



FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANÁLISIS
NUMÉRICO

Trabajo de Fin de Grado

**ESTUDIO TEÓRICO Y NUMÉRICO DE
ECUACIONES ALGEBRAICAS
DIFERENCIALES (DAES) LINEALES**

Marco Sánchez Rivera
Dirigido por: María Macarena Gómez Mármol

2021

Índice general

1. Introducción	2
2. Motivación del problema. Conceptos básicos.	4
2.1. Algunos tipos de DAEs lineales	9
3. Estudio de soluciones clásicas. Existencia y unicidad.	13
3.1. Formas canónicas de Kronecker y Weierstrass.	14
3.2. Cálculo de solución explícita a partir de sucesiones de Wong	18
4. Problemas de valores iniciales inconsistentes	27
4.1. Conceptos previos	27
4.2. Planteamiento del problema. Espacios de distribuciones.	28
4.3. Resolución mediante la transformada de Laplace	30
4.3.1. Justificación del uso de $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$	34
5. Resolución numérica de DAEs	35
5.1. Resolución mediante el problema perturbado	36
5.1.1. A-estabilidad y L-estabilidad de métodos de Runge-Kutta	38
5.2. Índice de diferenciabilidad	44
5.3. Resolución de DAEs de índice 1	47
5.4. Resolución de DAEs del tipo $Mu' = \varphi(u)$	49
5.4.1. Implementación en MATLAB: ode15s y ode23t	50

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado es realizar un estudio teórico y numérico de las ecuaciones diferenciales algebraicas (DAEs), una generalización de las ya conocidas ecuaciones diferenciales ordinarias. Este tipo de ecuaciones tienen la peculiaridad de que no aparecen necesariamente todas las derivadas de las variables, pudiendo aparecer incluso condiciones de carácter algebraico. En particular nos centraremos en el estudio teórico de DAEs lineales con coeficientes constantes, y posteriormente veremos como podemos resolver numéricamente DAEs de un tipo más general.

Las DAEs aparecen de forma natural a la hora de modelar matemáticamente numerosos problemas de campos como la Física (movimientos de cuerpos ligados a ciertas trayectorias), Ingeniería (circuitos eléctricos, teoría de señales), Química, etc. Al tratar con este tipo de problemas no siempre vamos a obtener sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, de hecho es bastante habitual que algunas de las condiciones entre las variables del problema se representen matemáticamente mediante ecuaciones puramente algebraicas, sin derivadas involucradas. Estas ecuaciones son las que dotan a las DAEs de su peculiar estructura. Para empezar, a la hora de resolver problemas de valores iniciales asociados a estas DAEs, los valores dados van a tener que satisfacer las ecuaciones algebraicas para garantizar la existencia de solución, en el sentido clásico. Además, en muchas ocasiones no va a ser suficiente que las funciones dadas sean continuas, sino que necesitaremos que sean de una regularidad mayor, determinada por la propia DAE, para garantizar la existencia y unicidad de solución. Esto marca una diferencia fundamental con las ecuaciones diferenciales ordinarias, para las que sí tenemos garantizada tal existencia y unicidad para todo valor inicial, gracias al Teorema de Picard, siempre que la función dada sea al menos de continua y localmente lipschitziana.

Es por ello por lo que el estudio teórico de existencia y unicidad de soluciones de DAEs, y su posterior cálculo mediante fórmulas explícitas, conduce necesariamente a la utilización de herramientas nuevas. Para el tipo de DAEs que trataremos en la primera parte de este trabajo, las lineales con coeficientes constantes, serán fundamentales las matrices de Kronecker, que son una generalización de la forma canónica de Jordan para pares de matrices. Estas matrices nos permitirán descomponer la DAE en bloques más sencillos, obteniendo así una forma canónica de Kronecker para la DAE. A partir de los bloques de dicha forma canónica podremos extraer resultados para caracterizar la existencia y unicidad de soluciones. Un razonamiento parecido se puede seguir para DAEs lineales cuyos coeficientes sí dependan de la variable temporal, aunque dada su complejidad no se tratará en este trabajo. Sin embargo, el estudio teórico de las soluciones clásicas de DAEs no lineales es mucho más complicado, y generalmente es más razonable plantear la resolución desde un enfoque numérico. Esta resolución numérica tampoco es sencilla, pues conduce de forma natural a la resolución de problemas *stiff* (rígidos), para los que será necesario utilizar métodos numéricos adaptados, como métodos de tipo Runge-Kutta o métodos multipaso.

En los primeros capítulos de este trabajo trabajaremos con ecuaciones diferenciales algebraicas con coeficientes constantes, como ya mencionamos anteriormente. En el capítulo 2 veremos algunos

ejemplos derivados de la mecánica clásica y de circuitos eléctricos para motivar el estudio de este tipo de DAEs, y mostraremos como se deben satisfacer diferentes condiciones sobre los datos iniciales y sobre la regularidad de las funciones dadas para garantizar la existencia y unicidad de solución clásica. Daremos también una definición rigurosa de DAE y de DAE lineal, y presentaremos cuatro tipos de DAEs lineales con coeficientes constantes que jugarán un papel fundamental en la descomposición mediante matrices de Kronecker que haremos más adelante.

En el capítulo 3, definiremos el concepto de solución clásica de una DAE. Siguiendo los trabajos de Stephan Trenn y Thomas Berger ([1], [2], [3]) veremos como las DAEs lineales se pueden descomponer en DAEs más sencillas, a partir del uso de matrices lápiz. Expresando la matriz lápiz asociada a la DAE utilizando matrices de Kronecker, llegaremos a una forma canónica de Kronecker para la DAE. Cada uno de los bloques de las matrices de Kronecker corresponderá a uno de los cuatro tipos de DAEs vistos en el capítulo anterior. El estudio de la existencia y unicidad de solución clásica de las DAEs vendrá dado por las diferentes condiciones necesarias que aparezcan sobre cada uno de los bloques de la forma canónica calculada. Sin embargo, el cálculo de las matrices de Kronecker es generalmente muy complicado, por lo que se deberán buscar formas alternativas para obtener otro tipo de matrices (las *quasi* matrices de Kronecker) que calcularemos de forma sencilla a partir de un conjunto de sucesiones de espacios vectoriales asociadas a las matrices de la DAE lineal de coeficientes constantes. El estudio de estas sucesiones, llamadas sucesiones de Wong, nos van a permitir dar de nuevo una caracterización de la existencia y unicidad de solución de la DAE. Además, cuando estemos bajo tales condiciones, las sucesiones de Wong nos permitirán calcular la *quasi* forma de Weierstrass de la DAE (una versión reducida de la *quasi* forma de Kronecker) que posteriormente nos conducirá a una fórmula explícita de la solución.

En el capítulo 4 plantearemos la resolución de problemas de valores iniciales inconsistentes asociados a DAEs, es decir, donde los valores iniciales no verifiquen las condiciones algebraicas de la DAE. En este caso la teoría desarrollada en los capítulos anteriores no es aplicable, pues no existirán soluciones clásicas. De forma similar a como se hace con otros tipos de ecuaciones diferenciales, buscaremos soluciones en un espacio de funciones mucho más general, el espacio de las distribuciones. Presentaremos una serie de subespacios suyos apropiados para la resolución de este tipo de problemas, y veremos como podremos utilizar herramientas como la transformada de Laplace, que generalizaremos para cierta clase de distribuciones, para resolver problemas de valores iniciales inconsistentes.

Finalmente, en el capítulo 5 daremos una serie de enfoques para resolver numéricamente DAEs de un tipo más general a las estudiadas anteriormente, siguiendo los libros de Ernst Hairer y Gerhard Wagner ([5], [6]) y las diapositivas de Jovana Andrejevic ([7]). Nos centraremos en particular en DAEs escritas en forma semi-implícita, y posteriormente se generalizará a un conjunto de DAEs aun mayor. Veremos como plantear de forma general la resolución numérica de DAEs a partir de su problema perturbado asociado, una ecuación diferencial ordinaria dependiente de un ε , de forma que la DAE sea el caso límite cuando ε sea igual a 0. Para valores de ε cercanos a 0, este problema perturbado es un problema *stiff*, por lo que su resolución numérica será complicada, siendo necesaria la utilización de métodos adaptados a este tipo de problemas. En este trabajo nos centraremos en los métodos de tipo Runge-Kutta, y veremos brevemente algunas de sus propiedades. Definiremos también el concepto de índice de una DAE, y estudiaremos el caso particular de las DAEs de índice 1, cuya resolución numérica se simplifica mucho más, desapareciendo el carácter *stiff* de la DAE, y permitiendo incluso utilizar métodos explícitos para calcular la solución numérica. Por último, utilizando MATLAB, resolveremos algunas DAEs vistas en capítulos anteriores aplicando estos métodos numéricos. También se explicará brevemente el funcionamiento de un par de funciones ya implementadas en MATLAB apropiadas para resolver problemas *stiff* y DAEs.

Capítulo 2

Motivación del problema. Conceptos básicos.

En esta sección motivaremos el estudio de las ecuaciones diferenciales algebraicas, que aparecen de forma natural a la hora de modelizar problemas de naturaleza física, biológica, etc. Como ya sabemos, muchos de estos problemas se puede modelizar utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias explícitas,

$$x' = f(x, t)$$

donde $f \in \mathcal{C}^1(\Omega \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}$ abierto. Sin embargo, en algunos casos no es posible llegar a modelos basados en EDOs de la forma anterior, y en su lugar obtendremos otro tipo de ecuaciones, llamadas ecuaciones diferenciales algebraicas. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1 Consideremos el péndulo oscilante representado en la siguiente figura.

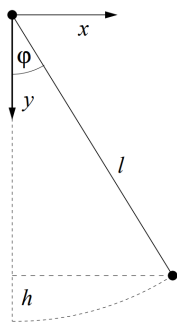


Figura 2.1: Péndulo

Nuestro objetivo es modelizar el movimiento dicho péndulo a partir de sus coordenadas cartesianas $(x, y) = (x(t), y(t))$. Para ello consideramos la ecuación de su energía potencial,

$$E_P(x, y) = mgh = mg(l - y) = mgl - mgy$$

donde m es la masa del péndulo, g es la aceleración de la gravedad y l es la longitud de la cuerda que soporta la masa. También necesitaremos la energía cinética del péndulo, dada por

$$E_C(x, y) = \frac{1}{2}m((x')^2 + (y')^2)$$

Además las variables (x, y) verifican la condición de ligadura

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

Para obtener las soluciones del problema anterior consideramos el lagrangiano asociado

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, y, \lambda) &= E_C(x, y) - E_P(x, y) - \lambda g(x, y) = \\ &= \frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2) - mgl + mgy - \lambda(x^2 + y^2 - l^2) \end{aligned}$$

que deberá verificar las siguientes ecuaciones, llamadas ecuaciones de Euler-Lagrange. Resolviéndolas obtenemos

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda'} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \begin{cases} mx'' + 2\lambda x &= 0 \\ my'' - mg + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 - l^2 &= 0 \end{cases}$$

Introduciendo los cambios de variable $u = x', v = y'$, podemos reescribir el sistema anterior como

$$\begin{cases} mu' + 2\lambda x &= 0 \\ mv' + 2\lambda y &= mg \\ x' - u &= 0 \\ y' - v &= 0 \\ x^2 + y^2 &= l^2 \end{cases}$$

Observemos que, a diferencia de un sistema diferencial ordinario, en el sistema anterior no aparecen todas las derivadas de las variables involucradas (falta λ'), y por tanto, no es posible expresarlo de la forma $X' = f(t, X')$. Más aun, la última ecuación que aparece, $x^2 + y^2 = l^2$, es una ecuación algebraica, y no una ecuación diferencial.

Si ahora queremos resolver un problema de valores iniciales asociado al sistema anterior, con $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $u(t_0) = x'(t_0) = u_0$, $v(t_0) = y'(t_0) = v_0$, $\lambda(t_0) = \lambda_0$, tomando $t = t_0$, la ecuación algebraica nos daría una condición necesaria sobre los valores iniciales de x e y ,

$$x(t_0)^2 + y(t_0)^2 = l^2 \quad \longrightarrow \quad x_0^2 + y_0^2 = l^2,$$

Este tipo de condiciones sobre los valores iniciales es algo que anteriormente no nos había aparecido a la hora de resolver EDOs, y es una de las principales características que tendrán las ecuaciones diferenciales algebraicas.

Ejemplo 2 Consideremos el siguiente circuito eléctrico, formado por una fuente de voltaje $v_V = v(t)$, una resistencia de conductancia $G > 0$ y un condensador de capacidad $C > 0$.

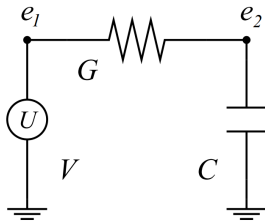


Figura 2.2: Circuito 1

La disposición de los elementos anteriores dentro del circuito se puede representar mediante la siguiente matriz,

$$A_a = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

de forma que las columnas representan a la fuente de voltaje, la resistencia y el condensador, respectivamente, y las filas representan los nodos e_1 , e_2 y el nodo masa. El valor de $(A_a)_{ij}$ es igual a 1 si circula corriente desde el nodo i hacia el elemento j , -1 si circula corriente desde el elemento j al nodo i , y 0 si no están conectados directamente. Por construcción, las filas de esta matriz son linealmente independientes.

Si eliminamos la última fila, correspondiente al nodo masa, obtendremos una versión simplificada de la matriz anterior, llamada matriz de incidencia,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir de esta matriz vamos a obtener ecuaciones para las intensidades $i = (i_V, i_G, i_C)$ y las caídas de tensión $v = (v_V, v_G, v_C)$ de los componentes anteriores, y para los voltajes $e = (e_1, e_2)$ de los nodos del circuito. Utilizando los siguientes resultados físicos

1. *Primera Ley de Kirchoff*: En cada nodo la suma de las intensidades es nula, es decir, $Ai = 0$.
2. *Segunda Ley de Kirchoff*: En cada rama la suma de los voltajes es nula, es decir, $v = A^T e$.
3. *Ley de Ohm*: $i_G = Gv_G$
4. $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$

se llega al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -i_V + i_G = 0 \\ -i_G + i_C = 0 \\ v_V = -e_1 \\ v_G = e_1 - e_2 \\ v_C = e_2 \\ i_G = Gv_G \\ i_C = C \frac{dv_C}{dt} \end{cases}$$

Vamos a simplificarlo. Partiendo de la primera,

$$-i_V + i_G = 0 \implies -i_V + Gv_G = 0 \implies -i_V + G(e_1 - e_2) = 0$$

Partiendo de la segunda,

$$-i_G + i_C = 0 \implies -Gv_G + C \frac{dv_C}{dt} = 0 \implies -G(e_1 - e_2) + C \frac{de_2}{dt} = 0$$

Finalmente, la ecuación $v_V = -e_1$ y el dato inicial $v_V = v(t)$ nos llevan a

$$-e_1 = v$$

Por tanto, el sistema anterior se simplifica a un sistema de ecuaciones diferenciales para las variables i_V, e_1 y e_2 , que matricialmente podemos expresar como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ i_V' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -G & G & 1 \\ G & -G & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ i_V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$$

De nuevo obtenemos otro sistema de ecuaciones que no se puede expresar de la forma $X' = f(t, X)$, pues, al no aparecer las derivadas de i_V y e_1 , la matriz que acompaña a las derivadas no es invertible. En este caso podemos resolver el sistema fácilmente,

$$\begin{aligned} Ce_2' &= G(e_1 - e_2) = G(v - e_2) \implies e_2' = -C^{-1}G(v - e_2) \\ \implies e_2(t) &= e_2(t_0)e^{C^{-1}G(t_0-t)} - C^{-1}Ge^{-C^{-1}Gt} \int_{t_0}^t v(s)e^{C^{-1}Gs} ds, \\ e_1 &= -v \\ i_V &= G(e_1 - e_2) \end{aligned}$$

Observemos que, al imponer $t = t_0$, aparecen condiciones necesarias sobre los datos iniciales, al igual que en ejemplo anterior. De nuevo, las ecuaciones algebraicas nos dan

$$e_1(t_0) = -v(t_0), \quad i_V(t_0) = -Ge_2(t_0) - Gv(t_0)$$

Ejemplo 3 Consideremos la siguiente variante del ejemplo anterior, en la que se sustituye la fuente de voltaje por una fuente de intensidad $i_I = i(t)$, y el condensador por una bobina de inductancia L .

La matriz de adyacencia para este circuito sigue siendo

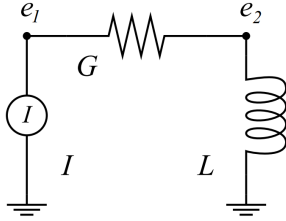


Figura 2.3: Circuito 2

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir de A , utilizando las Leyes de Kirchoff, la Ley de Ohm y la Ley de Faraday

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -i_I + i_G = 0 \\ -i_G + i_L = 0 \\ v_I = -e_1 \\ v_G = e_1 - e_2 \\ v_L = e_2 \\ i_G = Gv_G \\ v_L = L \frac{di_L}{dt} \end{cases}$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} v_L = e_2 &\implies L \frac{di_L}{dt} = e_2 \\ i_L = i_G &\implies i_L = i_I \implies i_L = i \\ v_G = e_1 - e_2 &\implies i_G = G(e_1 - e_2) \implies i_L = G(e_1 - e_2) \end{aligned}$$

llegamos al sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ i_L' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G & -G & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix},$$

en el que también aparecen ecuaciones algebraicas. En este caso la solución es

$$\begin{cases} i_L = i \\ e_2 = Li' \\ e_1 = Li' + G^{-1}i \end{cases}$$

Observemos que para que la solución anterior exista es necesario que el $i = i(t)$ sea diferenciable. Este tipo de condiciones sobre los datos también aparecerán de forma frecuente al estudiar las soluciones de las DAEs.

