
UNA TEORÍA UNIFICADA
DE LAS
FUNCIONES ESPECIALES



ESCRITO POR

ENRIQUE MARTÍN GARCÍA MARTÍN



Una Teoría Unificada de las Funciones Especiales

Enrique Martín García Martín

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Dirigida por

Prof. Tutor Renato Álvarez Nodarse

Resumen

El objetivo de este trabajo es introducirnos a la teoría de las funciones especiales utilizando el método unificado propuesto por Nikiforov y Uvarov en los años 60 del siglo XX. Gran parte de los contenidos de este trabajo están basados en su libro “*Special Functions of Mathematical Physics: A unified Introduction with Applications*”, el cual nos servirá de guía y citaremos constantemente.

En el primer capítulo estudiaremos la ecuación diferencial de tipo hipergeométrico generalizada,

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}u = 0,$$

la cual conseguiremos reducir a una ecuación mas simple,

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0,$$

que llamaremos ecuación diferencial de tipo hipergeométrico. A partir de esta última, seguiremos un método que nos permitirá hallar una representación integral de sus soluciones. Además, daremos un procedimiento que nos permitirá obtener relaciones de recurrencia a tres términos y fórmulas de diferenciación para las soluciones de dicha ecuación.

En los capítulos siguientes, procederemos a estudiar dos grandes familias de soluciones de la ecuación de tipo hipergeométrico: las funciones de Bessel y las funciones hipergeométricas. Durante estos, nos valdremos de los procedimientos estudiados en el capítulo 1 para hallar diversas propiedades de dichas funciones, como por ejemplo: su representación integral, relaciones de recurrencia, fórmulas de diferenciación, etcétera.

Abstract

The objective of this work is to introduce us to the theory of special functions using the unified method proposed by Nikiforov and Uvarov in the 1960s. Many of the contents of this work are based on the book “*Special Functions of Mathematical Physics: A unified Introduction with Applications*”, which will serve as a guide and we will constantly quote.

In the first chapter we will study the generalized differential equation of hypergeometric type,

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}u = 0,$$

which we will be able to reduce to a simpler equation,

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0,$$

which we will call the differential equation of hypergeometric type. From the latter, we follow a method that will allow us to find an integral representation of the solutions. In addition, we will give a procedure that will allow us to obtain recurrence relations to three terms and differentiation formulas for the solutions of said equation.

In the following chapters, we will proceed to study two large families of the solutions of equation of hypergeometric type: the Bessel functions and the hypergeometric functions. During this chapter, we will use the procedures discussed in Chapter 1 to find various properties of these functions, such as: its integral representation, recurrence relations, differentiation formulas, etc.

Índice general

1. Fundamentos de la teoría de funciones especiales	1
1.1. Ecuación diferencial de tipo hipergeométrico	2
1.2. Polinomios de tipo hipergeométrico	5
1.3. Representación integral	8
1.4. Relaciones de recurrencia y fórmulas de diferenciación	12
2. Funciones de Bessel	23
2.1. Ecuación diferencial de Bessel	24
2.2. Propiedades básicas	28
2.2.1. Relaciones de recurrencia y fórmulas de diferenciación	28
2.2.2. Prolongación analítica y fórmulas asintóticas	31
2.2.3. Desarrollo en serie de potencias	32
2.3. Clases especiales de funciones de Bessel	34
2.3.1. Funciones de Bessel de segunda especie	34
2.3.2. Funciones de Bessel cuyo orden es la mitad de un entero impar. Polinomios de Bessel.	36
3. Funciones hipergeométricas	39
3.1. Las ecuaciones de tipo hipergeométrico y sus soluciones	40
3.1.1. Reducción a la forma canónica	40
3.1.2. Construcción de soluciones particulares	41
3.1.3. Prolongación analítica	48
3.2. Propiedades básicas de funciones de tipo hipergeométrico	49
3.2.1. Relaciones de recurrencia	50

3.2.2. Series de potencias	52
Conclusiones	55
Bibliografía	57

Fundamentos de la teoría de funciones especiales

Esquema

1.1. Ecuación diferencial de tipo hipergeométrico	2
1.2. Polinomios de tipo hipergeométrico	5
1.3. Representación integral	8
1.4. Relaciones de recurrencia y fórmulas de diferenciación .	12

1.1 | Ecuación diferencial de tipo hipergeométrico

Definición 1.1. Llamaremos ecuación diferencial de tipo hipergeométrico generalizada a

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}u = 0, \quad (1.1.1)$$

donde $\sigma(z)$ y $\tilde{\sigma}(z)$ son polinomios de grado ≤ 2 , y $\tilde{\tau}(z)$ es un polinomio de grado ≤ 1 . Supondremos que z y los coeficientes de $\sigma(z)$, $\tilde{\sigma}(z)$ y $\tilde{\tau}(z)$ pueden tomar cualquier valor real o complejo.

En esta sección daremos un método para reducir la ecuación (1.1.1) a una ecuación equivalente, pero más simple de estudiar. Para ello probemos lo siguiente:

Proposición 1.2 ([6], §1). Dada la ecuación diferencial de tipo hipergeométrico generalizada, las transformaciones de la forma $u = \phi(z)y$, donde $\phi(z)$ satisface

$$\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = \frac{\pi(z)}{\sigma(z)}, \quad (1.1.2)$$

con un polinomio lineal arbitrario $\pi(z)$, no cambian el tipo de ecuación.

Demostración. Tomamos $u = \phi(z)y$, para una cierta función $\phi(z)$. Tras este cambio, tenemos

$$y'' + \left(2\frac{\phi'}{\phi} + \frac{\tilde{\tau}}{\sigma}\right)y' + \left(\frac{\phi''}{\phi} + \frac{\phi'}{\phi}\frac{\tilde{\tau}}{\sigma} + \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^2}\right)y = 0. \quad (1.1.3)$$

Para evitar que (1.1.3) sea más complicado que (1.1.1), pediremos que el coeficiente de y' tenga la forma $\tau(z)/\sigma(z)$, donde $\tau(z)$ es un polinomio de grado ≤ 1 . De este razonamiento se deriva la condición (1.1.2), donde

$$\pi(z) = \frac{1}{2}(\tau(z) - \tilde{\tau}(z)),$$

es un polinomio de grado ≤ 1 .

Como

$$\frac{\phi''}{\phi} = \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)' + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)' + \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^2,$$

la ecuación (1.1.3) toma la forma

$$y'' + \frac{\tau(z)}{\sigma(z)}y' + \frac{\bar{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}y = 0, \quad (1.1.4)$$

donde

$$\tau(z) = \tilde{\tau}(z) + 2\pi(z), \quad (1.1.5)$$

$$\bar{\sigma}(z) = \tilde{\sigma}(z) + \pi^2(z) + \pi(z)[\tilde{\tau}(z) - \sigma'(z)] + \pi'(z)\sigma(z).$$

Las funciones $\tau(z)$ y $\bar{\sigma}(z)$ son polinomios de grado ≤ 1 y 2 , respectivamente. Por lo tanto, (1.1.4) es una ecuación del mismo tipo que (1.1.1). \square

Ahora, para que (1.1.4) sea lo más simple posible, elegiremos los coeficientes de $\pi(z)$ de modo que $\bar{\sigma}(z)$ sea divisible por $\sigma(z)$, es decir

$$\bar{\sigma}(z) = \lambda\sigma(z), \quad (1.1.6)$$

donde λ es una constante. Esto es posible ya que si igualamos los coeficientes de potencias de z en ambos lados de (1.1.6), obtenemos tres ecuaciones en tres incógnitas, la constante λ y los dos coeficientes de $\pi(z)$. En consecuencia (1.1.4) se puede reducir a la forma

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0. \quad (1.1.7)$$

Definición 1.3. *A partir de ahora nos referiremos a*

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0$$

como una ecuación de tipo hipergeométrico, y sus soluciones como funciones de tipo hipergeométrico.

Pasemos a calcular $\pi(z)$ y λ . Para ello reescribamos (1.1.6) en la forma

$$\pi^2 + (\tilde{\tau} - \sigma')\pi + \tilde{\sigma} - k\sigma = 0,$$

donde

$$k = \lambda - \pi'(z). \quad (1.1.8)$$

Asumiendo que conocemos k , al resolver la ecuación cuadrática para $\pi(z)$ se obtiene

$$\pi(z) = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma}. \quad (1.1.9)$$

Como $\pi(z)$ es un polinomio, la expresión bajo el signo de la raíz cuadrada debe ser el cuadrado de un polinomio. Esto es posible solo si su discriminante es cero. Por tanto obtenemos una ecuación, en general cuadrática, para k .

Después de hallar k , obtenemos $\pi(z)$ de (1.1.9), y luego $\phi(z)$, $\tau(z)$ y λ usando (1.1.2), (1.1.5) y (1.1.8). Está claro que la reducción de (1.1.1) a una ecuación de tipo hipergeométrico se puede realizar de varias formas correspondientes a diferentes elecciones de k y del signo \pm en la fórmula (1.1.9).

En definitiva, esta transformación nos permite reemplazar el estudio de la ecuación original (1.1.1) por el estudio de la ecuación más simple (1.1.7).

1.1. Ecuación diferencial de tipo hipergeométrico

Observación 1.4. *Tengamos en cuenta las siguientes observaciones.*

1. *A partir de ahora consideraremos solo los casos en los que $\sigma(z)$ en (1.1.1) y (1.1.7) no tienen una raíz doble. En realidad, si $\sigma(z)$ tiene una raíz doble, es decir, $\sigma(z) = (z - a)^2$ la ecuación (1.1.1) se puede transformar en*

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{2 - s\tilde{\tau}(a + 1/s)}{s} \frac{du}{ds} + \frac{s^2\tilde{\sigma}(a + 1/s)}{s^2}u = 0 \quad (1.1.10)$$

por la sustitución $z - a = 1/s$.

Dado que $s\tilde{\tau}(a+1/s)$ y $s^2\tilde{\sigma}(a+1/s)$ son polinomios en s de grado como mucho 1 y 2, respectivamente, (1.1.10) es una ecuación de la forma (1.1.1) con $\sigma(s) = s$, que no tiene raíz doble. Esto será de interés, por ejemplo, cuando hablemos de forma canónica, en el capítulo 3, para el caso $\text{grado}(\sigma(z)) = 2$.

2. *No es posible transformar (1.1.1) en la forma (1.1.7) si $\sigma(s) = 1$ y $(\tilde{\tau}/2)^2 - \tilde{\sigma}$ es lineal. En este caso, podemos transformar (1.1.1) en una forma más simple tomando $\pi(z)$ en (1.1.2) para que $\tau(z)$ sea cero. Entonces $\bar{\sigma}(z)$ será lineal y (1.1.4) tomará la forma*

$$y'' + (az + b)y = 0. \quad (1.1.11)$$

Una transformación lineal $s = az + b$ transforma (1.1.11) en un caso especial de

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{1 - 2\alpha}{a} \frac{dy}{ds} + \left[(\beta\gamma s^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2\gamma^2}{s^2} \right] y = 0, \quad (1.1.12)$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \nu$ son constantes. Las soluciones de (1.1.12) se pueden expresar en términos de funciones de Bessel. Es interesante comparar la ecuación (1.1.12) con la que aparece en la Observación 2.2 del capítulo 2.

A continuación, veamos un par de propiedades de las funciones de tipo hipergeométrico.

Proposición 1.5 ([6], §2). *Todas las derivadas de funciones de tipo hipergeométrico son siempre de tipo hipergeométrico. Es decir, las funciones $v_n(z) = y^{(n)}(z)$, donde $y^{(n)}$ denota la n -ésima derivada de una función de tipo hipergeométrico y , son solución de la ecuación*

$$\sigma(z)v_n'' + \tau_n(z)v_n' + \mu_n v_n = 0, \quad (1.1.13)$$

donde

$$\tau_n(z) = \tau(z) + n\sigma'(z), \quad \mu_n = \lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$$

Demostración. Para el caso $n = 1$, diferenciamos (1.1.7). Es fácil ver que $v_1(z) = y'(z)$ satisface la ecuación

$$\sigma(z)v_1'' + \tau_1(z)v_1' + \mu_1 v_1 = 0. \quad (1.1.14)$$

donde

$$\begin{aligned} \tau_1(z) &= \tau(z) + \sigma'(z), \\ \mu_1 &= \lambda + \tau'(z). \end{aligned}$$

Dado que $\tau_1(z)$ es un polinomio de grado ≤ 1 , y μ_1 es independiente de z , la ecuación (1.1.14) es una ecuación de tipo hipergeométrico. Tras este caso, el resultado se obtiene inmediatamente por inducción. \square

Proposición 1.6 ([6], §2). *Cada solución de (1.1.14), con $\lambda \neq 0$, es la derivada de una solución de (1.1.7).*

Demostración. Sea $v_1(z)$ una solución de (1.1.14). Si $v_1(z)$ va a ser la derivada de una solución $y(z)$ de (1.1.7), estas funciones deben estar relacionadas de la siguiente manera:

$$y(z) = -\frac{1}{\lambda}[\sigma(z)v_1' + \tau(z)v_1].$$

Podemos demostrar que la función $y(z)$ definida por esta fórmula satisface (1.1.7), y que su derivada es $v_1(z)$. Tenemos

$$\lambda y' = -[\sigma(z)v_1'' + \tau_1(z)v_1' + \tau(z)v_1] = \lambda v_1,$$

es decir, $y' = v_1(z)$. Sustituyendo $v_1 = y'$ en la expresión original para $y(z)$, obtenemos (1.1.7) para $y(z)$. \square

Además, toda solución de (1.1.13) para $\mu_k \neq 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) puede ser representado en la forma $v_n(z) = y^{(n)}(z)$, donde $y(z)$ es una solución de (1.1.7).

1.2 | Polinomios de tipo hipergeométrico

Lo anterior nos permite construir una familia de soluciones particulares de (1.1.7) para un cierto λ dado. De hecho, cuando $\mu_n = 0$, la ecuación (1.1.13) tiene la solución particular $v_n(z) = cte$. Dado que $v_n(z) = y^{(n)}(z)$, esto significa que cuando

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$$

1.2. Polinomios de tipo hipergeométrico

la ecuación de tipo hipergeométrico tiene una solución particular de la forma $y(z) = y_n(z)$ que es un polinomio de grado a lo sumo n .

Definición 1.7. *A las soluciones polinómicas, $y(z) = y_n(z)$, las llamaremos polinomios de tipo hipergeométrico¹.*

Pasemos ahora a intentar encontrar los polinomios $y_n(z)$ explícitamente. Para ello multipliquemos (1.1.7) y (1.1.13) por funciones apropiadas $\rho(z)$ y $\rho_n(z)$ tales que

$$(\sigma\rho y')' + \lambda\rho y = 0, \quad (1.2.1)$$

$$(\sigma\rho_n v_n')' + \mu_n\rho_n v_n = 0. \quad (1.2.2)$$

donde $\rho(z)$ y $\rho_n(z)$ satisfacen

$$(\sigma\rho)' = \tau\rho, \quad (\sigma\rho_n)' = \tau_n\rho_n. \quad (1.2.3)$$

Ahora, usando la forma explícita de $\tau_n(z)$ podemos establecer fácilmente la conexión entre $\rho_n(z)$ y $\rho_0(z) \equiv \rho(z)$.

