FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II

ESPACIOS DE HARDY DESDE UNA PERSPECTIVA DE LA INGENIERÍA

Por Francisco José Cruz Zamorano

Dirigido por D. Manuel Domingo Contreras Márquez

Trabajo para optar al Máster en Matemáticas

A la persona que ha cuidado
de la familia mientras
yo estudiaba: *mi tata*.

Resumen

En este trabajo se pretende estudiar algunos de los resultados más clásicos de la teoría de los espacios de Hardy vistos con una perspectiva de la Ingeniería. Para ello se introducen dos herramientas fundamentales en este área: las señales y los sistemas.

Con cierta naturalidad se pueden relacionar algunos espacios de señales con espacios de Hardy, así como sistemas con operadores sobre estos espacios. Esto lleva a formular conceptos propios de la Ingeniería en términos puramente matemáticos. De hecho, desde este punto de vista se motivan muchos de los resultados que conforman los cimientos de los espacios de Hardy: teorema de Beurling, factorización interior-exterior, problema de interpolación de Pick...

Esta visión también resulta fructífera para introducir varias nociones novedosas, las cuales conducen a conexiones con otros objetos: operadores de multiplicación, de Hankel, de Toeplitz...

Abstract

The aim of this work is to study some of the classical results in the theory of Hardy spaces seen from an Engineering perspective. In order to do that, two main tools are introduced: signals and systems.

Some spaces of signals can be naturally related to Hardy spaces, as systems do with operatos on such spaces. This leads to the formulation of concepts that are purely based on Engineering in terms of mathematical ideas. Indeed, this point of view can be used to motivate some of the results in the core of Hardy spaces: Beuling's theorem, inner-outer factorization, Pick's interpolation problem...

This vision can also be useful to present new notions, leading to connections with other objects: multiplication operators, Hankel and Toeplitz operators...

Índice

Introducción

Existe una gran corriente dentro de la comunidad matemática cuyo principal objetivo es dar una finalidad práctica a las ideas que se formulan en términos matemáticos. Esto resulta completamente natural: ya desde cuando uno comienza sus estudios en Matemáticas no consigue eludir al mayor de los interrogantes ("¿y esto para qué?").

No es difícil hallar una lista de conceptos y teorías matemáticas cuyo nacimiento se produce en el contexto más "puro", pero que acaban siendo (como ya decía Wigner, premio Nobel de Física en 1963) "irrazonablemente efectivas" en áreas aplicadas. No puedo evitar nombrar a los espacios de Hilbert, los operadores autoadjuntos, y su relación con la Mecánica Cuántica. En algún sentido, este trabajo nace del intento de mostrar cómo los espacios de Hardy son un ejemplo más en la lista anterior, para lo cual seguimos algunas de las ideas de [1].

Durante las últimas décadas del siglo XIX se empieza a trabajar, de la mano de Maxwell entre otros, con la teoría de control de sistemas en Ingeniería. En las primeras décadas del siglo XX se introducen las técnicas de control en el plano de frecuencias. La base teórica de estas técnicas se fundamenta, de hecho, en los espacios de Hardy.

En este trabajo se pretende mostrar, entre otras cosas, la estrecha relación que posee la teoría de señales y sistemas con los espacios de Hardy. Para ello, por suspuesto, hemos de introducir y trabajar con otras muchas herramientas, como los espacios de Lebesgue y la teoría de operadores. En resumen, seguiremos las siguientes líneas de pensamiento:

En el Capítulo 1 se da una breve introducción a los espacios de Hardy. Se muestra la construcción de estos espacios, así como algunas propiedades básicas de los mismos que usaremos con frecuencia durante el trabajo. Esta introducción se realiza no solo con el objetivo de que el trabajo sea autocontenido, sino también para fijar algunas notaciones usuales.

Seguimos, después, con el Capítulo 2, donde se motiva la teoría de señales y sistemas. Para ello, relacionamos las señales con sucesiones complejas, así como los sistemas con operadores sobre espacios de sucesiones. Dado que, en el fondo, nuestro marco de trabajo viene dado por esta teoría, se realiza una construcción relativamente abstracta de la misma. Así, se presentan las propiedades más usuales de los sistemas (linealidad, invariancia temporal, causalidad y estabilidad). Además, estas características se formulan en términos completamente matemáticos. Más aún, gracias a la abstracción con la que se introduce la teoría de señales y sistemas, conseguimos caracterizar algunas de estas propiedades en marcos completamente generales. Se finaliza el capítulo dando una primera muestra de algunos de los resultados que se obtendrán en el trabajo, pero vistos en un espacio conceptualmente más asequible, a saber, $\ell_c(\mathbb{Z})$, el espacios de las sucesiones de soporte compacto. Puesto que este espacio es denso en aquellos que realmente queremos estudiar, estos primeros pasos dentro de la teoría se tornan fundamentales a lo largo del trabajo.

Usando el trabajo realizado hasta ese momento, se muestran en el Capítulo 3 los primeros resultados relevantes del área: caracterización de sistemas sobre $\ell^p(\mathbb{Z})$. Se expone, además, la necesidad de introducir el análisis de Fourier para caracterizar la estabilidad, lo que nos lleva a trabajar con los espacios de Lebesgue. Más aún, se justifica la necesidad de introducir los espacios de Hardy para abordar el caso causal. Esto representa la primera conexión entre ambas teorías.

Por analogía con lo anterior se introduce el subespacio $\ell^2(\mathbb{N})$, y su relación natural con el espacio $H^2(\mathbb{D})$. Motivados por los conceptos y resultados hallados previamente, se estudian los sistemas sobre $\ell^2(\mathbb{N})$, poniendo de manifiesto una interesante relación entre linealidad, estabilidad, invariancia y causalidad. Esto lleva a formular conceptos sobre operadores del espacio $H^2(\mathbb{D})$ (y, de paso, en $L^2(\mathbb{T})$) con motivación en la Ingeniería. Posteriormente, se obtienen resultados que caracterizan estos nuevos conceptos. Se muestra aquí, entre otras cosas, el uso de los operadores de multiplicación.

Dejando momentáneamente atrás la teoría de operadores, se aborda en el Capítulo 4 el problema de los subespacios invariantes de señales. Para ello, se relaciona este problema puramente ingenieril con el basado en los subespacios invariantes para el operador shift, tanto en $L^2(\mathbb{T})$ como en $H^2(\mathbb{D})$. Se distingue, además, el caso bi-invariante y el caso simplemente invariante. Estos nos llevan a demostrar, entre otras cosas, el teorema de Beurling. También se aborda el problema del subespacios invariante minimal, que sirve para motivar la factorización interior-exterior de los espacios de Hardy.

El trabajo finaliza con dos aplicaciones de la teoría de operadores, en los Capítulos 5 y 6, basados de nuevo en un problema ingenieril. No obstante, estas aplicaciones son fundamentalmente diferentes. Concretamente, en el Capítulo 5, se comienza abordando los operadores de Hankel y su relación con los sistemas causales. Después se introduce un nuevo concepto de invariancia temporal, que supone una versión débil del original, y se justifica la relación del mismo con los operadores de Toeplitz.

Por último, en el Capítulo 6, se presentan los dispositivos en Ingeniería como asociación de sistemas. Refinando el concepto de causalidad, estos llevan al concepto de operador polinómico y racional. Se concluye el trabajo dando una visión del diseño óptimo de dispositivos a través de un resultado clásico de variable compleja: el teorema de interpolación de Pick.

En definitiva, la misión con la que se redacta este trabajo es triple. Por un lado, se pretende que este sirva como un primer acercamiento a la teoría de señales y sistemas, desde el punto de vista teórico. Por otro lado, su cometido más importante es profundizar en el conocimiento de los espacios de Hardy, abordando resultados clásicos. Sin embargo, quizás la tarea más interesante sea la última: formular conceptos y resultados en el marco de estos espacios, motivados desde la Ingeniería, y ofreciendo una visión aplicada (y, a la vez, teórica) de los espacios de Hardy.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo del trabajo trataremos de dar algunas "pinceladas" sobre aquellos conceptos y aquellas ideas que se usarán a lo largo del mismo de manera frecuente, dotando al lector de un documento de referencia para consultar los resultados que sean necesarios posteriormente.

De hecho, el contenido de este capítulo forma parte del programa de la asignatura "Variable Compleja y Operadores", impartida en el Máster en Matemáticas de la Universidad de Sevilla. Es por ello que este es el único capítulo en el que omitimos las pruebas de los correspondientes resultados. Una referencia adecuada donde estas se pueden consultar es [4].

1.1. Espacios de Hardy

Comenzaremos esta introducción preliminar con el concepto central sobre el que se pretende profundizar en el trabajo: los espacios de Hardy. Estos son espacios de funciones holomorfas. No obstante, como se verá, estos espacios están íntimamente ligados con los espacios de Lebesgue. Es por ello que, de alguna manera, estos espacios ligan la variable compleja y la teoría de la medida. Su construcción suele abordarse de la siguiente manera:

Definición 1.1.1. *Sea $1 \leq p < \infty$ cualquiera, y denotemos por $\mathscr{H}(\mathbb{D})$ al conjunto de todas las funciones holomorfas definidas sobre el disco unidad del plano complejo. Se define la aplicación $M_p\colon\ [0,1) \times \mathscr{H}(\mathbb{D}) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$M_p\left(r, f\right) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^p dt\right)^{1/p}.$$

Para $p = \infty$, se define la aplicación $M_\infty \colon\ [0,1) \times \mathscr{H}(\mathbb{D}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$M_\infty (r, f) := \sup_{|z| \leq r} |f(z)| .$$

Usando esta aplicación, se puede dar la siguiente definición de los espacios de Hardy.

Definición 1.1.2. *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Se denota por el espacio de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ al conjunto de funciones holomorfas $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, de manera que*

$$\sup_{0 \leq r < 1} M_p(r, f) < \infty.$$

Los espacios de Hardy resultan ser espacios de Banach de funciones holomorfas cuando se los dota de una topología de la siguiente manera.

Teorema 1.1.3. *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Definamos la aplicación $\|\cdot\|_{H^p(\mathbb{D})}$ de $H^p(\mathbb{D})$ en $\mathbb{R}$ dada por*

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} := \sup_{0 \leq r < 1} M_p(r, f) .$$

Se verifica que $\|\cdot\|_{H^p(\mathbb{D})}$ es una norma sobre el espacio vectorial $H^p(\mathbb{D})$ que lo dota de la estructura de un espacio de Banach.

Es importante destacar que, para $1 \leq p \leq \infty$, la función M_p es creciente en su primer argumento. Es decir, para toda función $f \in H^p(\mathbb{D})$ se cumple que

$$M_p(r_1, f) \leq M_p(r_2, f), \quad \text{si } 0 \leq r_1 \leq r_2 < 1.$$

Esto permite justificar que, para toda función $f \in H^p(\mathbb{D})$, se cumple

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} = \lim_{r \to 1^-} M_p(r, f) .$$

Una de las razones por las que esta topología se vuelve crucial en los espacios de Hardy es porque “respeta” la convergencia uniforme en compactos. Es decir, si $\{f_n\} \subset H^p(\mathbb{D})$ es una sucesión convergente a cierta $f \in H^p(\mathbb{D})$ en la norma anterior, entonces f_n converge a f uniformemente en cada compacto de $\mathbb{D}$.

Los espacios de Hardy se relacionan entre sí, como muestra el siguiente resultado:

Proposición 1.1.4. *Sean $1 \leq p < q \leq \infty$. Se cumple que $H^q(\mathbb{D}) \subseteq H^p(\mathbb{D})$.*

Los aspectos más relevantes de estos espacios, los cuales serán usados numerosas veces durante el trabajo, se dan en el siguiente resultado, donde denotamos por $\mathbb{T}$ a la frontera de $\mathbb{D}$, como es habitual.

Teorema 1.1.5. *Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $f \in H^p(\mathbb{D})$. Se verifican las siguientes propiedades:*

(a) La función f posee límite no tangencial en casi todo $\xi \in \mathbb{T}$. Es decir, para todo $\xi \in \mathbb{T}$ salvo en un conjunto de medida de Lebesgue nula, y para todo $\alpha > 1$, existe

$$f^*(\xi) := \lim_{\substack{z \to \xi \\ z \in \Gamma_\alpha(\xi)}} f(z),$$

donde

$$\Gamma_\alpha(\xi) := \{z \in \mathbb{D} : |z - \xi| < \alpha (1 - |z|)\},$$

y $f^*(\xi)$ es independiente de α (ver Figura 1.1.6).

En particular, para todo $\xi \in \mathbb{T}$ salvo en un conjunto de medida de Lebesgue nula, existe el límite radial de f en ξ, cumpliendo

$$f^*(\xi) = \lim_{r \to 1^-} f(r\xi).$$

(b) La función f^* definida en casi todo $\xi \in \mathbb{T}$ (en el sentido de la medida de Lebesgue) pertenece a $L^p(\mathbb{T})$. Aún más, se cumple que

$$\lim_{r \to 1^-} \int_{\mathbb{T}} \left| f(re^{it}) - f^*(e^{it}) \right|^p dt = 0.$$

En particular,

$$\|f^*\|_{L^p(\mathbb{T})} = \|f\|_{H^p(\mathbb{D})}.$$

(c) Se verifica que $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. En particular, si f^* se anula en un subconjunto de $\mathbb{T}$ con medida de Lebesgue no nula, entonces f es idénticamente nula sobre $\mathbb{T}$.

(d) Si la función f viene dada por la serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

entonces se tiene que

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f^*(\xi)\, \overline{\xi}^n dm(\xi) = \widehat{f^*}(n), \quad \text{para } n = 0, 1, \ldots,$$

donde $\widehat{f^*}(n)$ en el n-ésimo coeficiente de Fourier de f^*.

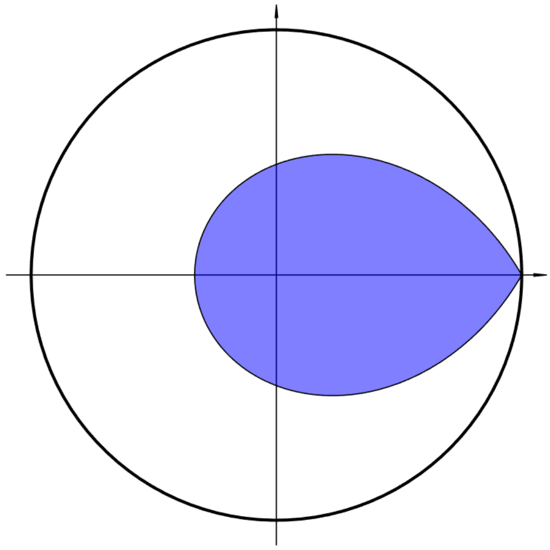

Figura 1.1.6: Ilustración de la región $\Gamma_\alpha(\xi)$ para $\alpha = 2$ y $\xi = 1$ inscrita en $\mathbb{D}$.

La existencia de límite no tangencial puede utilizarse para definir el siguiente espacio.

Definición 1.1.7. *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Se denota por el espacio de Hardy $H^p(\mathbb{T})$ al conjunto de funciones medibles $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ de manera que existe $g \in H^p(\mathbb{D})$ tal que f es el límite no tangencial de g en casi todo punto de $\mathbb{T}$, es decir, $f = g^*$.*

Los espacios $H^p(\mathbb{T})$ pueden verse como subespacios de $L^p(\mathbb{T})$, heredando su norma y topología. En este sentido es de destacar el siguiente resultado.

Teorema 1.1.8. *Sean $1 \leq p \leq \infty$ y una función $f \in L^p(\mathbb{T})$. Entonces f pertenece a $H^p(\mathbb{T})$ si y solo si los coeficientes de Fourier $\hat{f}(n)$ se anulan para todo entero $n < 0$.*

1.2. Algunos resultados de factorización

Las funciones de los espacios de Hardy tienen una cierta propiedad de factorización. Esta pone de manifiesto algunas propiedades de dichas funciones (entre otras, la distribución de sus ceros), las cuales pueden usarse posteriormente en otros ámbitos, tal y como haremos nosotros. Para introducir esto, tenemos que comenzar hablando de:

Definición 1.2.1. *Dado $a \in \mathbb{D}$, notamos por $\phi_a \colon \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ al factor de Blaschke dado por*

$$\phi_a(z) := \begin{cases} \dfrac{|a|}{a}\dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}, & \text{si } a \neq 0, \\ z, & \text{si } a = 0, \end{cases} \qquad z \in \bar{\mathbb{D}}.$$

Los factores de Blaschke cumplen las siguientes propiedades:

Proposición 1.2.2. *Sea $\phi_a \colon \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ un factor de Blaschke. Entonces ϕ_a es un automorfismo de $\mathbb{D}$, es decir, una función holomorfa y biyectiva. Más aún, $|\phi_a| = 1$ sobre $\mathbb{T}$.*

La propiedad enunciada en la proposición anterior para los factores de Blaschke será fundamental en lo venidero. Es por ello que damos la siguiente definición:

Definición 1.2.3. *Se dice que $\psi \in H^\infty(\mathbb{D})$ es una función interior si es no constante y su límite radial cumple $|\psi^*| = 1$ en casi todo $\mathbb{T}$.*

Los factores de Blaschke pueden combinarse, dando lugar a los conocidos como productos de Blaschke:

Teorema 1.2.4. *Sea $\{a_j\}_{j \in J \subset \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ (con posibles elementos repetidos). Entonces, el producto de Blaschke $\mathscr{B} \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ dado por*

$$\mathscr{B}(z) := \prod_{j \in J} \phi_{a_j}(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

converge a una función holomorfa y no nula sobre $\mathbb{D}$ si y solo si

$$\sum_{j \in J} (1 - |a_j|) < \infty.$$

Más aún, en ese caso, la convergencia es uniforme en compactos de $\mathbb{D}$. Además, $\mathscr{B}(z) = 0$ si y solo si existe $j \in J$ tal que $z = a_j$. De hecho, en ese caso, el orden de z como cero de $\mathscr{B}$ coincide con el número de elementos de $\{a_j\}$ que coinciden con z. También se verifica que $\mathscr{B}$ es una función interior.

Los productos de Blashcke son ejemplos de funciones internas. Estos cobran relativa importancia a través de la siguiente factorización de funciones.

Teorema 1.2.5. *Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $h \in H^p(\mathbb{D})$ no idénticamente nula.*

(a) Sea $\{a_j\}_{j\in J\subset\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ la sucesión de ceros de h, repetidos tantas veces como indique el orden de a_j como cero de h, y de manera que $|a_j| \leq |a_{j+1}|$. Entonces se verifica que

$$\sum_{j\in J}(1-|a_j|) < \infty.$$

(b) Sea B el producto de Blashcke asociado a los ceros de h. Entonces se verifica que $g = h/B \in H^p(\mathbb{D})$ es una función sin ceros en $\mathbb{D}$, con $\|g\|_{H^p(\mathbb{D})} = \|h\|_{H^p(\mathbb{D})}$.

También existe un concepto "opuesto" al de función interna, el cual damos a continuación.

Definición 1.2.6. *Sea $u \in H^1(\mathbb{D})$. Se dice que u es una función exterior si es de la forma*

$$u(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{1+\bar{\xi}z}{1-\bar{\xi}z} d\mu(\xi)\right), \quad z \in \mathbb{D},$$

donde μ es una medida sobre $\mathbb{T}$, boreliana, real y absolutamente continua respecto de la medida Lebesgue.

Son las funciones interiores y exteriores las que permiten dar el siguiente resultado de factorización para funciones en espacios de Hardy:

Teorema 1.2.7. *Sea $h \in H^1(\mathbb{D})$. Entonces h tiene una única factorización $h = \Theta u$, donde Θ es una función interior, y u es la función exterior dada por*

$$u(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} \log\left|f^*(e^{it})\right| dt\right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Más aún, si $h \in H^p(\mathbb{D})$ para algún $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$\|h\|_{H^p(\mathbb{D})} = \|u\|_{H^p(\mathbb{D})}.$$

A la factorización que se da en el teorema anterior se le conoce como factorización interior-exterior de h.

1.3. Operadores de evaluación y sus núcleos

En general, dado H un espacio de Hilbert de funciones definidas sobre un conjunto A, tiene interés considerar los operadores lineales $T_a \colon H \to \mathbb{C}$, donde $a \in A$, dados por

$$T_a(f) = f(a), \quad f \in H.$$

Cuando los operadores anteriores son, además, continuos, el teorema de representación de Riesz asegura que, para cada $a \in A$, existe cierta función $k_a \in H$, de manera que

$$\langle k_a \mid f \rangle = f(a) = T_a(f), \quad f \in H.$$

Al conjunto de funciones $\{k_a : a \in A\}$ se les conoce como núcleos de H.

En esta sección queremos poner de manifiesto que esta misma situación se produce en $H^2(\mathbb{D})$. Para ello, damos el siguiente resultado.

Lema 1.3.1. *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa dada por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Entonces, para todo $0 < r < 1$ se verifica que

$$M_2(r, f)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

A partir de la igualdad anterior puede probarse que $H^2(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert, como muestra el siguiente resultado.

Teorema 1.3.2. *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa dada por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Entonces, $f \in H^2(\mathbb{D})$ si y solo si

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Más aún, la aplicación

$$\langle f \mid g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} b_n,$$

donde

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

es un producto escalar sobre $H^2(\mathbb{D})$ que verifica que

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 = \langle f \mid f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

Visto esto, queremos hallar los núcleos de $H^2(\mathbb{D})$. Para ello, definimos las siguientes funciones.

Definición 1.3.3. *Sea $w \in \mathbb{D}$. Se define el núcleo $k_w \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ como*

$$k_w(z) := \frac{1}{1 - \overline{w}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{w}^n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Las funciones anteriores no solo son funciones de $H^2(\mathbb{D})$, como sugiere el siguiente resultado.

Lema 1.3.4. *Sea $w \in \mathbb{D}$. Se verifica que $k_w \in H^\infty(\mathbb{D})$.*

Se puede verificar que las aplicaciones definidas anteriormente son, de hecho, los núcleos de $H^2(\mathbb{D})$.

Teorema 1.3.5. *Sean $w \in \mathbb{D}$ y $f \in H^2(\mathbb{D})$. Se tiene que*

$$\langle k_w \mid f \rangle = f(w).$$

Más aún, el operador de evaluación $T_w \colon H^2(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ dado por

$$T_w(f) = f(w), \quad f \in H^2(\mathbb{D}),$$

es lineal y continuo, verificando

$$\|T_w\|^2 = \langle k_w \mid k_w \rangle = \frac{1}{1 - |w|^2}.$$

Capítulo 2

Señales y sistemas

En este capítulo haremos una breve introducción a la teoría de señales y sistemas, área que nos proporcionará el objeto matemático de estudio en este trabajo. Aunque esta es un área propia de la Ingeniería, su versatilidad hace que sea de interés también en otros ámbitos.

Nuestro objetivo será ofrecer una presentación suficientemente abstracta, de manera que posteriormente podamos relacionar los conceptos que aquí abordamos con ideas matemáticas conocidas.

2.1. Señales

2.1.1. En Ingeniería

En el lenguaje de la Ingeniería, una señal no es más que una magnitud que varía con el tiempo. Esta magnitud puede, incluso, ser una magnitud física real. Por ejemplo, podríamos considerar como señal a la diferencia de potencial entre los bornes de un condensador enmarcado en un cierto circuito.

En realidad, este último ejemplo corresponde a lo que rigurosamente llamamos "señal de tiempo continuo". Existe también la idea de "señal de tiempo discreto". Este último tipo de señales puede obtenerse a través de la medida periódica de una señal de tiempo continuo, o a través de magnitudes intrínsecamente discretas.

2.1.2. En Matemáticas

Para nosotros, solo serán de interés las señales de tiempo discreto. Con el objetivo de tratarlas matemáticamente, damos la siguiente definición abstracta:

Definición 2.1.1. *Diremos que una señal es una sucesión (de índice entero) de números complejos, es decir, una función* $\phi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$*.*

Nótese que hemos elegido usar los números complejos en la definición anterior, y no los reales. Esto es así, incluso aunque la mayoría de señales se correspondan con magnitudes físicas medibles (y, por tanto, reales). La razón de esto es puramente técnica y cobrará sentido más adelante, aunque es algo común en el ámbito de la modelización y la Ingeniería.

2.2. Sistemas

2.2.1. En Ingeniería

De nuevo, en el lenguaje de la Ingeniería, un sistema es un dispositivo que transforma señales, cambiando su forma. Por ejemplo, podrías considerar como sistema a un micrófono electrónico de voz, cuyo funcionamiento se basa en transformar una señal de presión sonora en una señal eléctrica.

2.2.2. En Matemáticas

En un sentido abstracto, podemos definir el concepto anterior de la siguiente manera:

Definición 2.2.1. *Dado un conjunto de señales* X*, diremos que un sistema es una aplicación entre señales, es decir, una aplicación* $T \colon X \to X$*.*

Nótese que, en realidad, esta definición corresponde a los conocidos sistemas de una entrada y una salida (en inglés, SISO, single input - single output system). Existen sistemas que relacionan más señales entre sí, aunque en este trabajo nos centraremos en los sistemas SISO.

2.3. Un enfoque analítico

Los conceptos de señal y sistema considerados hasta ahora son increíblemente generales. En realidad, el estudio matemático de la teoría de señales y sistemas es más fructífero cuando nos restringimos a espacios de Banach de sucesiones complejas con ciertas propiedades. Para abordar este caso, definimos el siguiente concepto:

Definición 2.3.1. *Diremos que X es un espacio de señales si es un conjunto de señales dotado de la estructura de un espacio vectorial complejo normado.*

Como es habitual, denotaremos por $\|x\|_X$ a la norma de $x \in X$.

El concepto anterior es natural e intuitivo, pero puede resultar demasiado general en algunas aplicaciones. Es por ello que se introducen dos tipos de espacios de señales especialmente significativos:

Definición 2.3.2. *Sea X un espacio de señales. Dada una señal $\phi \in X$, notamos por $\tau_1(\phi)$ a la señal dada por*

$$(\tau_1(\phi))(n) = \phi(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Con esto en mente, X se dice invariante si $\tau_1(\phi) \in X$ para todo $\phi \in X$, es decir, si

$$\tau_1(X) := \{\tau_1(\phi) : \phi \in X\} \subset X.$$

Más aún, X se dice bi-invariante si $\tau_1(X) = X$.

En el desarrollo del trabajo serán de interés las siguientes señales:

Definición 2.3.3. *Sea $n \in \mathbb{Z}$. Se denotará por $\delta_n \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ a la señal dada por*

$$\delta_n(m) = \begin{cases} 1, & si\ m = n, \\ 0, & si\ m \neq n, \end{cases} \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Nótese que las señales anteriores pueden relacionarse entre sí de la siguiente manera:

Lema 2.3.4. *Sea $n \in \mathbb{Z}$. Se verifica que $\tau_1(\delta_n) = \delta_{n+1}$.*

Demostración. Sea $m \in \mathbb{Z}$. Nótese que

$$\tau_1(\delta_n)(m) = \delta_n(m-1) = \begin{cases} 1, & \text{si } m-1 = n, \\ 0, & \text{si } m-1 \neq n. \end{cases}$$

De lo anterior se deduce que $\tau_1(\delta_n) = \delta_{n+1}$. □

Nótese que en el caso de espacios de señales invariantes (y, por tanto, en los bi-invariantes) puede definirse un operador $\tau_1 \colon X \to X$, denomidado el operador shift. Este operador posee algunas propiedades notables:

Proposición 2.3.5. *Sea X un espacio de señales invariante y sea el operador shift $\tau_1 \colon X \to X$. Se cumple:*

(a) El operador τ_1 es lineal e inyectivo.

(b) Si X es bi-invariante, entonces τ_1 es sobreyectivo.

(c) Si X es bi-invariante, entonces el operador $\tau_1^{-1}\colon X \to X$ definido por

$$(\tau_1^{-1}(\phi))(n) = \phi(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}, \phi \in X,$$

es el operador inverso de τ_1. Es decir,

$$\tau_1 \circ \tau_1^{-1} = \tau_1^{-1} \circ \tau_1 = id_X,$$

donde $\circ$ denota la composición de funciones.

Demostración. (a) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y sean $\phi, \psi \in X$. En ese caso, dado $n \in \mathbb{Z}$, nótese que

$$\begin{aligned}(\tau_1(\alpha\phi + \beta\psi))(n) &= (\alpha\phi + \beta\psi)(n-1)\\ &= \alpha\phi(n-1) + \beta\psi(n-1)\\ &= \alpha((\tau_1(\phi))(n) + \beta(\tau_1(\psi))(n).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\tau_1(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha\tau_1(\phi) + \beta\tau_1(\psi).$$

Es decir, τ_1 es un operador lineal.

Sobre la inyectividad, nótese que

$$\begin{aligned}\tau_1(\phi) = \tau_1(\psi) &\iff (\tau_1(\phi))(n) = (\tau_1(\psi))(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\\ &\iff \phi(n-1) = \psi(n-1) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\\ &\iff \phi(m) = \psi(m) \text{ para todo } m \in \mathbb{Z}\\ &\iff \phi = \psi.\end{aligned}$$

(b) Se sigue de la definición de espacio de señales bi-invariante.

(c) Nótese que, si X es un espacio de señales bi-invariante, entonces τ_1 es un operador lineal y biyectivo, según hemos probado. Por tanto, debe existir otro operador lineal y biyectivo que sea su aplicación inversa (en sentido estrictamente algebraico). Hemos de probar que tal aplicación es τ_1^{-1}.

Para ello, comenzamos notando que τ_1^{-1} está bien definido. Es decir, dado $\phi \in X$, debemos ver que $\tau_1^{-1}(\phi) \in X$. Pero esto es fácil de comprobar: nótese que si X es bi-invariante debe existir $\psi \in X$ tal que $\tau_1(\psi) = \phi$. En ese caso, dado $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$(\tau_1^{-1}(\phi))(n) = \phi(n-1) = (\tau_1(\psi))(n-1) = \psi(n).$$

Es decir, $\tau_1^{-1}(\phi) = \psi \in X$. De hecho, acabamos que comprobar que $\tau_1^{-1} \circ \tau_1 = id_X$. La otra igualdad puede verse de manera análoga. □

Ahora que hemos desarrollado el concepto de espacio de señales podemos estudiar las aplicaciones definidas sobre tales espacios, es decir, los sistemas. No debe ser sorprendente decir que los sistemas más interesantes son aquellas aplicaciones que se relacionan con la estructura del propio espacio sobre el que se definen. En este sentido, desde el punto de vista tanto matemático como ingenieril, son relevantes las siguientes propiedades de un sistema.

Definición 2.3.6. *Sea X un espacio de señales y sea $T\colon X \to X$ un sistema.*

- *Se dice que T es lineal si*

  $$T(\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2) = \alpha_1 T(\phi_1) + \alpha_2 T(\phi_2),$$

  para todo $\phi_1, \phi_2 \in X$ y todo $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$.

- *Se dice que T es causal si dadas dos señales $\phi_1, \phi_2 \in X$ y un entero $N \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi_1(n) = \phi_2(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $n \leq N$ se tiene que*

  $$(T(\phi_1))(N) = (T(\phi_2))(N).$$

- *Se dice que T es estable si es (matemáticamente) acotado, es decir, si*

  $$\sup_{\substack{\phi \in X \\ \phi \neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_X}{\|\phi\|_X} < \infty.$$

- *Si X es invariante, entonces se dice que T es invariante (frente al tiempo) si conmuta con el operador shift, es decir, si*

  $$\tau_1(T(\phi)) = T(\tau_1(\phi)), \text{ para todo } \phi \in X.$$

Nótese que los conceptos que se dan en la definición anterior son puramente matemáticos. No obstante, todos ellos tienen su origen en la propia Ingeniería:

- Los sistemas lineales son aquellos para los que se conocen métodos numéricos eficientes para la resolución de problemas propios en Ingeniería. De hecho, es común en este campo usar aproximaciones lineales de sistemas no lineales cuando los problemas asociados a estos últimos son difícilmente resolubles.

- Los sistemas causales son aquellos cuya acción no depende del valor de la señal en tiempos futuros.

- En general, la norma de un sistema (es decir, su norma como operador de X en sí mismo) suele ser una cantidad con interpretación física: energía, potencia... Por tanto, los sistemas estables son sistemas reales, en el sentido de que sus características físicas son finitas.

- Nótese que el operador shift τ_1 es, en sí mismo, un sistema. Desde el punto de vista de la ingeniería, un sistema invariante representa a un sistema cuyo funcionamiento no se ve afectado por las traslaciones temporales.

Nótese que, en el caso de espacios bi-invariantes, la definición de un sistema invariante puede reescribirse, además, de la siguiente manera:

Lema 2.3.7. *Sea X un espacio de señales bi-invariante y $T\colon X \to X$ un sistema. Entonces T es invariante si y solo si*

$$\tau_1^{-1}(T(\phi)) = T(\tau_1^{-1}(\phi)), \quad \textit{para todo } \phi \in X.$$

Demostración. Este resultado es puramente algebraico. Recuérdese que τ_1 y τ_1^{-1} son operadores inversos. Además, ambos son sistemas sobre X. Esto nos recuerda que decir que T es invariante es equivalente a expresar que

$$\tau_1 \circ T = T \circ \tau_1,$$

donde $\circ$ denota la composición de aplicaciones. Pero entonces, componiendo a izquierda y derecha con τ_1^{-1}, se tiene que

$$T \circ \tau_1^{-1} = \tau_1^{-1} \circ \tau_1 \circ T \circ \tau_1^{-1} = \tau_1^{-1} \circ T \circ \tau_1 \circ \tau_1^{-1} = \tau_1^{-1} \circ T.$$

Pero esta última igualdad quiere decir que dada cualquier señal $\phi \in X$ se tiene que

$$\tau_1^{-1}(T(\phi)) = T(\tau_1^{-1}(\phi)).$$

$\square$

Nótese que, hasta ahora, el concepto de señal y de sistema puede parecer abstracto. No obstante, durante el trabajo, los espacios de señales que usaremos con más frecuencia serán los espacios $\ell^p(\mathbb{Z})$ y $\ell^p(\mathbb{N})$[1], para $1 \leq p \leq \infty$. De hecho, puede verse fácilmente que $\ell^p(\mathbb{Z})$ es bi-invariante, mientras que $\ell^p(\mathbb{N})$ es solo invariante. Más aún, por comodidad, cuando un sistema T es estable para un espacio de señales con la norma de $\ell^p(\mathbb{Z})$, diremos simplemente que T es p-estable.