Además, si queremos resolver un problema de valores iniciales asociados a la DAE anterior, con $e_1(t_0) = e_{10}$, $e_2(t_0) = e_{20}$ y $i_L(t_0) = i_{L0}$, tomando $t = t_0$ en las soluciones anteriores, se llega a las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} i_{L0} = i(t_0) \\ e_{20} = Li'(t_0) \\ e_{10} = Li'(t_0) + G^{-1}i(t_0) \end{cases}$$

En este caso, todos los valores iniciales quedan determinados por la propia DAE.

Las DAEs que aparecen en los dos últimos ejemplos tienen solución única, bajo ciertas condiciones sobre los datos y valores iniciales (vistas anteriormente), y son sencillas de calcular. Sin embargo, no todas las DAEs van a tener solución, y de tenerla, no tiene por que ser única. Esta es la principal motivación del estudio teórico realizado en la primera parte de este trabajo. Nos centraremos en el estudio de ecuaciones diferenciales algebraicas lineales, que definiremos a continuación. También veremos algunos tipos de DAEs lineales, que tendrán especial importancia en el capítulo 3.

Definición 2.0.1 (DAE) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Consideremos una ecuación diferencial ordinaria implícita,

$$F(x'(t), x(t), t) = 0$$

con $t \in \Omega$, $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{2n} \times \Omega, \mathbb{R}^m)$.

Si $\frac{\partial F}{\partial x'}$ es regular en algún cero de F , entonces, por el teorema de la función implícita, es posible expresar la ecuación anterior como una ecuación diferencial ordinaria explícita $x' = f(x, t)$ en un entorno de dicho cero, con f de clase \mathcal{C}^1 .

Si $\frac{\partial F}{\partial x'}$ es singular en todo punto, entonces la transformación anterior no es posible, y diremos que la ecuación es una ecuación diferencial algebraica (DAE).

Definición 2.0.2 (DAE lineal) Diremos que una ecuación diferencial algebraica es lineal si es de la forma

$$E(t)x'(t) = A(t)x(t) + f(t)$$

con $E, A \in \mathcal{C}(\Omega, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$, $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Si $E, A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ no dependen de t , diremos que la DAE es de coeficientes constantes.

Ejemplo 4 Las ecuaciones que habíamos obtenido en los ejemplos 2 y 3 son ecuaciones diferenciales algebraicas lineales de coeficientes constantes. La ecuación obtenida en el ejemplo 1 es una ecuación diferencial algebraica, pero no es lineal. Esta ecuación se puede reescribir como

$$F(x', y', u', v', \lambda', x, y, u, v, \lambda, t) = 0$$

con $F : \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^5$ dada por

$$F(x', y', u', v', \lambda', x, y, u, v, \lambda, t) = \begin{pmatrix} mu' + 2\lambda x \\ mv' + 2\lambda y - mg \\ x' - u \\ y' - v \\ x^2 + y^2 - l^2 \end{pmatrix}$$

Además, si llamamos $s = (x, y, u, v, \lambda)$,

$$\frac{\partial F}{\partial s'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que es una matriz singular.

En la primera parte de este trabajo nos centraremos en el estudio teórico de DAEs lineales con coeficientes constantes. Nos interesará resolver problemas de valores iniciales del tipo

$$(P) \begin{cases} Ex' = Ax + f & t \in \Omega = (0, +\infty) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Observemos que si E es cuadrada e invertible, entonces la DAE se puede transformar en una ecuación diferencial ordinaria $x' = E^{-1}Ax + E^{-1}f$, por lo que (P) se simplifica a un problema de valores iniciales para EDOs. En este caso:

- Como f es continua, entonces $F(x, t) = E^{-1}Ax + E^{-1}f(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n \times \Omega, \mathbb{R}^n) \cap Liploc(x, \mathbb{R}^n \times \Omega)$. Por el teorema de Picard, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ existe una única solución x del problema

$$\begin{cases} x' = E^{-1}Ax + E^{-1}f & t \in \Omega = (0, +\infty) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

- Si además $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, entonces la solución $x \in \mathcal{C}^{k+1}(\Omega)$.

Sin embargo, esto no es cierto para DAEs, en general.

Ejemplo 5 Consideremos la DAE lineal

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x'_2 = x_1 + f_1 \\ 0 = x_2 + f_2 \\ 0 = f_3 \end{cases}$$

cuyas soluciones vienen dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= -f_1 - f'_2 \\ x_2 &= -f_2 \\ 0 &= f_3 \end{aligned}$$

Observemos que

- Para que exista solución de un problema de valores iniciales asociado a esta DAE, estos deben verificar que $x_1(0) = -f_1(0) - f'_2(0)$ y $x_2(0) = -f_2(0)$. Esta condición aparecerá frecuentemente en otros problemas del tipo (P), donde los valores iniciales (no necesariamente todos) no se pueden elegir de forma arbitraria si queremos que exista una solución en el sentido clásico (como veremos en el Capítulo 3).
- También aparecen condiciones necesarias sobre f . En este caso $f_3 = 0$ (tipo estructural) y $f_2 \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ (tipo diferencial).
- Finalmente, la variable x_3 queda libre, por lo que de existir solución, no es única.

2.1. Algunos tipos de DAEs lineales

En esta sección veremos cuatro tipos de DAEs lineales con coeficientes constantes, que jugarán un papel fundamental en el estudio de las soluciones clásicas de las DAEs. De hecho, mas adelante probaremos que toda DAE del tipo $E x' = Ax + f$ es combinación de DAEs de estos cuatro tipos.

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Visto anteriormente, es el caso de que la matriz E sea cuadrada e invertible, de forma que la DAE se puede expresar de la forma

$$x' = \hat{A}x + \hat{f}$$

En este caso existe una única solución, fijados x_0 y f continua cualesquiera.

DAEs nilpotentes

Diremos que una ecuación diferencial algebraica lineal es **nilpotente** si es del tipo

$$Nx' = x + f$$

con N una matriz nilpotente, es decir, tal que existe un $\eta \in \mathbb{N}$ tal que $N^\eta = 0$, llamado índice de nilpotencia de N . En este contexto, también diremos que η es el **índice de Kronecker** de la DAE anterior.

El procedimiento para resolver este tipo de DAEs consiste en derivar la ecuación y multiplicarla por N un total de $\eta - 1$ veces.

$$\begin{aligned} Nx' &= x + f \\ N^2x'' &= Nx' + Nf' = x + f + Nf' \\ N^3x''' &= Nx' + Nf' + N^2f'' = x + f + Nf' + N^2f'' \\ &\dots \\ N^\eta x^{(\eta)} &= x + f + Nf' + \dots + N^{\eta-1}f^{(\eta-1)} \end{aligned}$$

Usando que $N^\eta = 0$, obtenemos

$$x = - \sum_{i=0}^{\eta-1} N^i f^{(i)}$$

Observemos que para que exista tal solución es necesario que $f \in \mathcal{C}^{\eta-1}(\Omega)$. A este tipo de condiciones sobre la regularidad del dato f se les llama **restricciones de tipo diferencial**. Además, a la hora de resolver un problema de valores iniciales asociado a una DAE nilpotente, estos deben verificar

$$x_0 = x(0) = - \sum_{i=0}^{\eta-1} N^i f^{(i)}(0)$$

En este caso la solución sería única y quedaría totalmente determinada por f y sus derivadas.

DAEs indeterminadas

Diremos que una DAE lineal es **indeterminada** si para todo valor inicial $x_0 \in \mathbb{R}$ y toda f continua existe solución, pero no es única.

Ejemplo 6 Consideremos la DAE

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} x' &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} x + f \iff \\ \iff \begin{cases} x'_2 &= x_1 + f_1 \\ x'_3 &= x_2 + f_2 \\ &\dots \\ x'_n &= x_{n-1} + f_{n-1} \end{cases} \end{aligned}$$

donde las matrices anteriores son de tamaño $(n-1) \times n$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$.

La DAE anterior se puede escribir de forma equivalente como

$$\begin{pmatrix} x'_2 \\ x'_3 \\ \dots \\ x'_{n-1} \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + f$$

que es una EDO donde la variable x_1 queda libre. Por tanto, fijado x_1 , existe una única solución (x_2, \dots, x_n) para todo valor inicial y toda f continua, es decir, la DAE anterior tiene solución para $x_0 \in \mathbb{R}$ y f continua, pero no es única.

DAEs sobredeterminadas

Diremos que una DAE lineal es **sobredeterminada** si no siempre tiene solución, pero que de existir, es única.

La existencia de solución de DAEs de este tipo dependerá de si se verifican una serie de restricciones de tipo diferencial (regularidad de f) y de tipo estructural (f y sus derivadas verifican alguna ecuación algebraica), y si los datos x_0 verifican alguna ecuación algebraica.

Observación 2.1.1 *Las DAEs nilpotentes son un caso particular de DAEs sobredeterminadas, donde no aparecen restricciones sobre f de tipo estructural. Dada su importancia se estudian como un caso aparte.*

Ejemplo 7 Consideremos la DAE

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} x' = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} x + f \iff$$

$$\iff \begin{cases} 0 & = & x_1 + f_1 \\ x'_1 & = & x_2 + f_2 \\ & \dots & \\ x'_{n-1} & = & x_n + f_n \\ x'_n & = & f_{n+1} \end{cases}$$

donde las matrices anteriores son de tamaño $(n+1) \times n$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

La DAE anterior se puede escribir de forma equivalente como

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} x' = x + f \wedge x'_n = f_{n+1}$$

Observemos que la primera parte corresponde a una DAE nilpotente, pues la matriz

$$N = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tiene orden de nilpotencia $\eta = n$. Repitiendo el mismo razonamiento, obtenemos

$$x = - \sum_{i=0}^{n-1} N^i f^i)$$

Esta expresión tiene sentido si $f \in \mathcal{C}^{n-1}(\Omega)$, que es una **restricción diferencial**. Además los valores iniciales deben verificar

$$x_0 = - \sum_{i=0}^{n-1} N^i f^i)(0)$$

Ahora, imponiendo $x'_n = f_{n+1}$, se llega a la condición

$$\sum_{i=0}^{n+1} f_i^{n-i+1) = 0,$$

que es una **restricción estructural** sobre f . Cuando se den estas tres condiciones, entonces existirá una única solución de esta DAE.

Capítulo 3

Estudio de soluciones clásicas. Existencia y unicidad.

En este capítulo vamos a estudiar la existencia y unicidad de soluciones de DAEs lineales con coeficientes constantes, mediante transformaciones a otras DAEs equivalentes. Para ello obtendremos una nueva forma canónica, llamada forma canónica de Kronecker, del par (E, A) . Definiremos una noción de regularidad para DAEs, y en el caso de DAEs regulares, obtendremos una fórmula explícita para la solución. Empezamos definiendo el concepto de solución clásica de una DAE.

Definición 3.0.1 (Solución clásica) Diremos que una función $x : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una solución clásica de la ecuación diferencial algebraica $Ex' = Ax + f$ si:

1. $x \in C^1(\Omega)$
2. $Ex'(t) = Ax(t) + f(t) \quad \forall t \in \Omega$

Con el objetivo de estudiar las soluciones clásicas de diferentes DAEs, se presenta la siguiente relación de equivalencia sobre matrices:

$$(E_1, A_1) \cong (E_2, A_2) \iff \exists S, T \text{ invertibles: } SE_1T = E_2, SA_1T = A_2$$

Observemos que si x es una solución de la ecuación $E_1x' = A_1x + f$ con $(E_1, A_1) \cong (E_2, A_2)$, entonces, multiplicando por S y realizando el cambio de variable $x = Tz$, z es solución de

$$SE_1Tz' = SA_1Tz + Sf \iff E_2z' = A_2z + g$$

En este caso diremos que las ecuaciones $E_1x' = A_1x + f$ y $E_2z' = A_2z + g$ son **DAEs equivalentes**.

El objetivo de los resultados presentados a continuación es transformar DAEs en otras equivalentes cuyas matrices presenten una estructura simplificada que permita su estudio teórico y, de ser posible, la obtención de soluciones clásicas. Por comodidad, en vez de trabajar sobre el par (E, A) , trabajaremos sobre su **matriz lápiz** asociada

$$sE - A \in \mathbb{R}^{m \times n} [s]$$

El papel de la variable s debe entenderse como $\frac{d}{dt}$, es decir

$$(sE - A)x = f \iff E \frac{d}{dt}x = Ax + f$$

3.1. Formas canónicas de Kronecker y Weierstrass.

En esta sección nos centraremos en estudiar la existencia y unicidad de soluciones de la DAE $Ex' = Ax + f$. Para ello, lo primero que vamos a hacer es transformarla en una equivalente considerando la forma canónica de Kronecker del par (E, A) , que presentamos a continuación.

Teorema 3.1.1 (Forma canónica de Kronecker) *Consideremos la DAE $Ex' = Ax + f$. Sea $sE - A$ su matriz lápiz asociada. Entonces $\exists S \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrices invertibles tales que*

$$S(sE - A)T = \text{diag}(\mathcal{P}_{\varepsilon_1}(s), \dots, \mathcal{P}_{\varepsilon_a}(s), \\ \mathcal{J}_{\rho_1}(s), \dots, \mathcal{J}_{\rho_b}(s), \\ \mathcal{N}_{\sigma_1}(s), \dots, \mathcal{N}_{\sigma_c}(s), \\ \mathcal{L}_{\eta_1}(s), \dots, \mathcal{L}_{\eta_d}(s))$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_a, \rho_1, \dots, \rho_b, \sigma_1, \dots, \sigma_c, \eta_1, \dots, \eta_d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, donde

$$\mathcal{P}_\varepsilon(s) = s \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\varepsilon \times (\varepsilon+1)}[s]$$

$$\mathcal{J}_\rho(s) = sI - \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{\rho \times \rho}[s], \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{N}_\sigma(s) = s \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} - I \in \mathbb{R}^{\sigma \times \sigma}[s]$$

$$\mathcal{L}_\eta(s) = s \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\eta+1) \times \eta}[s]$$

A la matriz $S(sE - A)T$ se le llama forma canónica de Kronecker (KCF) de $sE - A$. También diremos que la DAE $SETz' = SATz + Sf$ es una forma canónica de Kronecker de $Ex' = Ax + f$, con $x = Tz$.

La demostración de este resultado se puede encontrar en [10].

Observación 3.1.1 *Es posible que existan bloques \mathcal{P}_ε con $\varepsilon = 0$ y \mathcal{L}_η con $\eta = 0$. En estos casos introducen en la KCF columnas de ceros y filas de ceros, respectivamente.*

Ejemplo 8 Consideremos la DAE del ejemplo 5, cuya matriz lápiz es

$$sE - A = s \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Intercambiando $F_1 \leftrightarrow F_2$ y $C_1 \leftrightarrow C_3$ se llega a la forma canónica de Kronecker

$$S(sE - A)T = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \text{diag}(\mathcal{P}_0, \mathcal{N}_2, \mathcal{L}_0)$$

donde S y T son las matrices asociadas a los intercambios de columnas y filas, respectivamente.

Si consideramos ahora la forma canónica de Kronecker $SETz' = SATz + g$ de la DAE $Ex' = Ax + f$ y estudiamos por separado el comportamiento de cada bloque observaremos lo siguiente:

■ **Bloques \mathcal{P}_ε**

Corresponden a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & \dots & & & & \\ & & & & & & & & 0 & 1 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ \dots \\ z'_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & & & \dots & & & & \\ & & & & & & & & 1 & 0 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_{\varepsilon-1} \end{pmatrix}$$

que es una DAE de **tipo indeterminado** (ver ejemplo 2 en 2.1). Recordemos que en este caso, para cualesquiera valores iniciales $(z_1^0, \dots, z_\varepsilon^0)$ y $(g_1, \dots, g_{\varepsilon-1})$ continuas, existirá solución para las variables $(z_1, \dots, z_\varepsilon)$, pero no será única, pues z_1 queda libre. En el caso $\varepsilon = 0$, equivale a decir que la variable z_1 no aparece en la DAE, y por tanto se puede tomar libremente.

■ **Bloques \mathcal{J}_ρ**

Corresponden a

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ \dots \\ z'_{\rho-1} \\ z'_\rho \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & & \dots & & & & \\ & & & & & & & & \lambda & 1 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_{\rho-1} \\ z_\rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_{\rho-1} \\ g_\rho \end{pmatrix}$$

que es una **ecuación diferencial ordinaria**. En este caso existe una única solución para las variables (z_1, \dots, z_ρ) para cualesquiera valores iniciales (z_1^0, \dots, z_ρ^0) y (g_1, \dots, g_ρ) continuas.

