



FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS EN EL ESPACIO DE LORENTZ-MINKOWSKI

Memoria realizada por Eduardo Fernández Galán

Dirigido por Dr. Alfonso Carriazo Rubio

Resumen

En este trabajo estudiamos la geometría diferencial de curvas cuando consideramos un espacio diferente al espacio euclídeo. En particular, trabajaremos sobre el espacio de Lorentz-Minkowski. En dicho espacio, utilizaremos la métrica de Minkowski, una métrica no degenerada, indefinida y de índice uno, lo que provocará importantes diferencias.

El objetivo principal de este trabajo es realizar un estudio teórico similar al de la asignatura *Geometría Local de Curvas y Superficies*. Así, definiremos la curvatura y la torsión, estableceremos las ecuaciones de Frenet (que cambiarán según la causalidad de las curvas) y demostraremos el teorema fundamental de curvas.

Abstract

In this work we study the differential geometry of curves when considering a different space from the Euclidean. In particular, we will work on the Lorentz-Minkowski's space. In such space, we will use the Minkowski's metric, a non-degenerate, indefinite metric of index one, which will lead to important differences.

The main objective of this work is to carry out a theoretical study similar to the one developed in the subject *Geometría Local de Curvas y Superficies*. Thus, we will define the curvature and torsion, we shall establish the Frenet's equations (that will change according to the causality of the curves) and we will proof the fundamental theorem of curves.

Índice general

Introducción	7
1. Preliminares	11
1.1. Espacios euclídeos	11
1.2. Teoría local de curvas	14
1.2.1. Curvas planas	15
1.2.2. Curvas alabeadas	16
2. El espacio \mathbb{E}_1^3 de Lorentz-Minkowski	19
2.1. Causalidad	19
2.1.1. Ortogonalidad	21
2.1.2. Temporalidad	27
2.2. Ángulo entre dos vectores	29
2.3. Isometrías	32
3. Curvas en el espacio de Minkowski.	37
3.1. Teoría local de curvas en el espacio de Minkowski.	37
3.2. El triedro de Frenet. Curvatura y torsión.	43
3.2.1. Curvas temporales.	44
3.2.2. Curvas espaciales.	46
3.2.3. Curvas luminosas.	49
3.2.4. Teorema fundamental de curvas alabeadas en \mathbb{E}_1^3	53
3.3. Curvas planas.	61
Bibliografía	69

Introducción

La teoría clásica de curvas sobre el espacio euclídeo \mathbb{E}^3 es una de las ramas más interesantes de las matemáticas. Combina objetos sencillos y gráficos, fáciles de entender para cualquier persona, aun sin amplios conocimientos matemáticos, con resultados muy fuertes, como el *Teorema fundamental de curvas*, que nos permite determinar cualquier curva del espacio sin más que considerar su curvatura y torsión.

Esta teoría fue desarrollada sobre \mathbb{R}^3 y depende fundamentalmente del producto escalar euclídeo. Por lo tanto, cabe preguntarse si es posible desarrollar una teoría de curvas similar sobre otro espacio, con un producto escalar diferente al euclídeo, y cuáles serían las diferencias que implicaría dicho cambio.

Con el avance de la ciencia a lo largo de los siglos, surge de manera natural el *espacio de Lorentz-Minkowski* \mathbb{E}_1^4 , un novedoso espacio que se volvió fundamental para físicos como Albert Einstein, quien en 1905 desarrolló su *Teoría Especial de la Relatividad* apoyándose sobre él.

Hermann Minkowski fue un matemático lituano, nacido en 1864 y fallecido en Gotinga en 1909. Desde muy pequeño, demostró grandes habilidades en las matemáticas, lo que le sirvió para acceder a la Königsberg University, donde entabló estrechas amistades con otros matemáticos de la época, como David Hilbert o Adolf Hurwitz. En un primer momento, Minkowski se interesó por las formas cuadráticas, llegando incluso a ganar un gran premio de matemáticas dando una solución al problema del número de representaciones de un número entero como suma de cinco cuadrados, reconstruyendo además la teoría de formas cuadráticas de Eisenstein. Sin embargo, su resultado de mayor relevancia fue el desarrollo de una nueva visión del espacio y el tiempo, sentando las bases matemáticas de la posterior teoría de la relatividad de Einstein. De hecho, en 1907, Minkowski se dio cuenta de que los trabajos de Lorentz y Einstein podían entenderse mejor sobre un espacio no euclídeo, ya que él consideraba que el espacio y el tiempo estaban acoplados en un “continuo espacio-tiempo” de cuatro dimensiones, cuando hasta ese momento se creían independientes. Los trabajos de Minkowski sirvieron de ayuda a Einstein para formular su famosa *Teoría de la Relatividad General*. Por otra parte, Hendrik Antoon Lorentz fue un físico neerlandés, que vivió entre los años 1853 y 1928. Lorentz perfeccionó la teoría electromagnética de Maxwell en su tesis doctoral *The theory of the reflection and refraction of light*, presentada en 1875. Antes de que se demostrara la existencia de los electrones, Lorentz propuso que las ondas luminosas se debían a las oscilaciones de una carga eléctrica en el átomo, cuyo desarrollo matemático le sirvió para ganar el Premio Nobel de Física en 1902, que fue concedido conjuntamente a Lorentz y a Pieter Zeeman, un alumno suyo que le ayudó en la demostración experimental. Lorentz también es muy conocido por sus trabajos sobre *la contracción de FitzGerald-Lorentz*, que es una contracción de la longitud de un objeto a velocidades relativistas. Las transformaciones de Lorentz, que introdujo en 1904, constituyen la base de la teoría especial de la relatividad de Einstein.



Figura 1: Hermann Minkowski y Hendrik Antoon Lorentz. Imágenes extraídas de *MacTutor History of Mathematics Archive* (*School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews*).

El espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{E}_1^4 posee tres dimensiones espaciales (que se comportan igual que el espacio euclídeo \mathbb{E}^3), a la que se le incorpora una cuarta dimensión que denotará al tiempo. De esta forma, se puede medir cómo varía la posición de un objeto a lo largo del tiempo. En física, se trabaja sobre el espacio \mathbb{E}_1^4 , para poder considerar así las tres dimensiones espaciales y la cuarta dimensión temporal. Sin embargo, como el estudio teórico sobre \mathbb{E}_1^3 es válido para \mathbb{E}_1^4 , se suele trabajar también sobre él, ya que es computacionalmente más sencillo y, además, posible de visualizar al reducir una dimensión.

El objetivo de este trabajo será realizar un estudio de la teoría de curvas sobre el espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{E}_1^3 , de manera análoga a como se hizo para el caso euclídeo, puntualizando además las diferencias y similitudes entre ambos espacios.

Empezaremos con un primer capítulo de introducción y repaso de algunos conceptos y resultados vistos hasta ahora y que nos resultarán muy útiles para el desarrollo del trabajo. Continuaremos con el segundo capítulo, en el que introduciremos al espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{E}_1^3 , dando algunas propiedades y resultados propios de este espacio que serán notablemente diferentes al espacio euclídeo, sirviéndonos de base para el estudio de curvas. Para finalizar, en el tercer y último capítulo, nos centraremos en el tema principal de este trabajo, el estudio de curvas, que se desarrollará de manera paralela a como se hizo en la asignatura *Geometría Local de Curvas y Superficies* del Grado en Matemáticas. En este desarrollo incluiremos ejemplos, así como imágenes de creación propia.

Para todo ello, ha sido fundamental el artículo [7], de Rafael López, Catedrático de Geometría y Topología de la Universidad de Granada. Otras fuentes bibliográficas se citan a lo largo del trabajo. Todas ellas se encuentran recogidas en la Bibliografía.

Agradecimientos

Quería agradecer a mi familia y amigos, por animarme a continuar en la carrera y no dejarme caer, aun estando en la distancia. A mis magnolios, por hacer de Sevilla un hogar. A mis compañeros de clase, por tantas tardes de estudio, y tantos buenos momentos juntos. A mi tutor, Alfonso, por hacer que me apasione por la geometría y por su ayuda inestimable.

Pero sobre todo y en especial, a Luis, Herminia y Elena, por todo lo que me han enseñado a lo largo de estos cuatro años y lo feliz que me han hecho. Todo esto no tendría sentido sin vosotros.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo vamos a hacer un breve repaso de algunos conceptos y resultados que vimos en las asignaturas de *Álgebra Lineal y Geometría I* y *Geometría Local de Curvas y Superficies*, correspondientes al *Grado en Matemáticas*, y que nos serán de utilidad en los próximos capítulos.

Debido a que la mayoría de resultados ya se han visto en las mencionadas asignaturas, omitiremos las demostraciones de los mismos, salvo aquellos casos cuya demostración sea de gran interés. Para más información veáanse [1], [2], [3], [5] y [8].

1.1. Espacios euclídeos

En esta sección veremos algunos resultados geométricos enfocados de una manera algebraica. A lo largo de la misma, trabajaremos sobre el espacio vectorial \mathbb{R}^n , con $n \geq 2$, aunque por lo general nos interesarán las dimensiones $n = 2, 3$.

