 = V(\mathfrak{m}) \subsetneq V(I) \subset V(J_f)$. Por el *Nullstellensatz* o *Teorema de los ceros de Hilbert* tenemos que $Y(V(I)) = \sqrt{I} = I$ es primo, y por tanto $V(I)$ es una variedad irreducible que contiene estrictamente al origen y a lo largo de la cual se anulan los elementos de J_f (en particular los $\partial_i f$). Concluimos que todos los puntos de $V(I)$ son singulares y por tanto el origen no es un punto singular aislado, llegando a contradicción. Así, $\sqrt{J_f} = \mathfrak{m}$.

(2) Por (1) y por definición de ideal radical, para cada $i = 1, \ldots, n$ existe un cierto $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i^{k_i} \in J_f$. Como los monomios x^α generan $\mathcal{O}$, deducimos que las clases de los monomios x^α con $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $0 \leq \alpha_i < k_i$ generan $\mathcal{O}/J_f$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial. En particular, tenemos que $\mathcal{O}/J_f$ es de dimensión finita.

$\square$

La dimensión de dicho espacio vectorial se denomina *número de Milnor de* f y se denota por μ. Tenemos, pues:

$$\mathcal{O}/J_f \cong \mathbb{C}^\mu.$$

Por otro lado, la hipersuperficie $V = f^{-1}(0)$ tiene el origen como punto singular aislado, y es posible tomar un cierto $\varepsilon > 0$ tal que la bola abierta B_ε de centro el origen y radio ε tenga una frontera S_ε que corte transversalmente a V, de manera que $S_\varepsilon \cap V$ sea una variedad diferenciable. Además, con tal elección de ε, es posible tomar $\eta > 0$ tal que el disco abierto $D_\eta = \{y \in \mathbb{C} \mid |y| < \eta\}$ no tenga ningún valor crítico de $f|_{S_\varepsilon}$ por punto de acumulación. La demostración de estos hechos puede encontrarse en el libro [23], "*Singular points of complex hypersurfaces*", de J. Milnor.

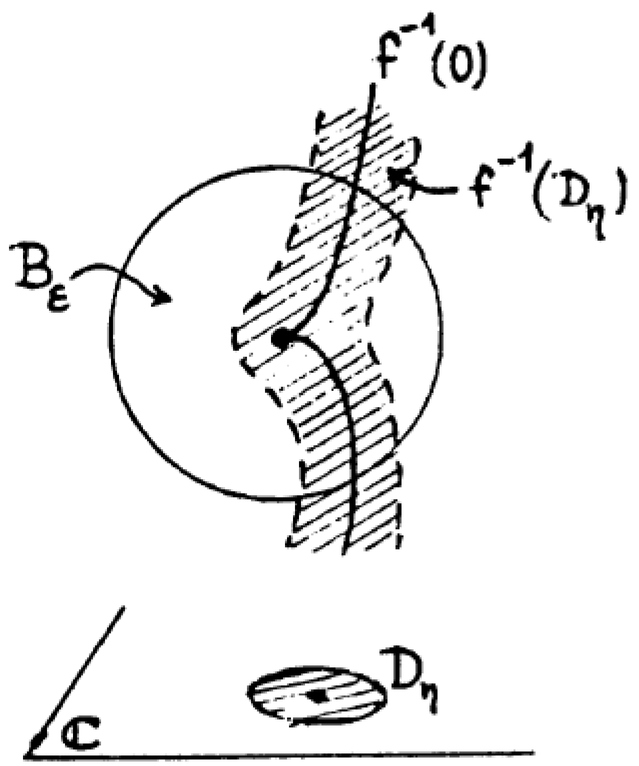

Figura 2.1: *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*, p. 156.

El resultado principal debido a J. Milnor es el siguiente:

Teorema 2.13 (Milnor)**.** *Con las elecciones anteriores de* ε *y* μ*, si definimos las variedades* $X = B_\varepsilon \cap f^{-1}(D_\eta)$ *e* $Y = D_\eta$*, y tomamos la restricción* $f : X \to Y$*, se verifica:*

(1) La aplicación $f : X \to Y$ *tiene un tipo de homotopía que no depende de las elecciones de* ε *ni* η*, sino exclusivamente del germen en el origen de* f*.*

(2) La aplicación f restringida a $X^* = X \setminus f^{-1}(0)$ es una fibración localmente trivial de base $Y^* = Y \setminus \{0\}$.

*(3) Cada fibra $X(t) = f^{-1}(t)$ con $t \neq 0$ es homotópicamente equivalente a un wedge de μ esferas: $\bigvee_{i=1}^{\mu} S^n$ (donde μ es el número de Milnor de f). Esta es la llamada **fibración de Milnor**.*

Demostración. La prueba de estos resultados se encuentra en [23].

□

Estamos ya en disposición de enunciar el resultado que nos permitirá trabajar de manera simple con el sistema diferencial de Gauss-Manin. El subíndice 0 sobre un haz denotará, como es usual, su fibra en el origen:

Proposición 2.14 (Pham)**.** *Con la notación anterior, se tiene que:*

(1) El $\mathcal{D}_{Y,0}$-módulo $\left(\int_f^k \mathcal{O}_X\right)_0$ no depende de la elección de ε que define a X, sino exclusivamente del germen en el origen $f \in \mathcal{O}$.

(2) Para todo $k = 0, -1, \ldots, -n$ se tiene el isomorfismo de $\mathcal{D}_{Y,0}$-módulos:

$$\left(\int_f^k \mathcal{O}_X\right)_0 \cong H^{n+k}_{\mathrm{DR}}(B_0),$$

donde B_0 es, en coordenadas locales $(x_1, \ldots, x_n)$ para X y t para Y, la fibra en el origen del haz:

$$B = \frac{\mathcal{D}_{X\times Y}}{\mathcal{D}_{X\times Y}\,(t - f, \partial_i + (\partial_i f)\partial_t,\ i = 1, \ldots, n)}.$$

Demostración. Puede encontrarse en [25] (Proposición 15.2.1).

□

Volvamos al estudio del módulo M. Para ello, consideremos el anillo de funciones holomorfas en las variables $x_1, \ldots, x_n, t$, que denotaremos $\mathcal{O}_{x,t}$ y que, como siempre, se identifica con el anillo de series convergentes $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n, t\}$. Igualmente, denotamos por $\mathcal{D}_{x,t}$ al anillo de operadores diferenciales lineales en las variables $x_1, \ldots, x_n, t$:

$$\mathcal{D}_{x,t} = \mathcal{O}_{x,t}[\partial_1, \ldots, \partial_n, \partial_t] \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{x,t}).$$

Entonces, podemos dotar a $M[t^{-1}] = M[f^{-1}]$ de una estructura de $\mathcal{D}_{x,t}$-módulo a la izquierda como sigue. Dado $g(s)f^s \in M[f^{-1}]$ con $g(s) \in \mathcal{O}[f^{-1}, s]$:

- Los términos en x_i $(i = 1, \ldots, n)$ y t actúan como hasta ahora, es decir, si tenemos $\varphi(x_1, \ldots, x_n, t) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x_1, \ldots, x_n)t^k \in \mathcal{O}_{x,t}$, entonces:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, t)(g(s)f^s) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x_1, \ldots, x_n)g(s+k)f^{s+k},$$

  que resulta una serie convergente por un razonamiento análogo al realizado en el Lema 2.4.

- El término ∂_t actúa como la conexión $\nabla : M[f^{-1}] \to M[f^{-1}]$ definida en la Proposición 2.7, es decir:

$$\partial_t(g(s)f^s) = -t^{-1}(s+1)(g(s)f^s) = -sg(s-1)f^{s-1}.$$

  Nótese que el hecho de definir $\partial_t = \nabla$ nos asegura que ∂_t conmuta con las x_i y las ∂_i, y además $[\partial_t, \varphi(t)] = \varphi'(t)$.

Podemos entonces definir $N = \mathcal{D}_{x,t}f^s$ (i.e. el $\mathcal{D}_{x,t}$-módulo generado por f^s), que verificará las siguientes contenciones (que, en general, serán estrictas):

$$M \subset N \subset M[t^{-1}].$$

La segunda contención es clara, pues N es un sub-$\mathcal{D}_{x,t}$-módulo de $M[t^{-1}]$ generado por un elemento. En cuanto a la primera, recordemos que $M = \mathcal{D}[s]f^s$ y $\partial_t = -t^{-1}(s+1)$, luego $s = -t\partial_t - 1$ y $\mathcal{D}[s] \subset \mathcal{O}[t, \partial_1, \ldots, \partial_n, \partial_t] \subset \mathcal{D}_{x,t}$, de donde se sigue la contención $M \subset N$.

El siguiente lema nos permitirá posteriormente relacionar el sistema diferencial de Gauss-Manin con el módulo N (y, en consecuencia, con el polinomio de Bernstein de f):

Lema 2.15. *Sea $D_i = \partial_i + (\partial_i f)\partial_t$ para todo $i = 1, \ldots, n$, el ideal a la izquierda de $\mathcal{D}_{x,t}$ generado por $\{t - f, D_1, \ldots, D_n\}$ es maximal.*

Demostración. En primer lugar, puede probarse que la aplicación $\phi : \mathcal{D}_{x,t} \to \mathcal{D}_{x,t}$ tal que:

$$\begin{aligned} &\phi(t) = t - f, \\ &\phi(x_i) = x_i \text{ para todo } i = 1, \ldots, n, \\ &\phi(\partial_t) = \partial_t, \\ &\phi(\partial_i) = \partial_i + (\partial_i f)\partial_t \text{ para todo } i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

define un automorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras (ver [7]), de manera que el ideal $\mathcal{D}_{x,t}(t, \partial_1, \ldots, \partial_n)$ es llevado por ϕ en el ideal $\mathcal{D}_{x,t}(t - f, D_1, \ldots, D_n)$. Por tanto, bastará probar que el ideal a la izquierda $\mathcal{D}_{x,t}(t, \partial_1, \ldots, \partial_n)$ es maximal, para lo que tomaremos un elemento $P \notin \mathcal{D}_{x,t}(t, \partial_1, \ldots, \partial_n)$ y veremos que $\mathcal{D}_{x,t}(t, \partial_1, \ldots, \partial_n, P)$ contiene una unidad (y por tanto es igual a $\mathcal{D}_{x,t}$).

En principio, P será de la forma $P = \sum_{k=0}^{d} \sum_{\alpha} a_{\alpha,k}(x_1, \ldots, x_n, t)\partial^{\alpha}\partial_t^k$, pero los términos con $|\alpha| > 0$ pertenecerán a $\mathcal{D}_{x,t}(t, \partial_1, \ldots, \partial_n)$. Igualmente, los términos de los $a_{\alpha,k}$ en los que aparezca alguna potencia de t pertenecerán al ideal, de manera que podemos considerar que P es de la forma:

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k \partial_t^k, \quad \text{con } a_k(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{O} \text{ para todo } k = 0, \ldots, d \text{ y } a_d \neq 0.$$

Dado que $[\partial_t^k, t] = k\partial_t^{k-1}$ y t conmuta con los a_k (que no dependen de t), si llamamos $C_t(Q)$ al conmutador $[Q, t]$ y lo aplicamos d veces a P, tendremos que $C_t^d(P) = d!a_d \in \mathcal{D}_{x,t}(t, \partial_1, \ldots, \partial_n, P)$. Entonces, a_d pertenece a este ideal. Distinguimos dos casos:

- Si a_d no se anula en el origen, entonces es invertible y por tanto es una unidad.
- Si a_d se anula en el origen, entonces existirá un cierto término $c_\alpha x^\alpha$ de a_d con $c_\alpha \neq 0$ y tal que $|\alpha| \geq 1$ sea mínimo. Ahora bien, como $[\partial_i, a_d] = \frac{\partial a_d}{\partial x_i}$ pertenece al ideal para todo $i = 1, \ldots, n$ (y por tanto también sus derivadas sucesivas), tenemos que $\dfrac{\partial^\alpha a_d}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ es un elemento del ideal cuyo valor en el origen es $c_\alpha \alpha_1! \ldots \alpha_n! \neq 0$, luego el ideal contiene una unidad.

Concluimos así que el ideal a la izquierda $\mathcal{D}_{x,t}(t, \partial_1, \ldots, \partial_n)$ es maximal, y con ello que $\mathcal{D}_{x,t}(t - f, D_1, \ldots, D_n)$ también lo es.

□

Una consecuencia inmediata de este lema es la siguiente:

Corolario 2.16. *Se tiene el isomorfismo de $\mathcal{D}_{x,t}$-módulos:*

$$N \cong \frac{\mathcal{D}_{x,t}}{\mathcal{D}_{x,t}(t - f, D_1, \ldots, D_n)}.$$

Demostración. Recordemos que, por el primer teorema de isomorfía, se tiene:

$$N = \mathcal{D}_{x,t} f^s \cong \frac{\mathcal{D}_{x,t}}{\mathrm{ann}_{\mathcal{D}_{x,t}}(f^s)}.$$

Por otro lado, $(t - f)f^s = f^{s+1} - f^{s+1} = 0$ y:

$$\begin{aligned} D_i f^s &= (\partial_i + (\partial_i f)\partial_t) f^s = s f^{s-1}(\partial_i f) - (\partial_i f) t^{-1}(s+1) f^s \\ &= (\partial_i f) s f^{s-1} - (\partial_i f) s f^{s-1} = 0 \text{ para todo } i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

de manera que $\mathcal{D}_{x,t}(t-f, D_1, \ldots, D_n) \subseteq \mathrm{ann}_{\mathcal{D}_{x,t}}(f^s)$. Dado que $\mathrm{ann}_{\mathcal{D}_{x,t}}(f^s) \neq \mathcal{D}_{x,t}$ (ya que $1 \notin \mathrm{ann}_{\mathcal{D}_{x,t}}(f^s)$), por la maximalidad del ideal $\mathcal{D}_{x,t}(t-f, D_1, \ldots, D_n)$ concluimos que $\mathrm{ann}_{\mathcal{D}_{x,t}}(f^s) = \mathcal{D}_{x,t}(t-f, D_1, \ldots, D_n)$. De aquí:

$$N \cong \frac{\mathcal{D}_{x,t}}{\mathrm{ann}_{\mathcal{D}_{x,t}}(f^s)} = \frac{\mathcal{D}_{x,t}}{\mathcal{D}_{x,t}(t-f, D_1, \ldots, D_n)}.$$

□

Observación. De este resultado se deduce, en virtud de la Proposición 2.14, que la cohomología de de Rham de N es justamente la fibra en el origen del sistema diferencial de Gauss-Manin de f.

El objetivo ahora es hacer uso de este isomorfismo para calcular la cohomología de de Rham de N relativa a las variables $x_1, \ldots, x_n$ (esto es, sin considerar la variable t) en el caso en que f tenga una singularidad aislada en el origen. Para ello, hemos de establecer algunos resultados previos:

Lema 2.17 (Lema de de Rham)**.** *Si f tiene una singularidad aislada en el origen, el complejo de $\mathcal{O}$-módulos:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{df\wedge} \Omega^1 \xrightarrow{df\wedge} \ldots \xrightarrow{df\wedge} \Omega^n \longrightarrow 0$$

es acíclico en grados menores que n.