■ **Bloques \mathcal{N}_σ**

Corresponden a

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & & \dots & & \\ & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ \dots \\ z'_{\sigma-1} \\ z'_\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_{\sigma-1} \\ z_\sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_{\sigma-1} \\ g_\sigma \end{pmatrix}$$

que es una DAE de **tipo nilpotente**. La matriz N anterior tiene orden de nilpotencia σ . En este caso existe una única solución para $z = (z_1, \dots, z_\sigma)$ dada por

$$z = - \sum_{i=0}^{\sigma-1} N^i g^i = \begin{pmatrix} -g_1 \\ -g_2 - g'_1 \\ \dots \\ -g_\sigma - g'_{\sigma-1} - \dots - g_1^{\sigma-1} \end{pmatrix}$$

con $g = (g_1, \dots, g_\sigma)$, siempre que se cumpla la restricción diferencial $g \in \mathcal{C}^{\sigma-1}(\Omega)$ (en realidad, basta que $g_k \in \mathcal{C}^{\sigma-k}(\Omega)$, $k = 1, \dots, \sigma$), y los valores iniciales $(z_1^0, \dots, z_\sigma^0)$ verifiquen

$$z_{k_0} = - \sum_{i=1}^k g_i^{k-i}(0), \quad k = 1, \dots, \sigma$$

■ **Bloques \mathcal{L}_η**

Corresponden a

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & & \dots & & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & \dots & & \\ & & & & & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ \dots \\ z'_{\eta-1} \\ z'_\eta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & & & & \dots & & & & \\ & & & & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & & & & 0 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_{\eta-1} \\ z_\eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_\eta \\ g_{\eta+1} \end{pmatrix}$$

que es una DAE de **tipo sobredeterminado** (ver *Ejemplo 3* en 2.1). En este caso existirá una única solución

$$z = \begin{pmatrix} -g_1 \\ -g_2 - g'_1 \\ \dots \\ -g_\eta - g'_{\eta-1} - \dots - g_1^{\eta-1} \end{pmatrix}$$

si se verifica la restricción diferencial $g \in \mathcal{C}^{\eta-1}(\Omega)$ (al igual que antes, en realidad basta que $g_k \in \mathcal{C}^{\eta-k}(\Omega)$, $k = 1, \dots, \eta$), y se tiene que $z'_\eta = g_{\eta+1}$, es decir, se verifica la restricción estructural

$$\sum_{i=0}^{\eta+1} g_i^{\eta-i+1} = 0,$$

Además los valores iniciales $(z_{1_0}, \dots, z_{\eta_0})$ deben cumplir que

$$z_{k_0} = - \sum_{i=1}^k g_i^{k-i}(0), \quad k = 1, \dots, \eta$$

Como consecuencia directa del Teorema 3.1.1 y de la observación anterior se tiene lo siguiente:

Corolario 3.1.1 *Toda DAE es combinación de EDOs y DAEs de tipo nilpotente, sobredeterminado e indeterminado, correspondiente a los bloques de la forma canónica de Kronecker asociada.*

Además teniendo en cuenta la existencia y unicidad de solución para cada tipo de DAE deducimos también el siguiente resultado:

Corolario 3.1.2 (Existencia y unicidad) *Sea la ecuación diferencial algebraica $Ex' = Ax + f$, f y sea*

$$S(sE - A)T = \text{diag}(\mathcal{P}_{\varepsilon_1}(s), \dots, \mathcal{P}_{\varepsilon_a}(s), \\ \mathcal{J}_{\rho_1}(s), \dots, \mathcal{J}_{\rho_b}(s), \\ \mathcal{N}_{\sigma_1}(s), \dots, \mathcal{N}_{\sigma_c}(s), \\ \mathcal{L}_{\eta_1}(s), \dots, \mathcal{L}_{\eta_d}(s))$$

su forma canónica de Kronecker asociada. Sea $\delta = \max\{\sigma_1, \dots, \sigma_c, \eta_1, \dots, \eta_d, 0\}$. Entonces, para toda $f \in \mathcal{C}^{\delta-1}(\Omega)$, la DAE anterior verifica lo siguiente:

1. Tiene solución clásica si en la KCF asociada no aparecen bloques \mathcal{L}_η .
2. Además dicha solución queda únicamente determinada por los valores iniciales $x(0)$ si no aparecen bloques \mathcal{P}_ε .

Se llamará **forma canónica de Weierstrass (WCF)** a una KCF en la que no aparezcan bloques de los dos tipos anteriores. En este caso, es de la forma:

$$S(sE - A)T = s \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

con N y J matrices en forma canónica de Jordan, N nilpotente.

Demostración

1. Si no aparecen bloques del tipo \mathcal{L}_η , entonces la DAE es una combinación de EDOs, DAEs indeterminadas y DAEs nilpotentes. Las dos primeras tienen siempre solución, y las DAEs nilpotentes $\mathcal{N}_{\sigma_i} z' = z + f$ tienen solución si $f \in \mathcal{C}^{\sigma_i-1}(\Omega) \forall i$, lo cual es cierto por hipótesis.

2. Si además no aparecen bloques \mathcal{P}_ε , la DAE tampoco poseerá parte indeterminada. Como el resto de

bloques corresponden a DAEs nilpotentes y a EDOs, entonces no quedan variables libres y por tanto la solución queda determinada de forma única por los valores iniciales. Es decir, las variables (z_1, \dots, z_k) correspondientes a las EDOs tendrán una única solución para cualesquiera valores iniciales $(z_{1_0}, \dots, z_{k_0})$ fijados, y las variables (z_k, \dots, z_n) correspondiente a las DAEs nilpotentes tendrán una única solución para los valores iniciales que dichas DAEs determinan de forma implícita.

□

Ejemplo 9 Consideremos la DAE del ejemplo 2, cuya matriz lápiz es

$$sE - A = s \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -G & G & 1 \\ G & -G & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & -G & -1 \\ -G & sC + G & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizando operaciones entre filas y columnas,

$$\begin{aligned} sE - A &\xrightarrow{\substack{F_1 + GF_3 \\ F_2 - GF_3}} \begin{bmatrix} 0 & -G & -1 \\ 0 & sC + G & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 - GC_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & sC + G & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} 0 & sC + G & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{bmatrix} sC + G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{F_2 \leftrightarrow F_3 \\ C_2 \leftrightarrow C_3}} \begin{bmatrix} sC + G & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{C^{-1}F_1} \begin{bmatrix} s + \frac{G}{C} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Obtenemos una forma canónica de Weierstrass

$$S(sE - A)T = \left[\begin{array}{c|cc} s + \frac{G}{C} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right] = s \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-G}{C} & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

Las matrices S y T corresponden a las operaciones por filas y columnas realizadas anteriormente. Observemos que como la DAE admite una forma canónica de Weierstrass, entonces tiene una única solución determinada por los valores iniciales, tal y como vimos al final del ejemplo 2. En este caso debían ser

$$\begin{cases} e_2(t_0) \text{ fijado} \\ e_1(t_0) = -v(t_0) \\ i_V(t_0) = -Ge_2(t_0) - Gv(t_0) \end{cases}$$

Ya sabemos que escribir una DAE en WCF nos garantiza que para cualquier f lo suficientemente regular exista una única solución. Ahora nos interesa encontrar una condición sencilla que nos permita saber cuando la WCF existe, sin tener que pasar por el cálculo explícito de una KCF. Para ello definimos la siguiente noción de regularidad:

Definición 3.1.1 (Regularidad) Una DAE lineal con coeficientes constantes $Ex' = Ax + f$ se dice regular si su matriz lápiz asociada es regular, es decir, $sE - A \in \mathbb{R}^{n \times n}[s]$ es cuadrada y $\det(sE - A)$ no es nulo como polinomio en la variable s . En este caso también se dirá que el par (E, A) es regular.

El siguiente teorema permite caracterizar la existencia de una forma canónica de Weierstrass, es decir, caracterizar la existencia y unicidad de solución de las DAEs.

Teorema 3.1.2 (Forma canónica de Weierstrass) $sE - A$ admite una WCF si y solo si $sE - A$ es regular.

Es decir, la DAE tiene una solución, únicamente determinada por los valores iniciales, para toda f lo suficientemente regular si y solo si es regular.

La demostración de este resultado se puede encontrar en [11].

Ejemplo 10 Consideremos la DAE del ejemplo 2, cuya matriz lápiz era

$$sE - A = \begin{bmatrix} G & -G & -1 \\ -G & sC + G & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que es una matriz cuadrada. Además

$$\det(sE - A) = sC + G,$$

que no es el polinomio nulo. Por tanto la DAE del ejemplo 2 admite una forma canónica de Weierstrass y por tanto tiene una solución únicamente determinada por los valores iniciales (tal y como vimos en el ejemplo anterior).

Ejemplo 11 Consideremos la DAE del ejemplo 3, cuya matriz lápiz es

$$sE - A = s \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G & -G & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G & G & 1 \\ 0 & -1 & sL \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que también es una matriz cuadrada, cuyo determinante

$$\det(sE - A) = G,$$

no es nulo, como polinomio en s . Por tanto la DAE del ejemplo 3 admite una forma canónica de Weierstrass, y por tanto tiene una única solución determinada de manera única por los valores iniciales.

3.2. Cálculo de solución explícita a partir de sucesiones de Wong

Una vez caracterizada la existencia y unicidad de solución de una DAE de forma sencilla, el siguiente objetivo es obtener una fórmula explícita cuando sea posible.

Podríamos pensar que una vez obtenida una KCF de la DAE (WCF en el caso regular), resolverla sería cuestión de calcular la solución para cada bloque diagonal y posteriormente deshacer el cambio de variable. Sin embargo, el cálculo de las formas canónicas de Kronecker y Weierstrass no siempre es tan sencillo como el de los ejemplos 8 y 9. En general, es un proceso numéricamente costoso.

En esta sección se presentará una versión simplificada de las formas canónicas anteriores, que se obtendrán a partir de unas sucesiones de espacios vectoriales, llamadas sucesiones de Wong. Una vez obtenidas estas formas podremos obtener una solución de la DAE, siempre que se den las condiciones que nos garanticen la existencia de solución.

Definición 3.2.1 (Sucesiones de Wong) Sean $E, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Se definen las sucesiones de Wong del par (E, A) como las sucesiones

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 &= \mathbb{R}^n, & \mathcal{V}_{i+1} &= A^{-1}E\mathcal{V}_i & \forall i \geq 0 \\ \mathcal{W}_0 &= \{0\}, & \mathcal{W}_{j+1} &= E^{-1}A\mathcal{W}_j & \forall j \geq 0 \end{aligned}$$

Nota: En la definición anterior se utiliza la notación

$$\begin{aligned} MX &= \{Mx : x \in X\} \\ M^{-1}X &= \{x : Mx \in X\} \end{aligned}$$

Ejemplo 12 Vamos a calcular las sucesiones de Wong de las matrices (E, A) de la DAE del ejemplo 5, con

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Empecemos calculando la sucesión (\mathcal{V}_i) .

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 &= \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{V}_1 &= A^{-1}E\mathbb{R}^3 = A^{-1}\{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{V}_2 &= A^{-1}E\{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} = A^{-1}\{(0, 0, 0)\} = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{V}_3 &= A^{-1}E\{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = A^{-1}\{(0, 0, 0)\} = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathcal{V}_2 \end{aligned}$$

Por tanto la sucesión (\mathcal{V}_i) es

$$\begin{cases} \mathcal{V}_0 = \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{V}_1 = \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{V}_i = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \quad \forall i \geq 2 \end{cases}$$

Observemos que $\mathcal{V}_0 \supset \mathcal{V}_1 \supset \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_4 = \dots$, la sucesión es constante a partir de $i^* = 2$. Vamos a calcular ahora la sucesión (\mathcal{W}_j) .

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0 &= \{(0, 0, 0)\} \\ \mathcal{W}_1 &= E^{-1}A\{(0, 0, 0)\} = E^{-1}\{(0, 0, 0)\} = \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{W}_2 &= E^{-1}A\{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} = E^{-1}\{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{W}_3 &= E^{-1}A\mathbb{R}^3 = E^{-1}\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3 = \mathcal{W}_2 \end{aligned}$$

Por tanto la sucesión (\mathcal{W}_j) es

$$\begin{cases} \mathcal{W}_0 = \{(0, 0, 0)\} \\ \mathcal{W}_1 = \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{W}_j = \mathbb{R}^3 \quad \forall j \geq 2 \end{cases}$$

Observemos que $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_4 = \dots$, la sucesión es constante a partir de $j^* = 2$.

Las propiedades que aparecen en el ejemplo anterior se dan para todas las sucesiones de Wong. Se tiene el siguiente resultado:

Lema 3.2.1 Para todo par $E, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existen $i^*, j^* \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 \supset \mathcal{V}_1 \supset \dots \supset \mathcal{V}_{i^*} = \mathcal{V}_{i^*+1} = \dots \\ \mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}_1 \subset \dots \subset \mathcal{W}_{j^*} = \mathcal{W}_{j^*+1} = \dots \end{aligned}$$

Se definen los **límites de Wong** \mathcal{V}^* y \mathcal{W}^* del par (E, A) como los espacios \mathcal{V}_{i^*} y \mathcal{W}_{j^*} anteriores, respectivamente.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^* &= \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_i = \bigcap_{i=0}^{i^*} \mathcal{V}_i = \mathcal{V}_{i^*} \\ \mathcal{W}^* &= \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_j = \bigcup_{j=0}^{j^*} \mathcal{W}_j = \mathcal{W}_{j^*} \end{aligned}$$

Las sucesiones de Wong nos serán especialmente útiles para calcular pares de matrices S, T tales que $S(sE - A)T$ tenga una estructura similar a la de la forma canónica de Kronecker, y así poder estudiar las soluciones de las DAEs correspondientes. A continuación se enuncia dicho resultado.

Teorema 3.2.1 (Quasi-forma de Kronecker) *Sea la ecuación diferencial algebraica $Ex' = Ax + f$, y sean $\mathcal{V}^*, \mathcal{W}^*$ los límites de Wong del par (E, A) . Sean matrices $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n_P}$, $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n_R}$, $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times n_Q}$ con $n_P + n_R + n_Q = n$ y $P_2 \in \mathbb{R}^{m \times m_P}$, $R_2 \in \mathbb{R}^{m \times m_R}$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{m \times m_Q}$ con $m_P + m_R + m_Q = m$, todas ellas de rango máximo, tales que*

$$\begin{aligned} \text{im}(P_1) &= \mathcal{V}^* \cap \mathcal{W}^* \\ \text{im}(P_1) \oplus \text{im}(R_1) &= \mathcal{V}^* + \mathcal{W}^* \\ \text{im}(P_1) \oplus \text{im}(R_1) \oplus \text{im}(Q_1) &= \mathbb{R}^n \\ \text{im}(P_2) &= E\mathcal{V}^* \cap A\mathcal{W}^* \\ \text{im}(P_2) \oplus \text{im}(R_2) &= E\mathcal{V}^* + A\mathcal{W}^* \\ \text{im}(P_2) \oplus \text{im}(R_2) \oplus \text{im}(Q_2) &= \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Entonces $\hat{T} = [P_1, R_1, Q_1] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\hat{S} = [P_2, R_2, Q_2]^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son matrices invertibles tales que $\hat{S}(sE - A)\hat{T}$ es de la forma

$$\hat{S}(sE - A)\hat{T} = \begin{bmatrix} sE_P - A_P & sE_{PR} - A_{PR} & sE_{PQ} - A_{PQ} \\ & sE_R - A_R & sE_{RQ} - A_{RQ} \\ & & sE_Q - A_Q \end{bmatrix}$$

donde

1. $E_P, A_P \in \mathbb{R}^{m_P \times n_P}$, $m_P < n_P$ verifican que $\text{rango}(sE_P - A_P) = m_P \quad \forall s \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
2. $E_R, A_R \in \mathbb{R}^{m_R \times n_R}$, $m_R = n_R$ verifican que $\det(sE_R - A_R)$ es el polinomio no nulo.
3. $E_Q, A_Q \in \mathbb{R}^{m_Q \times n_Q}$, $m_Q > n_Q$ verifican que $\text{rango}(sE_Q - A_Q) = n_Q \quad \forall s \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

A la matriz anterior se le llama quasi-forma de Kronecker triangular de $sE - A$.

Más aun, sean

$$S = \begin{bmatrix} I & -G_2 & -H_2 \\ & I & -F_2 \\ & & I \end{bmatrix}^{-1} \hat{S}$$

$$T = \hat{T} \begin{bmatrix} I & G_1 & H_1 \\ & I & F_1 \\ & & I \end{bmatrix}$$

con $G_1, G_2, F_1, F_2, H_1, H_2$ soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 0 = E_{RQ} + E_R F_1 + F_2 E_Q \\ 0 = E_{PR} + E_P G_1 + G_2 E_R \\ 0 = (E_{PQ} + E_{PR} F_1) + E_P H_1 + H_2 E_Q \\ 0 = A_{RQ} + A_R F_1 + F_2 A_Q \\ 0 = A_{PR} + A_P G_1 + G_2 A_R \\ 0 = (A_{PQ} + A_{PR} F_1) + A_P H_1 + H_2 A_Q \end{cases}$$

Entonces $S(sE - A)T$ es de la forma

$$S(sE - A)T = \begin{bmatrix} sE_P - A_P & & \\ & sE_R - A_R & \\ & & sE_Q - A_Q \end{bmatrix}$$

llamada quasi-forma de Kronecker (QKF) de $sE - A$.