2.4. Representación de sistemas

Nos encaminamos ahora a abordar la descripción de un sistema, según sus propiedades, empezando por el siguiente resultado:

Proposición 2.4.1. *Sea X un espacio de señales y sea $T\colon X \to X$ un sistema lineal y causal. Entonces dada cualquier señal $\phi \in X$ cumpliendo que $\phi(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $n < 0$ se tiene que $(T(\phi))(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $n < 0$.*

Más aún, si X es bi-invariante y T es invariante, entonces T es causal si y solo si dada cualquier señal $\phi \in X$ cumpliendo que $\phi(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $n < 0$ se tiene que $(T(\phi))(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $n < 0$.

Demostración. Sea una señal $\phi \in X$ cumpliendo que $\phi(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $n < 0$. Sea $N \in \mathbb{Z}$ con $N < 0$. En ese caso, nótese que, por hipótesis, se tiene que

$$\phi(n) = \Theta(n), \quad n \leq N,$$

donde $\Theta\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ es la sucesión nula. En ese caso, como T es causal, ha de ser que

$$(T(\phi))(N) = (T(\Theta))(N).$$

Sin embargo, como T es lineal, ha de ser que $T(\Theta) = \Theta$. Por tanto, lo anterior puede reescribirse como

$$(T(\phi))(N) = \Theta(N) = 0.$$

Esto es justo lo que queríamos probar.

[1]En este trabajo, por conveniencia técnica, consideraremos que $0 \in \mathbb{N}$. Es decir, $\mathbb{N}$ denotará el conjunto de números enteros no negativos.
También, por conveniencia técnica, consideraremos $\ell^p(\mathbb{N})$ como un subespacio de $\ell^p(\mathbb{Z})$. Es decir, si $\phi \in \ell^p(\mathbb{N})$, entonces $\phi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ con $\phi(n) = 0$ si $n < 0$ (y no $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$).

Por otro lado, supongamos que X es bi-invariante y que T es invariante. Resta probar que si T cumple la propiedad del enunciado, entonces es causal. Para ello, sea T un sistema con la propiedad de que dada cualquier señal $\phi \in X$ cumpliendo que $\phi(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $n < 0$ se tiene que $(T(\phi))(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $n < 0$. Sean $\psi_1, \psi_2 \in X$ dos señales. Supongamos que existe un entero $N \in \mathbb{Z}$ de manera que

$$\psi_1(n) = \psi_2(n), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ con } n \leq N.$$

En ese caso, definimos la señal $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\psi(n) := \psi_1(n + N) - \psi_2(n + N), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Es decir

$$\psi = \tau_1^{-N}(\psi_1 - \psi_2),$$

donde τ_1^{-N} denota a la composición de τ_1^{-1} consigo mismo N veces. Es claro, por el carácter bi-invariante de X, así como por sus estructura de espacio vectorial, que $\psi \in X$. Nótese que, por construcción, se tiene que

$$\psi(n) = 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ con } n \leq 0.$$

En ese caso, por hipótesis, se tiene que

$$(T(\psi))(n) = (T(\tau_1^{-N}(\psi_1 - \psi_2)))(n) = 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ con } n \leq 0.$$

Pero, dado que T es lineal e invariante, en virtud de la aplicación reiterada del Lema 2.3.7, esto significa que

$$(\tau_1^{-N}(T(\psi_1)))(n) = (\tau_1^{-N}(T(\psi_2)))(n) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ con } n \leq 0.$$

Es decir

$$(T(\psi_1))(n + N) = (T(\psi_2))(n + N) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ con } n \leq 0,$$

o equivalentemente,

$$(T(\psi_1))(n) = (T(\psi_2))(n) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ con } n \leq N.$$

En particular, $(T(\psi_1))(N) = (T(\psi_2))(N)$, lo que muestra que T es causal. $\square$

Una vez visto este resultado, y para seguir con nuestro objetivo, introducimos la siguiente definición:

Definición 2.4.2. *Dadas dos señales* $\phi_1, \phi_2 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$*, se define su convolución como la señal* $\phi = \phi_1 * \phi_2 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$\phi(n) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi_1(n-m)\phi_2(m), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Nótese que, a priori, la convolución de dos señales no tiene por qué estar bien definida: la serie de la definición anterior puede no ser convergente para ciertos valores de $n \in \mathbb{Z}$. No obstante, existen espacios bien conocidos de señales donde la convolución está siempre bien definida. En estos casos, se puede comprobar lo siguiente:

Lema 2.4.3. *Sean dos señales* $\phi_1, \phi_2 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *de manera que las convoluciones* $\phi_1 * \phi_2$ *y* $\phi_2 * \phi_1$ *están bien definidas. En ese caso, se tiene que*

$$\phi_1 * \phi_2 = \phi_2 * \phi_1.$$

Demostración. El resultado se deduce sin más que hacer un simple reordenamiento en la serie que define una convolución. A saber, dado $n \in \mathbb{Z}$, se tiene:

$$\begin{aligned}(\phi_1 * \phi_2)(n) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi_1(n-m)\phi_2(m) \\ &= \sum_{\substack{m' \in \mathbb{Z} \\ m' = n-m}} \phi_1(m')\phi_2(n-m') \\ &= (\phi_2 * \phi_1)(n).\end{aligned}$$

$\square$

La importancia de la convolución de dos señales radica en los siguientes resultados:

Lema 2.4.4. *Sea* X *un espacio de señales invariante y* $T \colon X \to X$ *un sistema. Supongamos que existe una señal* $k \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *de manera que*

$$T(\phi) = k * \phi, \quad \phi \in X.$$

En ese caso, T *es invariante.*

Demostración. Dado $\phi \in X$ y $n \in \mathbb{Z}$, se tiene

$$\begin{aligned}
(\tau_1(T(\phi)))(n) &= (\tau_1(k * \phi))(n) \\
&= (k * \phi)(n-1) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} k(n-1-m)\phi(m) \\
&= \sum_{\substack{m' \in \mathbb{Z} \\ m'=m+1}} k(n-m')\phi(m'-1) \\
&= \sum_{m' \in \mathbb{Z}} k(n-m')(\tau_1(\phi))(m') \\
&= (k * (\tau_1(\phi)))(n) \\
&= (T(\tau_1(\phi)))(n).
\end{aligned}$$

Por tanto, T es invariante.

□

En algunos espacios, como veremos a lo largo del trabajo, todos los operadores lineales y continuos que además son invariantes son de tipo convolución, como en el lema anterior.

Lema 2.4.5. *Sean X un espacio de señales invariante y $T\colon X \to X$ un sistema. Supongamos que $\delta_0 \in X$ y que existe una señal $k\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ de manera que*

$$T(\phi) = k * \phi, \quad \phi \in X.$$

En ese caso, $k = T(\delta_0)$. Más aún, si T es causal, entonces $k(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $n < 0$.

Además, si X es bi-invariante, entonces T es causal si y solo si $k(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $n < 0$.

Demostración. Supongamos que X es invariante. Comenzamos notando que, en virtud del Lema 2.4.4, se tiene que T es invariante. Por otro lado, dado $n \in \mathbb{Z}$, nótese que

$$\begin{aligned}
(T(\delta_0))(n) &= (k * \delta_0)(n) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} k(m)\delta_0(n-m) \\
&= k(n).
\end{aligned}$$

Por tanto, se deduce que $k = T(\delta_0)$ necesariamente.

Por otro lado, supongamos que T es causal. En ese caso, en virtud de la Proposición 2.4.1, dado $n \in \mathbb{Z}$ con $n < 0$, se tiene que

$$k(n) = (T(\delta_0))(n) = 0.$$

Supongamos, ahora, que X es bi-invariante y que $k(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $n < 0$. En ese caso, dada cualquier señal $\phi \in X$, se tiene que

$$\begin{aligned}(T(\phi))(n) &= (k * \phi)(n) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} k(m)\phi(n-m) \\ &= \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \geq 0}} k(m)\phi(n-m), \quad n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Si además se cumple que $\phi(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $n < 0$ entonces

$$\begin{aligned}(T(\phi))(n) &= \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \geq 0}} k(m)\phi(n-m) \\ &= \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq m \leq n}} k(m)\phi(n-m).\end{aligned}$$

En ese caso, si $n < 0$, se tiene que $(T(\phi))(n) = 0$. Esto prueba, en virtud de la Proposición 2.4.1, que T es causal. $\square$

Se puede caracterizar también la causalidad de un sistema sin hacer uso explícito de su forma funcional (i.e., cuando no sabemos si se trata de un operador de tipo convolución). Para ello, damos la siguiente definición:

Definición 2.4.6. *Denotamos por $\ell(\mathbb{N})$ al conjunto de señales $\phi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ cumpliendo $\phi(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $n < 0$.*

Usando el concepto anterior podemos ver el siguiente resultado:

Lema 2.4.7. *Sea X un espacio de señales y sea $T\colon X \to X$ un sistema. Sea $C = X \cap \ell(\mathbb{N})$. Si T es causal, entonces $T(C) \subset C$.*

Más aún, si X es bi-invariante, y T es invariante, entonces T es causal si y solo si $T(C) \subset C$.

Demostración. Sea $\phi \in C$. En ese caso, para todo $N \in \mathbb{Z}$ con $N < 0$ se tiene que $\phi(n) = 0$ si $n \leq N$. Por causalidad, $T(\phi)(N) = 0$. Por tanto, $T(\phi) \in C$.

Como $\phi \in C$ es arbitaria, esto demuestra que $T(C) \subset C$.

En el caso de que X sea bi-invariante y T invariante, resta demostrar que T es causal si $T(C) \subset C$. De hecho, para verlo, probaremos el contrarrecíproco.

Supongamos T no es causal, es decir, que existen $\phi, \varphi \in X$ y $N \in \mathbb{Z}$ con $\phi(n) = \varphi(n)$ para todo $n \leq N$, pero $T(\phi)(N) \neq T(\varphi)(N)$. Sea la señal $\psi = \tau_1^{-N-1}(\phi - \varphi)$. Nótese que $\psi \in X$, puesto que X es bi-invariante. Además, por construcción, $\psi \in C$, pero

$$\begin{aligned} T(\psi)(-1) &= \tau_1^{-N-1}(T(\phi - \varphi))(-1) \\ &= T(\phi - \varphi)(N) \neq 0, \end{aligned}$$

luego $T(\psi) \notin C$, donde hemos usado que T es invariante. Por tanto, se deduce que $T(C) \not\subset C$. $\square$

2.5. Sistemas invariantes en $\ell_c(\mathbb{Z})$

Una vez presentada la teoría de señales y sistemas en un espacio general, podemos pasar a trabajar con un espacio de señales bien conocido, como el que definimos a continuación:

Definición 2.5.1. *Sea $\ell_c(\mathbb{Z})$ el conjunto de señales $\phi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ con soporte compacto, es decir, tal que existe $N \in \mathbb{Z}$ de manera que*

$$\phi(n) = 0, \quad \textit{para } n \in \mathbb{Z} \textit{ con } |n| \geq N.$$

La introducción de este espacio se debe a un doble propósito. Por un lado, servirá como un primer acercamiento de la teoría que hemos desarrollado hasta ahora a los espacios $\ell^p(\mathbb{Z})$. Por otro lado, el espacio tiene interés en sí mismo, puesto que muchas de las señales reales son de soporte compacto en el tiempo.

Nótese que $\ell_c(\mathbb{Z})$, independientemente de la norma con la que se le dote, es un espacio de señales bi-invariante en el sentido de la Definición 2.3.2. Sobre él tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.5.2. *Sea $T\colon \ell_c(\mathbb{Z}) \to \ell_c(\mathbb{Z})$ un sistema lineal. Entonces T es invariante si y solo si es de la forma*

$$T(\phi) = k * \phi, \quad \textit{para toda señal } \phi \in \ell_c(\mathbb{Z}),$$

donde $k = T(\delta_0)$.

Demostración. Comenzamos notando que la convolución $k * \phi$ para $\phi \in \ell_c(\mathbb{Z})$ está bien definida. Esto de debe a que, al ser ϕ de soporte compacto, la serie que define dicha convolución es, de hecho, una suma con un número finito de términos no nulos.

Hecha esta salvedad técnica, apreciamos que si que existe una señal $k\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ de manera que

$$T(\phi) = k * \phi, \quad \text{para toda señal } \phi \in \ell_c(\mathbb{Z}),$$

entonces el Lema 2.4.4 asegura que T es invariante. Más aún, dado que $\delta_0 \in \ell_c(\mathbb{Z})$, el Lema 2.4.5 asegura que $k = T(\delta_0)$.

Recíprocamente, sea $\phi \in \ell_c(\mathbb{Z})$ cualquiera. Notemos que, dado $n \in \mathbb{Z}$, puede expresarse

$$\phi(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi(m)\delta_m(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi(m)(\tau_1^m(\delta_0))(n),$$

donde τ_1^m denota la composición del sistema τ_1 consigo mismo m veces. Nótese, además, que la serie anterior solo posee un número finito de términos no nulos. En ese caso, como T es lineal, se tiene que

$$(T(\phi))(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi(m)(T(\tau_1^m(\delta_0)))(n).$$

Más aún, si T es invariante, se tiene que

$$\begin{aligned}(T(\phi))(n) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi(m)(\tau_1^m(T(\delta_0)))(n) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi(m)(T(\delta_0))(n-m) \\ &= (T(\delta_0) * \phi)(n).\end{aligned}$$

Por tanto, se deduce que T es de la forma

$$T(\phi) = k * \phi, \quad \phi \in \ell_c(\mathbb{Z}),$$

para $k = T(\delta_0)$.

□

Nótese que el teorema anterior puede interpretarse como el recíproco del Lema 2.4.4.

2.6. Estabilidad en $\ell_c(\mathbb{Z})$

Hasta ahora no hemos abordado el carácter estable de un sistema. Para comenzar dando caracterizaciones de esta propiedad mostramos el siguiente resultado, donde dotamos a $\ell_c(\mathbb{Z})$ de la norma del supremo:

Teorema 2.6.1. *Sea T un sistema lineal e invariante sobre $\ell_c(\mathbb{Z})$, y sea $k\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ la señal de forma que $T(\phi) = k * \phi$ para toda señal $\phi \in \ell_c(\mathbb{Z})$. Entonces T es ∞-estable si y solo si $k \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Además, en ese caso, se cumple que*

$$\sup_{\substack{\phi\in\ell_c(\mathbb{Z})\\ \phi\neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}}{\|\phi\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}} = \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}.$$

Demostración. Recordamos que la señal k del enunciado viene dada por el Teorema 2.5.2.

Supongamos que $k \in \ell^1(\mathbb{Z})$. En ese caso, obsérvese que, dado $\phi \in \ell_c(\mathbb{Z})$ y $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|(T(\phi))(n)| &= |(k * \phi)(n)| \\
&\leq \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\phi(n-m)|\,|k(m)| \\
&\leq \|\phi\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \sum_{m\in\mathbb{Z}} |k(m)| \\
&= \|\phi\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}.
\end{aligned}$$

Por tanto, tomando supremo, se tiene que

$$\sup_{\substack{\phi\in\ell_c(\mathbb{Z})\\ \phi\neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}}{\|\phi\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}} \leq \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} < \infty. \tag{2.1}$$

Es decir, T es ∞-estable.

Por otro lado, supongamos ahora que T es ∞-estable. Escojamos $N \in \mathbb{Z}$ cualquiera con $N \geq 0$. Definamos una señal $\phi_N \in \ell_c(\mathbb{Z})$ dada por

$$\phi_N(n) := \begin{cases} \dfrac{\overline{k(-n)}}{|k(-n)|}, & \text{si } |n| \leq N \text{ y } k(-n) \neq 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

En ese caso, se tiene que

$$\begin{aligned}
|(T(\phi_N))(0)| &= |(k * \phi_N)(0)| \\
&= \left| \sum_{m\in\mathbb{Z}} k(m)\phi_N(-m) \right| \\
&= \left| \sum_{m=-N}^{N} |k(m)| \right| \\
&= \sum_{m=-N}^{N} |k(m)| \, .
\end{aligned}$$

Además, nótese que si $k \neq 0$, y $N \in \mathbb{Z}$ con $N \geq 0$ es suficientemente grande, entonces se tiene que $\|\phi_N\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} = 1$. Por tanto, como T es ∞-estable, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-N}^{N} |k(m)| &= |(T(\phi_N))(0)| \\
&\leq \frac{\|T(\phi_N)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}}{\|\phi_N\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}} \\
&\leq \sup_{\substack{\phi\in\ell_c(\mathbb{Z}) \\ \phi\neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}}{\|\phi\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}} < \infty. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Esto implica que $k \in \ell^1(\mathbb{Z})$.

Además, nótese que las desigualdades dadas en las Ecuaciones (2.1) y (2.2) justifican que

$$\sup_{\substack{\phi\in\ell_c(\mathbb{Z}) \\ \phi\neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}}{\|\phi\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}} = \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \, .$$

□

Podemos también analizar la estabilidad en sistemas causales. Para ello, damos la siguiente definición:

Definición 2.6.2. *Denotaremos por* $\ell_c(\mathbb{N})$ *al conjunto* $\ell_c(\mathbb{Z}) \cap \ell(\mathbb{N})$.

Nótese que el Lema 2.4.5 viene a decir que, bajo ciertas condiciones, la causalidad de un sistema T se relaciona con el hecho de que $T(\delta_0) = k \in \ell(\mathbb{N})$.

Usando las ideas anteriores, podemos deducir el siguiente resultado:

Corolario 2.6.3. *Sea $T : \ell_c(\mathbb{Z}) \to \ell_c(\mathbb{Z})$ un sistema lineal, invariante y causal, y sea $k \in \ell(\mathbb{N})$ la señal de forma que $T(\phi) = k * \phi$ para toda señal $\phi \in \ell_c(\mathbb{Z})$. Entonces T es ∞-estable si y solo si $k \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Además, en ese caso, la estabilidad de T depende solo de su acción sobre $\ell_c(\mathbb{N})$, es decir, se cumple que*

$$\sup_{\substack{\phi\in\ell_c(\mathbb{N})\\ \phi\neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}}{\|\phi\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}} = \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} = \sup_{\substack{\phi\in\ell_c(\mathbb{Z})\\ \phi\neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}}{\|\phi\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}}.$$

Demostración. Recordamos que la señal k del enunciado viene dada por el Teorema 2.5.2, que acabamos de reescribir. De hecho, el Lema 2.4.5 asegura que $k = T(\delta_0) \in \ell_c(\mathbb{N})$. Además, la equivalencia entre la estabilidad del sistema y la sumabilidad de k es consecuencia directa del Teorema 2.6.1, donde también se justifica que

$$\sup_{\substack{\phi\in\ell_c(\mathbb{Z})\\ \phi\neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}}{\|\phi\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}} = \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}.$$

Nos encaminamos, entonces, a probar la otra igualdad dada. Para ello, suponemos que T es estable. Comenzamos observando que, como $k \in \ell^1(\mathbb{Z})$, la desigualdad dada en la Ecuación (2.1) implica, en particular, que

$$\sup_{\substack{\phi\in\ell_c(\mathbb{N})\\ \phi\neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}}{\|\phi\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}} \leq \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}.$$

Para deducir la igualdad, escogemos $N \in \mathbb{Z}$ cualquiera con $N \geq 0$, y definimos (por analogía con la demostración del Teorema 2.6.1) la señal dada por $\psi_N := \tau_1^N(\phi_N)$, donde

$$\phi_N(n) := \begin{cases} \dfrac{\overline{k(-n)}}{|k(-n)|}, & \text{si } |n| \leq N \text{ y } k(-n) \neq 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z},$$

y τ_1^N denota la composición de τ_1 consigo mismo N veces. Nótese que ψ_N

pertenece a $\ell_c(\mathbb{N})$. Además, como T es invariante, se tiene que

$$\begin{aligned}
|(T(\psi_N))(N)| &= \left|(T(\tau_1^N(\phi_N)))(N)\right| \\
&= \left|(\tau_1^N(T(\phi_N)))(N)\right| \\
&= |(T(\phi_N))(0)| \\
&= |(k * \phi_N)(0)| \\
&= \left|\sum_{m\in\mathbb{Z}} k(m)\phi_N(-m)\right| \\
&= \left|\sum_{m=-N}^{N} |k(m)|\right| \\
&= \sum_{m=-N}^{N} |k(m)| \,.
\end{aligned}$$

Nótese, además, que si $k \neq 0$ y $N \in \mathbb{Z}$ con $N \geq 0$ es suficientemente grande, entonces $\|\psi_N\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} = 1$. Por tanto, sin más que tomar límite, se tiene que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\|T(\psi_N)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}}{\|\psi_N\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}} = \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \,.$$

Esto prueba, por tanto, que

$$\sup_{\substack{\phi\in\ell_c(\mathbb{N})\\ \phi\neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}}{\|\phi\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}} = \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \,.$$

$\square$

Capítulo 3

Señales de cuadrado sumable

En el Capítulo 2 hemos introducido conceptos analíticos de la teoría de señales y sistemas. Además, hemos abordado las propiedades de invariancia, causalidad e ∞-estabilidad para sistemas lineales definidos sobre $\ell_c(\mathbb{Z})$.

El papel del $\ell_c(\mathbb{Z})$ en este trabajo es doble. Por un lado, es un marco natural para señales realistas, pues muchos de los fenómenos reales a los que podemos asociarle una señal ocurren en un intervalo de tiempo acotado. Por otro lado, desde un punto de vista matemático, $\ell_c(\mathbb{Z})$ nos ayuda, por densidad, a afrontar problemas similares a los dados en el Capítulo 2, pero en el marco de los espacios $\ell^p(\mathbb{Z})$.

En este capítulo, después de hacer una breve presentación de los sistemas sobre $\ell^p(\mathbb{Z})$, queremos centrarnos especialmente en el espacio $\ell^2(\mathbb{Z})$. Esto nos llevará, entre otras cosas, a hallar la relación de los espacios de Hardy con la teoría de la señal.

3.1. Sistemas en $\ell^p(\mathbb{Z})$

El objetivo de esta sección es ofrecer un resultado análogo al Teorema 2.5.2 y al Teorema 2.6.1, pero analizando el caso de la p-estabilidad para sistemas lineales e invariantes en $\ell^p(\mathbb{Z})$, con $1 \leq p \leq \infty$. Para ello, comenzamos probando el siguiente resultado:

Lema 3.1.1 (Desigualdad de Young). *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Sean $k \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y $\phi \in \ell^p(\mathbb{Z})$ dos señales. En ese caso, se tiene que*

$$\|k * \phi\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} \leq \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \|\phi\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} .$$

Demostración. Comencemos suponiendo que $p = \infty$. En ese caso, dado un entero $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$\begin{aligned} |(k * \phi)(n)| &= \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} k(m)\phi(n-m) \right| \\ &\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} |k(m)| \, |\phi(n-m)| \\ &\leq \|\phi\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |k(m)| \\ &= \|\phi\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} . \end{aligned}$$

Por tanto, se deduce que

$$\|k * \phi\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \leq \|\phi\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} .$$

Supongamos ahora que $p = 1$. En ese caso, obsérvese que

$$\begin{aligned} \|k * \phi\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |(k * \phi)(n)| \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} k(m)\phi(n-m) \right| \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |k(m)| \, |\phi(n-m)| \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |k(m)| \, |\phi(n-m)| \\ &= \|\phi\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |k(m)| \\ &= \|\phi\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} . \end{aligned}$$

Para terminar, supongamos que $1 < p < \infty$. Sea $1 < q < \infty$ tal que $1/p + 1/q = 1$. En ese caso, fijado $n \in \mathbb{Z}$, obsérvese que podemos expresar

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} k(m)\phi(n-m) \right| &\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} |k(m)| \, |\phi(n-m)| \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(|k(m)|^{1/p} \, |\phi(n-m)| \right) |k(m)|^{1/q} . \end{aligned}$$

Lo relevante de esta descomposición es que nos permite ver que el segundo factor es claramente una señal de $\ell^q(\mathbb{Z})$, mientras que el primero, fijado $n \in \mathbb{Z}$, es una señal de $\ell^p(\mathbb{Z})$. Para ver esto último, observamos que

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{Z}}(|k(m)|^{1/p}\,|\phi(n-m)|)^p &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}|k(m)|\,|\phi(n-m)|^p\\ &\le \sum_{m\in\mathbb{Z}}\|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}\,|\phi(n-m)|^p\\ &= \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}\,\|\phi\|_{\ell^p(\mathbb{Z})}^p < \infty.\end{aligned}$$

Por tanto, la desigualdad de Hölder justifica que

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{Z}}(|k(m)|^{1/p}\,|\phi(n-m)|)\,|k(m)|^{1/q} &\le \left[\sum_{m\in\mathbb{Z}}|k(m)|\,|\phi(n-m)|^p\right]^{1/p}\left[\sum_{m\in\mathbb{Z}}|k(m)|\right]^{1/q}\\ &= \left[\sum_{m\in\mathbb{Z}}|k(m)|\,|\phi(n-m)|^p\right]^{1/p}\|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}^{1/q}.\end{aligned}$$

Con todo esto, ya estamos en posición de comprobar que

$$\begin{aligned}\|k*\phi\|_{\ell^p(\mathbb{Z})}^p &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}|(k*\phi)(n)|^p\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{m\in\mathbb{Z}}k(m)\phi(n-m)\right|^p\\ &\le \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}|k(m)|\,|\phi(n-m)|^p\,\|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}^{p/q}\right)\\ &= \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}^{p/q}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}|k(m)|\,|\phi(n-m)|^p\right).\end{aligned}$$

Ahora bien, nótese que $|\phi|^p\in\ell^1(\mathbb{Z})$. Por tanto, usando lo demostrado para el caso de $p=1$, se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}|k(m)|\,|\phi(n-m)|^p\right) &= \||k|*|\phi|^p\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}\\ &\le \||k|\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}\,\||\phi|^p\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}\\ &= \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}\,\|\phi\|_{\ell^p(\mathbb{Z})}^p.\end{aligned}$$

Por tanto, se deduce que

$$\begin{aligned}\|k*\phi\|_{\ell^p(\mathbb{Z})}^p &\le \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}^{p/q}\,\|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}\,\|\phi\|_{\ell^p(\mathbb{Z})}^p\\ &= \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}^{1+p/q}\,\|\phi\|_{\ell^p(\mathbb{Z})}^p\\ &= \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}^p\,\|\phi\|_{\ell^p(\mathbb{Z})}^p,\end{aligned}$$

donde hemos usado que $1/p + 1/q = 1$. Por tanto, se deduce que

$$\|k * \phi\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} \leq \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \|\phi\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} .$$

$\square$

Estamos ya en posición de probar el siguiente resultado:

Teorema 3.1.2. *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Sea $T\colon \ell^p(\mathbb{Z}) \to \ell^p(\mathbb{Z})$ un sistema. Supongamos que T es lineal, invariante y p-estable. Entonces, para toda $\phi \in \ell^p(\mathbb{Z})$, se tiene que $T(\phi) = k * \phi$ para $k = T(\delta_0) \in \ell^p(\mathbb{Z})$. Además, si T es causal, entonces $k \in \ell^p(\mathbb{N})$.*

Recíprocamente, supongamos que $k = T(\delta_0) \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces el sistema $T\colon \ell^p(\mathbb{Z}) \to \ell^p(\mathbb{Z})$ definido por $T(\phi) = k * \phi$ para toda $\phi \in \ell^p(\mathbb{Z})$ es lineal, invariante y p-estable. Además, si $k \in \ell^1(\mathbb{N})$, entonces T es también causal. Por último, se tiene que

$$\sup_{\substack{\phi \in \ell^p(\mathbb{Z}) \\ \phi \neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^p(\mathbb{Z})}}{\|\phi\|_{\ell^p(\mathbb{Z})}} \leq \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} .$$

Demostración. Supongamos que T es lineal, invariante y p-estable. Sea la señal $\phi \in \ell^p(\mathbb{Z})$. Recuérdese que el conjunto de señales $\{\delta_m : m \in \mathbb{Z}\}$ es completo en $\ell^p(\mathbb{Z})$. En ese caso, nótese que para cada $\phi \in \ell^p(\mathbb{Z})$ podemos escribir

$$\phi = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi(m) \delta_m,$$

indicando que la sucesión de sumas parciales de la serie anterior converge, en norma, a ϕ. Para ver esto, escogemos $N \in \mathbb{Z}$ con $N > 0$, y definimos

$$\phi_N := \sum_{|m| \leq N} \phi(m) \delta_m.$$

En ese caso, si $M < N$, se tiene que

$$\|\phi_M - \phi_N\|^p_{\ell^p(\mathbb{Z})} = \left\| \sum_{N+1 \leq |m| \leq M} \phi(m) \delta_m \right\|^p_{\ell^p(\mathbb{Z})} = \sum_{N+1 \leq |m| \leq M} |\phi(m)|^p .$$

Por tanto, $\{\phi_N\}$ es una sucesión de Cauchy, cuyo límite (que existe por completitud) es ϕ. En ese caso, si T es lineal y p-estable (es decir, continuo), podemos expresar

$$\begin{aligned} T(\phi) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \phi(m)T(\delta_m) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \phi(m)T(\tau_1^m(\delta_0)). \end{aligned}$$

Si T es además invariante, se tiene que

$$T(\phi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \phi(m)\tau_1^m(T(\delta_0)).$$

Por tanto, fijado $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$\begin{aligned} (T(\phi))(n) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \phi(m)(\tau_1^m(T(\delta_0)))(n) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \phi(m)(T(\delta_0))(n-m) \\ &= (T(\delta_0) * \phi)(n). \end{aligned}$$

Por tanto, T es de forma $T(\phi) = k * \phi$ para $\phi \in \ell^p(\mathbb{Z})$, donde $k = T(\delta_0)$ pertence a $\ell^p(\mathbb{Z})$.

Visto esto, el Lema 2.4.5 indica que si T es causal, entonces $k \in \ell^p(\mathbb{N})$.

Por otro lado, supongamos que T es de la forma $T(\phi) = k * \phi$ para $k \in \ell^1(\mathbb{Z})$. En ese caso, T es trivialmente lineal. Además, es invariante, según el Lema 2.4.4. Más aún, en virtud del Lema 3.1.1, se tiene que

$$\|T(\phi)\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} = \|k * \phi\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} \leq \|\phi\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}.$$

Por tanto, efectivamente, se tiene que

$$\sup_{\substack{\phi\in\ell^p(\mathbb{Z}) \\ \phi\neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^p(\mathbb{Z})}}{\|\phi\|_{\ell^p(\mathbb{Z})}} \leq \|k\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}.$$

Y esto implica que T es p-estable.

Además, si $k \in \ell^1(\mathbb{N})$, entonces el Lema 2.4.5 asegura que T es causal. $\square$

Observemos que los Teoremas 2.6.1 y 3.1.2 tienen un claro paralelismo. Es remarcable que en el caso del Teorema 2.6.1 se consigue una caracterización completa de la ∞-estabilidad, mientras que en el Teorema 3.1.2 solo se consigue una condición suficiente y otra necesaria para la p-estabilidad. Es natural, entonces, preguntarse si existen sistemas $T\colon \ell^p(\mathbb{Z}) \to \ell^p(\mathbb{Z})$, de la forma $T(\phi) = k * \phi$ para alguna señal $k\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, y que sean p-estables, aunque $k \notin \ell^1(\mathbb{Z})$. La búsqueda de respuesta a esta pregunta en el caso $p = 2$ es la que nos guía en este capítulo, dando lugar al Teorema 3.3.1, al Teorema 3.5.1 y al Ejemplo 3.5.2.

3.2. Transformada de Fourier

Para seguir con el estudio de sistemas sobre $\ell^2(\mathbb{Z})$ es conveniente introducir las siguientes ideas, que vienen dadas por la analogía con el análisis de Fourier:

Definición 3.2.1. *Sea $\phi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ una señal. Se llama transformada de Fourier de ϕ a la función $\hat{\phi} : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$\hat{\phi}(\xi) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} \phi(m)\xi^m, \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

Nótese que la idea detrás de la definición anterior es asociarle a cada señal una función, de manera que los coeficientes de Fourier de dicha función vengan descritos por la propia señal.

En este punto, conviene recordar que $L^2(\mathbb{T})$ es un espacio de Hilbert bajo el producto escalar dado por

$$\langle f \mid g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{i\theta})} g(e^{i\theta}) d\theta, \quad f, g \in L^2(\mathbb{T}).$$

Puede comprobarse que, entonces, el conjunto $\{f_m\} \subset L^2(\mathbb{T})$ dado por

$$f_m(\xi) := \xi^m, \quad \xi \in \mathbb{T},\, m \in \mathbb{Z},$$

es un conjunto ortonormal. Más aún, es conocido que es un conjunto completo, es decir, el espacio vectorial que genera es denso en $L^2(\mathbb{T})$.

Visto lo anterior, y para darle solidez a la última definición, damos el siguiente resultado:

Teorema 3.2.2. *Sean $\phi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ una señal y $\hat{\phi} : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ su transformada de Fourier. Se cumple que* *(a) La función $\hat{\phi}$ es de cuadrado integrable, es decir,*

$$\hat{\phi} \in L^2(\mathbb{T}).$$

(b) Las normas de ϕ y $\hat{\phi}$ coinciden, es decir,

$$\|\phi\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\phi(m)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\hat{\phi}(e^{i\theta})|^2 d\theta = \|\hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{T})}^2.$$

(c) La señal ϕ coincide con los coeficientes de Fourier de $\hat{\phi}$, es decir,

$$\phi(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{\phi}(e^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. (a) Por completitud, basta ver que la sucesión

$$\hat{\phi}_N(\xi) := \sum_{m=-N}^{N} \phi(m)\xi^m, \quad \xi \in \mathbb{T},\, N \in \mathbb{Z},\, N \geq 0,$$

es una sucesión de Cauchy.