Tenemos

$$(\sigma\rho_n)'/\rho_n = \tau + n\sigma' = (\sigma\rho)'/\rho + n\sigma',$$

de donde

$$\rho_n'/\rho_n = \rho'/\rho + n\sigma'/\sigma,$$

y, consecuentemente,

$$\rho_n(z) = \sigma^n(z)\rho(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Como $\sigma\rho_n = \rho_{n+1}$ y $v_n'(z) = v_{n+1}(z)$, podemos reescribir (1.2.2) en la forma

$$\rho_n v_n = -\frac{1}{\mu_n}(\rho_{n+1} v_{n+1})'.$$

Por tanto, cuando $m < n$ obtenemos, sucesivamente

$$\begin{aligned} \rho_m v_m &= -\frac{1}{\mu_m}(\rho_{m+1} v_{m+1})' \\ &= \left(-\frac{1}{\mu_m}\right) \left(-\frac{1}{\mu_{m+1}}\right) (\rho_{m+2} v_{m+2})'' = \dots = \frac{A_m}{A_n} (\rho_n v_n)^{n-m}, \end{aligned}$$

donde

$$A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k, \quad A_0 = 1.$$

Podemos obtener ahora una forma explícita para los polinomios de tipo hipergeométrico. Si $y(z)$ es un polinomio de grado n , es decir $y = y_n(z)$, entonces

$$v_m(z) = y_n^{(m)}(z), \quad v_n(z) = y^{(n)}(z) = cte,$$

¹Estos polinomios $y_n(z)$ son las soluciones más sencillas de (1.1.7).

y obtenemos la siguiente expresión para $y_n^{(m)}(z)$:

$$y_n^{(m)}(z) = \frac{A_{mn}B_n}{\rho_m(z)}[\rho_n(z)]^{(n-m)},$$

donde

$$A_{mn} = A_m(\lambda) |_{\lambda=\lambda_n}, \quad B_n = \frac{1}{A_{nn}}y_n^{(n)}(z).$$

Por tanto, cuando $m = 0$, tenemos la siguiente definición:

Definición 1.8. *Llamaremos fórmula de Rodrigues a la siguiente representación explícita para los polinomios de tipo hipergeométrico*

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)}[\sigma^n(z)\rho(z)]^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.4)$$

Estas soluciones de (1.1.7) corresponden a los valores $\mu_n = 0$, es decir

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'', \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.5)$$

Además, una aplicación interesante de la fórmula de Rodrigues es que podemos obtener una fórmula explícita de los polinomios ortogonales clásicos a partir de ella. Aunque en este trabajo no estudiaremos dichos polinomios, es interesante dar una muestra de algunos de ellos:

$P_n(z)$	$H_n(z)$	$L_n^\alpha(z)$	$P_n^{\alpha,\beta}(z)$	$y_n(z)$
$\sigma(z)$	1	z	$1 - z^2$	z^2
$\tau(z)$	$-2z$	$-z + \alpha + 1$	$-(\alpha + \beta + 2)z + \beta - \alpha$	$2(z + 1)$
λ_n	$2n$	n	$n(n + \alpha + \beta + 1)$	$-n(n + 1)$
$\rho(z)$	e^{-z^2}	$z^\alpha e^{-z}$ $\alpha > -1$	$(1 - z)^\alpha(1 + z)^\beta$ $\alpha, \beta > -1$	$e^{-2/z}$
$\rho_n(z)$	e^{-z^2}	$z^{n+\alpha} e^{-z}$	$(1 - z)^{z+\alpha}(1 + z)^{n+\beta}$	$z^{2n} e^{-2/z}$

Cuadro 1.1: Ejemplos de polinomios ortogonales clásicos.

En dicha tabla podemos ver los valores de $\sigma(z)$, $\tau(z)$, λ_n , $\rho(z)$ y $\rho_n(z)$ para los polinomios de Hermite, Laguerre, Jacobi y Bessel (denotados por $H_n(z)$, $L_n^\alpha(z)$, $P_n^{\alpha,\beta}(z)$ e $y_n(z)$ respectivamente). En el capítulo 2, durante el estudio de las funciones de Bessel cuyo orden es la mitad de un entero impar (sección 2.3.2), aludiremos a los polinomios de Bessel. Para más información acerca de polinomios los ortogonales clásicos ver por ejemplo [1].

1.3 | Representación integral

Ahora trataremos de generalizar la fórmula de Rodrigues para encontrar soluciones de (1.1.7) para valores arbitrarios de λ . Para ello, escribiremos (1.2.4) en una forma diferente usando la fórmula integral de Cauchy para funciones analíticas,

$$y_n(z) = \frac{C_n}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^n(s)\rho(s)}{(s-z)^{n+1}} ds,$$

donde $C_n = B_n n! / (2\pi i)$, C es un contorno cerrado que rodea el punto $s = z$, y $\rho(z)$ es una solución de $(\sigma\rho)' = \tau\rho$.

Esta representación de una solución particular de (1.1.7) con $\lambda = \lambda_n$ nos permite intuir que cuando λ es arbitrario debemos buscar una solución particular de la forma

$$y(z) = y_\nu(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}} ds, \quad (1.3.1)$$

donde C_ν es una constante de normalización y está conectada con λ por una ecuación análoga a (1.2.5)

$$\lambda = -\nu\tau' - \frac{\nu(\nu-1)}{2}\sigma''. \quad (1.3.2)$$

Probamos que para una elección adecuada del contorno C , en general no cerrado, nuestra conjetura es correcta.

Teorema 1.9 ([6], §3). Sean $\rho(z)$ solución de la ecuación

$$[\sigma(z)\rho(z)]' = \tau(z)\rho(z),$$

ν una raíz de la ecuación $\lambda + \nu\tau' + \frac{1}{2}\nu(\nu-1)\sigma'' = 0$, y

$$u(z) = \int_C \frac{\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+1}} ds, \quad \rho_\nu(s) = \sigma^\nu \rho(s).$$

Entonces la ecuación de tipo hipergeométrico (1.1.7) tiene una solución particular de la forma

$$y(z) \equiv y_\nu(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)} u(z),$$

(donde C_ν es una constante de normalización) siempre que

1. al calcular $u'(z)$ y $u''(z)$ podamos intercambiar diferenciación con respecto a z e integración con respecto a s , es decir

$$u'(z) = (\nu+1) \int_C \frac{\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}} ds, \quad u''(z) = (\nu+1)(\nu+2) \int_C \frac{\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+3}} ds,$$

2. el contorno C se elija de modo que

$$\frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}} \Big|_{s_1}^{s_2} = 0, \quad (1.3.3)$$

donde s_1 y s_2 son los puntos finales de C .

Demostración. Obtengamos una ecuación diferencial para $u(z)$. Con este propósito, empecemos usando la ecuación de $\rho_\nu(s)$,

$$[\sigma(s)\rho_\nu(s)]' = \tau_\nu(s)\rho_\nu(s),$$

donde $\tau_\nu(s) = \tau(s) + \nu\sigma'(s)$ (comparar con (1.2.3)). Multiplicamos esta ecuación por $(s-z)^{-\nu-2}$, integramos ambos lados sobre C y luego integramos por partes:

$$\frac{\sigma(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}} \Big|_{s_1}^{s_2} + (\nu+2) \int_C \frac{\sigma(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+3}} ds = \int_C \frac{\tau_\nu(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}} ds$$

Por hipótesis, el primer sumando es 0. Desarrollemos $\sigma(s)$ y $\tau_\nu(s)$ en potencias de $s-z$:

$$\begin{aligned} \sigma(s) &= \sigma(z) + \sigma'(z)(s-z) + \frac{1}{2}\sigma''(z)(s-z)^2, \\ \tau_\nu(s) &= \tau_\nu(z) + \tau'_\nu(z)(s-z). \end{aligned}$$

Veamos que, usando las fórmulas para $u(z)$, $u'(z)$ y $u''(z)$ que podemos ver en el enunciado del teorema, obtenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu+1}\sigma(z)u''(z) + \frac{\nu+2}{\nu+1}\sigma'(z)u'(z) + \frac{\nu+2}{2}\sigma''(z)u(z) &= \\ \frac{1}{\nu+1}\tau_\nu(z)u'(z) + \tau'_\nu(z)u(z). \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Hallemos la expresión de cada sumando del lado izquierdo de la ecuación anterior. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu+1}\sigma(z)u''(z) &= (\nu+2)\sigma(z) \int_C \frac{\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+3}} ds, \\ \frac{\nu+2}{\nu+1}\sigma'(z)u'(z) &= (\nu+2)\sigma'(z) \int_C \frac{\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}} ds, \end{aligned}$$

y usando que $\frac{1}{2}\sigma''(z) = \frac{\sigma(s)}{(s-z)^2} - \frac{\sigma(z)}{(s-z)^2} - \frac{\sigma'(z)}{(s-z)}$

$$\begin{aligned} \frac{\nu+2}{2}\sigma''(z)u(z) &= (\nu+2) \int_C \left[\frac{\sigma(s)}{(s-z)^2} - \frac{\sigma(z)}{(s-z)^2} - \frac{\sigma'(z)}{(s-z)} \right] \frac{\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+1}} ds \\ &= (\nu+2) \left[\int_C \frac{\sigma(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+3}} ds - \sigma(z) \int_C \frac{\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+3}} ds - \sigma'(z) \int_C \frac{\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}} ds \right]. \end{aligned}$$

1.3. Representación integral

Luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu+1}\sigma(z)u''(z) + \frac{\nu+2}{\nu+1}\sigma'(z)u'(z) + \frac{\nu+2}{2}\sigma''(z)u(z) = \\ (\nu+2) \int_C \frac{\sigma(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+3}} ds = \int_C \frac{\tau_\nu(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}} ds. \end{aligned}$$

Hagamos lo mismo para los sumandos de la parte derecha de la ecuación (1.3.4).

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu+1}\tau_\nu(z)u'(z) = \int_C \frac{\tau_\nu(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}} ds - \tau'_\nu(z) \int_C \frac{\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+1}} ds, \\ \tau'_\nu(z)u(z) = \tau'_\nu(z) \int_C \frac{\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+1}} ds. \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{1}{\nu+1}\tau_\nu(z)u'(z) + \tau'_\nu(z)u(z) = \int_C \frac{\tau_\nu(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}} ds.$$

Si sustituimos ahora la forma explícita de $\tau_\nu(z)$ en (1.3.4), podemos escribir la ecuación anterior en la forma

$$\sigma(z)u'' + [2\sigma'(z) - \tau(z)]u' - (\nu+1) \left(\tau' + \frac{\nu-2}{2}\sigma'' \right) u = 0. \quad (1.3.5)$$

Ahora usamos (1.3.5) para obtener una ecuación para $y(z)$. Tenemos

$$(\sigma\rho y)' = (\sigma\rho)'y + \sigma\rho y',$$

de donde se sigue que

$$\sigma\rho y' = (\sigma\rho y)' - \tau\rho y = C_\nu[(\sigma u)' - \tau u].$$

Después de diferenciar y usar (1.3.5), obtenemos

$$\begin{aligned} (\sigma\rho y')' &= C_\nu[(\sigma u)'' - (\tau u)'] = C_\nu[\sigma u'' + (2\sigma' - \tau)u' + (\sigma'' - \tau')u] \\ &= C_\nu \left[(\nu+1) \left(\tau' + \frac{\nu-2}{2}\sigma'' \right) + (\sigma'' - \tau') \right] u. \end{aligned}$$

De lo anterior y (1.3.2), obtenemos

$$(\sigma\rho y')' = -\lambda\rho y.$$

Esta ecuación es la misma que (1.2.1), que es equivalente a (1.1.7). \square

Observemos que la hipótesis (1.3.3) del teorema se cumplirá, en particular, si los extremos de C se eligen de modo que $\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)/(s-z)^{\nu+2}$ sea cero en ambos, es decir

$$\left. \frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}} \right|_{s=s_1, s_2} = 0. \quad (1.3.6)$$

Consideremos algunas formas posibles de C para las que se satisface (1.3.6).

1. Sea s_0 una raíz de la ecuación $\sigma(s) = 0$. Si $\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)|_{s=s_0} = 0$, entonces un extremo del contorno se puede tomar en $s = s_0$.
2. Si $\text{Re}(\nu + 2) < 0$, se puede tomar un extremo del contorno en $s = z$.
3. También podemos tomar un extremo del contorno en $s = \infty$ si

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}} = 0.$$

Observación 1.10. *Podemos entonces, gracias a la hipótesis (1.3.3), construir muchas soluciones particulares de una ecuación de tipo hipergeométrico, correspondientes a diferentes contornos C y diferentes valores de ν .*

Al construir soluciones de una ecuación de tipo hipergeométrico, nos limitaremos a contornos simples: líneas rectas o segmentos de líneas rectas, para los cuales s_1 y s_2 verifican (1.3.6). Los contornos de este tipo se pueden encontrar, en general, solo bajo ciertas restricciones sobre los coeficientes de la ecuación diferencial. Además, podremos aplicar los resultados anteriores a casos más generales utilizando la prolongación analítica.

Definición 1.11. *Sea $f(z)$ en un conjunto E perteneciente a una región D . Si $F(z)$ es analítica en D y coincide con $f(z)$ en E , entonces $F(z)$ es una continuación analítica de $f(z)$ en D .*

Proposición 1.12 (Principio de prolongación analítica. [8], §15). *Si E contiene al menos un punto límite de D , entonces $f(z)$ tiene una única prolongación analítica de E en D .*

Aquí y posteriormente, se entiende que las funciones analíticas son univaluadas; estas funciones a veces se denominan regulares. Si una función que tenemos que considerar no es univaluada, introducimos cortes a lo largo de las líneas adecuadas en el plano complejo para restringirnos a una rama de la función. Al evaluar expresiones de la forma $(z-a)^\alpha$, la expresión que se eleva a la potencia se considera que tiene el ángulo de menor valor absoluto compatible con el corte dado.

Dado que vamos a utilizar la representación integral (1.3.1) para soluciones de una ecuación de tipo hipergeométrico, necesitaremos, para la prolongación analítica de las soluciones de la ecuación, basarnos en el siguiente teorema sobre la analiticidad de una integral que depende de un parámetro:

1.4. Relaciones de recurrencia y fórmulas de diferenciación

Teorema 1.13 (Analiticidad de integrales paramétricas. [3], Capítulo 6). Sean C un arco de curva regular a trozos de longitud finita contenida en \mathbb{C} , y una región $D \in \mathbb{C}$. Si $f(s, z)$ es continua como una función de dos variables para $s \in C$ y $z \in D$, y además es una función analítica en D para cada $s \in C$ fijo, entonces la función

$$F(z) = \int_C f(s, z) ds \quad z \in D,$$

es analítica en D , y

$$F^{(n)}(z) = \int_C \frac{\partial^n f}{\partial z^n} ds \quad z \in D \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

Al estudiar representaciones integrales para varias funciones especiales, es conveniente usar el siguiente criterio clásico para la convergencia uniforme de integrales:

Proposición 1.14. Si la función continua $f(z, s)$ satisface $|f(z, s)| \leq \phi(s)$ para todo $s \in C$ y $z \in D$, y la integral $\int_C \phi(s) |ds|$ converge, entonces $\int_C f(z, s) ds$ converge uniformemente para z en D .

1.4 | Relaciones de recurrencia y fórmulas de diferenciación

Consideremos un método general para obtener varias relaciones para las funciones $y_\nu(z)$ definidas por la representación integral (1.3.1). Comenzamos por establecer relaciones lineales entre funciones de la forma

$$\phi_{\nu\mu}(z) = \int_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu+1}} ds,$$

que aparecen en las definiciones de $y_\nu(z)$ y sus derivados.

Proposición 1.15 ([6], §4). *Tres funciones $\phi_{\nu_i\mu_i}(z)$ cualesquiera están conectadas por una relación lineal*

$$\sum_{i=1}^3 A_i(z)\phi_{\nu_i\mu_i}(z) = 0,$$

con coeficientes polinomiales $A_i(z)$, siempre que las diferencias $\nu_i - \nu_j$ y $\mu_i - \mu_j$ sean enteras y

$$\frac{\sigma^{\nu_0+1}(s)\rho(z)}{(s-z)^{\mu_0}} s^m \Big|_{s_1}^{s_2} = 0, \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.4.1)$$

donde s_1 y s_2 son los extremos del contorno C , ν_0 es la ν_i con la parte real menor, y μ_0 es el μ_i con la mayor parte real.