Demostración. La prueba de este resultado puede encontrarse en [17] (Capítulo I, Sección 4.3).

□

Consideremos el complejo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales $K^\bullet = (\Omega^\bullet[\partial_t], \underline{d})$ dado por:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}[\partial_t] \xrightarrow{\underline{d}} \Omega^1[\partial_t] \xrightarrow{\underline{d}} \ldots \xrightarrow{\underline{d}} \Omega^n[\partial_t] \longrightarrow 0,$$

donde la diferencial $\underline{d} : \Omega^p[\partial_t] \to \Omega^{p+1}[\partial_t]$ viene dada por:

$$\underline{d}\left(\sum_{i=0}^{k} \omega_i \partial_t^i\right) = \sum_{i=0}^{k} d\omega_i \partial_t^i - \sum_{i=0}^{k} (df \wedge \omega_i)\partial_t^{i+1}.$$

Observación. Es fácil comprobar a partir de las propiedades de la diferencial de Ω^p y del producto exterior que $K^\bullet$ es, en efecto, un complejo de cocadenas.

La siguiente proposición nos va a permitir emplear este complejo para el cálculo de la cohomología de de Rham de N:

Proposición 2.18. *El complejo* $\mathrm{DR}(N)$ *es isomorfo como complejo de* $\mathbb{C}$*-espacios vectoriales a* $K^\bullet = (\Omega^\bullet[\partial_t], \underline{d})$.

Demostración. En primer lugar observamos que N es un $\mathcal{O}[\partial_t]$-módulo libre de rango 1: en efecto, recordemos que $N \cong \mathcal{D}_{x,t}/\mathcal{D}_{x,t}(t-f, D_1, \ldots, D_n)$ como $\mathcal{D}_{x,t}$-módulos (en particular como $\mathcal{O}[\partial_t]$-módulos) y todo elemento h de este módulo puede escribirse como la clase de un representante de la forma $P = \sum_{k=0}^d a_k \partial_t^k \in \mathcal{O}[\partial_t]$, luego:

$$h = \overline{P} = \overline{\sum_{k=0}^d a_k \partial_t^k} = \left(\sum_{k=0}^d a_k \partial_t^k\right) \overline{1}.$$

y por tanto $\mathcal{D}_{x,t}/\mathcal{D}_{x,t}(t-f, D_1, \ldots, D_n)$ está generado como $\mathcal{O}[\partial_t]$-módulo por $\overline{1}$ (con lo que es libre de rango 1). Concluimos que $N \cong \mathcal{O}[\partial_t]$.

Entonces:

$$\Omega^p \otimes_{\mathcal{O}} N \cong \Omega^p \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}[\partial_t] \cong \Omega^p[\partial_t], \quad \text{para todo } p = 1, \ldots, n,$$

donde el elemento $\omega \otimes \overline{\sum_{i=0}^k f_i \partial_t^i} \in \Omega^p \otimes \mathcal{D}_{x,t}/\mathcal{D}_{x,t}(t-f, D_1, \ldots, D_n)$ se identifica con $\sum_{i=0}^k f_i \omega \partial_t^i \in \Omega^p[\partial_t]$. Veamos que las diferenciales conmutan:

Sea $\underline{\omega} = \displaystyle\sum_{i=0}^k \omega_i \partial_t^i = \sum_{i=0}^k \left(\sum_{I \in I_p} g_{i,I} dx_I\right) \partial_t^i \in \Omega^p[\partial_t]$, este elemento se identifica a través del isomorfismo anterior con $\displaystyle\sum_{i=0}^k \left(\sum_{I \in I_p} dx_I\right) \otimes \overline{g_{i,I}\partial_t^i}$, que por la diferencial del complejo de de Rham es llevado a:

$$\sum_{i=0}^k \sum_{I \in I_p} \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dx_I \otimes \overline{\partial_j (g_{i,I} \partial_t^i)} = \sum_{i=0}^k \sum_{I \in I_p} \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dx_I \otimes \overline{(\partial_j g_{i,I})\partial_t^i + g_{i,I}\partial_t^i \partial_j}$$
$$= \sum_{i=0}^k \sum_{I \in I_p} \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dx_I \otimes \overline{(\partial_j g_{i,I})\partial_t^i - (\partial_j f) g_{i,I} \partial_t^{i+1}}.$$

Este elemento se identifica a su vez con:

$$\sum_{i=0}^k \left(\sum_{I \in I_p} \sum_{j=1}^n (\partial_j g_{i,I}) dx_j \wedge dx_I\right) \partial_t^i - \sum_{i=0}^k \left(\sum_{j=1}^n (\partial_j f) dx_j \wedge \sum_{I \in I_p} g_{i,I} dx_I\right) \partial_t^{i+1}. \quad (2.1)$$

Analicemos cada uno de los dos sumandos por separado:

- $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\left(\sum_{I\in I_p}\sum_{j=1}^{n}(\partial_j g_{i,I})dx_j\wedge dx_I\right)\partial_t^i=\sum_{i=0}^{k}\left(\sum_{I\in I_p}dg_{i,I}\wedge dx_I\right)\partial_t^i=\sum_{i=0}^{k}d\omega_i\partial_t^i,$

- $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n}(\partial_j f)dx_j\wedge\sum_{I\in I_p}g_{i,I}dx_I\right)\partial_t^{i+1}=\sum_{i=0}^{k}(df\wedge\omega_i)\partial_t^{i+1},$

donde hemos utilizado que $dh=\sum_{j=1}^{n}(\partial_j h)dx_j$ para cualquier $h\in\mathcal{O}$ y la definición de la diferencial de Ω^p.

Así, el elemento (2.1) es justamente $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}d\omega_i\partial_t^i-\sum_{i=0}^{k}(df\wedge\omega_i)\partial_t^{i+1}=\underline{d}\underline{\omega}$, con lo que, efectivamente, las diferenciales conmutan y ambos complejos son isomorfos.

□

Lema 2.19. *El endomorfismo $\partial_t: H^p(K^\bullet)\to H^p(K^\bullet)$ es sobreyectivo para $p=1,\ldots,n$ e inyectivo para $p=2,\ldots,n$.*

Demostración.

- Sobreyectividad: sea $[\underline{\omega}]\in H^p(K^\bullet)$ con $\underline{\omega}=\sum_{i=0}^{k}\omega_i\partial_t^i\in\Omega^p[\partial_t]$ (podemos suponer siempre $k\geq 2$ tomando $\omega_i=0$ para todo i mayor que el grado de $\underline{\omega}$) tal que $\underline{d}\underline{\omega}=0$ y $p\geq 1$, tenemos que:

$$0=\underline{d}\underline{\omega}=\sum_{i=0}^{k}d\omega_i\partial_t^i-\sum_{i=0}^{k}(df\wedge\omega_i)\partial_t^{i+1}=d\omega_0+\sum_{i=1}^{k+1}(d\omega_i-df\wedge\omega_{i-1})\partial_i^t,$$

luego $d\omega_0=0$ y $d\omega_1=df\wedge\omega_0$. Como $p\geq 1$, por el Lema de Poincaré, existe $\chi_0\in\Omega^{p-1}$ tal que $d\chi_0=\omega_0$, y por tanto $d(\omega_1+df\wedge\chi_0)=d\omega_1-df\wedge d\chi_0=df\wedge\omega_0-df\wedge\omega_0=0$. Nuevamente, por el Lema de Poincaré, existirá $\chi_1\in\Omega^{p-1}$ tal que $d\chi_1=\omega_1+df\wedge\chi_0$. Entonces:

$$\underline{d}(\chi_0+\chi_1\partial_t)=d\chi_0+(d\chi_1-df\wedge\chi_0)\partial_t-(df\wedge\chi_1)\partial_t^2=\omega_0+(\omega_1-df\wedge\chi_1\partial_t)\partial_t,$$

lo que implica, despejando ω_0 y sustituyendo en $\underline{\omega}$:

$$[\underline{\omega}]=[\underline{d}(\chi_0+\chi_1\partial_t)]+\left[df\wedge\chi_1\partial_t+\sum_{i=2}^{k}\omega_i\partial_t^i\right]=\partial_t\left[df\wedge\chi_1+\sum_{i=2}^{k}\omega_i\partial_t^{i-1}\right],$$

obteniendo así la sobreyectividad para $p\geq 1$.

- Inyectividad: sea $[\underline{\omega}] \in H^p(K^\bullet)$ para $p \geq 2$ con $\underline{\omega} \in \Omega^p[\partial_t]$ tal que $\underline{d\omega} = 0$ y $\partial_t[\underline{\omega}] = [\underline{\omega}\partial_t] = 0$, tenemos que ha de existir $\underline{\chi} = \sum_{i=0}^k \chi_i \partial_t^i \in \Omega^{p-1}[\partial_t]$ tal que $\underline{d}\underline{\chi} = \underline{\omega}\partial_t$. Pero como $\underline{d}\underline{\chi}$ tiene por término independiente a $d\chi_0$, la única posibilidad para que se dé esta igualdad es que $d\chi_0 = 0$, y dado que $\chi_0 \in \Omega^{p-1}$ con $p-1 \geq 1$, por el Lema de Poincaré existe $\theta_0 \in \Omega^{p-2}$ tal que $d\theta_0 = \chi_0$. Entonces:

$$\underline{\chi} - \underline{d}\theta_0 = \chi_0 + \sum_{i=1}^k \chi_i \partial_t^i - d\theta_0 + (df \wedge \theta_0)\partial_t = \sum_{i=1}^k \chi_i \partial_t^i + (df \wedge \theta_0)\partial_t,$$

  luego podemos escribir $\underline{\chi} = \underline{\chi}'\partial_t$ con $\underline{\chi}' = \sum_{i=1}^k \chi_i \partial_t^{i-1} + (df \wedge \theta_0)$, y por tanto $\underline{\omega}\partial_t = \underline{d}\underline{\chi}'\partial_t$. Igualando término a término deducimos que $\underline{\omega} = \underline{d}\underline{\chi}'$, de donde $[\underline{\omega}] = [\underline{d}\underline{\chi}'] = 0$ y tenemos la inyectividad para $p \geq 2$.

$\square$

Lema 2.20. *Sea $\omega \in \Omega^p$ para $p \geq 2$, entonces $\omega \in \operatorname{Im} \underline{d}$ si y sólo si existe $\theta \in \Omega^{p-2}$ tal que $\omega = df \wedge d\theta$.*

Demostración. Si $\omega = df \wedge d\theta$, tomando $\chi_0 = -df \wedge \theta \in \Omega^{p-1}$ tenemos que $d\chi_0 = df \wedge d\theta = \omega$ y $df \wedge \chi_0 = 0$, luego $\underline{d}\chi_0 = d\chi_0 - (df \wedge \chi_0)\partial_t = \omega$. Por tanto, $\omega \in \operatorname{Im} \underline{d}$.

Para la otra implicación, sea $\underline{\chi} = \sum_{i=0}^m \chi_i \partial_t^i \in \Omega^{p-1}[\partial_t]$ tal que $\omega = \underline{d}\underline{\chi}$, razonaremos por inducción sobre m:

- Para $m = 0$, tenemos que $\omega = d\chi_0$ y $df \wedge \chi_0 = 0$. Por el Lema de de Rham, esto último se tiene si y sólo si existe $\theta_0 \in \Omega^{p-2}$ tal que $\chi_0 = df \wedge \theta_0$, de manera que $\omega = d(df \wedge \theta_0) = d^2 f \wedge \theta_0 - df \wedge d\theta_0 = df \wedge (-\theta_0)$.

- Supongámoslo cierto para $m-1$ y veamos que se tiene para m: de $\omega = \underline{d}\underline{\chi}$ obtenemos que $df \wedge \chi_m = 0$, y del Lema de de Rham deducimos que existe $\theta_m \in \Omega^{p-2}$ tal que $\chi_m = df \wedge \theta_m$. Entonces:

$$\underline{d}\left(\theta_m \partial_t^{m-1}\right) = d\theta_m \partial_t^{m-1} - (df \wedge \theta_m)\partial_t^m = d\theta_m \partial_t^{m-1} - \chi_m \partial_t^m,$$

  y por tanto $\underline{\chi}' = \underline{\chi} + \underline{d}\left(\theta_m \partial_t^{m-1}\right)$ tiene como máximo términos de orden $m-1$. Además, $\underline{d}\underline{\chi}' = \underline{d}\underline{\chi} + \underline{d}^2\left(\theta_m \partial_t^{m-1}\right) = \omega + 0 = \omega$, luego podemos aplicar la hipótesis de inducción para obtener que existe $\theta \in \Omega^{p-2}$ con $\omega = df \wedge d\theta$.

$\square$

Por otro lado, podemos considerar $H^p(K^\bullet)$ como un $\mathcal{D}_t$-módulo filtrado de forma natural (siendo $\mathcal{D}_t = \mathbb{C}\{t\}[\partial_t]$), donde el término m-ésimo de la filtración, $F_m H^p(K^\bullet)$, viene dado para $m \geq 0$ por:

$$F_m H^p(K^\bullet) = \left\{ [\omega] \in H^p(K^\bullet) \;\middle|\; \omega = \sum_{k=0}^m \omega_i \partial_t^i, \quad \omega_i \in \Omega^p \;\; \forall i = 0, \ldots, m \right\}.$$

Recordemos ahora el concepto de *buena filtración* de un $\mathcal{D}$-módulo M. A continuación estableceremos un resultado que nos dirá que la filtración anterior resulta ser una buena filtración en el caso $p = n$.

Definición 2.21. Una filtración $\{F_k M\}_{k\geq 0}$ de un $\mathcal{D}$-módulo M se dice que es una *buena filtración* si $F_k\mathcal{D} \cdot F_r M \subseteq F_{k+r}M$ para cualesquiera $k, r \geq 0$ y se verifica alguna de las siguientes dos condiciones equivalentes:

i) Cada $F_k M$ es un $\mathcal{O}$-módulo noetheriano y existe un cierto $r_0 \geq 0$ tal que:

$$F_k\mathcal{D} \cdot F_{r_0}M = F_{k+r_0}M$$

para todo $k \geq 0$.

ii) $\operatorname{gr} M$ es un $\operatorname{gr}\mathcal{D}$-módulo noetheriano.

Para la prueba de la siguiente proposición tendremos que admitir un resultado cuya demostración no es en absoluto sencilla y excede los objetivos de este trabajo:

Teorema 2.22. *$F_0H^p(K^\bullet)$ es un $\mathbb{C}\{t\}$-módulo noetheriano para todo $p = 0, \ldots, n$. Más aún, $G := F_0H^n(K^\bullet)$ es libre y finitamente generado de rango μ.*

Demostración. La prueba de estos resultados la dieron Brieskorn y Sebastiani en 1970, en sus respectivos artículos [6] y [29]. □

Proposición 2.23. *Se tiene que:*

(1) $H^p(K^\bullet) = 0$ para $p \neq 1, n$.