Comencemos con el concepto de producto escalar:

Definición 1.1.1 Un *producto escalar* $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre el espacio vectorial \mathbb{R}^n , es una forma bilineal simétrica y definida positiva, es decir, una forma que verifica:

1. $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v, w \in \mathbb{R}^n$.
2. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, para todos $u, v \in \mathbb{R}^n$.
3. $\langle u, u \rangle \geq 0$, y además, $\langle u, u \rangle = 0$ si y solo si $u = 0$.

Una vez definida la noción de producto escalar, llamamos *espacio euclídeo* a cualquier espacio vectorial real con un producto escalar. En nuestro caso, consideraremos el par $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_e)$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ es el producto escalar dado por

$$\langle u, v \rangle_e = \sum_{i=1}^n u_i v_i, \quad u, v \in \mathbb{R}^n,$$

denominado *producto escalar euclídeo estándar*.

Ahora, podemos definir el “tamaño” de un vector mediante el concepto de *norma*.

Definición 1.1.2 Se define la *norma* de un vector x como el número

$$|u| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Si la norma de dicho vector es 1, diremos que el vector es *unitario*.

Nota 1.1.3 Por abuso de notación, a la norma de un escalar la identificaremos con su valor absoluto utilizando la misma notación $|\cdot|$.

En particular, la norma depende del producto escalar elegido. Así, para el producto escalar estándar obtenemos la *norma euclídea*, definida por:

$$|u|_e = \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Esta norma también es notada como $|\cdot|_2$, y se la conoce como *2-norma*, ya que se puede extender a cualquier número p de la siguiente forma:

$$|u|_p = \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{1/p}.$$

La norma verifica una desigualdad muy conocida:

Teorema 1.1.4 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Sean $u, v \in \mathbb{E}^n$. Entonces

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u||v|,$$

dándose la igualdad si y sólo si ambos vectores son proporcionales.

En un espacio vectorial euclídeo, esta desigualdad nos garantiza que si $u, v \in \mathbb{E}^n$ son no nulos, entonces

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|} \leq 1,$$

pudiéndose definir así el *ángulo entre los vectores* u, v como el único valor $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|}.$$

Con esta definición de ángulo, parece claro que la noción de ortogonalidad puede relacionarse con el producto escalar.

Definición 1.1.5 Decimos que u y v son ortogonales si $\langle u, v \rangle = 0$. En tal caso, lo notaremos $u \perp v$.

La ortogonalidad entonces puede entenderse como que los vectores u y v forman un ángulo $\frac{\pi}{2}$. Esto se cumple gracias a la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* y a la propiedad del producto escalar de ser definido positivo. Sin embargo, y como veremos en el siguiente capítulo, en espacios no euclídeos estas propiedades no se cumplen en general, por lo que la noción de ortogonalidad será distinta y no coincidirá con que los vectores formen un ángulo $\frac{\pi}{2}$.

Definición 1.1.6 Sea M un subconjunto de un espacio euclídeo \mathbb{E}^n . Se define el *complemento ortogonal* de M como

$$M^\perp = \{u \in \mathbb{E}^n \mid \langle m, u \rangle = 0, \text{ para todo } m \in M\}.$$

En otras palabras, el subespacio vectorial M^\perp es el conjunto de todos los vectores que son ortogonales a todos los elementos de M . Veamos algunas propiedades de este subespacio vectorial.

Proposición 1.1.7 Si W_1, W_2 son dos subespacios vectoriales de \mathbb{E}^n , se verifica:

1. $(W_1^\perp)^\perp = W_1$.
2. Si $W_1 \subset W_2$, entonces $W_2^\perp \subset W_1^\perp$.
3. $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.
4. $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

Vamos a recordar también el concepto de conjunto ortonormal, con el que podremos más tarde definir una base ortonormal, que nos serán de gran ayuda en el desarrollo de este trabajo.

Definición 1.1.8 Un conjunto $S = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ es un *conjunto ortogonal* si $u_i \perp u_j$ cuando $i \neq j$, y $u_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, r$. Si además los vectores son unitarios, hablaremos de *conjunto ortonormal*.

Recordemos que de un conjunto ortogonal puede obtenerse un conjunto ortonormal sin más que realizar una *normalización* de sus vectores, es decir, dado $u \in \mathbb{E}^n$ no unitario, puede obtenerse un vector v de su misma dirección y sentido dado por

$$v = \frac{u}{|u|},$$

que es unitario.

En particular, los conjuntos ortogonales son todos linealmente independiente luego, si además son generadores del espacio, conformarán una *base ortogonal* (o *base ortonormal* en el caso de que sean unitarios).

Además, las bases ortonormales son realmente importantes, pues nos permiten escribir las coordenadas de un vector respecto de dicha base en función del producto escalar de dicho vector con cada elemento de la base. Este hecho viene recogido en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.9 Sea $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base ortonormal de \mathbb{E}^n . Dado un vector $v \in \mathbb{E}^n$, podemos escribir v en función de las coordenadas de B como:

$$v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_n \rangle u_n.$$

Observación 1.1.10 El teorema anterior podría formularse para base ortogonales sin más que considerar las coordenadas de v como

$$v = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{|u_1|} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{|u_2|} u_2 + \dots + \frac{\langle v, u_n \rangle}{|u_n|} u_n,$$

conocida como la *expansión de Fourier* del vector v .

Por último, haremos un breve repaso de las matrices ortogonales y algunas de sus propiedades. Recordemos que una *matriz ortogonal* es una matriz real cuyas columnas (o filas) constituyen una base ortonormal de \mathbb{E}^n . En particular, las matrices ortogonales reales verifican que

$$A'A = I,$$

donde A' es la traspuesta de A , e I es la matriz identidad de dimensión n . Esto implica que las matrices ortogonales reales verifican que su inversa coincide con su traspuesta, y también que $\det(A) = \pm 1$, pues

$$1 = \det(I) = \det(A'A) = \det(A')\det(A),$$

y recordemos que $\det(A) = \det(A')$. Además, una matriz ortogonal real también conserva la norma, puesto que

$$|Au|_e^2 = u'A'Au = u'u = |u|.$$

1.2. Teoría local de curvas

Vamos a ver ahora algunos resultados de geometría diferencial. Comencemos por el concepto de curva parametrizada regular.

Definición 1.2.1 Una *curva parametrizada regular* es una aplicación

$$\alpha : I = (a, b) \subset \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}^m, \quad \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$$

tal que:

1. $\alpha \in \mathcal{C}^k$, $k \geq 1$ (*Condición de Diferenciabilidad*).
2. $\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} \neq 0$, para todo $t \in I$ (*Condición de Regularidad*).

Nota 1.2.2 Recordemos que si $m = 2$ hablaremos de *curvas planas*, mientras que para $m = 3$ hablamos de *curvas alabeadas*.

A veces, el mismo conjunto imagen puede describirse por diferentes parametrizaciones, incluyendo parametrizaciones no regulares. Nos centraremos en aquellas parametrizaciones de curvas que mantienen la condición de regularidad. Recordemos el concepto de reparametrización regular:

Definición 1.2.3 Sea $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{E}^m$ una curva parametrizada regular. Una *reparametrización regular* o *cambio de parámetros regular* de α es una función biyectiva y de clase \mathcal{C}^k , $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} f : (c, d) \subset \mathbb{E} &\longrightarrow (a, b) \\ r &\mapsto f(r) = t, \end{aligned}$$

tal que

$$\frac{df}{dr} = \frac{dt}{dr} \neq 0,$$

en todo el intervalo (c, d) .

Por lo tanto, f es invertible y su inversa es de la misma clase que ella. Esto hace que toda reparametrización regular sea un difeomorfismo y, en consecuencia, un homeomorfismo.

Así, la curva parametrizada $\beta = \alpha \circ f$, definida por $\beta(r) = \alpha(f(r))$, tiene el mismo conjunto imagen que α y también es regular en todo (c, d) . La clase de β es la mínima entre la de α y la de f y, por abuso de lenguaje, se llama también a β una *reparametrización regular* de α .

Vamos a ver ahora un tipo de reparametrización regular muy importante para estudiar las curvas a nivel teórico o cuando sólo interesa su forma geométrica. Para ello, primero recordemos qué es un arco regular.

Definición 1.2.4 Un *segmento de curva parametrizada regular*, o simplemente *arco regular*, es una aplicación $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{E}^m$, $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$, tal que existe un intervalo abierto (c, d) que contiene a $[a, b]$, y existe una curva parametrizada regular $\beta : (c, d) \longrightarrow \mathbb{E}^m$ cumpliendo que $\alpha = \beta|_{[a, b]}$. Así, es posible considerar $\alpha'(a) = \beta'(a)$ y $\alpha'(b) = \beta'(b)$. La longitud del arco regular α es:

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i'^2(t)} dt.$$

Además, si consideramos la función $s : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}$ dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\sigma)| d\sigma,$$

que mide la longitud del arco regular de α correspondiente a $[t_0, t]$ ó a $[t, t_0]$ con signo, podemos reparametrizar cualquier curva con dicha función. A este parámetro se le conoce como *parámetro natural* o *parámetro arco*. Este resultado viene recogido en el siguiente teorema.