Demostración. Consideremos la suma $\sum_{i=1}^3 A_i(z)\phi_{\nu_i\mu_i}(z)$. Mostraremos que los coeficientes $A_i = A_i(z)$ se pueden elegir de modo que esta combinación lineal sea cero. Para cualquier z fijo tenemos

$$\sum_i A_i\phi_{\nu_i\mu_i}(z) = \int_C \frac{\sigma^{\nu_0}\rho(z)}{(s-z)^{\mu_0+1}} P(s) ds,$$

donde $P(s)$ es el polinomio

$$P(s) = \sum_i A_i \sigma^{\nu_i-\nu_0}(s)(s-z)^{\mu_0-\mu_i}.$$

Dado que las diferencias $\nu_i - \nu_0$ y $\mu_0 - \mu_i$ son enteros no negativos, $P(s)$ es un polinomio en s . Elegimos la A_i de modo que

$$\frac{\sigma^{\nu_0}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu_0+1}} P(s) = \frac{d}{ds} \left[\frac{\sigma^{\nu_0+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu_0}} Q(s) \right], \quad (1.4.2)$$

donde $Q(s)$ es un polinomio (demostramos después que tal elección de los coeficientes es posible). De lo anterior se sigue que

$$\sum_i A_i\phi_{\nu_i\mu_i}(z) = \frac{\sigma^{\nu_0+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu_0}} Q(s) \Big|_{s_1}^{s_2}.$$

Si usamos la condición (1.4.1), que es similar a (1.3.3), entonces la parte derecha de la igualdad anterior se anula y, con los A_i determinados de esta manera, obtenemos la relación lineal

$$\sum_i A_i\phi_{\nu_i\mu_i}(z) = 0. \quad (1.4.3)$$

Demostremos que siempre es posible elegir los coeficientes de $Q(s)$ y los coeficientes A_i de modo que (1.4.2) se cumple. Para esto, reescribimos (1.4.2) usando la ecuación diferencial $(\sigma\rho)' = \tau_\nu\rho_\nu$ con $\rho_\nu(s) = \sigma^\nu(s)\rho(s)$, donde $\tau_\nu(s) = \tau(s) + \nu\sigma'(s)$,

1.4. Relaciones de recurrencia y fórmulas de diferenciación

obteniendo

$$P(s) = Q(s)[(s - z)\tau_{\nu_0}(s) - \mu_0\sigma(s)] + \sigma(s)(s - z)Q'(s). \quad (1.4.4)$$

Si comparamos los lados izquierdo y derecho de esta ecuación, es fácil ver que el grado de $Q(s)$ es dos menos que el grado de $P(s)$.

Igualando los coeficientes de las potencias de ambos miembros de (1.4.4), obtenemos un sistema de ecuaciones lineales homogéneas en los coeficientes de $Q(s)$ y A_i ($i = 1, 2, 3$) que aparecen en el expresión para $P(s)$. El número de ecuaciones es dos más que el número de coeficientes desconocidos de $Q(s)$. Por tanto, el número de incógnitas es al menos una más que el número de ecuaciones y, en consecuencia, uno de los coeficientes desconocidos puede asignarse arbitrariamente. En el caso de que $P(s)$ sea como máximo de grado 1, la relación que estamos considerando sigue siendo válida si tomamos $Q(s) = 0$. Tras resolver el sistema de ecuaciones, como los coeficientes de las incógnitas son polinomios en z , los coeficientes A_i que obtendremos son funciones racionales de z . Después de multiplicar (1.4.3) por el denominador común de $A_i(z)$ obtenemos una relación lineal con coeficientes polinomiales. \square

Observación 1.16. *Nótese que un papel fundamental en esta demostración lo juega el polinomio $Q(s)$, definido en (1.4.2). A lo largo de esta sección, usaremos reiteradamente dicho polinomio para determinar distintas relaciones de recurrencia. Es conveniente recordar que, a partir de la demostración anterior, el grado del polinomio $Q(s)$ es dos menos que el grado de $P(s)$.*

En las aplicaciones prácticas del método anterior, el grado de $P(s)$ a veces puede reducirse integrando por partes en algunas de las funciones $\phi_{\nu_i\mu_i}(z)$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \phi_{\nu\mu}(z) &= \int_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s - z)^{\mu+1}} ds \\ &= -\frac{1}{\mu} \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s - z)^\mu} \Big|_{s_1}^{s_2} + \frac{1}{\mu} \int_c \frac{\tau_{\nu-1}(s)\sigma^{\nu-1}(s)\rho(s)}{(s - z)^\mu} ds, \end{aligned}$$

donde $\tau_{\nu-1}(s) = \tau(s) + (\nu - 1)\sigma'(s)$. Suponiendo que el primer sumando de la expresión anterior sea cero, obtenemos

$$\phi_{\nu\mu}(z) = \frac{1}{\mu} \int_c \frac{\tau_{\nu-1}(s)\sigma^{\nu-1}(s)\rho(s)}{(s - z)^\mu} ds. \quad (1.4.5)$$

Corolario 1.17 ([6], §4). *Sean las funciones $\phi_{\nu,\nu-1}(z)$, $\phi_{\nu\nu}(z)$ y $\phi_{\nu,\nu+1}(z)$. Entonces existen unos coeficientes $A_i(z)$, con $i = 1, 2, 3$, tales que*

$$A_1(z)\phi_{\nu,\nu-1}(z) + A_2(z)\phi_{\nu\nu}(z) + A_3(z)\phi_{\nu,\nu+1}(z) = 0.$$

Demostración. Para encontrar esta relación entre las funciones $\phi_{\nu, \nu-1}(z)$, $\phi_{\nu\nu}(z)$ y $\phi_{\nu, \nu+1}(z)$, usaremos la proposición 1.15 demostrada anteriormente.

En este caso $\nu_0 = \nu$, $\mu_0 = \nu + 1$, $P(s) = A_1(s - z)^2 + A_2(s - z) + A_3$, $Q(s) = q_0$ (constante); la condición (1.4.1) para $\nu_0 = \nu$, $\mu_0 = \nu + 1$ y $m = 0$, es equivalente a

$$\left. \frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}} \right|_{s_1}^{s_2} = 0.$$

La ecuación (1.4.4) tiene la forma

$$A_1(s-z)^2 + A_2(s-z) + A_3 = q_0[(s-z)\tau_\nu(s) - (\nu+1)\sigma(s)].$$

Tomando $q_0 = 1$, desarrollando $\sigma(s)$ y $\tau_\nu(s)$ en potencias de $s - z$ en la ecuación anterior, y comparando coeficientes, obtenemos

$$\begin{aligned} A_1 &= \tau'_\nu - \frac{\nu+1}{2}\sigma'' = \tau' + \frac{\nu-1}{2}\sigma'', \\ A_2 &= \tau_\nu(z) - (\nu+1)\sigma'(z) = \tau(z) + \sigma'(z), \\ A_3 &= -(\nu+1)\sigma(z). \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Por lo tanto

$$A_1(z)\phi_{\nu, \nu-1}(z) + A_2(z)\phi_{\nu\nu}(z) + A_3(z)\phi_{\nu, \nu+1}(z) = 0, \tag{1.4.7}$$

donde los coeficientes $A_i(z)$ están definidos por (1.4.6). □

Gracias a este corolario podemos ver que, teniendo

$$\begin{aligned} y_\nu(z) &= \frac{C_\nu}{\rho(z)}\phi_{\nu\nu}(z), \quad \phi_{\nu, \nu+1}(z) = \frac{1}{\nu+1}\phi'_{\nu\nu}(z), \\ &[\sigma(z)\rho(z)]' = \tau(z)\rho(z), \end{aligned}$$

la relación (1.4.7) produce una representación integral conveniente para las derivadas de funciones de tipo hipergeométrico:

$$y'_\nu(z) = \frac{C_\nu^{(1)}}{\sigma(z)\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^\nu} ds, \tag{1.4.8}$$

donde

$$C_\nu^{(1)} = \left(\tau' + \frac{\nu-1}{2}\sigma'' \right) C_\nu$$

La generalización de la relación (1.4.8) nos permite obtener una representación integral conveniente para las derivadas de cualquier orden de funciones de tipo hipergeométrico.

1.4. Relaciones de recurrencia y fórmulas de diferenciación

De hecho, (1.4.8) se puede interpretar de la siguiente manera: una representación integral para la primera derivada de una función de tipo hipergeométrico

$$y_\nu(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}} ds = \frac{C_\nu}{\rho(z)} \phi_{\nu\nu}(z), \quad (1.4.9)$$

se puede obtener de la representación anterior reemplazando $\phi_{\nu\nu}(z)$ por $\phi_{\nu,\nu-1}(z)$, $\rho(z)$ por $\rho_1(z) = \sigma(z)\rho(z)$, y multiplicar por el factor adicional $\tau' + \frac{\nu-1}{2}\sigma''$. Siguiendo el mismo razonamiento tenemos entonces que

$$y_\nu^{(k)}(z) = \frac{C_\nu^{(k)}}{\sigma^k(z)\rho(z)} \phi_{\nu,\nu-k}(z), \quad (1.4.10)$$

donde $y_\nu^{(k)}$ denota la k -ésima derivada de y_ν y

$$\begin{aligned} C_\nu^{(k)} &= \left(\tau'_{k-1} + \frac{\nu-k}{2}\sigma'' \right) C_\nu^{(k-1)} = \left(\tau' + \frac{\nu+k-2}{2}\sigma'' \right) C_\nu^{(k-1)} \\ &= \prod_{s=0}^{k-1} \left(\tau' + \frac{\nu+s-1}{2}\sigma'' \right) C_\nu. \end{aligned}$$

Si usamos (1.4.10) y la proposición demostrada anteriormente, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.18 ([6], §4). *Sean tres funciones $y_{\nu_i}^{(k_i)}(z)$ cualesquiera definidas por (1.4.10). Entonces, siempre que las diferencias $\nu_i - \nu_j$ sean enteras y se cumpla que*

$$\frac{\sigma^{\nu_0+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu_0+1}} s^m \Big|_{s_1}^{s_2} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

se tiene que las funciones $y_{\nu_i}^{(k_i)}(z)$ están conectadas por una relación lineal de la forma

$$\sum_{i=1}^3 A_i(z) y_{\nu_i}^{(k_i)}(z) = 0$$

con coeficientes polinomiales $A_i(z)$.

Aquí s_1 y s_2 son los puntos finales de C ; ν_0 es la ν_i de la parte real más pequeña; y μ_0 es la ν_i de mayor parte real.

Observación 1.19. *Conviene remarcar que, los coeficientes $A_i(z)$ de que obtenemos en el Teorema 1.18, no son necesariamente los mismos que los que obtenemos de la Proposición 1.15.*

Observemos que las ecuaciones que determinan los coeficientes $A_i(z)$ son lineales y homogéneas en las incógnitas e independiente del contorno C utilizado para definir $y_\nu(z)$. En consecuencia, dos funciones $y_\nu(z)$ de tipo hipergeométrico que difieren sólo por factores independientes de ν y por la elección de C satisfarán relaciones del tipo considerado con los mismos coeficientes.

Nótese que el teorema anterior nos asegura la existencia de los coeficientes A_i , con $i = 1, 2, 3$, pero no nos da una expresión explícita de estos. Aun así, haciendo uso de (1.4.6) y (1.4.10), podríamos obtener su expresión. Por ello, mostraremos a continuación tres ejemplos relevantes que son consecuencia directa del teorema anterior. Dada la importancia de dichos ejemplos por sus aplicaciones prácticas, los probaremos independientemente calculando en cada caso los valores explícitos de los coeficientes A_i , con $i = 1, 2, 3$.

Teorema 1.20 ([12], sección 2, y [4], corolario 3.11). *Dadas las funciones $y_{\nu+1}(z)$, $y_\nu(z)$ e $y_{\nu-1}(z)$, existen unos coeficientes A_i , con $i = 1, 2, 3$, tales que*

$$A_1 y_{\nu+1}(z) + A_2(z) y_\nu(z) + A_3 y_{\nu-1}(z) = 0. \quad (1.4.11)$$

Demostración. Para obtener (1.4.11) usaremos las siguientes representaciones integrales de dichas funciones:

$$y_\nu(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^\nu(s) \rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}} ds = \frac{C_\nu}{\rho(z)} \frac{1}{\nu} \int_C \frac{\tau_{\nu-1}(s) \sigma^{\nu-1}(s) \rho(s)}{(s-z)^\nu} ds \quad (1.4.12)$$

$$\begin{aligned} y_{\nu+1}(z) &= \frac{C_{\nu+1}}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^{\nu+1}(s) \rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}} ds, \\ &= \frac{C_{\nu+1}}{\rho(z)} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \int_C \frac{\sigma^{\nu-1}(s) [\tau'_\nu \sigma(s) + \tau_\nu(s) \tau_{\nu-1}(s)] \rho(s)}{(s-z)^\nu} ds, \end{aligned}$$

$$y_{\nu-1}(z) = \frac{C_{\nu-1}}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^{\nu-1}(s) \rho(s)}{(s-z)^\nu} ds. \quad (1.4.13)$$

Entonces podemos escribir el lado izquierdo de (1.4.11) en la forma

$$A_1 y_{\nu+1}(z) + A_2 y_\nu(z) + A_3 y_{\nu-1}(z) = \frac{1}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^{\nu-1}(s) \rho(s)}{(s-z)^\nu} P(s) ds,$$

donde

$$P(s) = \frac{A_1 C_{\nu+1}}{\nu(\nu+1)} [\tau'_\nu \sigma(s) + \tau_\nu(s) \tau_{\nu-1}(s)] + \frac{A_2 C_\nu}{\nu} \tau_{\nu-1}(s) + A_3 C_{\nu-1}.$$

1.4. Relaciones de recurrencia y fórmulas de diferenciación

Si desarrollamos $\sigma(s)$ y $\tau_\nu(s)$ en potencias de $s - z$,

$$\begin{aligned}\sigma(s) &= \sigma(z) + \sigma'(z)(s - z) + \frac{1}{2}\sigma''(z)(s - z)^2, \\ \tau_\nu(s) &= \tau_\nu(z) + \tau'_\nu(z)(s - z),\end{aligned}$$

podemos observar que $P(s)$ es de grado 2 y, por tanto, $Q(s)$ (ver observación 1.16) tiene que ser una constante. Teniendo en cuenta que buscamos los coeficientes A_i tales que

$$\frac{\sigma^{\nu-1}(s)\rho(s)}{(s - z)^\nu} P(s) = \frac{d}{ds} \left[\frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s - z)^{\nu-1}} Q(s) \right],$$

tenemos entonces que

$$P(s) = [\tau_{\nu-1}(s)(s - z) - (\nu - 1)\sigma(s)] Q(s).$$

Por tanto, si igualamos los coeficientes de las potencias de $s - z$ en ambas expresiones de $P(s)$, podemos obtener un sistema de tres ecuaciones con incógnitas A_1, A_2, A_3 y $Q(s) = q_0$. Dado que podemos elegir el valor de una, para un determinado valor de q_0 obtenemos los valores de $A_i, i = 1, 2, 3$, siguientes:

$$A_1 = (\nu + 1)\tau'_{\frac{\nu}{2}-1}\tau'_{\nu-1}\tau'_{(\nu-1)/2}\frac{C_\nu}{C_{\nu+1}},$$

$$\begin{aligned}A_2(z) &= -\tau'_{\frac{\nu}{2}-1}\tau'_{\nu-1/2} \left[\tau'\tau_\nu + \nu\tau'_{\nu-1}\sigma' - \tau\sigma'' \right] \\ &= -\tau'_{\frac{\nu}{2}-1}\tau'_{\nu-\frac{1}{2}} \left[\tau'_\nu\tau'_{\nu-1}z + \tau'\tau_{2\nu}(0) - \tau_{\nu(1-\nu)}(0)\sigma'' \right],\end{aligned}$$

$$A_3 = \tau'_{\frac{\nu}{2}-1}\tau'_\nu\frac{C_\nu}{C_{\nu-1}} \left[\tau'_{\nu-1} \left(\sigma'(0)\tau_{\nu-1}(0) - \sigma(0)\tau'_{\nu-1} \right) - \tau_{\nu-1}^2(0)\frac{\sigma''}{2} \right].$$

□

Teorema 1.21. *Dadas las funciones $y'_\nu(z), y_\nu(z)$ e $y_{\nu-1}(z)$, existen unos coeficientes A_i , con $i = 1, 2, 3$, tales que*

$$A_1(z)y'_\nu(z) + A_2(z)y_\nu(z) + A_3y_{\nu-1}(z) = 0. \quad (1.4.14)$$

Demostración. Para obtener (1.4.14) usaremos las representaciones integrales (1.4.8), (1.4.12) y (1.4.13).