(2) La filtración natural de $H^n(K^\bullet)$ es una buena filtración cuyo término de orden cero $G = F_0H^n(K^\bullet)$ viene dado para $n \geq 2$ por:

$$G = \frac{\Omega^n}{df \wedge d\Omega^{n-2}},$$

que es el llamado ***retículo de Brieskorn****.*

Demostración.

(1) Para $p = 0$ tenemos que $H^0(K^\bullet) = \ker(\underline{d} : \mathcal{O}[\partial_t] \to \Omega^1[\partial_t])$. Supongamos que existe $\underline{\omega} \neq 0$ tal que $\underline{d\omega} = 0$. Si $\underline{\omega} = \sum_{i=0}^{k} g_i\partial_t^i \in \mathcal{O}[\partial_t]$ con $g_k \neq 0$, entonces:

$$0 = \underline{d\omega} = dg_0 + \sum_{i=1}^{k}(dg_i - df \wedge g_{i-1})\partial_t^i - (df \wedge g_k)\partial_t^{k+1}.$$

De aquí, $df \wedge g_k = 0$, pero dado que $g_k \in \mathcal{O}$ y $df \neq 0$, esto sólo puede ocurrir si $g_k = 0$, llegando a contradicción. Concluimos que $H^0(K^\bullet) = 0$.

Veamos ahora qué ocurre para $2 \leq p < n$, donde sabemos que $\partial_t : H^p(K^\bullet) \to H^p(K^\bullet)$ es un isomorfismo (Lema 2.19):

Sea $\omega \in \Omega^p$ tal que $\underline{d}\omega = d\omega - (df \wedge \omega)\partial_t = 0$, entonces $d\omega = df \wedge \omega = 0$. Por el Lema de Poincaré sabemos que existe $\eta \in \Omega^{p-1}$ tal que $\omega = d\eta$, y por tanto $\underline{d}\eta = \omega - (df \wedge \eta)\partial_t$. Así, $[\omega] = [(df \wedge \eta)\partial_t)] = \partial_t[df \wedge \eta]$ y $\partial_t^{-1}[\omega] = [df \wedge \eta] \in F_0H^p(K^\bullet)$, deduciendo la estabilidad de $F_0H^p(K^\bullet)$ por ∂_t^{-1}. Hasta aquí lo obtenido es cierto también para $p = n$.

Pero como $p < n$, por el Lema de de Rham sabemos que $df \wedge \omega = 0$ implica $\omega = df \wedge \chi$ para algún $\chi \in \Omega^{p-1}$. Sea entonces $\eta = d\chi$, tendremos que $\underline{d}\chi = \eta - (df \wedge \chi)\partial_t = \eta - \omega\partial_t$, de manera que $[\eta] = [\omega\partial_t] = \partial_t[\omega]$ y $[\omega] = \partial_t^{-1}[\eta] \in \partial_t^{-1}F_0H^p(K^\bullet)$. Deducimos que $\partial_t^{-1}F_0H^p(K^\bullet) = F_0H^p(K^\bullet)$ para $p < n$.

Observemos ahora que $a \in F_kH^p(K^\bullet)$ si y sólo si existe $\underline{\omega} = \omega_k\partial_t^k$ con $\omega_k \in \Omega^p$ tal que $a = [\underline{\omega}]$:

La implicación hacia la izquierda es trivial. Para la contraria, procederemos por inducción en k: para $k = 0$ es inmediato y supuesto cierto para $k-1$, consideremos $a = [\underline{\omega}]$ con $\underline{\omega} = \sum_{i=0}^k \omega_i\partial_t^i$. Como $\underline{d\omega} = 0$, esto implica que $d\omega_0 = 0$, luego existe $\eta_0 \in \Omega^{p-1}$ tal que $d\eta_0 = \omega_0$. Entonces $\underline{d}\eta_0 = \omega_0 - (df \wedge \eta_0)\partial_t$ y $\underline{\omega} - \underline{d}\eta_0 = \sum_{i=1}^k \omega_i\partial_t^i + (df \wedge \eta_0)\partial_t = \left(\sum_{i=1}^k \omega_i\partial_t^{i-1} + df \wedge \eta_0\right)\partial_t = \underline{\theta}\partial_t$, de donde obtenemos que $[\underline{\omega}] = \partial_t[\underline{\theta}]$, con $[\underline{\theta}] = \left[\sum_{i=1}^k \omega_i\partial_t^{i-1} + df \wedge \eta_0\right] \in F_{k-1}H^p(K^\bullet)$. Aplicando la hipótesis de inducción, tenemos que existe $\theta_{k-1}\partial_t^{k-1}$ tal que $[\underline{\theta}] = [\theta_{k-1}\partial_t^{k-1}]$. Finalmente, $a = [\underline{\omega}] = \partial_t[\underline{\theta}] = \partial_t[\theta_{k-1}\partial_t^{k-1}] = [\theta_{k-1}\partial_t^k]$, como queríamos.

De todo lo anterior se deduce que $F_kH^p(K^\bullet) \subseteq \partial_t^kF_0H^p(K^\bullet) \subseteq F_0H^p(K^\bullet) \subseteq F_kH^p(K^\bullet)$ para todo k, luego la filtración es trivial para $p < n$ y $H^p(K^\bullet) = F_0H^p(K^\bullet)$. Por el Teorema 2.22, deducimos que $H^p(K^\bullet)$ es un $\mathbb{C}\{t\}$-módulo noetheriano, lo que implica que es un $\mathbb{C}\{t\}$-módulo libre de rango finito (ver [25], Lema 10.3.1).

Supongamos entonces que no es nulo, y por tanto es libre de rango $r \geq 1$. Sea $\{e_1, \ldots, e_r\}$ una base de $H^p(K^\bullet)$ como $\mathbb{C}\{t\}$-módulo, entonces existen $c_{ij} \in \mathbb{C}\{t\}$ tales que $\partial_te_j = \sum_{i=1}^r c_{ij}e_i$, de manera que $C = (c_{ij})$ es la matriz de ∂_t respecto de esta base. Si un elemento $a = \sum_{j=1}^r a_je_j$ pertenece a $\ker\partial_t$, entonces, por la regla de Leibniz:

$$0 = \partial_ta = \sum_{j=1}^r \left(a_j'e_j + \sum_{i=1}^r a_jc_{ij}e_i\right),$$

dando lugar, imponiendo la independencia lineal, al sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales $\{a'_j = -\sum_{i=1}^r c_{ji}a_i,\ j = 1, \ldots, r\}$. Por el Teorema de Cauchy, sabemos que el conjunto de soluciones de este sistema es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión r.

Pero en el Lema 2.19 vimos que para $p \geq 2$ la aplicación $\partial_t : H^p(K^\bullet) \to H^p(K^\bullet)$ es inyectiva, de donde $\ker \partial_t = 0$. Esto implica que el espacio vectorial de soluciones del sistema anterior ha de ser trivial y por tanto $r = 0$, llegando así a una contradicción. Concluimos que $H^p(K^\bullet) = 0$ para $p \neq 1, n$.

(2) El Lema 2.20 nos dice que, si $n \geq 2$, el término de orden cero de la filtración de $H^n(K^\bullet)$ es justamente $G = \dfrac{\Omega^n}{df \wedge d\Omega^{n-2}}$. Además, aplicando lo visto en (1) para $p = n$, obtenemos que si $[\omega] \in G$, entonces $\partial_t^{-1}[\omega] = [df \wedge \chi]$ para algún $\chi \in \Omega^{n-1}$. Y recíprocamente, si $[df \wedge \chi] \in \dfrac{df \wedge \Omega^{n-1}}{df \wedge d\Omega^{n-2}}$, entonces $[df \wedge \chi] = \partial_t^{-1}[d\chi] \in \partial_t^{-1}G$, luego $\partial_t^{-1}G = \dfrac{df \wedge \Omega^{n-1}}{df \wedge d\Omega^{n-2}} \subseteq G$. Por tanto, por el tercer teorema de isomorfía:

$$\frac{G}{\partial_t^{-1}G} \cong \frac{\Omega^n}{df \wedge \Omega^{n-1}}.$$

Por otro lado, el isomorfismo $\Omega^n \cong \mathcal{O}$ que identifica $\omega = gdx$ con $g \in \mathcal{O}$ lleva $df \wedge dx_{1,\ldots,\widehat{i},\ldots n} = (\partial_i f)dx \in df \wedge \Omega^{n-1}$ en $\partial_i f$. Como los $df \wedge dx_{1,\ldots,\widehat{i},\ldots n}$, $i = 1, \ldots, n$ forman una base de $df \wedge \Omega^{n-1}$ como $\mathcal{O}$-módulo, $df \wedge \Omega^{n-1}$ es llevado en $J_f = \mathcal{O}(\partial_1 f, \ldots, \partial_n f)$, de manera que:

$$\frac{\Omega^n}{df \wedge \Omega^{n-1}} \cong \frac{\mathcal{O}}{J_f}.$$

En virtud de la Proposición 2.12, este último espacio vectorial es de dimensión μ (número de Milnor de f).

Ahora bien, dado que nos encontramos en el último término del complejo, dada $\underline{\omega} = \sum_{i=0}^k \omega_i \partial_t^i \in \Omega^n[\partial_t]$, tendremos que cada $\omega_i \in \Omega^n$ será un cociclo y podremos escribir $[\omega] = \sum_{i=0}^k \partial_t^i[\omega_i]$ con $[\omega_i] \in G$ para todo $i = 0, \ldots, k$. Como G es estable por ∂_t^{-1}, aplicando ∂_t a ambos lados deducimos que $G \subset \partial_t G$ y por inducción que $\partial_t^i G \subset \partial_t^j G$ para todo $j \geq i$. En particular, obtenemos que $[\omega] \in \partial_t^k G$, con lo que $F_k H^n(K^\bullet) \subset \partial_t^k G$ y, como $\partial_t^k G \subset F_k H^n(K^\bullet)$, deducimos que $F_k H^n(K^\bullet) = \partial_t^k G$. Esto implica que $F_k \mathcal{D}_t \cdot F_0 H^n(K^\bullet) = F_k H^n(K^\bullet)$, y tenemos la primera de las condiciones necesarias para tener una buena filtración.

Para ver la segunda, observemos que:

$$\frac{G}{\partial_t^{-1}G} \cong \frac{\partial_t G}{G} = \frac{F_1 H^n(K^\bullet)}{G},$$

a través del isomorfismo $\overline{\partial_t}(\bar{g}) = \overline{\partial_t g}$. Y repitiendo este razonamiento por inducción deducimos que:

$$\frac{F_k H^n(K^\bullet)}{F_{k-1}H^n(K^\bullet)} \cong \frac{G}{\partial_t^{-1}G},$$

para todo $k \geq 1$. De aquí deducimos que todos estos cocientes son espacios vectoriales de dimensión finita (y en particular $\mathbb{C}\{t\}$-módulos finitamente generados). Considerando entonces las sucesiones exactas para $k \geq 1$:

$$0 \to F_{k-1}H^n(K^\bullet) \to F_k H^n(K^\bullet) \to \frac{F_k H^n(K^\bullet)}{F_{k-1}H^n(K^\bullet)} \to 0,$$

vemos que todos los términos de la filtración son $\mathbb{C}\{t\}$-módulos finitamente generados. En efecto, $G = F_0 H^n(K^\bullet)$ lo es por el Teorema 2.22, y supuesto que $F_{k-1}H^n(K^\bullet)$ lo es, tenemos que $F_k H^n(K^\bullet)$ es el término central de una sucesión exacta cuyos otros dos términos son $\mathbb{C}\{t\}$-módulos finitamente generados, luego $F_k H^n(K^\bullet)$ también lo es. Concluimos así que todos los términos de la filtración son $\mathbb{C}\{t\}$-módulos finitamente generados y por tanto que se trata de una buena filtración.

□

Como consecuencia de esta proposición tenemos la cohomología de de Rham de N:

Corolario 2.24. *Se tiene que:*

$$H^p_{\mathrm{DR}}(N) \cong \begin{cases} G \otimes_{\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]} \mathbb{C}[\partial_t, \partial_t^{-1}] & \textit{si } p = n, \\ \\ 0 & \textit{si } p \neq 1, n. \end{cases}$$

Demostración. Como $\mathrm{DR}(N) \cong K^\bullet$, tenemos que $H^p_{\mathrm{DR}}(N) \cong H^p(K^\bullet)$ para todo $p = 0, \ldots, n$. Como sabemos por la proposición anterior que $H^p(K^\bullet) = 0$ para $p \neq 1, n$, obtenemos la misma conclusión para $H^p_{\mathrm{DR}}(N)$.

Para $p = n$, tenemos que $H^n_{\mathrm{DR}}(N) \cong H^n(K^\bullet)$, que hemos visto implícitamente en la proposición anterior que es un $\mathbb{C}[\partial_t, \partial_t^{-1}]$-módulo, ya que G es estable por ∂_t^{-1} y todos los términos de la filtración son de la forma $\partial_t^k G$. Por el mismo motivo, G es un $\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$-módulo y tiene sentido considerar $G \otimes_{\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]} \mathbb{C}[\partial_t, \partial_t^{-1}]$. Sea entonces el morfismo $\phi : G \otimes_{\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]} \mathbb{C}[\partial_t, \partial_t^{-1}] \to H^n(K^\bullet)$ dado por la extensión lineal de:

$$\phi(g \otimes h(\partial_t, \partial_t^{-1})) = h(\partial_t, \partial_t^{-1})(g).$$

Veamos que es invertible: como todos los elementos de $H^n(K^\bullet)$ son de la forma $\partial_t^k g$ para algún $k \geq 0$ y $g \in G$, podemos definir el morfismo $\psi : H^n(K^\bullet) \to G \otimes_{\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]} \mathbb{C}[\partial_t, \partial_t^{-1}]$ dado por $\psi(\partial_t^k g) = g \otimes \partial_t^k$. Observemos que está bien definido, pues si $\partial_t^k g = \partial_t^{k'} g'$ con $k \leq k'$, entonces $g' = \partial_t^{k-k'} g$ y:

$$\psi(\partial_t^{k'} g') = g' \otimes \partial_t^{k'} = \partial_t^{k-k'} g \otimes \partial_t^{k'} = g \otimes \partial_t^{k-k'} \partial_t^{k'} = g \otimes \partial_t^{k} = \psi(\partial_t^k g),$$

donde la tercera igualdad se tiene del hecho de que $\partial_t^{k-k'} \in \mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$.