La demostración de este resultado se puede encontrar en las páginas 18-21 de [2].

Ejemplo 13 Consideremos la siguiente DAE:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x + f$$

Para este par de matrices, los límites de Wong son

$$\mathcal{V}^* = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1) \rangle \quad \mathcal{W}^* = \langle (0, 0, 1, 1) \rangle$$

En este caso

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^* \cap \mathcal{W}^* &= \{0\} \\ \mathcal{V}^* + \mathcal{W}^* &= \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle \\ E\mathcal{V}^* \cap A\mathcal{W}^* &= \{0\} \\ E\mathcal{V}^* + A\mathcal{W}^* &= \langle (1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 0, 0) \rangle \end{aligned}$$

Tomando

$$\begin{aligned} P_1 = \emptyset, \quad R_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ P_2 = \emptyset, \quad R_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces

$$\hat{S}E\hat{T} = \left[\begin{array}{ccc|c} E_R & E_{RQ} & & \\ \hline & & E_Q & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \hat{S}A\hat{T} = \left[\begin{array}{ccc|c} A_R & A_{RQ} & & \\ \hline & & A_Q & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

En este caso $E_P, A_P = \emptyset$. Si ahora resolvemos el sistema de ecuaciones para obtener la quasi-forma de Kronecker, una de las soluciones (que en general, no es única) es

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$G_1, G_2, H_1, H_2 = \emptyset$. La quasi-forma de Kronecker es

$$SET = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad SAT = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Vamos a estudiar la estructura de los bloques de la QKF, al igual que hicimos con la KCF.

■ **Bloque** $sE_R - A_R$

Como $sE_R - A_R$ es regular, por el Teorema 3.1.4, existe una forma canónica de Weierstrass asociada, por lo que corresponde a la parte nilpotente y a la EDO de la DAE original. Más adelante nos centraremos en el cálculo explícito de esta forma de Weierstrass, que nos llevará a una fórmula explícita para la solución.

■ **Bloque** $sE_P - A_P$

Por hipótesis, $\forall s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, las filas de $sE_P - A_P$ son linealmente independientes. Por resultados de álgebra lineal,

$$\exists [M_P(s)|K_P(s)] : (sE_P - A_P) [M_P(s)|K_P(s)] = [I|0]$$

Si ahora consideramos la DAE $E_P x'_P = A_P x_P + f_P$ correspondiente, observamos que $x_P = M_P(\frac{d}{dt})f_P + K_P(\frac{d}{dt})u$ es solución $\forall u$, pues

$$\begin{aligned} (sE_P - A_P)(M_P(s)f_P + K_P(s)u) &= (sE_P - A_P) [M_P(s)|K_P(s)] \begin{bmatrix} f_P \\ u \end{bmatrix} = \\ &= [I|0] \begin{bmatrix} f_P \\ u \end{bmatrix} = f_P \end{aligned}$$

por lo que existe solución, pero no es única pues u puede ser cualquier función. Por tanto corresponde a la parte indeterminada de la DAE.

■ **Bloque** $sE_Q - A_Q$

Por hipótesis, $\forall s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, las columnas de $sE_Q - A_Q$ son linealmente independientes. Usando el mismo resultado,

$$\exists \begin{bmatrix} M_Q(s) \\ K_Q(s) \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M_Q(s) \\ K_Q(s) \end{bmatrix} (sE_Q - A_Q) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, partiendo de la DAE

$$E_Q \frac{d}{dt} x_Q = A_Q x_Q + f_Q$$

$$(E_Q \frac{d}{dt} - A_Q) x_Q = f_Q$$

$$\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} x_Q = \begin{bmatrix} M_Q(s) \\ K_Q(s) \end{bmatrix} (E_Q \frac{d}{dt} - A_Q) x_Q = \begin{bmatrix} M_Q(s) \\ K_Q(s) \end{bmatrix} f_Q$$

de donde obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x_Q &= M_Q(\frac{d}{dt})f_Q \\ 0 &= K_Q(\frac{d}{dt})f_Q \end{cases}$$

La primera ecuación nos da una expresión explícita para x_Q que solo depende de f , por lo que hay unicidad de solución. La segunda ecuación nos da una restricción de tipo estructural sobre f , es decir, puede que no exista tal solución. Por tanto este bloque corresponde a la parte sobredeterminada de la DAE.

En el caso particular de que la DAE sea regular, entonces la quasi-forma de Kronecker se simplifica. A esta forma simplificada se le llamará quasi-forma de Weierstrass. Se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.2.2 (Quasi-forma de Weierstrass) *Los límites de Wong verifican*

1. $\mathcal{V}^* \oplus \mathcal{W}^* = \mathbb{R}^n$
2. $E\mathcal{V}^* \oplus A\mathcal{W}^* = \mathbb{R}^n$

si y solo si (E, A) es regular. En este caso, tomando V, W tales que $\text{im}(V) = \mathcal{V}^*$ y $\text{im}(W) = \mathcal{W}^*$ y definiendo $T = [V|W]$, $S = [EV|AW]^{-1}$,

$$S(sE - A)T = s \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

con $J \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $N \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ nilpotente, $n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 + n_2 = n$. A esta matriz se le llama *quasi-forma de Weierstrass (QWF) de $sE - A$* .

Mas aún, el problema de valores iniciales (P) tiene solución única si y solo si (E, A) regular y $x_0 \in \mathcal{V}^*$.

Observación 3.2.1 *La principal diferencia de la WCF con la QWF es que en esta última las matrices diagonales no están en forma canónica de Jordan.*

Observación 3.2.2 *La QWF depende de las matrices V y W escogidas.*

Ejemplo 14 Consideremos la DAE

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} x + f,$$

que es regular, pues $\det(sE - A) = -s^2 + 2$. Calculemos sus sucesiones de Wong, obtenemos que los límites son

$$\mathcal{V}^* = \langle (1, 0, 2, -1, 1), (0, 1, -1, 1, 0) \rangle$$

$$\mathcal{W}^* = \langle (1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 1) \rangle$$

Se puede comprobar que efectivamente $\mathcal{V}^* \oplus \mathcal{W}^* = \mathbb{R}^5$. Además

$$E\mathcal{V}^* = \langle (3, -2, 1, 0, 0), (-2, 1, -1, 0, 0) \rangle$$

$$A\mathcal{W}^* = \langle (1, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, -1, 1), (0, 0, 0, 1, -2) \rangle,$$

y verifican que $E\mathcal{V}^* \oplus A\mathcal{W}^* = \mathbb{R}^5$. Tomando matrices S y T como en el teorema anterior, se obtiene la quasi-forma de Weierstrass

$$SET = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad SAT = \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Al igual que con la WCF, a partir de la QWF se puede resolver la DAE de forma sencilla. Sin embargo, la principal ventaja que la QWF tiene sobre la WCF es que su calculo se basa en las sucesiones de Wong, que son sencillas de obtener. En principio parece que, como la QWF depende de las V, W escogidas, la solución que calculemos a partir de ella también dependerá de la elección de estas matrices. Sin embargo, más adelante comprobaremos que no es así, y que efectivamente, al ser (E, A) regular, hay una única solución. Para ello, el primer paso es definir las siguientes matrices.

Definición 3.2.2 (Proyectores) Sea (E, A) regular, consideremos V, W tales que $\text{im}(V) = \mathcal{V}^*$ y $\text{im}(W) = \mathcal{W}^*$ y sea

$$S(sE - A)T = s \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}$$

la QWF para $T = [V|W]$, $S = [EV|AW]^{-1}$. Se definen

1. *Proyector consistente:* $\Pi_{(E,A)} = T \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}$
2. *Proyector diferencial:* $\Pi_{(E,A)}^{diff} = T \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S$
3. *Proyector impulso:* $\Pi_{(E,A)}^{imp} = T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} S$

También nos será útil definir

$$A_{diff} = \Pi_{(E,A)}^{diff} A$$

$$E_{imp} = \Pi_{(E,A)}^{imp} E$$

Observemos que los proyectores no dependen de la elección de V, W . En efecto, si tomamos otras \tilde{V}, \tilde{W} con $\text{im}(\tilde{V}) = \mathcal{V}^*$ y $\text{im}(\tilde{W}) = \mathcal{W}^*$, entonces existen matrices de cambio de base P, Q tales que $\tilde{V} = VP$ y $\tilde{W} = WQ$, luego

$$\tilde{T} = [\tilde{V}|\tilde{W}] = [VP|WQ] = [V|W] \begin{bmatrix} P & \\ & Q \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} P & \\ & Q \end{bmatrix}$$

$$\tilde{S} = [E\tilde{V}|A\tilde{W}]^{-1} = [EVP|AWQ]^{-1} = \left([EV|AW] \begin{bmatrix} P & \\ & Q \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} P^{-1} & \\ & Q^{-1} \end{bmatrix} S$$

Por tanto

$$\Pi_{(E,A)} = \tilde{T} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{T}^{-1} = T \begin{bmatrix} P & \\ & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & \\ & Q^{-1} \end{bmatrix} T^{-1} = T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}$$

$$\Pi_{(E,A)}^{diff} = \tilde{T} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{S} = T \begin{bmatrix} P & \\ & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & \\ & Q^{-1} \end{bmatrix} S = T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S$$

$$\Pi_{(E,A)}^{imp} = \tilde{T} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tilde{S} = T \begin{bmatrix} P & \\ & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & \\ & Q^{-1} \end{bmatrix} S = T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} S$$

Ahora daremos una fórmula para la solución de una DAE regular $Ex' = Ax + f$ en función de las matrices anteriormente definidas.

Teorema 3.2.3 (Fórmula explícita) Sea (E, A) regular, $x_0 \in \mathcal{V}^*$. Entonces, las soluciones de la ecuación $Ex' = Ax + f$ vienen dadas por

$$x(t) = e^{tA_{diff}} \Pi_{(E,A)} c + \int_0^t e^{A_{diff}(t-\tau)} f(\tau) d\tau - \sum_{i=0}^{n-1} (E_{imp})^i \Pi_{(E,A)}^{imp} f^i(t) \quad (3.1)$$

para $c \in \mathbb{R}^n$. En el caso de resolver el problema de valores iniciales (P) , esta c implícitamente especifica el valor inicial x_0 , de forma que

$$x(0) = \Pi_{(E,A)} c - \sum_{i=0}^{n-1} (E_{imp})^i \Pi_{(E,A)}^{imp} f^i(0)$$

Es decir, (P) tendrá solución si y solo si

$$x(0) + \sum_{i=0}^{n-1} (E_{imp})^i \Pi_{(E,A)}^{imp} f^i(0) \in \text{im}(\Pi_{(E,A)})$$

Además, en el caso de la DAE sea homogénea, se tiene que

$$Ex' = Ax \iff x' = A_{diff}x \wedge x(0) \in \mathcal{V}^*$$

Demostración

Como (E, A) es regular, consideremos su quasi-forma de Weierstrass. Multiplicando la DAE por S y realizando el cambio $x = Tz$, obtenemos la DAE equivalente

$$SETz' = SATz + Sf$$

Sean $z = (v, w)^t$, $f = (f_1, f_2)^t$. Teniendo en cuenta la estructura de la QWF, resolver la DAE anterior es equivalente a resolver

$$v' = Jv + Sf_1 \quad Nw' = w + Sf_2$$

Resolviendo la primera ecuación (EDO) obtenemos

$$v(t) = v_0 e^{Jt} + \int_0^t e^{J(t-s)} Sf_1(s) ds$$

Resolviendo la segunda (tipo nilpotente) obtenemos

$$w(t) = - \sum_{i=0}^{n-1} N^i S f_2^i(t) = - \sum_{i=0}^{n-1} N^i S f_2^i(t)$$

Ahora calculamos x , deshaciendo el cambio de variable

$$\begin{aligned} x(t) &= T \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} e^{Jt} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} \int_0^t e^{J(t-s)} Sf_1(s) ds \\ 0 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} 0 \\ - \sum_{i=0}^{n-1} N^i S f_2^i(t) \end{pmatrix} \\ &= T e^{\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} c + \int_0^t T e^{\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (t-s)} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S f(s) ds - \sum_{i=0}^{n-1} T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} S f^i(t) \\ &= e^{T \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} t} T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} c + \int_0^t e^{T \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} (t-s)} T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S f(s) ds \\ &\quad - \sum_{i=0}^{n-1} \left(T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} T^{-1} \right)^i T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} S f^i(t) \end{aligned}$$

Usando que

$$T \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} = T \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S S^{-1} \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} T^{-1} = \Pi_{(E,A)}^{diff} A = A_{diff}$$

y que

$$T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} T^{-1} = T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} S S^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} T^{-1} = \Pi_{(E,A)}^{imp} E = E_{imp}$$

se obtiene la fórmula 3.1.

La condición sobre x_0 para que exista solución del problema de contorno se obtiene directamente de imponer $t = 0$ en la fórmula anterior.

El caso homogéneo es consecuencia directa de sustituir f por 0 y derivar en (3.1).

□

Ejemplo 15 Vamos a calcular las soluciones de la DAE del ejemplo 14 para

$$f = (0, 0, 0, t, t^2)^t$$

Recordemos que en este caso

$$\mathcal{V}^* = \langle (1, 0, 2, -1, 1), (0, 1, -1, 1, 0) \rangle$$

$$\mathcal{W}^* = \langle (1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 1) \rangle$$

$$E\mathcal{V}^* = \langle (3, -2, 1, 0, 0), (-2, 1, -1, 0, 0) \rangle$$

$$A\mathcal{W}^* = \langle (1, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, -1, 1), (0, 0, 0, 1, -2) \rangle,$$

por lo que

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Calculando los proyectores, obtenemos

$$\Pi_{(E,A)} = T \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{(E,A)}^{diff} = T \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{(E,A)}^{imp} = T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{diff} = \Pi_{(E,A)}^{diff} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$E_{imp} = \Pi_{(E,A)}^{imp} E = 0$$

Por tanto la solución viene dada por

$$x(t) = e^{tA_{diff}} \Pi_{(E,A)} c + \int_0^t e^{A_{diff}(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

para las matrices anteriores.

Capítulo 4

Problemas de valores iniciales inconsistentes

Hasta ahora hemos estudiado la existencia de soluciones clásicas de problemas del tipo (2.1). Como ya sabemos, una condición necesaria que aparece es que los valores iniciales deben ser

$$x_0 = - \sum_{i=0}^{\eta-1} N^i f^i(0)$$

para las variables asociadas a las partes sobredeterminada y nilpotente de la DAE. Sin embargo, nos puede interesar resolver problemas donde los valores iniciales no verifiquen la condición anterior. En este caso la solución que obtendríamos no sería clásica, y se debe buscar en otro espacio diferente. Para ello, al igual que se hace con el tratamiento en el sentido débil de las EDPs, se define el espacio de las distribuciones:

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}) = \{F : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ lineales y continuas}\}$$

donde $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) = \{\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \text{ sop}(\varphi) \text{ compacto}\}$.

4.1. Conceptos previos

Antes de presentar el problema que estudiaremos en esta sección, debemos recordar algunos conceptos relacionados con las distribuciones.

Definición 4.1.1 (Funciones localmente integrables) Una función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente integrable, notado $g \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$, si

$$\int_K |g(t)| dt < +\infty$$

para todo $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Estas funciones se pueden tratar como distribuciones, definiendo la distribución asociada $g_{\mathcal{D}}$ como

$$\langle g_{\mathcal{D}}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$$

Definición 4.1.2 (Derivada distribucional) Sea F una distribución, se define su derivada distribucional como la distribución F' tal que

$$\langle F', \varphi \rangle = - \langle F, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$$

Definición 4.1.3 (Delta de Dirac) Se define la delta de Dirac en $t_0 \in \mathbb{R}$ como la distribución δ_{t_0} tal que

$$\langle \delta_{t_0}, \varphi \rangle = \varphi(t_0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$$

δ_{t_0} es efectivamente una distribución pues es la derivada de la distribución correspondiente a la función localmente integrable

$$H_{t_0}(t) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

Por comodidad notaremos $\delta := \delta_0$.

En particular, si derivamos una función a trozos

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) & t < t_0 \\ g_2(t) & t > t_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \langle (g_{\mathcal{D}})', \varphi \rangle &= -\langle g_{\mathcal{D}}, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} g(t)\varphi'(t)dt = -\int_{-\infty}^{t_0} g_1(t)\varphi'(t)dt - \int_{t_0}^{+\infty} g_2(t)\varphi'(t)dt = \\ &= -\int_{-M}^{t_0} g_1(t)\varphi'(t)dt - \int_{t_0}^{+M} g_2(t)\varphi'(t)dt = \\ &= -g_1(t_0^-)\varphi(t_0) + \int_{-M}^{t_0} g_1'(t)\varphi(t)dt + g_2(t_0^+)\varphi(t_0) + \int_{t_0}^{+M} g_2'(t)\varphi(t)dt = \\ &= (g(t_0^+) - g(t_0^-))\varphi(t_0) + \int_{-\infty}^{t_0} g_1'(t)\varphi(t)dt + \int_{t_0}^{+\infty} g_2'(t)\varphi(t)dt = \\ &= \langle (g^1)_{\mathcal{D}} + (g(t_0^+) - g(t_0^-))\delta_{t_0}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

con

$$g^1(t) = \begin{cases} g_1'(t) & t < t_0 \\ g_2'(t) & t > t_0 \end{cases}$$

Por tanto $(g_{\mathcal{D}})' = (g^1)_{\mathcal{D}} + (g(t_0^+) - g(t_0^-))\delta_{t_0}$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Observemos que al derivar funciones a trozos aparecen deltas de Dirac. Esto mismo ocurrirá cuando tratemos con problemas de valores iniciales inconsistentes.