Teorema 1.2.5 *Toda curva parametrizada regular puede ser reparametrizada regularmente por su longitud de arco, es decir, toda curva regular admite una parametrización regular por su longitud de arco. A dicha parametrización se le llamará parametrización natural o parametrización por su longitud de arco.*

Nota 1.2.6 Se verifica que $|\dot{\alpha}(s)| = 1$, para cualquier s .

Teorema 1.2.7 *Una curva parametrizada α lo está por su longitud de arco si y sólo si $|\dot{\alpha}(s)| = 1$, para todo $s \in (a, b)$.*

1.2.1. Curvas planas

Vamos a centrarnos ahora en el estudio de la geometría diferencial para curvas planas, es decir, para las curvas $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^2$ parametrizadas regulares de clase $k \geq 2$.

Definición 1.2.8 Se llama *vector velocidad* de α en $\alpha(t_0)$ al vector $\alpha'(t_0)$. Al módulo del vector velocidad de α en $\alpha(t_0)$ se le llama *velocidad* de α en $\alpha(t_0)$, y nos permite definir el *vector tangente* a α en $\alpha(t_0)$ como el vector

$$\mathbf{t}(t_0) = \frac{\alpha'(t_0)}{|\alpha'(t_0)|},$$

que claramente es unitario.

Recordemos también el concepto de curvatura, que nos permite medir la “doblez” de una curva. A partir de ahora consideraremos $\alpha = \alpha(s)$ una curva parametrizada naturalmente.

Definición 1.2.9 Sea α una curva parametrizada naturalmente en \mathbb{E}^2 . Se define la *curvatura* de α en $\alpha(s_0)$ como

$$\kappa(s_0) = \dot{\theta}(s_0) = \left(\frac{d\theta}{ds} \right)_{s=s_0},$$

donde $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es una determinación continua del ángulo que forma el eje OX con el vector tangente.

Además, la curvatura nos permite obtener los siguientes resultados:

1. Se tiene que $|\kappa(s)| = |\ddot{\alpha}(s)|$.
2. Una curva es una recta si y solo si su curvatura es idénticamente nula.
3. Una curva es una circunferencia si y solo si su curvatura es constante.

Por lo tanto, parece que la curvatura determina totalmente la geometría de una curva. Así, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.2.10 (Teorema fundamental de curvas planas) *Sea $\kappa = \kappa(s)$ una función continua. Entonces, existe una curva parametrizada regular $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^2$ tal que s es su parámetro natural y $\kappa(s)$ su curvatura. Además, α es única salvo congruencias de \mathbb{E}^2 .*

Veamos cómo construir una base ortonormal para α que nos permita estudiar su geometría diferencial con mayor facilidad.

Definición 1.2.11 Se llama *vector normal* de α en $\alpha(s)$ al único vector unitario $\mathbf{n}(s)$ y ortogonal a $\mathbf{t}(s)$ en dicho punto, y tal que el par $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s))$ está positivamente orientado. A este par se le llama *Referencia de Frenet* o *Diedro de Frenet* de α en $\alpha(s)$, y es una referencia (base) ortonormal directa que se mueve con los puntos de la curva.

Esta referencia determina las llamadas *ecuaciones de Frenet*, que nos permiten calcular, entre otras cosas, la curvatura de α .

Teorema 1.2.12 (Ecuaciones de Frenet) *Se verifica que:*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \dot{\mathbf{n}}(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s). \end{cases}$$

Con estas ecuaciones, podemos deducir que la curvatura puede calcularse como

$$\kappa(s) = \dot{\mathbf{t}}(s)\mathbf{n}(s) = -\mathbf{t}(s)\dot{\mathbf{n}}(s).$$

De hecho, la curvatura también puede calcularse sin necesidad de parametrizar naturalmente la curva de la siguiente forma:

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left(\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\right)^3}.$$

1.2.2. Curvas alabeadas

Para terminar este primer capítulo de repaso, vamos a recordar los resultados que obteníamos del estudio de una curva alabeada $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^3$ regular parametrizada naturalmente de clase $k \geq 3$.

En este caso, es claro que la curvatura tendrá otra interpretación, ya que en el caso de las curvas planas tenía signo pues las rectas dividen al plano en dos regiones. Eso no ocurre ahora, por lo que definimos la curvatura de la siguiente forma.

Definición 1.2.13 Sea $\alpha = \alpha(s)$ una curva regular parametrizada naturalmente en \mathbb{E}^3 . Se llama *curvatura* de α a la función $\kappa = \kappa(s) = |\ddot{\alpha}(s)|$.

Ahora, se sigue verificando que una curva es una recta si y solo si su curvatura es nula en todos los puntos, pero no es cierto que toda curva alabeada con curvatura constante sea una circunferencia.

Definición 1.2.14 Se define el *vector normal principal* a α en un punto $\alpha(s_0)$ tal que $\kappa(s_0) > 0$ como

$$\mathbf{n}(s_0) = \frac{\ddot{\alpha}(s_0)}{\kappa(s_0)},$$

que claramente es unitario y ortogonal a $\mathbf{t}(s)$.

Por su parte, se define el *vector binormal* de α en un punto $\alpha(s_0)$ tal que $\kappa(s_0) > 0$ como el vector resultante del producto vectorial

$$\mathbf{b}(s_0) = \mathbf{t}(s_0) \times \mathbf{n}(s_0),$$

que por la propia definición es unitario y ortogonal a los vectores $\mathbf{t}(s_0)$ y $\mathbf{n}(s_0)$.

Así, este trío de vectores forma el llamado *Triedro de Frenet*, que es una referencia móvil ortonormal y directa de \mathbb{E}^3 en cada punto de la curva.

En curvas alabeadas es posible introducir un segundo concepto de curvatura, llamada torsión.

Definición 1.2.15 Sea $\alpha = \alpha(s)$ una curva regular parametrizada naturalmente en \mathbb{E}^3 . Se llama *torsión* de α a la función $\tau = \tau(s)$ tal que $\dot{\mathbf{b}}(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$.

Además, la torsión verifica la siguiente propiedad.

Proposición 1.2.16 Una curva alabeada es plana si y solo si su torsión es idénticamente nula.

Por lo tanto, para determinar la geometría de una curva alabeada no solo hay que tener en cuenta su curvatura, sino también su torsión. En este sentido, podemos extender el *Teorema fundamental de curvas planas* a las curvas alabeadas.

Teorema 1.2.17 (Teorema fundamental de curvas alabeadas) Sean $\kappa, \tau : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones $\kappa = \kappa(s), \tau = \tau(s)$ tales que $\kappa(s) > 0$, para todo $s \in (a, b)$, $\kappa \in \mathcal{C}^1$, y τ continua. Entonces, existe una única curva regular parametrizada, salvo movimiento rígido de \mathbb{E}^3 , tal que s es su parámetro natural, κ su curvatura, y τ su torsión.

Al igual que en el caso de las curvas planas, gracias al Triedro de Frenet, podemos obtener unas ecuaciones que nos permiten calcular más fácilmente las expresiones de las derivadas de los vectores de la base.

Teorema 1.2.18 (Ecuaciones de Frenet-Serret) Se verifican las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}}(s) = & \kappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \dot{\mathbf{n}}(s) = & -\kappa(s)\mathbf{t}(s) & +\tau(s)\mathbf{b}(s), \\ \dot{\mathbf{b}}(s) = & -\tau(s)\mathbf{n}(s). \end{cases}$$

Demostración: Haremos uso del *Teorema 1.1.9*. En virtud de dicho teorema, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}}(s) &= \langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle \mathbf{t}(s) + \langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \mathbf{n}(s) + \langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s), \\ \dot{\mathbf{n}}(s) &= \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle \mathbf{t}(s) + \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \mathbf{n}(s) + \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s), \\ \dot{\mathbf{b}}(s) &= \langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle \mathbf{t}(s) + \langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \mathbf{n}(s) + \langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s). \end{aligned}$$

Se puede obtener mediante una sencilla derivación que $\langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0$. De hecho, como la tercera ecuación se obtiene de la propia definición de la torsión, podemos deducir que:

$$\langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = -\tau(s), \quad \langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0.$$

Por otro lado, empleando la regla de la derivada del producto se obtiene que $(\langle u, v \rangle)' = \langle u', v \rangle + \langle u, v' \rangle$, para todo $u, v \in \mathbb{R}^3$. Como $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base ortogonal, se tiene que

$$\langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = -\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -\tau(s), \quad \langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = -\langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0.$$

Por lo tanto, solo nos falta calcular $\langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle$, pues de nuevo se tiene que $\langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = -\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle$. Como por definición

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\ddot{\alpha}(s)}{\kappa(s)},$$

y teniendo en cuenta que $\dot{\mathbf{t}}(s) = \ddot{\alpha}(s)$, entonces

$$\langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \kappa(s)\mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \kappa(s),$$

y como dijimos anteriormente $\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = -\kappa(s)$. Por lo tanto, hemos comprobado que calculando la expresión de $\{\dot{\mathbf{t}}(s), \dot{\mathbf{n}}(s), \dot{\mathbf{b}}(s)\}$ en función del triedro de Frenet obtenemos las ecuaciones de Frenet. \square

Por último, podemos hacer todo este estudio sin necesidad de parametrizar naturalmente la curva. Los vectores del Triedro de Frenet los calcularíamos como

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}, \quad \mathbf{b}(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}, \quad \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t),$$

mientras que las curvaturas y la torsión pueden calcularse como

$$\kappa(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}$$

y, suponiendo $\kappa(t) \neq 0$,

$$\tau(t) = \frac{(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}.$$

Capítulo 2

El espacio \mathbb{E}_1^3 de Lorentz-Minkowski

En este capítulo vamos a introducir el espacio ambiente sobre el que trabajaremos en adelante: el *espacio de Lorentz-Minkowski*. Veremos también algunas propiedades importantes del mismo, resaltando las principales diferencias con respecto al espacio euclídeo, y terminaremos destacando un tipo importante de aplicación lineal.