Veamos que $\psi = \phi^{-1}$. Sean para ello, $g \in G$ y $h(\partial_t, \partial_t^{-1}) = \sum_{i=-k}^{k'} c_i \partial_t^i \in \mathbb{C}[\partial_t, \partial_t^{-1}]$:

- $(\phi \circ \psi)(\partial_t^k g) = \phi(g \otimes \partial_t^k) = \partial_t^k g$.
- $(\psi \circ \phi)(g \otimes h(\partial_t, \partial_t^{-1})) = \psi\left(\sum_{i=-k}^{k'} c_i \partial_t^i g\right) = \psi\left(\sum_{i=-k}^{-1} c_i \partial_t^i g\right) + \sum_{i=0}^{k'} c_i \psi(\partial_t^i g)$ $= \left(\sum_{i=-k}^{-1} c_i \partial_t^i g\right) \otimes 1 + \sum_{i=0}^{k'} c_i (g \otimes \partial_t^k) = g \otimes \sum_{i=-k}^{k'} c_i \partial_t^i = g \otimes h(\partial_t, \partial_t^{-1})$.

  En esta segunda comprobación se ha tenido en cuenta que $\sum_{i=-k}^{-1} c_i \partial_t^i g \in G$ por la estabilidad de ∂_t^{-1} (y, por inducción, de sus potencias) y la bilinealidad del producto tensorial.

Concluimos que ϕ es un isomorfismo y por tanto que:

$$H^n_{\mathrm{DR}}(N) \cong H^n(K^\bullet) \cong G \otimes_{\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]} \mathbb{C}[\partial_t, \partial_t^{-1}].$$

□

2.3. Conexiones meromorfas, regularidad y monodromía

En esta sección introduciremos el concepto de conexión meromorfa regular en una variable, así como el de monodromía, y veremos cómo se relacionan con el polinomio de Bernstein y el Teorema de Milnor para obtener el principal resultado de este trabajo.

Empecemos dando la definición de conexión meromorfa, que será similar a la de conexión definida anteriormente, pero esta vez se basará en el cuerpo de fracciones de $\mathbb{C}\{t\}$ (que recordemos que se corresponde con el cuerpo de gérmenes de funciones meromorfas en el origen). A partir de ahora este cuerpo lo denotaremos por K, de manera que $K = \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$.

Definición 2.25. Una *conexión meromorfa* es un K-espacio vectorial de dimensión finita V dotado de una aplicación $\mathbb{C}$-lineal $\nabla : V \to V$ que verifica la regla de Leibniz:

$$\nabla(\varphi v) = \varphi \nabla(v) + \varphi' \nabla(v),$$

para cualquier $\varphi \in K$ y $v \in V$.

Análogamente a lo expuesto en secciones previas, una conexión meromorfa V puede dotarse naturalmente de una estructura de $\mathcal{D}_t[t^{-1}]$-módulo (en particular de $\mathcal{D}_t$-módulo) como sigue. Dados $P = \sum_{i=0}^{k} a_i(t) \partial_t^i \in \mathcal{D}_t[t^{-1}]$ y $v \in V$, definimos:

$$P \cdot v = \sum_{i=0}^{k} a_i(t)\nabla^i(v).$$

Recíprocamente, cualquier $\mathcal{D}_t$-módulo que sea un K-espacio vectorial de dimensión finita será una conexión meromorfa con $\nabla = \partial_t$. Por ello, a partir de ahora nos referiremos a una conexión meromorfa como a un K-espacio vectorial de dimensión finita con estructura de $\mathcal{D}_t$-módulo.

Veamos que dar una conexión meromorfa es equivalente a dar una ecuación diferencial lineal con coeficientes meromorfos. Para ello hemos de introducir el concepto de *vector cíclico*:

Definición 2.26. Sea V una conexión meromorfa de dimensión n sobre K, se dice que un elemento $v \in V$ es un *vector cíclico* si el conjunto $\{\partial_t^i(v)\}_{i=0}^{n-1}$ es base de V como K-espacio vectorial.

Proposición 2.27. *Toda conexión meromorfa tiene un vector cíclico.*

Demostración. En [12] se da una prueba constructiva de este resultado (Proposición 2.3.1). □

Sea V una conexión meromorfa de dimensión n, por la proposición anterior sabemos que existe un vector cíclico $v \in V$. Entonces, al ser $\{\partial_t^i(v)\}_{i=0}^{n-1}$ base de V como K-espacio vectorial, tenemos que existen $g_i(t) \in K$ para $i = 0, \ldots, n-1$ tales que:

$$\partial_t^n v = \sum_{i=0}^{n-1} g_i(t)\partial_t^i v,$$

de manera que obtenemos la ecuación diferencial:

$$\partial_t^n u - \sum_{i=0}^{n-1} g_i(t)\partial_t^i u = 0. \tag{2.2}$$

La noción de regularidad en una conexión meromorfa admite varios enunciados equivalentes. Algunos de ellos requieren el concepto de retículo:

Definición 2.28. Sea V una conexión meromorfa de dimensión n sobre K, se dice que $R \subset V$ es un *retículo de* V si es un sub-$\mathbb{C}\{t\}$-módulo de V libre de rango n sobre $\mathbb{C}\{t\}$. Un retículo R se dirá *saturado* si es estable por la acción de $t\partial_t$.

Podemos ya definir qué se entiende por una *conexión meromorfa regular*:

Definición 2.29. Sea V una conexión meromorfa, diremos que V es *regular* si verifica alguna de las siguientes condiciones equivalentes (en [25] puede encontrarse una prueba de estas equivalencias):

(a) V admite un retículo saturado.

(b) V admite una base sobre K en la cual el operador $t\partial_t$ viene dado por una matriz con coeficientes en $\mathbb{C}\{t\}$.

(c) V admite una base sobre K en la cual el operador $t\partial_t$ viene dado por una matriz con coeficientes constantes.

(d) Para todo $\mathbb{C}\{t\}$-módulo noetheriano $R \subset V$, la cadena de $\mathbb{C}\{t\}$-módulos noetherianos.

$$R \subset R + (t\partial_t)R \subset \ldots \subset R + (t\partial_t)^r R \subset \ldots$$

es estacionaria. Dicho de otra forma, todo retículo R de V está contenido en un retículo saturado, que denominamos *saturado de R en V*, y que será de la forma:

$$\widetilde{R} = \sum_{i=0}^{r} (t\partial_t)^i R,$$

para algún $r \geq 0$.

Observación. Todas estas definiciones son a su vez equivalentes al hecho de que el origen sea un punto singular regular en el sentido de Fuchs de la ecuación (2.2), de ahí que hablemos de conexión meromorfa regular cuando se verifica alguna de ellas.

Recordemos algunos conceptos sobre ecuaciones diferenciales lineales que nos serán útiles:

Definición 2.30. Dos sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneos $U' = AU$ y $B' = BV$ con $A, B \in \mathcal{M}(n, K)$ (matrices cuadradas de orden n y coeficientes en K) se dicen *equivalentes* si existe una matriz invertible M de orden n tal que:

$$B = \frac{d}{dt} M \cdot M^{-1} + MAM^{-1}.$$

Observación. Puede comprobarse inmediatamente que esta condición equivale a que $V = MU$ sea solución del segundo sistema para cualquier solución U del primer sistema.

Dado un sistema diferencial lineal homogéneo con coeficientes meromorfos en el origen, si elegimos un $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño podemos asegurar que en el disco D_ε de radio ε las funciones meromorfas que lo definen no tengan polos fuera del origen, de manera que las soluciones holomorfas multiformes de dicho sistema (i.e. funciones holomorfas en $\widetilde{D_\varepsilon} = \{w \in \mathbb{C} \mid |e^{2\pi i w}| < \varepsilon\}$, el recubrimiento universal de D_ε, que son obtenidas mediante el cambio de variables $t = e^{2\pi i w}$), forman un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión n. Se puede consultar el Capítulo 3 de [8] (Trabajo de Fin de Grado) para más información al respecto.

Sea entonces $U(w) = (U_1(w), \ldots, U_n(w))$ una base de dichas soluciones (es decir, una matriz fundamental del sistema), donde cada U_i es un vector columna cuyas componentes son funciones holomorfas multiformes, como los coeficientes del sistema son funciones uniformes (holomorfas en D_ε^*), al reemplazar w por $w+1$ obtenemos una nueva base $U(w+1)$ del espacio de soluciones. De aquí que exista una matriz invertible C tal que:

$$U(w+1) = C \cdot U(w).$$

Definición 2.31. Con la notación anterior, la matriz C se denomina *matriz de monodromía del sistema diferencial*. Llamamos *monodromía del sistema diferencial* a la aplicación $\mathbb{C}$-lineal en el espacio de soluciones correspondiente a la matriz anterior.

Observación. Nótese que si $U' = AU$ y $V' = BV$ son sistemas equivalentes con matrices de monodromía C_A y C_B, respectivamente, entonces C_A y C_B son matrices semejantes y por tanto tienen los mismos autovalores. En efecto, dado que existe M tal que $V = MU$, tenemos que:

$$V(w+1) = M \cdot U(w+1) = MC_A \cdot U(w) = MC_A M^{-1} \cdot V(w),$$

de manera que $C_B = MC_A M^{-1}$.

La prueba de $(b) \Rightarrow (c)$ en las equivalencias de la Definición 2.29 se basa en el siguiente lema. Puede consultarse [12] para una prueba del mismo y para más información sobre estos resultados:

Lema 2.32. *Sea $U' = \frac{B(t)}{t}U$ un sistema diferencial donde $B(t)$ es una matriz con coeficientes en $\mathbb{C}\{t\}$ tal que $B(0)$ no tiene autovalores distintos que difieran en un entero, entonces el sistema anterior es equivalente a $V' = \frac{B(0)}{t}V$.*

Las soluciones del sistema $V' = \frac{B(0)}{t}V$ vienen dadas por $V = e^{B(0)\log t}$, de manera que:

$$\begin{aligned} V(w+1) &= e^{B(0)\log(e^{2\pi i(w+1)})} = e^{B(0)(\log(e^{2\pi i})+\log(e^{2\pi i w}))} \\ &= e^{2\pi i B(0)} e^{B(0)\log t} = e^{2\pi i B(0)} V(w). \end{aligned}$$

y por tanto la matriz de monodromía de este sistema es $C = e^{2\pi i B(0)}$. Deducimos que la matriz de monodromía del sistema $U' = \frac{B(t)}{t}U$ será semejante a C y por tanto sus autovalores coincidirán con los de C. Por otra parte, los autovalores de C son de la forma $e^{2\pi i\alpha}$ con α autovalor de $B(0)$.

Las condiciones del lema anterior pueden parecer restrictivas y, en efecto, no siempre se satisfacen. Sin embargo, en el caso en que $B(0)$ tenga autovalores distintos que difieran en un entero, se pueden aplicar unas determinadas transformaciones, denominadas *transformaciones de "shearing"*, que modifican los autovalores de $B(0)$ en un número entero, y el problema siempre puede acabar reduciéndose al caso anterior. Como modificar los autovalores de $B(0)$ en un entero no supone ningún cambio en los autovalores de $e^{2\pi i B(0)}$ (ya que $e^{2k\pi i} = 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$), tenemos en cualquier caso que los autovalores de la monodromía de cualquier sistema de la forma $U' = \frac{B(t)}{t}U$ con $B(t)$ matriz de coeficientes en $\mathbb{C}\{t\}$ (sistema regular) son de la forma $e^{2\pi i\alpha}$ con α autovalor de $B(0)$ (y, recíprocamente, todas las exponenciales de esta forma son autovalores de la monodromía). Este hecho será clave en lo que sigue.

Retomemos la notación de la sección anterior, y sea a partir de ahora $F = \partial_t^{-1}G$, de manera que $\partial_t : F \to G$ es una biyección. El objetivo es definir una conexión meromorfa a partir de la aplicación $\partial_t : F \to G$. Para ello, recordemos que en la prueba de la Proposición 2.23 vimos que:

$$\frac{G}{F} \cong \frac{\Omega^n}{df \wedge \Omega^{n-1}} \cong \frac{\mathcal{O}}{J_f},$$

donde la clase de un elemento $\omega = gdx \in \Omega^n$ se identifica con la clase de g en $\mathcal{O}/J_f$. Además, la acción de t en G/F se traduce en la multiplicación por f en $\mathcal{O}/J_f$. Veamos que G/F es un módulo de torsión:

Lema 2.33. *G/F es un $\mathbb{C}\{t\}$-módulo de torsión.*

Demostración. Sea $[\omega] \in G/F$ con $\omega = gdx \in \mathcal{O}/J_f$, dado que $f \in \mathfrak{m}$ (ya que $f(0) = 0$), por la Proposición 2.12 tenemos que existe un cierto $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k \in J_f$. De esta manera, $t^k[\omega]$ se identifica con la clase de $f^k g$ en $\mathcal{O}/J_f$, que es nula por pertenecer a J_f. Por ser un isomorfismo, deducimos que $t^k[\omega] = 0$, y por tanto G/F es un módulo de torsión.

□

Este lema permite extender la aplicación $\partial_t : F \to G$ a una conexión meromorfa $\partial_t : G \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} K \to G \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} K$. En efecto, por un lado tenemos que $F \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} K = G \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} K$ (una contención es clara y la otra se deduce de que, al ser G/F de torsión, todo elemento de G por una cierta potencia de t es un elemento de F) y por otro, al ser G libre de rango μ sobre $\mathbb{C}\{t\}$ (Teorema 2.22), se tiene que $G \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} K \cong \mathbb{C}\{t\}^\mu \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} K \cong K^\mu$, luego es un K-espacio vectorial de dimensión μ. La aplicación ∂_t se define como la extensión $\mathbb{C}$-lineal de:

$$\partial_t(a \otimes t^{-k}) = (\partial_t a) \otimes t^{-k} - ka \otimes t^{-k-1}.$$

Puede verse fácilmente que esta fórmula define una aplicación $\mathbb{C}$-lineal que verifica la regla de Leibniz. Esto último se debe a que se ha definido para que se comporte como lo haría la derivada usual (que sabemos que verifica esta regla) con una potencia (positiva o negativa) de t. Por tanto, se trata de una conexión meromorfa, que es la denominada *conexión de Gauss-Manin*.

Teorema 2.34. *La conexión de Gauss-Manin es regular.*

Demostración. Puede encontrarse en [20] (Teorema 4.1 y Lema 5.6).

□

Este teorema, de acuerdo con la definición (d) de regularidad, nos permite considerar los retículos saturados de F y G en $G \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} K$, que denotaremos $\widetilde{F}$ y $\widetilde{G}$, respectivamente. Veamos algunas propiedades de estos retículos saturados:

Proposición 2.35. *Las siguientes aplicaciones son biyectivas:*

(1) $t\partial_t : \widetilde{F} \to \widetilde{F}$.

(2) $\partial_t : \widetilde{F} \to \widetilde{G}$.

(3) $t : \widetilde{G} \to \widetilde{F}$.

Demostración.

(1) La prueba de la inyectividad se basa en las propiedades de la integración de formas, mientras que la sobreyectividad se tiene como consecuencia del *Teorema del Índice*. Una demostración detallada puede encontrarse en [20] (Lema 5.6).