Para verlo, sean $0 \leq N < M$. Nótese que

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{\phi}_M - \hat{\phi}_N\right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 &= \langle \hat{\phi}_M - \hat{\phi}_N \mid \hat{\phi}_M - \hat{\phi}_N \rangle \\
&= \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ N<|m|\leq M}} \sum_{\substack{m'\in\mathbb{Z} \\ N<|m|\leq M}} \overline{\phi(m)}\phi(m')\langle \xi^m \mid \xi^{m'} \rangle \\
&= \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ N<|m|\leq M}} |\phi(m)|^2 \\
&\leq \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ N<|m|}} |\phi(m)|^2 .
\end{aligned}$$

Nótese que

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ N<|m|}} |\phi(m)|^2 = 0,$$

al ser el resto de una serie convergente. Esto prueba lo requerido.

(b) Puesto que el conjunto $\{f_m\} \subset L^2(\mathbb{T})$ dado por

$$f_m(\xi) := \xi^m, \quad \xi \in \mathbb{T}, \, m \in \mathbb{Z},$$

es un conjunto ortonormal y completo, la igualdad entre normas se deduce de la conocida igualdad de Parseval para espacios de Hilbert.

(c) De nuevo, al ser $\{f_m\}$ un conjunto ortonormal y completo, se tiene que la descomposición

$$\hat{\phi} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle f_m \mid \hat{\phi} \rangle f_m$$

es única. En ese caso, recordando la definición de $\hat{\phi}$, y por comparación entre ambas expresiones, ha de ser

$$\phi(n) = \langle f_n \mid \hat{\phi} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\phi}(e^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

□

Además, la transformada de Fourier se relaciona con la convolución de dos señales de manera análoga a la convolución de dos funciones integrables:

Lema 3.2.3. *Sean $\phi \in \ell^2_c(\mathbb{Z})$ y $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ dos señales. Entonces*

$$\widehat{\phi * \psi}(\xi) = \hat{\phi}(\xi) \hat{\psi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

Demostración. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(n) = 0$ si $|n| > N$. Dado $\xi \in \mathbb{T}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi * \psi}(\xi) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\phi * \psi)(n)\xi^n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \phi(m)\psi(n-m)\xi^n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m=-N}^{N} \phi(m)\psi(n-m)\xi^n \\
&= \sum_{m=-N}^{N} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(m)\psi(n-m)\xi^n \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(m)\psi(n-m)\xi^n \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(m) \left(\psi(n-m)\xi^{n-m}\right) \xi^m \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \phi(m)\hat{\psi}(\xi)\xi^m \\
&= \hat{\psi}(\xi) \sum_{m\in\mathbb{Z}} \phi(m)\xi^m \\
&= \hat{\psi}(\xi)\hat{\phi}(\xi).
\end{aligned}$$

□

Nótese que los dos resultados anteriores inducen la siguiente relación entre ambos espacios:

Teorema 3.2.4. *La aplicación* $\hat{\cdot} : \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T})$ *es un isomorfismo isométrico.*

Demostración. Nótese que la aplicación es trivialmente lineal. Además, el Teorema 3.2.2 indica que dicha aplicación está bien definida y es una isometría (y, por tanto, es inyectiva). Entonces, para ver que es un isomorfismo isométrico entre dichos espacios de Banach, basta ver que es sobreyectiva.

Para comprobarlo, sea $f \in L^2(\mathbb{T})$, y sea ϕ la sucesión de coeficientes de Fourier de f, es decir,

$$\phi(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta} d\theta = \langle f_n \mid f \rangle, \quad n \in \mathbb{Z},$$

donde $\{f_n\} \subset L^2(\mathbb{T})$ es el conjunto ortonormal y completo definido por

$$f_n(\xi) := \xi^n, \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

En ese caso, al ser $f \in L^2(\mathbb{T})$, es conocido que $\phi \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Además, por las propiedades de $\{f_n\}$, se tiene que

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f_n \mid f \rangle f_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n) f_n.$$

Esta última igualdad es equivalente, como queríamos, a $\hat{\phi} = f$. □

Nota 3.2.5. *Durante el desarrollo del trabajo habrá numerosas ocasiones donde nos interese ver a la transformada de Fourier como un operador (así como en el Teorema 3.2.4). Donde sea necesario por claridad, usaremos $\mathscr{F}(\phi)$ (y no $\hat{\phi}$) para referirnos a la transformada de Fourier de $\phi \in \ell^2(\mathbb{Z})$, o bien usaremos $\mathscr{F}$ para referirnos al operador $\hat{\cdot}\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T})$.*

3.3. Estabilidad en $\ell^2(\mathbb{Z})$

Nótese que $\ell^2(\mathbb{Z})$ es un espacio de señales bi-invariante, en el sentido de la Definición 2.3.2. Por tanto, como ya hicimos en el Capítulo 2, podemos estudiar cómo caracterizar algunas de las propiedades que pueden poseer los sistemas sobre este espacio. Esto es de lo que trata el siguiente resultado, en el que cobra sentido la presentación de la transformada de Fourier que realizamos anteriormente:

Teorema 3.3.1. *Sea $T\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ un sistema. Entonces T es lineal, invariante y 2-estable si y solo si el sistema T es de la forma $T(\phi) = k * \phi$ para todo $\phi \in \ell^2(\mathbb{Z})$, con $k = T(\delta_0) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tal que $\hat{k} \in L^\infty(\mathbb{T})$. Más aún, en ese caso, se tiene que*

$$\sup_{\substack{\phi \in \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \phi \neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}}{\|\phi\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}} = \sup_{\substack{f \in L^2(\mathbb{T}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\hat{k} f\|_{L^2(\mathbb{T})}}{\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}} = \|\hat{k}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

Demostración. Supongamos que T es lineal, invariante y 2-estable. En ese caso, por el Teorema 3.1.2, sabemos que $T(\phi) = k * \phi$ para todo $\phi \in \ell^2(\mathbb{Z})$, con $k = T(\delta_0) \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Por tanto, dado $\phi \in \ell^2_c(\mathbb{Z})$, se tiene que

$$\|T(\phi)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \|k * \phi\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \|\hat{k}\hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{T})},$$

donde se han usado el Teorema 3.2.2 y el Lema 3.2.3.

Entonces es claro, por densidad, y usando el Teorema 3.2.4, que

$$\sup_{\substack{\phi \in \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \phi \neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}}{\|\phi\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}} = \sup_{\substack{f \in L^2(\mathbb{T}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\hat{k} f\|_{L^2(\mathbb{T})}}{\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}}.$$

Veamos ahora que, puesto que T es 2-estable, ha de ser que $\hat{k} \in L^\infty(\mathbb{T})$. Para ello, procedemos por reducción al absurdo. Nótese que, por definición, $\hat{k} \in L^2(\mathbb{T})$, por lo que $\hat{k}$ es un función medible. Por tanto, consideremos los conjuntos medibles

$$\Omega_n := \{\xi \in \mathbb{T} : \left|\hat{k}(\xi)\right| > n\}, \quad n > 0.$$

Si $\hat{k} \notin L^\infty(\mathbb{T})$, entonces la medida Lebesgue de Ω_n ha de ser estrictamente positiva para todo $n > 0$. Además, se satisface que

$$|\hat{k}(\xi)|\chi_{\Omega_n}(\xi) \geq n\chi_{\Omega_n}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{T}, n > 0,$$

donde χ_A denota la función indicatriz de $A \subset \mathbb{T}$. Por tanto,

$$\|\hat{k}\chi_{\Omega_n}\|_{L^2(\mathbb{T})} \geq n \left\|\chi_{\Omega_n}\right\|_{L^2(\mathbb{T})}, \quad n > 0.$$

Es decir,

$$\frac{\|\hat{k}\chi_{\Omega_n}\|_{L^2(\mathbb{T})}}{\left\|\chi_{\Omega_n}\right\|_{L^2(\mathbb{T})}} \geq n, \quad n > 0.$$

Nótese que $\chi_{\Omega_n} \in L^2(\mathbb{T})$, por tanto lo anterior contradice la 2-estabilidad de T. Por consiguiente, $\hat{k} \in L^\infty(\mathbb{T})$.

Veamos ahora que, de hecho, la norma del operador T en $\ell^2(\mathbb{Z})$ es mayor que la norma de $\hat{k}$ en $L^\infty(\mathbb{T})$. Para ello, tomemos $0 < \epsilon < \|\hat{k}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$. Consideremos el conjunto medible dado por

$$\Omega := \{\xi \in \mathbb{T} : \|\hat{k}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} - \epsilon < |\hat{k}(\xi)|\}.$$

Nótese que Ω tiene medida Lebesgue estrictamente positiva (si tuviese medida nula, entonces $\hat{k}$ estaría esencialmente acotado por $\|\hat{k}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} - \epsilon < \|\hat{k}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$). Con esto en mente, observamos que

$$\begin{aligned}
\left(\|\hat{k}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} - \epsilon\right) \left\|\chi_\Omega\right\|_{L^2(\mathbb{T})} &= \|(\|\hat{k}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} - \epsilon)\chi_\Omega\|_{L^2(\mathbb{T})} \\
&\leq \|\hat{k}\chi_\Omega\|_{L^2(\mathbb{T})}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|\hat{k}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} - \epsilon \leq \frac{\|\hat{k}\chi_\Omega\|_{L^2(\mathbb{T})}}{\left\|\chi_\Omega\right\|_{L^2(\mathbb{T})}} \leq \sup_{\substack{f \in L^2(\mathbb{T}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\hat{k}f\|_{L^2(\mathbb{T})}}{\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}}.$$

Como lo anterior es cierto para ϵ arbitrariamente pequeño, se deduce que

$$\|\hat{k}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \sup_{\substack{f \in L^2(\mathbb{T}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\hat{k} f\|_{L^2(\mathbb{T})}}{\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}}.$$

Recíprocamente, repitiendo los argumentos anteriores, nótese que si se tiene que $T(\phi) = k * \phi$, para $k = T(\delta_0) \in \ell^2(\mathbb{Z})$, tal que $\hat{k} \in L^\infty(\mathbb{T})$, entonces, usando argumentos de densidad, se tiene que

$$\sup_{\substack{\phi \in \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \phi \neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}}{\|\phi\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}} = \sup_{\substack{f \in L^2(\mathbb{T}) \\ h \neq 0}} \frac{\|\hat{k} f\|_{L^2(\mathbb{T})}}{\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}} \leq \|\hat{k}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

En ese caso, T es 2-estable. □

Nótese que este resultado supone una mejora, en el caso $p = 2$, a lo ya probado en el Teorema 3.1.2. La herramienta que, de hecho, nos ha ayudado a conseguir un resultado "más fuerte" es la transformada de Fourier en $\ell^2(\mathbb{Z})$.

3.4. Transformada Z

Gracias a las ideas presentadas en la Sección 3.2 hemos podido dar, hasta ahora, una caracterización completa de los sistemas lineal, invariantes y 2-estables en $\ell^2(\mathbb{Z})$ (a saber, Teorema 3.3.1). No obstante, aún no hemos podido hablar de la causalidad de un sistema, obteniendo resultados parecidos al Corolario 2.6.3.

Para seguir trabajando en ello definimos el siguiente espacio, por analogía con la Definición 2.6.2:

Definición 3.4.1. *Denotaremos por $\ell^2(\mathbb{N})$ al conjunto $\ell^2(\mathbb{Z}) \cap \ell(\mathbb{N})$.*

Nos interesa ahora definir una nueva transformada sobre este espacio:

Definición 3.4.2. *Sea $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$. Definimos la transformada Z de ϕ como la función $Z\phi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$Z\phi(z) := \sum_{m \in \mathbb{N}} \phi(m) z^m, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Por claridad, cuando las expresiones lo requieran, notaremos por $Z(\phi)$ a la función $Z\phi$.

Observación 3.4.3. En algunos textos es usual, dada $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$, definir su transformada Z como la función dada por

$$Z\phi(z) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \phi(n)\frac{1}{z^n}, \quad |z| > 1.$$

Nótese la analogía de este concepto con el que nosotros hemos definido.

El motivo de adoptar la Definición 3.4.2 es puramente técnico: favorece la introducción de los espacios de Hardy, como se ve en el Teorema 3.4.4.

Lo útil de esta transformada es que, en algún sentido, generaliza a la transformada de Fourier de señales de $\ell^2(\mathbb{N})$, aportando más información para el estudio de estas señales. En particular, se verifican las siguientes propiedades:

Teorema 3.4.4. *Sean $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$ y $Z\phi$ su transformada Z. Entonces $Z\phi$ es una función holomorfa en $\mathbb{D}$, y la serie que define a $Z\phi$ converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$. Más aún, $Z\phi \in H^2(\mathbb{D})$. Además, se tiene que*

$$\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} \left|\hat{\phi}(e^{it}) - Z\phi(re^{it})\right|^2 dt = 0,$$

es decir,

$$\lim_{r\to 1^-} \|\hat{\phi} - Z\phi_r\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0,$$

siendo

$$Z\phi_r(\xi) = Z\phi(r\xi), \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

Demostración. Comenzamos definiendo la sucesión de funciones dada por

$$Z_N\phi(z) := \sum_{m=0}^{N} \phi(m)z^m, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Nótese que, fijado $z \in \mathbb{D}$, se tiene que si $0 \leq N < M$, entonces

$$\begin{aligned} |Z_M\phi(z) - Z_N\phi(z)|^2 &= \left|\sum_{m=N+1}^{M} \phi(m)z^m\right|^2 \\ &\leq \sum_{m=N+1}^{M} |\phi(m)|^2 \cdot \sum_{m=N+1}^{M} |z|^{2m} \\ &= \sum_{m=N+1}^{M} |\phi(m)|^2 \cdot \frac{|z|^{2N+2}}{1-|z|^2}, \end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de la desigualdad de Hölder. Esta desigualdad muestra que, si $z \in \mathbb{D}$, la sucesión anterior es de Cauchy, y por tanto, convergente (en $\mathbb{C}$). En ese caso, vemos que $Z_N\phi$ converge puntualmente en $\mathbb{D}$ a $Z\phi$. Más aún, observamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} |Z\phi(z) - Z_N\phi(z)|^2 &= \left| \sum_{m=N+1}^{\infty} \phi(m) z^m \right|^2 \\ &\leq \sum_{m=N+1}^{\infty} |\phi(m)|^2 \cdot \sum_{m=N+1}^{\infty} |z|^{2m} \\ &= \sum_{m=N+1}^{\infty} |\phi(m)|^2 \cdot \frac{|z|^{2N+2}}{1-|z|^2}. \end{aligned}$$

En ese caso, para cada $0 < r < 1$, se tiene que

$$|Z\phi(z) - Z_N\phi(z)|^2 \leq \frac{r^{2N+2}}{1-r^2} \sum_{m=N+1}^{\infty} |\phi(m)|^2, \quad |z| \leq r.$$

Esto muestra que, la convergencia de $Z_N\phi$ a $Z\phi$ es uniforme en compactos de $\mathbb{D}$.

Tomemos ahora, para cada $0 < r < 1$, la función

$$Z\phi_r(\xi) = Z\phi(r\xi) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \phi(m) r^m \xi^m, \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

Nótese que $Z\phi_r \in L^2(\mathbb{T})$. Más aún, la igualdad de Parseval establece que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| Z\phi_r(e^{it}) \right|^2 dt = \sum_{m \in \mathbb{N}} |\phi(m) r^m|^2 .$$

En ese caso, nótese que

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| Z\phi_r(e^{it}) \right|^2 dt \leq \sum_{m \in \mathbb{N}} |\phi(m)|^2 < \infty.$$

Por tanto, por definición, se tiene que $Z\phi \in H^2(\mathbb{D})$.

Una vez visto esto, el Teorema 1.1.5 asegura que $Z\phi$ posee límite no tangencial en casi todo $\mathbb{T}$. Este límite viene descrito por la función

$$\lim_{r \to 1^-} Z\phi(r\xi) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \phi(m) \xi^m = \hat{\phi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

Además, se tiene la convergencia en norma cuadrática de $Z_r\phi$ a $\hat{\phi}$ cuando $r \to 1^-$. Esto finaliza la prueba. $\square$

Lema 3.4.5. *Sean $\phi, \psi \in \ell^2(\mathbb{N})$ dos señales. Supongamos que $\phi * \psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Entonces, $\phi * \psi \in \ell^2(\mathbb{N})$. Además, se satisface que*

$$Z(\phi * \psi)(z) = Z(\phi)(z)Z(\psi)(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

En particular, si $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$ es tal que $Z\phi \in H^\infty(\mathbb{D})$, entonces

$$Z(\phi * \psi)(z) = Z(\phi)(z)Z(\psi)(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

para toda señal $\psi \in \ell^2(\mathbb{N})$.

Demostración. Comenzamos notando que, si $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned}
(\phi * \psi)(n) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \phi(n-m)\psi(m) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \phi(n-m)\psi(m) \\
&= \sum_{m=0}^{n} \phi(n-m)\psi(m).
\end{aligned}$$

Por tanto, si $n < 0$, es claro que $(\phi * \psi)(n) = 0$. De esta forma, si asumimos que $\phi * \psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$, se tiene que $\phi * \psi \in \ell^2(\mathbb{N})$. Más aún, dado $z \in \mathbb{D}$, tiene sentido calcular

$$\begin{aligned}
Z(\phi * \psi)(z) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\phi * \psi)(n) z^n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \phi(m)\psi(n-m)z^n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m=0}^{n} \phi(m)\psi(n-m)z^n \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n=m}^{\infty} \phi(m)\psi(n-m)z^n \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n=m}^{\infty} \phi(m)\left(\psi(n-m)z^{n-m}\right) z^m \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \phi(m)Z(\psi)(z)z^m \\
&= Z(\psi)(z) \sum_{m\in\mathbb{N}} \phi(m)z^m \\
&= Z(\psi)(z)Z(\phi)(z).
\end{aligned}$$

Por otro lado, sea $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$ con $Z\phi \in H^\infty(\mathbb{D})$. Sea $\psi \in \ell^2(\mathbb{N})$ una señal arbitraria. Para ver que

$$Z(\phi * \psi)(z) = Z(\phi)(z)Z(\psi)(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

basta ver que $\phi * \psi \in \ell^2(\mathbb{N})$, tal y como hemos visto anteriormente. Pero $\phi * \psi \in \ell^2(\mathbb{N})$ si y solo si la función $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) := \sum_{n \in \mathbb{N}} (\phi * \psi)(n) z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

es tal que $f \in H^2(\mathbb{D})$. Ahora bien, nótese que

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (\phi * \psi)(n) z^n \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m=0}^{n} \phi(n-m)\psi(m) \right) z^n \\
&= \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n=m}^{\infty} \phi(n-m)\psi(m) z^n \\
&= \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n=m}^{\infty} \phi(n-m)\psi(m) z^{n-m} z^m \\
&= \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{l \in \mathbb{N}} \phi(l)\psi(m) z^l z^m \\
&= \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \psi(m) z^m \right) \left(\sum_{l \in \mathbb{N}} \phi(l) z^l \right) \\
&= Z(\psi)(z) Z(\phi)(z).
\end{aligned}$$

Pero, como $Z\phi \in H^\infty(\mathbb{D})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= |Z(\psi)(z)Z(\phi)(z)| \\
&\le \|Z\phi\|_\infty |Z(\psi)(z)| .
\end{aligned}$$

Por tanto, $f \in H^2(\mathbb{D})$, puesto que $Z\psi \in H^2(\mathbb{D})$. Por lo discutido anteriormente, esto basta para demostrar el resultado. □

El resultado anterior, entre otras cosas, muestra que si $\phi, \psi \in \ell^2(\mathbb{N})$, entonces

$$\phi * \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}) \iff \phi * \psi \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

Ahora bien, se pueden dar algunos ejemplos de señales $\phi, \psi \in \ell^2(\mathbb{N})$ tales que $\phi * \psi \notin \ell^2(\mathbb{N})$ (por tanto, la condición de que $\phi * \psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ es necesaria para que el resultado anterior sea cierto). Algunos de estos ejemplos pueden verse de la siguiente manera:

Sea $h \in H^2(\mathbb{D})$ tal que $h^2 \notin H^2(\mathbb{D})$. Sea $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$ tal que $Z(\phi) = h$. Afirmamos que $\phi * \phi \notin \ell^2(\mathbb{N})$. Para verlo, consideremos $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) := \sum_{n\in\mathbb{N}} (\phi * \phi)(n) z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Recordamos que $\phi * \phi \in \ell^2(\mathbb{N})$ si y solo si $g \in H^2(\mathbb{D})$. Sin embargo, en la prueba del Lema 3.4.5 se puede ver que

$$g(z) = Z(\phi)(z) Z(\phi)(z) = h^2(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Por tanto, $g = h^2 \notin H^2(\mathbb{D})$. De aquí se deduce que $\phi * \phi \notin \ell^2(\mathbb{N})$.

Como ya ocurrió con la transformada de Fourier, podemos dar el siguiente resultado:

Teorema 3.4.6. *El operador $Z\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to H^2(\mathbb{D})$ es un isomorfismo isométrico.*

Demostración. Comenzamos notando que Z es un operador lineal. Además, se tiene

$$\|Z\phi\|^2_{H^2(\mathbb{D})} = \sum_{n=0}^{\infty} |\phi(n)|^2 = \|\phi\|_{\ell^2(\mathbb{N})}.$$

Esto justifica que Z es una isometría (y, por tanto, es un operador inyectivo). Para ver que es un isomorfismo, resta ver que es sobreyectivo. Pero esto es sencillo, puesto que si $h \in H^2(\mathbb{D})$, con

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

entonces es conocido que la sucesión

$$\phi(n) := \begin{cases} h_n, & n \in \mathbb{N}, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z},$$

cumple $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$, y es claro que $Z\phi = h$. Esto justifica la sobreyectividad. $\square$

Estamos ahora en posición de ver, como dijimos en la introducción de esta sección, que la transformada Z está íntimamente ligada con la transformada de Fourier:

Teorema 3.4.7. *Para cada $f \in H^2(\mathbb{D})$, denotamos por $f^*\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ a la función definida por sus límites radiales. Entonces se tiene la igualdad $(Z\phi)^* = \hat{\phi}$ para toda $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$. Más aún, la aplicación $\hat{\cdot}\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to H^2(\mathbb{T})$ es un isomorfismo isométrico.*

Demostración. Recordemos que si $f \in H^2(\mathbb{D})$ con

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

entonces

$$f^*(\xi) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n \xi^n, \quad \xi \in \mathbb{T},$$

verifica que $f^* \in H^2(\mathbb{T})$. De hecho, las expresiones anteriores justifican que

$$(Z\phi)^*(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(n)\xi^n = \hat{\phi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

Por tanto, es cierto que $(Z\phi)^* = \hat{\phi}$ para toda $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$.

Más aún, recuérdese que el operador $\Lambda\colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{T})$ dado por

$$\Lambda(f) = f^*, \quad f \in H^2(\mathbb{D}),$$

es un isomorfismo isométrico. De hecho, acabamos de ver que $\hat{\cdot} = \Lambda Z$ sobre $\ell^2(\mathbb{N})$. Por tanto, como ambos son isomorfismos isométricos (Teorema 3.4.6), su composición $\hat{\cdot}\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to H^2(\mathbb{T})$ también ha de serlo. $\square$

3.5. Causalidad en $\ell^2(\mathbb{Z})$

Estamos ya en posición de caracterizar los sistemas causales sobre $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Teorema 3.5.1. *Sea $T\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ un sistema. Entonces T es lineal, causal, invariante y 2-estable si y solo si existe $k \in \ell^2(\mathbb{N})$ de manera que $T(\phi) = k * \phi$, para $\phi \in \ell^2(\mathbb{Z})$, y $Z(k) \in H^\infty(\mathbb{D})$. Además, en ese caso, se tiene que*

$$\sup_{\substack{\phi \in \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \phi \neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}}{\|\phi\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}} = \sup_{\substack{f \in H^2(\mathbb{T}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\hat{k} f\|_{H^2(\mathbb{T})}}{\|f\|_{H^2(\mathbb{T})}} = \sup_{\substack{f \in H^2(\mathbb{D}) \\ f \neq 0}} \frac{\|Zk \cdot f\|_{H^2(\mathbb{D})}}{\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}} = \|\hat{k}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

Demostración. Supongamos que T es lineal, invariante y 2-estable. En ese caso, el Teorema 3.3.1 asegura que T es de la forma $T(\phi) = k * \phi$, para todo $\phi \in \ell^2(\mathbb{Z})$, con $k = T(\delta_0) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tal que $\hat{k} \in L^\infty(\mathbb{T})$. En ese caso, si además T es causal, entonces $k \in \ell^2(\mathbb{N})$, según el Lema 2.4.5. Por tanto, por el Teorema 1.1.8, es claro que $\hat{k} \in H^\infty(\mathbb{T})$. Esto implica que $Z(k) \in H^\infty(\mathbb{D})$.

Recíprocamente, supongamos ahora $k \in \ell^2(\mathbb{N})$ es tal que la aplicación $T : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ es un sistema de la forma $T(\phi) = k * \phi$ para $\phi \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Entonces T es trivialmente lineal. Además, es invariante (por el Lema 2.4.4) y causal (por el Lema 2.4.5). Incluso podemos afirmar que $k = T(\delta_0)$.

Más aún, si $Zk \in H^\infty(\mathbb{D})$, entonces $\hat{k} \in H^\infty(\mathbb{T}) \subset L^\infty(\mathbb{T})$, y se tiene que

$$\begin{aligned}
\|T(\phi)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} &= \|k * \phi\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \\
&= \|\hat{k}\hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{T})} \\
&\leq \|\hat{k}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \|\hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{T})} \\
&= \|\hat{k}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \, \|\phi\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \, ,
\end{aligned}$$

donde se ha usado el Teorema 3.2.2. En ese caso, se tiene que

$$\sup_{\substack{\phi \in \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \phi \neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}}{\|\phi\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}} \leq \|\hat{k}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} < \infty.$$

Esto demuestra que T es 2-estable.

Resta ver la igualdad entre supremos propuesta en el enunciado. Para ello, sea $b := Zk \in H^\infty(\mathbb{D})$ la transformada Z de k. Sea $M_b \colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ el operador dado por $M_b(f) := bf$, para $f \in H^2(\mathbb{D})$. Notemos por M_b^* a su operador adjunto.

Como vimos en la Sección 1.3, si $f \in H^2(\mathbb{D})$ viene dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

entonces se cumple que

$$f(z) = \langle \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}^n w^n \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \rangle = \langle \frac{1}{1 - \bar{z}w} \mid f(w) \rangle = \langle k_{\bar{z}} \mid f \rangle,$$

donde $k\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ está definida por

$$k_z(w) := \frac{1}{1 - \bar{z}w}, \quad w \in \mathbb{D}.$$

Es decir, los funcionales evaluación son continuos en $H^2(\mathbb{D})$, y están representado por la familia $\{k_z : z \in \mathbb{D}\}$.

En ese caso, apreciemos que

$$\begin{aligned}
(M_b^*(k_z))(w) &= \langle k_w \mid M_b^*(k_z)\rangle \\
&= \langle M_b(k_w) \mid k_z\rangle \\
&= \overline{\langle k_z \mid M_b(k_w)\rangle} \\
&= \overline{\langle k_z \mid bk_w\rangle} \\
&= \overline{b(z)k_w(z)} \\
&= \overline{b(z)}\frac{1}{1 - w\overline{z}} \\
&= \overline{b(z)}k_z(w).
\end{aligned}$$

Con todo esto, nótese que

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\phi \in \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \phi \neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}}{\|\phi\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}} &= \sup_{\substack{\phi \in \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \phi \neq 0}} \frac{\|k * \phi\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}}{\|\phi\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}} \\
&= \sup_{\substack{\phi \in \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \phi \neq 0}} \frac{\|\hat{k}\hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{T})}}{\|\hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{T})}} \\
&\geq \sup_{\substack{\phi \in \ell^2(\mathbb{N}) \\ \phi \neq 0}} \frac{\|\hat{k}\hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{T})}}{\|\hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{T})}}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, la transformada de Fourier de señales en $\ell^2(\mathbb{N})$ puede ser extendida por la transformada Z, de manera que:

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\phi \in \ell^2(\mathbb{N}) \\ \phi \neq 0}} \frac{\|\hat{k}\hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{T})}}{\|\hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{T})}} &= \sup_{\substack{\phi \in \ell^2(\mathbb{N}) \\ \phi \neq 0}} \frac{\|b \cdot Z\phi\|_{H^2(\mathbb{D})}}{\|Z\phi\|_{H^2(\mathbb{D})}} \\
&= \sup_{\substack{f \in H^2(\mathbb{D}) \\ f \neq 0}} \frac{\|b \cdot f\|_{H^2(\mathbb{D})}}{\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}}.
\end{aligned}$$

Usando la definición del operador M_b, podemos reescribir lo anterior como

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{f\in H^2(\mathbb{D})\\ f\neq 0}} \frac{\|b\cdot f\|_{H^2(\mathbb{D})}}{\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}} &= \sup_{\substack{f\in H^2(\mathbb{D})\\ f\neq 0}} \frac{\|M_b(f)\|_{H^2(\mathbb{D})}}{\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}}\\ &= \|M_b\|_{H^2(\mathbb{D})\to H^2(\mathbb{D})}\\ &= \|M_b^*\|_{H^2(\mathbb{D})\to H^2(\mathbb{D})}\,.\end{aligned}$$

Usando ahora la acción de M_b^* sobre la familia $\{k_z\}$, se tiene

$$\begin{aligned}\|M_b^*\|_{H^2(\mathbb{D})\to H^2(\mathbb{D})} &\geq \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{\|M_b^*(k_z)\|_{H^2(\mathbb{D})}}{\|k_z\|_{H^2(\mathbb{D})}}\\ &= \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{\|\overline{b(z)}(k_z)\|_{H^2(\mathbb{D})}}{\|k_z\|_{H^2(\mathbb{D})}}\\ &= \sup_{z\in\mathbb{D}} |\overline{b(z)}|\\ &= \|b\|_{H^\infty(\mathbb{D})}\\ &= \|\hat{k}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.\end{aligned}$$

En resumen, hemos probado que

$$\begin{aligned}\|\hat{k}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} &\geq \sup_{\substack{\phi\in \ell^2(\mathbb{Z})\\ \phi\neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}}{\|\phi\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}}\\ &\geq \sup_{\substack{f\in H^2(\mathbb{D})\\ f\neq 0}} \frac{\|Zk\cdot f\|_{H^2(\mathbb{D})}}{\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}}\\ &= \sup_{\substack{f\in H^2(\mathbb{T})\\ f\neq 0}} \frac{\|\hat{k}f\|_{H^2(\mathbb{T})}}{\|f\|_{H^2(\mathbb{T})}}\\ &\geq \|\hat{k}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.\end{aligned}$$

Esto demuestra la igualdad entre todos los términos anteriores, y concluye la demostración. □

Podemos ahora dar un ejemplo que muestre que la condición suficiente del Teorema 3.1.2 no es necesaria, como ya adelantamos:

Ejemplo 3.5.2. Sea $k \in \ell^2(\mathbb{N})$ con $Zk \in H^\infty(\mathbb{D})$. Por el Teorema 3.5.1 ya sabemos que el sistema $T\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ dado por $T(\phi) = k * \phi$ es lineal, invariante, 2-estable y causal. Por tanto, para ver que la condición suficiente del Teorema 3.1.2 no es necesaria, hemos de encontrar un ejemplo tal que $k \notin \ell^1(\mathbb{N})$. Abordaremos esta búsqueda de manera indirecta:

Supongamos que $k \in \ell^1(\mathbb{N}) \cap \ell^2(\mathbb{N})$. Nótese que, entonces Zk puede extenderse a $\mathbb{T}$, de manera que Zk resulte holomorfa en $\mathbb{D}$ y continua en $\overline{\mathbb{D}}$. Para verlo, basta tomar $z \in \overline{\mathbb{D}}$ arbitrario y notar que

$$\begin{aligned} |Zk(z)| &= \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} k(n) z^n \right| \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |k(n)| \, |z|^n \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |k(n)| < \infty, \end{aligned}$$

pues $k \in \ell^1(\mathbb{N})$. Por tanto, por el Teorema M de Weiertrass, se tiene que la sucesión de sumas parciales

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} k(n) z^n, \quad z \in \overline{\mathbb{D}},\ N \in \mathbb{N},$$

converge uniformemente en $\overline{\mathbb{D}}$. Dado que la convergencia uniforme preserva la continuidad, se verifica lo que hemos afirmado.

Visto esto, supongamos hallado $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ tal que h no posee una extensión continua a todo $\overline{\mathbb{D}}$ (notar que sí existe, por supuesto, una extensión no tangencial salvo un conjunto de medida nula sobre $\mathbb{T}$, siento esta extensión medible). En cualquier caso, dado que $H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^2(\mathbb{D})$, se tiene que $h \in H^2(\mathbb{D})$. Por tanto, tiene sentido tomar $k = Z^{-1}(h) \in \ell^2(\mathbb{N})$. Por construcción, ha de ser que $k \notin \ell^1(\mathbb{N})$. Sin embargo, por el Teorema 3.5.1, el sistema $T \colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ dado por $T(\phi) = k * \phi$ para todo $\phi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ es lineal, 2-estable, invariante y causal.