Para más información, pueden consultarse [4], [6] y [7].

2.1. Causalidad

Vamos a empezar definiendo el nuevo espacio sobre el que trabajaremos.

Definición 2.1.1 Se define el *espacio de Lorentz-Minkowski*, o simplemente *espacio de Minkowski*, como el espacio métrico $\mathbb{E}_1^n = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot \rangle)$, donde la métrica $\langle \cdot \rangle$ viene dada por

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i - u_n v_n, \quad u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Dicha métrica se conoce como la *métrica de Minkowski*.

Recordemos que el producto escalar es una forma bilineal, simétrica y definida positiva. Por lo tanto, es claro que la métrica de Minkowski no es un producto escalar, pues no verifica la propiedad de ser definido positivo. De hecho, esta métrica es no degenerada e indefinida (i.e., no es ni definida positiva, ni definida negativa). Por lo tanto, con asiduidad hablaremos también de *pseudoproducto escalar de Minkowski* para referirnos a la métrica de Minkowski. Como veremos más adelante, esta pequeña diferencia con respecto al caso euclídeo provocará grandes diferencias entre ambos.

Cabe destacar que, en un sentido físico, interesa trabajar sobre el espacio de Minkowski de dimensión 4, es decir, sobre \mathbb{E}_1^4 . Esto se debe a que se trabaja en un espacio de 3 dimensiones al que se le incorpora una cuarta dimensión que representará el tiempo. En este caso, si consideramos la base canónica

$$B = \{e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)\},$$

la métrica de Minkowski puede escribirse matricialmente con respecto a la base B como

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, a lo largo de este proyecto se trabajará sobre \mathbb{E}_1^3 , puesto que al reducir una dimensión, no solo será computacionalmente más sencillo, sino que además podrá ser más fácilmente interpretable de manera visual. Además, el análisis teórico para \mathbb{E}_1^3 es válido para el caso tetradimensional.

Una vez hecha esta puntualización, veamos cómo son los elementos de este espacio. Según el signo de su pseudoproducto escalar, podemos clasificar un vector en tres grupos diferentes.

Definición 2.1.2 Un vector $v \in \mathbb{E}_1^3$ se dice que es:

1. *Espacial* si $\langle v, v \rangle > 0$ o $v = 0$.
2. *Temporal* si $\langle v, v \rangle < 0$.
3. *Luminoso* si $\langle v, v \rangle = 0$ y $v \neq 0$.

La *causalidad* de un vector es la propiedad de ser espacial, temporal, o luminoso.

Observación 2.1.3 Los vectores temporales y luminosos también se denominan *vectores causales*.

A los vectores de \mathbb{E}_1^3 también se les conoce como *sucesos* o *eventos*. Un suceso $u = (u_1, u_2, u_3)$ puede escribirse como

$$u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3,$$

donde e_i , $i = 1, 2, 3$, son los vectores de la base canónica de \mathbb{E}_1^3 . A las coordenadas u_1, u_2 se las conoce como las *coordenadas espaciales* del suceso, mientras que a la coordenada u_3 se la denomina la *coordenada temporal* del suceso.

Dado que ahora la métrica de Minkowski no es definida positiva, no podemos tomar la misma definición que dimos para la norma en el caso euclídeo, pues la raíz del pseudoproducto escalar de un vector temporal no existiría. Por ello, redefinimos el concepto de norma de la siguiente manera:

Definición 2.1.4 Dado $u \in \mathbb{E}_1^3$, se define la *norma* del vector u como

$$|u| = \sqrt{|\langle u, u \rangle|}.$$

El vector u se dice *unitario* si su norma es 1.

Observación 2.1.5 Un vector u será unitario si $\langle u, u \rangle = 1$ en el caso de que u sea espacial, o $\langle u, u \rangle = -1$ en el caso de que u sea temporal. Un vector luminoso no puede ser unitario.

Notemos que la norma de cualquier vector de \mathbb{E}_1^3 será positiva, al igual que en el caso euclídeo, salvo que tratemos con vectores luminosos. A diferencia del espacio euclídeo, en el espacio de Minkowski existen una infinidad de vectores luminosos que tienen norma cero, sin ser ninguno de ellos el vector nulo (pues este vector es espacial).

Con la clasificación que hemos dado de los vectores del espacio de Minkowski, podemos realizar una partición del mismo en función de la causalidad. En efecto, sea

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\} - \{(0, 0, 0)\},$$

el conjunto de todos los vectores luminosos. A este conjunto se le conoce con el nombre de *cono de luz*, y es un cono no convexo formado por dos componentes conexas,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^+ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, z > 0\}, \\ \mathcal{C}^- &= \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, z < 0\},\end{aligned}$$

que se denominan *cono de luz futuro* y *cono de luz pasado*, respectivamente. Al interior del cono de luz

$$\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\},$$

se le denomina *cono temporal*, ya que es el conjunto de todos los vectores temporales. A diferencia del cono de luz, posee dos componentes conexas que sí son convexas,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^+ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0, z > 0\}, \\ \mathcal{T}^- &= \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0, z < 0\},\end{aligned}$$

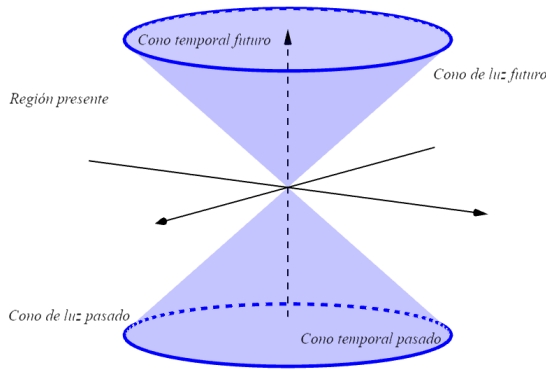
que llamaremos *cono temporal pasado* y *cono temporal futuro*. La unión del cono de luz futuro (resp. pasado) y el cono temporal futuro (resp. pasado) constituyen la *región futura* (resp. *región pasada*).

De este modo, si consideramos el conjunto de vectores espaciales, que denotaremos por \mathcal{E} , y que llamaremos *región presente*, entonces podemos concluir que

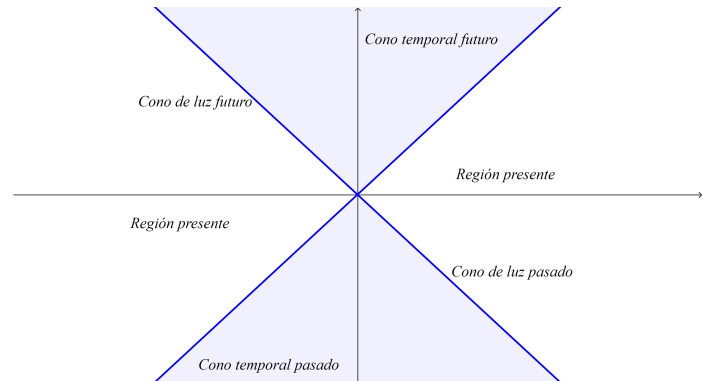
$$\mathbb{E}_1^3 = \mathcal{E} \cup \bar{\mathcal{C}},$$

donde $\bar{\mathcal{C}}$ es la clausura de \mathcal{C} .

Estos conjuntos pueden considerarse también para el plano de Minkowski \mathbb{E}_1^2 , realizando así también una partición del mismo.



(a) Espacio de Minkowski \mathbb{E}_1^3 .



(b) Plano de Minkowski \mathbb{E}_1^2 .

2.1.1. Ortogonalidad

Vamos a ver ahora cómo construir una base ortonormal para el espacio de Minkowski (o cualquier subespacio del mismo). Recordemos que el ejemplo más sencillo de base ortonormal euclídea era la base canónica

$$B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}.$$

Este ejemplo también es el caso más simple de base en el espacio de Minkowski. Además esta base es ortonormal. Para ello, necesitamos las siguientes definiciones:

Definición 2.1.6 Dos vectores $u, v \in \mathbb{E}_1^3$ son *ortogonales* si $\langle u, v \rangle = 0$.

Definición 2.1.7 Una base se dirá que es *ortonormal* si todos sus vectores son unitarios y ortogonales dos a dos.