(2) Veamos en primer lugar que ∂_t envía un elemento de $\widetilde{F}$ en $\widetilde{G}$, lo que basta comprobar para elementos de la forma $(t\partial_t)^k a$ con $a \in F$. Procedemos por inducción en k:

Para $k = 0$, $\partial_t(t\partial_t)^0 a = \partial_t a \in G$ ya que sabemos que ∂_t envía elementos de F en elementos de G (además de manera biyectiva). Supuesto cierto para k, tenemos que $\partial_t(t\partial_t)^{k+1}a = \partial_t t\partial_t(t\partial_t)^k a$. Por hipótesis de inducción, $b = \partial_t(t\partial_t)^k a \in \widetilde{G}$, y entonces:

$$\partial_t(t\partial_t)^{k+1}a = (\partial_t t)b = (1 + t\partial_t)b = b + (t\partial_t)b \in \widetilde{G},$$

ya que $\widetilde{G}$ es estable por $t\partial_t$.

Probemos ahora la biyectividad:

- Inyectividad: sean $a, a' \in F$ tales que $\partial_t a = \partial_t a'$, aplicando t tenemos que $t\partial_t a = t\partial_t a'$. Por (1), $t\partial_t$ es inyectiva, luego $a = a'$ y tenemos la inyectividad de ∂_t.

- Sobreyectividad: todo elemento de $\widetilde{G}$ es de la forma $b = \sum_{i=0}^{k}(t\partial_t)^i b_i$ con $b_i \in G$ para todo $i = 0, \ldots, k$. Por la linealidad de ∂_t, basta probar que los elementos de la forma $(t\partial_t)^k b_k$ con $b_k \in G$ tienen preimagen. Veámoslo por inducción en k:

  Si $k = 0$, entonces $b = b_0 \in G$. Como $\partial_t : F \to G$ es biyectiva, existe $a_0 \in F \subset \widetilde{F}$ tal que $\partial_t a_0 = b_0$ y ya lo tenemos. Supuesto cierto para k, consideramos $b = (t\partial_t)^{k+1}b_{k+1}$, que podemos reescribir como $b = (t\partial_t)b'$ con

$b' = (t\partial_t)^k b_{k+1}$. Por hipótesis de inducción sabemos que existe $a' \in \widetilde{F}$ tal que $\partial_t a' = b'$. Por tanto, $b = t\partial_t b' = t\partial_t \partial_t a' = (\partial_t t - 1)\partial_t a' = \partial_t (t\partial_t - 1)a'$. Pero $(t\partial_t - 1)a' \in \widetilde{F}$ (por ser estable por $t\partial_t$), luego tenemos la sobreyectividad.

(3) De los dos apartados anteriores se deduce inmediatamente que $t : \widetilde{G} \to \widetilde{F}$ es invertible y la inversa viene dada por $t^{-1} = \partial_t (t\partial_t)^{-1}$.

□

Corolario 2.36. *Se verifica que:*

(1) $t^i \widetilde{G} = \partial_t^{-i} \widetilde{G}$ *para todo* $i \geq 1$.

(2) Existe un cierto $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $t^k \widetilde{G} \subset G$.

Demostración.

(1) Veámoslo por inducción en i:

- El caso $i = 1$ se tiene de la proposición anterior, pues $t\widetilde{G} = \widetilde{F} = \partial_t^{-1} \widetilde{G}$.
- Supuesto cierto para i que $t^i \widetilde{G} = \partial_t^{-i} \widetilde{G}$ (y por tanto que $\partial_t^i t^i \widetilde{G} = \widetilde{G}$), veamos que es cierto para $i+1$: observamos que del conmutador $[\partial_t^{i+1}, t] = (i+1)\partial_t^i$ tenemos que $\partial_t^{i+1} t^{i+1} = (i+1)\partial_t^i t^i + (t\partial_t)\partial_t^i t^i = (i+1)\partial_t^i t^i + (\partial_t t - 1)\partial_t^i t^i$. Entonces:

$$\partial_t^{i+1} t^{i+1} \widetilde{G} = (i+1)\partial_t^i t^i \widetilde{G} + (\partial_t t - 1)\partial_t^i t^i \widetilde{G} = (i+1)\widetilde{G} + (\partial_t t - 1)\widetilde{G} = \widetilde{G},$$

donde en la última igualdad hemos aplicado que $\partial_t t \widetilde{G} = \widetilde{G}$ y que $\widetilde{G}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

(2) Sabemos que existe un cierto i_0 tal que $\widetilde{G} = \sum_{i=0}^{i_0} (t\partial_t)^i G$, y a través de las relaciones de conmutación podemos escribir cada $(t\partial_t)^i$ como una combinación lineal de términos de la forma $\partial_t^j t^j$, luego $\widetilde{G}$ puede reescribirse como:

$$\widetilde{G} = \sum_{i=0}^{k} \partial_t^i t^i G$$

para algún $k \in \mathbb{N}$. Ahora bien, por el apartado previo, tenemos que:

$$t^k \widetilde{G} = \partial_t^{-k} G = \sum_{i=0}^{k} \partial_t^{-(k-i)} t^i G.$$

Cada uno de los sumandos se encuentra contenido en G, pues $t^i G \subset G$ por ser G un $\mathbb{C}\{t\}$-módulo y G es estable por ∂_t^{-1} (y por tanto, por cualquier potencia negativa de ∂_t), concluyendo que $t^k \widetilde{G} \subset G$.

□

Volvamos al estudio de los $\mathcal{D}$-módulos N y M definidos en las secciones previas. A continuación veremos que la cohomología de de Rham de M y de M/tM están muy relacionadas con estos retículos saturados $\widetilde{G}$ y $\widetilde{F}$. Para ello, hemos de probar en primer lugar que N/M es un $\mathcal{D}$-módulo con soporte en el origen.

Proposición 2.37. *N/M es un $\mathcal{D}$-módulo con soporte en el origen,*

Demostración. Es claro que N es generado como $\mathcal{D}$-módulo a la izquierda por elementos de la forma $P = g(x,t)\partial_t^k f^s$ con $g(x,t) \in \mathcal{O}_{x,t}$, luego sus clases generarán N/M. Por la Proposición 1.25 basta probar que para cualquier P de esta forma y para todo $i = 1, \ldots, n$ existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_i^p P \in M$ (de manera que su clase en N/M sea nula). Además, como $t^k M \subset M$ para todo $k \geq 0$, tenemos que $\mathcal{O}_{x,t} M \subset M$. Por tanto, será suficiente demostrar la propiedad anterior para elementos de la forma $P = \partial_t^k f^s$ (pues si existe un p tal que $x_i^p \partial_t^k f^s \in M$, entonces $x_i^p g(x,t)\partial_t^k f^s = g(x,t) x_i^p \partial_t^k f^s \in \mathcal{O}_{x,t} M \subset M$). Procedamos por inducción en k:

Si $k = 0$, entonces $P = f^s \in M$ y no hay nada que probar. Supuesto cierto que para $P = \partial_t^k f^s$ y para todo $i = 1, \ldots, n$ existe un cierto p tal que $x_i^p P \in M$, veamos que también se tiene para $Q = \partial_t^{k+1} f^s$:

Observemos que, fijado $i = 1, \ldots, n$, como $x_i \in \mathfrak{m}$, por la Proposición 2.12, $x_i \in \sqrt{J_f}$ y por tanto existe un cierto $r \in \mathbb{N}$ tal que $x_i^r \in J_f$. Así, existen $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{O}$ tales que $x_i^r = a_1(\partial_1 f) + \ldots + a_n(\partial_n f)$, de manera que $x_i^r Q = \sum_{j=1}^n a_j(\partial_j f)\partial_t^{k+1} f^s$. Recordando la relación $\partial_j f^s + (\partial_j f)\partial_t f^s = 0$, obtenemos que:

$$x_i^r Q = \sum_{j=1}^n a_j(\partial_j f)\partial_t \partial_t^k f^s = -\sum_{j=1}^n a_j \partial_t^k \partial_j f^s = -\sum_{j=1}^n a_j \partial_j \partial_t^k f^s.$$

Veamos que para cada sumando anterior se tiene $x_i^{p+1}(a_j \partial_j \partial_t^k f^s) \in M$ y habremos terminado, pues en tal caso $x_i^{r+p+1} Q \in M$. Para ello distinguimos casos:

- Si $i \neq j$, entonces x_i y ∂_j conmutan, y se tiene que:

  $$x_i^{p+1}(a_j \partial_j \partial_t^k f^s) = x_i a_j \partial_j x_i^p \partial_t^k f^s \in M,$$

  ya que $x_i a_j \partial_j \in \mathcal{D}$ y, por hipótesis de inducción, $x_i^p \partial_t^k f^s \in M$.

- Si $i = j$, entonces $[\partial_i, x_i^{p+1}] = (p+1)x_i^p$ y tenemos:

  $$x_i^{p+1}(a_i \partial_i \partial_t^k f^s) = a_i(\partial_i x_i^{p+1} \partial_t^k f^s - (p+1)x_i^p \partial_t^k f^s) = a_i(\partial_i x_i - p - 1)x_i^p \partial_t^k f^s \in M,$$

  nuevamente por hipótesis de inducción y por ser $a_i(\partial_i x_i - p - 1) \in \mathcal{D}$.

Concluimos que N/M es un $\mathcal{D}$-módulo con soporte en el origen.

□

Este resultado nos permite obtener la cohomología de de Rham de M:

Proposición 2.38. *Para $n \geq 2$ se tiene que:*

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M) \cong \begin{cases} \widetilde{G} & \text{si } p = n, \\ 0 & \text{si } p \neq 1, n. \end{cases}$$

Demostración. Consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to M \to N \to N/M \to 0.$$

Al igual que en la prueba del apartado (2) de la Proposición 1.31, esta sucesión da lugar a una sucesión exacta de complejos:

$$0 \to \mathrm{DR}(M) \to \mathrm{DR}(N) \to \mathrm{DR}(N/M) \to 0,$$

que a su vez da lugar a la sucesión exacta larga en cohomología:

$$\ldots \to H^p_{\mathrm{DR}}(M) \to H^p_{\mathrm{DR}}(N) \to H^p_{\mathrm{DR}}(N/M) \to H^{p+1}_{\mathrm{DR}}(M) \to \ldots$$

Dado que N/M es un $\mathcal{D}$-módulo con soporte en el origen por la proposición anterior, aplicando el apartado (1) de la Proposición 1.31, tenemos que $H^p_{\mathrm{DR}}(N/M) = 0$ para $p \neq n$. Por la exactitud de la sucesión deducimos, pues, que $H^p_{\mathrm{DR}}(M) \cong H^p_{\mathrm{DR}}(N)$ para $p < n$ y que la flecha $i : H^n_{\mathrm{DR}}(M) \to H^n_{\mathrm{DR}}(N)$ es inyectiva, de manera que $H^n_{\mathrm{DR}}(M) \cong \operatorname{Im} i$. En el Corolario 2.24 vimos que $H^p_{\mathrm{DR}}(N) = 0$ para $p \neq 1, n$, obteniendo el mismo resultado para $H^p_{\mathrm{DR}}(M)$ por el isomorfismo anterior. Resta ver entonces el caso $p = n$.

Por la Proposición 1.21, sabemos que $H^n_{\mathrm{DR}}(M) \cong \mathrm{Tor}_0^{\mathcal{D}}(\Omega^n, M) \cong \Omega^n \otimes_{\mathcal{D}} M$. Sea $\mathcal{J} = \mathrm{ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ el ideal anulador a la izquierda de f^s en $\mathcal{D}[s]$, recordando que $M = \mathcal{D}[s]f^s$ tenemos por el primer teorema de isomorfía que $M \cong \mathcal{D}[s]/\mathcal{J}$, de forma que:

$$H^n_{\mathrm{DR}}(M) \cong \Omega^n \otimes_{\mathcal{D}} \frac{\mathcal{D}[s]}{\mathcal{J}} \cong \frac{\Omega^n[s]}{\Omega^n[s]\mathcal{J}}.$$

Observemos que, por la sobreyectividad de la proyección al cociente, la imagen de i coincide con la de la aplicación $u : \Omega^n[s] \to H^n(N) \cong G \otimes_{\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]} \mathbb{C}[\partial_t, \partial_t^{-1}]$. Siguiendo la pista de los isomorfismos, vemos que esta aplicación lleva $\omega \in \Omega^n$ en $[\omega] \otimes 1 \in G \otimes_{\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]} \mathbb{C}[\partial_t, \partial_t^{-1}]$. Del mismo modo, lleva s en $-t\partial_t - 1 = -\partial_t t$, luego un elemento de $\Omega^n[s]$ será llevado en un elemento de la forma $\sum_{i=0}^k (-t\partial_t - 1)^i g_i \in \sum_{i=0}^k (t\partial_t)^i G \subset \widetilde{G}$. Igualmente, haciendo uso de las reglas de conmutación, todo elemento de $\widetilde{G}$ se podrá expresar como combinación lineal de potencias de $(-t\partial_t - 1)$ y por tanto será la imagen por u de un elemento de $\Omega^n[s]$. Así, concluimos que $H^n_{\mathrm{DR}}(M) \cong \operatorname{Im} i = \widetilde{G}$.

□

Enunciemos un par de lemas que nos servirán para demostrar el siguiente teorema:

Lema 2.39. *Sean L y L' dos $\mathcal{D}$-módulos con soporte en el origen y finitamente generados, y sea $\psi : L \to L'$ un morfismo $\mathcal{D}$-lineal tal que la aplicación inducida en cohomología $\widetilde{\psi} = H^n_{\mathrm{DR}}(\psi) : H^n_{\mathrm{DR}}(L) \to H^n_{\mathrm{DR}}(L')$ sea nula, entonces $\psi = 0$.*

Demostración. Como L y L' son $\mathcal{D}$-módulos con soporte en el origen finitamente generados, tenemos que $K = \ker\psi \subset L$, $I = \operatorname{Im}\psi \subset L'$ y L'/I también lo son. Consideremos entonces las sucesiones exactas:

$$0 \to K \to L \xrightarrow{\psi} I \to 0,$$

$$0 \to I \to L' \to L'/I \to 0.$$

Recordemos que un $\mathcal{D}$-módulo finitamente generado con soporte en el origen sólo tiene cohomología de de Rham no trivial en grado n (Corolario 1.30), de manera que aplicando la sucesión exacta larga de cohomología (recuérdese que estas sucesiones exactas inducen una sucesión exacta corta en los correspondientes complejos de de Rham), obtenemos las sucesiones exactas cortas siguientes:

$$0 \to H^n_{\mathrm{DR}}(K) \to H^n_{\mathrm{DR}}(L) \to H^n_{\mathrm{DR}}(I) \to 0,$$

$$0 \to H^n_{\mathrm{DR}}(I) \to H^n_{\mathrm{DR}}(L') \to H^n_{\mathrm{DR}}(L'/I) \to 0.$$

Por hipótesis, la composición $\widetilde{\psi} = \beta \circ \alpha$ con $\alpha : H^n_{\mathrm{DR}}(L) \to H^n_{\mathrm{DR}}(I)$ y $\beta : H^n_{\mathrm{DR}}(I) \to H^n_{\mathrm{DR}}(L')$ es nula, pero además por exactitud β es inyectiva, lo que implica que $\alpha = 0$. Entonces, $H^n_{\mathrm{DR}}(I) = \operatorname{Im}\alpha = 0$ (α es sobreyectiva por exactitud), lo que implica, nuevamente por el Corolario 1.29, que I es de longitud cero. Como el único módulo de longitud cero es el trivial, deducimos que $I = 0$, luego $\operatorname{Im}\psi = 0$ y por tanto $\psi = 0$.