Basta, entonces, dar un ejemplo explícito de una función $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ que no posea una extensión continua a todo $\overline{\mathbb{D}}$. Por ejemplo,

$$h(z) = \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Es claro que h es holomorfa sobre $\mathbb{D}$. Más aún, nótese que

$$h(z) = \exp(\Psi(z)), \quad z \in \mathbb{D},$$

donde $\Psi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ es la transformación de Möbius dada por

$$\Psi(z) = -\frac{1+z}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Usando las propiedades de estas transformaciones (entre otras, que lleva circunferencias generalizadas en circunferencias generalizadas) es fácil ver que

$$\Psi(\mathbb{D}) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\}.$$

Por tanto,

$$|h(z)| = |\exp(\Psi(z))| = \exp(\mathrm{Re}(\Psi(z))) \leq \exp(0) = 1.$$

Así, $h \in H^\infty(\mathbb{D})$. Además, se tiene que

$$\lim_{r\to 1^-} h(r) = \lim_{r\to 1^-} \exp\left(-\frac{1+r}{1-r}\right) = \exp(-\infty) = 0.$$

Si embargo, sea

$$C := \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\right\} \subset \overline{\mathbb{D}}.$$

Nótese que $1 \in C$. De nuevo, por las propiedades de las transformaciones de Möbius, se puede comprobar que

$$\Psi(C) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = -1\}.$$

Por tanto,

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in C}} |h(z)| = \lim_{\substack{z\to 1\\ z\in C}} \exp(\mathrm{Re}(\Psi(z))) = e^{-1}.$$

Esto implica que

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in C}} h(z) \neq 0,$$

lo que muestra que h no puede extenderse de manera continua a todo $\mathbb{T}$ (puesto que no puede extenderse en 1 de manera continua).

3.6. Sistemas en $\ell^2(\mathbb{N})$

Así como hemos tratado especialmente los sistemas sobre $\ell^2(\mathbb{Z})$, cobran especial interés los sistemas definidos sobre $\ell^2(\mathbb{N})$. Nótese que estos sistemas son muy diferentes: unos están definidos sobre un espacio bi-invariante, mientras que otros lo están sobre uno simplemente invariante. No obstante, podemos dar caracterizaciones de los sistemas sobre $\ell^2(\mathbb{N})$, donde vuelve a ser fructífero el concepto de transformada Z (lo que muestra que estos sistemas, de nuevo, están relacionados con el espacio $H^2(\mathbb{D})$).

Teorema 3.6.1. *Sea $T\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ un sistema. Entonces T es lineal, invariante y 2-estable si y solo si el sistema T es de la forma $T(\phi) = k * \phi$ para todo $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$, con $k = T(\delta_0) \in \ell^2(\mathbb{N})$ tal que $Z(k) \in H^\infty(\mathbb{D})$. Más aún, en ese caso, se tiene que*

$$\sup_{\substack{\phi\in\ell^2(\mathbb{N})\\ \phi\neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^2(\mathbb{N})}}{\|\phi\|_{\ell^2(\mathbb{N})}} = \sup_{\substack{f\in H^2(\mathbb{D})\\ f\neq 0}} \frac{\|Z(k)f\|_{H^2(\mathbb{D})}}{\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}} = \|Z(k)\|_{H^\infty(\mathbb{D})}.$$

Demostración. Supongamos que T es un sistema de la forma $T(\phi) = k * \phi$ para todo $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$, con $k = T(\delta_0) \in \ell^2(\mathbb{N})$ tal que $Z(k) \in H^\infty(\mathbb{D})$. En ese caso, es claro que T es lineal e invariante (por el Lema 2.4.4). Más aún, usando las propiedades de la transformada Z, se tiene que para toda $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$ se cumple

$$\begin{aligned}
\|T(\phi)\|_{\ell^2(\mathbb{N})} &= \|k * \phi\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \\
&= \|Z(k)Z(\phi)\|_{H^2(\mathbb{D})} \\
&\leq \|Z(k)\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \|Z(\phi)\|_{H^2(\mathbb{D})} \\
&= \|Z(k)\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \|\phi\|_{\ell^2(\mathbb{N})}.
\end{aligned}$$

Por tanto, T es también 2-estable. Además, se cumple

$$\sup_{\substack{\phi\in\ell^2(\mathbb{N})\\ \phi\neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^2(\mathbb{N})}}{\|\phi\|_{\ell^2(\mathbb{N})}} \leq \|Zk\|_{H^\infty(\mathbb{D})}.$$

Recíprocamente, supongamos que T es lineal, invariante y 2-estable. Sea $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$. Recuérdese que el conjunto de señales $\{\delta_m : m \in \mathbb{N}\}$ es completo en $\ell^2(\mathbb{N})$. En ese caso, nótese que para cada $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$ podemos escribir

$$\phi = \sum_{m\in\mathbb{N}} \phi(m)\delta_m,$$

indicando que la sucesión de sumas parciales de la serie anterior converge, en norma, a ϕ. Para ver esto, escogemos $N \in \mathbb{N}$, y definimos

$$\phi_N := \sum_{m=0}^{N} \phi(m)\delta_m.$$

En ese caso, si $0 \leq M < N$, se tiene que

$$\|\phi_M - \phi_N\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2 = \left\| \sum_{m=M+1}^{N} \phi(m)\delta_m \right\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2 = \sum_{m=M+1}^{N} |\phi(m)|^2.$$

Por tanto, $\{\phi_N\}$ es una sucesión de Cauchy, cuyo límite (que existe por completitud) es ϕ. En ese caso, si T es lineal y 2-estable (es decir, continuo), podemos expresar

$$\begin{aligned} T(\phi) &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \phi(m)T(\delta_m) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \phi(m)T(\tau_1^m(\delta_0)). \end{aligned}$$

En ese caso, si T es además invariante, se tiene que

$$T(\phi) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \phi(m)\tau_1^m(T(\delta_0)).$$

Por tanto, fijado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned} (T(\phi))(n) &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \phi(m)(\tau_1^m(T(\delta_0)))(n) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \phi(m)(T(\delta_0))(n-m) \\ &= (T(\delta_0) * \phi)(n). \end{aligned}$$

Por tanto, T es de forma $T(\phi) = k * \phi$ para $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$, donde $k = T(\delta_0)$.

Veamos ahora, puesto que T es 2-estable, que $Zk \in H^\infty(\mathbb{D})$. Para ello, fijado $z \in \mathbb{D}$, definimos el operador $\delta_z \colon H^2(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ dado por

$$\delta_z(f) := f(z), \quad f \in H^2(\mathbb{D}).$$

Nótese que δ_z es un operador lineal. Además, es continuo. Para ver esto, tomemos $f \in H^2(\mathbb{D})$ dada por

$$f(w) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k, \quad w \in \mathbb{D}.$$

Se verifica

$$\begin{aligned} |\delta_z f| &= |f(z)| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \right|^{1/2} \left| \sum_{k=0}^{\infty} |z|^{2k} \right|^{1/2} \\ &= \frac{\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}}{\sqrt{1-|z|^2}}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwartz en $\ell^2(\mathbb{N})$. Por tanto,

$$\|\delta_z\|_{(H^2(\mathbb{D}))^*} = \sup_{\substack{f\in H^2(\mathbb{D})\\ f\neq 0}} \frac{|\delta_z(f)|}{\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}.$$

Más aún, si definimos la función $g\colon \mathbb{D}\to\mathbb{C}$ dada por

$$g(w) := \frac{\sqrt{1-|z|^2}}{1-\bar{z}w} = \sqrt{1-|z|^2}\sum_{k=0}^{\infty}\bar{z}^k w^k, \quad w\in\mathbb{D},$$

es fácil ver que g es continua en todo el disco unidad cerrado. Por tanto, $g\in H^2(\mathbb{D})$. De hecho, se puede calcular que

$$\|g\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 = (1-|z|^2)\sum_{k=0}^{\infty}|z|^{2k} = 1.$$

Además, nótese que

$$|\delta_z(g)| = \left|\sqrt{1-|z|^2}\sum_{k=0}^{\infty}|z|^2\right| = \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}.$$

Por tanto, esto demuestra que

$$\|\delta_z\|_{(H^2(\mathbb{D}))^*} = \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}.$$

Con esto en mente, notemos que al ser Z un isomorfismo isométrico entre $\ell^2(\mathbb{N})$ y $H^2(\mathbb{D})$, podemos ver que dado $\phi\in\ell^2(\mathbb{Z})$ se tiene que

$$\|T(\phi)\|_{\ell^2(\mathbb{N})} = \|k*\phi\|_{\ell^2(\mathbb{N})} = \|Z(k*\phi)\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|ZkZ\phi\|_{H^2(\mathbb{D})},$$

donde hemos usado el Lema 3.4.5. Ahora bien, tomemos $\varphi\in\ell^2(\mathbb{N})$ tal que $Z\varphi = g$ (nótese que tal señal existe y tiene norma unidad, puesto que Z es una isometría sobreyectiva). En ese caso, se cumple que

$$\begin{aligned}|\delta_z(ZkZ\varphi)| &= |\delta_z(Zkg)|\\ &= |Zk(z)g(z)|\\ &= \frac{|Zk(z)|}{\sqrt{1-|z|^2}}.\end{aligned}$$

Sin embargo, usando la acotación de δ_z y T, también puede verse que

$$\begin{aligned}
|\delta_z(ZkZ\varphi)| &= |\delta_z(Zkg)| \\
&\leq C_1 \|Zkg\|_{H^2(\mathbb{D})} \\
&= C_1 \|k * \varphi\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \\
&= C_1 \|T(\varphi)\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \\
&\leq C_1 C_2 \|\varphi\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \\
&\leq C_1 C_2,
\end{aligned}$$

donde

$$C_1 := \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}, \quad C_2 := \sup_{\substack{\phi\in\ell^2(\mathbb{N})\\ \phi\neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^2(\mathbb{N})}}{\|\phi\|_{\ell^2(\mathbb{N})}}.$$

En definitiva, se deduce que

$$|Zk(z)| \leq C_2 < \infty.$$

Como lo anterior es cierto para $z \in \mathbb{D}$ cualquiera, se deduce que Zk es un función acotada. Por tanto, $Zk \in H^\infty(\mathbb{D})$. De hecho,

$$\|Z(k)\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \leq \sup_{\substack{\phi\in\ell^2(\mathbb{N})\\ \phi\neq 0}} \frac{\|T(\phi)\|_{\ell^2(\mathbb{N})}}{\|\phi\|_{\ell^2(\mathbb{N})}}.$$

Esto termina la demostración. □

A partir del resultado anterior puede darse una relación entre los sistemas lineales, estables e invariantes sobre $\ell^2(\mathbb{N})$ con los causales.

Corolario 3.6.2. *Sea $T\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ un sistema lineal, 2-estable e invariante. Entonces es causal.*

Demostración. Por el Teorema 3.6.1, T es de la forma $T(\phi) = k * \phi$ para todo $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$, con $k = T(\delta_0) \in \ell^2(\mathbb{N})$ tal que $Z(k) \in H^\infty(\mathbb{D})$.

Con lo anterior en mente, sean $\phi, \varphi \in \ell^2(\mathbb{N})$. Supongamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\phi(n) = \varphi(n), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ con } n \leq N.$$

En ese caso, se tiene que

$$\begin{aligned} T(\phi)(N) &= (k * \phi)(N) \\ &= \sum_{n=0}^{N} k(N-n)\phi(n) \\ &= \sum_{n=0}^{N} k(N-n)\varphi(n) \\ &= (k * \varphi)(N) \\ &= T(\varphi)(N), \end{aligned}$$

Nótese que esto significa, por definición, que T es causal. $\square$

El resultado anterior no es cierto para sistemas sobre $\ell^2(\mathbb{Z})$. Basta pensar en el inverso del operador shift, τ_1^{-1}, que es lineal, 2-estable e invariante, pero no es causal. Para verlo, es suficiente ver que si $\Theta \in \ell^2(\mathbb{Z})$ es la señal nula, entonces

$$\Theta(n) = \delta_1(n) = 0, \quad n \leq 0.$$

Sin embargo,

$$\tau_1^{-1}(\Theta)(0) = \Theta(1) = 0 \neq 1 = \delta_1(1) = \tau_1^{-1}(\delta_1)(0).$$

3.7. Nuevos conceptos sobre operadores

Hasta el momento hemos utilizado tres isomorfismos isométricos de origen clásico:

$$\mathscr{F} \colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T}), \quad \mathscr{F} \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to H^2(\mathbb{T}), \quad Z \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to H^2(\mathbb{D}).$$

Estos isomorfismos relacionan los espacios de señales que hasta ahora estamos estudiando con espacios propios del Análisis Matemático. Lo que queremos ahora es usar estos isomorfismos para relacionar, no los espacios en sí mismos, sino las aplicaciones entre ellos: los sistemas y los operadores sobre los espacios que nos conciernen. Esto puede realizarse a través de la siguiente idea:

Teorema 3.7.1. *Sea $I \colon X \to Y$ un isomorfismo isométrico entre dos espacios de Banach. Notemos por $B(X)$ al espacio de Banach definido por los operadores lineales y continuos de X en sí mismo, dotado de la norma usual, y análogamente para $B(Y)$. Entonces, la aplicación $\Lambda \colon B(X) \to B(Y)$ dada por*

$$\Lambda(T) = ITI^{-1}, \quad T \in B(X)$$

es un isomorfismo isométrico entre los espacios de operadores anteriores.

Demostración. Comenzamos notando que Λ está bien definido, puesto que $ITI^{-1} \in B(Y)$ para todo $T \in B(X)$. Es fácil comprobar que esta aplicación es lineal. Además, también es sobreyectiva: si $S \in B(Y)$, entonces $T = I^{-1}SI \in B(X)$ con $\Lambda(T) = S$.

Resta ver que es una isometría (y, por tanto, es una aplicación inyectiva). Para ello, puesto que I es biyectivo, notamos que

$$\sup_{\substack{y\in Y\\ y\neq 0}} \frac{\|ITI^{-1}y\|_Y}{\|y\|_Y} = \sup_{\substack{x\in X\\ yx\neq 0}} \frac{\|ITx\|_Y}{\|Ix\|_Y}.$$

Pero, como I es una isometría, se tiene que

$$\frac{\|ITx\|_Y}{\|Ix\|_Y} = \frac{\|Tx\|_X}{\|x\|_X}, \quad x \in X,\, x \neq 0.$$

Por tanto,

$$\sup_{\substack{y\in Y\\ y\neq 0}} \frac{\|ITI^{-1}y\|_Y}{\|y\|_Y} = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_X}{\|x\|_X} = \|T\|_{B(X)}\,.$$

Es decir,

$$\|\Lambda T\|_{B(Y)} = \left\|ITI^{-1}\right\|_{B(Y)} = \|T\|_{B(X)}\,.$$

En ese caso, puesto que Λ actúa entre espacios de Banach, es claro que es un isomorfismo isométrico. $\square$

Intentemos, ahora, identificar el operador shift $\tau_1\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ en $L^2(\mathbb{T})$. Para ello, siguiendo el Teorema anterior, hacemos uso del isomorfismo isométrico dado por $I := \hat{\cdot}\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T})$. En concreto, se tiene que

$$(\Lambda(\tau_1))(f) = \widehat{\tau_1(\phi)},$$

donde $f \in L^2(\mathbb{T})$ y $\phi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ es tal que $\hat{\phi} = f$ (i.e., ϕ es la imagen inversa de f a través de $\hat{\cdot}$).

Más detalladamente, si

$$f(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\xi^n, \quad \xi \in \mathbb{T},$$

entonces

$$(\Lambda(\tau_1))(f)(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n-1)\xi^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\xi^{n+1} = \xi f(\xi), \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

Por tanto, se tiene que $\Lambda(\tau_1)$ es un operador de tipo multiplicación. Más concretamente,

$$\Lambda(\tau_1)(f) = \mathrm{id}_{\mathbb{T}} f, \quad f \in L^2(\mathbb{T}).$$

En base a este cálculo, definimos lo siguiente:

Definición 3.7.2. *Llamamos operador shift en $L^2(\mathbb{T})$ al operador $\hat{\tau}_1 \colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ dado por*

$$\hat{\tau}_1(f) = id_{\mathbb{T}} f, \quad f \in L^2(\mathbb{T}).$$

Es claro, entonces, que los conceptos propios de los sistemas (invariancia, causalidad) pueden "traducirse" a operadores sobre $L^2(\mathbb{T})$ a través de estas idea. En base a esto, definimos lo siguiente:

Definición 3.7.3. *Sea $\Psi \colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ un operador. Sea T el sistema asociado a Ψ vía el Teorema 3.7.1 con $\hat{\cdot}$ como isomorfismo isométrico. Diremos que Ψ es invariante (causal) si T es invariante (causal).*

Estas definiciones, aunque naturales, pueden resultar demasiado indirectas. Es por ello que damos el siguiente resultado de caracterización:

Teorema 3.7.4. *Sea $\Psi \colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ un operador lineal. Se verifica:*

(a) *Ψ es invariante si y solo si conmuta con $\hat{\tau}_1$.*

(b) *Ψ es invariante y continuo si y solo si es un operador de tipo multiplicación con símbolo en $L^\infty(\mathbb{T})$, es decir, es de la forma*

$$\Psi(f) = gf, \quad f \in L^2(\mathbb{T}),$$

para cierta función $g \in L^\infty(\mathbb{T})$.

(c) *Ψ es causal si y solo si para $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ dadas por*

$$f(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \xi^n, \quad g(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \xi^n, \quad \xi \in \mathbb{T},$$

y

$$\Psi(f)(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \xi^n, \quad \Psi(g)(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n \xi^n, \quad \xi \in \mathbb{T},$$

se cumple que si existe $N \in \mathbb{Z}$ con $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $n \leq N$, entonces $c_N = d_N$.

(d) *Si Ψ es invariante, entonces Ψ es causal si y solo si $\Psi(H^2(\mathbb{T})) \subset H^2(\mathbb{T})$.*

(e) Ψ es invariante, causal y continuo si y solo si es un operador de tipo multiplicación con símbolo en $H^\infty(\mathbb{T})$, es decir, es de la forma

$$\Psi(f) = hf, \quad f \in L^2(\mathbb{T}),$$

para cierta función $h \in H^\infty(\mathbb{T})$.

Demostración. (a) Por comodidad, denotemos por $\mathscr{F}$ (y no por $\hat{\cdot}$) a la transformada de Fourier, es decir,

$$\mathscr{F}(\phi) = \hat{\phi}, \quad \phi \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

Sea el sistema $T = \mathscr{F}^{-1}\Psi\mathscr{F}$ sobre $\ell^2(\mathbb{Z})$. Se verifica:

$$\begin{aligned}
\Psi \text{ es invariante} &\iff T \text{ es invariante} \\
&\iff T\tau_1 = \tau_1 T \\
&\iff \mathscr{F}^{-1}\Psi\mathscr{F}\tau_1 = \tau_1\mathscr{F}^{-1}\Psi\mathscr{F} \\
&\iff \Psi\mathscr{F}\tau_1 = \mathscr{F}\tau_1\mathscr{F}^{-1}\Psi\mathscr{F} \\
&\iff \Psi\mathscr{F}\tau_1\mathscr{F}^{-1} = \mathscr{F}\tau_1\mathscr{F}^{-1}\Psi.
\end{aligned}$$

Pero, por definición, se tiene que $\hat{\tau}_1 = \mathscr{F}\tau_1\mathscr{F}^{-1}$. Por tanto

$$\Psi \text{ es invariante} \iff \Psi\hat{\tau}_1 = \hat{\tau}_1\Psi.$$

(b) Con las notaciones anteriores, y usando el Teorema 3.3.1, se tiene que el sistema T es de la forma

$$T(\phi) = k * \phi, \quad \phi \in \ell^2(\mathbb{Z}),$$

para $k = T(\delta_0) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ con $\hat{k} \in L^\infty(\mathbb{T})$. En ese caso, dado $f \in L^2(\mathbb{T})$, se tiene que

$$\Psi(f) = \mathscr{F}(T(\mathscr{F}^{-1}(f))) = \widehat{k * \phi} = \hat{k}f,$$

donde $\phi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ es tal que $\hat{\phi} = f$.

(c) Con las notaciones anteriores, recuérdese que Ψ es causal si y solo si T es causal. Pero T es causal si y solo si para $\phi, \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tales que existe $N \in \mathbb{Z}$ con $\phi(n) = \varphi(n)$ para todo $n \leq N$ se cumple que $T(\phi)(N) = T(\varphi)(N)$. Ahora bien, como $\mathscr{F}$ es una biyección, lo anterior es equivalente a pedir que si $f, g \in L^2(\mathbb{T})$, definidas por

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\xi^m, \quad g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\xi^n, \quad \xi \in \mathbb{T},$$

y existe $N \in \mathbb{Z}$ con $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $n \leq N$, entonces $\mathscr{F}^{-1}(\Psi(f))(N) = \mathscr{F}^{-1}(\Psi(g))(N)$. Ahora bien, supongamos que

$$\Psi(f)(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \xi^n, \quad \Psi(g)(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n \xi^n, \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

Entonces lo anterior es equivalente a pedir que $c_N = d_N$. Esto es lo que queríamos probar.

(d) Con las notaciones anteriores, nótese que T es invariante. En ese caso, usando el Lema 2.4.7, se verifica

$$\begin{aligned} \Psi \text{ es causal} &\iff T \text{ es causal} \\ &\iff T(\ell^2(\mathbb{N})) \subset \ell^2(\mathbb{N}) \\ &\iff \mathscr{F}^{-1}(\Psi(\mathscr{F}(\ell^2(\mathbb{N})))) \subset \ell^2(\mathbb{N}). \end{aligned}$$

Ahora bien, como $\mathscr{F}$ es una biyección con $\mathscr{F}(\ell^2(\mathbb{N})) = H^2(\mathbb{T})$, se tiene que

$$\Psi \text{ es causal} \iff \Psi(H^2(\mathbb{T})) \subset H^2(\mathbb{T}).$$

(e) La demostración se sigue de manera análoga a (b), pero a través del Teorema 3.5.1. □

Se pueden extender las ideas anteriores a los espacios $H^2(\mathbb{D})$ y $H^2(\mathbb{T})$ sin más que realizar leves modificaciones técnicas.

Definición 3.7.5. *Llamamos operador shift en $H^2(\mathbb{T})$ (en $H^2(\mathbb{D})$) al operador $\hat{\tau}_1 \colon H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ ($\hat{\tau}_1 \colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$) dado por*

$$\hat{\tau}_1(f) = id_{\mathbb{T}} f, \quad f \in H^2(\mathbb{T})$$

$$(\hat{\tau}_1(f) = id_{\mathbb{D}} f, \quad f \in H^2(\mathbb{D})).$$

Definición 3.7.6. *Sea $\Psi \colon H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ ($\Psi \colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$) un operador lineal. Sea T el sistema asociado a Ψ vía el Teorema 3.7.1 con $\hat{\cdot}$ (con Z) como isomorfismo isométrico. Diremos que Ψ es invariante (causal) si T es invariante (causal).*

Teorema 3.7.7. *Sea $\Psi \colon H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ ($\Psi \colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$) un operador lineal. Se verifica:*

(a) Ψ es invariante si y solo si conmuta con $\hat{\tau}_1$.

(b) Ψ *es invariante y continuo si y solo si es un operador de tipo multiplicación con símbolo en* $H^\infty(\mathbb{T})$ *(en* $H^\infty(\mathbb{D})$*), es decir, es de la forma*

$$\Psi(f) = hf, \quad f \in H^2(\mathbb{T}) \ (f \in H^2(\mathbb{D})),$$

para cierta función $h \in H^\infty(\mathbb{T})$ *(*$h \in H^\infty(\mathbb{D})$*).*

(c) Ψ *es causal si y solo si para* $f, g \in H^2(\mathbb{T})$ *(*$f, g \in H^2(\mathbb{D})$*) dadas por*

$$f(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \xi^n, \quad g(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \xi^n, \quad \xi \in \mathbb{T},$$

$$(f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n, \quad z \in \mathbb{D},)$$

y

$$\Psi(f)(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \xi^n, \quad \Psi(g)(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} d_n \xi^n, \quad \xi \in \mathbb{T},$$

$$(\Psi(f)(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n, \quad \Psi(g)(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} d_n z^n, \quad z \in \mathbb{D},)$$

se cumple que si existe $N \in \mathbb{N}$ *con* $a_n = b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \leq N$*, entonces* $c_N = d_N$*.*

(d) Si Ψ *es invariante y continuo, entonces es causal.*

Demostración. (a) La prueba es análoga a la realizada en el Teorema 3.7.4.

(b) Haremos la prueba para $H^2(\mathbb{D})$, siendo análoga para $H^2(\mathbb{T})$. Recuérdese que Ψ es invariante y continuo si y solo si el operador $T\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ dado por $T = Z^{-1}\Psi Z$ es invariante y continuo. Pero este es equivalente, por el Teorema 3.6.1, a decir que T es de la forma

$$T(\phi) = k * \phi, \quad \phi \in \ell^2(\mathbb{N}),$$

para $k = T(\delta_0) \in \ell^2(\mathbb{N})$ con $Zk \in H^\infty(\mathbb{D})$.

Ahora bien, nótese que $\Psi = ZTZ^{-1}$. Por tanto, T es de la forma anterior si y solo si

$$\Psi(f) = Z(T(Z^{-1}(f))) = Z(k * Z^{-1}(f)) = Z(k)f, \quad f \in H^2(\mathbb{D}),$$

donde hemos usado el Lema 3.4.5.

(c) Haremos la prueba para $H^2(\mathbb{D})$, siendo análoga para $H^2(\mathbb{T})$. Recuérdese que Ψ es causal si y solo si el operador $T\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ dado por $T = Z^{-1}\Psi Z$ es causal. Pero T es causal si y solo si para $\phi, \varphi \in \ell^2(\mathbb{N})$ tales que existe $N \in \mathbb{N}$ con $\phi(n) = \varphi(n)$ para todo $n \leq N$ se cumple que $T(\phi)(N) = T(\varphi)(N)$. Ahora bien, como Z es una biyección, lo anterior es equivalente a pedir que si $f, g \in H^2(\mathbb{D})$, definidas por

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^m, \quad g(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

y existe $N \in \mathbb{N}$ con $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \leq N$, entonces $Z^{-1}(\Psi(f))(N) = Z^{-1}(\Psi(g))(N)$. Ahora bien, supongamos que

$$\Psi(f)(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^m, \quad \Psi(g)(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} d_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Entonces lo anterior es equivalente a pedir que $c_N = d_N$. Esto es lo que queríamos probar.

(d) Haremos la prueba para $H^2(\mathbb{D})$, siendo análoga para $H^2(\mathbb{T})$. Recuérdese que, por (b), Ψ es invariante y continuo si y solo si existe $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ de manera que

$$\Psi(f) = hf, \quad f \in H^2(\mathbb{D}).$$

Con esto en mente, sean $f, g \in H^2(\mathbb{D})$ dadas por

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Supongamos, además, que h viene dada por

$$h(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

En ese caso,

$$\Psi(f)(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} \right) z^n, \quad \Psi(g)(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k} \right) z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Supongamos, que existe $N \in \mathbb{N}$ con $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \leq N$. Es claro, entonces, que

$$\sum_{k=0}^{N} a_k c_{n-k} = \sum_{k=0}^{N} b_k c_{n-k}.$$

Nótese que, por (c), esto implica que Ψ es causal. $\square$

Nótese que en el resultado anterior hemos hallado que, para algunos operadores sobre los espacios de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ y $H^2(\mathbb{T})$, que estos sean invariantes y continuos implica que son también causales. Esta implicación no es cierta para operadores en $L^2(\mathbb{T})$: basta pensar en el inverso del operador shift, $\hat{\tau}_1^{-1}$, que es invariante y continuo pero no causal.

Capítulo 4

Subespacios de señales

En este capítulo aprovecharemos los conceptos introducidos hasta ahora (transformada de Fourier, transformada Z, espacios de Hardy...) para caracterizar algunos subespacios de señales, tanto invariantes como bi-invariantes.

Más aún, daremos la descripción del subespacio de señales invariante "más pequeño" que contiene a una cierta señal. Esto nos llevará a seguir profundizando en los espacios de Hardy, concretamente en su conocida propiedad de factorización (Sección 1.2), que se tornará crucial.

4.1. Introducción a los subespacios

Sea X un espacio de señales bi-invariante. Sea, además, $Y \subset X$ un subespacio vectorial. En ese caso, sabemos que Y es también un espacio de señales, en el sentido de la Definición 2.3.1. Sin embargo, ¿cuál es la relación entre Y y el operador shift $\tau_1 \colon X \to X$? Para abordar esta pregunta, damos la siguiente definición:

Definición 4.1.1. *Sea X un espacio de señales invariante y $\tau_1 \colon X \to X$ el operador shift. Sea $Y \subset X$ un subespacio vectorial. Diremos que Y es un subespacio invariante de X si es un espacio de señales invariante, es decir, si $\tau_1(Y) \subset Y$. Más aún, diremos que Y es un subespacio de señales bi-invariante de X si es un espacio de señales bi-invariante, es decir, si $\tau_1(Y) = Y$.*

4.2. Relación con $L^2(\mathbb{T})$

Uno de nuestros objetivos en este capítulo es estudiar los subespacios de señales invariantes y bi-invariantes de $\ell^2(\mathbb{Z})$. Para ello, los relacionamos con subespacios de $L^2(\mathbb{T})$ de la siguiente manera:

Lema 4.2.1. *Sea X un subespacio vectorial de $\ell^2(\mathbb{Z})$. Entonces X es un subespacio de señales bi-invariante (invariante) si y solo si $\hat{X}$ es un subespacio vectorial bi-invariante (invariante) para el operador $\hat{\tau}_1\colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$, es decir, si y solo si*

$$\hat{X} := \{\hat{\phi} \in L^2(\mathbb{T}) : \phi \in X\}$$

cumple

$$\hat{\tau}_1(\hat{X}) = \hat{X} \quad (\hat{\tau}_1(\hat{X}) \subset \hat{X}),$$

donde

$$(\hat{\tau}_1(f))(\xi) := \xi f(\xi), \quad f \in L^2(\mathbb{T}), \xi \in \mathbb{T}.$$

Demostración. Comenzamos notando que el operador $\hat{\tau}_1$ está bien definido, es decir, nótese que dada $f \in L^2(\mathbb{T})$ se tiene que

$$|\hat{\tau}_1(f)| = |\xi f(\xi)| = |f(\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

Por tanto,

$$\|\hat{\tau}_1(f)\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Más aún, notemos que el operador $\tau_1\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ viene dado como

$$\tau_1(\phi) = k * \phi, \quad \phi \in \ell^2(\mathbb{Z}),$$

donde $k = \delta_1\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

En ese caso, dado $\phi \in X$, nótese que

$$\widehat{\tau_1(\phi)} = \widehat{\delta_1 * \phi} = \hat{\delta}_1\hat{\phi},$$

donde

$$\hat{\delta_1}(\xi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta_1(m)\xi^m = \xi, \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \tau_1(X) = X &\iff \{\delta_1 * \phi : \phi \in X\} = X \\ &\iff \{\hat{\delta}_1\hat{\phi} : \phi \in X\} = \hat{X} \\ &\iff \hat{\tau}_1(\hat{X}) = \hat{X}, \end{aligned}$$

(análogamente con la contención en el caso de la invariancia) donde se ha usado la biyectividad del operador $\hat{\cdot} : \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T})$ dada por el Teorema 3.2.2. Esto justifica el resultado. $\square$

Acabamos de reducir el problema de hallar los subespacios de señales invariantes y bi-invariantes de $\ell^2(\mathbb{Z})$ a hallar ciertos subespacios de $L^2(\mathbb{T})$. Estos subespacios, de hecho, son bien conocidos. Antes de caracterizarlos, necesitamos presentar el siguiente resultado:

Lema 4.2.2. *Sea X un espacio de Hilbert. Sean $N \subset M \subset X$ dos subespacios vectoriales cerrados. En ese caso, se verifica que $M \cap N^{\perp} = \{0\}$ si y solo si $M = N$, donde*

$$N^{\perp} = \{x \in X : \langle x \mid n \rangle = 0 \text{ para todo } n \in N\}.$$

Demostración. Es claro que, si $M = N$, entonces $M \cap N^{\perp} = \{0\}$.

Recíprocamente, sea $x \in M$ cualquiera. Sea $P \colon X \to N$ la proyección ortogonal de X sobre N. Notemos $n := P(x)$. En ese caso, $x - n \in N^{\perp}$, por construcción. Más aún, nótese que $x - n \in M$, pues que $x \in M$ y $n \in N \subset M$. En ese caso, $x - n \in M \cap N^{\perp} = \{0\}$. Por tanto, $x = n$. Se deduce que $x \in N$.

Lo anterior muestra que $M \subset N$, lo que implica que $M = N$. □

Ahora estamos en posición de caracterizar los subespacios vectoriales cerrados de $L^2(\mathbb{T})$ que son bi-invariantes:

Teorema 4.2.3. *Sea $M \subset L^2(\mathbb{T})$ un subespacio vectorial cerrado. En ese caso, M es bi-invariante para el operador $\hat{\tau}_1 \colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ (es decir, M cumple $\hat{\tau}_1(M) = M$) si y solo si*

$$M = \chi L^2(\mathbb{T}),$$

donde $\chi \colon \mathbb{T} \to \{0,1\}$ es la función característica de algún subconjunto medible de $\mathbb{T}$.

Demostración. Comenzamos notando que todo subespacio cerrado de la forma $M = \chi L^2(\mathbb{T})$ es bi-invariante para $\hat{\tau}_1$. Para verlo, notamos que

$$\hat{\tau}_1(f) \in L^2(\mathbb{T}) \iff f \in L^2(\mathbb{T}).$$

En ese caso, se tiene que

$$\begin{aligned} f \in \hat{\tau}_1(M) &\iff f(\xi) = \xi\chi(\xi)g(\xi), && \xi \in \mathbb{T},\, g \in L^2(\mathbb{T}) \\ &\iff f(\xi) = \chi(\xi)(\hat{\tau}_1(g))(\xi), && \xi \in \mathbb{T},\, g \in L^2(\mathbb{T}) \\ &\iff f(\xi) = \chi(\xi)\tilde{g}(\xi), && \xi \in \mathbb{T},\, \tilde{g} \in L^2(\mathbb{T}) \\ &\iff f \in M. \end{aligned}$$

Esto muestra que M es bi-invariante para $\hat{\tau}_1$.