4.2. Planteamiento del problema. Espacios de distribuciones.

A la hora de estudiar problemas de valores iniciales inconsistentes, debemos entender la condición inicial $x(0) = x_0$ como la trayectoria inicial de x para $t < 0$, de forma que (2.1) se reescribirá como

$$\begin{cases} (Ex')|_{[0,+\infty)} &= (Ax + f)|_{[0,+\infty)} \\ x|_{(-\infty,0)} &= x_0|_{(-\infty,0)} \end{cases} \quad (4.2)$$

Buscaremos por tanto soluciones $x \in (\mathcal{D}'(\mathbb{R}))^n$. La restricción de una distribución F a un intervalo $I \in \mathbb{R}$ pretende ser una generalización de la restricción clásica para funciones, es decir, si g es una función real de variable real,

$$g(t)|_I = \begin{cases} g(t) & t \in I \\ 0 & t \notin I \end{cases}$$

Sin embargo, esta restricción no puede generalizarse para el conjunto de las distribuciones. En efecto, si consideramos las distribuciones

$$F_k = \sum_{i=0}^k d_i \delta_{d_i} \text{ donde } d_i = \frac{(-1)^i}{i+1}$$

y llamamos F a su distribución límite, entonces

$$F|_{[0,+\infty)} = \sum_{i=0}^{\infty} d_{2i} \delta_{d_{2i}}$$

Aplicando esta distribución restringida a una $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(t) = 1 \forall t \in [0, 1]$, entonces

$$\langle F|_{[0,+\infty)}, \varphi \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} d_{2i} \langle \delta_{d_{2i}}, \varphi \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1} = \infty$$

por lo que $F|_{[0,+\infty)}$ no está bien definida.

Por tanto, no podemos trabajar simplemente sobre el espacio de las distribuciones, donde el problema (4.2) no está bien definido, sino que deberemos buscar soluciones en algún subespacio suyo donde sí podamos definir restricciones del tipo $F|_I$. El primer espacio que se presenta es

$$\mathcal{D}_{pw\mathcal{C}^0} = \left\{ F = g + \sum_{t \in T} F_t \left| \begin{array}{l} g \in \mathcal{C}_{pw}^0, T \subset \mathbb{R} \text{ localmente finito} \\ \forall t \in T \exists n_t \in \mathbb{N}, \alpha_1^t, \dots, \alpha_{n_t}^t \in \mathbb{R} : F_t = \sum_{i=1}^{n_t} \alpha_i^t \delta_t^{(i)} \end{array} \right. \right\}$$

donde \mathcal{C}_{pw}^0 es el espacio de las funciones $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas por trozos. Observemos que $\mathcal{D}_{pw\mathcal{C}^0} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

En este espacio ya sí podemos definir restricciones a un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, de la siguiente forma:

$$F|_I = (g|_I)_{\mathcal{D}} + \sum_{t \in T \cap I} F_t,$$

donde $g|_I$ es la restricción clásica de una función real a un intervalo I .

Además las distribuciones de $\mathcal{D}_{pw\mathcal{C}^0}$ se pueden evaluar puntualmente, definiendo

- $F(t^+) := g(t^+)$
- $F(t^-) := g(t^-)$
- $F(t) := F|_{[t,t]}$

Volviendo al problema (4.2), ahora buscaremos $x \in (\mathcal{D}_{pw\mathcal{C}^0})^n$. En este caso, la restricción $x|_{[0,+\infty)}$ está bien definida. Sin embargo, $(x')|_{[0,+\infty)}$ presenta problemas, pues no es cierto que si $F \in \mathcal{D}_{pw\mathcal{C}^0}$ entonces $F' \in \mathcal{D}_{pw\mathcal{C}^0}$. En el caso de que sí ocurra, se tiene el siguiente resultado:

Lema 4.2.1 (Derivada de una restricción) *Sea $F \in \mathcal{D}_{pw\mathcal{C}^0}$ tal que $F' \in \mathcal{D}_{pw\mathcal{C}^0}$. Entonces $\forall \tau \in \mathbb{R}$,*

$$(F|_{[\tau,+\infty)})' = (F')|_{[\tau,+\infty)} + F(\tau^-)\delta_\tau$$

Por tanto, debemos trabajar sobre un conjunto de distribuciones aun más reducido. La elección adecuada es

$$\mathcal{D}_{pw\mathcal{C}^\infty} = \left\{ F = g + \sum_{t \in T} F_t \left| \begin{array}{l} g \in \mathcal{C}_{pw}^\infty, T \subset \mathbb{R} \text{ localmente finito} \\ \forall t \in T \exists n_t \in \mathbb{N}, \alpha_1^t, \dots, \alpha_{n_t}^t \in \mathbb{R} : F_t = \sum_{i=1}^{n_t} \alpha_i^t \delta_t^i \end{array} \right. \right\}$$

Claramente $\mathcal{D}_{pw\mathcal{C}^\infty} \subset \mathcal{D}_{pw\mathcal{C}^0} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En este espacio $(x')|_{[0,+\infty)}$ sí está bien definida, y por tanto tiene sentido resolver el problema (4.2) en el marco de $\mathcal{D}_{pw\mathcal{C}^\infty}$.

También vamos a definir los siguientes espacios, que utilizaremos más adelante:

$$\mathcal{C}_{imp} = \left\{ F = (g|_{[0,+\infty)})_{\mathcal{D}} + F_{imp} \left| \begin{array}{l} g \in \mathcal{C}^\infty, F_{imp} = \sum_{i=0}^k \alpha_i \delta^i, k \in \mathbb{N}, \alpha_0, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \end{array} \right. \right\}$$

$$\mathcal{C}_{imp}(\mathbb{R}^*) = \left\{ F = (f^-|_{(-\infty,0)})_{\mathcal{D}} + F_{imp} + (f^+|_{[0,+\infty)})_{\mathcal{D}} \left| \begin{array}{l} f^-, f^+ \in \mathcal{C}^\infty, F_{imp} = \sum_{i=0}^k \alpha_i \delta^i, \\ k \in \mathbb{N}, \alpha_0, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \end{array} \right. \right\}$$

Observemos que

$$\mathcal{C}_{imp} \subset \mathcal{C}_{imp}(\mathbb{R}^*) \subset \mathcal{D}_{pw\mathcal{C}^\infty} \subset \mathcal{D}_{pw\mathcal{C}^0} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

4.3. Resolución mediante la transformada de Laplace

Definición 4.3.1 (Transformada de Laplace) Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se define su transformada de Laplace como

$$\mathcal{L}(g)(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt$$

para toda $s \in \mathbb{C}$ donde la expresión esté bien definida. Por comodidad, también la notaremos como $\hat{g}(s)$.

Observemos que la transformada de Laplace no tiene en cuenta el comportamiento de g para $t < 0$.

La principal propiedad del operador $\mathcal{L}(\cdot)$ es que

$$\mathcal{L}(g')(s) = s\mathcal{L}(g)(s) - g(0^+) \quad (4.3)$$

lo cual se obtiene de forma directa mediante integración por partes.

Antes de generalizar la definición anterior a distribuciones, vamos a ver como se podría aplicar sobre una ecuación diferencial algebraica $Ex' = Ax + f$, como las ya estudiadas en el capítulo 3.

Ejemplo 16 Consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Ex' &= Ax + f \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

donde x es una función de variable real. Aplicando el operador $\mathcal{L}(\cdot)$ sobre la DAE, obtenemos

$$sE\hat{x} = A\hat{x} + \hat{f} + Ex_0$$

En el caso de que (E, A) sea regular, entonces se puede calcular directamente la solución,

$$\hat{x} = (sE - A)^{-1}(\hat{f} + Ex_0)$$

De forma similar podemos definir la transformada de Laplace para ciertas distribuciones.

Definición 4.3.2 (Transformada de Laplace distribucional) Consideremos el conjunto de distribuciones

$$\mathcal{D}_{\geq 0, k} = \left\{ F = g^{(k)} \mid g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua tal que } g(t) = 0 \ \forall t \in (-\infty, 0) \right\}$$

Sobre este espacio definimos

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(F)(s) := s^k \mathcal{L}(g)(s)$$

para las $s \in \mathbb{C}$ tal que la expresión anterior esté bien definida. Al igual que antes, se notará $\hat{F}(s) = \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(F)(s)$.

Observación 4.3.1 Si $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(F)(s) = s^k \mathcal{L}(g)(s)$ entonces

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(F')(s) = s^{k+1} \mathcal{L}(g)(s) = s \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(F)(s)$$

Observación 4.3.2 Como δ es la derivada segunda de

$$h(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

entonces $\delta \in \mathcal{D}_{\geq 0, 2}$, y

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\delta)(s) = s^2 \mathcal{L}(h)(s) = s^2 \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = -s^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} dt = 1$$

Observación 4.3.3 Si $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$, entonces la transformada de Laplace distribucional coincide con la definición clásica. En efecto, entonces:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(f_{\mathcal{D}})(s) = s \mathcal{L}\left(\int_0^t f(\sigma) d\sigma\right)(s) = \mathcal{L}(f)(s) - \int_0^0 f(\sigma) d\sigma = \mathcal{L}(f)(s)$$

Aquí estamos usando (4.3) y estamos notando como $\int_0^t f(\sigma) d\sigma$ a la función

$$\bar{F}(t) = \begin{cases} \int_0^t f(\sigma) d\sigma & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Claramente $\bar{F}'(t) = f(t) \ \forall t > 0$.

Observación 4.3.4 Si además f es derivable en $(0, +\infty)$, $f = 0$ en $(-\infty, 0)$ y existe $f(0^+)$, usando el cálculo de la derivada distribucional de una función a trozos (ver (4.1)), la linealidad de la transformada de Laplace y la observación anterior, se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{D}}((f_{\mathcal{D}})')(s) &= \mathcal{L}_{\mathcal{D}}((f')_{\mathcal{D}} + f(0^+) \delta)(s) = \mathcal{L}_{\mathcal{D}}((f')_{\mathcal{D}})(s) + f(0^+) \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\delta)(s) = \\ &= \mathcal{L}(f')(s) + f(0^+) \end{aligned}$$

Como consecuencia de esto, se observa que

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}((f_{\mathcal{D}})')(s) \neq \mathcal{L}_{\mathcal{D}}((f')_{\mathcal{D}})(s)$$

por lo que $(f_{\mathcal{D}})' \neq (f')_{\mathcal{D}}$. La diferencia fundamental es que la distribución asociada a la derivada de f , $(f')_{\mathcal{D}}$, no tiene en cuenta la discontinuidad en $t = 0$, mientras que la derivada de la distribución asociada a f , $(f_{\mathcal{D}})'$, sí, representado por la delta de Dirac que aparece.

La idea es utilizar este operador para resolver problemas del tipo (4.2). Sin embargo, la transformada de Laplace solo está definida para distribuciones iguales a 0 en $(-\infty, 0)$, por lo que no nos sirve para resolver en general problemas de este tipo. De hecho, de los 4 espacios de distribuciones definidos en la sección anterior, la transformada de Laplace solo sería aplicable sobre distribuciones de \mathcal{C}_{imp} . De momento vamos a ignorar este detalle, que solucionaremos más adelante.

Veamos como podemos utilizar esta nueva definición de la transformada de Laplace para resolver el mismo problema del Ejemplo 5, esta vez considerando distribuciones.

Ejemplo 17 Consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Ex' &= Ax + f \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

Aplicando el operador $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\cdot)$ sobre la DAE, obtenemos

$$sE\hat{x} = A\hat{x} + \hat{f}$$

Observemos que en este caso el término correspondiente al valor inicial no aparece. En el caso de que (E, A) sea regular, la solución viene dada por

$$\hat{x} = (sE - A)^{-1}\hat{f}$$

En el caso de que $f = 0$, entonces $\hat{x} = 0$. Si asumimos que la inversa del operador $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\cdot)$ está bien definida, esto implica que $x = 0$, por lo que la única solución del problema de valores iniciales anterior es la trivial, independientemente de x_0 . Evidentemente esto es falso, pues si el problema anterior tuviese valores iniciales consistentes, entonces tendría una solución clásica no trivial. Este problema motiva la definición de un nuevo tipo de derivada distribucional que sí tenga en cuenta los valores iniciales.

Definición 4.3.3 (Derivada $\frac{d_-}{dt}$) Sea $F \in \cup_k \mathcal{D}_{\geq 0, k}$. Se define

$$\frac{d_-}{dt}F := F' - f_0^- \delta$$

El valor $f_0^- \in \mathbb{R}$ representa el posible valor de $F(0^-)$.

Observación 4.3.5 La definición de f_0^- no tiene mucho sentido en principio, pues para $F \in \mathcal{D}_{\geq 0, k}$, $F(0^-) = 0$ por definición. Sin embargo, más adelante daremos una justificación.

Considerando ahora este nuevo operador en la formulación del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} E \frac{d_-}{dt} x &= Ax + f \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \quad (4.4)$$

entonces

$$Ex' - Ex_0^- \delta = Ax + f$$

Aplicando la transformada de Laplace obtenemos

$$sE\hat{x} = A\hat{x} + \hat{f} + Ex_0^- \quad (4.5)$$

lo cual es coherente con lo obtenido en el Ejemplo 5. Si (E, A) es regular, entonces

$$\hat{x}(s) = (sE - A)^{-1}(\hat{f}(s) + Ex_0^-)$$

Más aun, $sE - A$ admite una QWF (ver 3.2.2) para matrices S, T . Sean

$$x = T \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad x_0^- = T \begin{pmatrix} v_0^- \\ w_0^- \end{pmatrix}, \quad Sf = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

entonces (4.5) se puede escribir como

$$\begin{aligned} S(sE - A)TT^{-1}\hat{x} &= S\hat{f} + SEx_0^- \implies \\ \left(s \begin{bmatrix} I & \\ & N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J & \\ & I \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} I & \\ & N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_0^- \\ w_0^- \end{pmatrix} \implies \\ \begin{cases} (sI - J)\hat{v} &= \hat{f}_1 + v_0^- \\ (sN - I)\hat{w} &= \hat{f}_2 + Nw_0^- \end{cases} \end{aligned}$$

Vamos a estudiar cada ecuación por separado. En la primera, $s\hat{v} - v_0^- = J\hat{v} + \hat{f}_1$, aplicando $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}^{-1}$, obtenemos

$$\frac{d_-}{dt}v = v' - v_0^- \delta = Jv + f_1$$

que corresponde a una EDO. En particular, $v_0^- = v(0^+)$.

En la segunda, utilizado que $(sN - I)^{-1} = -\sum_{i=0}^{\eta-1} N^i s^i$, con η el índice de nilpotencia de N , llegamos a

$$\hat{w} = -\sum_{i=0}^{\eta-1} N^i s^i \hat{f}_2 - \sum_{i=0}^{\eta-1} N^{i+1} s^i w_0^-$$

Aplicando $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}^{-1}$,

$$w = -\sum_{i=0}^{\eta-1} N^i (f_{2\mathbb{D}})^i - \sum_{i=0}^{\eta-1} N^{i+1} w_0^- \delta^i = w_f + w_i$$

El segundo término, w_i , corresponde a deltas de Dirac, producidas por el valor inicial inconsistente. Por otro lado, como la transformada de Laplace solo se puede aplicar a distribuciones idénticamente nulas en $(-\infty, 0)$, f_2 va a presentar un salto en $t = 0$, en general, por lo que el primer término, w_f , también poseerá deltas de Dirac, correspondientes a las derivadas de f_2 .