□

Lema 2.40. *Sea L un $\mathcal{D}$-módulo finitamente generado con soporte en el origen y $\psi : L \to L$ un endomorfismo de $\mathcal{D}$-módulos no nulo, entonces:*

(1) Existe un polinomio $\beta(s) \in \mathbb{C}[s]$ no nulo tal que $\beta(\psi) = 0$. En consecuencia, existe el polinomio mínimo de ψ en $\mathbb{C}[s]$.

(2) El polinomio mínimo de ψ coincide con el polinomio mínimo de $\widetilde{\psi} = H^n_{\mathrm{DR}}(\psi)$.

Demostración.

(1) Sea $\widetilde{\psi} : H^n_{\mathrm{DR}}(\psi) : H^n_{\mathrm{DR}}(L) \to H^n_{\mathrm{DR}}(L)$ la aplicación inducida en cohomología de de Rham, como $H^n_{\mathrm{DR}}(L)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita, sabemos que existe $\beta(s) \in \mathbb{C}[s]$ no nulo tal que $\beta(\widetilde{\psi}) = 0$. Como el funtor H^n_{DR} es $\mathbb{C}$-lineal (recordemos que el complejo de de Rham es un complejo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales), tenemos que $0 = \beta(\widetilde{\psi}) = \beta(H^n_{\mathrm{DR}}(\psi)) = H^n_{\mathrm{DR}}(\beta(\psi))$. Por el lema anterior, obtenemos que $\beta(\psi) = 0$. Al ser $\mathbb{C}[s]$ un dominio de ideales principales y los polinomios que anulan a ψ un ideal de este anillo, ha de existir un generador de este ideal, que podemos tomar mónico y que será el polinomio mínimo de ψ.

(2) Sea $\beta(s)$ el polinomio mínimo de $\widetilde{\psi}$, entonces por la prueba del apartado anterior tenemos que $\beta(\psi) = 0$. Veamos que es el polinomio mínimo: supongamos que $\beta'(s) \in \mathbb{C}[s]$ es no nulo y verifica $\beta'(\psi) = 0$. Entonces, $\beta'(\widetilde{\psi}) = \beta'(H^n_{\mathrm{DR}}(\psi)) = H^n_{\mathrm{DR}}(\beta'(\psi)) = H^n_{\mathrm{DR}}(0) = 0$, de manera que, por ser β el polinomio mínimo de $\widetilde{\psi}$, ha de existir $a(s) \in \mathbb{C}[s]$ tal que $\beta'(s) = a(s)\beta(s)$. Así, β es el polinomio mínimo de ψ, como queríamos demostrar.

□

Observemos que como $t\partial_t$ deja estable tanto a $\widetilde{G}$ como a $\widetilde{F}$, podemos considerar la aplicación inducida en el cociente $\overline{t\partial_t} : \widetilde{G}/\widetilde{F} \to \widetilde{G}/\widetilde{F}$ dada por $\overline{t\partial_t}(\overline{g}) = \overline{t\partial_t(g)}$. Como $s = -t\partial_t - 1$, podemos considerar también la aplicación inducida $\overline{s} : \widetilde{G}/\widetilde{F} \to \widetilde{G}/\widetilde{F}$ dada por $\overline{s} = -\overline{t\partial_t} - \mathrm{id}_{\widetilde{G}/\widetilde{F}}$. Veamos que esta aplicación está muy relacionada con el polinomio de Bernstein de f:

Teorema 2.41. *Sea $a(s)$ el polinomio mínimo de la acción de $\overline{s}$ en $\widetilde{G}/\widetilde{F}$, entonces se verifica que $b_f(s) = (s+1)\cdot a(s)$.*

Demostración. Recordemos que en la Proposición 2.9 probamos que b_f era el polinomio mínimo de la acción de s sobre M/tM. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \to M \xrightarrow{t} M \to M/tM \to 0,$$

que induce una sucesión exacta corta de complejos de de Rham:

$$0 \to \mathrm{DR}(M) \xrightarrow{t} \mathrm{DR}(M) \to \mathrm{DR}(M/tM) \to 0.$$

De la sucesión exacta larga de cohomología obtenemos la exactitud de la siguiente sucesión:

$$\ldots \to H^{n-1}_{\mathrm{DR}}(M/tM) \to H^n(M) \xrightarrow{t} H^n_{\mathrm{DR}}(M) \to H^n_{\mathrm{DR}}(M/tM) \to 0,$$

luego:

$$H^n_{\mathrm{DR}}(M/tM) = \mathrm{Im}\,(H^n_{\mathrm{DR}}(M) \to H^n_{\mathrm{DR}}(M/tM)) \cong \frac{H^n_{\mathrm{DR}}(M)}{\mathrm{Im}\, t} = \frac{H^n_{\mathrm{DR}}(M)}{tH^n_{\mathrm{DR}}(M)}.$$

Como $H^n_{\mathrm{DR}}(M) \cong \widetilde{G}$, deducimos que $H^n_{\mathrm{DR}}(M/tM) \cong \widetilde{G}/t\widetilde{G} = \widetilde{G}/\widetilde{F}$. Recordando que b_f era el polinomio mínimo de la acción de s sobre M/tM, $b_f(s)$ también anulará a $H^n_{DR}(M/tM)$, y por tanto a $\widetilde{G}/\widetilde{F}$. De aquí obtenemos que $b_f(s)$ será un múltiplo de $a(s)$. Hemos de ver entonces que el factor es justamente $s+1$.

Por un lado, por definición, sabemos que existe $P(s) \in \mathcal{D}[s]$ tal que $b_f(s)f^s = P(s)f^{s+1}$. Tomando $s = -1$ obtenemos $b_f(-1)f^{-1} = P(-1)1 \in \mathcal{O}$, lo que sólo es posible si $b_f(-1) = P(-1)(1) = 0$ (ya que $f^{-1} = 1/f \notin \mathcal{O}$ por ser $f(0) = 0$). De aquí deducimos que $s+1$ es un factor de $b_f(s)$ (escribiremos $b_f(s) = (s+1)\widetilde{b_f}(s)$, y llamaremos *polinomio de Bernstein reducido* a $\widetilde{b_f}$) y que $P(-1) \in \mathcal{D}(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ (i.e. no tiene término constante). Si $Q(s) = P(s) - P(-1)$, entonces $Q(-1) = 0$ y $s+1$ divide a $Q(s)$, de manera que $P(s) = (s+1)R(s) + \sum_{i=1}^{n} R_i\partial_i$ para ciertos $R(s) \in \mathcal{D}[s]$ y $R_i \in \mathcal{D},\ (i = 1, \dots, n)$. Aplicándolo a f^{s+1} y recordando cómo actúan las parciales:

$$(s+1)R(s)f^{s+1} + \sum_{i=1}^{n} R_i(s+1)(\partial_i f)f^s = P(s)f^{s+1} = b_f(s)f^s = (s+1)\widetilde{b_f}(s)f^s,$$

y de aquí:

$$R(s)f^{s+1} + \sum_{i=1}^{n} R_i(\partial_i f)f^s - \widetilde{b_f}(s)f^s = 0,$$

es decir, $R(s)f + \sum_{i=1}^{n} R_i(\partial_i f) - \widetilde{b_f}(s) \in \mathcal{J} = \mathrm{ann}_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ y por tanto $\widetilde{b_f}(s) \in \mathcal{J} + \mathcal{D}[s]f + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}[s](\partial_i f)$.

Sea $L = \dfrac{\mathcal{D}[s]}{\mathcal{J} + \mathcal{D}[s]f + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}[s](\partial_i f)}$, veamos que $\widetilde{b_f}$ es el polinomio mínimo de la acción de s en L:

Dado $[H(s)] \in L$, tenemos que $\widetilde{b_f}(s)[H(s)] = [\widetilde{b_f}(s)H(s)] = [H(s)\widetilde{b_f}(s)] = 0$ (pues $H(s)\widetilde{b_f}(s) \in \mathcal{J} + \mathcal{D}[s]f + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}[s](\partial_i f)$ por el razonamiento anterior). Además, dado $\widetilde{c_f} \in \mathbb{C}[s]$ tal que $\widetilde{c_f}(s)$ que anule a L, tendremos que $\widetilde{c_f}(s)[1] = [\widetilde{c_f}(s)] = 0$, luego $\widetilde{c_f}(s) \in \mathcal{J} + \mathcal{D}[s]f + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}[s](\partial_i f)$ y se verifica $\widetilde{c_f}(s)f^s - A(s)f^{s+1} - \sum_{i=1}^{n} A_i(s)(\partial_i f)f^s = 0$ para ciertos $A, A_i \in \mathcal{D}[s]$ $(i = 1, \dots, n)$. Multiplicando todo por $(s+1)$ obtenemos:

$$(s+1)\widetilde{c_f}(s)f^s = (s+1)A(s)f^{s+1} + \sum_{i=1}^{n} A_i(s)\partial_i f^{s+1} = \left[(s+1)A(s) + \sum_{i=1}^{n} A_i(s)\partial_i\right] f^{s+1}.$$

Entonces, $(s+1)\widetilde{c_f}(s)$ pertenece al ideal de los polinomios de $\mathbb{C}[s]$ que verifican la condición de Bernstein. Por ser b_f el generador de este ideal, existe $k(s) \in \mathbb{C}[s]$ tal que $(s+1)\widetilde{c_f}(s) = k(s)b_f(s) = k(s)(s+1)\widetilde{b_f}(s)$, de manera que $\widetilde{c_f}(s) = k(s)\widetilde{b_f}(s)$, obteniendo así que $\widetilde{b_f}$ es el polinomio mínimo de la acción de s en L.

Como $M \cong \mathcal{D}[s]/\mathcal{J}$, tenemos que $M/tM \cong \dfrac{\mathcal{D}[s]}{\mathcal{J} + \mathcal{D}[s]f}$. Considerando el morfismo:

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \dfrac{\mathcal{D}[s]}{\mathcal{J} + \mathcal{D}[s]f} & \to & \dfrac{\mathcal{D}[s]}{\mathcal{J} + \mathcal{D}[s]f + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}[s](\partial_i f)} \\ & \overline{\beta} & \mapsto & \overline{\beta} \end{array},$$

que está bien definido y es claramente sobreyectivo, deducimos que L es un cociente de M/tM (i.e. existe un morfismo sobreyectivo $M/tM \to L$). Al ser M/tM un $\mathcal{D}$-módulo finitamente generado (Corolario 2.10) , obtenemos que L también lo es (está generado por las imágenes de los generadores de M/tM). Veamos que es además un $\mathcal{D}$-módulo con soporte en el origen:

Recordemos que en el Corolario 2.10 vimos que existía un cierto $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que M/tM está generado como $\mathcal{D}$-módulo por los elementos $\overline{s^j f^s}$ con $0 \leq j < k_0$, que se identifican con los elementos $\overline{s^j} \in \mathcal{D}[s]/(\mathcal{J} + \mathcal{D}[s]f)$, luego $\{\overline{s^j} \mid 0 \leq j < k_0\} \subset L$ es un sistema generador de L como $\mathcal{D}$-módulo. Además, como $\sqrt{J_f} = \mathfrak{m}$ (Proposición 2.12), para todo $i = 1, \ldots, n$ existe un cierto $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_i^p \in J_f = \mathcal{O}(\partial_1 f, \ldots, \partial_n f)$, luego $x_i^p s^j \in \sum_{k=1}^n \mathcal{D}[s](\partial_k f)$ y por tanto $x_i^p \overline{s^j} = \overline{x_i^p s^j} = 0$ $(0 \leq j < k_0)$. De la Proposición 1.25 deducimos que L es un $\mathcal{D}$-módulo con soporte en el origen y, por el Lema 2.41, $\widetilde{b_f}$ es también el polinomio mínimo de la aplicación inducida $\widetilde{s} : H^n_{\mathrm{DR}}(L) \to H^n_{\mathrm{DR}}(L)$.

Veamos para concluir que existe un isomorfismo $H^n_{\mathrm{DR}}(L) \cong \widetilde{G}/\widetilde{F}$. De la Proposición 1.21, y haciendo uso de isomorfismos canónicos, tenemos que:

$$H^n_{\mathrm{DR}}(L) \cong \mathrm{Tor}_0^{\mathcal{D}}(\Omega^n, L) \cong \Omega^n \otimes_{\mathcal{D}} L \cong \frac{\Omega^n[s]}{\Omega^n[s]\mathcal{J} + \Omega^n[s]f + \sum_{i=1}^n \Omega^n[s](\partial_i f)},$$

$$\widetilde{G}/\widetilde{F} \cong H^n_{\mathrm{DR}}(M/tM) \cong \mathrm{Tor}_0^{\mathcal{D}}(\Omega^n, M/tM) \cong \Omega^n \otimes_{\mathcal{D}} \frac{M}{tM} \cong \frac{\Omega^n[s]}{\Omega^n[s]\mathcal{J} + \Omega^n[s]f}.$$

Observemos que este último isomorfismo viene dado por la aplicación $\bar{u}$ inducida en el cociente por la aplicación $u : \Omega^n[s] \to \widetilde{G}$ definida en la Proposición 2.38. Si probamos que u lleva $\Omega^n[s](\partial_i f)$ en $\widetilde{F}$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces tendremos el isomorfismo deseado. En efecto, si $\eta \in \Omega^n[s](\partial_i f)$, entonces $\bar{u}[\eta] = [u(\eta)] = 0$, de donde $[\eta] = 0$ y $\eta \in \Omega^n[s]\mathcal{J} + \Omega^n[s]f$, de manera que los dos cocientes anteriores son idénticos y $H^n_{\mathrm{DR}}(L) \cong \widetilde{G}/\widetilde{F}$.

Veamos primero el caso en que $\omega = gdx \in \Omega^n$: tenemos que $\omega(\partial_i f) = gdx(\partial_i f) = df \wedge gdx_{1,\ldots,\widehat{i},\ldots,n} \in df \wedge \Omega^{n-1}$. Recordando que $F = \dfrac{df \wedge \Omega^{n-1}}{df \wedge d\Omega^{n-2}}$ y la definición de u, obtenemos que $u(\omega(\partial_i f)) \in F \subset \widetilde{F}$.