Recíprocamente, supongamos que M es bi-invariante para $\hat{\tau}_1$. En ese caso, sea $\mathbf{1}\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ la función definida por $\mathbf{1}(\xi) := 1$ para todo $\xi \in \mathbb{T}$. Notemos, además, que $\mathbf{1} \in L^2(\mathbb{T})$. Sea, también, la proyección ortogonal $P\colon L^2(\mathbb{T}) \to M$. A través de ella, definamos $\chi := P(\mathbf{1})$.

Nótese que $\chi \in M$, por definición. Como M es bi-invariante para $\hat{\tau}_1$, esto significa que ${\hat{\tau}_1}^n(\chi) \in M$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por tanto, por ortogonalidad, se cumple que

$$\langle \mathbf{1} - \chi \mid {\hat{\tau}_1}^n(\chi) \rangle = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Es decir,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\chi(e^{it}) - \left| \chi(e^{it}) \right|^2 \right) e^{int} dt = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

En otras palabras, todos los coeficientes de Fourier de la función $\chi - |\chi|^2$ son nulos. Esto implica que la función $\chi - |\chi|^2$ es nula en casi todo. Por tanto, en casi todo, la función χ solo toma el valor 0 o 1. Se deduce que χ es la función característica de algún subconjunto medible de $\mathbb{T}$.

Definamos, ahora, el conjunto $N := \chi L^2(\mathbb{T})$. Notemos que N es un subespacio vectorial. Además, ya probamos que N, así definido, es bi-invariante para $\hat{\tau}_1$.

Por otro lado, nótese que el espacio vectorial que genera $\{{\hat{\tau}_1}^n(\mathbf{1}) : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $L^2(\mathbb{T})$ (el conjunto anterior es el famoso sistema trigonométrico). En ese caso, es fácil ver que el espacio vectorial que genera $\{{\hat{\tau}_1}^n(\chi) : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $N = \chi L^2(\mathbb{T})$. Pero $\{{\hat{\tau}_1}^n(\chi) : n \in \mathbb{Z}\} \subset M$, y M es cerrado. Por tanto

$$N = \overline{\operatorname{span}\{{\hat{\tau}_1}^n(\chi) : n \in \mathbb{Z}\}} \subset M,$$

donde $\bar{\cdot}$ denota el cierre del conjunto en la topología de $L^2(\mathbb{T})$.

Visto esto, sea $\lambda \in M \cap N^\perp$. Nótese que, entonces, λ es ortogonal a N, por construcción. En ese caso, dado que $\{{\hat{\tau}_1}^n(\chi) : n \in \mathbb{Z}\} \subset N$, se tiene que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\lambda}(e^{it}) \chi(e^{it}) e^{int} dt = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, todos los coeficientes de Fourier de la función $\bar{\lambda}\chi$ son nulos. Esto implica que la función $\bar{\lambda}\chi$ es nula en casi todo.

Por otro lado, nótese que como $\lambda \in M$, y M es bi-invariante para $\hat{\tau_1}$, entonces $\{\hat{\tau_1}^n(\lambda) : n \in \mathbb{Z}\} \subset M$. En ese caso, $\mathbf{1} - \chi$ es ortogonal a $\hat{\tau_1}^n(\lambda)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Es decir,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\lambda}(e^{it})(1 - \chi(e^{it}))e^{-int} dt = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

De nuevo, esto quiere decir que todos los coeficientes de Fourier de la función $\bar{\lambda}(\mathbf{1}-\chi)$ son nulos. Esto implica que la función $\bar{\lambda}(\mathbf{1}-\chi)$ es nula en casi todo.

Como tanto $\bar{\lambda}\chi$ como $\bar{\lambda}(\mathbf{1}-\chi)$ son funciones nulas en casi todo, se deduce que $\bar{\lambda}$ (y, por tanto, λ) es una función nula en casi todo. Esto implica que $M = N$, en virtud del Lema 4.2.2. □

Existe un resultado análogo al anterior para subespacios invariantes de $L^2(\mathbb{T})$.

Teorema 4.2.4. *Sea $M \subset L^2(\mathbb{T})$ un subespacio vectorial cerrado. En ese caso, M es invariante y no bi-invariante para el operador $\hat{\tau_1} : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ (es decir, M cumple $\hat{\tau_1}(M) \subsetneq M$) si y solo si*

$$M = \psi H^2(\mathbb{T}),$$

donde ψ es una función medible con $|\psi| = 1$ en casi todo $\mathbb{T}$.

Demostración. Comenzamos probando que si M es de la forma $M = \psi H^2(\mathbb{T})$ para ψ una función medible con $|\psi| = 1$ en casi todo $\mathbb{T}$, entonces $\hat{\tau_1}(M) \subsetneq M$.

Para verlo, sea $f \in M$, es decir, $f = \psi h$ para cierta $h \in H^2(\mathbb{T})$. En ese caso, $\hat{\tau_1}(f) = \hat{\tau_1}(\psi h) = \psi\hat{\tau_1}(h) \in M$, pues $\hat{\tau_1}(h) \in H^2(\mathbb{T})$. Por tanto, $\hat{\tau_1}(M) \subset M$.

Sin embargo, sea ahora $f \in L^2(\mathbb{T})$ dada por $f(\xi) = \psi\bar{\xi}$ para todo $\xi \in \mathbb{T}$. Nótese que $f \notin M$ (pues $\xi \in \mathbb{T} \mapsto \bar{\xi} \in \mathbb{C}$ no es una función de $H^2(\mathbb{T})$). Sin embargo, $\hat{\tau_1}(f) = \psi \in M$ (pues $\xi \in \mathbb{T} \mapsto 1 \in \mathbb{C}$ sí es una función de $H^2(\mathbb{T})$). Es decir, $\hat{\tau_1}(f) \in M \setminus \hat{\tau_1}(M)$. Por tanto, $\hat{\tau_1}(M) \subsetneq M$.

Recíprocamente, supongamos que M es un subespacio cerrado tal que $\hat{\tau_1}(M) \subsetneq M$. En ese caso, notamos que

$$\hat{\tau_1}(M) \subsetneq M \Rightarrow \hat{\tau_1}^2(M) \subsetneq \hat{\tau_1}(M) \subsetneq M.$$

Iterando el resultado anterior, se tiene que $\{\hat{\tau_1}^n(M) : n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$ es una sucesión decreciente de subespacios contenidos en M, pero distintos de M.

Más aún, todos son subespacios cerrados, pues $\hat{\tau}_1$ es una aplicación cerrada (ya que es un isomorfismo isométrico de $L^2(\mathbb{T})$ en sí mismo).

Visto esto, sea $\psi \in M \cap [\hat{\tau}_1(M)]^\perp$. Nótese, puesto que $\hat{\tau}_1(M) \subsetneq M$, que el Lema 4.2.2 asegura que podemos tomar $\psi \neq 0$. Más aún, las contenciones comentadas anteriormente aseguran que $\psi \in M \cap [\hat{\tau}_1{}^n(M)]^\perp$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $n > 0$. En ese caso, por ortogonalidad, nótese que para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $n > 0$ se tiene que

$$\int_0^{2\pi} \left|\psi(e^{it})\right|^2 e^{int} dt = \langle \psi \mid \hat{\tau}_1{}^n(\psi) \rangle = 0.$$

Esto quiere decir que los coeficientes de Fourier con índice positivo de $|\psi|^2$ son nulos.

De la misma forma, dado $m \in \mathbb{Z}$ con $m > 0$, nótese que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left|\psi(e^{it})\right|^2 e^{-imt} dt &= \overline{\int_0^{2\pi} \left|\psi(e^{it})\right|^2 e^{imt} dt} \\ &= \overline{\langle \psi \mid \hat{\tau}_1{}^m(\psi) \rangle} = 0. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que los coeficientes de Fourier con índice negativo de $|\psi|^2$ son nulos.

En definitiva, se tiene que el único coeficiente de Fourier no nulo de $|\psi|^2$ es el de índice nulo. Eso implica que $|\psi|^2$ (y, por tanto, $|\psi|$) es constante en casi todo $\mathbb{T}$. Más aún, normalizando si es necesario, podemos suponer que $|\psi| = 1$ en casi todo $\mathbb{T}$.

Notemos, entonces, que

$$\psi H^2(\mathbb{T}) = \overline{\operatorname{span}\{\hat{\tau}_1{}^n(\psi) : n \in \mathbb{Z},\, n \geq 0\}}.$$

Denotemos $S = \operatorname{span}\{\hat{\tau}_1{}^n(\psi) : n \in \mathbb{Z},\, n \geq 0\}$. Nótese que, por linealidad, como $\hat{\tau}_1{}^n(\psi) \in M$ para todo $n \geq 0$, entonces $S \subset M$. Más aún, como M es cerrado, se tiene que $\psi H^2(\mathbb{T}) = \overline{S} \subset M$.

Por otro lado, notemos que

$$(\psi H^2(\mathbb{T}))^\perp = \overline{\operatorname{span}\{\hat{\tau}_1{}^{-m}(\psi) : m \in \mathbb{Z},\, m > 0\}}.$$

Para ver esto, basta notar que dado $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq 0$ y $m > 0$ se verifica que

$$\langle \hat{\tau}_1{}^{-m}(\psi) \mid \hat{\tau}_1{}^n(\psi) \rangle = \langle \psi \mid \hat{\tau}_1{}^{n+m}(\psi) \rangle = 0,$$

pues $n + m > 0$. En ese caso, si denotamos $\tilde{S} = \{\hat{\tau_1}^{-m}(\psi) : m \in \mathbb{Z},\, m > 0\}$, entonces es claro que $S \perp \tilde{S}$ (i.e., $\langle s \mid \tilde{s} \rangle = 0$ para todo $s \in S$ y $\tilde{s} \in \tilde{S}$). Pero entonces, dado que el producto escalar es continuo, ha de ser que $\psi H^2(\mathbb{T}) = \overline{S} \perp \overline{\tilde{S}}$. Esto prueba que $\overline{\tilde{S}} \subset (\psi H^2(\mathbb{T}))^{\perp}$. Más aún, nótese que $\{\hat{\tau_1}^n(\psi) : n \in \mathbb{Z}\}$ es un conjunto ortonormal y completo de $L^2(\mathbb{T})$. Por tanto, $\psi H^2(\mathbb{T}) + \overline{\tilde{S}} = L^2(\mathbb{T})$. Así, no queda más remedio que $\overline{\tilde{S}} = (\psi H^2(\mathbb{T}))^{\perp}$.

Ahora bien, es claro que $\tilde{S} \subset M^{\perp}$. Para verlo, basta notar que, si $h \in M$ y $m \in \mathbb{Z}$ con $m > 0$, entonces se verifica que

$$\langle \hat{\tau_1}^{-m}(\psi) \mid h \rangle = \langle \psi \mid \hat{\tau_1}^{m}(h) \rangle = 0,$$

pues $\psi \in (\hat{\tau_1}^m(M))^{\perp}$. Generalizando esto, por linealidad, a cualquier $\tilde{s} \in \tilde{S}$, se sigue la afirmación anterior. Más aún, procediendo por argumentos de continuidad como anteriormente, y dado que $M^{\perp}$ es cerrado, ha de ser que $(\psi H^2(\mathbb{T}))^{\perp} = \overline{\tilde{S}} \subset M^{\perp}$.

Visto esto, se deduce que $\psi H^2(\mathbb{T})$ es un subespacio cerrado de M con $M \cap [\psi H^2(\mathbb{T})]^{\perp} \subset M \cap M^{\perp} = \{0\}$. Así, usando el Lema 4.2.2, se comprueba que $\psi H^2(\mathbb{T}) = M$. $\square$

4.3. Subespacios bi-invariantes de $\ell^2(\mathbb{Z})$

Ya estamos en posición de caracterizar los subespacios de señales bi-invariantes de $\ell^2(\mathbb{Z})$:

Teorema 4.3.1. *Sea $X \subset \ell^2(\mathbb{Z})$ un subespacio vectorial cerrado. Entonces X es un subespacio de señales bi-invariante si y solo si es de la forma*

$$X = k * \ell^2(\mathbb{Z}) := \{k * \phi : \phi \in \ell^2(\mathbb{Z})\},$$

donde $k \in \ell^2(\mathbb{Z})$ es una señal tal que $\hat{k}$ es la función característica de un subconjunto medible de $\mathbb{T}$.

Demostración. Obsérvese que, en combinación del Lema 4.2.1 y el Teorema 4.2.3, X es un subespacio de señales bi-invariante si y solo si $\hat{X}$ es de la forma $\chi L^2(\mathbb{T})$, donde χ es la función característica de un subconjunto medible de $\mathbb{T}$. En ese caso, invirtiendo la acción del operador $\hat{\cdot}$, nótese que $\hat{X} = \chi L^2(\mathbb{T})$ si y solo si $X = k * \ell^2(\mathbb{Z})$, con $\hat{k} = \chi$. $\square$

4.4. Subespacios invariantes de $\ell^2(\mathbb{Z})$

En el caso de los subespacios invariantes, podemos afirmar lo siguiente:

Teorema 4.4.1. *Sea $X \subset \ell^2(\mathbb{Z})$ un subespacio vectorial cerrado. Entonces X es un subespacio de señales invariante (y no bi-invariante) si y solo si es de la forma*

$$X = k * \ell^2(\mathbb{N}) := \{k * \phi : \phi \in \ell^2(\mathbb{N})\},$$

donde $k \in \ell^2(\mathbb{Z})$ es una señal tal que $|\hat{k}| = 1$ en casi todo $\mathbb{T}$.

Demostración. De nuevo, combinando el Lema 4.2.1 y el Teorema 4.2.4, se tiene que X es un subespacio de señales invariante (y no bi-invariante) si y solo si $\hat{X}$ es de la forma $\psi H^2(\mathbb{T})$, donde $|\psi| = 1$ en casi todo $\mathbb{T}$. En ese caso, invirtiendo la acción del operador $\hat{\cdot}$, nótese que $\hat{X} = \psi H^2(\mathbb{T})$ si y solo si $X = k * \ell^2(\mathbb{N})$, con $\hat{k} = \psi$. □

4.5. Subespacios invariantes de $\ell^2(\mathbb{N})$

En este capítulo, hasta ahora, solo hemos tratado con subespacios de señales de $\ell^2(\mathbb{Z})$, que es un espacio de señales bi-invariante. Este no es el caso del espacio $\ell^2(\mathbb{N})$, que es un espacio de señales invariante pero no bi-invariante. En esta sección estamos, por tanto, interesados en caracterizar sus subespacios invariantes (obsérvese que el único subespacio bi-invariante que contiene es el trivial). Para ello, basándonos de nuevo en el Lema 4.2.1, damos el siguiente resultado, donde se torna fundamental la Definición 1.2.3:

Teorema 4.5.1 (Beurling)**.** *Sea $M \subset H^2(\mathbb{T})$ un subespacio cerrado no trivial. Entonces M es invariante para el operador $\hat{\tau}_1\colon H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ (es decir, M cumple $\hat{\tau}_1(M) \subset M$) dado por*

$$(\hat{\tau}_1(f))(\xi) = \xi f(\xi), \quad f \in H^2(\mathbb{T}), \, \xi \in \mathbb{T},$$

si y solo si M es de la forma $M = \psi H^2(\mathbb{T})$, donde ψ es el límite radial de una función interior.

Demostración. Para comenzar, notamos que los subespacios de la forma $M = \psi H^2(\mathbb{T})$, donde ψ es el límite radial de una función interior, son todos invariantes. Esto se deduce de que si $f \in M$, entonces $f = \psi h$ para cierta $h \in H^2(\mathbb{T})$. En ese caso, dado $\xi \in \mathbb{T}$, se tiene que $(\hat{\tau}_1(f))(\xi) = \xi\psi(\xi)h(\xi) = \psi(\xi)(\xi h(\xi))$. Pero, entonces $\hat{\tau}_1(f) = \psi\tilde{h}$, con $\tilde{h}(\xi) = \xi h(\xi)$. Notemos, ahora, que $h \in H^2(\mathbb{T})$ implica que $\tilde{h} \in H^2(\mathbb{T})$. En ese caso, $\hat{\tau}_1(f) \in M$. Esto muestra que M es, efectivamente, invariante.

Recíprocamente, sea M un subespacio cerrado no trivial de $H^2(\mathbb{T})$ que es invariante para $\hat{\tau}_1$. Nótese que, al ser no trivial, no puede ser bi-invariante. En ese caso, puesto que $M \subset L^2(\mathbb{T})$, el Teorema 4.2.4 afirma que $M = \psi H^2(\mathbb{T})$ para cierta función ψ medible con $|\psi| = 1$ en casi todo $\mathbb{T}$. Pero nótese que $\psi \in M \subset H^2(\mathbb{T})$ (puesto que la función $\xi \in \mathbb{T} \mapsto 1 \in \mathbb{C}$ es de $H^2(\mathbb{T})$). En ese caso, ha de existir $f \in H^2(\mathbb{D})$ tal que ψ sea el límite radial de f, por definición. Como $|\psi| = 1$ en casi todo $\mathbb{T}$, se deduce que $f \in H^\infty(\mathbb{D})$. Por tanto, se tiene que ψ es el límite radial de una función interior. $\square$

Estamos ya en posición de caracterizar los subespacios invariantes de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Teorema 4.5.2. *Sea $X \subset \ell^2(\mathbb{N})$ un subespacio cerrado. Entonces X es un espacio de señales invariante si y solo si es de la forma*

$$X = k * \ell^2(\mathbb{N}) := \{k * \phi : \phi \in \ell^2(\mathbb{N})\},$$

donde $k \in \ell^2(\mathbb{N})$ es una señal tal que Zk es una función interior.

Demostración. Comenzamos notando que, como $X \subset \ell^2(\mathbb{N}) \subset \ell^2(\mathbb{Z})$, entonces $\hat{X} \subset H^2(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$. En ese caso, por el Lema 4.2.1, X es un subespacio de señales invariante si y solo si $\hat{X}$ es invariante para $\hat{\tau}_1$. Pero esto último es cierto, por el Teorema 4.5.1, si y solo si $\hat{X} = \psi H^2(\mathbb{T})$, con $\psi \in H^\infty(\mathbb{T})$ el límite radial de una función interior. En ese caso, invirtiendo la acción del operador $\hat{\cdot}$, nótese que $\hat{X} = \psi H^2(\mathbb{T})$ si y solo si $X = k * \ell^2(\mathbb{N})$, con $k \in \ell^2(\mathbb{N})$ de manera que $\hat{k}$ sea el límite radial de una función interior, es decir, de manera que Zk sea una función interior. $\square$

4.6. Subespacios invariantes minimales

Ahora que hemos hallado la "estructura" de algunos subespacios de señales invariantes nos interesamos por un nuevo concepto. Más concretamente, queremos dar una descripción de cuál es el subespacio de señales invariante "más pequeño" que contiene a una cierta señal dada. Para ello, definimos con precisión este concepto:

Definición 4.6.1. *Sea X un espacio de señales invariante. Sea $\phi \in X$ una señal. Supongamos que $M \subset X$ es un subespacio de señales invariante y cerrado que contiene a ϕ. En ese caso, M se dice el subespacio de señales invariante minimal cerrado generado por ϕ si dado cualquier otro subespacio de señales invariante N, con $\phi \in N$, se tiene que $M \subset N$.*

Podemos dar una primera caracterización algebraica del subespacio de señales invariante minimal cerrado generado por cierta señal.

Lema 4.6.2. *Sea X un espacio de señales invariante. Sea $\phi \in X$, y sea $[\phi]$ el subespacio de señales invariante minimal cerrado generado por ϕ. En ese caso, se tiene*

$$[\phi] = \bigcap_{M \in \mathscr{M}} M,$$

donde $\mathscr{M}$ es el conjunto formado por todos los subespacios de señales invariantes y cerrados de X que contienen a ϕ.

Demostración. Para comenzar, notemos que $\mathscr{M}$ no es vacío, puesto que $X \in \mathscr{M}$. En ese caso, escribamos

$$Y := \bigcap_{M \in \mathscr{M}} M.$$

Para comenzar, es claro que $[\phi] \in \mathscr{M}$, luego $Y \subset [\phi]$. Más aún, nótese que Y es un subespacio de señales invariante y cerrado que contiene a ϕ (puesto todo $M \in \mathscr{M}$ tienen estas propiedades, que se conservan por intersección). En ese caso, puesto que $[\phi]$ es minimal, se tiene por definición que $[\phi] \subset Y$. Esto concluye la demostración. $\square$

Una vez visto esto nos encaminamos a caracterizar los subespacios $[\phi]$ en el caso en el que $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$. Para ello nos resultará útil la factorización interior-exterior de los espacios de Hardy (Sección 1.2). De hecho, el siguiente resultado muestra la conexión entre el subespacio invariante minimal cerrado generado por una señal y estos espacios:

Lema 4.6.3. *Sea $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$. Sea $X \subset \ell^2(\mathbb{N})$ un subespacio de señales invariante y cerrado con $\phi \in X$. Entonces X es el subespacio invariante minimal cerrado generado por ϕ si y solo si $\hat{X}$ es el subespacio invariante minimal cerrado generado por $\hat{\phi}$ para el operador $\hat{\tau}_1 \colon H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$, es decir, si y solo si $\hat{X}$ es cerrado e invariante para $\hat{\tau}_1$, y cualquier otro espacio subespacio invariante para $\hat{\tau}_1$ que contiene a $\hat{\phi}$ contiene a todo $\hat{X}$.*

Demostración. Por un lado, recuérdese que $\ell^2(\mathbb{N}) \subset \ell^2(\mathbb{Z})$ y $H^2(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ son subespacios invariantes para τ_1 y $\hat{\tau}_1$, respectivamente. Por tanto, el Lema 4.2.1 justifica que X es invariante si y solo si $\hat{X}$ lo es.

Más aún, en cuanto a la propiedad de minimalidad, nótese que si $Y \subset \ell^2(\mathbb{N})$ es un subespacio de señales invariante con $\phi \in Y$, entonces

$$X \subset Y \iff \hat{\tau}_1(X) \subset \hat{\tau}_1(Y).$$

Por tanto, X es minimal si y solo si $\hat{\tau}_1(X)$ lo es. $\square$

Visto el lema anterior, es claro que, de manera análoga a lo que hicimos con los subespacios invariantes y bi-invariantes de $L^2(\mathbb{T})$, es interesante caracterizar los espacios invariantes minimales de $H^2(\mathbb{T})$.

Teorema 4.6.4. *Sea $h \in H^2(\mathbb{T})$. Sea $H \in H^2(\mathbb{D})$ de manera que h es el límite no tangencial de H sobre $\mathbb{T}$. Sea $H = u\Theta$ la factorización interior-exterior de H (véase el Teorema 1.2.7), y sea $\theta \in H^\infty(\mathbb{T})$ el límite no tangencial de Θ sobre $\mathbb{T}$. En ese caso, el subespacio invariante minimal para $\hat{\tau}_1 \colon H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ generado por h viene dado por*

$$[h] = \theta H^2(\mathbb{T}).$$

Demostración. Comenzamos notando que, puesto que si u^* es el límite de u sobre $\mathbb{T}$, entonces $u^* \in H^2(\mathbb{T})$ con $h = \theta u^*$. En ese caso, es claro que $h \in \theta H^2(\mathbb{T})$. Más aún, este espacio es invariante (como se ha visto en el Teorema 4.5.1). Resta ver, por tanto, que es minimal.

Para ello, sabemos por el Teorema 4.5.1 que

$$[h] = fH^2(\mathbb{T})$$

para cierta función f, que ha de ser el límite radial de una función interior. Puesto que $h \in [h]$, habría entonces de existir cierta $g \in H^2(\mathbb{T})$ de manera que

$$h = \theta u^* = fg.$$

Pero si tomamos la factorización interior-exterior de g, dada en el Teorema 1.2.7, como $g = g_i g_o$ para g_i una función interior y g_o una función exterior, entonces

$$h = \theta u^* = fg_i g_o.$$

Puesto que el factor exterior solo depende de $|h| = |g_o| = |u^*|$ (las igualdades anteriores se dan en casi todo $\mathbb{T}$, pues g_i, f y θ son interiores), se tiene que $u^* = g_o$. Por tanto, ha de ser que $\theta = fg_i$.

Nótese que, entonces, dado $w \in H^2(\mathbb{T})$ cualquiera, se tiene que $\theta w = f\tilde{w}$, donde $\tilde{w} = g_i w \in H^2(\mathbb{T})$, puesto que g_i es el límite radial de una función interior. Esto justifica que

$$\theta H^2(\mathbb{T}) \subset fH^2(\mathbb{T}) = [h].$$

Nótese que, entonces

$$\theta H^2(\mathbb{T}) = [h].$$

□

Nótese que, en el desarrollo de la prueba anterior, queda de manifiesto que las funciones interiores están relacionadas con la propiedad de invariancia respecto de $\hat{\tau}_1$, mientras que la propiedad de unicidad de la factorización interior-exterior implica el carácter minimal del subespacio correspondiente. Esta es, en esencia, la aplicación de la factorización interior-exterior que queríamos abordar.

Capítulo 5

Operadores de Hankel y Toeplitz: aproximación causal e invariancia débil

En Teoría de Sistemas es usual trabajar con sistemas no causales (por ejemplo, se puede pensar en la inversión temporal de una señal). Sin embargo, los sistemas no causales limitan la capacidad de los sistemas para trabajar "a tiempo real" (pensad que no podemos empezar a invertir temporalmente la señal hasta que esta no acaba de producirse). Es clara, por tanto, la utilidad práctica de los sistemas causales en Ingeniería, puesto que son sistemas cuya respuesta puede calcularse "a tiempo real".

En este sentido, en las aplicaciones prácticas es común intentar "aproximar" sistemas no causales por sistemas causales. En el inicio de este capítulo vamos, de hecho, a intentar formalizar y dar respuesta a este problema de aproximación. Esto nos llevará hasta los operadores de Hankel.

Más tarde daremos una formulación débil para la invariancia de algunos sistemas, e introduciremos los operadores de Toeplitz en relación a este nuevo concepto.

5.1. Operadores de Hankel

Sea $T\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ un sistema lineal, 2-estable e invariante, pero no causal. El Teorema 3.7.1 relaciona el sistema anterior con un operador $\Psi\colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$. De hecho, Ψ también será lineal, invariante y continuo. En ese caso, el Teorema 3.7.4 relaciona a Ψ con una función $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ de

manera que
$$\widehat{T(\varphi)} = \Psi(\hat{\varphi}) = \phi\hat{\varphi}, \quad \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$
Con este marco teórico, queremos dar "una medida" de "cuán no-causal" es T. Para esto, nótese que, de nuevo en virtud del Teorema 3.7.4, los operadores $\Phi\colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ que además son causales vienen dados por funciones $h \in H^\infty(\mathbb{T})$, de manera que

$$\Phi(f) = hf, \quad f \in L^2(\mathbb{T}).$$

Por tanto, para comparar a T (o, por equivalencia, a Ψ) con los operadores causales (como Φ) podemos usar la "distancia" entre estos operadores, a saber,

$$\inf_{\substack{\Phi\colon L^2(\mathbb{T})\to L^2(\mathbb{T}) \\ \Phi \text{ causal}}} \|\Psi - \Phi\|_{L^2(\mathbb{T})\to L^2(\mathbb{T})} = \inf_{h\in H^\infty(\mathbb{T})} \left(\sup_{\substack{f\in L^2(\mathbb{T}) \\ f\neq 0}} \frac{\|\phi f - hf\|_{L^2(\mathbb{T})}}{\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}} \right).$$

Nótese que si existe $h \in H^\infty(\mathbb{T})$ que minimice la expresión anterior, entonces h sería lo que entendemos por "mejor aproximación causal" de ϕ. De hecho, por los argumentos dados anteriormente, podría darse a través de h un sistema T_c en $\ell^2(\mathbb{Z})$ que sea la mejor "aproximación causal" al sistema original, T. Este sistema sería

$$T_c(\varphi) = \mathscr{F}^{-1}(h\hat{\varphi}), \quad \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

Con el objetivo de entender la motivación detrás de esta expresión (así como de la discusión que nos ha llevado a ella), damos el siguiente resultado:

Proposición 5.1.1. *Sea $M_\phi\colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ un operador de tipo multiplicación dado por*
$$M_\phi(f) = \phi f, \quad f \in L^2(\mathbb{T}),$$
con símbolo $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Se cumple

$$\begin{aligned}\inf_{h\in H^\infty(\mathbb{T})} \left(\sup_{\substack{f\in H^2(\mathbb{T}) \\ f\neq 0}} \frac{\|\phi f - hf\|_{L^2(\mathbb{T})}}{\|f\|_{H^2(\mathbb{T})}} \right) &= \inf_{h\in H^\infty(\mathbb{T})} \|\phi - h\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \\ &= d(\phi, H^\infty(\mathbb{T})),\end{aligned}$$

donde d denota la distancia de $L^\infty(\mathbb{T})$.

Demostración. Dado $h \in H^\infty(\mathbb{T})$, vamos a probar que

$$\sup_{\substack{f \in H^2(\mathbb{T}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\phi f - hf\|_{L^2(\mathbb{T})}}{\|f\|_{H^2(\mathbb{T})}} = \|\phi - h\|_{L^\infty(\mathbb{T})},$$

de donde se deduce claramente el resultado.

Para ello, nótese que se cumple que

$$\|\phi f - hf\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|\phi - h\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \|f\|_{H^2(\mathbb{T})}, \quad f \in H^2(\mathbb{T}).$$

Por tanto,

$$\sup_{\substack{f \in H^2(\mathbb{T}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\phi f - hf\|_{L^2(\mathbb{T})}}{\|f\|_{H^2(\mathbb{T})}} \leq \|\phi - h\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

Para ver la desigualdad contraria, sea $\epsilon > 0$. Consideremos $g := \phi - h \in L^\infty(\mathbb{T})$. Tomemos el conjunto

$$A_\epsilon := \{\xi \in \mathbb{T} : |g(\xi)| > \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} - \epsilon\}.$$

Nótese que A_ϵ es medible. Más aún, su medida (de Lebesgue) es estrictamente positiva (en caso contrario, $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} - \epsilon$ sería un supremo esencial de g, lo cual es imposible). En ese caso, sea χ_{A_ϵ} la correspondiente función indicatriz. Sea

$$\tilde{\chi}_{A_\epsilon} := \frac{\chi_{A_\epsilon}}{\|\chi_{A_\epsilon}\|_{L^2(\mathbb{T})}}.$$

Nótese que $\|\tilde{\chi}_{A_\epsilon}\|_{L^2(\mathbb{T})} = 1$. Además, se verifica que

$$\begin{aligned}
\|g\tilde{\chi}_{A_\epsilon}\|_{L^2(\mathbb{T})} &= \left(\int_{\mathbb{T}} |g(\xi)|^2 \, |\tilde{\chi}_{A_\epsilon}(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{\|\chi_{A_\epsilon}\|_{L^2(\mathbb{T})}} \left(\int_{A_\epsilon} |g(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{1/2} \\
&\geq \frac{1}{\|\chi_{A_\epsilon}\|_{L^2(\mathbb{T})}} \left(\int_{A_\epsilon} (\|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} - \epsilon)^2 d\xi\right)^{1/2} \\
&= \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} - \epsilon.
\end{aligned}$$

Tomemos ahora $N \in \mathbb{N}$ de manera que la función

$$\chi_N(\xi) := \sum_{n=-N}^{\infty} \widehat{\tilde{\chi}_{A_\epsilon}}(n) \xi^n, \quad \xi \in \mathbb{T},$$

sea tal que $\|\tilde{\chi}_{A_\epsilon} - \chi_N\|_{L^2(\mathbb{T})} < \epsilon$ (notar que esto es posible por la conocida convergencia de las series de Fourier en $L^2(\mathbb{T})$). En ese caso, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} - \epsilon &\leq \|g\tilde{\chi}_{A_\epsilon}\|_{L^2(\mathbb{T})} \\
&\leq \|g\chi_N\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|g(\tilde{\chi}_{A_\epsilon} - \chi_N)\|_{L^2(\mathbb{T})} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{T}} |g(\xi)|^2 |\chi_N(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{1/2} + \|\tilde{\chi}_{A_\epsilon} - \chi_N\|_{L^2(\mathbb{T})} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{T}} |g(\xi)|^2 \left|\xi^N \chi_N(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2} + \epsilon \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \\
&= \left(\int_{\mathbb{T}} |g(\xi)|^2 |f(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{1/2} + \epsilon \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \\
&= \|gf\|_{L^2(\mathbb{T})} + \epsilon \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})},
\end{aligned}$$

donde $f \in H^2(\mathbb{T})$ es la función definida por $f(\xi) := \xi^N \tilde{\chi}_N(\xi)$ para $\xi \in \mathbb{T}$. De hecho, nótese que

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{T})} = \|\chi_N\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq 1.$$

Por tanto, se deduce que

$$\sup_{\substack{h \in H^2(\mathbb{T}) \\ h \neq 0}} \frac{\|gh\|_{L^2(\mathbb{T})}}{\|h\|_{H^2(\mathbb{T})}} \geq \frac{\|gf\|_{L^2(\mathbb{T})}}{\|f\|_{H^2(\mathbb{T})}} \geq \|gf\|_{L^2(\mathbb{T})} \geq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} (1 - \epsilon) - \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se muestra que

$$\sup_{\substack{h \in H^2(\mathbb{T}) \\ h \neq 0}} \frac{\|gh\|_{L^2(\mathbb{T})}}{\|h\|_{H^2(\mathbb{T})}} \geq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

Esto acaba la demostración. □

Como viene siendo usual en el trabajo, queremos relacionar el resultado anterior con un resultado propio de los espacios de Hardy. Es para ello que damos las siguientes definiciones:

Definición 5.1.2. *Sea $\alpha \in \ell^2(\mathbb{N})$ una señal. Se define el operador matricial de Hankel con símbolo α, $\Gamma_\alpha \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$, como*

$$\Gamma_\alpha(\varphi)(m) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha(m+n)\varphi(n), \quad \varphi \in \ell^2(\mathbb{N}), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Definición 5.1.3. *Sea $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Se define la forma bilineal de Hankel con símbolo ϕ, $B_\phi \colon H^2(\mathbb{T}) \times H^2(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$, como*

$$B_\phi(f, g) := \langle \overline{z\phi} \mid fg \rangle, \quad f, g \in H^2(\mathbb{T}).$$

Definición 5.1.4. *Sea $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Se define el operador de Hankel con símbolo ϕ, $H_\phi \colon H^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$, como*

$$H_\phi(f) := \phi f - P(\phi f), \quad f \in H^2(\mathbb{T}),$$

donde $P \colon L^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ es la correspondiente proyección ortogonal.