En resumen, la solución de (4.4) viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 4.3.1 (Solución obtenida mediante $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$) *Sea la DAE regular*

$$E \frac{d_-}{dt} x = Ax + f$$

Sea $\eta \in \mathbb{N}$ el índice de nilpotencia de la matriz N de la QWF asociada, y sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\eta - 1$ veces diferenciable en $(0, +\infty)$ con $f = 0$ en $(-\infty, 0)$ tal que existe $f^i(0^+)$, $i = 0, 1, \dots, \eta - 1$. Entonces el problema (4.4) posee una única solución $x \in (\cup_k \mathcal{D}_{\geq 0, k})^n$, dada por

$$x(t) = e^{tA_{\text{diff}}} \Pi_{(E,A)} x_0^- + \int_0^t e^{A_{\text{diff}}(t-\tau)} f(\tau) d\tau - \sum_{i=0}^{\eta-1} (E_{\text{imp}})^i \Pi_{(E,A)}^{\text{imp}} f^i(t)$$

si $t \in (0, +\infty)$, y

$$x[0] = -\sum_{i=0}^{\eta-2} (E_{\text{imp}})^{i+1} \sum_{j=0}^i \Pi_{(E,A)}^{\text{imp}} f^{i-j}(0^+) \delta^j - \sum_{i=0}^{\eta-2} (E_{\text{imp}})^{i+1} (I - \Pi_{(E,A)}) x_0^- \delta^i$$

4.3.1. Justificación del uso de $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$

Finalmente, vamos a justificar que la transformada de Laplace nos sirve como herramienta para resolver (4.2), no solo para distribuciones de \mathcal{C}_{imp} , utilizando el siguiente teorema:

Teorema 4.3.2 (Formulación equivalente del PVI) *Consideremos el problema de valores iniciales (4.2) en el marco de $\mathcal{C}_{imp}(\mathbb{R}^*)$. Sean $x^0 \in (\mathcal{C}_{imp}(\mathbb{R}^*))^n$, $f \in (\mathcal{C}_{imp}(\mathbb{R}^*))^m$. Entonces $x \in (\mathcal{C}_{imp}(\mathbb{R}^*))^n$ es solución de (4.2) si y solo si $z := x - x^0_{(-\infty,0)} = x_{[0,+\infty)}$ es solución de*

$$\begin{aligned} z|_{(-\infty,0)} &= 0 \\ (Ez')|_{[0,+\infty)} &= (Az + f)|_{[0,+\infty)} + Ex^0(0^-)\delta \end{aligned} \quad (4.6)$$

Demostración

Supongamos que x es solución (4.2), veamos que z es solución de (4.6). Por construcción, se tiene que $z|_{(-\infty,0)} = 0$. Además, utilizando el Lema 4.2.1,

$$\begin{aligned} (Ez')|_{[0,+\infty)} &= (Ex')|_{[0,+\infty)} - (E(x^0_{(-\infty,0)})')|_{[0,+\infty)} = \\ &= (Ax + f)|_{[0,+\infty)} - E(x^0|_{(-\infty,0)}|_{[0,+\infty)})' + Ex^0(0^-)\delta = \\ &= (Ax + f)|_{[0,+\infty)} + Ex^0(0^-)\delta \end{aligned}$$

Por otro lado, si z fuese solución de (4.6), entonces

$$\begin{aligned} (Ex')|_{[0,+\infty)} &= (Ez')|_{[0,+\infty)} + (E(x^0|_{(-\infty,0)})')|_{[0,+\infty)} = \\ &= (Az + f)|_{[0,+\infty)} + Ex^0(0^-)\delta + E(x^0|_{(-\infty,0)}|_{[0,+\infty)})' - Ex^0(0^-)\delta = \\ &= (Az + f)|_{[0,+\infty)} = (Ax + f)|_{[0,+\infty)} \end{aligned}$$

pues $x|_{[0,+\infty)} = z|_{[0,+\infty)}$. Y además, por construcción, $x|_{(-\infty,0)} = x^0|_{(-\infty,0)}$.

□

Este teorema justifica la resolución de problemas de valores iniciales sobre $\mathcal{C}_{imp}(\mathbb{R}^*)$ (que es un subespacio de $\mathcal{D}_{pw\mathcal{C}^\infty}$) pues es equivalente a uno sobre \mathcal{C}_{imp} . Utilizando $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$, podemos resolver este segundo problema y posteriormente hallar la solución $x \in \mathcal{C}_{imp}(\mathbb{R}^*)$ del problema original.

Capítulo 5

Resolución numérica de DAEs

En este capítulo se presentarán varios esquemas para aproximar numéricamente la solución de DAEs de la forma

$$\begin{aligned} y' &= f(y, z) \\ 0 &= g(y, z) \end{aligned} \tag{5.1}$$

en el intervalo $[t_0, T]$, con valores iniciales consistentes $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$. A las DAEs de este tipo se les llama DAEs en forma **semi-explicita**.

Como viene siendo necesario en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales, consideraremos una partición del intervalo $[t_0, T]$,

$$\{t_0 < t_1 < \dots < t_N = T\}$$

con $h_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, \dots, N$, y aproximaremos los valores de la solución exacta de (5.1) mediante

$$\begin{aligned} y_k &\simeq y(t_k) \quad k = 1, \dots, N \\ z_k &\simeq z(t_k) \quad k = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Por comodidad, supondremos que la partición de $[t_0, T]$ tomada es uniforme, es decir, con

$$h = h_i = h_j \quad \forall i, j$$

En este trabajo nos centraremos en los métodos de Runge-Kutta para resolver DAEs, aunque también se pueden aplicar otros tipos de métodos, como los métodos multipaso o los métodos de Rosenbrock. Más adelante justificaremos la utilización de métodos de este tipo. Empecemos definiendo un método de Runge-Kutta.

Definición 5.0.1 (Método de Runge-Kutta) Sea $y' = f(t, y)$. Dado y_0 inicial, un método de Runge-Kutta es de la forma

$$\begin{aligned} Y_{ni} &= y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_n + c_j h, Y_{nj}) \quad i = 1, \dots, s \\ y_{n+1} &= y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \end{aligned}$$

para todo $n = 0, \dots, N - 1$, donde $a_{ij}, b_i, c_i \in \mathbb{R}$. Generalmente los métodos de Runge-Kutta se suelen representar mediante la siguiente tabla de sus coeficientes

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_s \end{array}$$

A la tabla anterior se le llama tablero de Butcher.

Observación 5.0.1 Observemos que si $a_{ij} = 0 \quad \forall j \geq i$ entonces el método de Runge-Kutta correspondiente es explícito. En caso contrario, estaremos ante un método implícito.

5.1. Resolución mediante el problema perturbado

El siguiente problema que nos aparece es cómo podemos utilizar estos métodos para resolver (5.1), dado que hay variables para las que no aparece la derivada. En principio no hay ningún problema en resolver la parte diferencial $y' = f(y, z)$ y calcular los valores y_k usando los métodos anteriores. Sin embargo, hay que buscar una forma de resolver la parte algebraica $0 = g(y, z)$, para calcular los valores z_k a partir de los y_k obtenidos anteriormente. Para ello, un posible enfoque es considerar el **problema perturbado**

$$\begin{aligned} y' &= f(y, z) \\ \varepsilon z' &= g(y, z) \end{aligned} \quad (5.2)$$

con $\varepsilon > 0$ y muy cercano a 0. Observemos que la DAE (5.1) es el caso límite de la EDO anterior cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por tanto, para resolver numéricamente (5.1) vamos a resolver en primer lugar (5.2), para valores de ε muy pequeños y así obtener un esquema numérico que nos permita aproximar las soluciones de nuestra DAE. Aplicando un método de tipo Runge-Kutta al problema perturbado, obtenemos

$$Y_{ni} = y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(Y_{nj}, Z_{nj}) \quad i = 1, \dots, s \quad (5.3a)$$

$$\varepsilon Z_{ni} = \varepsilon z_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} g(Y_{nj}, Z_{nj}) \quad i = 1, \dots, s \quad (5.3b)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i f(Y_{ni}, Z_{ni}) \quad (5.3c)$$

$$\varepsilon z_{n+1} = \varepsilon z_n + h \sum_{i=1}^s b_i g(Y_{ni}, Z_{ni}) \quad (5.3d)$$

Suponiendo que la matriz $A = (a_{ij})$ es invertible, con inversa $A^{-1} = (\omega_{ij})$, multiplicando (5.3b) por A^{-1} obtenemos

$$\varepsilon \sum_{j=0}^s \omega_{ij} (Z_{nj} - z_n) = hg(Y_{ni}, Z_{ni}) \quad (5.4)$$

Sustituyendo (5.4) en (5.3d), obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon z_{n+1} &= \varepsilon z_n + \varepsilon \sum_{i=1}^s b_i \sum_{j=0}^s \omega_{ij} (Z_{nj} - z_n) && \implies \\ z_{n+1} &= z_n + \sum_{i=1}^s b_i \sum_{j=0}^s \omega_{ij} (Z_{nj} - z_n) && \implies \\ z_{n+1} &= \left(1 - \sum_{i,j=1}^s b_i \omega_{ij} \right) z_n + \sum_{i,j=1}^s b_i \omega_{ij} Z_{nj} \end{aligned}$$

Observemos que la ecuación obtenida no depende de ε . Por tanto obtenemos el siguiente esquema numérico para (5.2).

$$Y_{ni} = y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(Y_{nj}, Z_{nj}) \quad i = 1, \dots, s \quad (5.5a)$$

$$\varepsilon \sum_{j=0}^s \omega_{ij} (Z_{nj} - z_n) = hg(Y_{ni}, Z_{ni}) \quad i = 1, \dots, s \quad (5.5b)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i f(Y_{ni}, Z_{ni}) \quad (5.5c)$$

$$z_{n+1} = \left(1 - \sum_{i,j=1}^s b_i \omega_{ij} \right) z_n + \sum_{i,j=1}^s b_i \omega_{ij} Z_{nj} \quad (5.5d)$$

Como ε es lo suficientemente pequeño, podemos obtener un esquema numérico para (5.1).

$$Y_{ni} = y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(Y_{nj}, Z_{nj}) \quad i = 1, \dots, s \quad (5.6a)$$

$$0 = g(Y_{ni}, Z_{ni}) \quad i = 1, \dots, s \quad (5.6b)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i f(Y_{ni}, Z_{ni}) \quad (5.6c)$$

$$z_{n+1} = \left(1 - \sum_{i,j=1}^s b_i \omega_{ij} \right) z_n + \sum_{i,j=1}^s b_i \omega_{ij} Z_{nj} \quad (5.6d)$$

Observación 5.1.1 *Un primer problema que presenta el esquema anterior es que, en general, la solución y_{n+1}, z_{n+1} no va a verificar la ecuación algebraica $g(y_{n+1}, z_{n+1}) = 0$, sino que solo la van a verificar los pasos intermedios del método de Runge-Kutta, por la ecuación (5.6b).*

Observación 5.1.2 *Otro problema que aparece es que la resolución numérica de (5.2) no es sencilla, pues para valores de ε cercanos a 0, se trata de una ecuación rígida o de tipo stiff. Estas ecuaciones tienen en común que para determinados métodos numéricos, las soluciones que se obtienen son inestables, salvo que el diámetro h de la partición tomada sea extremadamente pequeño. Esto se debe a que algunos términos de la ecuación crecen de forma mucho más rápida que otros, produciendo así esas perturbaciones en las soluciones aproximadas numéricamente.*

Ejemplo 18 Un problema *stiff* sería la ecuación diferencial ordinaria

$$y'(t) = -50(y(t) - \cos(t))$$

cuya solución analítica viene dada por

$$y(t) = 50 \frac{\sin(t) + 50 \cos(t)}{2501} + \left(y(0) - \frac{2500}{2501} \right) e^{-50t},$$

A continuación se muestra como el comportamiento de la solución numérica obtenida mediante los métodos de Euler Explícito (para el que se ha tomado $h = 0.039$) y Euler Implícito (con $h = 0.25$), para $y(0) = 0.2$. Observemos como el método de Euler Explícito genera grandes oscilaciones alrededor de la solución obtenida, mientras que el de Euler Implícito rápidamente converge a la solución analítica, a pesar de haber tomado un paso h mucho mayor que el usado en Euler Explícito.

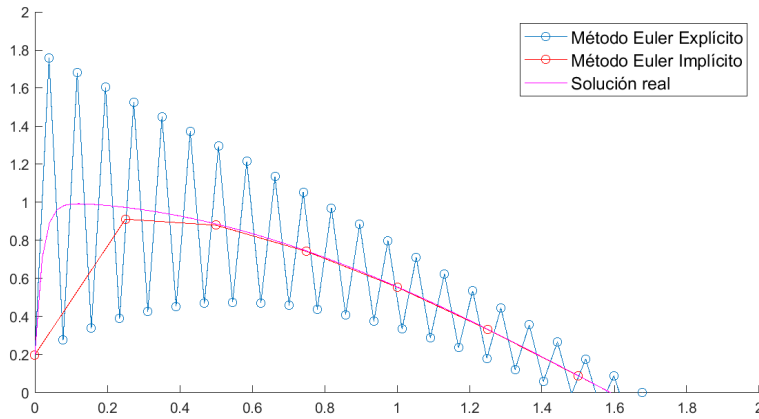


Figura 5.1: Euler Explícito ($h = 0.039$), Euler Implícito ($h = 0.25$)

5.1.1. A-estabilidad y L-estabilidad de métodos de Runge-Kutta

A la hora de resolver numéricamente (5.2), deberemos utilizar métodos de Runge-Kutta que nos aseguren una buena aproximación de la solución exacta, evitando situaciones como la del ejemplo anterior. Para ello, nos interesará que estos métodos verifiquen los siguientes conceptos de estabilidad.

Definición 5.1.1 (A-estabilidad) Diremos que un método de Runge-Kutta es A-estable si aplicado a la ecuación

$$y' = \lambda y \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

con $\text{Re}(\lambda) < 0$, la solución numérica obtenida $y_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Observemos que la solución analítica de la ecuación anterior es $y(t) = y(0)e^{\lambda t}$, que efectivamente tiende a 0 cuando t tiende a ∞ para $\text{Re}(\lambda) < 0$. Es por tanto deseable que la solución obtenida numéricamente verifique la misma propiedad.

Definición 5.1.2 (Función de estabilidad) Dado un método numérico, se define su función de estabilidad como la función $R(z)$, tal que

$$y_{n+1} = R(\lambda h)y_n$$

es la primera iteración del método aplicada a $y' = \lambda y$ con paso h . Se define la región de estabilidad del método como

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid |R(z)| < 1\}$$

Observación 5.1.3 La definición de A-estabilidad es equivalente a que

$$\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 0\} \subset S$$

Ejemplo 19 Si aplicamos el método de Euler Explícito

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \end{cases}$$

a la ecuación $y' = \lambda y$, obtenemos

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n = (1 + h\lambda)y_0$$

Por tanto su función de estabilidad es $R(z) = 1 + z$, y su región de estabilidad es

$$S = \overline{B}(-1, 1)$$

que no contiene a \mathbb{C}_- , por lo que el método de Euler Explícito no es A-estable.

Si ahora consideramos el método de Euler Implícito

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$$

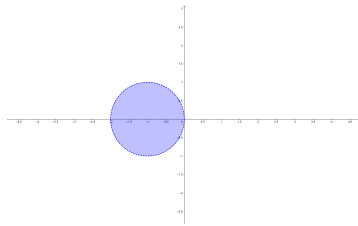
aplicado a la misma ecuación, obtenemos

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} y_n$$

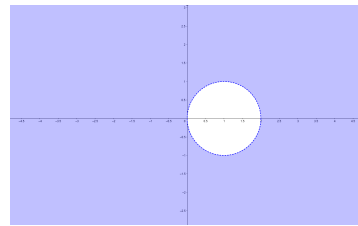
de donde $R(z) = \frac{1}{1 - z}$. En este caso la región de estabilidad es

$$S = \mathbb{C} \setminus \overline{B}(1, 1)$$

por lo que el método de Euler Implícito es A-estable.



(a) Región de estabilidad para Euler Explícito



(b) Región de estabilidad para Euler Implícito

Los métodos A-estables tienen un buen comportamiento a la hora de resolver problemas *stiff*. Sin embargo, en algunos casos también pueden generar pequeñas oscilaciones. Es por ello por lo que se define otro concepto de estabilidad más fuerte.

Definición 5.1.3 (L-estabilidad) Diremos que un método de Runge-Kutta es L-estable si es A-estable y

$$R(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = 0$$

Los métodos L-estables están en general bien adaptados para resolver problemas de tipo *stiff*, y por tanto nos interesará usar métodos de este tipo para resolver el problema (5.2).

Tenemos además el siguiente resultado que nos permite dar una condición suficiente para la L-estabilidad los métodos de Runge-Kutta.

Proposición 5.1.1 Sea un método de Runge-Kutta implícito con $A = (a_{ij})$ invertible. Si verifica alguna de las dos propiedades siguientes

1. $a_{sj} = b_j \quad \forall j = 1, \dots, s$
2. $a_{i1} = b_1 \quad \forall i = 1, \dots, s$

entonces la función de estabilidad del método verifica $R(\infty) = 0$. En particular, si el método es A-estable, es también L-estable.

Definición 5.1.4 (Stiffly accurate) A los métodos que verifican $a_{sj} = b_j \quad \forall j = 1, \dots, s$ se les llama *stiffly accurate*.