Sea ahora $\omega(s)(\partial_i f) \in \Omega^n[s](\partial_i f)$, veamos que podemos reducirlo al caso anterior: de la igualdad $\partial_i f^{s+1} = (s+1)(\partial_i f) f^s$, deducimos que $(s+1)(\partial_i f) - \partial_i \cdot f \in \mathcal{J}$, de donde $(s+1)(\partial_i f) \in \mathcal{J} + \mathcal{D}[s]f$. Dividiendo $\omega(s)$ por $(s+1)$ y teniendo en cuenta que el resto será $\omega(-1)$ podemos escribir $\omega(s)(\partial_i f) = \nu(s)(s+1)(\partial_i f) + \omega(-1)(\partial_i f)$ y como $\nu(s) \in \Omega^n[s]$, tenemos que $\nu(s)(s+1)(\partial_i f) \in \Omega^n[s]\mathcal{J} + \Omega^n[s]f$. Así, las clases de $\omega(s)(\partial_i f)$ y de $\omega(-1)(\partial_i f)$ coincidirán en $\dfrac{\Omega^n[s]}{\Omega^n[s]\mathcal{J} + \Omega^n[s]f}$ y $\bar{u}([\omega(s)(\partial_i f)]) = \bar{u}([\omega(-1)(\partial_i f)])$. De aquí, $u(\omega(s)(\partial_i f)) - u(\omega(-1)(\partial_i f)) \in \widetilde{F}$. Como $\omega(-1)(\partial_i f) \in \Omega^n$, sabemos que $u(\omega(-1)(\partial_i f)) \in \widetilde{F}$, y por tanto $u(\omega(s)(\partial_i f)) \in \widetilde{F}$.

Concluimos así que $H^n_{\mathrm{DR}}(L) \cong \widetilde{G}/\widetilde{F}$ y por tanto los respectivos polinomios mínimos de $\widetilde{s}$ y $\overline{s}$ coinciden. Así, $\widetilde{b_f}(s) = a(s)$ y en consecuencia $b_f(s) = (s+1)a(s)$, como queríamos probar.

□

Para poder realizar la demostración de la racionalidad de las raíces de b_f queda aún un último ingrediente:

Recordemos que en el Teorema de Milnor (2.13) vimos que cada fibra $X(t)$ es homotópicamente equivalente a un wedge de μ esferas. Conocida la cohomología de una esfera y sabiendo que la cohomología de un wedge es la suma directa de las cohomologías de cada uno de sus términos, tenemos que:

$$H^{n-1}(X(t),\mathbb{C}) \cong H^{n-1}\left(\bigvee_{i=1}^{\mu} S^n, \mathbb{C}\right) \cong \mathbb{C}^{\mu} \quad \text{para } t \neq 0,$$

de manera que el generador del grupo fundamental de S^n (que también es un generador de su homología en dimensión $n-1$) induce un automorfismo:

$$T : H^{n-1}(X(t),\mathbb{C}) \to H^{n-1}(X(t),\mathbb{C}),$$

que es el llamado *automorfismo de monodromía de Milnor*.

Teorema 2.42. *(Teorema de monodromía local) Los autovalores del automorfismo* T : $H^{n-1}(X(t),\mathbb{C}) \to H^{n-1}(X(t),\mathbb{C})$ *(para t* $\neq 0$*) son raíces de la unidad.*

Demostración. La prueba de este resultado puede encontrarse en [16].

□

La teoría de $\mathcal{D}$-módulos permite identificar el automorfismo de monodromía de Milnor con la monodromía de las llamadas *secciones horizontales de la conexión de Gauss-Manin* (i.e. el núcleo de la aplicación $\partial_t : G \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} K \to G \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} K$). Si bien una explicación detallada de este resultado requeriría un amplio desarrollo de la teoría de $\mathcal{D}$-módulos que queda fuera del objetivo de este trabajo, daremos aquí una breve explicación de cómo se obtiene:

Para llegar a ello, es necesario considerar los funtores derivados $\mathbb{R}^i f_*(\mathbb{C}_X)$ (donde $\mathbb{C}_X$ es el haz constante en X), que por ser $f|_{X^*}$ una fibración localmente trivial resultan haces localmente constantes cuando se restringen a Y^*. Además, la fibra de estos haces en un punto $t_0 \neq 0$ coincide con $H^i(X(t_0),\mathbb{C})$, y también lo hacen sus respectivas monodromías. A partir de la definición de imagen directa por f de un haz de $\mathcal{D}_X$-módulos, puede verse que el haz $\mathbb{R}^{n-1}f_*(\mathbb{C}_X)|_{Y^*} = \mathbb{R}^{n-1}(f|_{X^*})_*(\mathbb{C}_{X^*})$ se identifica con el haz de las secciones horizontales de la conexión de Gauss-Manin en Y^*. Deducimos de todo esto que la monodromía de Milnor coincide con la monodromía de las soluciones del sistema diferencial definido por la conexión de Gauss-Manin fuera del origen.

Tenemos por fin todo lo necesario para probar la racionalidad de las raíces del polinomio de Bernstein:

Teorema 2.43. *Si* $f \in \mathcal{O}$ *tiene una singularidad aislada en el origen, entonces, para cada raíz* α *del polinomio de Bernstein reducido* $\widetilde{b_f}$*, se tiene que* $e^{2\pi i\alpha}$ *es un autovalor de la acción de* $T : H^{n-1}(X(t),\mathbb{C}) \to H^{n-1}(X(t),\mathbb{C})$ *para t* $\neq 0$*. En consecuencia, las raíces de* b_f *son racionales.*

Demostración. Sea $\{e_1, \ldots, e_\mu\}$ una base de $G \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} K$ sobre K que a su vez sea base de $\widetilde{G}$ como $\mathbb{C}\{t\}$-módulo (existe porque $\widetilde{G}$ es un $\mathbb{C}\{t\}$-módulo libre de rango μ), al ser $\widetilde{G}$ estable por $t\partial_t$, tenemos que existen $a_{ij}(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ $(i, j \in \{1, \ldots, \mu\})$ tales que $t\partial_t(e_i) = \sum_{j=1}^{\mu} a_{ij}(t)e_j$. Sea entonces $u = \sum_{i=1}^{\mu} u_i(t)e_i \in G \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} K$ con $u_i(t) \in K$ para $i = 1, \ldots, \mu$, por la regla de Leibniz:

$$t\partial_t(u) = \sum_{j=1}^{\mu} tu_j'(t)e_j + \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\mu} u_i(t)a_{ij}(t)e_j,$$

y por tanto:

$$\partial_t(u) = \sum_{j=1}^{\mu} u_j'(t)e_j + \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\mu} \frac{u_i(t)}{t}a_{ij}(t)e_j.$$

Así, por independencia lineal, las secciones horizontales quedarán determinadas por las soluciones del sistema diferencial:

$$\left\{u_j'(t) + \sum_{i=1}^{\mu} \frac{a_{ij}(t)}{t}u_i(t) = 0,\ j = 1, \ldots, \mu\right\},$$

que podemos escribir matricialmente como:

$$U' = -\frac{A(t)^T}{t}U = \frac{B(t)}{t}U,$$

con $U' = (u_1(t), \ldots, u_n(t))^T$, $A(t) = (a_{ij}(t))$ y $B(t) = -A(t)^T$ (donde T indica la matriz traspuesta). Como los $a_{ij} \in \mathbb{C}\{t\}$, tenemos que $B(t)$ es una matriz con coeficientes en $\mathbb{C}\{t\}$.

Por otra parte, tenemos que $\widetilde{G}/\widetilde{F}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión μ y $\{\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_\mu}\}$ es una base:

- Independencia lineal: si $\sum_{i=1}^{\mu} c_i\overline{e_i} = 0$ con $c_i \in \mathbb{C}$ para todo $i = 1, \ldots, \mu$, entonces $\sum_{i=1}^{n} c_ie_i \in \widetilde{F}$, luego existe un $g \in \widetilde{G}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} c_ie_i = tg$. Tal g se puede expresar como combinación $\mathbb{C}\{t\}$-lineal de los e_i: $g = \sum_{i=1}^{\mu} g_i(t)e_i$, de manera que por la independencia lineal de los e_i llegamos a que $c_i = tg_i(t)$, lo que únicamente puede ocurrir si $g_i(t) = 0$ y por tanto $c_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, \mu$.

- Sistema generador: observemos que cualquier $g(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ es de la forma $g(t) = g(0) + th(t)$ con $h(t) \in \mathbb{C}\{t\}$, y como $\widetilde{F} = t\widetilde{G}$ tenemos que $th(t)\overline{e_i} = h(t)\overline{te_i} = 0$, de manera que $g(t)\overline{e_i} = g(0)\overline{e_i}$. Ahora, si $\overline{g} \in \widetilde{G}/\widetilde{F}$ con $g = \sum_{i=1}^{\mu} g_i(t)e_i$, entonces $\overline{g} = \sum_{i=1}^{\mu} g_i(t)\overline{e_i} = \sum_{i=1}^{\mu} g_i(0)\overline{e_i}$.

Como $t\partial_t(e_i) = \sum_{j=1}^{\mu} a_{ij}(t)e_j$, por exactamente el mismo razonamiento anterior, la matriz de $\overline{t\partial_t}$ respecto de $\{\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_\mu}\}$ será $A(0)^T = -B(0)$, y por tanto los autovalores de $\overline{t\partial_t}$ serán los de $B(0)$ con signo opuesto.

Sea entonces α una raíz de $\widetilde{b_f}$, por el Teorema 2.41, tenemos que α será una raíz de $a(s)$, el polinomio mínimo de $\overline{s} = -\overline{t\partial_t} - \mathrm{id}_{\widetilde{G}/\widetilde{F}}$ en $\widetilde{G}/\widetilde{F}$. Como sabemos, las raíces del polinomio mínimo coinciden con los autovalores de la aplicación, luego α será un autovalor de $\overline{s}$, y por tanto $-\alpha - 1$ será un autovalor de $\overline{t\partial_t}$. Por lo anterior, $\alpha' = \alpha + 1$ será un autovalor de $B(0)$, de donde $e^{2\pi i\alpha'} = e^{2\pi i\alpha}$ será un autovalor de la monodromía de las secciones horizontales, que además sabemos que coincide con la monodromía de Milnor, obteniendo así el primero de los resultados. Pero recordemos que los autovalores de esta última son raíces de la unidad, de donde deducimos que $e^{2\pi i\alpha}$ es una raíz de la unidad y existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $e^{2k\pi i\alpha} = 1$. Esto implica que $k\alpha \in \mathbb{Z}$, y por tanto $\alpha \in \mathbb{Q}$. Las raíces de b_f son las de $\widetilde{b_f}$ y -1, luego concluimos que son todas racionales.

□

Como ya adelantamos, las raíces de b_f, además de ser racionales, son estrictamente negativas. Para probar esto necesitamos en primer lugar un par de lemas:

Lema 2.44. *Sea H un $\mathcal{D}_t$-módulo, E un sub-$\mathbb{C}\{t\}$-módulo libre de rango r y estable por $t\partial_t$, y C una matriz cuadrada de orden r con coeficientes en $\mathbb{C}\{t\}$, entonces toda solución formal (i.e. en el completado (t)-ádico $\widehat{E}$) del sistema diferencial $t\partial_t Y = CY$ es convergente.*

Demostración. Puede encontrarse una prueba de este resultado en [22].

□

Lema 2.45. *Sea V una conexión meromorfa regular de dimensión r, y sea E un retículo saturado. Sea λ un autovalor de $\overline{t\partial_t} : E/tE \to E/tE$ tal que para todo entero $k > 0$ se tenga que $\lambda - k$ no sea un autovalor de $\overline{t\partial_t}$, entonces λ es también un autovalor de $t\partial_t : E \to E$.*

Demostración. La prueba será constructiva, dando explícitamente el autovector $e \in E$ asociado al autovalor λ. En primer lugar veremos que basta obtener una solución formal $\widehat{e}$ en el completado (t)-ádico $\widehat{E} = \varprojlim_k E/t^kE \cong \mathbb{C}[[t]] \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} E$ (por ser E finitamente generado):

Como E es un retículo es libre de rango r sobre $\mathbb{C}\{t\}$, $\widehat{E}$ es también libre de rango r sobre $\mathbb{C}[[t]]$. Sea $\{w_1, \ldots, w_r\}$ una base de E como $\mathbb{C}\{t\}$-módulo y $B = (b_{ij})$ la matriz de $t\partial_t$ respecto de esta base (con entradas $b_{ij} \in \mathbb{C}\{t\}$), tendremos que $\{\widehat{w_1}, \ldots, \widehat{w_r}\}$ con $\widehat{w_i} = 1 \otimes w_i$ para $i = 1, \ldots, r$ es una base de $\widehat{E}$ como $\mathbb{C}[[t]]$-módulo. Supongamos que tenemos un vector $\widehat{e} = \sum_{j=1}^r y_j(t)\widehat{w_j} \in \widehat{E}$ (con $y_j(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ para todo $j = 1, \ldots, r$) tal que $t\partial_t\widehat{e} = \lambda\widehat{e}$. Haciendo uso de la regla de Leibniz:

$$t\partial_t\widehat{e} = \sum_{j=1}^r \left(t\partial_t(y_j)\widehat{w_j} + y_j \sum_{i=1}^r b_{ij}\widehat{w_i} \right) = \sum_{j=1}^r \left(t\partial_t(y_j) + \sum_{i=1}^r b_{ji}y_i \right) \widehat{w_j},$$

obteniendo por independencia lineal el sistema:

$$t\partial_t(y_j) + \sum_{i=1}^r b_{ji}y_i = \lambda y_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

que podemos expresar matricialmente como $t\partial_t Y = (\lambda I - B)Y$, con $Y = (y_1, \ldots, y_r)^T$. Como $\lambda I - B$ tiene entradas en $\mathbb{C}\{t\}$, por el Lema 2.44 las soluciones de este sistema son convergentes. Así, cada $y_j \in \mathbb{C}\{t\}$ y tenemos que $e = \sum_{j=1}^r y_j w_j \in E$ es un autovector de $t\partial_t$ asociado a λ. Deducimos que basta obtener un autovector formal $\widehat{e}$ en $\widehat{E}$.

Ahora, para construir el autovector $\widehat{e}$, buscaremos por inducción $e_i \in E$ tales que para cada k se tenga que:

$$t\partial_t \left(\sum_{i=0}^{k} t^i e_i \right) - \lambda \left(\sum_{i=0}^{k} t^i e_i \right) \in t^{k+1}E.$$

- El caso base $k = 0$ se tiene por hipótesis: sabemos que existe $[e_0] \in E/tE$ tal que $t\partial_t[e_0] = \lambda[e_0]$, luego $t\partial_t e_0 - \lambda e_0 \in tE$.

- Supongámoslo cierto para k, de forma que tenemos $e_0, \ldots, e_k$ tales que existe $h_k \in E$ con $t\partial_t \left(\sum_{i=0}^{k} t^i e_i \right) = \lambda \left(\sum_{i=0}^{k} t^i e_i \right) + t^{k+1} h_k$. Hemos de encontrar $e_{k+1} \in E$ tal que $t\partial_t \left(\sum_{i=0}^{k+1} t^i e_i \right) - \lambda \left(\sum_{i=0}^{k+1} t^i e_i \right) \in t^{k+2}E$.