Se pueden dar las siguientes relaciones entre las definiciones anteriores:

Proposición 5.1.5. *Sean $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ y $\alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$ dada por*

$$\alpha(k) := \hat{\phi}(-k-1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sean $f, g \in H^2(\mathbb{T})$. Se verifica:

(a) $B_\phi(f,g) = \langle \overline{zg} \mid H_\phi(f) \rangle$.

(b) $B_\phi(f,g) = \langle \hat{\overline{g}} \mid \Gamma_\alpha(\hat{f}) \rangle$.

Demostración. (a) Basta notar que

$$\begin{aligned}
\langle \overline{zg} \mid H_\phi(f) \rangle &= \int_{\mathbb{T}} H_\phi(f)(\xi)\xi g(\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{T}} (\phi(\xi) f(\xi) - P(\phi f)(\xi))\xi g(\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{T}} \phi(\xi) f(\xi) \xi g(\xi) d\xi - \int_{\mathbb{T}} P(\phi f)(\xi)\xi g(\xi) d\xi \\
&= B_\phi(f,g) - \int_{\mathbb{T}} P(\phi f)(\xi)\xi g(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Pero

$$\int_{\mathbb{T}} P(\phi f)(\xi)\xi g(\xi) d\xi = \langle \overline{zg} \mid P(\phi f) \rangle = 0,$$

puesto que $P(\phi f) \in H^2(\mathbb{T})$ y

$$\widehat{\overline{zg}}(n) = \hat{\overline{g}}(-n-1) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

por lo que se deduce que $\overline{zg} \in (H^2(\mathbb{T}))^\perp$.

(b) Basta notar que

$$\begin{aligned}
B_\phi(f,g) &= \langle \overline{z\phi} \mid fg \rangle \\
&= \langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{\phi}(k)} z^{-k-1} \mid \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\xi^n \sum_{m=0}^{\infty} \hat{g}(m)\xi^m \rangle \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\phi}(k)\hat{f}(n)\hat{g}(m)\langle z^{-k-1} \mid z^{m+n} \rangle \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\phi}(-n-m-1)\hat{f}(n)\hat{g}(m) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n+m)\hat{f}(n)\hat{g}(m) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_\alpha(\hat{f})(m)\hat{g}(m) \\
&= \langle \overline{\hat{g}} \mid \Gamma_\alpha(\hat{f}) \rangle.
\end{aligned}$$

□

Estamos ahora en posición de probar el resultado que relaciona a los operadores de Hankel con la aproximación de sistemas no causales:

Teorema 5.1.6. *Sean $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ y $\alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$ dada por*

$$\alpha(k) := \hat{\phi}(-k-1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Se verifica:

$$\|B_\phi\| = \|H_\phi\| = \|\Gamma_\alpha\| = d(\phi, H^\infty(\mathbb{T})),$$

donde las normas se deben entender como normas asociadas a operadores lineales o bilineales, cada una en su correspondiente espacio.

Nota 5.1.7. *Como veremos en la demostración, dado $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$, la distancia de ϕ a $H^\infty(\mathbb{T})$ se alcanza, es decir, existe $h \in H^\infty(\mathbb{T})$ tal que*

$$\|\phi - h\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = d(\phi, H^\infty(\mathbb{T})).$$

Demostración. La igualdad entre las normas de todos los operadores se deduce de la Proposición 5.1.5. Veamos cómo:

Comenzamos notando que, dados $f, g \in H^2(\mathbb{T})$, se satisface que

$$\begin{aligned} |B_\phi(f,g)| &= |\langle \overline{zg} \mid H_\phi(f) \rangle| \\ &\leq \|\overline{zg}\|_{L^2(\mathbb{T})} \|H_\phi(f)\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &= \|g\|_{H^2(\mathbb{T})} \|H_\phi(f)\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &\leq \|H_\phi\| \|g\|_{H^2(\mathbb{T})} \|f\|_{H^2(\mathbb{T})} . \end{aligned}$$

Por tanto, $\|B_\phi\| \leq \|H_\phi\|$.

Por otro lado, sea $\epsilon > 0$, y sea $f \in H^2(\mathbb{T})$ tal que

$$\|H_\phi(f)\|_{L^2(\mathbb{T})} \geq (\|H_\phi\| - \epsilon) \|f\|_{H^2(\mathbb{T})} .$$

Sea $g = \overline{zH_\phi(f)}$. Nótese que $g \in H^2(\mathbb{T})$, puesto que $H_\phi(f) \in (H^2(\mathbb{T}))^\perp$. En ese caso, podemos ver que

$$\begin{aligned} B_\phi(f,g) &= \langle \overline{zg} \mid H_\phi(f) \rangle \\ &= \langle \overline{z\overline{zH_\phi(f)}} \mid H_\phi(f) \rangle \\ &= \langle H_\phi(f) \mid H_\phi(f) \rangle \\ &= \|H_\phi(f)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\ &\geq (\|H_\phi\| - \epsilon) \|f\|_{H^2(\mathbb{T})} \|H_\phi(f)\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &= (\|H_\phi\| - \epsilon) \|f\|_{H^2(\mathbb{T})} \left\|\overline{zH_\phi(f)}\right\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &= (\|H_\phi\| - \epsilon) \|f\|_{H^2(\mathbb{T})} \|g\|_{H^2(\mathbb{T})} . \end{aligned}$$

Por tanto, $\|B_\phi\| \geq \|H_\phi\| - \epsilon$. Pero como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se deduce que $\|B_\phi\| \geq \|H_\phi\|$.

Ahora notemos que, como $\ell^2(\mathbb{N})$ es un espacio de Hilbert, este se identifica con su dual. Por tanto,

$$\|\phi\|_{\ell^2(\mathbb{N})} = \sup_{\substack{\varphi \in \ell^2(\mathbb{N}) \\ \|\varphi\|_{\ell^2(\mathbb{N})} = 1}} |\langle \varphi \mid \phi \rangle| , \quad \phi \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

Con esto en mente, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|B_\phi\| &= \sup_{\substack{f,g\in H^2(\mathbb{T})\\ \|f\|_{H^2(\mathbb{T})}=\|g\|_{H^2(\mathbb{T})}=1}} |B_\phi(f,g)| \\
&= \sup_{\substack{f,g\in H^2(\mathbb{T})\\ \|f\|_{H^2(\mathbb{T})}=\|g\|_{H^2(\mathbb{T})}=1}} \left|\langle \bar{\hat{g}} \mid \Gamma_\alpha(\hat{f})\rangle\right| \\
&= \sup_{\substack{\phi,\varphi\in \ell^2(\mathbb{N})\\ \|\phi\|_{\ell^2(\mathbb{N})}=\|\varphi\|_{\ell^2(\mathbb{N})}=1}} |\langle \phi \mid \Gamma_\alpha(\varphi)\rangle| \\
&= \sup_{\substack{\varphi\in \ell^2(\mathbb{N})\\ \|\varphi\|_{\ell^2(\mathbb{N})}=1}} \|\Gamma_\alpha(\varphi)\| \\
&= \|\Gamma_\alpha\|.
\end{aligned}$$

Resta relacionar las normas de estos operadores con $d(\phi, H^\infty(\mathbb{T}))$. Para ello, sea $\theta \in L^\infty(\mathbb{T})$. Notamos que

$$H_\theta = (I - P)M_\theta,$$

donde I es la identidad sobre $L^2(\mathbb{T})$, P es la proyección ortogonal sobre $H^2(\mathbb{T})$ y M_θ es el operador de tipo multiplicación con símbolo θ, es decir,

$$M_\theta(h) = \theta h, \quad h \in H^2(\mathbb{T}).$$

Con esto en mente, nótese que

$$\|B_\theta\| = \|H_\theta\| = \|(I-P)M_\theta\| \leq \|I-P\| \, \|M_\theta\| \leq \|\theta\|_{L^\infty(\mathbb{T})},$$

donde $\|I-P\| = 1$, al ser la proyección sobre $(H^2(\mathbb{T}))^\perp$, y $\|M_\theta\| \leq \|\theta\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$.

Por otro lado, sea $h \in H^\infty(\mathbb{T})$. Nótese que

$$B_{\phi-h}(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \widehat{\phi - h}(-n-m-1)\hat{f}(n)\hat{g}(m), \quad f,g \in H^2(\mathbb{T}),$$

como ya vimos. Pero $-n-m-1 \leq -1$ si $n,m \in \mathbb{N}$. Por tanto, como $h \in H^\infty(\mathbb{T})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi - h}(-n-m-1) &= \hat{\phi}(-n-m-1) - \hat{h}(-n-m-1) \\
&= \hat{\phi}(-n-m-1), \quad n,m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Así, se deduce que

$$
\begin{aligned}
B_{\phi-h}(f,g) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \hat{\phi}(-n-m-1)\hat{f}(n)\hat{g}(m) \\
&= B_{\phi}(f,g), \quad f,g \in H^2(\mathbb{T}).
\end{aligned}
$$

Es decir, dado $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$, acabamos de demostrar que

$$B_{\phi-h} = B_\phi, \quad h \in H^\infty(\mathbb{T}).$$

Por tanto, usando lo anterior, se tiene que

$$\|B_\phi\| \leq \operatorname*{ínf}_{h\in H^\infty(\mathbb{T})} \|\phi - h\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = d(\phi, H^\infty(\mathbb{T})).$$

Para demostrar la igualdad, basta hallar $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ tal que

$$\|B\| = \|\phi - h\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

Para ello, observamos la siguiente construcción: sea $h \in H^1(\mathbb{D})$, factorizada como $h = \Theta u$, donde Θ es una función interior y u es una función exterior. Nótese que, en particular, u no se anula en $\mathbb{D}$. En ese caso, existe una determinación holormorfa de la raiz de u, digamos v, tal que $v^2 = u$. Así, h puede factorizarse como

$$h = vw,$$

donde $w := v\Theta$. Nótese que, por construcción, $v \in H^2(\mathbb{D})$. Pero, como $\Theta \in H^\infty(\mathbb{D})$, entonces $w \in H^2(\mathbb{D})$. Por tanto, lo anterior representa una factorización de h por funciones de $H^2(\mathbb{D})$. Más aún, nótese que

$$
\begin{aligned}
\|v\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 &= \operatorname*{lím}_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |v(r\xi)|^2 \, d\xi \\
&= \operatorname*{lím}_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |u(r\xi)| \, d\xi \\
&= \|u\|_{H^1(\mathbb{D})}.
\end{aligned}
$$

Como Θ es interior, se puede ver de la misma manera que

$$\|w\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 = \left\|\Theta^2 u\right\|_{H^1(\mathbb{D})} = \|u\|_{H^1(\mathbb{D})} = \|v\|_{H^2(\mathbb{D})}^2.$$

Por tanto, la factorización anterior respeta la norma, es decir, se tiene que

$$\|h\|_{H^1(\mathbb{D})} = \|u\|_{H^1(\mathbb{D})} = \|v\|_{H^2(\mathbb{D})} \|w\|_{H^2(\mathbb{D})}.$$

En base a esto, definimos $\Psi\colon H^1(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ dado por

$$\Psi(h) := \langle \overline{z\phi} \mid h \rangle.$$

Nótese que, haciendo uso de la descomposición comentada anteriormente, se tiene que

$$\Psi(h) = \langle \overline{z\phi} \mid h \rangle = \langle \overline{z\phi} \mid vw \rangle = B_\phi(v, w).$$

Por tanto,

$$|\Psi(h)| = |B_\phi(v, w)| \leq \|B_\phi\| \|v\|_{H^2(\mathbb{T})} \|w\|_{H^2(\mathbb{T})} = \|B_\phi\| \|h\|_{H^1(\mathbb{T})}.$$

Así se deduce que

$$\|\Psi\| \leq \|B_\phi\|.$$

Ahora bien, supongamos que existe $0 < C < \|B_\phi\|$ tal que

$$|\Psi(h)| \leq C \|h\|_{H^1(\mathbb{T})}, \quad h \in H^1(\mathbb{T}).$$

Sean $f, g \in H^2(\mathbb{T})$. Nótese que, como consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se verifica que $fg \in H^1(\mathbb{T})$. Por tanto, se deduciría que

$$|B_\phi(f, g)| = |\Psi(fg)| \leq C \|fg\|_{H^1(\mathbb{T})} \leq C \|f\|_{H^2(\mathbb{T})} \|g\|_{H^2(\mathbb{T})}, \quad f, g \in H^2(\mathbb{T}),$$

donde de nuevo se ha usado la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Pero hemos visto que toda función de $H^1(\mathbb{T})$ se factoriza como el producto de dos funciones de $H^2(\mathbb{T})$, por lo que se tendría que

$$\|B_\phi\| \leq C < \|B_\phi\|,$$

lo cual es un absurdo. Esto demuestra que

$$\|\Psi\| = \|B_\phi\|.$$

Visto esto, apreciamos que por el teorema de Hahn-Banach podemos extender Ψ a un operador $\Phi\colon L^1(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ de manera que

$$\Psi(h) = \Phi(h), \quad h \in H^1(\mathbb{T}),$$

y

$$\|\Psi\| = \|\Phi\|.$$

Como el dual de $L^1(\mathbb{T})$ se identifica con $L^\infty(\mathbb{T})$, ha de existir $k \in L^\infty(\mathbb{T})$ tal que

$$\Phi(f) = \langle k \mid f \rangle, \quad f \in L^1(\mathbb{T}),$$

de manera que

$$\|k\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \|\Phi\| = \|\Psi\| = \|B_\phi\|.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos $e_n \in H^1(\mathbb{T})$ dada por

$$e_n(\xi) := \xi^n, \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

Nótese que Ψ y Φ coinciden sobre e_n, por tanto

$$\overline{\widehat{\overline{z\phi}}(n)} = \langle \overline{z\phi} \mid e_n \rangle = \Psi(e_n) = \Phi(e_n) = \langle k \mid e_n \rangle = \overline{\hat{k}(n)}.$$

Entonces,

$$\widehat{\overline{z\phi}}(n) = \hat{k}(n),$$

es decir, los coeficientes de Fourier de k y $\overline{z\phi}$ coinciden para índices no-negativos. Sea, ahora, $h := \phi - \overline{zk}$. Nótese que $h \in L^\infty(\mathbb{T})$. Además, dado $n \in \mathbb{Z}$ con $n < 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\hat{h}(n) &= \widehat{\phi - \overline{zk}}(n) \\
&= \hat{\phi}(n) - \widehat{\overline{zk}}(n) \\
&= \overline{\hat{\overline{\phi}}(-n)} - \overline{\widehat{zk}(-n)} \\
&= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (\overline{\phi(\xi)}\xi^n - \xi k(\xi)\xi^n)d\xi} \\
&= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (\overline{\xi\phi(\xi)}\xi^{n+1} - k(\xi)\xi^{n+1})d\xi} \\
&= \overline{\widehat{\overline{z\phi}}(-n-1) - \hat{k}(-n-1)} = 0,
\end{aligned}$$

puesto que $-n-1 \geq 0$. Esto demuestra que $h \in H^\infty(\mathbb{T})$. De hecho,

$$\|\phi - h\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \left\|\overline{zk}\right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \|k\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \|B_\phi\|.$$

Esto termina la demostración. $\square$

5.2. Un nuevo concepto de invariancia

Dedicamos, al inicio del trabajo, cierto esfuerzo a introducir el concepto de invariancia. Incluso demostramos, en el Lema 2.3.7, que en espacios de señales bi-invariantes se puede definir la invariancia de un sistema usando, no el operador shift, si no su inverso.

Es pura manipulación algebraica ver que, dados X un espacio de señales bi-invariante y un sistema $T\colon X \to X$, es equivalente decir que T es invariante y que T cumple

$$\tau_1^{-1} T \tau_1 = T.$$

Ahora bien, si el espacio es invariante pero no bi-invariante, lo anterior carece de sentido: el operador shift no sería invertible.

En el caso en el que $X = \ell^2(\mathbb{Z})$, se puede ver que, dados $\phi, \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ se verifica que

$$\begin{aligned}
\langle \tau_1^{-1}\phi \mid \varphi\rangle &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \overline{\tau_1^{-1}(\phi)(m)}\varphi(m) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \overline{\phi(m+1)}\varphi(m) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \overline{\phi(m)}\varphi(m-1) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \overline{\phi(m)}\tau_1(\varphi)(m) \\
&= \langle \phi \mid \tau_1\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Por tanto, τ_1^{-1} es no solo el operador inverso de τ_1, sino también su operador adjunto. Por tanto, si denotamos por T^* al adjunto de un operador T, entonces lo que enunciamos anteriormente, para el caso de $\ell^2(\mathbb{Z})$, es que un sistema $T\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ es invariante si y solo si T cumple

$$\tau_1^* T \tau_1 = T.$$

En esta sección queremos dar un nuevo concepto de invariancia, o más bien, un concepto de invariancia "débil" a través de la idea anterior. Más específicamente, notamos lo siguiente:

Lema 5.2.1. *Sea $\tau_1\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$. Su operador adjunto es $\tau_1^*\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$, dado por*

$$\tau_1^*(\phi)(n) := \begin{cases} 0, & si\ n < 0, \\ \phi(n+1), & si\ n \geq 0, \end{cases} \qquad \phi \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

Demostración. Basta ver que, dados $\phi, \varphi \in \ell^2(\mathbb{N})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle \tau_1^* \phi \mid \varphi \rangle &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \overline{\tau_1^*(\phi)(m)} \varphi(m) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{N}} \overline{\phi(m+1)} \varphi(m) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \overline{\phi(m)} \varphi(m-1) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \overline{\phi(m)} \tau_1(\varphi)(m).
\end{aligned}$$

Pero

$$\tau_1(\varphi)(0) = \varphi(-1) = 0,$$

luego

$$\begin{aligned}
\langle \tau_1^* \phi \mid \varphi \rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\phi(m)} \tau_1(\varphi)(m) \\
&= \langle \phi \mid \tau_1 \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

□

Estamos, ahora, en posición de introducir la siguiente definición:

Definición 5.2.2. *Sea $T \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$. Se dice que T es débilmente invariante si se verifica que*

$$\tau_1^* T \tau_1 = T,$$

donde $\tau_1 \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ es el operador shift y τ_1^* es su operador adjunto.

Para poder trabajar con este nuevo concepto serán útiles las siguientes igualdades.

Lema 5.2.3. *Sea $\tau_1 \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ el operador shift, y sea τ_1^* su operador adjunto. Dado $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$, se verifica:*

(a) $\tau_1^* \tau_1 \phi = \phi$.

(b) $\tau_1 \tau_1^* \phi = \phi - \phi(0)\delta_0$.

Demostración. (a) Dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\tau_1^*(\tau_1(\phi))(n) = \tau_1(\phi)(n+1) = \phi(n+1-1) = \phi(n).$$

(b) Nótese que

$$\tau_1(\tau_1^*(\phi))(0) = \tau_1^*(\phi)(-1) = 0,$$

ya que $\tau_1^*(\phi) \in \ell^2(\mathbb{N})$. Sin embargo, si $n \in \mathbb{N}$ con $n > 0$, entonces

$$\tau_1(\tau_1^*(\phi))(n) = \tau_1^*(\phi)(n-1) = \phi(n-1+1) = \phi(n),$$

donde hemos usado que $n - 1 \geq 0$. □

Como hemos adelantado en la introducción de esta sección, este nuevo concepto de invariancia es "más débil" que el original (de ahí su nombre), según se desprende del siguiente resultado.

Proposición 5.2.4. *Sea $T\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ un sistema. Si T es invariante, entonces también es débilmente invariante.*

Demostración. Si T es invariante, entonces conmuta con τ_1. En ese caso, se verifica que

$$\tau_1^* T \tau_1 = \tau_1^* \tau_1 T = T,$$

donde se ha usado el Lema 5.2.3. □

Nótese que el recíproco de la proposición anterior no es cierto: τ_1^* es débilmente invariante pero no invariante, como se deduce del Lema 5.2.3.

Una vez más, usando la transformada Z, este nuevo concepto de invariancia puede extenderse a los operadores sobre el espacio $H^2(\mathbb{D})$. Para ello, damos la siguiente definición:

Definición 5.2.5. *Sean el operador $\Psi\colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ y su correspondiente sistema $T = Z^{-1}\Psi Z\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$. Se dirá que Ψ es débilmente invariante si T es débilmente invariante.*

Como es usual, el concepto anterior puede definirse, de manera equivalente, sin hacer uso del espacio $\ell^2(\mathbb{N})$, como sugiere el siguiente resultado.

Proposición 5.2.6. *Sea $\Psi\colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$. Entonces Ψ es débilmente invariante si y solo si se verifica que*

$$\hat{\tau}_1{}^* \Psi \hat{\tau}_1 = \Psi,$$

donde $\hat{\tau}_1\colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ es el correspondiente operador shift, y $\hat{\tau}_1{}^*$ es su adjunto.

Demostración. Sea $T = Z^{-1}\Psi Z \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ el correspondiente sistema. Se tiene que

$$\begin{aligned} \Psi \text{ es débilmente invariante} &\iff T \text{ es débilmente invariante} \\ &\iff \tau_1^* Z^{-1}\Psi Z\tau_1 = Z^{-1}\Psi Z \\ &\iff Z\tau_1^* Z^{-1}\Psi Z\tau_1 Z^{-1} = \Psi. \end{aligned}$$

Ahora bien, $Z\tau_1 Z^{-1} = \hat{\tau}_1$. Por tanto, para demostrar el resultado basta ver que $Z\tau_1^* Z^{-1} = \hat{\tau}_1{}^*$.

Para comprobar esto último, denotamos $\Phi = Z\tau_1^* Z^{-1}$. Nótese que si $f \in H^2(\mathbb{D})$ viene dada por

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

se tiene que

$$\Phi(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_{n+1} z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Visto esto, es fácil comprobar que si $g \in H^2(\mathbb{D})$ viene dada por

$$g(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \Phi(f) \mid g \rangle &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{f_{n+1}} g_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{f_n} g_{n-1} \\ &= \langle f \mid \hat{\tau}_1(g) \rangle. \end{aligned}$$

Se deduce así, tal y como se quería, que $\Phi = \hat{\tau}_1{}^*$. □

La utilidad de este concepto de invariancia débil para operadores sobre espacios de Hardy se pondrá de manifiesto en la siguiente sección.

5.3. Operadores de Toeplitz

Sea H un espacio de Hilbert separable y sea $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$ una base hilbertiana de H que sea, además, ortonormal. En ese caso, la igualdad de Paserval justifica que

$$h = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n \mid h \rangle e_n, \quad h \in H.$$

Sea $T\colon H \to H$ un operador lineal y continuo. Entonces,

$$T(h) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n \mid h\rangle T(e_n), \quad h \in H.$$

Es decir, la acción de T sobre H queda caracterizada por su acción sobre la base.

En dimensión finita, este hecho hace corresponder a T con una matriz cuadrada $M_T = (a_{i,j} : 1 \leq i, j \leq N)$ sobre $\mathbb{C}$, donde N es la dimensión de H, definida por

$$a_{i,j} = \langle e_i \mid T(e_j)\rangle,$$

de manera que

$$\begin{aligned}
\langle e_i \mid T(h)\rangle &= \left\langle e_i \mid \sum_{j=1}^{N} \langle e_j \mid h\rangle T(e_j)\right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{N} \langle e_j \mid h\rangle \langle e_i \mid T(e_j)\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \langle e_j \mid h\rangle \\
&= \langle e_i \mid M_T h\rangle.
\end{aligned}$$

Podemos dar también un sentido a las ideas anteriores cuando H es de dimensión infinita, resultando M_T en una matriz de dimensión infinita.

En el caso de un operador matricial de Hankel (introducidos en la Definición 5.1.2), podemos tomar la base $\{\delta_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell^2(\mathbb{N})$. Con esta base, dada $\alpha \in \ell^2(\mathbb{N})$, la matriz asociada al operador Γ_α viene dada por $M_{\Gamma_\alpha} = (a_{i,j} : i, j \in \mathbb{N})$ donde

$$\begin{aligned}
a_{i,j} &= \langle \delta_i \mid \Gamma_\alpha(\delta_j)\rangle \\
&= \Gamma_\alpha(\delta_j)(i) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha(i+n)\delta_j(n) \\
&= \alpha(i+j).
\end{aligned}$$

Es decir, M_{Γ_α} puede entenderse formalmente como una matriz infinita de la forma

$$M_{\Gamma_\alpha} := \begin{pmatrix} \alpha(0) & \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \cdots \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \alpha(4) & \cdots \\ \alpha(2) & \alpha(3) & \alpha(4) & \alpha(5) & \cdots \\ \alpha(3) & \alpha(4) & \alpha(5) & \alpha(6) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

En base a esta idea sobre la estructura matricial de un operador, damos la siguiente definición:

Definición 5.3.1. *Sea $T\colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$. Se dice que T es de diagonales constantes si para todo $i, j \in \mathbb{N}$ se satisface*

$$T_{i+1,j+1} = T_{i,j},$$

donde

$$T_{i,j} = \langle z^i \mid T(z^j) \rangle.$$

Nótese que si $T\colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ es un operador lineal y continuo de diagonales constantes, entonces su estructura matricial asociada es, formalmente, la dada por

$$M_T := \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_{-1} & \alpha_{-2} & \alpha_{-3} & \cdots \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & \alpha_{-2} & \cdots \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & \cdots \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

donde

$$T_{i,j} = \alpha_{i-j}, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Esta característica es la que da el nombre a dichos operadores.

La importancia de los operadores anteriormente definidos radica en el siguiente resultado.

Teorema 5.3.2. *Sea $T\colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ un operador lineal y continuo. Entonces T es débilmente invariante si y solo si es de diagonales constantes.*

Demostración. Supongamos que T es débilmente invariante. Dados $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle z^{m+1} \mid T(z^{n+1}) \rangle &= \langle \hat{\tau}_1(z^m) \mid T(\hat{\tau}_1(z^n)) \rangle \\ &= \langle z^m \mid \hat{\tau}_1^*(T(\hat{\tau}_1(z^n))) \rangle \\ &= \langle z^m \mid T(z^n) \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto, T es de diagonales constantes.

Recíprocamente, supongamos que T es de diagonales constantes. Sea $h \in H^2(\mathbb{D})$ una función arbitraria, dada por

$$h(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Definamos $Q = \hat{\tau}_1^* T \hat{\tau}_1$. Nótese que Q es un operador lineal y continuo, por lo que $Q(h)$ puede desarrollarse según

$$\begin{aligned}
Q(h) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n Q(z^n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \langle z^m \mid Q(z^n)\rangle z^m \right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \langle z^m \mid \hat{\tau}_1^*(T(\hat{\tau}_1(z^n)))\rangle z^m \right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \langle \hat{\tau}_1(z^m) \mid T(\hat{\tau}_1(z^n))\rangle z^m \right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \langle z^{m+1} \mid T(z^{n+1})\rangle z^m \right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \langle z^m \mid T(z^n)\rangle z^m \right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n T(z^n) \\
&= T(h).
\end{aligned}$$

Por tanto, T es débilmente invariante. □

Antes de continuar con el desarrollo del trabajo, merece la pena identificar la estructura matricial de algunos operadores destacados.

Ejemplo 5.3.3. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $\hat{\tau}_1^n$ la composición de $\hat{\tau}_1$ con sí mismo n veces, es decir,

$$\hat{\tau}_1^n(f) = z^n f(z), \quad f \in H^2(\mathbb{D}),\, z \in \mathbb{D}.$$

Notar que $\hat{\tau}_1{}^0$ es el operador identidad sobre $H^2(\mathbb{D})$.

Dados $i, j \in \mathbb{N}$, la estructura matricial de los operadores anteriores se puede hallar sin más que ver que

$$\langle z^i \mid \hat{\tau}_1^n(z^j) \rangle = \langle z^i \mid z^{j+n} \rangle = \delta_{i,j+n}.$$

Por tanto, la matriz asociada a $\hat{\tau}_1^n$ es la que tiene todos los elementos nulos, salvo los de la n-ésima subdiagonal (en el caso $n = 0$, la diagonal principal), estando esta formada por unos.

De manera análoga, sea $n \in \mathbb{N}$ con $n > 0$. Sea $\hat{\tau}_1^{*n}$ la composición de $\hat{\tau}_1^*$ con sí mismo n veces, es decir,

$$\hat{\tau}_1^{*n}(f) = \sum_{m \in \mathbb{N}} f_{m+n} z^m, \quad z \in \mathbb{D},$$

si $f \in H^2(\mathbb{D})$ viene dada por

$$f(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}} f_m z^m, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Dados $i, j \in \mathbb{N}$, la estructura matricial de los operadores anteriores se puede hallar sin más que ver que

$$\langle z^i \mid \hat{\tau}_1^{*n}(z^j) \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } j < n \\ \langle z^i \mid z^{j-n} \rangle, & \text{si } j \geq n. \end{cases}$$

Es decir,

$$\langle z^i \mid \hat{\tau}_1^{*n}(z^j) \rangle = \delta_{i,j-n}.$$

Por tanto, la matriz asociada a $\hat{\tau}_1^{*n}$ es la que tiene todos los elementos nulos, salvo los de la n-ésima superdiagonal, estando esta formada por unos.

El interés de los ejemplos anteriores radica en el siguiente hecho: notar que los operadores cuyos elementos no nulos están sobre o bajo la diagonal (i.e., los de tipo $\hat{\tau}_1^n$) son invariantes, mientras que los que tienen elementos no nulos por encima de la diagonal (i.e., los de tipo $\hat{\tau}_1^{*n}$) son solo débilmente invariantes. Este hecho no es casual, como muestra el siguiente resultado.

Teorema 5.3.4. *Sea $T \colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ un operador lineal y continuo. Dados $i, j \in \mathbb{N}$, denotamos*

$$T_{i,j} = \langle z^i \mid T(z^j) \rangle.$$

Entonces T es invariante si y solo si se cumples las siguientes propiedades:

(1) $T_{i,j} = T_{i+1,j+1}$ *para todo* $i, j \in \mathbb{N}$.

(2) $T_{i,j} = 0$ *si* $j > i$.

En definitiva, T *es invariante si y solo si su matriz asociada es de diagonales constantes y triangular inferior.*

Demostración. Sea $T\colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ un operador lineal y continuo. Es claro que

$$\begin{aligned} T \text{ es invariante} &\iff \hat{\tau}_1 T = T \hat{\tau}_1 \\ &\iff \hat{\tau}_1(T(f)) = T(\hat{\tau}_1(f)), \quad f \in H^2(\mathbb{D}) \\ &\iff \sum_{n\in\mathbb{N}} a(n) z T(z^n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a(n) T(z^{n+1}), \quad a \in \ell^2(\mathbb{N}) \\ &\iff zT(z^n) = T(z^{n+1}), \quad n \in \mathbb{N} \\ &\iff \langle z^m \mid zT(z^n)\rangle = \langle z^m \mid T(z^{n+1})\rangle, \quad n, m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ahora bien, si $m = 0$, entonces

$$\langle z^m \mid zT(z^n)\rangle = \langle 1 \mid zT(z^n)\rangle = 0,$$

pues $zT(z^n)$ es una función de $H^2(\mathbb{D})$ que se anula en $z = 0$.

En otro caso, si $m > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \langle z^m \mid zT(z^n)\rangle &= \langle z^m \mid \hat{\tau}_1(T(z^n))\rangle \\ &= \langle \hat{\tau}_1^*(z^m) \mid T(z^n)\rangle \\ &= \langle z^{m-1} \mid T(z^n)\rangle. \end{aligned}$$

En definitiva, acabamos de ver que T es invariante si y solo si se verifica que

(1') Para $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$ se tiene que

$$T_{m-1,n} = \langle z^{m-1} \mid T(z^n)\rangle = \langle z^m \mid zT(z^n)\rangle = \langle z^m \mid T(z^{n+1})\rangle = T_{m,n+1}.$$

(2') Para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$T_{0,n+1} = \langle 1 \mid T(z^{n+1})\rangle = 0.$$

Notar que, bajo el cambio de variable $m \mapsto m + 1$, (1') es equivalente a (1) (i.e., T es de diagonales constantes). Por otro lado, usando (1), puede verse que (2') es equivalente a (2) (i.e., que la correspondiente matriz es triangular inferior). $\square$

Ahora que hemos desarrollado las herramientas fundamentales de esta sección, podemos dar paso al correspondiente objeto de estudio.

Definición 5.3.5. *Sea $T\colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ un operador. Se dice que T es un operador de Toeplitz si existe $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ tal que*

$$T(f) = Z\mathscr{F}^{-1}P(gf^*), \quad f \in H^2(\mathbb{D}),$$

donde $P\colon L^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ es la correspondiente proyección ortogonal.

Nótese que, por definición, los operadores de Toeplitz son lineales. En lo que sigue, denotaremos al operador definido anteriormente como el operador de Toeplitz de símbolo g, T_g.

Teorema 5.3.6. *Sea $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ y sea $T_g\colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ su operador de Toeplitz asociado. Se verifica:*

(a) T_g es continuo. De hecho,

$$\|T_g\| = \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

(b) T_g es débilmente invariante.