Algunos ejemplos de métodos de Runge-Kutta son:

▪ **Euler Explícito** (orden 1): no es A-estable $\frac{0}{1} \mid \frac{0}{1}$

▪ **Euler Implícito** (orden 1): es A-estable y *stiffly accurate*, por lo que es L-estable. $\frac{1}{1} \mid \frac{1}{1}$

▪ **Implicit midpoint rule** (orden 2): es A-estable, pero no es *stiffly accurate*. $\frac{1/2}{1} \mid \frac{1/2}{1}$

▪ **Radau IIA** (orden 3): es A-estable y *stiffly accurate*, por tanto, es L-estable.

$$\frac{1/3}{1} \mid \begin{array}{cc} 5/12 & -1/12 \\ 3/4 & 1/4 \end{array}$$

▪ **Lobatto IIIA** (orden 4): es A-estable y *stiffly accurate*. Sin embargo su matriz A no es invertible, por lo que no se puede aplicar la proposición (5.1.1). Se puede probar que efectivamente no es un método es L-estable.

$$\frac{0}{1/2} \mid \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 5/24 & 1/3 & -1/24 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$

▪ **Radau IIA** (orden 5): es A-estable y *stiffly accurate*, por tanto, es L-estable.

$$\frac{4 - \sqrt{6}}{10} \mid \begin{array}{ccc} \frac{88 - 7\sqrt{6}}{360} & \frac{296 - 169\sqrt{6}}{1800} & \frac{-2 + 3\sqrt{6}}{225} \\ \frac{296 + 169\sqrt{6}}{1800} & \frac{88 + 7\sqrt{6}}{360} & \frac{-2 - 3\sqrt{6}}{225} \\ \frac{16 - \sqrt{6}}{36} & \frac{16 + \sqrt{6}}{36} & \frac{1}{9} \end{array}$$

Ejemplo 20 Vamos a resolver la DAE del ejemplo 2,

$$\begin{cases} e_2' &= e_1 - e_2 \\ 0 &= e_1 + v(t) \\ 0 &= -e_1 + e_2 + i_V \end{cases}$$

para $G = 1$, $C = 1$, $v(t) = \sum_{i=1}^{99} \frac{\sin((2i-1)t)}{2i-1}$, y valores iniciales $e_{10} = -1$, $e_{20} = 0$, $i_{V0} = -1$, usando el esquema (5.6). El método de Runge-Kutta que utilizaremos será el RadauIIA de orden 3, descrito anteriormente. El primer paso es calcular la inversa de $A = (a_{ij})$, dada por

$$W = A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -9/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo estos valores en (5.6), obtenemos el esquema numérico

$$\begin{aligned}
 e_2^{n1} &= e_2^n + \frac{5}{12}h(e_1^{n1} - e_2^{n1}) - \frac{1}{12}h(e_1^{n2} - e_2^{n2}) \\
 e_2^{n2} &= e_2^n + \frac{3}{4}h(e_1^{n1} - e_2^{n1}) + \frac{1}{4}h(e_1^{n2} - e_2^{n2}) \\
 e_1^{n1} &= -v(t_n + \frac{h}{3}) \\
 e_1^{n2} &= -v(t_n + h) \\
 i_V^{n1} &= e_1^{n1} - e_2^{n1} \\
 i_V^{n2} &= e_1^{n2} - e_2^{n2} \\
 e_2^{n+1} &= e_2^n + \frac{3}{4}h(e_1^{n1} - e_2^{n1}) + \frac{1}{4}(e_1^{n2} - e_2^{n2}) \\
 &= e_2^n + \frac{3}{4}hi_V^{n1} + \frac{1}{4}hi_V^{n2} \\
 e_1^{n+1} &= \left(1 - \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(-\frac{9}{2} + \frac{5}{2}\right)\right)e_1^n + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}e_1^{n1} + \frac{1}{2}e_1^{n2}\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{9}{2}e_1^{n1} + \frac{5}{2}e_1^{n2}\right) = e_1^{n2} \\
 i_V^{n+1} &= \left(1 - \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(-\frac{9}{2} + \frac{5}{2}\right)\right)i_V^n + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}i_V^{n1} + \frac{1}{2}i_V^{n2}\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{9}{2}i_V^{n1} + \frac{5}{2}i_V^{n2}\right) = i_V^{n2}
 \end{aligned}$$

Para resolver el sistema anterior en cada iteración vamos a hacer lo siguiente:

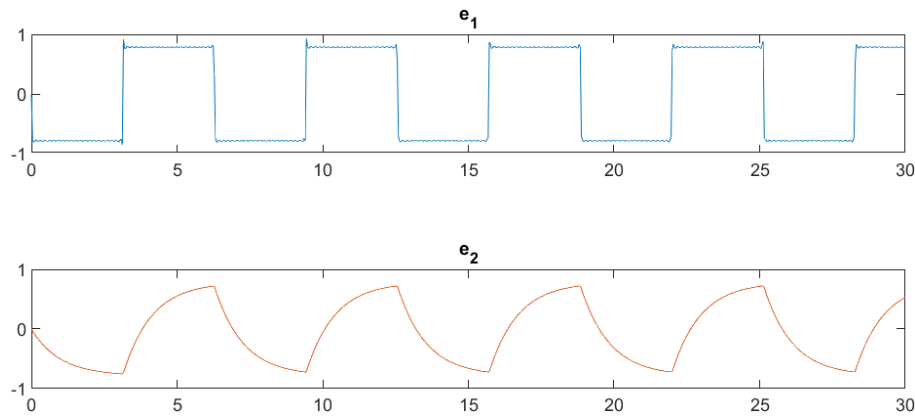
1. Calcular e_1^{n1} , e_1^{n2} , a partir de la condición $e_1 = -v$.
2. Calcular e_2^{n1} , e_2^{n2} , una vez ya conocidos e_1^{n1} , e_1^{n2} . Este paso es implícito, y se reduce a calcular las raíces de

$$r(x, y) = \begin{pmatrix} x - e_2^n - \frac{5}{12}h(e_1^{n1} - x) + \frac{1}{12}h(e_1^{n2} - y) \\ y - e_2^n - \frac{3}{4}h(e_1^{n1} - x) - \frac{1}{4}h(e_1^{n2} - y) \end{pmatrix}$$

Para ello utilizaremos el método de Newton.

3. Calcular i_V^{n1} , i_V^{n2} a partir de los valores anteriores.
4. Calcular e_1^{n+1} , e_2^{n+1} , i_V^{n+1} .

Resolviendo en el intervalo $[0, 20]$ para $h = 0.04$, obtenemos la solución



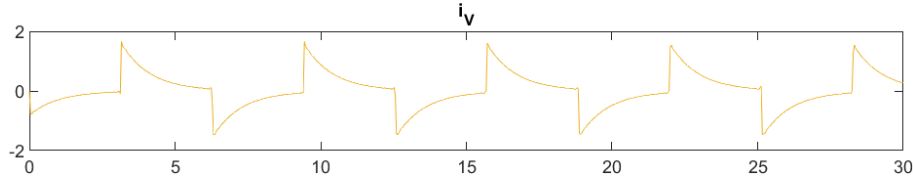


Figura 5.3: Solución numérica del ejemplo 2 usando RadauIIA de orden 3

Ejemplo 21 Resolvamos numéricamente la DAE del ejemplo 1, correspondiente al movimiento de un péndulo,

$$\begin{cases} u' &= -\frac{2}{m}\lambda x \\ v' &= g - \frac{2}{m}\lambda y \\ x' &= u \\ y' &= v \\ 0 &= x^2 + y^2 - l^2 \end{cases}$$

para $m = 1$, $l = 1$, $g = 9.8$ y valores iniciales $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $x_0 = l$, $y_0 = 0$, $\lambda_0 = \frac{m}{2l^2}$. Utilizaremos el mismo método de Runge-Kutta que en el ejemplo anterior, llegando al esquema numérico siguiente:

$$\begin{aligned} u_{n1} &= u_n - \frac{5}{6m}hx_{n1}\lambda_{n1} + \frac{1}{6m}hx_{n2}\lambda_{n2} \\ u_{n2} &= u_n - \frac{3}{2m}hx_{n1}\lambda_{n1} - \frac{1}{2m}hx_{n2}\lambda_{n2} \\ v_{n1} &= v_n - \frac{5}{6m}hy_{n1}\lambda_{n1} + \frac{1}{6m}hy_{n2}\lambda_{n2} \\ v_{n2} &= v_n - \frac{3}{2m}hy_{n1}\lambda_{n1} - \frac{1}{2m}hy_{n2}\lambda_{n2} \\ x_{n1} &= x_n + \frac{5}{12}hu_{n1} - \frac{1}{12}hu_{n2} \\ x_{n2} &= x_n + \frac{3}{4}hu_{n1} + \frac{1}{4}hu_{n2} \\ y_{n1} &= y_n + \frac{5}{12}hv_{n1} - \frac{1}{12}hv_{n2} \\ y_{n2} &= y_n + \frac{3}{4}hv_{n1} + \frac{1}{4}hv_{n2} \\ 0 &= x_{n1}^2 + y_{n1}^2 - l^2 \\ 0 &= x_{n2}^2 + y_{n2}^2 - l^2 \\ u_{n+1} &= u_n - \frac{3}{2m}hx_{n1}\lambda_{n1} - \frac{1}{2m}hx_{n2}\lambda_{n2} = u_{n2} \\ v_{n+1} &= v_n - \frac{3}{2m}hy_{n1}\lambda_{n1} - \frac{1}{2m}hy_{n2}\lambda_{n2} = v_{n2} \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{3}{4}hu_{n1} + \frac{1}{4}hu_{n2} = x_{n2} \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{3}{4}hv_{n1} + \frac{1}{4}hv_{n2} = y_{n2} \\ \lambda_{n+1} &= \left(1 - \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(-\frac{9}{2} + \frac{5}{2}\right)\right)\lambda_n + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\lambda_{n1} + \frac{1}{2}\lambda_{n2}\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{9}{2}\lambda_{n1} + \frac{5}{2}\lambda_{n2}\right) \end{aligned}$$

En cada iteración haremos lo siguiente:

1. Resolver el paso implícito, compuesto por las primeras diez ecuaciones, para así obtener los valores $u_{n1}, u_{n2}, v_{n1}, v_{n2}, x_{n1}, x_{n2}, y_{n1}, y_{n2}, \lambda_{n1}, \lambda_{n2}$. Al igual que en el ejemplo anterior, se reduce a un problema de cálculo de raíces que resolveremos usando el método de Newton.
2. Calcular $u_{n+1}, v_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}$ y λ_{n+1} a partir de los valores anteriores, usando las cinco últimas ecuaciones.

Resolviendo en el intervalo $[0, 20]$ para $h = 0.04$, obtenemos la solución

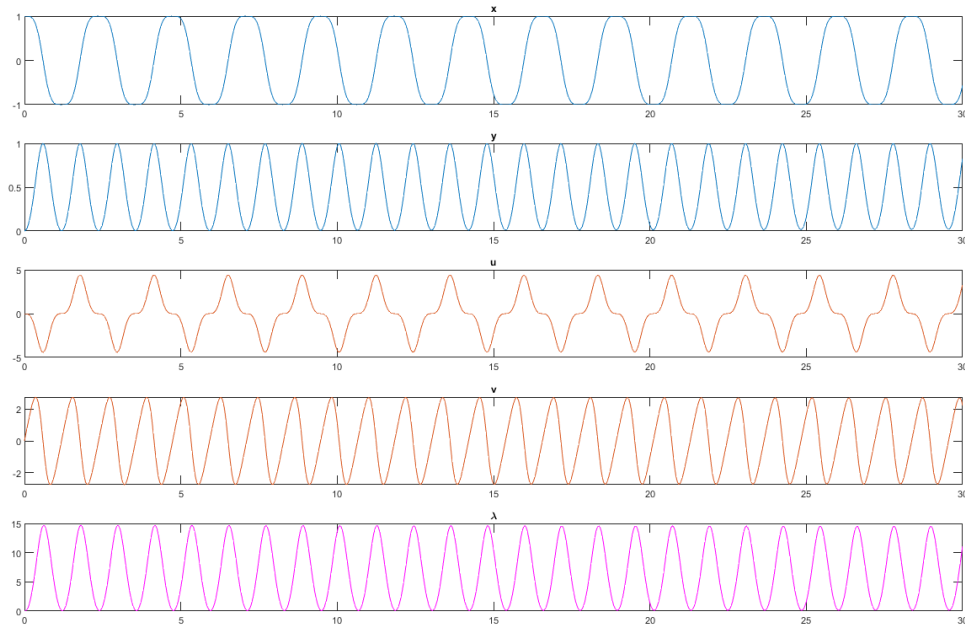


Figura 5.4: Solución numérica del ejemplo 1 usando RadauIIA de orden 3

Podemos ver como la solución numérica calculada x_n, y_n , no verifica la ecuación $x^2 + y^2 = l^2$, aunque la aproximación es muy buena.

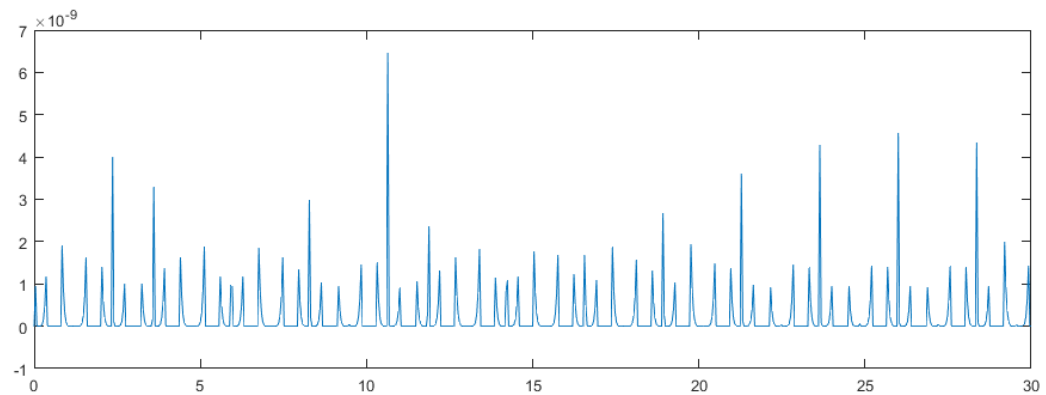


Figura 5.5: Error cometido por la solución numérica en la ecuación algebraica

5.2. Índice de diferenciabilidad

Hasta ahora hemos visto como enfocar de forma general la resolución numérica de (5.1) a partir del problema perturbado (5.2), y hemos visto los dos principales problemas que esta idea presenta: la resolución de problemas *stiff* y que $g(y_{n+1}, z_{n+1}) \neq 0$ en general.

Nuestro siguiente objetivo es ver si es posible mejorar este esquema para conseguir al menos que la solución numérica calculada verifique la condición algebraica $0 = g(y_{n+1}, z_{n+1})$. Como veremos a continuación, esto es posible hacerlo para una familia de DAEs en forma semi-explicita, las DAEs de índice 1.

En primer lugar tenemos que definir el concepto de índice, que nos permitirá hacer una clasificación de las DAEs. Para DAEs lineales con coeficientes constantes, el índice es una generalización del índice de Kronecker, que ya se vio brevemente en la sección 2.1 para ecuaciones nilpotentes.

Definición 5.2.1 (Índice de Kronecker) Sea (E, A) un par de matrices regular, el índice (de Kronecker) η de la ecuación $Ex' = Ax + f$ es el índice de nilpotencia de la matriz N que aparezca en cualquier (quasi) forma canónica de Weierstrass asociada. En el caso de que no aparezca tal N (caso de que E sea invertible), diremos que el índice es $\eta = 0$.

Ejemplo 22 La DAE del ejemplo 2,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ i'_V \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -G & G & 1 \\ G & -G & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ i_V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$$

es de índice $\eta = 1$, pues en la forma canónica de Weierstrass calculada en el ejemplo 9,

$$S(sE - A)T = s \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-G}{C} & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

la matriz $N = 0$, que tiene índice de nilpotencia 1.

La ecuación del ejemplo 14

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} x + f,$$

también tiene índice $\eta = 1$, pues $N = 0$ en la quasi-forma de Weierstrass

$$S(sE - A)T = \left[\begin{array}{cc|ccc} s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Para ecuaciones diferenciales algebraicas se define el índice de la siguiente forma.

Definición 5.2.2 (Índice de diferenciabilidad) Sea el sistema $F(t, x, x') = 0$, su índice (de diferenciabilidad) η es el número mínimo de diferenciaciones que hay que hacer sobre las ecuaciones del sistema para expresarlo en forma de EDO, $x' = f(t, x)$.

Se puede entender el índice de diferenciabilidad como una medida de la cercanía de una DAE a su EDO correspondiente. Cuanto menor sea, más parecido será a una ecuación diferencial ordinaria.

Ejemplo 23 Veamos algunos casos generales. Consideremos la DAE presentada anteriormente

$$\begin{aligned} y' &= f(y, z) \\ 0 &= g(y, z) \end{aligned}$$

Derivando la segunda ecuación respecto a t , obtenemos

$$0 = \frac{d}{dt}g(y, z) = g_y(y, z)y' + g_z(y, z)z' = g_y(y, z)f(y, z) + g_z(y, z)z'$$

Si $g_z(y, z)$ es invertible en un entorno de la solución, la DAE se puede reescribir como

$$\begin{aligned} y' &= f(y, z) \\ z' &= -g_z(y, z)^{-1}g_y(y, z)f(y, z) \end{aligned}$$

y su índice sería $\eta = 1$.