  Observemos que cada h_k es expresable como $h_k = e' + te''$ para ciertos $e', e'' \in E$ (si $h_k = \sum_{i=1}^r \varphi_i(t) w_i$, entonces $e' = \sum_{i=1}^r \varphi_i(0) w_i$ y $te'' = \sum_{i=1}^r (\varphi_i(t) - \varphi_i(0)) w_i$). Por tanto, podemos escribir:

  $$t\partial_t \left(\sum_{i=0}^{k} t^i e_i \right) = \lambda \left(\sum_{i=0}^{k} t^i e_i \right) + t^{k+1} e' + t^{k+2} e'',$$

  y si encontramos e_{k+1} tal que $t\partial_t(t^{k+1}e_{k+1}) = \lambda t^{k+1} e_{k+1} - t^{k+1} e' + t^{k+2} e'''$ para algún $e''' \in E$, sumando ambas expresiones ya lo tendremos. Dado que $[\partial_t, t^{k+1}] = (k+1)t^k$, esto último puede reescribirse como:

  $$[(k+1)t^{k+1} + t^{k+2}\partial_t] e_{k+1} = \lambda t^{k+1} e_{k+1} - t^{k+1} e' + t^{k+2} e'''.$$

  Eliminando el factor común t^{k+1} (recordemos que E es libre sobre $\mathbb{C}\{t\}$) y reordenando los términos llegamos a:

  $$t\partial_t e_{k+1} = (\lambda - k - 1) e_{k+1} - e' + te'''.$$

  Tomando clases módulo tE:

  $$\overline{t\partial_t}[e_{k+1}] = (\lambda - k - 1)[e_{k+1}] - [e'].$$

  Por hipótesis, sabemos que $\lambda - k - 1$ no es autovalor de $\overline{t\partial_t}$, luego tenemos que el operador $\overline{t\partial_t} - (\lambda - k - 1)$ es invertible y podemos obtener $[e_{k+1}]$ como:

  $$[e_{k+1}] = - \left[\overline{t\partial_t} - (\lambda - k - 1) \right]^{-1} [e']$$

Así, podremos tomar cualquier representante de tal clase como e_{k+1} y verificará la condición que se le exige. El paso de inducción está completo.

Sea entonces $S_k = \sum_{i=1}^{k} t^i e_i \in E$, tenemos que $S_k \equiv S_{k-1} (\text{mód } t^k E)$ para todo k y además su clase $[S_k]$ en $E/t^{k+1}E$ verifica $t\partial_t[S_k] = \lambda[S_k]$. Tenemos así una sucesión $\{[S_k]\}$ de autovectores asociados a λ, que define un elemento $\widehat{e}$ de $\widehat{E}$ (por propia definición de límite inverso). Por construcción, $\widehat{e}$ será un autovector de $t\partial_t$ asociado a λ, como queríamos.

□

Corolario 2.46. *Si f tiene una singularidad aislada en el origen, las raíces de b_f son menores que* 0.

Demostración. Por el Teorema 2.41 sabemos que las raíces de $b_f(s)$ son -1 y las de $a(s)$, el polinomio mínimo de la acción de $\bar{s}$ en $\widetilde{G}/F$. Estas últimas coinciden a su vez con los autovalores de $\bar{s} = -\overline{t\partial_t} - 1 = \overline{-\partial_t t}$. Como $\bar{t} : \widetilde{G}/t\widetilde{G} \to \widetilde{F}/t\widetilde{F}$ es un isomorfismo (por serlo $t : \widetilde{G} \to \widetilde{F}$), podemos considerar el conjugado de $\bar{s}$ en $\widetilde{F}/t\widetilde{F}$, que vendrá dado por $\bar{t} \circ \bar{s} \circ \bar{t}^{-1} = \bar{t} \circ (-\overline{\partial_t t}) \circ \bar{t}^{-1} = -\overline{t\partial_t}$ y que tendrá los mismos autovalores que $\bar{s}$.

Sea λ el mínimo de los autovalores de $\overline{t\partial_t}$ en $\widetilde{F}/t\widetilde{F}$, es claro que se satisfacen las condiciones del Lema 2.45 con $V = G \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} K$ y $E = \widetilde{F}$, luego tenemos que λ es un autovalor de $t\partial_t$ en $\widetilde{F}$. Ahora bien, en [20], Malgrange prueba la llamada *"positividad de los exponentes característicos en $\widetilde{F}$"*, un importante resultado que establece que los autovalores de $t\partial_t : \widetilde{F} \to \widetilde{F}$ son mayores que 0. De esta manera, $\lambda > 0$ y por tanto todos los autovalores de $\overline{t\partial_t}$ en $\widetilde{F}/t\widetilde{F}$ son mayores que 0. Así, los autovalores de $-\overline{t\partial_t}$, y por tanto los de $\bar{s}$ serán menores que 0. Concluimos, pues, que todas las raíces de b_f son menores que 0.

□

Para concluir el trabajo, probamos finalmente la finitud de $M = \mathcal{D}[s]f^s$ como $\mathcal{D}$-módulo (como siempre, en el caso en que f tiene una singularidad aislada en el origen):

Teorema 2.47. *El $\mathcal{D}$-módulo $M = \mathcal{D}[s]f^s$ es finitamente generado.*

Demostración. Recordemos que $M \cong \mathcal{D}[s]/\mathcal{J}$, con $\mathcal{J}$ el anulador de f^s en $\mathcal{D}[s]$, por lo que bastará probar la finitud de $\mathcal{D}[s]/\mathcal{J}$. Para ello, filtremos $\mathcal{D}[s]$ por el grado en s (el término k-ésimo lo denotaremos por $\mathcal{D}[s]^k$) y dotemos a $A := \mathcal{D}[s]/\mathcal{J}$ de la filtración cociente (el término k-ésimo lo denotaremos por A^k). Si probamos la finitud de A^0 y de A/A^0, por la exactitud de la sucesión:

$$0 \to A^0 \to A \to A/A^0 \to 0,$$

tendremos la finitud de A. La finitud de A^0 es inmediata, pues este término es justamente $\mathcal{D}/(\mathcal{D} \cap \mathcal{J})$, que claramente es finitamente generado como $\mathcal{D}$-módulo por ser un cociente de $\mathcal{D}$ (está generado por la clase del 1 en $\mathcal{D}/(\mathcal{D} \cap \mathcal{J})$). Resta entonces probar la finitud de A/A^0.

Antes de ello, probemos que A/A^0 es un $\mathcal{D}$-módulo con soporte en el origen. Veamos que si cada A^{i+1}/A^i es con soporte en el origen, entonces A/A^0 también lo es. Sea $[\eta] \in A/A^0$, ha de existir un cierto k tal que $\eta \in A^k$. Razonemos por inducción:

- Si $k = 0$, entonces $\eta \in A^0$ y $[\eta] = 0$, luego no hay nada que probar.
- Supuesto cierto que para $\eta \in A^k$ se satisface la condición de soporte en el origen, veamos que también se tiene para $\eta \in A^{k+1}$: consideremos $[\eta] \in A/A^0$ con $\eta \in A^{k+1}$. Como A^{k+1}/A^k es con soporte en el origen, para cada $i = 1, \ldots, n$ ha de existir un cierto $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_i^p(\eta + A^k) = 0$, es decir, $x_i^p \eta \in A^k$. Tomando entonces $[x_i^p \eta] \in A/A^0$, por hipótesis de inducción existe un cierto $p' \in \mathbb{N}$ tal que $x_i^{p'}[x_i^p \eta] = 0$, luego $x_i^{p+p'}[\eta] = 0$ y ya lo tenemos.

Para ver que cada A^{k+1}/A^k es un $\mathcal{D}$-módulo con soporte en el origen, observamos que, como A^{k+1} está generado por las clases de $1, s \ldots, s^{k+1}$, A^{k+1}/A^k va a estar generado por la clase de s^{k+1} (los demás elementos son nulos módulo A^k), que por el desarrollo del binomio de Newton coincide con la clase de $(s+1)^{k+1}$. Ahora bien, sabemos que $(s+1)(\partial_i f) - \partial_i \cdot f \in \mathcal{J}$, de donde obtenemos que $(\partial_i f)(s+1)^{k+1} = (s+1)(\partial_i f)(s+1)^k \in \mathcal{D}[s]^k + \mathcal{J}$. Como A^{k+1}/A^k es canónicamente isomorfo a $\mathcal{D}[s]^{k+1}/(\mathcal{D}[s]^k + \mathcal{J})$, deducimos que la clase de $(\partial_i f)(s+1)^{k+1}$ en A^{k+1}/A^k es nula. Recordando ahora que para cada i existe $r_i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i^{r_i} \in \mathcal{O}(\partial_1 f, \ldots, \partial_n f)$, tenemos que, para todo i, una cierta potencia de x_i anulará a la clase de $(s+1)^{k+1}$. Por la Proposición 1.25, obtenemos que cada A^{k+1}/A^k es con soporte en el origen.

Ahora, por el apartado (2) de la Proposición 1.31, probar la finitud de A/A^0 se reducirá a probar que el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $H^n_{\mathrm{DR}}(A/A^0)$ es de dimensión finita. Para ello, consideramos la sucesión exacta inducida en cohomología, teniendo en cuenta que el término $H^{n-1}_{\mathrm{DR}}(A/A^0)$ es nulo por ser A/A^0 con soporte en el origen (Proposición 1.31, (1)):

$$0 \to H^n_{\mathrm{DR}}(A^0) \xrightarrow{i} H^n_{\mathrm{DR}}(A) \to H^n_{\mathrm{DR}}(A/A^0) \to 0.$$

Como $H^n_{\mathrm{DR}}(A) \cong H^n_{\mathrm{DR}}(M) \cong \widetilde{G}$ y $A^0 \subset A$ es el submódulo sin términos en s, deducimos que $H^n_{\mathrm{DR}}(A^0) \cong \operatorname{Im} i \cong G$. De la exactitud de la sucesión obtenemos entonces que $H^n_{\mathrm{DR}}(A/A^0) \cong H^n_{\mathrm{DR}}(A)/H^n_{\mathrm{DR}}(A^0) \cong \widetilde{G}/G$. Pero recordemos que existe un cierto $k \in \mathbb{N}$ tal que $t^k \widetilde{G} \subset G$ (Corolario 2.36) y que $\widetilde{G}$ es libre de rango μ como $\mathbb{C}\{t\}$-módulo (por ser un retículo de G), luego si $\{g_i\}_{i=1}^{\mu}$ es una base de $\widetilde{G}$ como $\mathbb{C}\{t\}$-módulo, entonces los elementos $\overline{t^j g_i}$ con $j = 1, \ldots, k$ e $i = 1, \ldots, \mu$ generan $\widetilde{G}/G$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Obtenemos así que $H^n_{\mathrm{DR}}(A/A^0)$ es de dimensión finita y con ello la finitud de A/A^0 como $\mathcal{D}$-módulo. Concluimos finalmente que A es un $\mathcal{D}$-módulo finitamente generado y por tanto M también lo es.

$\square$

Bibliografía

[1] J. E. BJÖRK, *Dimensions over algebras of differential operators*, Département de mathématiques, 1973.

[2] R. BOTT, L. W. TU, ET AL., *Differential forms in algebraic topology*, vol. 82, Springer, 1982.

[3] N. BOURBAKI, *Algèbre: Chapitres 1 à 3*, Springer Science & Business Media, 2007.

[4] N. BOURBAKI , *Algèbre: Chapitre 10. Algèbre homologique*, Springer Science & Business Media, 2007.

[5] J. P. BRASSELET AND M. SEBASTIANI, *Brieskorn and the monodromy*, Journal of Singularities, 18 (2018), pp. 84–104.

[6] E. BRIESKORN, *Die monodromie der isolierten singularitäten von hyperflächen*, Manuscripta mathematica, 2 (1970), pp. 103–161.

[7] S. C. COUTINHO, *A primer of algebraic D-modules*, no. 33, Cambridge University Press, 1995.

[8] A. DEL VALLE RODRÍGUEZ, *Una visión actual sobre los puntos singulares de una ecuación diferencial lineal en una variable compleja*, Trabajo de Fin de Grado, Universidad de Sevilla, 2020.

[9] P. DELIGNE, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, vol. 163, Springer, 2006.

[10] R. GÉRARD AND A. LEVELT, *Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier des systèmes d'équations différentielles linéaires*, in Annales de l'Institut Fourier, vol. 23, 1973, pp. 157–195.

[11] P. GRIFFITHS AND J. HARRIS, *Principles of algebraic geometry*, vol. 19, Wiley Online Library, 1978.

[12] A. HAEFLIGER, *Local theory of meromorphic connections in dimension one (Fuchs theory)*, in Algebraic D-modules, Boston, 1987, Academic Press.

[13] J. HUEBSCHMANN, *Duality for Lie-Rinehart algebras and the modular class*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), 1999 (1999), pp. 103–159.

[14] M. KASHIWARA, *D-modules and microlocal calculus*, vol. 217, American Mathematical Soc., 2003.

[15] M. KASHIWARA , *B-functions and holonomic systems*, Inventiones mathematicae, 38 (1976), pp. 33–53.

[16] N. M. KATZ, *Nilpotent connections and the monodromy theorem: Applications of a result of Turrittin*, Publications mathématiques de l'IHES, 39 (1970), pp. 175–232.

[17] V. S. KULIKOV, *Mixed Hodge structures and singularities*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 1998.

[18] I. H. MADSEN, J. TORNEHAVE, ET AL., *From calculus to cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes*, Cambridge University Press, 1997.

[19] B. MALGRANGE, *Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée*, in Fourier integral operators and partial differential equations, Springer, (1975), pp. 98–119.

[20] B. MALGRANGE, *Intégrales asymptotiques et monodromie*, in Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, vol. 7, (1974), pp. 405–430.

[21] B. MALGRANGE, *Sur les polynômes de I.N. Bernstein*, Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique), (1974), pp. 1–10.

[22] B. MALGRANGE, *Sur les points singuliers des équations différentielles*, L'Enseignement Mathématique, XX (1974), pp. 147–176.

[23] J. MILNOR, *Singular Points of Complex Hypersurfaces.(AM-61), Volume 61*, vol. 61, Princeton University Press, 1968.

[24] L. NARVÁEZ MACARRO, *D-modules in dimension 1*, in Algebraic Approach to Differential Equations: Bibliotheca Alexandrina, Alexandria, Egypt, 12-24 Nov. 2007, L. D. Tráng, ed., World Scientific, 2010, p. 1–51.

[25] F. PHAM, *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*, Birkhäuser, Boston, 1979.

[26] J. J. ROTMAN, *An introduction to homological algebra*, Springer Science & Business Media, 2008.

[27] M. SAITO, *On the structure of Brieskorn lattice*, in Annales de l'Institut Fourier, vol. 39, 1989, pp. 27–72.

[28] M. SCHULZE, *A normal form algorithm for the Brieskorn lattice*, Journal of Symbolic Computation, 38 (2004), pp. 1207–1225.

[29] M. SEBASTIANI, *Preuve d'une conjecture de Brieskorn*, Manuscripta mathematica, 2 (1970), pp. 301–308.

[30] C. A. WEIBEL, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 2011.