Más aún, todo operador continuo y débilmente invariante es un operador de Toeplitz. Es decir, si $T\colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ es continuo y débilmente invariante, entonces existe $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ tal que $T = T_g$.

Demostración. (a) Recordemos que $Z\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to H^2(\mathbb{D})$ y $\mathscr{F}\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T})$ son isometrías. Entonces, dado $f \in H^2(\mathbb{D})$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|T_g(f)\|_{H^2(\mathbb{D})} &= \|P(gf^*)\|_{H^2(\mathbb{T})} \\
&\leq \|gf^*\|_{L^2(\mathbb{T})} \\
&\leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \|f^*\|_{L^2(\mathbb{T})} \\
&= \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \|f^*\|_{H^2(\mathbb{T})} \\
&= \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|T_g\| \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

Para ver que la desigualdad anterior es de hecho una igualdad, definimos la función $k_a\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ dada por

$$k_a(z) := \frac{1}{1-\overline{a}z} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{a}^n z^n,$$

donde $a \in \mathbb{D}$ es arbitrario. Nótese que k_a es una función holomorfa sobre $\mathbb{D}$, y además

$$\|k_a\|^2_{H^2(\mathbb{D})} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\overline{a}^n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|a^2\right|^n = \frac{1}{1-|a|^2} < \infty,$$

por lo que se deduce que $k_a \in H^2(\mathbb{D})$. Esto justifica que

$$\begin{aligned}
\langle k_a^* \mid g k_a^* \rangle_{L^2(\mathbb{T})} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\hat{k_a}(n)} \widehat{g k_a^*}(n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\hat{k_a}(n)} \widehat{g k_a^*}(n) \\
&= \langle k_a^* \mid P(g k_a^*) \rangle_{H^2(\mathbb{T})},
\end{aligned}$$

donde $P\colon L^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ es la correspondiente proyección ortogonal. En particular,

$$\begin{aligned}
\langle k_a \mid T_g(k_a) \rangle_{H^2(\mathbb{D})} &= \langle k_a \mid Z\mathscr{F}^{-1} P(g k_a^*) \rangle_{H^2(\mathbb{D})} \\
&= \langle k_a^* \mid P(g k_a^*) \rangle_{H^2(\mathbb{T})} \\
&= \langle k_a^* \mid g k_a^* \rangle_{L^2(\mathbb{T})} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(\xi) \left|k_a^*(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(\xi) \frac{1}{|1-\overline{a}z|^2} d\xi \\
&= \frac{1}{1-|a|^2} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(\xi) \frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}z|^2} d\xi \\
&= \|k_a\|^2_{H^2(\mathbb{D})} \mathscr{P}(g)(a),
\end{aligned}$$

donde $\mathscr{P}$ denota la transformada de Poisson. Recordando ahora que $H^2(\mathbb{D})$

se identifica con su dual, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|T_g\| &= \sup_{\substack{f\in H^2(\mathbb{D})\\ f\neq 0}} \frac{\|T_g(f)\|_{H^2(\mathbb{D})}}{\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}}\\
&= \sup_{\substack{f\in H^2(\mathbb{D})\\ f\neq 0}} \left(\frac{1}{\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}} \sup_{\substack{h\in H^2(\mathbb{D})\\ h\neq 0}} \frac{|\langle h \mid T_g(f)\rangle|}{\|h\|_{H^2(\mathbb{D})}} \right)\\
&\geq \sup_{\substack{f\in H^2(\mathbb{D})\\ f\neq 0}} \left(\frac{1}{\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}} \sup_{a\in\mathbb{D}} \frac{|\langle k_a \mid T_g(f)\rangle|}{\|k_a\|_{H^2(\mathbb{D})}} \right)\\
&\geq \sup_{b\in\mathbb{D}} \left(\frac{1}{\|k_b\|_{H^2(\mathbb{D})}} \sup_{a\in\mathbb{D}} \frac{|\langle k_a \mid T_g(k_b)\rangle|}{\|k_a\|_{H^2(\mathbb{D})}} \right)\\
&\geq \sup_{a\in\mathbb{D}} \frac{|\langle k_a \mid T_g(k_a)\rangle|}{\|k_a\|^2_{H^2(\mathbb{D})}}\\
&= \sup_{a\in\mathbb{D}} |\mathscr{P}(g)(a)|\\
&= \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\,.
\end{aligned}
$$

(b) Nótese que T_g es un operador lineal. En (a) se demuestra que, además, es continuo. Por tanto, por el Teorema 5.3.2, para ver que T_g es débilmente invariante basta ver que T_g es de diagonales constantes.

Para ello, sea $f \in H^2(\mathbb{D})$. Supongamos que

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Supongamos, también, que

$$g(\xi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} g_m \xi^m, \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

En ese caso,

$$
\begin{aligned}
gf^*(\xi) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{N}} g_m f_n \xi^{n+m}\\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{N}} (g_{l-n} f_n)\, \xi^l, \quad \xi \in \mathbb{T}.
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$P(gf^*)(\xi) = \sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} (g_{l-n} f_n)\, \xi^l, \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

En particular, sea $j \in \mathbb{N}$, y tomemos

$$f(z) := z^j, \quad z \in \mathbb{D}.$$

En ese caso,

$$\begin{aligned} P(gf^*)(\xi) &= \sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} (g_{l-n} \delta_{n,j})\, \xi^l \\ &= \sum_{l\in\mathbb{N}} g_{l-j} \xi^l, \quad \xi \in \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Es fácil ver, entonces, que

$$T_g(z^j) = \sum_{l\in\mathbb{N}} g_{l-j} z^l.$$

Estamos ahora en posición de calcular

$$\langle z^i \mid T_g(z^j)\rangle = \sum_{l\in\mathbb{N}} \overline{\delta_{i,l}} g_{l-j} = g_{i-j}.$$

Esto muestra, como queríamos, que T_g es de diagonales constantes.

Resta ver que todo operador continuo y débilmente invariante es un operador de Toeplitz. Para ello, denotemos por $T \colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ a un operador con estas propiedades. El Teorema 5.3.2 asegura que T es diagonales constantes. Por tanto, dados $i, j \in \mathbb{N}$, definamos la sucesión

$$\alpha(i-j) := \langle z^i \mid T(z^j)\rangle.$$

Dado $N \in \mathbb{N}$, denotamos

$$\alpha_N(n) := \begin{cases} \alpha(n), & n \geq -N, \\ 0, & n < -N, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Nótese que

$$\begin{aligned}
\|\alpha_N\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})} &= \sum_{n=-N}^{\infty} |\alpha_N(n)|^2 \\
&= \sum_{n=-N}^{\infty} \left|\langle z^{n+N} \mid T(z^N)\rangle\right|^2 \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \left|\langle z^{m} \mid T(z^N)\rangle\right|^2 \\
&= \left\|T(z^N)\right\|^2_{H^2(\mathbb{D})} \\
&\le \|T\|^2_{H^2(\mathbb{D})\to H^2(\mathbb{D})}.
\end{aligned}$$

Por tanto, para cada $N \in \mathbb{N}$ se tiene que $\alpha_N \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Más aún, siguiendo argumentos similares puede comprobarse que la sucesión $\{\alpha_N : N \in \mathbb{N}\}$ es de Cauchy. Por tanto, $\alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

Sean, por tanto, $g \in L^2(\mathbb{T})$ con $g = \hat{\alpha}$ y $f \in H^2(\mathbb{D})$ dada por

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Se satisface que

$$\begin{aligned}
T(f) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n T(z^n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} f_n \langle z^m \mid T(z^n)\rangle z^m \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} f_n \alpha(m-n) z^m \\
&= Z\mathscr{F}^{-1} P(gf^*).
\end{aligned}$$

Siguiendo los razonamientos dados en (a), se verifica que, como T es continuo, ha de ser que $g \in L^\infty(\mathbb{T})$. Por tanto, con la igualdad anterior, se demuestra que $T = T_g$. □

En algunas ocasiones son de especial interés los operadores de Toeplitz con símbolo holomorfo, es decir, los operadores T_g con $g \in H^\infty(\mathbb{T})$. Nótese que acabamos de probar que estos operadores son débilmente invariantes.

Más aún, nótese que si $f \in H^2(\mathbb{D})$, entonces $gf^* \in H^2(\mathbb{T})$, por lo que $P(gf^*) = gf^*$. En ese caso, se tiene que

$$T_g(f) = Z\mathscr{F}^{-1}(g)f, \quad f \in H^2(\mathbb{D}).$$

Es decir,
$$T_g(f) = hf, \quad f \in H^2(\mathbb{D}),$$
donde $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ es tal que $h^* = g$. Pero entonces, ya probamos en el Teorema 3.7.7 que estos operadores son invariantes.

De hecho, el siguiente resultado afirma que todos los operadores de Toeplitz invariantes son de este tipo.

Proposición 5.3.7. *Sea $g \in L^\infty(\mathbb{T})$. Sea $T_g \colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$. Se verifica que T_g es invariante si y solo si $g \in H^\infty(\mathbb{T})$.*

En ese caso, dado $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ con $h^* = g$, se verifica que T_g coincide con el operadores de multiplicación con símbolo h, es decir,
$$T_g(f) = hf, \quad f \in H^2(\mathbb{D}).$$

Demostración. Con lo comentado en la introducción de este resultado, basta ver que si T es invariante, entonces $g \in H^\infty(\mathbb{T})$. Para ello, notamos que T_g es un operador lineal y continuo, como asegura el Teorema 5.3.6. En ese caso, el Teorema 5.3.4 afirma, en particular, que la matriz asociada a T_g es triangular inferior.

Con esto en mente, supongamos que g viene dada por
$$g(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \xi^n, \quad \xi \in \mathbb{T}.$$
En la demostración del Teorema 5.3.6 se comprobó que, entonces, se verifica que
$$\langle z^i \mid T_g(z^j) \rangle = g_{i-j}, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$
En particular, tomando $i = 0$, se tiene que
$$g_{-j} = 0, \quad j \in \mathbb{N}, \, j > 0,$$
puesto que
$$\langle z^0 \mid T_g(z^j) \rangle = 0,$$
dado que la matriz asociada a T_g es de triangular inferior. Se deduce, así, que $g \in H^\infty(\mathbb{T})$. $\square$

Capítulo 6

Modelado y Aproximación de Dispositivos

Ya hemos justificado numerosas veces a lo largo del trabajo que, desde el punto de vista de la Ingeniería, los sistemas de mayor interés son los lineales, estables, invariantes y causales. Recuérdese, además, que algunos casos la causalidad del sistema está asegurada si el sistema es lineal, estable e invariante (como en el Corolario 3.6.2).

En la práctica, es usual tratar no solo con sistemas aislados, sino con una cantidad numerosa de sistemas, todos ellos interconectados entre sí. Esta imagen sugiere un nuevo concepto a tratar: un dispositivo, visto como una colección de sistemas. Por ejemplo, es muy clarificador pensar en el área de la Electrónica, donde cada componente de un dispositivo electrónico puede ser pensado como un sistema, todos ellos interconectados físicamente por conductores.

6.1. Conexión entre sistemas: loops

De nuevo, desde la Ingeniería, podemos pensar en cómo un dispositivo "transforma" una señal de salida en un señal de entrada. En particular, si tomamos una colección de sistemas interconectados, es natural que la señal de entrada de un cierto sistema sea, a su vez, la de salida de otro de ellos.

De manera esquemática, esto puede hacerse de múltiples formas, dependiendo del número de sistemas que conforme nuestro dispositivo. Por simplicidad, supongamos que estamos conectando dos de ellos. En los venideros ejemplos explicitamos algunas formas de llevar a cabo esta conexión.

Ejemplo 6.1.1. Sean $T_1, T_2 \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ dos sistemas lineales, 2-estables e invariantes. A partir de T_1 y T_2 podemos construir un dispositivo, conocido como dispositivo en serie, cuya idea esquemática es la siguiente:

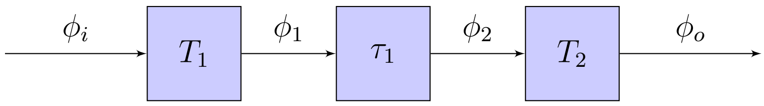

Figura 6.1.1: Esquema de un dispositivo en serie.

La idea detrás del dispositivo anterior es el cálculo secuencial (en serie, de hecho) de las correspondientes acciones de los sistemas T_1 y T_2. Es decir, dada la entrada $\phi_i \in \ell^2(\mathbb{N})$, se calcula $\phi_1 = T_1(\phi_i)$. Este cálculo, en un modelo realista, consume cierto tiempo (digamos, de procesado computacional, por ejemplo). Esto es lo que simboliza la presencia del operador shift τ_1, que da lugar a la señal $\phi_2 = \tau_1(\phi_1)$. Posteriormente, se computa la acción de T_2, resultando $\phi_o = T_2(\phi_2)$. En definitiva, la acción "global" del dispositivo viene dada por

$$\phi_o = T_2(\tau_1(T_1(\phi_i))), \quad \phi_i \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

Es decir, un dispositivo en serie es, esencialmente, un sistema de la forma $T \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ dado por

$$T = T_2 \tau_1 T_1.$$

Nótese que T también es lineal, 2-estable e invariante.

El ejemplo anterior es un caso sencillo en el que la señal de entrada de T_2 es, en esencia, la señal de salida de T_1.

Ejemplo 6.1.2. Sean $T_1, T_2 \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ dos sistemas lineales, 2-estables e invariantes. A partir de T_1 y T_2 podemos construir un dispositivo, conocido como dispositivo en paralelo, cuya idea esquemática es la siguiente:

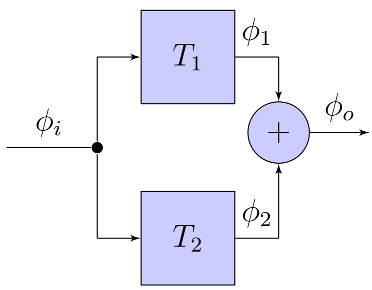

Figura 6.1.2: Esquema de un dispositivo en paralelo.

La idea detrás del dispositivo anterior es el cálculo simultáneo (en paralelo, de hecho) de las correspondientes acciones de los sistemas T_1 y T_2. Es decir, dada la entrada $\phi_i \in \ell^2(\mathbb{N})$, se calculan $\phi_1 = T_1(\phi_i)$ y $\phi_2 = T_2(\phi_i)$. Posteriormente, se aúnan ambas señales, resultando $\phi_o = \phi_1 + \phi_2$. En definitiva, la acción "global" del dispositivo viene dada por

$$\phi_o = T_1(\phi_i) + T_2(\phi_i), \quad \phi_i \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

Es decir, un dispositivo en paralelo es, esencialmente, un sistema de la forma $T\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ dado por

$$T = T_1 + T_2.$$

Nótese que T también es lineal, 2-estable, invariante y causal.

Los dos ejemplos de dispositivos hasta ahora introducidos (serie y paralelo) son relativamente sencillos: pueden verse como un nuevo sistema, algo más complejo que los originales. Este no es el caso, en general, del siguiente tipo de dispositivo.

Ejemplo 6.1.3. Sean $T_1, T_2\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ dos sistemas lineales, 2-estables e invariantes. A partir de T_1 y T_2 podemos construir un dispositivo, conocido como loop, cuya idea esquemática es la siguiente:

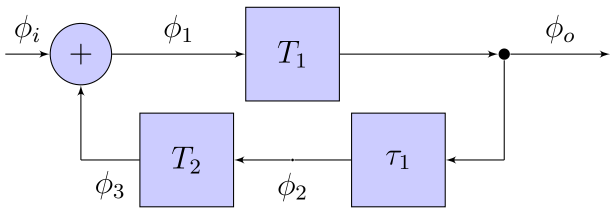

Figura 6.1.3: Esquema de un dispositivo loop.

La idea detrás del dispositivo anterior es la de "retroalimentar" (del inglés, feedback) las correspondientes acciones de los sistemas T_1 y T_2. Es decir, dada la entrada $\phi_i \in \ell^2(\mathbb{N})$, esta se aúna con la señal de salida ϕ_3 de T_2 para dar $\phi_1 = \phi_i + \phi_3$. Esta señal es la señal de entrada de T_1, cuya acción es $\phi_o = T_1(\phi_1)$. Este cálculo, en un modelo realista, consume cierto tiempo (digamos, de procesado computacional, por ejemplo). Esto es lo que simboliza la presencia del operador shift τ_1, que da lugar a la señal $\phi_2 = \tau_1(\phi_o)$, siendo esta la señal de entrada de T_2, por lo que $\phi_3 = T_2(\phi_2)$. En definitiva, la acción "global" del dispositivo viene dada por

$$\begin{cases} \phi_1 = \phi_i + \phi_3, \\ \phi_o = T_1(\phi_1), \\ \phi_2 = \tau_1(\phi_o), \\ \phi_3 = T_2(\phi_2). \end{cases}$$

En particular,

$$\phi_o = T_1(\phi_1) = T_1(\phi_i + \phi_3) = T_1(\phi_i + T_2(\phi_2)) = T_1(\phi_i + T_2(\tau_1(\phi_o))),$$

es decir, la señal de salida ϕ_o es la solución de

$$(I - T_1T_2\tau_1)(\phi_o) = T_1(\phi_i), \quad \phi_i \in \ell^2(\mathbb{N}),$$

donde I denota el operador identidad.

Concretamente, si el operador $I - T_1T_2\tau_1$ es invertible, entonces el loop se reduce de nuevo a un sistema de la forma $T\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ dado por

$$T = (I - T_1T_2\tau_1)^{-1}T_1.$$

Merece la pena dar un ejemplo explícito de un loop.

Ejemplo 6.1.4. Consideremos el loop formado a partir de los sistemas $T_1 = T_2 = I\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$, el operador identidad. Con las notaciones del problema anterior, dado una señal de entrada $\phi_i \in \ell^2(\mathbb{N})$ cualquiera, la señal de salida ϕ_o viene descrita por la ecuación

$$(I - \tau_1)\phi_o = \phi_i.$$

Es decir,

$$\begin{cases} \phi_o(n) = 0, & n < 0, \\ \phi_o(0) = \phi_i(0), & \\ \phi_o(n) - \phi_o(n-1) = \phi_i(n), & n > 0. \end{cases}$$

Nótese que el sistema anterior corresponde a lo que, en dimensión finita, conocemos por sistema triangular: posee una ecuación inicial fácilmente resoluble ($n = 0$), y el resto pueden resolverse de manera iterativa, con un algoritmo en cascada (la ecuación $(n+1)$-ésima es fácil de resolver si se ha resuelto la n-ésima).

Se puede dar, también, una visión de este loop gracias al espacio $H^2(\mathbb{D})$. Para ello, identificamos a los sistemas involucrados en el loop con sus correspondientes sistemas sobre $H^2(\mathbb{D})$. Dado que todos ellos son sistemas lineales, 2-estables, invariantes y causales, vienen dados por operadores de multiplicación, como indica el Teorema 3.6.1. En particular,

$$(1 - z)h_o(z) = h_i(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

donde $h_o = Z\phi_o$ y $h_i = Z\phi_i$. Entonces

$$h_o(z) = \frac{h_i(z)}{1 - z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Por tanto, h_o es una función holomorfa sobre $\mathbb{D}$. En ese caso, si h_o viene dada por

$$h_o(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

entonces

$$\phi_o(n) = a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por ejemplo, por explicitar aún más la situación, supongamos que $\phi_i = \delta_0$. En ese caso, $h_i(z) = 1$ para $z \in \mathbb{D}$. Por tanto,

$$h_o(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n \in \mathbb{N}} z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Así,

$$\phi_o(n) = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Visualmente,

$$\phi_i = (\ldots, 0, 0, \boxed{1}, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots), \quad \phi_o = (\ldots, 0, 0, \boxed{1}, 1, 1, 1, 1, 1 \ldots),$$

donde hemos puesto en una "caja" la coordenada que ocupa el lugar cero de cada sucesión.

En particular, nótese que, en este caso, $\phi_o \notin \ell^2(\mathbb{N})$. Esto es consecuencia de que $I - \tau_1$ no es invertible como operador de $\ell^2(\mathbb{N})$ en sí mismo (es inyectivo, como demuestra el sistema triangular hallado, pero no es sobreyectivo, como demuestra el último ejemplo propuesto). Esta es, en general, la situación que concierne a los loops.

El ejemplo anterior, aunque sencillo de formular, reproduce de manera fiel el caso general de los loops. Para verlo, sean $T_1, T_2 \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ dos sistemas lineales, 2-estables e invariantes cualesquiera. Sea $T = I - T_1 T_2 \tau_1$ el operador generado por el loop de los sistemas anteriores. Como hemos visto en el ejemplo anterior, si consideramos T como un operador de $\ell^2(\mathbb{N})$ en sí mismo, puede que, dado $\phi_i \in \ell^2(\mathbb{N})$, no exista $\phi_o \in \ell^2(\mathbb{N})$ que sea solución de

$$T\phi_o = T_1 \phi_i.$$

Para definir, entonces, la señal de salida de un loop se hace uso de $H^2(\mathbb{D})$. En concreto, nótese que todos los operadores que dan lugar a T son lineales, 2-estables e invariantes. Por tanto, T también lo es. Con esto en mente, sea $\Psi \colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ dado por $\Psi = ZTZ^{-1}$. Nótese que, por construcción, Ψ también es lineal, continuo e invariante. Por tanto, en virtud del Teorema

3.7.7, Ψ es un operador de multiplicación con símbolo en $H^\infty(\mathbb{D})$. De hecho, nótese que

$$\begin{aligned}\Psi &= ZTZ^{-1}\\ &= Z(I - T_1T_2\tau_1)Z^{-1}\\ &= ZIZ^{-1} - ZT_1Z^{-1}ZT_2Z^{-1}Z\tau_1Z^{-1}.\end{aligned}$$

De nuevo, en virtud del Teorema 3.7.7, los operadores anteriores de la forma $Z \cdot Z^{-1}$ son todos de tipo multiplicación. En particular,

$$ZIZ^{-1}(f) = f, \quad Z\tau_1Z^{-1}(f) = \hat{\tau}_1(f) = zf, \quad f \in H^2(\mathbb{D}).$$

Por tanto, existe $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ de manera que

$$\Psi(f) = (1 - zh)f, \quad f \in H^2(\mathbb{D}).$$

En particular, supongamos que

$$h(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n z^n, \quad f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\Psi(f) &= (1 - zh)f\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n z^n - \sum_{k\in\mathbb{N}} h_k z^{k+1} \sum_{m\in\mathbb{N}} f_m z^m\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(f_n - \sum_{k=0}^{n-1} h_k f_{n-k-1} \right) z^n.\end{aligned}$$

En particular,

$$T\phi_o = T_1\phi_1 \iff \Psi Z\phi_o = ZT_1\phi_i,$$

es decir, si y solo si

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\phi_o(n) - \sum_{k=0}^{n-1} h_k\phi_o(n-k-1) \right) z^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} T_1\phi_i(n)z^n.$$

Nótese que, de hecho, lo anterior es equivalente a

$$\begin{cases} \phi_o(0) = T_1\phi_i(0), \\ \phi_o(n) - \sum_{k=0}^{n-1} h_k\phi_o(n-k-1) = T_1\phi_i(n), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

En este escenario, podemos dar un sentido generalizado a las soluciones de la ecuación original,

$$T\phi_o = T_1\phi_i.$$

Definición 6.1.5. *Sean $T_1, T_2\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ dos sistemas lineales,* 2-*estables e invariantes. Sea $T = I - T_1T_2\tau_1$ el operador generado por el loop de los sistemas anteriores. Sea $\phi_i \in \ell^2(\mathbb{N})$. Se dirá $\phi_o \in \ell(\mathbb{N})$ es solución del sistema de ecuaciones generado por*

$$T\phi_o = T_1\phi_i$$

si se verifica que

$$\begin{cases} \phi_o(0) = T_1\phi_i(0), \\ \phi_o(n) - \sum_{k=0}^{n-1} h_k\phi_o(n-k-1) = T_1\phi_i(n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

donde (h_k) son los coeficientes de Taylor del símbolo $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ del operador de multiplicación $Z^{-1}TZ$.

Sobre las soluciones de estos sistemas de ecuaciones pueden darse los siguientes resultados.

Teorema 6.1.6. *Sean $T_1, T_2\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ dos sistemas lineales,* 2-*estables e invariantes. Sea $T = I - T_1T_2\tau_1$ el operador generado por el loop de los sistemas anteriores. Se verifica:*

(a) T es inyectivo en $\ell^2(\mathbb{N})$.

(b) Dado $\phi_i \in \ell^2(\mathbb{N})$, el sistema de ecuaciones generado por

$$T\phi_o = T_1\phi_i$$

posee solución única sobre $\ell(\mathbb{N})$.

(c) Si T es invertible en $\ell^2(\mathbb{N})$, entonces la solución del sistema de ecuaciones anterior es $\phi_o = T^{-1}T_1\phi_i$.

Demostración. (a) Para ver que T es inyectivo basta ver que el operador que T induce sobre $H^2(\mathbb{D})$ es inyectivo. Es decir, sea $\Psi\colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ dado por $\Psi = ZTZ^{-1}$. Como Z es una biyección, T es inyectivo si y solo si Ψ lo es.

Ahora bien, hemos comentado en la introducción al teorema que este operador es de la forma

$$\Psi(f)(z) = (1 - zh(z))f(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

donde $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ y $f \in H^2(\mathbb{D})$.

Sean, por tanto, $f, g \in H^2(\mathbb{D})$ con $\Psi(f) = \Psi(g)$. En ese caso, para cada $z \in \mathbb{D}$ se tiene que

$$(1 - zh(z))f(z) = (1 - zh(z))g(z).$$

Nótese que de aquí se deduce que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$, salvo en aquellos puntos que verifiquen que $1 - zh(z) = 0$. Pero esta última igualdad solo puede verificarse en un conjunto discreto de $\mathbb{D}$ (nótese que $z \mapsto 1 - zh(z)$ no puede ser la función nula porque no se anula en $z = 0$). Por tanto, como f y g son funciones holomorfas que coinciden salvo en un conjunto discreto, ha de ser que $f = g$. Este argumento muestra la inyectividad de Ψ, como se quería.

(b) Basta notar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \phi_o(0) = T_1\phi_i(0), \\ \phi_o(n) - \sum_{k=0}^{n-1} h_k \phi_o(n-k-1) = T_1\phi_i(n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

es lo que, en dimensión finita, llamamos triangular. Entonces la solución $\phi_o \in \ell(\mathbb{N})$ existe y es única.

(c) Supongamos que T es invertible. En ese caso, con las notaciones anteriores, Ψ también es invertible. Sea, entonces, $f = \Psi^{-1}(ZT_1\phi_i)$. Es claro que $\Psi(f) = (1 - zh)f = ZT\phi_i$. Esto es equivalente, como ya se ha visto, a ver que se satisface el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} f_0 = T\phi_i(0), \\ f_n - \sum_{k=0}^{n-1} h_k f_{n-k-1} = T\phi_i(n), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Por tanto, por definición, $\phi_o = Z^{-1}f = T^{-1}T_1\phi_i$ es una solución el sistema de ecuaciones generado por

$$T\phi_o = T_1\phi_i.$$

□

6.2. Operadores polinómicos y racionales

En general, resolver los sistemas dados en la Definición 6.1.5 puede ser una tarea difícil. No obstante, esta tarea se facilita si muchos de los coeficientes h_k se anulan. Este es, de hecho, el caso de la mayoría de sistemas usados en la Ingeniería. Es interesante, por tanto, caracterizar esta situación, tal y como se realiza en el siguiente resultado.

Teorema 6.2.1. *Sea $T\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ un sistema lineal, 2-estable e invariante. Sea $\Psi\colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ el operador de tipo multiplicación con símbolo $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ dado por $\Psi = ZTZ^{-1}$. Sea $m \in \mathbb{N}$. Son equivalentes:*

(1) h es un polinomio de grado m.

(2) Para todo $n \in \mathbb{N}$ y toda $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$ se verifica que $T\phi(n)$ solo depende de $\phi(n)$, $\phi(n-1)$,..., $\phi(n-m)$.

Demostración. Por el Teorema 3.6.1, el sistema T es de la forma

$$T(\phi) = k * \phi, \quad \phi \in \ell^2(\mathbb{N}),$$

donde $k = T(\delta_0)$. Siguiendo la notación del enunciado, es fácil comprobar $h = Zk \in H^\infty(\mathbb{D})$.

En particular, dados $n \in \mathbb{N}$ y $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$, nótese que

$$T(\phi)(n) = \sum_{l=0}^{n} k(n-l)\phi(l).$$

Por tanto, $T\phi(n)$ solo depende de $\phi(n)$, $\phi(n-1)$,..., $\phi(n-m)$ si y solo si

$$k(l) = 0 \text{ para todo } l > m.$$

Pero esta última propiedad es equivalente a que $h = Zk$ sea un polinomio de grado m. □

Notar que, desde el punto de vista matemático, un sistema $T\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ lineal, 2-estable e invariante puede ser tal que, dado $n \in \mathbb{N}$ y $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$, se verifique que $T\phi(n)$ dependa de $\phi(n)$, $\phi(n-1)$, ..., $\phi(0)$. Un ejemplo de ello es el operador dado por

$$T\phi = k * \phi, \quad \phi \in \ell^2(\mathbb{N}),$$

donde $k \in \ell^2(\mathbb{N})$ queda determinada por

$$Zk(z) = \frac{2}{2-z} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Sin embargo, desde el punto de vista práctico, este operador no es "efectivo". Pensando computacionalmente, para calcular $T\phi(n)$ es necesario tener acceso (digamos, porque están guardados en la memoria de un ordenador) a los $n+1$ valores $\phi(n)$, $\phi(n-1)$, ..., $\phi(0)$. Cuanto n es grande, esto plantea un problema computacional. Es por ello que, en base al Teorema 6.2.1, damos la siguiente definición.

Definición 6.2.2. *Sea $T\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ un sistema lineal, 2-estable e invariante. Sea $\Psi\colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ el operador de tipo multiplicación con símbolo $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ dado por $\Psi = ZTZ^{-1}$. Diremos que T es polinómico si h es un polinomio.*

Es fácil ver que, si se trabaja con sistemas polinómicos, los dispositivos en serie y en paralelo también resultan polinómicos, como sugiere el siguiente resultado.

Lema 6.2.3. *Sean $T_1, T_2\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ dos sistemas lineales, 2-estables e invariantes. Sea $T_s = T_2\tau_1T_1$ el sistema generador por el dispositivo en serie de los sistemas anteriores y sea $T_p = T_1 + T_2$ el análogo paralelo. Si T_1 y T_2 son polinómicos, entones T_s y T_p también lo son.*

Demostración. Dado $i \in \{1, 2\}$, definimos el operador $\Psi_i\colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ dado por $\Psi_i = ZT_iZ^{-1}$. Estos dos sistemas son lineales, continuos e invariantes, por lo que en vitud del Teorema 3.7.7 han de ser de tipo multiplicación, con símbolo $h_i \in H^\infty(\mathbb{D})$.

En ese caso, se cumple

$$ZT_sZ^{-1}(f) = h_1zh_2f, \quad ZT_pZ^{-1}(f) = (h_1 + h_2)f, \quad f \in H^2(\mathbb{D}).$$

Si h_1 y h_2 son polinomios, entonces h_1zh_2 y $h_1 + h_2$ también son polinomios. Esto justifica que, bajo esas condiciones, T_s y T_p son polinómicos. $\square$

Desde este nuevo punto de vista los loops son dispositivos "patológicos", puesto que en general sistemas polinómicos dan lugar a loops que no actúan de manera polinómica. Un ejemplo de esto es el siguiente.

Ejemplo 6.2.4. Sea $T_1 = I\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ el operador identidad. Sea $T_2 = I/2$. Nótese que ambos sistemas son lineales, 2-estables e invariantes. Más aún, ambos son polinómicos. Sea $T = I - T_1T_2\tau_1 = I - \tau_1/2$. Sea $\Psi\colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ el operador correspondiente a T, es decir, $\Psi = ZTZ^{-1}$. Es fácil ver que, dado $f \in H^2(\mathbb{D})$, se verifica que

$$\Psi(f) = \left(1 - \frac{1}{2}z\right) f.$$

Es decir, Ψ es un operador de tipo multiplicación, con símbolo $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ dado por

$$h(z) = 1 - \frac{1}{2}z, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Nótese, que h es una función holomorfa no solo en $\mathbb{D}$, sino en un disco abierto mayor, y además no se anula sobre $\overline{\mathbb{D}}$. Por tanto, $1/h \in H^\infty(\mathbb{D})$. De esa manera, Ψ es un operador invertible, y su inverso viene dado por

$$\Psi^{-1}(f) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z} f = \frac{2}{2-z} f, \quad f \in H^2(\mathbb{D}).$$

Nótese que $T = Z^{-1}\Psi Z$. Por tanto, como Z es invertible (es un isomorfismo isométrico), entonces T también lo es. En ese caso, en virtud del Teorema 6.1.6, dada $\phi_i \in \ell^2(\mathbb{N})$ la señal de entrada del loop, su salida es

$$\phi_o = T^{-1}T_1\phi_i = T^{-1}\phi_i.$$

De la ecuación anterior se deduce que el loop es, en definitiva, un sistema, dado por T^{-1}. Sin embargo, T^{-1} no es polinómico, como ya se vió en la introducción a la Definición 6.2.2.

Para seguir avanzando en la estructura de los sistemas que generan los loops, damos la siguiente definición, en vista al ejemplo anterior.

Definición 6.2.5. *Sea $T \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ un sistema lineal, 2-estable e invariante. Sea $\Psi \colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ el operador de tipo multiplicación con símbolo $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ dado por $\Psi = ZTZ^{-1}$. Diremos que T es racional si h es una función racional.*

El siguiente resultado caracteriza, bajo ciertas condiciones, los sistemas que generan los loops.