Es trivial comprobar que la base B anterior es ortonormal. Además, contiene dos vectores espaciales (e_1 y e_2) y un vector temporal (e_3). Este hecho va a ser fundamental para cualquier base ortonormal de \mathbb{E}_1^3 . Esta observación de gran importancia viene recogida en el siguiente teorema, que probamos para cualquier dimensión n :

Teorema 2.1.8 *El número de vectores temporales en una base ortonormal no depende de la base escogida. A dicho número se le conoce como índice.*

Demostración: Sea ν el número de vectores temporales en una base ortonormal. Supongamos que existe otra base ortonormal B' tal que el número de vectores temporales en ella es $\nu' < \nu$. Entonces, la intersección del subespacio U' , formado por los $n - \nu'$ vectores espaciales de B' , y el subespacio W , generado por los ν vectores temporales de B , tendría dimensión mayor que cero, es decir, existiría un vector $u \in U' \cap W$ tal que $\langle u, u \rangle > 0$ y $\langle u, u \rangle < 0$, lo cual es una contradicción. \square

Observación 2.1.9 El índice del espacio de Minkowski es 1.

Una vez sabemos cómo son las bases ortonormales en \mathbb{E}_1^3 , veamos el equivalente al Teorema 1.1.9 en el espacio de Minkowski.

Teorema 2.1.10 *Sea $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base ortonormal de \mathbb{E}_1^n , donde supongamos que el vector temporal es u_n . Dado un vector $v \in \mathbb{E}_1^n$, podemos escribir v en función de las coordenadas de B como:*

$$v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_{n-1} \rangle u_{n-1} - \langle v, u_n \rangle u_n.$$

Demostración: Supongamos dada una base ortonormal $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, donde u_n es un vector temporal y u_i es un vector espacial, para todo $i = 1, \dots, n-1$. Entonces, dado un vector $v \in \mathbb{E}_1^n$, podemos escribirlo en función de la base B como

$$v = \sum_i^n \lambda_i u_i = \sum_i^{n-1} \lambda_i u_i + \lambda_n u_n.$$

Nuestro objetivo es calcular las coordenadas λ_i , para todo $i = 1, \dots, n$. Si consideramos el producto escalar de v con cualquier vector u_j , $j = 1, \dots, n-1$, tenemos que:

$$\langle v, u_j \rangle = \sum_i^{n-1} \lambda_i \langle u_i, u_j \rangle + \lambda_n \underbrace{\langle u_n, u_j \rangle}_{=0} = \sum_i^{n-1} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Por otro lado, calculando el producto escalar de v con el vector temporal u_n , llegamos a:

$$\langle v, u_n \rangle = \sum_i^{n-1} \lambda_i \underbrace{\langle u_i, u_n \rangle}_{=0} + \lambda_n \langle u_n, u_n \rangle = -\lambda_n.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta lo anterior, hemos llegado a la expresión

$$v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_{n-1} \rangle u_{n-1} - \langle v, u_n \rangle u_n,$$

como queríamos demostrar. \square

Observación 2.1.11 La elección del vector temporal en la expresión anterior es arbitraria, y puede ser cualquier vector de la base.

Para poder definir las bases ortonormales hemos hablado de ortogonalidad. Recordemos que sobre el espacio euclídeo la caracterización de la ortogonalidad entre dos vectores venía dada porque ambos vectores formasen un ángulo de $\frac{\pi}{2}$. Sin embargo, en el espacio de Minkowski la noción de ortogonalidad será diferente a la noción euclídea. Por lo tanto, vamos a ver cómo son dos vectores ortogonales en \mathbb{E}_1^3 .

Antes de comenzar dicho estudio, veamos algunas propiedades de los vectores luminosos y temporales:

Proposición 2.1.12 *Se verifica:*

1. Dos vectores luminosos $u, v \in \mathbb{E}_1^3$ son linealmente dependientes si y solo si $\langle u, v \rangle = 0$.
2. Si u y v son dos vectores no espaciales que verifican $\langle u, v \rangle = 0$, entonces ambos son luminosos.
3. Si u y v son dos vectores temporales, entonces $\langle u, v \rangle \neq 0$.

Demostración: Vayamos punto por punto.

1. Supongamos primero que u, v son dos vectores luminosos linealmente dependientes. En tal caso, podemos asumir que $v = \lambda u$, para un cierto valor $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, se tiene que

$$\langle u, v \rangle = \langle u, \lambda u \rangle = \lambda \langle u, u \rangle = 0.$$

Supongamos ahora que se verifica que $\langle u, v \rangle = 0$, y consideremos $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base ortonormal canónica. Está claro que si u, v no tuvieran componente en e_3 , no podrían ser luminosos (de hecho, serían espaciales). Por lo tanto, normalizando la tercera coordenada si fuera necesario, podemos escribir los vectores u, v de la forma:

$$u = a_1 e_1 + a_2 e_2 + e_3, \quad v = b_1 e_1 + b_2 e_2 + e_3.$$

Basta probar ahora que $u = v$. De las relaciones $\langle u, v \rangle = \langle u, u \rangle = \langle v, v \rangle = 0$, llegamos a que

$$1 = a_1 b_1 + a_2 b_2 = a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2.$$

Si consideramos los vectores $\bar{u} = (a_1, a_2), \bar{v} = (b_1, b_2)$, como vectores del espacio euclídeo \mathbb{E}^2 , podemos hacer uso de la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*, llegando a que ambos vectores son proporcionales, es decir,

$$\bar{u} = \lambda \bar{v}.$$

Como $|\bar{u}| = |\bar{v}| = 1$, y $\langle u, v \rangle = 0$, entonces necesariamente $\lambda = 1$, llegando al resultado que queríamos.

2. Supongamos que uno de los dos vectores, por ejemplo u (para v se razonaría de manera análoga) fuera temporal. Entonces considerando su normalización

$$\tilde{e}_3 = \frac{u}{|u|},$$

podríamos extenderlo a una base ortonormal $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ de \mathbb{E}_1^3 , en la que, de acuerdo con el *Teorema 2.1.8*, \tilde{e}_1 y \tilde{e}_2 han de ser espaciales. Pero como

$$\langle v, \tilde{e}_3 \rangle = \frac{1}{|u|} \langle v, u \rangle = 0,$$

se tendría, aplicando el *Teorema 2.1.10*, que $v \in \text{Span}\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$, por lo que sería espacial, lo que es una contradicción.

3. Si u y v son dos vectores temporales, entonces $\langle u, v \rangle \neq 0$, pues en caso contrario, por el apartado anterior, serían vectores luminosos. \square

Consideremos ahora un subespacio vectorial $U \subset \mathbb{E}_1^3$. Recordemos que la métrica inducida sobre U viene dada por

$$\langle u, v \rangle_U = \langle u, v \rangle, \quad u, v \in U.$$

De esta forma, podemos clasificar un subespacio vectorial según la métrica que se induce en él:

Definición 2.1.13 La métrica inducida en U puede ser de tres tipos:

1. La métrica tiene índice 1, que denominaremos *métrica Lorentziana*, y U es *temporal*.
2. La métrica es *degenerada* y U es *luminoso*.
3. La métrica es *Riemanniana*, es decir, es definida positiva, y U es *espacial*.

Al ser la métrica definida positiva en los subespacios espaciales, podemos identificar dichos espacios con los espacios euclídeos. Por esta razón, al no contener la región presente vectores temporales, la métrica inducida sobre este subespacio será definida positiva, por lo que podemos asegurar que la región presente es un subespacio euclídeo.

Para los subespacios temporales podemos dar la siguiente caracterización:

Proposición 2.1.14 Sea $U \subset \mathbb{E}_1^3$ un subespacio vectorial de dimensión mayor o igual que 2. Son equivalentes:

1. U es un subespacio temporal.
2. U contiene dos vectores luminosos linealmente independientes.
3. U contiene un vector temporal.

Demostración: (1) \Rightarrow (2). Supongamos que U es un subespacio temporal y consideremos una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_k\}$, donde k podría valer 2 o 3. Entonces, por el *Teorema 2.1.8*, sabemos que solo uno de los vectores de esta base es temporal. Supongamos que es e_k . Así, e_1 es espacial. Entonces, los vectores $e_1 + e_k, e_1 - e_k$ son dos vectores luminosos, pues

$$\langle e_1 + e_k, e_1 + e_k \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle + 2\langle e_1, e_k \rangle + \langle e_k, e_k \rangle = 1 + 0 - 1 = 0,$$

y

$$\langle e_1 - e_k, e_1 - e_k \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle - 2\langle e_1, e_k \rangle + \langle e_k, e_k \rangle = 1 + 0 - 1 = 0.$$

(2) \Rightarrow (3). Supongamos que u, v son dos vectores luminosos linealmente independientes. Entonces, o bien el vector $u + v$ es temporal, o bien lo es el vector $u - v$, pues

$$\begin{aligned} \langle u + v, u + v \rangle &= \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = 2\langle u, v \rangle, \\ \langle u - v, u - v \rangle &= \langle u, u \rangle - 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = -2\langle u, v \rangle, \end{aligned}$$

donde, si usamos la *Proposición 2.1.12*, sabemos que $\langle u, v \rangle \neq 0$, por lo que uno de los vectores anteriores es espacial y otro temporal.