Entonces podemos escribir el lado izquierdo de (1.4.14) en la forma

$$A_1 y'_\nu(z) + A_2 y_\nu(z) + A_3 y_{\nu-1}(z) = \frac{1}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^{\nu-1}(s)\rho(s)}{(s-z)^\nu} P(s) ds,$$

donde

$$P(s) = A_1 C_\nu \frac{\tau'_{(\nu-1)/2}}{\sigma(z)} \sigma(s) + A_2 \frac{C_\nu}{\nu} \tau_{\nu-1}(s) + A_3 C_{\nu-1}.$$

Desarrollando $\sigma(s)$ y $\tau_\nu(s)$ en potencias de $s-z$, podemos observar que $P(s)$ es de grado 2 y, por tanto, $Q(s)$ (ver observación 1.16) tiene que ser una constante. Por el mismo razonamiento que en la demostración del teorema anterior, tenemos que

$$P(s) = [\tau_{\nu-1}(s)(s-z) - (\nu-1)\sigma(s)] Q(s).$$

Por tanto, si igualamos los coeficientes de las potencias de $s-z$ en ambas expresiones de $P(s)$, podemos obtener un sistema de tres ecuaciones con incógnitas A_1, A_2, A_3 y $Q(s) = q_0$. Dado que podemos elegir el valor de una, para un determinado valor de q_0 obtenemos los valores de $A_i, i = 1, 2, 3$, siguientes:

$$A_1(z) = \tau'_{\frac{\nu}{2}-1} \tau'_{\nu-1} \sigma(z),$$

$$A_2(z) = -\frac{\nu}{2} \tau'_{\frac{\nu}{2}-1} \tau'_{\nu-1} \left(\sigma'' z + 2\sigma'(0) - \sigma'' \frac{\tau_{\nu-1}(0)}{\tau'_{\nu-1}} \right),$$

$$A_3 = -\frac{C_\nu}{C_{\nu-1}} \tau'_{\frac{\nu}{2}-1} \left[\tau_{\nu-1}^2(0) \frac{\sigma''}{2} + \tau'_{\nu-1} (\sigma(0)\tau'_{\nu-1} - \sigma'(0)\tau_{\nu-1}(0)) \right].$$

□

Teorema 1.22 ([6], §4). *Dadas las funciones $y'_\nu(z)$, $y_{\nu+1}(z)$ e $y_\nu(z)$, existen unos coeficientes A_i , con $i = 1, 2, 3$, tales que*

$$A_1(z)y'_\nu(z) + A_2 y_{\nu+1}(z) + A_3(z)y_\nu(z) = 0. \tag{1.4.15}$$

Demostración. Para obtener (1.4.15) usamos las representaciones integrales (1.4.8) y (1.4.9) para $y'_\nu(z)$ e $y_\nu(z)$, y una transformación preliminar de $y_{\nu+1}(z)$, usando (1.4.5). Entonces podemos escribir el lado izquierdo de (1.4.15) en la forma

$$A_1 y'_\nu(z) + A_2 y_{\nu+1}(z) + A_3 y_\nu(z) = \frac{1}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}} P(s) ds,$$

1.4. Relaciones de recurrencia y fórmulas de diferenciación

donde

$$P(s) = \left[A_1 \frac{C_\nu \tau'_{\frac{\nu-1}{2}}}{\sigma(z)} (s-z) + A_2 \frac{C_{\nu+1} \tau_\nu(s)}{\nu+1} + A_3 C_\nu \right].$$

Dado que $P(s)$ es un polinomio lineal, $Q(s) = 0$ y, en consecuencia

$$A_1 \frac{C_\nu \tau'_{\frac{\nu-1}{2}}}{\sigma(z)} (s-z) + A_2 \frac{C_{\nu+1} \tau_\nu(s)}{\nu+1} + A_3 C_\nu = 0.$$

Para determinar A_1 , A_2 y A_3 a partir de esta ecuación, es conveniente tomar $A_1 = \tau'_\nu \sigma(z)$, desarrollar $\tau_\nu(s)$ en potencias de $s-z$ e igualar los coeficientes de potencias de $s-z$. Encontramos

$$A_2 = -(\nu+1) \tau'_{\frac{\nu-1}{2}} \frac{C_\nu}{C_{\nu+1}}, \quad A_3 = \tau'_{\frac{\nu-1}{2}} \tau_\nu(z).$$

□

Observación 1.23. Como consecuencia de este resultado podemos obtener la siguiente fórmula de diferenciación para los polinomios hipergeométricos

$$\sigma(z) y'_n(z) = \frac{\tau'_{\frac{n-1}{2}}}{\tau'_n} \left[\frac{B_n}{B_{n+1}} y_{n+1}(z) - \tau_n(z) y_n(z) \right],$$

que encontramos desarrollada en [12].

Observación 1.24. Es conveniente hacer notar que, usando la relación (1.4.11), podemos obtener la (1.4.14) directamente a partir de (1.4.15) y viceversa.

Podemos encontrar muchos más ejemplos de este tipo de relaciones en [4]. Precisamente por la diversidad de relaciones que se pueden sacar, cabría preguntarse por qué hemos elegido centrarnos en estas. El motivo no es otro que su relevancia. Como se puede ver en [2], estas relaciones son las más eficientes a la hora de encontrar soluciones numéricamente.

Además, las relaciones (1.4.14) y (1.4.15) tienen una cierta importancia en la física matemática, pues son lo que se denominan operadores escalera. En particular, se dice que (1.4.15) define un operador de subida (también llamado de creación) y, por otro lado, se dice que (1.4.14) define un operador de bajada (también llamado de destrucción o aniquilación). Un ejemplo de dicha importancia lo podemos encontrar en el ejemplo 1 de la §9 de [6] donde, a partir de los procedimientos vistos en este capítulo, podemos hallar las siguientes expresiones para el oscilador armónico y la energía:

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= C_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad x = \alpha \xi, \quad \alpha = (\hbar/(m\omega))^{\frac{1}{2}}, \\ E &= E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

donde

$$C_n = \sqrt{\frac{2^n}{\sqrt{\pi}n!}}$$

(Los cálculos para hallar C_n los podemos encontrar en [1], exactamente en 8.1.3). Usando entonces las relaciones (1.4.15) y (1.4.14), a partir de $\psi_n(x)$ podemos obtener las funciones $\psi_{n+1}(x)$ y $\psi_{n-1}(x)$ correspondientes a los estados de energía E_{n+1} y E_{n-1} .

1.4. Relaciones de recurrencia y fórmulas de diferenciación

Funciones de Bessel

Esquema

2.1. Ecuación diferencial de Bessel	24
2.2. Propiedades básicas	28
2.2.1. Relaciones de recurrencia y fórmulas de diferenciación	28
2.2.2. Prolongación analítica y fórmulas asintóticas	31
2.2.3. Desarrollo en serie de potencias	32
2.3. Clases especiales de funciones de Bessel	34
2.3.1. Funciones de Bessel de segunda especie	34
2.3.2. Funciones de Bessel cuyo orden es la mitad de un entero impar. Polinomios de Bessel.	36

2.1 | Ecuación diferencial de Bessel

Definición 2.1. Nos referiremos a la ecuación diferencial

$$z^2 u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)u = 0, \quad (2.1.1)$$

como la ecuación de Bessel, donde z es una variable compleja y el parámetro ν puede tener cualquier valor real o complejo. A sus soluciones las llamaremos funciones de Bessel de orden ν .

Observación 2.2. Se pueden obtener muchas otras ecuaciones diferenciales a partir de la ecuación de Bessel mediante cambios de variable. Un ejemplo es la ecuación de Lommel

$$v'' + \frac{1-2\alpha}{\xi} v' + \left[(\beta\gamma\xi^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2\gamma^2}{\xi^2} \right] v = 0,$$

que se utiliza ampliamente en aplicaciones; sus soluciones son

$$v(\xi) = \xi^\alpha u_\nu(\beta\xi^\gamma).$$

Aquí $u_\nu(z)$ es una función de Bessel de orden ν y α, β, γ son constantes.

La ecuación de Bessel (2.1.1) es el caso especial de la ecuación generalizada de tipo hipergeométrico para la cual $\sigma(z) = z$, $\tilde{\tau}(z) = 1$ y $\tilde{\sigma}(z) = z^2 - \nu^2$. Podemos ver que, al reducir (2.1.1) a una ecuación de tipo hipergeométrico, las posibles formas de $\phi(z)$ son $\phi(z) = z^{\pm\nu} e^{\pm iz}$, correspondiente a diferentes elecciones de signos en la fórmula (1.1.9) para $\pi(z)$ y diferentes valores de k (Los cálculos pueden encontrarse en [6], §1). Consideremos, por ejemplo, $\phi(z) = z^\nu e^{iz}$. Poniendo $u(z) = \phi(z)y(z)$, obtenemos una ecuación de tipo hipergeométrico,

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0, \quad (2.1.2)$$

donde

$$\sigma(z) = z, \quad \tau(z) = 2iz + 2\nu + 1, \quad \lambda = i(2\nu + 1), \quad \kappa = -\nu - \frac{1}{2},$$

$$\tau_\kappa(z) = 2iz + \nu + \frac{1}{2}, \quad \rho(z) = z^{2\nu} e^{2iz}, \quad \rho_\kappa(z) = z^{2\nu+\kappa} e^{2iz}, \quad C_\kappa = a_\nu (-1)^{\nu-\frac{1}{2}}.$$

Por tanto, usando el Teorema 1.9¹, una solución particular de la ecuación de Bessel se puede escribir en la forma

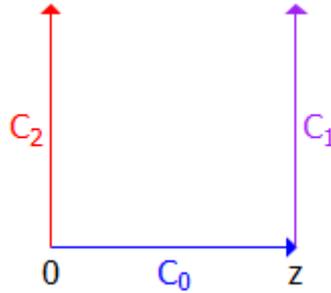
$$u_\nu(z) = \phi(z)y(z) = a_\nu z^{-\nu} e^{-iz} \int_C [s(z-s)]^{\nu-\frac{1}{2}} e^{2is} ds,$$

¹Para evitar confusiones hemos reemplazado ν por κ , ya que ν se ha utilizado en la ecuación de Bessel original.

donde a_ν donde a_ν es una constante de normalización, que determinaremos usando (2.1.13), y C se elige de modo que

$$s^{\nu+\frac{1}{2}}(z-s)^{\nu-\frac{3}{2}}e^{2is}\Big|_{s_1, s_2} = 0.$$

Sea $z > 0$, $\text{Re } \nu > 3/2$. Entonces los extremos del contorno se pueden tomar en $s_1 = 0$, $s_2 = z$. Alternativamente, C podría ir al infinito con $\text{Im } s \rightarrow +\infty$. Entonces C puede ser uno de los siguientes contornos



Obtenemos así las siguientes tres soluciones de la ecuación de Bessel:

$$u_\nu^{(0)}(z) = a_\nu z^{-\nu} e^{-iz} \int_{C_0} [s(z-s)]^{\nu-\frac{1}{2}} e^{2is}, \quad (2.1.3)$$

$$u_\nu^{(1)}(z) = a_\nu^{(1)} z^{-\nu} e^{-iz} \int_{C_1} [s(z-s)]^{\nu-\frac{1}{2}} e^{2is}, \quad (2.1.4)$$

$$u_\nu^{(2)}(z) = a_\nu^{(2)} z^{-\nu} e^{-iz} \int_{C_2} [s(z-s)]^{\nu-\frac{1}{2}} e^{2is}. \quad (2.1.5)$$

Para tener una rama univaluada de $[s(z-s)]^{\nu-\frac{1}{2}}$, tomamos $|\arg s(z-s)| < \pi$. Los contornos C_0 , C_1 , C_2 se pueden parametrizar mediante

$$\begin{aligned} s &= z(1+t)/2 \quad (-1 \leq t \leq 1), \\ s &= z(1+it/2) \quad (0 \leq t < \infty), \\ s &= izt/2 \quad (0 \leq t < \infty). \end{aligned}$$

Entonces (2.1.3)–(2.1.5) se convierten, respectivamente, en

$$u_\nu^{(0)}(z) = \frac{a_\nu}{2^{2\nu}} z^\nu \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{izt} dt = \frac{a_\nu}{2^{2\nu}} z^\nu \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(zt) dt, \quad (2.1.6)$$

$$u_\nu^{(1)}(z) = -\frac{a_\nu^{(1)}}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{i(z-\pi\frac{\nu}{2}-\frac{\pi}{4})} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{it}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} dt, \quad (2.1.7)$$

$$u_\nu^{(2)}(z) = \frac{a_\nu^{(2)}}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{-i(z-\pi\frac{\nu}{2}-\frac{\pi}{4})} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1-\frac{it}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} dt. \quad (2.1.8)$$

2.1. Ecuación diferencial de Bessel

De acuerdo con la condición $|\arg s(z-s)| < \pi$, los valores de $\arg(1 \pm \frac{1}{2}it)$ en (2.1.7) y (2.1.8) se toman con los valores absolutos más pequeños posibles.

Si tomamos las constantes $a_\nu, a_\nu^{(1)}, a_\nu^{(2)} \in \mathbb{R}$, y $a_\nu^{(2)} = -a_\nu^{(1)}$, vemos de (2.1.7) y (2.1.8) que cuando z y ν son reales, las funciones $u_\nu^{(1)}(z)$ y $u_\nu^{(2)}(z)$ son conjugados complejos. Es conveniente introducir una función que sea real para z real.

Proposición 2.3 ([6],§14). *La función*

$$u_\nu(z) = \frac{1}{2}[u_\nu^{(1)}(z) + u_\nu^{(2)}(z)], \quad (2.1.9)$$

es equivalente a $u_\nu^{(0)}(z)$ si tomamos

$$a_\nu^{(2)} = -a_\nu^{(1)} = 2a_\nu. \quad (2.1.10)$$

Demostración. Para demostrarlo basta con aplicar el teorema de Cauchy al contorno C , que es la unión de C_0, C_1 y C_2 . Si cerramos el contorno en ∞ , el teorema de Cauchy nos dice que

$$\begin{aligned} \int_C [s(z-s)]^{\nu-\frac{1}{2}} e^{2is} ds &= - \int_{C_2} [s(z-s)]^{\nu-\frac{1}{2}} e^{2is} ds \\ &+ \int_{C_0} [s(z-s)]^{\nu-\frac{1}{2}} e^{2is} ds + \int_{C_1} [s(z-s)]^{\nu-\frac{1}{2}} e^{2is} ds = 0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (2.1.10) y usando (2.1.3)–(2.1.5), obtenemos

$$u_\nu^{(0)}(z) = \frac{1}{2}[u_\nu^{(1)}(z) + u_\nu^{(2)}(z)], \quad (2.1.11)$$

como queríamos probar. \square

Definición 2.4. *Nos referiremos a la función $u_\nu^{(0)}(z)$, para una adecuada elección de a_ν , como la función de Bessel de primera especie, denotada por $J_\nu(z)$. A las funciones $u_\nu^{(1)}(z)$ y $u_\nu^{(2)}(z)$ con la normalización (2.1.10) las llamaremos funciones de Hankel de primera y segunda especie, denotadas por $H_\nu^{(1)}(z)$ y $H_\nu^{(2)}(z)$. Por (2.1.11), estas funciones están conectadas por la ecuación*

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)]. \quad (2.1.12)$$

Proposición 2.5 ([6],§14). Si elegimos a_ν tal que

$$\frac{a_\nu}{2^\nu} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) = 1, \quad (2.1.13)$$

la función $J_\nu(z)$ se puede expresar como la siguiente serie de potencias:

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}. \quad (2.1.14)$$

Demostración. Reemplazamos $\cos(z t)$ en (2.1.6) por su desarrollo en serie de potencias de $z t$ e intercambiando suma e integral, obteniendo

$$J_\nu(z) = \frac{a_\nu}{2^{2\nu}} z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} t^{2k} dt.$$

Calculemos la integral:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} t^{2k} dt &= 2 \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} t^{2k} dt \\ &= \int_0^1 (1-t)^{\nu-\frac{1}{2}} t^{k-\frac{1}{2}} dt = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2}) \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu + k + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2}) \sqrt{\pi} (2k)!}{2^{2k} k! \Gamma(\nu + k + 1)}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la fórmula de duplicación para la función gamma y la relación entre las funciones beta de Euler y gamma (Ver apéndice A de [6], fórmulas (3) y (10)). Por lo tanto tenemos

$$J_\nu(z) = \frac{a_\nu}{2^\nu} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}.$$

Pero, aplicando la hipótesis (2.1.13), obtenemos

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}.$$

□

2.2. Propiedades básicas

Observación 2.6. La condición (2.1.13) se toma para que la expresión de la serie de potencias sea lo más simple posible. Además, usando el valor de a_ν que se desprende de esta condición, podemos reescribir (2.1.6)-(2.1.8) como

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + 1/2)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(zt) dt, \quad (2.1.15)$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{z^\nu e^{i(z-\pi\frac{\nu}{2}-\frac{\pi}{4})}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{it}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} dt, \quad (2.1.16)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{z^\nu e^{-i(z-\pi\frac{\nu}{2}-\frac{\pi}{4})}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{it}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} dt. \quad (2.1.17)$$

Las representaciones anteriores se conocen como integrales de Poisson para las funciones de Bessel.