Si ahora consideramos la DAE

$$\begin{aligned} y' &= f(y, z) \\ 0 &= g(y) \end{aligned}$$

derivando la ecuación algebraica respecto a t obtenemos

$$0 = g_y(y)y' = g_y(y)f(y, z)$$

En este caso no podemos despejar z' de la expresión anterior, por lo que volvemos a derivar.

$$\begin{aligned} 0 &= g_{yy}(y)y'f(y, z) + g_y(y)(f_y(y, z)y' + f_z(y, z)z') = \\ &= g_{yy}(y)(f(y, z))^2 + g_y(y)(f_y(y, z)f(y, z) + f_z(y, z)z') \end{aligned}$$

Despejando obtenemos

$$z' = -(g_y(y)f_z(y, z))^{-1}(g_{yy}(y)(f(y, z))^2 + g_y(y)f_y(y, z)f(y, z))$$

por lo que la DAE es de índice $\eta = 2$, asumiendo que $g_y(y)f_z(y, z)$ es invertible en un entorno de la solución. Este problema tiene una única solución (local) si y solo si los valores iniciales verifican $0 = g(y_0)$ y $0 = g_y(y_0)f(y_0, z_0)$. En este caso diremos que son consistentes.

Ejemplo 24 Consideremos las ecuaciones que modelan el movimiento del péndulo de longitud $l > 0$ del ejemplo 1,

$$\begin{cases} mu' + 2\lambda x = 0 \\ mv' + 2\lambda y = mg \\ x' - u = 0 \\ y' - v = 0 \\ x^2 + y^2 = l^2 \end{cases} \implies \begin{cases} u' = -\frac{2}{m}\lambda x \\ v' = g - \frac{2}{m}\lambda y \\ x' = u \\ y' = v \\ 0 = x^2 + y^2 - l^2 \end{cases}$$

que podemos expresar como $Y' = F(Y, \lambda)$, $0 = G(Y)$ para $Y = (u, v, x, y)$. Vamos a intentar obtener una ecuación diferencial para λ' a partir de la ecuación algebraica $x^2 + y^2 = l^2$. Derivando respecto a t llegamos a

$$0 = xx' + yy' = xu + yv$$

Observemos que esta ecuación nos está dando una condición de tangencia: el vector velocidad es ortogonal al vector posición para todo t . Si ahora derivamos por segunda vez, obtenemos

$$0 = x'u + xu' + y'v + yv' = u^2 - \frac{2}{m}\lambda x^2 + v^2 + gy - \frac{2}{m}\lambda y^2$$

que es la ecuación de la aceleración centrípeta del péndulo. De aquí podemos despejar

$$\lambda = \frac{m}{2} \left(\frac{u^2 + v^2 + gy}{x^2 + y^2} \right)$$

Derivando por tercera vez obtenemos finalmente una ecuación diferencial ordinaria para λ' , por lo que el índice de este sistema es $\eta = 3$.

Proposición 5.2.1 *Para ecuaciones diferenciales algebraicas lineales de coeficientes constantes, el índice de diferenciabilidad coincide con el índice de Kronecker.*

Demostración

Sea la DAE regular $Ex' = Ax + f$, y sea

$$SET = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \quad SAT = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

una QWF asociada, con índice de nilpotencia de N igual a η . Veamos que el índice de diferenciabilidad de esta DAE es también η . Multiplicando por S y realizando el cambio de variable $x = Tz$, podemos reescribir la DAE como

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} z' = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} z + Sf$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} z'_1 &= Jz_1 + Sf_1 \\ Nz'_2 &= z_2 + Sf_2 \end{aligned}$$

La primera ecuación ya está en forma de EDO. Para la segunda, como ya vimos en la sección 2.1, derivando y multiplicando por N un total de $\eta - 1$ veces llegamos a la expresión

$$z_2 = - \sum_{i=0}^{\eta-1} N^i (Sf_2)^i$$

Derivando una vez más llegamos a una expresión para z'_2 , por lo que el índice de diferenciabilidad de es $\eta - 1 + 1 = \eta$, que coincide con el índice de Kronecker.

□

5.3. Resolución de DAEs de índice 1

Supongamos ahora que la DAE (5.1) es de índice 1, es decir, con $g_z(y, z)$ invertible. Utilizando el Teorema de la Función Implícita, podemos expresar la ecuación algebraica $0 = g(y, z)$ como

$$z = G(y)$$

La idea ahora es aplicar el método de Runge-Kutta solo a la parte $y' = f(y, z)$, y a partir de los Y_{ni}, y_{n+1} obtenidos, hallar Z_{ni}, z_{n+1} mediante la relación anterior. Haciendo esto, obtenemos el esquema numérico siguiente.

$$Y_{ni} = y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(Y_{nj}, Z_{nj}) \quad i = 1, \dots, s \quad (5.7a)$$

$$Z_{ni} = G(Y_{ni}) \quad i = 1, \dots, s \quad (5.7b)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i f(Y_{ni}, Z_{ni}) \quad (5.7c)$$

$$z_{n+1} = G(y_{n+1}) \quad (5.7d)$$

que es el esquema (5.6) sustituyendo (5.6d) por la ecuación algebraica $g(y_{n+1}, z_{n+1}) = 0$. Una ventaja fundamental de este método es que en ningún momento estamos resolviendo un problema rígido, por lo que en principio podremos utilizar todo tipos de métodos numéricos para resolver el problema, incluyendo métodos explícitos. Es por ello por lo que este enfoque es mucho más adecuado para resolver DAEs de índice 1 que el enfoque (5.6), sin embargo, no es posible utilizarlo con DAEs de índice mayor que 1.

Observación 5.3.1 Para los métodos *stiffly accurate*, que cumplen $a_{sj} = b_j$ para todo $j = 1 \dots, s$, los dos esquemas (5.6) y (5.7) coinciden. En efecto, sustituyendo en (5.3a) para $i = s$ obtenemos

$$Y_{ns} = y_n + h \sum_{j=1}^s a_{sj} f(Y_{nj}, Z_{nj}) = y_n + h \sum_{j=1}^s b_j f(Y_{nj}, Z_{nj}) = y_{n+1}$$

Tomando ahora la ecuación (5.3b) con $i = s$ y usando (5.3d)

$$\varepsilon Z_{ns} = \varepsilon z_n + h \sum_{j=1}^s a_{sj} g(Y_{nj}, Z_{nj}) = \varepsilon z_n + h \sum_{j=1}^s b_j g(Y_{nj}, Z_{nj}) = \varepsilon z_{n+1}$$

de donde $Z_{ns} = z_{n+1}$. Repitiendo el mismo razonamiento anterior se llegan a las ecuaciones (5.6). De (5.6b) se obtiene

$$0 = g(Y_{ns}, Z_{ns}) = g(y_{n+1}, z_{n+1})$$

y usando que el índice de la DAE es 1

$$z_{n+1} = G(y_{n+1})$$

Esto prueba que los dos esquemas son equivalentes para métodos *stiffly accurate*.

Ejemplo 25 Vamos a resolver de nuevo la DAE del ejemplo 2,

$$\begin{cases} e_2' &= e_1 - e_2 \\ 0 &= e_1 + v(t) \\ 0 &= -e_1 + e_2 + i_V \end{cases}$$

para los mismos valores $G = 1$, $C = 1$, $v(t) = \sum_{i=1}^{99} \frac{\sin((2i-1)t)}{2i-1}$, $e_{10} = -1$, $e_{20} = 0$, $i_{V0} = -1$ usados en el ejemplo 20.

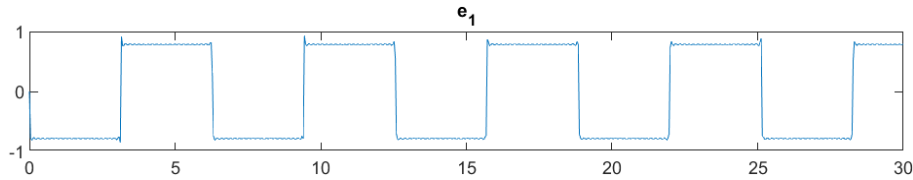
En este caso, como la DAE es de índice 1, vamos a utilizar el esquema (5.7). El método de Runge-Kutta que usaremos en este caso será el RK4, que es explícito y viene dado por

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

Aplicando este método a la primera ecuación, calculamos e_2^{n+1} , y luego, despejando en las dos últimas ecuaciones, obtenemos los valores e_1^{n+1} e i_V^{n+1} . Por tanto el esquema numérico obtenido es

$$\begin{aligned} e_2^{n1} &= e_2^n \\ e_1^{n1} &= -v(t_n) \\ i_V^{n1} &= e_1^{n1} - e_2^{n1} \\ e_2^{n2} &= e_2^n + \frac{h}{2}(e_1^{n1} - e_2^{n1}) = e_2^n + \frac{h}{2}i_V^{n1} \\ e_1^{n2} &= -v(t_n + \frac{h}{2}) \\ i_V^{n2} &= e_1^{n2} - e_2^{n2} \\ e_2^{n3} &= e_2^n + \frac{h}{2}(e_1^{n2} - e_2^{n2}) = e_2^n + \frac{h}{2}i_V^{n2} \\ e_1^{n3} &= -v(t_n + \frac{h}{2}) = e_1^{n2} \\ i_V^{n3} &= e_1^{n3} - e_2^{n3} \\ e_2^{n4} &= e_2^n + h(e_1^{n3} - e_2^{n3}) = e_2^n + hi_V^{n3} \\ e_1^{n4} &= -v(t_n + h) \\ i_V^{n4} &= e_1^{n4} - e_2^{n4} \\ e_2^{n+1} &= e_2^n + \frac{h}{6}(e_1^{n1} - e_2^{n1}) + \frac{h}{3}(e_1^{n2} - e_2^{n2}) + \frac{h}{3}(e_1^{n3} - e_2^{n3}) + \frac{h}{6}(e_1^{n4} - e_2^{n4}) \\ &= e_2^n + \frac{h}{6}i_V^{n1} + \frac{h}{3}i_V^{n2} + \frac{h}{3}i_V^{n3} + \frac{h}{6}i_V^{n4} \\ e_1^{n+1} &= -v(t_n + h) = e_1^{n4} \\ i_V^{n+1} &= e_1^{n+1} - e_2^{n+1} \end{aligned}$$

Resolviendo en el intervalo $[0, 20]$ para $h = 0.02$, obtenemos la siguiente solución



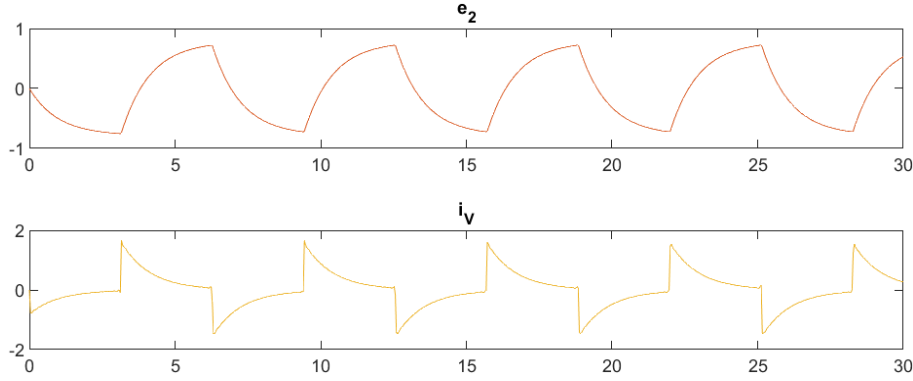


Figura 5.6: Solución numérica del ejemplo 2 usando RK4

5.4. Resolución de DAEs del tipo $Mu' = \varphi(u)$

Hasta ahora toda la teoría que hemos desarrollado ha sido para DAEs en forma semi-explícita. Sin embargo nos puede interesar también resolver numéricamente DAEs escritas de otra forma. En esta sección nos centraremos en DAEs del tipo

$$Mu' = \varphi(u) \quad (5.8)$$

Un caso particular son las DAEs lineales con coeficientes constantes, que ya estudiamos en los primeros capítulos. La idea es usar un cambio de variable adecuado para transformar la DAE (5.8) en una equivalente de la forma (5.1). Vamos a distinguir dos casos.

Caso M invertible

Este es el caso ya conocido en el que la DAE es simplemente una EDO. Multiplicando por la inversa de M llegamos a la forma explícita

$$u' = M^{-1}\varphi(u)$$

a la que podemos aplicarle todos los métodos numéricos ya conocidos para ecuaciones diferenciales ordinarias.

Caso M singular

En este caso podemos hallar S, T matrices invertibles tales que

$$M = S \left(\begin{array}{c|c} I_R & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) T$$

con $R = \text{rank}(M)$. En este caso, mediante el cambio de variable $Tu = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, podemos escribir nuestra DAE en forma semi-explícita.

$$\begin{aligned} Mu' = \varphi(u) &\implies S \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) Tu' = \varphi(u) \implies \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = S^{-1}\varphi(T^{-1} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} f(y, z) \\ g(y, z) \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{cases} y' = f(y, z) \\ 0 = g(y, z) \end{cases} \end{aligned}$$

A esta DAE le aplicaremos los métodos numéricos vistos anteriormente para obtener $Y_{ni}, Z_{ni}, y_{n+1}, z_{n+1}$. Deshaciendo el cambio de variable obtenemos los valores correspondientes a la DAE (5.8),

$$U_{ni} = T^{-1} \begin{pmatrix} Y_{ni} \\ Z_{ni} \end{pmatrix} \quad u_{n+1} = T^{-1} \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$$

5.4.1. Implementación en MATLAB: ode15s y ode23t

Finalmente vamos a ver como resolver fácilmente DAEs del tipo $Mu' = \varphi(u)$ usando MATLAB, utilizando `ode15s` y `ode23t`. Estas funciones son adecuadas para resolver problemas de tipo *stiff*, pero permiten también resolver DAEs del tipo anterior de índice 1. El comando es el siguiente:

```
options = odeset('Mass',M);
[t,y] = ode23t(phi,tt,y0,options);
```

donde M es la matriz de la DAE, phi es la función $\varphi(t, u)$, y_0 es el vector de condiciones iniciales (consistentes) y tt es un vector conteniendo los tiempos inicial y final t_0, T . La función nos devuelve un vector \mathbf{t} , que contiene los puntos de la partición de $[t_0, T]$ utilizados para la integración numérica, y otro vector \mathbf{y} , que contiene los valores de la solución calculados en cada punto de \mathbf{t} , respectivamente.

Ejemplo 26 Utilizando `ode15s` para obtener una aproximación de la solución de la DAE del circuito del ejemplo 2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ i_V' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -G & G & 1 \\ G & -G & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ i_V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$$

con $G = 1$, $C = 1$, $v(t) = \cos(t)$ y valores iniciales $e_{10} = -1$, $e_{20} = 0$, $i_{V0} = -1$, obtenemos la siguiente gráfica de la solución, en el intervalo $[0, 10]$. Junto a la solución numérica calculada (marcada con círculos en la gráfica) se ha representado la solución analítica (en negro), calculada a partir de las ecuaciones del ejemplo 2.

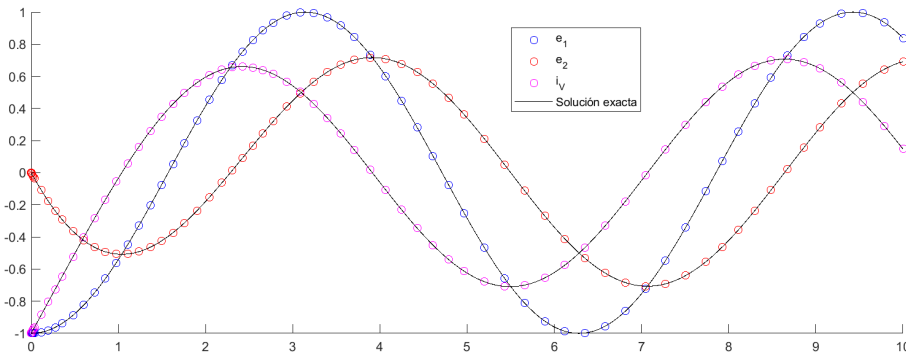


Figura 5.7: Comparación entre la solución numérica (`ode15s`) y la solución clásica (ejemplo 2).

Bibliografía

- [1] S. TRENN, *Solution concepts for linear DAEs: A survey*
<https://www.researchgate.net/publication/265233999>.
- [2] S. TRENN, T. BERGER, *The Quasi-Kronecker Form For Matrix Pencils*
Article in SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, January 2012
- [3] S. TRENN, *Basics on Differential-Algebraic Equations (DAEs)*
ICCAS 2014, Seoul, Korea.
- [4] S. TRENN, *Switched differential algebraic equations*
http://research.stephantrenn.de/tl_files/Preprints/Preprint-Tre110830.pdf
- [5] E. HAIRER, S.P. NØRSETT, G. WAGNER
Solving Ordinary Differential Equations: Nonstiff Problems (Second Revised Edition)
Springer
- [6] E. HAIRER, G. WAGNER
Solving Ordinary Differential Equations: Stiff and Differential-Algebraic Problems (Second Revised Edition)
Springer
- [7] J. ANDREJEVIC, *Solving differential-algebraic systems of equations (DAEs)*
https://courses.seas.harvard.edu/courses/am205/g_act/dae_notes.pdf
- [8] S. SCHULZ, *Four Lectures on Differential-Algebraic Equations*
Humboldt Universität zu Berlin.
- [9] JUAN CASADO DÍAZ, *Apuntes de Análisis Funcional y Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla, Curso 2017/2018.
- [10] F.R. GANTMACHER *The Theory of Matrices (Vol I & II)*
Chelsea, New York (1959)
- [11] K. WEIERSTRASS *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen*
Berl. Monatsb. pp. 310-328 (1868)