(3) \Rightarrow (1). Supongamos que U contiene un vector temporal y sea u dicho vector. Normalizándolo, podemos extenderlo a una base ortonormal de U , en la que sería el único vector temporal, pues, en

caso contrario, al extender dicha base a una base ortonormal de \mathbb{E}_1^3 , nos encontraríamos con más de un vector temporal en la base, lo que sería contradictorio con el *Teorema 2.1.8*. Por lo tanto, el índice de U también es 1 y U es un subespacio temporal. \square

De igual forma, podemos caracterizar los subespacios luminosos, tal y como viene recogido en la siguiente proposición:

Proposición 2.1.15 *Sea U un subespacio vectorial de \mathbb{E}_1^3 . Son equivalentes:*

1. U es un subespacio luminoso.
2. U contiene un vector luminoso, pero no contiene vectores temporales.

Demostración: Es trivial, a la vista del apartado 3 de la *Proposición 2.1.14*, pues si U contuviera algún vector temporal, habría de ser un subespacio temporal. \square

Notemos que, debido a este resultado, no podemos considerar las bases ortonormales que hemos definido anteriormente sobre los espacios luminosos, ya que al no contener ningún vector temporal, estarían incumpliendo el *Teorema 2.1.8*. Es por ello que para estos subespacios introducimos el concepto de *base nula*.

Definición 2.1.16 Una base $\{u_1, u_2, u_3\}$ de \mathbb{E}_1^3 se dice que es una *base nula* si u_1 es un vector espacial unitario, y u_2, u_3 son dos vectores luminosos tales que $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = 0$ y $\langle u_2, u_3 \rangle = -1$. En particular, los vectores u_2, u_3 pertenecen a la misma componente de \mathcal{C} .

Las bases nuladas son el equivalente a las bases ortonormales en los subespacios luminosos. Por eso, cuando necesitemos tomar bases ortonormales en estos espacios, usaremos las bases nuladas.

Pasemos ahora a estudiar algo más la ortogonalidad. Al igual que en el caso euclídeo, se define el *ortogonal* U^\perp de un subespacio vectorial $U \subset \mathbb{E}_1^n$ como

$$U^\perp = \{v \in \mathbb{E}_1^n \mid \langle v, u \rangle = 0, \text{ para todo } u \in U\}.$$

Además, se dice que U es *no degenerado* si $U \cap U^\perp = \{0\}$. El caso contrario se obtiene cuando la métrica es degenerada en U , es decir, cuando U es luminoso.

Para comenzar, veamos un primer resultado referente al ortogonal:

Proposición 2.1.17 *Sea $U \subset \mathbb{E}_1^n$ un subespacio vectorial. Se verifica:*

1. $\dim(U^\perp) = n - \dim(U)$.
2. $(U^\perp)^\perp = U$.
3. Si v es espacial o temporal, entonces $\mathbb{E}_1^n = \text{Span}\{v\} \oplus \text{Span}\{v\}^\perp$.
4. Si U es no degenerado, entonces U^\perp es un subespacio no degenerado.
5. U es temporal (resp. espacial, luminoso) si y solo si U^\perp es espacial (resp. temporal, luminoso).

Demostración: Supongamos $U \subset \mathbb{E}_1^n$ un subespacio vectorial.

1. Sea $B = \{e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de \mathbb{E}_1^n de tal forma que $B' = \{e_1, \dots, e_p\}$ es una base de U . Entonces, si

$$v = \sum_{i=1}^n a_i e_i,$$

se tiene que $v \in U^\perp$ si y solo si $\langle u, e_i \rangle = 0$, para todo $i = 1, \dots, p$, es decir,

$$\sum_{j=1}^n \langle e_i, e_j \rangle a_j = 0,$$

para todo $i = 1, \dots, p$. Como el subespacio U^\perp viene dado por las soluciones de un sistema lineal de p ecuaciones independientes con n incógnitas, entonces claramente $\dim(U^\perp) = n - p$.

2. La inclusión $(U^\perp)^\perp \supset U$ es trivial. Por el punto anterior, $\dim(U^\perp)^\perp = \dim(U)$, con lo que se obtiene la igualdad.
3. Se obtiene directamente del primer apartado.
4. Se obtiene trivialmente del apartado 2.
5. Supongamos que U^\perp es espacial. Por reducción al absurdo, supongamos que U no es temporal. Entonces, para cualquier $u \in U$, se verifica que $\langle u, u \rangle \geq 0$. Por otro lado, por el apartado 3, sabemos que $\mathbb{E}_1^3 = \text{Span}\{v\} \oplus \text{Span}\{v\}^\perp$, por lo que si consideramos $v \in \mathbb{E}_1^3$ un vector cualquiera, podemos expresarlo como $v = u + w$, con $u \in U, w \in U^\perp$. Pero entonces,

$$\langle v, v \rangle = \langle u + w, u + w \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, w \rangle + \langle w, w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle w, w \rangle \geq 0,$$

por lo que no existe ningún vector $v \in \mathbb{E}_1^3$ que sea temporal, llegando así a una contradicción.

El caso luminoso es trivial, pues, si U es luminoso, entonces, por definición, la métrica degenera en él. Pero, de acuerdo con los apartados 2 y 4, U^\perp también habrá de ser degenerado, y por tanto luminoso. \square

El punto realmente importante de la Proposición anterior es el último. Con este punto podemos deducir lo siguiente:

1. Los vectores espaciales pueden ser ortogonales a un vector temporal o a uno luminoso, pero también a otro vector espacial.
2. Los vectores temporales sólo pueden ser ortogonales a un vector espacial, ya que su complemento ortogonal no contiene ningún vector de otra causalidad.
3. Los vectores luminosos pueden ser ortogonales a otro vector luminoso o a un vector espacial, pero, por la *Proposición 2.1.15*, nunca serán ortogonales a un vector temporal.

Además, teniendo en cuenta la *Proposición 2.1.12*, un vector luminoso siempre es ortogonal a cualquier vector proporcional a él, incluyéndose a sí mismo.

Sobre el plano de Minkowski la ortogonalidad tiene una interpretación incluso más sencilla. Dado un vector $u \in \mathbb{E}_1^2$, un vector ortogonal a él es la reflexión por una de las ramas del cono de luz \mathcal{C} (véase la Figura 2.2).

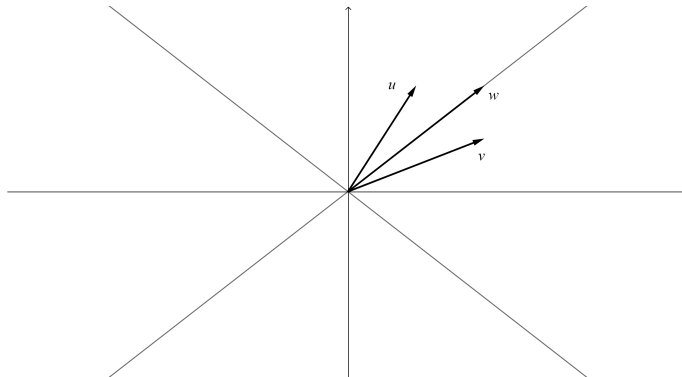


Figura 2.2: Los vectores u, v son ortogonales. El vector w es ortogonal a sí mismo.

Por último, podemos dar una caracterización de la causalidad de un plano vectorial que además nos servirá para remarcar otra diferencia más entre los espacios \mathbb{E}_1^3 y \mathbb{E}^3 .

Proposición 2.1.18 *Sea $P \subset \mathbb{E}_1^3$ un plano vectorial. Denotamos por \vec{n}_e al vector normal al plano con respecto a la métrica euclídea. Entonces, P es espacial (resp. temporal, luminoso) si y solo si \vec{n}_e es temporal (resp. espacial, luminoso).*

Demostración: Supongamos que el plano P viene dado por $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$. Entonces, el vector normal al plano \vec{n}_e es proporcional al vector (a, b, c) . Si reescribimos el plano P como

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by - (-c)z = 0\} = \text{Span}\{(a, b, -c)\}^\perp.$$

Por lo tanto, la causalidad del vector $(a, b, -c)$ es la misma que la del vector \vec{n}_e , y por el último punto de la *Proposición 2.1.17* obtenemos el resultado. \square

2.1.2. Temporalidad

Vamos a centrarnos ahora en el caso particular de los vectores temporales. Estos vectores nos permiten dotar al espacio de Minkowski de la noción de orientabilidad, de igual forma que en cualquier espacio vectorial. Recordemos que en un espacio vectorial, dado el conjunto de las bases ordenadas de \mathbb{R}^3 , la noción de orientación se corresponde con la relación de equivalencia \sim_e dada por

$$B \sim_e B' \text{ si y solo si la matriz de cambio de bases tiene determinante positivo.}$$

El espacio cociente de dicha relación de equivalencia posee exactamente dos elementos, que llamaremos *orientaciones* de \mathbb{R}^3 . Así, podemos decir que, dada una base B , otra base B' está *positivamente orientada* si $B \sim_e B'$ o, en caso contrario, diremos que B' está *negativamente orientada*. La elección del par ordenado $(\mathbb{R}^3, [B])$ se lee como que \mathbb{R}^3 está *orientado* (por B).