Observación 2.7. Otras representaciones útiles para las funciones de Hankel se obtienen de (2.1.16) y (2.1.17) reemplazando t por t/z :

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{z^\nu e^{i(z-\pi\frac{\nu}{2}-\frac{\pi}{4})}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{it}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} dt, \quad (2.1.18)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{z^\nu e^{-i(z-\pi\frac{\nu}{2}-\frac{\pi}{4})}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{it}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} dt. \quad (2.1.19)$$

2.2 | Propiedades básicas

2.2.1 | Relaciones de recurrencia y fórmulas de diferenciación

Las relaciones de recurrencia y las fórmulas de diferenciación, para funciones de Bessel, se pueden obtener usando el método que vimos en el primer capítulo (ver Teoremas 1.20, 1.21 y 1.22). Aplicando entonces (1.4.11), (1.4.15) y (1.4.14), con los coeficientes que obtuvimos en sus respectivas pruebas, obtenemos directamente el siguiente resultado:

Proposición 2.8. *Se tienen las siguientes relaciones de recurrencia para las funciones de Bessel:*

- $zu'_\nu + \left(zi + \frac{1}{2}\right)u_\nu - 2zu_{\nu-1} = 0,$
- $2z^2u_{\nu-1} - 2iz^2u_\nu - \frac{1}{2}\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)u_{\nu+1} = 0,$
- $2z^2u'_\nu - \left(2iz^2 - z\right)u_\nu - \left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)u_{\nu+1} = 0.$

Como se puede apreciar, estas relaciones resultan mas complejas que las que se suelen ver en la bibliografía. Esto se debe a que, como estos métodos los aplicábamos a las funciones y_κ , a la hora de obtener dichas expresiones para u_ν deberíamos efectuar el cambio $y_\kappa(z) = \phi(z)^{-1}u_\nu(z)$. Esto aumenta la dificultad de los cálculos y, por tanto, resulta más sencillo obtenerlas a partir de la siguiente representación integral:

$$u_\nu(z) = a_\nu z^{-\nu} e^{-iz} \int_C [s(z-s)]^{\nu-\frac{1}{2}} e^{2is} ds.$$

Proposición 2.9 ([6],§15). *Se tiene la siguiente relación entre las funciones $u_\nu(z), u'_\nu(z)$ y $u_{\nu-1}(z)$:*

$$\nu u_\nu(z) + zu'_\nu(z) - zu_{\nu-1}(z) = 0.$$

Demostración. Encontremos una relación de la forma

$$A_1(z)u'_\nu(z) + A_2(z)u_\nu(z) + A_3(z)u_{\nu-1}(z) = 0, \tag{2.2.1}$$

donde $A_i(z)$ son funciones racionales de z . Tenemos

$$\begin{aligned} & A_1(z)u'_\nu(z) + A_2(z)u_\nu(z) + A_3(z)u_{\nu-1}(z) \\ &= e^{-iz} z^{-\nu-1} \int_C P(s)[s(z-s)]^{\nu-\frac{3}{2}} e^{2is} ds, \end{aligned}$$

donde

$$P(s) = A_1 a_\nu \left[(-\nu - iz)s(z-s) + \left(\nu - \frac{1}{2}\right)zs \right] + A_2 a_\nu zs(z-s) + A_3 z^2 a_{\nu-1}.$$

2.2. Propiedades básicas

Para que se satisfaga (2.2.1), $A_1(z)$, $A_2(z)$ y $A_3(z)$ deben ser determinados por la condición

$$P(s)[s(z-s)]^{\nu-\frac{3}{2}}e^{2is} = \frac{d}{ds}[Q(s)[s(z-s)]^{\nu-\frac{1}{2}}e^{2is}],$$

donde $Q(s)$ es un polinomio. Como vimos en el capítulo 1, un coeficiente de $Q(s)$ se puede elegir arbitrariamente. En este caso, $Q(s)$ es una constante y podemos tomar $Q(s) = a_\nu$. Usando la condición en $P(s)$ y $Q(s)$, obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned} A_1 \left[(-\nu - iz)s(z-s) + \left(\nu - \frac{1}{2} \right) zs \right] + A_2 zs(z-s) + A_3 z^2 \frac{a_{\nu-1}}{a_\nu} \\ = 2is(z-s) + \left(\nu - \frac{1}{2} \right) (z-2s). \end{aligned}$$

Si usamos los valores de a_ν que corresponden a $J_\nu(z)$ y $H_\nu^{(1,2)}(z)$, obtenemos $a_{\nu-1}/a_\nu = (\nu - 1/2)/2$. La ecuación que determina A_i es válida para todo s . Por tanto, podemos encontrar A_i tomando un valor conveniente para s . Tomando, por ejemplo, $s = 0$, obtenemos $A_3 = 2/z$. El valor $s = z$ produce $A_1 = -2/z$. El coeficiente A_2 se encuentra fácilmente comparando los coeficientes de la potencia más alta de s : $A_2 = -2\nu/z^2$. Dejando que $u_\nu(z)$ represente a $J_\nu(z)$ o $H_\nu^{(1,2)}(z)$, obtenemos la relación

$$\frac{\nu}{z}u_\nu(z) + u'_\nu(z) = u_{\nu-1}(z), \quad (2.2.2)$$

que es equivalente a la relación que buscábamos. \square

Corolario 2.10 ([6],§15). *Se tiene la siguiente relación entre las funciones $u_{\nu+1}(z)$, $u_\nu(z)$ y $u_{\nu-1}(z)$:*

$$zu_{\nu+1}(z) - 2\nu u_\nu(z) + zu_{\nu-1}(z) = 0. \quad (2.2.3)$$

Demostración. Diferenciando (2.2.2), eliminando $u''_\nu(z)$, $u'_\nu(z)$ y $u'_{\nu-1}(z)$ usando la ecuación de Bessel y (2.2.2). Obtenemos entonces la relación

$$u_\nu(z) - \frac{2(\nu-1)}{z}u_{\nu-1}(z) + u_{\nu-2}(z) = 0,$$

que es equivalente a la relación que buscábamos. \square

Observación 2.11. *Las ecuaciones (2.2.2) y (2.2.3) se pueden transformar en*

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} [z^\nu u_\nu(z)] = z^{\nu-1} u_{\nu-1}(z), \quad -\frac{1}{z} \frac{d}{dz} [z^{-\nu} u_\nu(z)] = z^{-(\nu+1)} u_{\nu+1}(z).$$

Por tanto

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n [z^\nu u_\nu(z)] = z^{\nu-n} u_{\nu-n}(z), \quad \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n [z^{-\nu} u_\nu(z)] = z^{-(\nu+n)} u_{\nu+n}(z). \quad (2.2.4)$$

2.2.2 | Prolongación analítica y fórmulas asintóticas

Hemos definido $J_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$ y $H_\nu^{(2)}(z)$ solo para $z > 0$ y $\operatorname{Re} \nu > 3/2$. Ahora sea z un punto del plano complejo cortado a lo largo de $(-\infty, 0)$, es decir, con $|\arg z| < \pi$. Esta restricción hace que z^ν sea univaluada cuando ν no es un número entero. Al usar las representaciones integrales (2.1.15)–(2.1.17) podemos extender $J_\nu(z)$ y $H_\nu^{(1,2)}(z)$ a dominios más grandes tanto para z como para ν .

Proposición 2.12 ([6],§15). *La función $J_\nu(z)$ es una función analítica de z y ν para $|\arg z| < \pi$ y $\operatorname{Re} \nu > -1/2$.*

Demostración. La integral para $J_\nu(z)$ converge uniformemente en z y ν para $\operatorname{Re} \nu \geq -\frac{1}{2} + \delta$, $|z| \leq R$, con δ y R números positivos arbitrarios, porque

$$|(1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} \cos zt| \leq e^R (1 - t^2)^{\delta - 1}$$

y la integral $\int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\delta - 1} dt$ converge, luego se verifican las hipótesis de la Proposición 1.14. Por tanto, según el Teorema 1.13 la función $J_\nu(z)$ es una función analítica de z y ν para $|\arg z| < \pi$ y $\operatorname{Re} \nu > -1/2$. \square

Proposición 2.13 ([6],§15). *Las funciones $H_\nu^{(1,2)}(z)$ son analíticas en cada variable para $z \neq 0$, $|\arg z| < \pi$, $\operatorname{Re} \nu > -1/2$.*

Demostración. Las integrales para $H_\nu^{(1,2)}(z)$,

$$\int_0^\infty e^{-zt} t^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 \pm \frac{1}{2}it\right)^{\nu - \frac{1}{2}} dt,$$

son las integrales de Laplace

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt,$$

con $f(t) = t^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 \pm \frac{1}{2}it\right)^{\nu - \frac{1}{2}}$. La prolongación analítica y representación asintótica de integrales de Laplace de la forma

$$F(z, p, q) = \int_0^\infty e^{-zt} t^p (1 + at)^q dt$$

2.2. Propiedades básicas

se discuten en detalle en el Apéndice B de [6], en el ejemplo del Teorema 1. En nuestro caso, $p = q = \nu - \frac{1}{2}$, $a = \pm i/2$. Los resultados de este ejemplo nos muestran que las funciones de Hankel $H_\nu^{(1,2)}(z)$ son analíticas en cada variable para $z \neq 0$, $|\arg z| < \pi$, $\operatorname{Re} \nu > -1/2$. \square

Además, de las conclusiones del ejemplo citado en la prueba anterior, podemos obtener que las funciones $H_\nu^{(1,2)}(z)$ tienen la siguiente fórmula asintótica cuando $z \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} \nu > -1/2$ y $|\arg z| < \pi + \epsilon$:

$$H_\nu^{(1,2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{\pm i(z - \pi \frac{\nu}{2} - \frac{\pi}{4})} \left[\sum_{k=0}^{n-1} C_k \left(\pm \frac{i}{z}\right)^k + O\left(\frac{1}{z^n}\right) \right],$$

donde

$$C_k = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2} + k)}{2^k k! \Gamma(\nu + \frac{1}{2} - k)},$$

los signos + se aplican a $H_\nu^{(1)}$ y los signos - a $H_\nu^{(2)}$.

Usando la ecuación

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)} + H_\nu^{(2)}],$$

obtenemos una fórmula asintótica para $J_\nu(z)$:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k}{z^k} \cos \left[z - \frac{\pi}{2} \left(\nu - k + \frac{1}{2} \right) \right] + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{z^n}\right) \right].$$

Hemos considerado la continuación analítica de las funciones de Bessel para $z \neq 0$, $|\arg z| < \pi$ y $\operatorname{Re} \nu > -1/2$. La condición $\operatorname{Re} \nu > -1/2$ no es esencial, ya que cuando $\operatorname{Re} \nu \leq -1/2$ la prolongación analítica se puede obtener de la relación de recurrencia (2.2.3) con ν disminuido en 1. Mediante la fórmula de diferenciación (2.2.2) las derivadas de $J_\nu(z)$ y $H_\nu^{(1,2)}(z)$ son analíticas en z y en ν en la misma región que las funciones de Bessel. Por el principio de prolongación analítica, las prolongaciones analíticas de las funciones de Bessel aún satisfacen la ecuación de Bessel.

2.2.3 | Desarrollo en serie de potencias

Ya hemos obtenido la serie de potencias

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}, \quad (2.2.5)$$

para $z > 0$ real y $\operatorname{Re} \nu > 3/2$. Para establecer este desarrollo para valores arbitrarios de ν y z busquemos la región de analiticidad de (2.2.5) usando el siguiente teorema.

Teorema 2.14 ([9], teorema 2.3 del capítulo 2). Sea $f_k(z)$ analítica en una región D y sea la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z),$$

que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de D a $f(z)$. Luego en D :

1. $f(z)$ es analítica,
2. $f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$,
3. $\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de D .

Observación 2.15. La serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ convergerá uniformemente en D si hay un m tal que para cada $z \in D$ y $k > m$ tenemos

$$\left| \frac{f_k(z)}{f_{k-1}(z)} \right| \leq q < 1,$$

donde q es independiente de z y $|f_m(z)| \leq M$ para $z \in D$ (M , una constante). Este criterio clásico de convergencia uniforme se conoce como criterio de D'Alembert.

Demostremos que (2.2.5) converge uniformemente para z y ν en las regiones $0 < \delta \leq |z| \leq R$, $|\nu| \leq N$, donde R y N son números fijos arbitrariamente grandes. Será suficiente utilizar la siguiente estimación de la razón de dos términos sucesivos de la serie:

$$\left| \frac{u_k(z)}{u_{k-1}(z)} \right| = \frac{|z|^2}{4k|k + \nu|} \leq \frac{R^2}{4k(k - N)} \leq \frac{1}{4},$$

donde $k \geq \max(R^2, N+1)$. Dado que los términos de la serie son funciones analíticas en z y ν para $\delta \leq |z| \leq R$, $|\arg z| < \pi$ y $|\nu| \leq N$, la serie (2.2.5) representa una función analítica de z y ν para todo ν y $|\arg z| < \pi$.

En consecuencia, ambos lados de (2.2.5) son funciones analíticas en cada z y ν para todo ν y $|\arg z| < \pi$. Según el principio de prolongación analítica, (2.2.5) es válido en el dominio especificado de z y ν .

2.3 | Clases especiales de funciones de Bessel

2.3.1 | Funciones de Bessel de segunda especie

En la práctica, a menudo tratamos con soluciones de la ecuación de Bessel para $\nu \in \mathbb{R}$ y z positivo. No siempre es conveniente utilizar las funciones de Hankel, ya que toman valores complejos. Sin embargo², $H_\nu^{(2)}(z) = \overline{H_\nu^{(1)}(z)}$ en este caso, y

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2} [H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)] = \operatorname{Re} H_\nu^{(1)}(z).$$

Esto sugiere tomar la segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel como $\operatorname{Im} H_\nu^{(1)}(z)$, es decir

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{2i} [H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)]. \quad (2.3.1)$$

Las funciones $Y_\nu(z)$ se conocen como funciones de Bessel de segunda especie.

Podemos considerar $Y_\nu(z)$ definido por (2.3.1) para valores complejos arbitrarios de ν y z . La función $Y_\nu(z)$ es analítica en ν excepto para $\nu = n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) y analítica en z para $z \neq 0$, $|\arg z| < \pi$.

Enumeramos las propiedades básicas de $Y_\nu(z)$, que se derivan de las propiedades correspondientes de las funciones de Hankel.

1. $Y_\nu(z)$ expresado en términos de $J_\nu(z)$ y $J_{-\nu}(z)$:

$$Y_\nu(z) = \frac{\cos \pi\nu J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi\nu} \quad (\nu \neq n).$$

2. Fórmula asintótica para $Y_\nu(z)$ cuando $z \rightarrow +\infty$:

$$Y_\nu(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left[\sin\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{z}\right) \right].$$

3. Relación de recurrencia y fórmula de diferenciación:

$$\begin{aligned} Y_{\nu-1}(z) + Y_{\nu+1}(z) &= (2\nu/z)Y_\nu(z), \\ Y_{\nu-1}(z) - Y_{\nu+1}(z) &= 2Y'_\nu(z). \end{aligned}$$

²En la igualdad que sigue a esta anotación, se ha corregido una errata en el original [6].

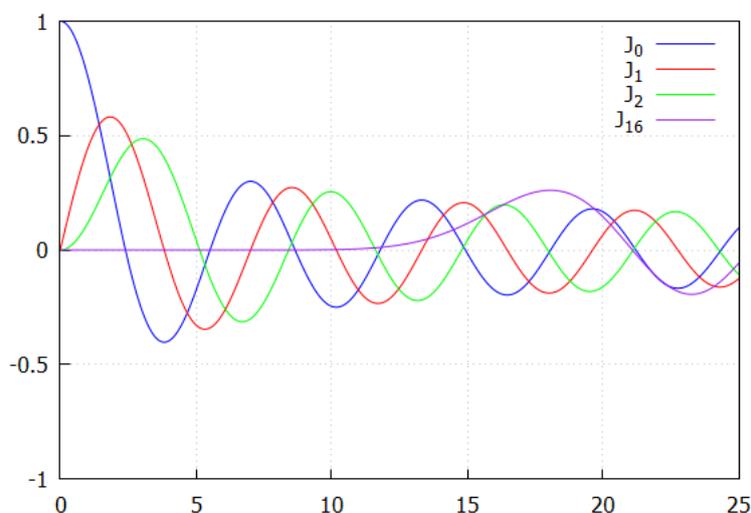


Figura 2.1: Representación gráfica de la función $J_\nu(z)$ para algunos valores de ν .