Teorema 6.2.6. *Sean $T_1, T_2 \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ dos sistemas lineales, 2-estables e invariantes. Sea $T = I - T_1T_2\tau_1$. Supongamos que T es un operador invertible, y que T_1 y T_2 son polinómicos. Entonces, el operador $T_l = T^{-1}T_1$ que genera el loop de los sistemas T_1 y T_2 es racional y no polinómico.*

Demostración. Dado $i \in \{1, 2\}$, definimos el operador $\Psi_i \colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ dado por $\Psi_i = ZT_iZ^{-1}$. Estos dos sistemas son lineales, continuos e invariantes, por lo que en vitud del Teorema 3.7.7 han de ser de tipo multiplicación, con símbolo $h_i \in H^\infty(\mathbb{D})$.

Sea $\Psi = ZTZ^{-1}$. En ese caso, se cumple que

$$ZTZ^{-1}(f) = (1 - h_1h_2z)f, \quad f \in H^2(\mathbb{D}).$$

Ahora bien, como Z es un isomorfismo isométrico, entonces T es invertible si y solo Ψ lo es. Pero, como Ψ es un operador de tipo multiplicación, este es invertible si y solo si su símbolo está inferiormente acotado sobre $\mathbb{D}$. En ese caso,

$$\Psi^{-1}(f) = \frac{1}{1 - h_1 h_2 z} f, \quad f \in H^2(\mathbb{D}).$$

Definamos ahora el operador dado por

$$\Psi_l = Z T_l Z^{-1} = Z T^{-1} Z^{-1} Z T_1 Z^{-1} = \Psi^{-1} \Psi_1.$$

Nótese que Ψ_l es un operador de multiplicación dado por

$$\Psi_l(f) = \frac{h_1}{1 - h_1 h_2 z} f, \quad f \in H^2(\mathbb{D}).$$

En concreto, si h_1 y h_2 son polinomios, entonces el símbolo de Ψ_l es una función racional. Por tanto, bajo las condiciones anteriores, T_l es un operador racional.

Más aún, nótese que los ceros de h_1 en $\mathbb{C}$ no son ceros de $1 - h_1 h_2 z$. Por tanto, el símbolo de Ψ_l nunca puede ser un polinomio. Se justifica, así, que T_l nunca es polinómico. $\square$

6.3. Teoría de Pick

El objetivo de las secciones anteriores a esta era, en definitiva, mostrar la noción de operador racional, su relación con los dispositivos loops, y la naturalidad con la que estos surgen en el área de la Ingeniería. Las propiedades de estos operadores son interesantes desde el punto de vista de la aproximación, tal y como nos enfocamos a ver en esta sección.

Concretamente, supongamos dados dos dispositivos D_1 y D_2, vistos como sistemas de $\ell^2(\mathbb{N})$ en sí mismos (i.e., pueden ser dispositivos en serie, en paralelo, o loops en el caso invertible). Supongamos que tenemos la posibilidad de diseñar un tercer dispositivo D, visto una vez más como un sistema de $\ell^2(\mathbb{N})$ en sí mismo, de manera que el sistema $D_1 D D_2$ sea "lo más parecido posible" a un sistema objetivo, digamos, T. Es decir, buscamos resolver el problema de mínimos dado por

$$\min_D \|T - D_1 D D_2\|,$$

donde la norma utilizada ha de ser una norma de un espacio de operadores convenientemente escogida, de manera que se pongan de manifiesto las propiedades de los sistemas involucrados.

En concreto, queremos afrontar el problema anterior cuando todos los sistemas involucrados sean lineales, 2-estables e invariantes, siendo D_1 y D_2 operadores racionales. En ese caso, la norma con la que se resuelve el problema anterior puede tomarse, con la formulación adecuada, como la de $H^\infty(\mathbb{D})$. Es decir, definamos el operador $\hat{T} = ZTZ^{-1}\colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$, y notemos que el Teorema 3.6.1 muestra que este es un operador de tipo multiplicación con símbolo, digamos, $h_T \in H^\infty(\mathbb{D})$. Algo análogo ocurre con los operadores D_1, D_2 y D, siendo además h_{D_1} y h_{D_2} funciones racionales. En ese caso, el problema anterior puede reformularse como

$$\min_{h_D \in H^\infty(\mathbb{D})} \|h_T - h_{D_1} h_D h_{D_2}\|_{H^\infty(\mathbb{D})}.$$

En general, este último problema no posee solución (i.e., el mínimo puede no existir). No obstante, es fácil obtener una condición necesaria para la existencia del mínimo, basado, de nuevo, en las propiedades de las funciones en espacios de Hardy. Para verlo, observamos lo siguiente:

Nótese que $h_{D_1} h_{D_2} \in H^\infty(\mathbb{D})$ es una función racional. Sea, por tanto, $h_{D_1} h_{D_2} = Bg$ su factorización a través de su factor de Blashcke B, donde $g \in H^\infty(\mathbb{D})$ no se anula en $\mathbb{D}$ (véase el Teorema 1.2.5). Notar que, por construcción, el producto de Blashcke B es un producto de Blaschke finito. Digamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{D}$ son los ceros de B. Definamos, además,

$$h = h_T - h_{D_1} h_D h_{D_2} = h_T - Bf \in H^\infty(\mathbb{D}),$$

donde $f = h_D g \in H^\infty(\mathbb{T})$. Obsérvese que

$$h(\lambda_j) = h_T(\lambda_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Por tanto, definimos

$$\mu_j := h_T(\lambda_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Con estas notaciones, se puede probar el siguiente resultado.

Lema 6.3.1. *Se verifica la siguiente igualdad entre conjuntos:*

$$\{h_T - Bu : u \in H^\infty(\mathbb{D})\} = \{v \in H^\infty(\mathbb{D}) : v(\lambda_j) = \mu_j\}.$$

En particular, suponiendo que los siguientes mínimos existen, se verifica que

$$\min_{u \in H^\infty(\mathbb{D})} \|h_T - Bu\|_{H^\infty(\mathbb{D})} = \min_{v \in H^\infty(\mathbb{D})} \{\|v\|_{H^\infty(\mathbb{D})} : v(\lambda_j) = \mu_j\}.$$

Demostración. Nótese que el hecho de que ambos mínimos (si existen) son iguales es consecuencia de que los conjuntos sobre los que se minimiza la norma son los mismos, como queremos probar. Para ello, definamos

$$A := \{h_T - Bu : u \in H^\infty(\mathbb{D})\}, \quad B := \{v \in H^\infty(\mathbb{D}) : v(\lambda_j) = \mu_j\}.$$

El resultado se sigue si vemos que $A = B$.

Sea $h \in A$. En ese caso, ha de existir $u \in H^\infty(\mathbb{D})$ con $h = h_T - Bu$. Nótese que $h \in H^\infty(\mathbb{D})$, pues este espacio es estable por sumas y multiplicaciones (recuérdese que, por construcción, todos los factores que aparecen son de $H^\infty(\mathbb{D})$). Además, como todo λ_j es un cero de B (y, por tanto, de Bu), se tiene que

$$h(\lambda_j) = h_T(\lambda_j) = \mu_j.$$

Nótese que de aquí se sigue que $h \in B$.

Recíprocamente, sea $v \in B$. Sea $h = h_T - v$. Nótese que, de nuevo, $h \in H^\infty(\mathbb{D})$. Más aún, todo λ_j es un cero de h, por construcción. Pero estos son todos los ceros de B sobre el plano complejo. En ese caso, la función $u = h/B$ es holomorfa y acotada sobre $\mathbb{D}$ (pues h y B lo son, B solo se anula un número finito de veces en $\mathbb{D}$, y precisamente h se anula sobre los ceros de B, con un orden mayor o igual). Es decir, $u \in H^\infty(\mathbb{D})$. Además, nótese que puede escribirse que

$$v = h_T - h = h_T - Bu.$$

Esto justifica que $h \in A$. □

En el lema anterior hemos reducido el problema del diseño óptimo del dispositivo D a un problema de minimización de la norma de una función de $H^\infty(\mathbb{D})$ que tiene algunos ceros prefijados. En particular, si $\tilde{h}$ es la solución de este último problema, entonces el dispositivo D se relaciona con la función $h_D = \tilde{h}/g$. Como g no tiene ceros en $\mathbb{D}$, entonces h_D es holomorfa en $\mathbb{D}$. Sin embargo, en general esta función no está acotada en $\mathbb{D}$, como ya adelantamos. En lo que resta de capítulo veremos que la existencia de los mínimos del lema anterior garantiza su acotación.

El nuevo problema de interpolación que surge es, precisamente, el conocido como problema de Pick, el cual posee, como ya dijimos, una condición suficiente de existencia de solución, la cual presentamos en la siguiente definición.

Definición 6.3.2. *Se dice que* $\lambda_1, \mu_1, \ldots, \lambda_n, \mu_n \in \mathbb{D}$ *cumplen la propiedad de Pick si la matriz* $A = (a_{ij} : 1 \leq i, j \leq n)$ *dada por*

$$a_{ij} = k_{\lambda_j}(\lambda_i)(1 - \overline{\mu_i}\mu_j)$$

es semidefinida positiva, donde dado $w \in \mathbb{D}$*, se define* $k_w \in H^2(\mathbb{D})$ *dada por*

$$k_w(z) = \frac{1}{1 - \overline{w}z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Basándonos en la definición anterior, podemos dar el siguiente resultado.

Proposición 6.3.3. *Sean* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{D}$ *y sean* $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$*. Supongamos que* $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ *es la solución de*

$$\min_{h \in H^\infty(\mathbb{D})} \{\|h\|_{H^\infty(\mathbb{D})} : h(\lambda_j) = \mu_j\}.$$

Sea $R \geq \|f\|_{H^\infty(\mathbb{D})}$*. Entonces* $\lambda_1, \mu'_1, \ldots, \lambda_n, \mu'_n$ *satisfacen la propiedad de Pick, donde*

$$\mu'_j = \frac{\mu_j}{R}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Demostración. Definamos $h = f/R$. Nótese que $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ con $\|h\|_\infty \leq 1$. Sea $T\colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ el operador de tipo multiplicación con símbolo h, es decir,

$$T(g) = hg, \quad g \in H^2(\mathbb{D}).$$

Es fácil ver que

$$\|T\| \leq \|h\|_\infty \leq 1.$$

En particular, si notamos por T^* al operador adjunto de T, se tiene que

$$\|T^*\| = \|T\| \leq 1.$$

Más aún, nótese que dado $g \in H^2(\mathbb{D})$ arbitraria y $w \in \mathbb{D}$, se verifica que

$$\begin{aligned} \langle T^* k_w \mid g\rangle &= \langle k_w \mid Tg\rangle \\ &= \langle k_w \mid hg\rangle \\ &= h(w)g(w) \\ &= h(w)\langle k_w \mid g\rangle \\ &= \langle \overline{h(w)} k_w \mid g\rangle, \end{aligned}$$

donde hemos usado el Teorema 1.3.5. Se deduce, así, que

$$T^*(k_w) = \overline{h(w)} k_w.$$

Ahora, sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$. Sea $g = a_1 k_{\lambda_1} + \cdots + a_n k_{\lambda_n} \in H^\infty(\mathbb{D})$. Usando las propiedades anteriores, nótese que

$$\|T^*(g)\|_2 \leq \|g\|_2 .$$

Pero

$$\begin{aligned} T^*(g) &= \sum_{j=1}^n a_j T^*(k_{\lambda_j}) \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \overline{h(\lambda_j)} k_{\lambda_j} \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \overline{\frac{f(\lambda_j)}{R}} k_{\lambda_j} \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \frac{\overline{\mu_j}}{R} k_{\lambda_j}. \end{aligned}$$

Por tanto, se verifica que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|g\|_2^2 - \|T^*(g)\|_2^2 \\ &= \left\| \sum_{j=1}^n a_j k_{\lambda_j} \right\|_2^2 - \left\| \sum_{j=1}^n a_j \frac{\overline{\mu_j}}{R} k_{\lambda_j} \right\|_2^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\overline{a_i} a_j \langle k_{\lambda_i} \mid k_{\lambda_j} \rangle - \frac{\overline{a_i \mu_i} a_j \mu_j}{R^2} \langle k_{\lambda_i} \mid k_{\lambda_j} \rangle \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \overline{a_i} a_j \langle k_{\lambda_i} \mid k_{\lambda_j} \rangle \left(1 - \frac{\overline{\mu_i} \mu_j}{R^2} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \overline{a_i} a_j k_{\lambda_j}(\lambda_i) \left(1 - \frac{\overline{\mu_i} \mu_j}{R^2} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \overline{a_i} a_j k_{\lambda_j}(\lambda_i) \left(1 - \overline{\mu_i'} \mu_j' \right) \end{aligned}$$

Nótese que, como $a_1, \ldots, a_n$ era complejos cualesquiera, la desigualdad anterior muestra que $\lambda_1, \mu_1', \cdots, \lambda_n, \mu_n'$ satisfacen la propiedad de Pick. $\square$

La relevancia de la teoría de Pick radica en que la condición necesaria para la existencia del mínimo vista en la proposición anterior es también una condición suficiente, como se deduce del siguiente resultado.

Teorema 6.3.4 (Teorema de Pick)**.** *Sean $\lambda_1, \mu_1, \ldots, \lambda_n, \mu_n \in \mathbb{D}$. Son equivalentes:*

(a) Existe una solución $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ del problema

$$\min_{h \in H^\infty(\mathbb{D})} \{\|h\|_{H^\infty(\mathbb{D})} : h(\lambda_j) = \mu_j\}.$$

Además, $\|f\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \leq 1$.

(b) Existe una solución racional $r \in H^\infty(\mathbb{D})$ del problema

$$\min_{h \in H^\infty(\mathbb{D})} \{\|h\|_{H^\infty(\mathbb{D})} : h(\lambda_j) = \mu_j\}.$$

Además, $\|r\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \leq 1$.

(c) $\lambda_1, \mu_1, \ldots, \lambda_n, \mu_n$ satisfacen la propiedad de Pick.

Demostración. Es claro que la condición (b) implica la condición (a). Además, en la Proposición 6.3.3 hemos visto que la condición (a) implica la condición (c). Por tanto, para demostrar el teorema será suficiente ver que la condición (c) implica la condición (b).

Para ello, definamos el conjunto

$$\mathscr{A} := \{h \in H^\infty(\mathbb{D}) : \|h\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \leq 1,\ h(\lambda_j) = \mu_j,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Nótese que el problema dado en (a) es equivalente al dado por

$$\min_{h \in \mathscr{A}} \|h\|_{H^\infty(\mathbb{D})}.$$

Supongamos que $\mathscr{A}$ no es vacío. En ese caso, $\mathscr{A}$ es una familia de funciones holomorfas uniformemente acotada en todo $\mathbb{D}$. Por tanto, el Teorema de Montel (puede consultarse en el Teorema 14.6 de [8]) asegura que $\mathscr{A}$ es una familia normal. En particular, tomando una sucesión minimizante de $\mathscr{A}$ que converja a

$$\inf_{h \in \mathscr{A}} \|h\|_{H^\infty(\mathbb{D})},$$

podemos escoger una subsucesión convergente (en la topología que da la convergencia uniforme en compactos). Es un argumento estándar ver que, entonces, la función holomorfa a la que converge dicha subsucesión es una solución de (a). Esto demuestra que el problema dado en (a) posee solución si y solo si $\mathscr{A}$ es no vacío.

Más aún, vamos a ver que, bajo las condiciones de (c), hay al menos una función racional en $\mathscr{A}$ que es solución del problema dado en (b). Esto mostrará justo lo que queremos.

La prueba de esto último es extensa, por lo que damos algunas indicaciones previas. Vamos a comenzar viendo que, efecticamente, $\mathscr{A}$ es no vacío. De hecho, vamos a ver que contiene al menos una función racional. Para hacer esto, vamos a relacionar el conjunto $\mathscr{A}$ con otro conjunto $\mathscr{A}'$ donde, formalmente, se asume que $\mu_n = 0$. Esto permite relacionar el conjunto $\mathscr{A}$ con otro conjunto $\mathscr{A}^*$ donde solo se prefijan $n-1$ valores de las funciones de $H^\infty(\mathbb{D})$. Veremos que, a partir de una función racional de $\mathscr{A}^*$, puede construirse otra de $\mathscr{A}$, que también es racional. Por tanto, la prueba de que hay al menos una función racional en $\mathscr{A}$ (y, por tanto, este conjunto es no vacío) se seguirá con un simple argumento de inducción sobre n.

Así, mostramos que se verifica (a). Posteriormente, un argumento de normalización sobre el valor del mínimo dado en (a) nos llevará a ver que se verifica (b).

Comenzamos, entonces, suponiendo que $n = 1$. Obsérvese que $\lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{D}$ siempre cumplen la propiedad de Pick, puesto que

$$k_{\lambda_i}(\lambda_i)(1 - \overline{\mu_i}\mu_i) = \frac{1 - |\mu_i|^2}{1 - |\lambda_i|^2} > 0.$$

Más aún, dado $a \in \mathbb{D}$, denotemos por $\phi_a \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ uno de los automorfismos de $\mathbb{D}$ que lleva a en 0, por ejemplo,

$$\phi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Recuérdese, además, que $\phi_a^{-1} = \phi_{-a}$. En ese caso, es claro que si tomamos $h = \phi_{-\mu_1} \circ \phi_{\lambda_1}$ se tiene que h es holomorfa sobre $\mathbb{D}$, con $\|h\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \leq 1$, y cumpliendo $h(\lambda_1) = \mu_1$. Por tanto, $h \in \mathscr{A}$. Más aún, la función h es racional.

En definitiva, para $n = 1$, se verifica que (c) es cierto y $\mathscr{A}$ contiene una función racional.

Tomemos, ahora $n > 1$. Vamos a reducir la demostración al caso en el que $\lambda_n = \mu_n = 0$. Para ello, con las notaciones anteriores, definimos

$$\lambda'_j = \phi_{\lambda_n}(\lambda_j), \quad \mu'_j := \phi_{\mu_n}(\mu_j), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Supongamos que existe $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ con $\|h\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \leq 1$ satisfaciendo que

$$h(\lambda_j) = \mu_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Definamos $g \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ dada por $g := \phi_{\mu_n} \circ h \circ \phi_{-\lambda_n}$. Nótese que g es holomorfa con $\|g\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \leq 1$. Además,

$$\begin{aligned} g(\lambda'_j) &= (\phi_{\mu_n} \circ h \circ \phi_{-\lambda_n})(\lambda'_j) \\ &= (\phi_{\mu_n} \circ h \circ \phi_{-\lambda_n})(\phi_{\lambda_n}(\lambda_j)) \\ &= \phi_{\mu_n}(h(\lambda_j)) \\ &= \phi_{\mu_n}(\mu_j) \\ &= \mu'_j, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Como las funciones ϕ_a para $a \in \mathbb{D}$ son biyecciones, lo anterior muestra que existe solución para el problema de interpolación relacionado con $\lambda_1, \mu_1, \ldots, \lambda_n, \mu_n$ si y solo si existe solución para el problema análogo con $\lambda'_1, \mu'_1, \ldots, \lambda'_n, \mu'_n$, donde $\lambda'_n = \mu'_n = 0$. En definitiva, esto justifica que el conjunto $\mathscr{A}$ es no vacío si y solo si el conjunto

$$\mathscr{A}' := \{h \in H^\infty(\mathbb{D}) : \|h\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \leq 1,\ h(\lambda'_j) = \mu'_j,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

es no vacío. Más aún, si $\mathscr{A}'$ contiene una función racional, entonces $\mathscr{A}$ también, puesto que cada ϕ_a es racional.

Podemos ver que se tiene, de la misma forma, una equivalencia análoga a la anterior para la propiedad (c). En particular, sea $A = (a_{ij} : 1 \leq i, j \leq n)$ la matriz dada por

$$a_{ij} = k_{\lambda_j}(\lambda_i)(1 - \overline{\mu_i}\mu_j).$$

Recuérdese que se dice que $\lambda_1, \mu_1, \ldots, \lambda_n, \mu_n$ satisfacen la propiedad de Pick si A es semidefinida positiva. Por analogía con lo realizado hasta ahora, sea $A' = (a'_{ij} : 1 \leq i, j \leq n)$ la matriz dada por

$$a'_{ij} = k_{\lambda'_j}(\lambda'_i)(1 - \overline{\mu'_i}\mu'_j).$$

Vamos a ver que A es semidefinida positiva si y solo si A' lo es. Para ello, apreciamos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1-\lambda_j'\overline{\lambda_k'}}{1-\lambda_j\overline{\lambda_k}} &= \frac{1-\phi_{\lambda_n}(\lambda_j)\overline{\phi_{\lambda_n}(\lambda_k)}}{1-\lambda_j\overline{\lambda_k}} \\
&= \frac{1-\dfrac{\lambda_j-\lambda_n}{1-\overline{\lambda_n}\lambda_j}\dfrac{\overline{\lambda_k-\lambda_n}}{\overline{1-\lambda_n\overline{\lambda_k}}}}{1-\lambda_j\overline{\lambda_k}} \\
&= \frac{(1-\overline{\lambda_n}\lambda_j)(1-\lambda_n\overline{\lambda_k})-(\lambda_j-\lambda_n)(\overline{\lambda_k}-\overline{\lambda_n})}{(1-\overline{\lambda_n}\lambda_j)(1-\lambda_n\overline{\lambda_k})(1-\lambda_j\overline{\lambda_k})} \\
&= \frac{1+\lambda_j\overline{\lambda_k}\left|\lambda_n\right|^2-\lambda_j\overline{\lambda_k}-\left|\lambda_n\right|^2}{(1-\overline{\lambda_n}\lambda_j)(1-\lambda_n\overline{\lambda_k})(1-\lambda_j\overline{\lambda_k})} \\
&= \frac{(1-\left|\lambda_n\right|^2)(1-\lambda_j\overline{\lambda_k})}{(1-\overline{\lambda_n}\lambda_j)(1-\lambda_n\overline{\lambda_k})(1-\lambda_j\overline{\lambda_k})} \\
&= \frac{1-\left|\lambda_n\right|^2}{(1-\overline{\lambda_n}\lambda_j)(1-\lambda_n\overline{\lambda_k})}, \quad 1 \le j,k \le n.
\end{aligned}$$

Por tanto, si definimos

$$\alpha_j := \frac{\sqrt{1-\left|\lambda_n\right|^2}}{1-\overline{\lambda_n}\lambda_j} \neq 0, \quad j=1,\ldots,n,$$

se tiene que

$$\frac{1-\lambda_j'\overline{\lambda_k'}}{1-\lambda_j\overline{\lambda_k}} = \alpha_j\overline{\alpha_k}.$$

Análogamente, si definimos

$$\beta_j := \frac{\sqrt{1-\left|\mu_n\right|^2}}{1-\overline{\mu_n}\mu_j} \neq 0, \quad j=1,\ldots,n,$$

se tiene que

$$\frac{1-\mu_j'\overline{\mu_k'}}{1-\mu_j\overline{\mu_k}} = \beta_j\overline{\beta_k}.$$

Con lo anterior en mente, sea $\gamma = (\gamma_i : 1 \leq i \leq n) \in \mathbb{C}^n$. Se verifica que

$$\begin{aligned}
\gamma^* A' \gamma &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1 - \mu_i' \overline{\mu_j'}}{1 - \lambda_i' \overline{\lambda_j'}} \gamma_i \overline{\gamma_j} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1 - \mu_i' \overline{\mu_j'}}{1 - \mu_i \overline{\mu_j}} \frac{1 - \mu_i \overline{\mu_j}}{1 - \lambda_i \overline{\lambda_j}} \frac{1 - \lambda_i \overline{\lambda_j}}{1 - \lambda_i' \overline{\lambda_j'}} \gamma_i \overline{\gamma_j} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1 - \mu_i \overline{\mu_j}}{1 - \lambda_i \overline{\lambda_j}} \frac{\beta_i \overline{\beta_j'}}{\alpha_i \overline{\alpha_j}} \gamma_i \overline{\gamma_j} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1 - \mu_i \overline{\mu_j}}{1 - \lambda_i \overline{\lambda_j}} \left(\frac{\beta_i}{\alpha_i} \gamma_i \right) \left(\overline{\frac{\beta_j}{\alpha_j} \gamma_j} \right) \\
&= \gamma'^* A \gamma',
\end{aligned}$$

donde $\gamma' = (\beta_i \alpha_i^{-1} \gamma_i : 1 \leq i \leq n) \in \mathbb{C}^n$.

Como la aplicación $T \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dada por $T(\gamma) = \gamma'$ es una biyección, se tiene lo que ya adelantamos: A es semidefinida positiva si y solo si A' lo es.

Lo probado hasta ahora permite reducir la demostración al caso en el que $\lambda_n = \mu_n = 0$. Por inducción, sabemos que el conjunto

$$\mathscr{A}^* := \{ h \in H^\infty(\mathbb{D}) : \|h\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \leq 1,\ h(\lambda_j^*) = \mu_j^*,\ j = 1, \ldots, n-1 \}$$

es no vacío para cualquier colección $\{\lambda_1^*, \mu_1^*, \ldots, \lambda_{n-1}^*, \mu_{n-1}^*\} \subset \mathbb{D}$ que satisfaga la propiedad de Pick. Notemos que existe $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa con

$$f(0) = 0, \quad f(\lambda_j) = \mu_j, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

si y solo si existe $g \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa con

$$g(\lambda_j) = \frac{\mu_j}{\lambda_j}, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Para verlo, basta dar la relación $f(z) = z g(z)$. Nótese que f es racional si y solo si lo es g.

Por tanto, ver que $\mathscr{A}$ contiene una función racional se reduce a ver que $\lambda_1, \mu_1 \lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_{n-1}, \mu_{n-1} \lambda_{n-1}^{-1}$ satisfacen (c). Pero esto es sencillo de comprobar puesto que, con las notaciones anteriores, se tiene que:

$$\begin{aligned}\gamma^* A\gamma &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1-\mu_i\overline{\mu_j}}{1-\lambda_i\overline{\lambda_j}}\gamma_i\overline{\gamma_j} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1-\mu_i\overline{\mu_j}}{1-\lambda_i\overline{\lambda_j}}\gamma_i\overline{\gamma_j} + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_n\overline{\gamma_i}\right) + |\gamma_n|^2 .\end{aligned}$$

Ahora bien, nótese que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\right|^2 &= \left|\gamma_n + \sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i\right|^2 \\ &= \left(\gamma_n + \sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i\right)\left(\overline{\gamma_n + \sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j}\right) \\ &= |\gamma_n|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_n\overline{\gamma_i}\right) + \sum_{i,j=1}^{n-1}\gamma_i\overline{\gamma_j}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\gamma^* A\gamma = \sum_{i,j=1}^{n-1}\left(\frac{1-\mu_i\overline{\mu_j}}{1-\lambda_i\overline{\lambda_j}} - 1\right)\gamma_i\overline{\gamma_j} + \left|\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\right|^2 .$$

Observamos ahora que

$$\frac{1-\mu_i\overline{\mu_j}}{1-\lambda_i\overline{\lambda_j}} - 1 = \frac{\lambda_i\overline{\lambda_j} - \mu_i\overline{\mu_j}}{1-\lambda_i\overline{\lambda_j}} = \frac{1-\dfrac{\mu_i}{\lambda_i}\overline{\dfrac{\mu_j}{\lambda_j}}}{1-\lambda_i\overline{\lambda_j}}\lambda_i\overline{\lambda_j}$$

Esto justifica que si $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij} : 1 \leq i, j \leq n-1)$ es la matriz dada por

$$\tilde{a}_{ij} = k_{\lambda_j}(\lambda_i)\left(1 - \frac{\mu_i}{\lambda_i}\overline{\frac{\mu_j}{\lambda_j}}\right),$$

entonces se tiene que

$$\gamma^* A\gamma = \left|\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\right|^2 + \tilde{\gamma}^*\tilde{A}\tilde{\gamma},$$

donde $\tilde{\gamma} = (\lambda_i\gamma_i : 1 \leq i \leq n-1)$. Esta igualdad justifica que A es semidefinida positiva (i.e., $\lambda_1, \mu_1, \ldots, \lambda_n, \mu_n$ satisfacen la propiedad de Pick) si y solo si

$\tilde{A}$ lo es (i.e., $\lambda_1, \mu_1\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_{n-1}, \mu_{n-1}\lambda_{n-1}^{-1}$ satisfacen la misma propiedad). Para verlo, nótese que si $\tilde{A}$ es semidefinida positiva entonces es claro que A también lo es. Para la otra implicación, para cada $\tilde{\gamma} \in \mathbb{C}^{n-1}$ basta tomar

$$\gamma = (\tilde{\gamma}, \gamma_n) \in \mathbb{C}^n,$$

donde

$$\gamma_n := -\sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j \in \mathbb{C}.$$

Con esto, se verifica que

$$\tilde{\gamma}^* \tilde{A} \tilde{\gamma} = \gamma^* A \gamma \geq 0.$$

Esto es exactamente lo que restaba por probar.

Nótese que en lo demostrado hasta ahora hemos justificado que siempre existe una función racional que es solución del problema de interpolación con norma menor o igual que uno. En particular, $\mathscr{A}$ es no vacío, y por tanto (a) posee solución.

Nos encaminamos a probar (b). Con lo anterior en mente, sea $c \in [0,1]$ el valor del mínimo del problema dado en (a). Si $c = 1$, cualquier función de $\mathscr{A}$ es solución de (a). Por tanto, acabamos de ver que podemos tomar como solución del problema una función racional. Es decir, se verifica (b). Si $c = 0$, entonces estamos ante la solución constantemente nula, que es un caso degenerado de una función racional (notar que esto solo es posible si $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$).

Si por el contrario se tiene $0 < c < 1$, entonces definimos el problema de hallar $\tilde{f} \in H^\infty(\mathbb{D})$ solución de

$$\min_{h \in H^\infty(\mathbb{D})} \{\|h\|_{H^\infty(\mathbb{D})} : h(\lambda_j) = \mu_j / c\},$$

con $\|\tilde{f}\|_{H^\infty(\mathbb{D})} \leq 1$. Notar que una solución de este problema es $\tilde{f} = f/c$, donde f es una solución de (a). Así, $\|\tilde{f}\|_{H^\infty(\mathbb{D})} = 1$. Además, como el nuevo problema posee solución, la Proposición 6.3.3 asegura que $\lambda_1, \mu_1/c, \ldots, \lambda_n, \mu_n/c$ satisfacen (c). En ese caso, ya hemos visto que existe una función racional $\tilde{r}$ que es solución del mismo problema que $\tilde{f}$. Por tanto, podemos tomar como solución del problema original a $r = c\tilde{r}$, que es una función racional. $\square$

Teorema 6.3.5. *Sean $T, D_1, D_2 \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ sistemas lineales, 2-estables e invariantes. Supongamos que D_1 y D_2 son racionales. Para $i = 1, 2$, sea $h_i \in H^\infty(\mathbb{D})$ la función racional tal que el operador ZD_iZ^{-1} es el operador de tipo multiplicación con símbolo h_i. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{D}$ los ceros de h_1h_2. Sea $h_T \in H^\infty(\mathbb{D})$ tal que el operador ZTZ^{-1} es el operador de tipo multiplicación con símbolo h_T. Sea $\mu_j := h_T(\lambda_j)$ para $j = 1, \dots, n$. Son equivalentes:*

(a) *Existe $D \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ lineal, 2-estable e invariante, con $\|D\| \leq 1$, solución de*

$$\min_Q \|T - D_1QD_2\|,$$

donde la norma es la de los operadores lineales sobre $\ell^2(\mathbb{N})$ en sí mismo, y el mínimo se toma entre todos los operadores $Q \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ que son lineales, 2-estables e invariantes.

(b) *Existe $D \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ lineal, 2-estable, invariante y racional, con $\|D\| \leq 1$, solución de*

$$\min_Q \|T - D_1QD_2\|,$$

donde la norma es la de los operadores lineales sobre $\ell^2(\mathbb{N})$ en sí mismo, y el mínimo se toma entre todos los operadores $Q \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ que son lineales, 2-estables e invariantes.

(c) *$\lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_n, \mu_n$ satisfacen la propiedad de Pick.*

Demostración. Ya comentamos que el problema dado en (a) es equivalente al problema de interpolación dado por

$$\min_{h \in H^\infty(\mathbb{D})} \{\|h\|_{H^\infty(\mathbb{D})} : h(\lambda_j) = \mu_j\}.$$

Por tanto, el Teorema 6.3.4 asegura que existe una solución D del problema dado en (a) con $\|D\| \leq 1$ si y solo si se cumple (c). Nótese, además, que (b) implica (a). Resta ver que (a) implica (b).

Para ello, recordamos que el Teorema 6.3.4 asegura que si existe una solución del problema de interpolación, entonces también existe una solución racional al mismo problema. Denotemos por f a dicha solución. Ya discutimos que, en ese caso, una solución del problema dado en (a) viene dada por

$$D(\phi) = Z^{-1}(fZ\phi), \quad \phi \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

Este operador se relaciona, por tanto, con el operador $\Psi \colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ dado por $\Psi = ZDZ^{-1}$. Notar que Ψ es un operador de tipo multiplicación, con símbolo f que, recordemos, es una función racional. Esto asegura, por tanto, que D es racional. Así, se verifica (b). $\square$

Bibliografía

[1] Nicola Arcozzi and Richard Rochberg. The Hardy space from an engineer's perspective, 2020. https://arxiv.org/abs/2009.12707.

[2] John B. Conway. *Functions of One Complex Variable I.* Springer (Graduate Texts in Mathematics 11), 1978.

[3] John B. Conway. *Functions of One Complex Variable II.* Springer (Graduate Texts in Mathematics 159), 1995.

[4] Peter L. Duren. *Theory of H^p Spaces.* Dover Publications (Pure and Applied Mathematics 38), 1970.

[5] Henry Helson. *Lectures on Invariant Subspaces.* Academin Press, 1964.

[6] John E. McCarthy. Pick's theorem - What's the Big Deal? *The American Mathematical Monthly*, 110(1):36–45, 2003.

[7] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, and S. Hamid Nawab. *Señales y Sistemas.* Pearson Educación, 2nd edition, 1998.

[8] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, Inc., 1987.