Sobre el espacio de Minkowski \mathbb{E}_1^3 , y dado que el espacio base también es \mathbb{R}^3 , la idea de orientación es la misma, pero con una pequeña diferencia, y es que en este caso hablaremos de *orientación temporal*, un concepto que depende de la métrica.

Al depender de la métrica, consideraremos en \mathbb{E}_1^3 el conjunto \mathcal{B} de todas las bases ortonormales ordenadas, donde si $B = \{b_1, b_2, b_3\} \in \mathcal{B}$, entonces b_3 es el vector temporal de la base. Si tomamos $B = \{b_1, b_2, b_3\}, B' = \{b'_1, b'_2, b'_3\}$ dos bases de \mathcal{B} , definimos la relación de equivalencia \sim dada por

$$B \sim B' \text{ si y solo si } b_3 \text{ y } b'_3 \text{ están en el mismo cono temporal.}$$

De igual modo que en los espacios vectoriales, dicha relación determina dos clases de equivalencia, que llamaremos *orientaciones temporales*. Además, cada clase caracteriza un único cono temporal, que está determinado por el vector b_3 de B . Por otro lado, dado un cono temporal, existe una única orientación temporal de tal forma que cualquier base B que pertenezca a esta orientación tiene a su vector b_3 en dicho cono temporal.

Definición 2.1.19 Decimos que \mathbb{E}_1^3 está *temporalmente orientado* si elegimos una de las dos orientaciones temporales, es decir, si escogemos un cono temporal y consideramos el par ordenado $(\mathbb{E}_1^3, [B])$, para alguna base B .

No sólo podemos hablar de orientación temporal para un espacio, sino que podemos reducir dicho concepto a un vector. Para ello, basta con introducir una nueva visión del cono temporal.

Definición 2.1.20 Dado u un vector temporal, se define el *cono temporal asociado a u* como

$$C(u) = \{v \in \mathcal{T} : \langle u, v \rangle < 0\}.$$

Este conjunto es no vacío, ya que siempre se tiene que $u \in C(u)$. De hecho, si v es otro vector temporal, utilizando que $\langle u, v \rangle \neq 0$ (*Proposición 2.1.12*), se tendrá que, o bien $\langle u, v \rangle < 0$, o bien $\langle u, v \rangle > 0$. De esta forma, podemos hacer una nueva descomposición de \mathcal{T} como la unión disjunta de dos conos temporales asociados a un vector u , es decir,

$$\mathcal{T} = C(u) \cup C(-u),$$

con $C(u) \cap C(-u) = \emptyset$. Además, los conos temporales asociados a un vector verifican las siguientes propiedades:

Proposición 2.1.21 *Se verifica:*

1. *Dos vectores temporales u y v están en el mismo cono temporal si y solo si $\langle u, v \rangle < 0$.*
2. *Los conos temporales asociados a un vector son un conjunto convexo.*
3. *Si u, v son dos vectores temporales distintos, $u \in C(v)$ si y solo si $C(u) = C(v)$.*

Demostración: Supongamos que u, v son dos vectores temporales.

1. Supongamos sin pérdida de generalidad que u es unitario, de tal forma que podemos extenderlo a una base ortonormal $B = \{e_1, \dots, e_{n-1}, u\}$. Entonces, podemos escribir v como

$$v = \langle e_1, v \rangle e_1 + \dots + \langle e_{n-1}, v \rangle e_{n-1} - \langle u, v \rangle u,$$

de donde se deduce que u y v están en el mismo cono temporal si y solo si $\langle u, v \rangle < 0$.

2. Tenemos que comprobar que, dados u, v dos vectores temporales en el mismo cono temporal, el segmento

$$\lambda u + (1 - \lambda)v, \quad \lambda \in [0, 1],$$

es temporal y, además, está contenido en el mismo cono temporal que u, v . Por el punto anterior sabemos que si u y v están en el mismo cono temporal, entonces $\langle u, v \rangle < 0$, por lo que podemos deducir que

$$\langle \lambda u + (1 - \lambda)v, \lambda u + (1 - \lambda)v \rangle = \lambda^2 \langle u, u \rangle + 2\lambda(1 - \lambda)\langle u, v \rangle + (1 - \lambda)\langle v, v \rangle < 0,$$

por lo que el segmento $\lambda u + (1 - \lambda)v$ es temporal. Por otro lado, tenemos que

$$\langle u, \lambda u + (1 - \lambda)v \rangle = \lambda \langle u, u \rangle + (1 - \lambda)\langle u, v \rangle < 0,$$

por lo que, por el punto anterior, está contenido en el cono temporal de u . Luego el cono temporal asociado a un vector es convexo.

3. Supongamos que $u \in C(v)$. Por la propia definición del cono temporal asociado a v se verifica que $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle < 0$. Por lo tanto, $v \in C(u)$, lo que implica que $C(u) = C(v)$, pues $u \in C(u)$.

Para la otra implicación, si suponemos que $C(u) = C(v)$, entonces claramente $u \in C(v)$, pues $u \in C(u)$. \square

La existencia de estos conos temporales está asegurada, ya que \mathcal{T} tiene dos componentes. Además, recordemos que para los vectores luminosos tenemos una situación parecida con sus dos componentes \mathcal{C}^+ y \mathcal{C}^- . Dados dos vectores $u, v \in \mathcal{C}$ linealmente independientes, se tiene que $\langle u, v \rangle \neq 0$ (*Proposición 2.1.12*), por lo que $\langle u, v \rangle < 0$ si y solo si ambos vectores están en la misma componente de \mathcal{C} .

Con este nuevo concepto de cono temporal, podemos definir la orientación temporal para un vector temporal $u \in \mathbb{E}_1^3$ cualquiera.

Definición 2.1.22 Sea el vector temporal $e_3 = (0, 0, 1)$. Dado v otro vector temporal, decimos que v está *orientado al futuro* (resp. *orientado al pasado*) si $v \in C(e_3)$, es decir, si $\langle v, e_3 \rangle < 0$ (resp. $v \in C(-e_3)$, i.e., $\langle v, e_3 \rangle > 0$).

Si lo miramos por coordenadas, $v = (v_1, v_2, v_3)$ está orientado al futuro si $v_3 > 0$. Así, diremos que una base ortonormal $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ está orientada al futuro si b_3 está orientado al futuro, es decir, si $b_3 \in C(h_3)$.

2.2. Ángulo entre dos vectores

Hasta ahora, hemos visto cómo la noción de ortogonalidad difiere del caso euclídeo, pero no hemos estudiado cómo medir el ángulo entre dos vectores.

En \mathbb{E}^3 , la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* (ver *Teorema 1.1.4*) nos ofrecía la posibilidad de medir el ángulo $\theta \in [0, \pi]$ entre dos vectores como

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|}.$$

Sin embargo, la desigualdad de Cauchy-Schwarz solo es cierta para los espacios euclídeos, por lo que parece lógico suponer que no podremos calcular el ángulo de esta manera, ya que, además, no nos serviría para el caso luminoso, pues estaríamos dividiendo por cero.

Sin embargo, al igual que hemos hecho con otros resultados, podemos enunciar un resultado equivalente a la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que además nos servirá, de manera similar al caso euclídeo, para medir el ángulo entre dos vectores.

Teorema 2.2.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz inversa) Sean $u, v \in \mathbb{E}_1^3$ dos vectores temporales. Entonces

$$|\langle u, v \rangle| \geq |u||v|,$$

dándose la igualdad si y solo si u y v son proporcionales. En el caso en que ambos vectores estén en el mismo cono temporal, entonces existe un único $\varphi \geq 0$ tal que

$$\langle u, v \rangle = -|u||v| \cosh \varphi.$$

Al número φ se le llama ángulo hiperbólico entre u y v .

Demostración: Por la *Proposición 2.1.17* sabemos que $\mathbb{E}_1^3 = \text{Span}\{v\} \oplus \text{Span}\{v\}^\perp$, por lo que se tiene que $u = \alpha v + \bar{u}$, con $\bar{u} \in \text{Span}\{v\}^\perp$. Entonces:

$$\langle u, u \rangle = \alpha^2 \langle v, v \rangle + \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle.$$

Por otro lado,

$$\langle u, v \rangle^2 = \alpha^2 \langle v, v \rangle^2 = \langle v, v \rangle (\langle u, u \rangle - \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle) = \underbrace{\langle v, v \rangle \langle u, u \rangle}_{\geq 0} - \underbrace{\langle v, v \rangle \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle}_{\leq 0} \geq \langle v, v \rangle \langle u, u \rangle = |v|^2 |u|^2,$$

donde hemos utilizado que $\langle v, \bar{u} \rangle = 0$, pues son ortogonales. Además, la igualdad se da si y solo si $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = 0$, es decir, cuando u, v son proporcionales.