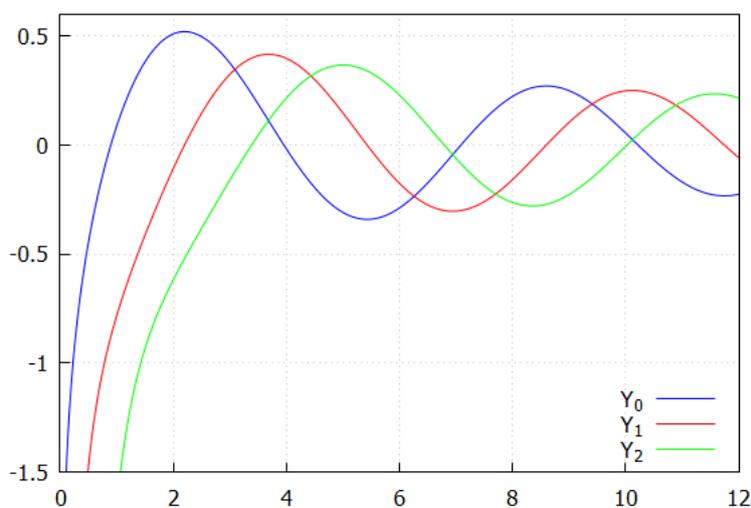


Figura 2.2: Representación gráfica de la función $Y_\nu(z)$ para algunos valores de ν .

Observación 2.16. *En algunos problemas es también interesante estudiar las soluciones de la ecuación*

$$z^2 u'' + zu' - (z^2 + \nu^2) u = 0,$$

para $z > 0$. Esta es la ecuación de Bessel tras reemplazar z por iz , y por lo tanto sus soluciones se conocen como funciones de Bessel con argumento imaginario, o funciones de Bessel modificadas. Evidentemente $J_\nu(iz)$ y $H_\nu^{(1)}(iz)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación anterior. La primera solución está acotada cuando $z \rightarrow 0$ si $\nu > 0$, y la segunda, cuando $z \rightarrow \infty$.

2.3. Clases especiales de funciones de Bessel

Es costumbre utilizar

$$I_\nu(z) = e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(iz), \quad K_\nu(z) = \frac{1}{2} \pi e^{i\pi(\nu+1)/2} H_\nu^{(1)}(iz),$$

en lugar de $J_\nu(iz)$ y $H_\nu^{(1)}(iz)$.

Si bien nosotros no llevaremos a cabo un estudio en profundidad de estas funciones, este tema se desarrolla en [6], como tercer punto de §17.

2.3.2 | Funciones de Bessel cuyo orden es la mitad de un entero impar. Polinomios de Bessel.

Las funciones de Bessel de orden de la mitad de un entero impar forman una clase distinta. Son notables por poderse expresar en términos de funciones elementales. Para ello, usemos primero (2.1.18) y (2.1.19) para ver que

$$H_{1/2}^{(1,2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{\pm i(z-\pi/2)},$$

de donde

$$J_{1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin z, \quad Y_{1/2}(z) = -\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos z.$$

Además, si usamos

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{i\pi\nu} H_\nu^{(1)}(z),$$

$$H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-i\pi\nu} H_\nu^{(2)}(z),$$

que podemos encontrar como las ecuaciones (8) y (9) en §15 de [6],

$$H_{-1/2}^{(1)}(z) = e^{i\pi/2} H_{1/2}^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{iz},$$

$$H_{-1/2}^{(2)}(z) = e^{-i\pi/2} H_{1/2}^{(2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-iz}.$$

Por eso

$$J_{-1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos z, \quad Y_{-1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin z.$$

Tomando $\nu = -1/2$ en las fórmulas (2.2.4), obtenemos

$$H_{n-1/2}^{(1,2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} z^n \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n e^{\pm iz}, \quad (2.3.2)$$

$$J_{n-1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} z^n \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \cos z,$$

$$Y_{n-1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} z^n \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \sin z.$$

Se deduce por inducción de (2.3.2) que

$$H_{n+1/2}^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{iz} p_n\left(\frac{1}{iz}\right),$$

donde $p_n(s)$ es un polinomio en s de grado n . Del comportamiento asintótico de $H_{n+1/2}^{(1)}(z)$ cuando $z \rightarrow \infty$ se sigue que $p_n(0) = (-i)^{n+1}$. Demostremos que $p_n(s)$ es un polinomio de tipo hipergeométrico y se puede expresar en términos de polinomios de Bessel (ver la tabla de polinomios de la sección 1.2):

$$y_n(z) = 2^{-n} e^{2/z} \frac{d^n}{dz^n} \left(z^{2n} e^{-2/z} \right).$$

De hecho, de la ecuación diferencial para las funciones de Hankel $H_{n+1/2}^{(1)}(z)$ podemos obtener una ecuación diferencial para $p_n(s)$:

$$s^2 p_n''(s) + 2(s+1)p_n'(s) - n(n+1)p_n(s) = 0.$$

Esta es una ecuación de tipo hipergeométrico, por lo que los polinomios $p_n(s)$ son polinomios de tipo hipergeométrico. Si expresamos $p_n(s)$ usando la fórmula de Rodrigues, obtenemos

$$p_n(s) = B_n e^{2/s} \frac{d^n}{ds^n} \left(s^{2n} e^{-2/s} \right).$$

Entonces queda claro que los polinomios $p_n(s)$ son, hasta un factor de normalización, los polinomios de Bessel $y_n(s)$. Dado que $p_n(0) = (-i)^{n+1}$, $y_n(0) = 1$, finalmente obtenemos la siguiente fórmula conectando las funciones de Hankel $H_{n+1/2}^{(1)}(z)$ con los polinomios de Bessel:

$$H_{n+1/2}^{(1)}(z) = (-i)^{n+1} \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{iz} y_n\left(\frac{1}{iz}\right).$$

De la misma forma,

$$H_{n+1/2}^{(2)}(z) = i^{n+1} \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-iz} y_n\left(-\frac{1}{iz}\right).$$

Dado que el estudio de los polinomios de Bessel no entra dentro de los objetivos de este trabajo, para saber más acerca de estos recomendaría acudir al libro [1], específicamente a la sección 3.8.

2.3. Clases especiales de funciones de Bessel

Funciones hipergeométricas

Esquema

3.1. Las ecuaciones de tipo hipergeométrico y sus soluciones	40
3.1.1. Reducción a la forma canónica	40
3.1.2. Construcción de soluciones particulares	41
3.1.3. Prolongación analítica	48
3.2. Propiedades básicas de funciones de tipo hipergeométrico	49
3.2.1. Relaciones de recurrencia	50
3.2.2. Series de potencias	52

3.1 | Las ecuaciones de tipo hipergeométrico y sus soluciones

3.1.1 | Reducción a la forma canónica

Vamos a transformar la ecuación

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0 \quad (3.1.1)$$

a una forma canónica mediante un cambio lineal de variable independiente. Hay tres casos, según el grado de $\sigma(z)$.

1. $\sigma(z)$ de grado 2: $\sigma(z) = (z - a)(b - z)$, $a \neq b$ (Podemos suponer que no tiene una raíz doble por la Observación 1.4). Mediante la sustitución $z = a + (b - a)s$, obtenemos

$$s(1 - s)y'' + \frac{1}{b - a}\tau[a + (b - a)s]y' + \lambda y = 0.$$

Definición 3.1. Siempre es posible elegir los parámetros α, β y γ tales que la ecuación anterior se pueda escribir en la forma

$$s(1 - s)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)s]y' - \alpha\beta y = 0.$$

Nos referiremos a esta ecuación como ecuación hipergeométrica, también llamada a menudo ecuación de Gauss.

2. $\sigma(z)$ de grado 1: $\sigma(z) = z - a$. Usando la transformación $z = a + bs$, tenemos

$$sy'' + \tau(a + bs)y' + \lambda by = 0. \quad (3.1.2)$$

Si $\tau'(z) = 0$, entonces (3.1.2) es la ecuación de Lommel (Observación 2.2) para cualquier b , y sus soluciones se pueden expresar en términos de funciones de Bessel. Si $\tau'(z) \neq 0$, entonces, con $b = -1/\tau'(z)$,

$$\tau(a + bs) = \tau(a) + \tau'(a)bs = \tau(a) - s.$$

Definición 3.2. Sea $\tau'(z) \neq 0$, y tomando $\gamma = \tau(a)$, $\alpha = -\lambda b$. Nos referiremos a la ecuación

$$sy'' + (\gamma - s)y' - \alpha y = 0$$

como la ecuación hipergeométrica confluyente.

3. Si $\sigma(z)$ es una constante podemos tomar, sin pérdida de generalidad, $\sigma(z) = 1$. Cuando $\tau'(z) = 0$, entonces (3.1.1) es una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes. Si $\tau'(z) \neq 0$, podemos escribir (3.1.1) como

$$y'' + b\tau(a + bs)y' + \lambda b^2 y = 0$$

después de la sustitución $z = a + bs$.

Definición 3.3. *Eligiendo adecuadamente a , b y ν en la ecuación anterior, podemos ponerla en la forma*

$$y'' - 2sy' + 2\nu y = 0.$$

Nos referiremos a esta ecuación como la ecuación de Hermite (cuando $\nu = n$ es la ecuación de los polinomios de Hermite).

En este trabajo nos limitaremos a estudiar las soluciones de la ecuación hipergeométrica e hipergeométrica confluyente. Si está interesado en la ecuación de Hermite, un estudio de esta se puede encontrar a lo largo del capítulo 4 de [6].

3.1.2 | Construcción de soluciones particulares

Las soluciones particulares de la ecuación hipergeométrica e hipergeométrica confluyente, se pueden encontrar mediante el método explicado en la sección 3 del capítulo 1. La ecuación de tipo hipergeométrico (3.1.1) es un caso especial de la ecuación de tipo hipergeométrico generalizada, con $\tilde{\tau}(z) = \tau(z)$, $\tilde{\sigma}(z) = \lambda\sigma(z)$. Por tanto, podemos aumentar el número de dichas soluciones utilizando la sustitución $u = \phi(z)y$, siempre que $\phi(z)$ satisfaga

$$\phi'/\phi = \pi(z)/\sigma(z),$$

donde

$$\pi(z) = \frac{\sigma' - \tau}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tau}{2}\right)^2 - \kappa\sigma} \quad (\kappa = \lambda - k)$$

es un polinomio de grado ≤ 1 . La constante κ está determinada por la condición de que el discriminante de la cuadrática bajo el signo de la raíz sea cero.

Proposición 3.4 ([6],§20). *Dada una solución particular, $u_1(z) = f(\alpha, \beta, \gamma, z)$, de la ecuación*

$$z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]u' - \alpha\beta u = 0, \quad (3.1.3)$$

podemos obtener, a partir de esta, las siguientes soluciones particulares:

$$\begin{aligned} u_2(z) &= z^{1-\gamma} f(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) \\ u_3(z) &= (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} f(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, z) \\ u_4(z) &= f(\beta, \alpha, \gamma, z) \end{aligned}$$

Demostración. Dada la ecuación

$$z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]u' - \alpha\beta u = 0,$$

3.1. Las ecuaciones de tipo hipergeométrico y sus soluciones

tenemos que

$$\left(\frac{\sigma' - \tau}{2}\right)^2 - \kappa\sigma = \left[\frac{1 - \gamma + (\alpha + \beta - 1)z}{2}\right]^2 - \kappa z(1 - z).$$

Estableciendo el discriminante de esta cuadrática igual a cero, obtenemos dos valores posibles para κ :

$$\kappa_1 = (1 - \gamma)(\alpha + \beta - \gamma), \quad \kappa_2 = 0.$$

Cuando $\kappa_1 = (1 - \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)$, existen las siguientes posibilidades para $\pi(z)$ y $\phi(z)$:

1. $\pi(z) = (1 - \gamma)(1 - z), \quad \phi(z) = z^{1-\gamma};$
2. $\pi(z) = (\alpha + \beta - \gamma)z, \quad \phi(z) = (1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta}.$

Sustituyendo $u = \phi(z)y$ con, $\phi(z) = z^{1-\gamma}$ llegamos a la siguiente ecuación para $y(z)$:

$$z(1 - z)y'' + [2 - \gamma - (\alpha + \beta - 2\gamma + 3)z]y' - (\alpha - \gamma + 1)(\beta - \gamma + 1)y = 0.$$

Esto se puede escribir en forma canónica.

$$z(1 - z)y'' + [\gamma' - (\alpha' + \beta' + 1)z]y' - \alpha'\beta'y = 0 \quad (3.1.4)$$

tomando $\alpha' = \alpha - \gamma + 1, \beta' = \beta - \gamma + 1, \gamma' = 2 - \gamma$. De manera similar, cuando $\phi(z) = (1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta}$ la sustitución $u = \phi(z)y$ conduce a (3.1.4) con $\alpha' = \gamma - \alpha, \beta' = \gamma - \beta, \gamma' = \gamma$.

Sea $u(z) = f(\alpha, \beta, \gamma, z)$ una solución particular de (3.1.3). Entonces $y(z) = u(z)/\phi(z)$ satisface la ecuación hipergeométrica con los parámetros α', β', γ' . Por tanto, $u(z) = \phi(z)f(\alpha', \beta', \gamma', z)$ también es una solución de (3.1.3). Por tanto, tenemos las siguientes soluciones particulares de (3.1.3):

$$\begin{aligned} u_1(z) &= f(\alpha, \beta, \gamma, z), \\ u_2(z) &= z^{1-\gamma}f(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z), \\ u_3(z) &= (1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta}f(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, z). \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Hemos considerado transformaciones de (3.1.3) en una ecuación (3.1.4) del mismo tipo para el caso en que $\kappa = (1 - \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)$. Transformaciones similares correspondientes a $\kappa = 0$ no son de interés, ya que se pueden obtener aplicando dos transformaciones sucesivas de los tipos anteriores.

La ecuación (3.1.3) no cambia si α y β se intercambian. Por tanto, también se pueden obtener soluciones a partir de (3.1.5) mediante esta operación: $u_4(z) = f(\beta, \alpha, \gamma, z)$. \square

Proposición 3.5 ([6],§20). Dada una solución particular, $u_1(z) = f(\alpha, \gamma, z)$, de la ecuación

$$zu'' + (\gamma - z)u' - \alpha u = 0 \quad (3.1.6)$$

podemos obtener, a partir de esta, las siguientes soluciones particulares:

$$u_2(z) = z^{1-\gamma} f(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z), \quad u_3(z) = e^z f(\gamma - \alpha, \gamma, -z).$$

Demostración. El procedimiento para probarlo es prácticamente el mismo que para la Proposición 3.4 y lo omitiremos. \square

Pasemos ahora a construir las soluciones de (3.1.3) y (3.1.6) explícitamente. Como mostramos en la sección 3 del capítulo 1, la ecuación

$$\sigma(z)u'' + \tau(z)u' + \lambda u = 0$$

tiene soluciones particulares de la forma

$$u(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}} ds.$$

Aquí $\rho(z)$ es una solución de $(\sigma\rho)' = \tau\rho$, donde ν es una raíz de la ecuación $\lambda + \nu\tau' + \frac{1}{2}\nu(\nu-1)\sigma'' = 0$, y C satisface

$$\left. \frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}} \right|_{s_1, s_2} = 0 \quad (3.1.7)$$

(s_1 y s_2 son los puntos finales de C).

Primero construiremos soluciones cuando $z > 0$. Además, para (3.1.3) supondremos que $z < 1$. Para ello, primero hallemos para que contornos se verifica la condición (3.1.7).

Proposición 3.6 ([6],§20). Para la ecuación hipergeométrica

$$z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]u' - \alpha\beta u = 0,$$

los siguientes contornos verifican la condición (3.1.7),

$$\begin{aligned} s &= zt, & \operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 2; \\ s &= 1 - (1-z)t, & \operatorname{Re} \gamma < \operatorname{Re} \beta + 1, \quad \operatorname{Re} \alpha > 2; \\ s &= z/t, & \operatorname{Re} \beta > 1, \quad \operatorname{Re} \alpha > 2. \end{aligned}$$

3.1. Las ecuaciones de tipo hipergeométrico y sus soluciones

Demostración. Para (3.1.3),

$$\sigma(z) = z(1-z), \quad \rho(z) = z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}, \quad \nu = -\alpha \quad (\text{o } \nu = -\beta);$$

Para esta ecuación, la condición (3.1.7) toma la forma

$$s^{\gamma-\alpha}(1-s)^{\beta-\gamma+1}(s-z)^{\alpha-2} \Big|_{s_1, s_2} = 0.$$

Bajo ciertas restricciones en α, β y γ , esta condición puede satisfacerse si tomamos los extremos de C en $s = 0, 1, z$ o ∞ . Para construir soluciones que tengan un comportamiento simple en un entorno de $z = 0, 1$, o ∞ , convenientemente podemos tomar C como una línea recta que conecta $s = 0, 1$, o ∞ con $s = z$. Suponiendo que $0 \leq t \leq 1$, podemos tomar ecuaciones paramétricas de estas líneas en las formas

$$\begin{aligned} s &= zt, & \operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 2; \\ s &= 1 - (1-z)t, & \operatorname{Re} \gamma < \operatorname{Re} \beta + 1, \quad \operatorname{Re} \alpha > 2; \\ s &= z/t, & \operatorname{Re} \beta > 1, \quad \operatorname{Re} \alpha > 2. \end{aligned}$$

□

Proposición 3.7 ([6], §20). *Para la ecuación hipergeométrica confluyente*

$$zu'' + (\gamma - z)u' - \alpha u = 0,$$

los siguientes contornos verifican la condición (3.1.7),

$$\begin{aligned} s &= zt, & \operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 2 & \quad (0 \leq t \leq 1), \\ s &= z(1+t), & \operatorname{Re} \alpha > 2 & \quad (0 \leq t < \infty); \end{aligned}$$

Demostración. Para (3.1.6),

$$\sigma(z) = z, \quad \rho(z) = z^{\gamma-1}e^{-z}, \quad \nu = -\alpha.$$

Para esta ecuación, la condición (3.1.7) toma la forma

$$s^{\gamma-\alpha}e^s(s-z)^{\alpha-2} \Big|_{s_1, s_2} = 0.$$

Bajo ciertas restricciones en α y γ esta condición puede satisfacerse si tomamos los extremos de C en $s = 0, z$ o ∞ . Para construir soluciones que tengan un comportamiento simple en un entorno de $z = 0$ o ∞ , convenientemente podemos tomar C como una línea recta que conecta $s = 0$ o ∞ con $s = z$. Por ello, podemos tomar las siguientes ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} s &= zt, & \operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 2 & \quad (0 \leq t \leq 1), \\ s &= z(1+t), & \operatorname{Re} \alpha > 2 & \quad (0 \leq t < \infty). \end{aligned}$$

□

Para (3.1.3) y (3.1.6), el contorno $s = zt$ conducen a las siguientes soluciones¹:

$$\begin{aligned} u_1(z) &= F(\alpha, \beta, \gamma, z) \\ &= C(\alpha, \beta, \gamma)(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \int_0^1 t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}(1-zt)^{\beta-\gamma} dt, \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

$$u_1(z) = F(\alpha, \gamma, z) = C(\alpha, \gamma)e^z \int_0^1 t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}e^{-zt} dt. \quad (3.1.9)$$

Definición 3.8. *Llamaremos a las funciones $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ y $F(\alpha, \gamma, z)$ función hipergeométrica e hipergeométrica confluyente respectivamente.*

Las constantes de normalización correspondientes $C(\alpha, \beta, \gamma)$ y $C(\alpha, \gamma)$ se eligen de modo que

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 0) = F(\alpha, \gamma, 0) = 1;$$

entonces tenemos

$$C(\alpha, \beta, \gamma) = C(\alpha, \gamma) = \frac{1}{B(\alpha, \gamma - \alpha)} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)}.$$

Aquí $\Gamma(z)$ es la función gamma y $B(u, v)$, la función beta de Euler.

Para $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ y $F(\alpha, \gamma, z)$, la condición (3.1.7) se satisface solo bajo ciertas restricciones sobre los parámetros. Más adelante, veremos que (3.1.8) y (3.1.9) permiten que $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ y $F(\alpha, \gamma, z)$ se puedan prolongar analíticamente en z y cada parámetro en la región $\text{Re } \gamma > \text{Re } \alpha > 0$. Una prolongación analítica de $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ o $F(\alpha, \gamma, z)$ debe, en primer lugar, satisfacer (3.1.3) o (3.1.6), respectivamente. Para tener $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ univaluada en (3.1.8), debemos requerir que $|\arg(1-zt)| < \pi$; para asegurar esto, hacemos un corte en el plano z a lo largo del eje real para $z \geq 1$.

Observación 3.9. *Gracias a la Proposición 3.4, obtenemos las siguientes soluciones de (3.1.3) tomando $f(\alpha, \beta, \gamma, z) = F(\alpha, \beta, \gamma, z)$:*

$$\begin{aligned} u_2(z) &= z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z), \\ u_3(z) &= (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, z), \\ u_4(z) &= F(\beta, \alpha, \gamma, z). \end{aligned}$$

Las representaciones integrales que definen estas cuatro soluciones de (3.1.3) existen simultáneamente siempre que $0 < \text{Re } \alpha < 1$ y $0 < \text{Re}(\gamma - \alpha) < 1$. Dado que la ecuación hipergeométrica tiene solo dos soluciones linealmente independientes (véase el capítulo 14 de [11]), debe haber una relación lineal entre los $u_i(z)$. Para $\gamma \neq 1$ las funciones $u_1(z)$ y $u_2(z)$ son linealmente independientes, ya que se comportan

¹En (3.1.8) se ha corregido una errata sobre el documento original de [6].

3.1. Las ecuaciones de tipo hipergeométrico y sus soluciones

de manera diferente cuando $z \rightarrow 0$. Por tanto, para $\gamma \neq 1$ tanto $u_3(z)$ como $u_4(z)$ deben ser combinaciones lineales de $u_1(z)$ y $u_2(z)$. Al comparar el comportamiento de estas funciones cuando $z \rightarrow 0$, encontramos que

$$u_3(z) = u_1(z), \quad u_4(z) = u_1(z) \quad (\operatorname{Re} \gamma > 1),$$

es decir, para $\operatorname{Re} \gamma > 1$,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z), \quad (3.1.10)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = F(\beta, \alpha, \gamma, z). \quad (3.1.11)$$

Al usar el principio de prolongación analítica, podemos eliminar la restricción sobre γ . En (3.1.11) podemos tomar $(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}$ como la rama que es 1 en $z=0$, es decir, $|\arg(1-z)| < \pi$.

Observación 3.10. *De manera similar, usando la Proposición 3.5, obtenemos las dos soluciones linealmente independientes*

$$u_1(z) = F(\alpha, \gamma, z),$$

$$u_2(z) = z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z),$$

de la ecuación hipergeométrica confluyente, y la ecuación funcional

$$F(\alpha, \gamma, z) = e^z F(\gamma-\alpha, \gamma, -z). \quad (3.1.12)$$

Observación 3.11. *Al usar (3.1.10) y (3.1.12) podemos reemplazar (3.1.8) y (3.1.9) por representaciones integrales más simples*

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-zt)^{-\beta} dt, \quad (3.1.13)$$

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} e^{zt} dt. \quad (3.1.14)$$

Otros contornos de la ecuación hipergeométrica conducen a los siguientes pares de soluciones linealmente independientes:

1. El contorno $s = 1 - (1-z)t$ ($0 \leq t \leq 1$):

$$\begin{aligned} u_1(z) &= F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1-z), \\ u_2(z) &= (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z). \end{aligned}$$

2. El contorno $s = z/t$ ($0 \leq t \leq 1$):

$$\begin{aligned} u_1(z) &= z^{-\alpha} F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, 1/z), \\ u_2(z) &= z^{-\beta} F(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, 1/z). \end{aligned}$$

Para la ecuación hipergeométrica confluyente, el contorno $s = z(1+t)$ conduce a la solución

$$u_1(z) = G(\alpha, \gamma, z) = C(\alpha, \gamma) \int_0^\infty e^{-zt} t^{\alpha-1} (1+t)^{\gamma-\alpha-1} dt.$$

Definición 3.12. *Nos referiremos a la función $G(\alpha, \gamma, z)$ como función hipergeométrica confluyente de segunda especie.*

En este trabajo dejaremos el estudio de esta función y sus propiedades en suspenso. Si desea encontrar más información de la función hipergeométrica confluyente de segunda especie, un estudio de esta se lleva a cabo en el capítulo 4 de [6].

Para acabar, veamos algunas observaciones se derivan inmediatamente de las representaciones integrales (3.1.13) y (3.1.14).

Observación 3.13. *Ya demostramos que todas las derivadas de funciones de tipo hipergeométrico también son funciones de tipo hipergeométrico. Podemos usar las representaciones integrales de $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ y $F(\alpha, \gamma, z)$ para ver que:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z), \\ \frac{d}{dz} F(\alpha, \gamma, z) &= \frac{\alpha}{\gamma} F(\alpha+1, \gamma+1, z). \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

Observación 3.14. *Combinando las fórmulas de diferenciación (3.1.15) con (3.1.3) y (3.1.6), obtenemos las relaciones de recurrencia:*

$$\begin{aligned} \phi(\alpha, \beta, \gamma, z) &= (\alpha+1)(\beta+1)z(1-z)\phi(\alpha+2, \beta+2, \gamma+2, z) \\ &\quad + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]\phi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z), \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

$$\phi(\alpha, \gamma, z) = (\alpha+1)z\phi(\alpha+2, \gamma+2, z) + (\gamma-z)\phi(\alpha+1, \gamma+1, z), \tag{3.1.17}$$

donde

$$\begin{aligned} \phi(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, z), \\ \phi(\alpha, \gamma, z) &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \gamma, z). \end{aligned}$$

Observación 3.15. *Si reemplazamos α y β en (3.1.16) por $\gamma-\alpha$ y $\gamma-\beta$ y usamos (3.1.10), obtenemos la relación de recurrencia*

$$\begin{aligned} \phi(\alpha, \beta, \gamma, z) &= (\gamma-\alpha+1)(\gamma-\beta+1) \frac{z}{1-z} \phi(\alpha, \beta, \gamma+2, z) \\ &\quad + [\gamma - (2\gamma - \alpha - \beta + 1)z] \frac{1}{1-z} \phi(\alpha, \beta, \gamma+1, z). \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

De manera similar podemos obtener otra relación de recurrencia para la función hipergeométrica confluyente:

$$\phi(\alpha, \gamma, z) = -(\gamma-\alpha+1)z\phi(\alpha, \gamma+2, z) + (\gamma+z)\phi(\alpha, \gamma+1, z). \tag{3.1.19}$$

3.1. Las ecuaciones de tipo hipergeométrico y sus soluciones

Las relaciones de recurrencia (3.1.16)–(3.1.19) son útiles para obtener prolongaciones analíticas de funciones de tipo hipergeométrico. El problema general de encontrar relaciones de recurrencia se analiza en la sección 3.2.

3.1.3 | Prolongación analítica

Consideremos las prolongaciones analíticas de las funciones $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ y $F(\alpha, \gamma, z)$. En primer lugar, determinaremos los dominios más grandes de z y de los parámetros en los que estas funciones se pueden prolongar analíticamente utilizando sus representaciones integrales y el Teorema 1.13.

Proposición 3.16 ([6],§20). *La función hipergeométrica $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, definida por (3.1.13)*

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta} dt,$$

es analítica en cada α, β, γ , y z para $\operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 0, |\arg(1-z)| < \pi$.

Demostración. Para encontrar el dominio de analiticidad necesitamos encontrar el dominio en el que (3.1.13) converge uniformemente con respecto a z y los parámetros correspondientes. Tenemos

$$t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta} = t^{\delta-1}(1-t)^{\delta-1}\psi(t),$$

donde

$$\psi(t) = t^{\alpha-\delta}(1-t)^{\gamma-\alpha-\delta}(1-zt)^{-\beta}.$$

Para cada $\delta > 0$, la función $\psi(t)$ es continua en todas las variables colectivamente en la región cerrada $0 \leq t \leq 1, \delta \leq \operatorname{Re} \alpha \leq N, \delta \leq \operatorname{Re}(\gamma - \alpha) \leq N, |\beta| \leq N, |z| \leq N, |\arg(1-\delta-z)| \leq \pi - \delta$, y por lo tanto está acotado por:

$$\left| t^{\alpha-\delta}(1-t)^{\gamma-\alpha-\delta}(1-zt)^{-\beta} \right| \leq C,$$

(C , alguna constante). La restricción $|\arg(1-\delta-z)| \leq \pi - \delta$ se impone para que la región en consideración no contenga los puntos singulares de $(1-zt)^{-\beta}$, es decir, los puntos $z = t^{-1}$ ($0 \leq t \leq 1$). En consecuencia

$$\left| t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta} \right| \leq Ct^{\delta-1}(1-t)^{\delta-1}$$

en la región considerada. Dado que la integral $\int_0^1 t^{\delta-1}(1-t)^{\delta-1} dt$ converge, la integral (3.1.13) que define $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ converge uniformemente en la misma región y, por lo tanto, es una función analítica de cada argumento.

Dado que δ y N son arbitrarios, la función $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ es analítica en cada argumento para $\operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 0, |\arg(1 - z)| < \pi$. La última condición significa que hay un corte en el plano z a lo largo del eje real para $z \geq 1$. \square

De manera similar, podemos mostrar que $F(\alpha, \gamma, z)$ es analítica en cada argumento para $\operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 0$ y todo z .

Podemos prolongar analíticamente $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ y $F(\alpha, \gamma, z)$ bajo ciertas restricciones en los parámetros. Estas restricciones se pueden eliminar usando las relaciones de recurrencia (3.1.16)–(3.1.19). Dado que (3.1.16) y (3.1.17) involucran funciones $\phi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ y $\phi(\alpha, \gamma, z)$ para las cuales la diferencia $\gamma - \alpha$ es la misma, si luego disminuimos α en 1 en (3.1.16) y (3.1.17) podemos prolongar las funciones

$$\phi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, z),$$

y

$$\phi(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \gamma, z),$$

a valores arbitrarios de α bajo la condición adicional $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha) > 0$. La prolongación analítica de $\phi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ y $\phi(\alpha, \gamma, z)$ para $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha) \leq 0$ se puede obtener disminuyendo repetidamente γ en 1 en (3.1.18) y (3.1.19).

Por la fórmula de diferenciación

$$\frac{d}{dz} \phi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \alpha \beta \phi(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, z),$$

que sigue de (3.1.15), la derivada de $\phi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ será analítica en z y los parámetros α, β , y γ en la misma región que $\phi(\alpha, \beta, \gamma, z)$. Por el principio de prolongación analítica, $\phi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ satisfará por tanto la ecuación hipergeométrica (3.1.3) en la misma región. El caso de las funciones $\phi(\alpha, \gamma, z)$ es similar y, por ello, lo omitiremos.

3.2 | Propiedades básicas de funciones de tipo hipergeométrico

Nuestras representaciones integrales de funciones de tipo hipergeométrico permiten obtener las propiedades básicas de estas funciones: relaciones de recurrencia y desarrollo en serie de potencias. En este apartado haremos un uso extensivo de los resultados del capítulo 1.

3.2. Propiedades básicas de funciones de tipo hipergeométrico

3.2.1 | Relaciones de recurrencia

Por el método que vimos en la sección 4 del capítulo 1, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.17 ([6],§21). Sean tres funciones hipergeométricas cualesquiera, $F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, z)$ ($i = 1, 2, 3$). Si las diferencias $\alpha_i - \alpha_k, \beta_i - \beta_k$, y $\gamma_i - \gamma_k$ son enteras, entonces $F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, z)$ están conectadas por una relación lineal

$$\sum_{i=1}^3 C_i(z) F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, z) = 0,$$

donde $C_i(z)$ son polinomios.

Demostración. Para probar esto, consideramos la expresión

$$\sum_i C_i(z) F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, z).$$

Demostremos que los coeficientes $C_i = C_i(z)$ pueden elegirse de modo que esta combinación sea cero. Para un z dado, si usamos la representación integral (3.1.13) tenemos

$$\sum_i C_i F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, z) = \int_0^1 t^{\alpha_0-1} (1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1} (1-zt)^{-\beta_0} P(t) dt.$$

Aquí $\alpha_0, \gamma_0 - \alpha_0$, y $-\beta_0$ son los números $\alpha_i, \gamma_i - \alpha_i$ y $-\beta_i$ con las partes reales más pequeñas, y $P(t)$ es un polinomio. Los coeficientes $C_i = C_i(z)$ están determinados por la condición

$$\begin{aligned} & t^{\alpha_0-1} (1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1} (1-zt)^{-\beta_0} P(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left[t^{\alpha_0} (1-t)^{\gamma_0-\alpha_0} (1-zt)^{1-\beta_0} Q(t) \right], \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

donde $Q(t)$ es un polinomio. Obtenemos

$$\sum_i C_i F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, z) = t^{\alpha_0} (1-t)^{\gamma_0-\alpha_0} (1-zt)^{1-\beta_0} Q(t) \Big|_0^1.$$

Como $\operatorname{Re}(\gamma_0 - \alpha_0) = \min \operatorname{Re}(\gamma_i - \alpha_i) > 0$ y $\operatorname{Re} \alpha_0 = \min \operatorname{Re} \alpha_i > 0$, los términos integrados se reducen a cero. Seleccionando los coeficientes $C_i = C_i(z)$ de esta manera, tendremos la ecuación lineal

$$\sum_i C_i F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, z) = 0.$$

Por el mismo razonamiento que seguimos en el capítulo 1, podemos ver que C_i ($i = 1, 2, 3$) son polinomios, determinados hasta un múltiplo constante. \square

Utilizando las relaciones generales (1.4.11), (1.4.15) y (1.4.14), con los coeficientes que obtuvimos en sus respectivas pruebas, aplicadas a las funciones $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, obtenemos el siguiente resultado².

Proposición 3.18. *Se tienen las siguientes relaciones de recurrencia:*

$$\beta(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha - 1)F(\alpha - 1, \beta, \gamma, z) + (\beta - \alpha) \left[((\beta - \alpha)^2 - 1)z - (\alpha + \beta + 1)(\gamma - 2\alpha) + 2(\gamma - \alpha(\alpha + 1)) \right] F(\alpha, \beta, \gamma, z) + \alpha(\beta - \alpha + 1)(\gamma - \beta)F(\alpha + 1, \beta, \gamma, z) = 0,$$

$$\beta\gamma(\alpha - \gamma)F(\alpha - 1, \beta, \gamma, z) + \gamma\beta[(\gamma - \alpha) - (\beta - \alpha + 1)z]F(\alpha, \beta, \gamma, z) + \alpha\beta(\beta - \alpha + 1)z(1 - z)F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, z) = 0,$$

$$\gamma[(\gamma - \beta) + (\beta - \alpha - 1)z]F(\alpha, \beta, \gamma, z) + \gamma(\beta - \gamma)F(\alpha + 1, \beta, \gamma, z) - \beta(\beta - \alpha - 1)z(1 - z)F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, z) = 0.$$

De manera similar, podemos deducir una relación de recurrencia para las funciones hipergeométricas confluentes $F(\alpha, \gamma, z)$ usando (3.1.14),

$$\sum_i C_i F(\alpha_i, \gamma_i, z) = \int_0^1 t^{\alpha_0-1} (1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1} e^{zt} P(t) dt,$$

donde $P(t)$ es un polinomio. Aquí los $C_i(z)$ satisfacen

$$t^{\alpha_0-1} (1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1} e^{zt} P(t) = \frac{d}{dt} \left[t^{\alpha_0} (1-t)^{\gamma_0-\alpha_0} e^{zt} Q(t) \right], \quad (3.2.2)$$

donde $Q(t)$ es un polinomio. Ya que, para $\text{Re } \gamma_i > \text{Re } \alpha_i > 0$,

$$\sum_i C_i F(\alpha_i, \gamma_i, z) = t^{\alpha_0} (1-t)^{\gamma_0-\alpha_0} e^{zt} Q(t) \Big|_0^1 = 0$$

obtenemos la relación requerida. Por lo tanto, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 3.19 ([6], §21). *Sean tres funciones hipergeométricas cualesquiera, $F(\alpha_i, \gamma_i, z)$ ($i = 1, 2, 3$). Si las diferencias $\alpha_i - \alpha_k$ y $\gamma_i - \gamma_k$ son enteras, entonces $F(\alpha_i, \gamma_i, z)$ están conectadas por una relación lineal*

$$\sum_{i=1}^3 C_i(z) F(\alpha_i, \gamma_i, z) = 0,$$

donde $C_i(z)$ son polinomios.

²Hacemos notar que, al efectuar los cálculos para determinar los coeficientes de las dos primeras ecuaciones que se muestran en la Proposición 3.18, hemos corregido un par de erratas en las expresiones que aparecen en [4].

3.2. Propiedades básicas de funciones de tipo hipergeométrico

Corolario 3.20. Dadas las funciones $F(\alpha, \gamma, z)$, $F(\alpha + 1, \gamma, z)$ y $F(\alpha - 1, \gamma, z)$. Entonces existen unos coeficientes C_i , $i = 1, 2, 3$, tales que

$$C_1 F(\alpha - 1, \gamma, z) + C_2 F(\alpha, \gamma, z) + C_3 F(\alpha + 1, \gamma, z) = 0.$$

Demostración. En este caso

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha - 1, & \alpha_2 &= \alpha, & \alpha_3 &= \alpha + 1, & \alpha_0 &= \alpha - 1, \\ \gamma_0 - \alpha_0 &= \gamma - \alpha - 1. \end{aligned}$$

El polinomio $P(t)$ tiene la forma

$$P(t) = C_1 \alpha (\alpha - 1) (1 - t)^2 + C_2 \alpha (\gamma - \alpha) t (1 - t) + C_3 (\gamma - \alpha) (\gamma - \alpha - 1) t^2. \quad (3.2.3)$$

El grado de $Q(t)$ es cero; por tanto, podemos tomar $Q(t) = 1$. Entonces (3.2.2) se convierte en

$$e^{zt} t^{\alpha-2} (1-t)^{\gamma-\alpha-2} P(t) = \frac{d}{dt} \left[e^{zt} t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} \right].$$

De la ecuación anterior, obtenemos que

$$P(t) = zt(1-t) + (\alpha-1)(1-t) - (\gamma-\alpha-1)t.$$

Sustituyendo esto en (3.2.3) y comparando coeficientes en los dos lados de la ecuación, obtenemos

$$C_1 = \frac{1}{\alpha}, \quad C_2 = \frac{2\alpha - \gamma + z}{\alpha(\gamma - \alpha)}, \quad C_3 = -\frac{1}{\gamma - \alpha}.$$

Finalmente tenemos

$$(\gamma - \alpha)F(\alpha - 1, \gamma, z) + (2\alpha - \gamma + z)F(\alpha, \gamma, z) - \alpha F(\alpha + 1, \gamma, z) = 0.$$

□

3.2.2 | Series de potencias

Proposición 3.21 ([6],§21). *Las funciones $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ y $F(\alpha, \gamma, z)$ tienen el siguiente desarrollo en serie:*

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n, \quad F(\alpha, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n n!} z^n.$$

donde

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)},$$

es lo que se conoce como el símbolo de Pochhammer.

Demostración. Empecemos desarrollando $(1-zt)^{-\beta}$ y e^{zt} en su serie de potencias:

$$e^{zt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!}, \quad (1-zt)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n (zt)^n}{n!}, \quad |zt| < 1, \quad (3.2.4)$$

Si $|z| < 1$, la serie (3.2.4) converge uniformemente para $0 \leq t \leq 1$, y por lo tanto podemos intercambiar suma e integración en la representación integral. Para $\operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} z^n \int_0^1 t^{n+\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Del mismo modo obtenemos

$$F(\alpha, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n n!} z^n. \quad (3.2.6)$$

para todos los z . La serie (3.2.6) se diferencia de (3.2.5) solo por la omisión del factor $(\beta)_n$ de cada término. \square

La serie (3.2.5) es la serie hipergeométrica y (3.2.6) es la serie hipergeométrica confluyente.

Aplicando el criterio de D'Alembert (Observación 2.15), las series (3.2.5) y (3.2.6) convergen uniformemente en todos los parámetros en cada subconjunto compacto de su dominio, que no contengan valores cero o enteros negativos de γ , además para (3.2.5) también debemos requerir que $|z| \leq q < 1$. Por lo tanto, según el Teorema 2.14 estas series representan funciones analíticas en todas las variables para $\gamma \neq -k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), y bajo la restricción adicional $|z| < 1$ para (3.2.5). Por el principio

3.2. Propiedades básicas de funciones de tipo hipergeométrico

de prolongación analítica, las ecuaciones (3.2.5) y (3.2.6) siguen siendo válidas en todos los dominios especificados.

Para terminar este apartado, mostraremos una representación gráfica de algunas funciones $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ y $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$. Un estudio numérico de estas funciones está desarrollado en gran detalle en [7].

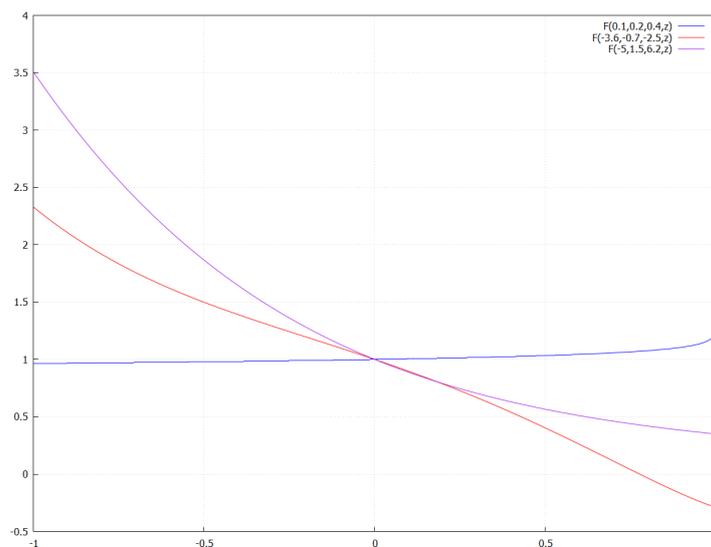


Figura 3.1: Representación gráfica de la función $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ para algunos valores de α , β y γ .

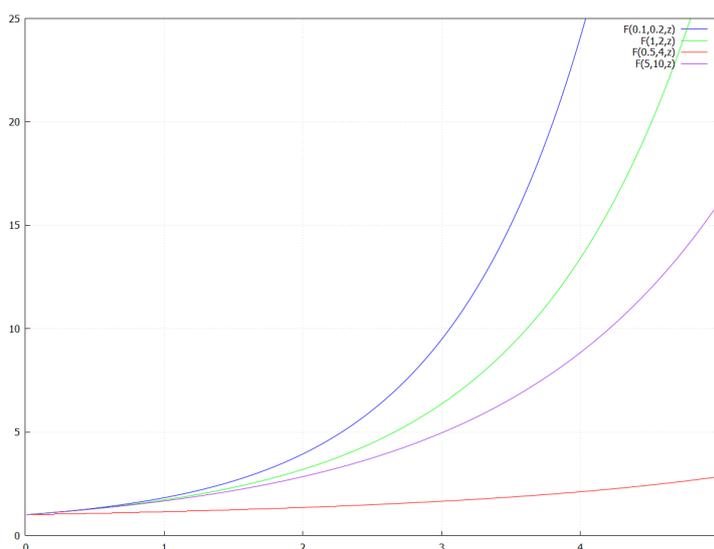


Figura 3.2: Representación gráfica de la función $F(\alpha, \gamma, z)$ para algunos valores de α y γ .

Conclusiones

El principal objetivo, a la hora de plantear este trabajo, era estudiar la teoría de las funciones especiales utilizando el método unificado propuesto por Nikiforov y Uvarov en [6]. Sin embargo, más allá de limitarnos a este libro, hemos decidido complementar la información que este nos aportaba.

Si bien en [6] nos exponían algunos ejemplos de cómo utilizar sus métodos, nosotros hemos querido hacer especial hincapié en la relevancia que tienen ciertas relaciones de recurrencia, desarrollándolas en el caso general y dando pruebas de estas utilizando el método estudiado. Para ello, nos hemos servido de [4, 12] para obtener las pruebas de (1.4.11) y (1.4.15) pero, además, hemos dado una prueba original para la relación (1.4.14) que, en la bibliografía usual, se suele tomar como corolario trivial de las otras dos.

Más allá de esta teoría general, también hemos estudiado dos familias de funciones especiales muy importantes, como son: las funciones de Bessel y las funciones hipergeométricas. Si bien nuestro enfoque ha sido estudiar dichas funciones usando los métodos propuestos en el primer capítulo, estas funciones ya han sido ampliamente estudiadas en textos como [10, 11]. Nosotros, para complementar el estudio hecho en [6], hemos usado las relaciones demostradas en la teoría general para dar distintas relaciones de recurrencia para estas funciones (exactamente las que aparecen en la Proposición 2.8 y la Proposición 3.18). En el caso de las relaciones obtenidas para las funciones de Bessel, no hemos conseguido encontrarlas en la bibliografía existente. Además, hacemos notar que hemos llevado a cabo algunas correcciones de erratas que aparecían en [4, 6]. También es interesante destacar que existe un manual actualizado, [13], en el que podemos encontrar todo este tipo de relaciones para muchas funciones especiales, incluidas las hipergeométricas y las ecuaciones de Bessel, que se pueden estudiar con el método aquí usado.

Conclusiones

A parte de lo anterior, hemos hecho uso de programas de cálculo simbólico (como por ejemplo Maxima), no solo para realizar algunas gráficas, sino también para la comprobación de algunos cálculos (como los necesarios para hallar las relaciones que aparecen en la Proposición 2.8 y la Proposición 3.18).

Si bien nuestro trabajo concluye aquí, los métodos que hemos estudiado y trabajado son de gran utilidad a la hora de hacer frente a diversos problemas. Podríamos hacer un estudio sobre las relaciones de recurrencia asociadas a la ecuación de Schrödinger y, poniendo como ejemplo los trabajos [2, 5], usarlo para calcular las funciones de onda de ciertos sistemas cuánticos. También, dado que este método nos da una representación integral de las soluciones de la ecuación de tipo hipergeométrico, podemos encontrar fórmulas asintóticas para estas soluciones. Precisamente, si miramos el último capítulo de [6], podemos encontrar muchísimos otros ejemplos de como estos métodos nos sirven para dar solución a diversos problemas de física matemática, mecánica cuántica o análisis numérico.

Bibliografía

- [1] R. Álvarez-Nodarse. “*Polinomios hipergeométricos clásicos y q -polinomios*”, Prensas Universitarias de Zaragoza, Zaragoza, 2003.
- [2] R. Álvarez-Nodarse, J. L. Cardoso, N. R. Quintero. “*On recurrence relations for radial wave functions for the N -th dimensional oscillators and hydrogenlike atoms: analytical and numerical study.*” *Electronic Transactions on Numerical Analysis*. 24 (2006), 7–23.
- [3] L. Bernal González, G. López Acedo. “*Análisis de Variable Compleja*”, Universidad de Sevilla, Secretariado de Publicaciones, Sevilla, D.L. 2010.
- [4] J. L. Cardoso, C. M. Fernandes, and R. Álvarez-Nodarse. “*Structural And Recurrence Relations For Hypergeometric-Type Functions By Nikiforov-Uvarov Method*”, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, Volume 35, pp. 17-39, 2009.
- [5] J. L. Cardoso and R. Álvarez-Nodarse, “*Recurrence Relations For Radial Wave Functions For The N -Th Dimensional Oscillators And Hydrogenlike Atoms*”, *J. Phys. A*, 36 (2003), pp. 2055-2068.
- [6] A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov. “*Special Functions of Mathematical Physics: A unified Introduction with Applications*”, Springer Basel, 2013.
- [7] John Pearson. “*Computation of Hypergeometric Functions*”. University of Oxford, Worcester College, 2009.
- [8] Yu.V. Sidorov, M.V. Fedoryuk, and M.I. Shabunin. “*Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable*”, English translation, Mir Publishers, Moscow, 1985.

Bibliografía

- [9] A. G. Sveshnikov, A.N. Tihonov. “*Theory of functions of a complex variable*”, English translation, Mir Publishers, Moscow, 1978.
- [10] G. N Watson. “*A Treatise on the Theory of Bessel Functions*”. Cambridge University Press, Cambridge, England; The Macmillan Company, New York, 1944.
- [11] E. T. Whittaker, G. N. Watson. “*A course of modern analysis. An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions*”. Reprint of the fourth (1927) edition. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [12] R. J. Yañez, J. S. Dehesa and A. F. Nikiforov. “*The Three-Term Recurrence Relations and the Differentiation Formulas for Hypergeometric-type Functions*”, J. Math. Anal. Appl., 188 (1994), pp. 855–866.
- [13] “*NIST handbook of mathematical functions*”. Edited by Frank W. J. Olver, Daniel W. Lozier, Ronald F. Boisvert and Charles W. Clark. U.S. Department of Commerce, National Institute of Standards and Technology, Washington, DC; Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
Online: <https://dlmf.nist.gov/>