Probemos ahora la segunda parte del teorema. Para ello, recordemos que

$$\frac{\langle u, v \rangle^2}{(|u||v|)^2} \geq 1.$$

Si u y v están en el mismo cono temporal entonces, por la *Proposición 2.1.21*, $\langle u, v \rangle < 0$, por lo que podemos escribir la expresión anterior como

$$\frac{-\langle u, v \rangle}{|u||v|} \geq 1.$$

Como la función $\cosh : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ es inyectiva, entonces existe un único $\varphi \in [0, \infty)$ tal que

$$\cosh \varphi = \frac{-\langle u, v \rangle}{|u||v|},$$

lo que prueba el enunciado. □

Por lo tanto, ya sabemos cómo medir el ángulo entre dos vectores temporales que estén en el mismo cono temporal. Ahora, nos preguntamos cómo medir el ángulo entre dos vectores cualesquiera u, v de \mathbb{E}_1^3 . Nos limitaremos a estudiar los casos en que ambos vectores tengan la misma causalidad, sean linealmente independientes y no sean luminosos.

El ángulo entre ambos vectores dependerá de la causalidad del plano P determinado por u y v . Recordemos que la métrica inducida sobre P puede ser espacial, temporal, o luminosa. Veamos cada caso:

1. Si P es espacial, entonces la métrica es *Riemanniana*, por lo que la noción de ángulo entre dos vectores (espaciales) u, v coincide con la noción euclídea usual, pues la métrica inducida es definida positiva.
2. Si P es temporal, entonces existe una isometría entre P y el plano de Minkowski \mathbb{E}_1^2 , por lo que el estudio para los planos temporales es el mismo que para \mathbb{E}_1^2 , puesto que las isometrías conservan las distancias y, por tanto, no altera el cálculo de ángulo. Ya hemos definido el ángulo para dos vectores temporales en el mismo como temporal, por lo que nos centraremos en los vectores espaciales. Es suficiente con considerar u, v unitarios.

El conjunto \mathbb{U}_1^2 de vectores unitarios de \mathbb{E}_1^2 tiene cuatro componentes conexas, que llamaremos:

$$\mathbb{H}_+^1 = \{(x, y) \in \mathbb{E}_1^2 : x^2 - y^2 = -1, y > 0\}, \quad \mathbb{H}_-^1 = \{(x, y) \in \mathbb{E}_1^2 : x^2 - y^2 = -1, y < 0\},$$

$$\mathbb{S}_1^{1+} = \{(x, y) \in \mathbb{E}_1^2 : x^2 - y^2 = 1, x > 0\}, \quad \mathbb{S}_1^{1-} = \{(x, y) \in \mathbb{E}_1^2 : x^2 - y^2 = 1, x < 0\}.$$

Es fácil ver que los vectores de \mathbb{H}_+^1 y \mathbb{H}_-^1 son temporales, y los de \mathbb{S}_1^{1+} y \mathbb{S}_1^{1-} son espaciales. Además, los vectores de \mathbb{H}_+^1 y \mathbb{H}_-^1 verifican que $\langle u, v \rangle \leq -1$, puesto que por la *desigualdad de Cauchy-Schwarz inversa* se tiene que

$$|\langle u, v \rangle| \geq |u||v| = 1.$$

Por otro lado, si hacemos el cambio de coordenadas (x, y) por (y, x) , el plano \mathbb{E}_1^2 se transforma en \mathbb{R}^2 con la métrica $-(dy)^2 + (dx)^2$, luego un vector espacial (resp. temporal) de \mathbb{E}_1^2 se transforma en un vector temporal (resp. espacial) en el nuevo espacio métrico. Así, podemos concluir que para dos vectores $u, v \in \mathbb{S}_1^{1+}$, ó $u, v \in \mathbb{S}_1^{1-}$, se tiene que $\langle u, v \rangle \geq 1$.

Sean entonces dos vectores espaciales $u, v \in \mathbb{U}_1^2$ que, además, supondremos que están en la misma componente espacial, es decir, $u, v \in \mathbb{S}_1^{1+}$ ó $u, v \in \mathbb{S}_1^{1-}$. Definimos el ángulo entre dos vectores de estas características como sigue:

Definición 2.2.2 Sean $u, v \in \mathbb{E}_1^2$ dos vectores espaciales no negativos tales que $u/|u|$ y $v/|v|$ están en la misma componente de \mathbb{U}_1^2 . Entonces, el ángulo que forman u y v viene dado por el único valor $\varphi \in [0, \infty)$ tal que

$$\cosh \varphi = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|}.$$

No definiremos el ángulo entre dos vectores unitarios espaciales o temporales de \mathbb{E}_1^2 que no estén en la misma componente conexa de \mathbb{U}_1^2 .

3. Por último, si la métrica inducida sobre P es degenerada, entonces P es luminoso, por lo que u y v no pueden ser temporales. En este caso, no definiremos el ángulo entre dos vectores espaciales.

Por último, terminaremos esta sección dando una definición de producto vectorial para el espacio de Minkowski.

Definición 2.2.3 Si $u, v \in \mathbb{E}_1^3$, se define el *producto vectorial Lorentziano* entre u y v como el único vector $u \times v$ que satisface

$$\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$$

donde $\det(u, v, w)$ es el determinante de la matriz que tiene por columnas a las coordenadas de los vectores u, v, w respecto de la base estándar B_e de \mathbb{E}^3 .

La bilinealidad de la métrica nos asegura la existencia y unicidad del vector $u \times v$. Tomando w en la definición como uno de los vectores h_i de la base estándar B_e de \mathbb{E}^3 , obtenemos la expresión de $u \times v$ en coordenadas con respecto a B_e , es decir:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Así, si denotamos $u \times_e v$ al producto vectorial euclídeo, entonces $u \times v$ es la proyección de $u \times_e v$ con respecto al plano espacial $z = 0$.

Observemos que si u y v son dos vectores no degenerados, entonces el conjunto $B = \{u, v, u \times v\}$ es una base de \mathbb{E}_1^3 . Sin embargo, y a diferencia del espacio euclídeo, la causalidad de u y v determina si la base está positivamente orientada o no. Particularmente, si u y v son espaciales, entonces $u \times v$ es temporal y B está negativamente orientada, ya que $\det(u, v, u \times v) = \langle u \times v, u \times v \rangle < 0$. Si u y v tienen distinta causalidad, entonces B estará positivamente orientada.

2.3. Isometrías

Terminaremos el tema hablando de las isometrías. Recordemos que una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ es una isometría si

$$\langle v_1, v_2 \rangle_V = \langle f(v_1), f(v_2) \rangle_W \quad v_1, v_2 \in V,$$

es decir, es una aplicación lineal que conserva las métricas.

Recordemos primero el caso euclídeo. En particular, por ser un morfismo, existe una matriz A que lo define. De hecho, por ser isometría, se tiene que dicha matriz es ortogonal, puesto que estas matrices conservan la norma. Por lo tanto, la matriz de una isometría verifica que $A'A = I$.

Consideraremos el conjunto $O(3)$ de matrices ortogonales reales de \mathbb{E}^3 que, de hecho, tiene estructura de grupo. Este grupo es isomorfo al grupo de isometrías de \mathbb{E}^3 , por lo que también se le conoce como el *grupo de isometrías* de \mathbb{E}^3 . Puesto que las matrices ortogonales tienen determinante ± 1 , podemos obtener un subgrupo de $O(3)$ formado por las matrices ortogonales con determinante 1, denotado como $SO(3) \subset O(3)$ y conocido como *grupo ortogonal especial*, o simplemente *grupo de rotaciones* de \mathbb{E}^3 . Dicho grupo está asociado al conjunto de movimientos directos. Topológicamente, $O(3)$ tiene dos componentes conexas, donde $SO(3)$ es la componente que contiene la matriz identidad y, además, es compacta.

Algunos ejemplos de isometrías en \mathbb{E}^3 son las rotaciones, las traslaciones o las reflexiones.

Después de este pequeño repaso, veamos qué ocurre en el espacio de Minkowski. La definición de isometría no difiere, pues es válida para cualquier métrica, por lo que consideraremos entonces una isometría $f : \mathbb{E}_1^3 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$. Sin embargo, en este caso, la matriz ortogonal A de la isometría f con respecto a una base ortonormal de \mathbb{E}_1^3 , verifica que $A'GA = G$, siendo

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esta diferencia se debe a que el espacio de Minkowski tiene índice 1, por lo que no podemos considerar la matriz identidad, puesto que sus columnas no forman una base ortonormal de \mathbb{E}_1^3 .

De manera análoga al caso euclídeo, llamaremos $O_1(3)$ al grupo de todas las isometrías de \mathbb{E}_1^3 . Por tanto, podemos expresar $O_1(3)$ como el conjunto de matrices

$$O_1(3) = \{A \in GL(3, \mathbb{R}) : A'GA = G\}.$$

En particular, como $\det(A) = \pm 1$, pues $\det(G) = -1$, podemos deducir que $O_1(3)$ tiene al menos dos componentes conexas. De manera análoga, podemos denotar por $SO_1(3)$ al conjunto de las isometrías con determinante 1, que llamaremos *grupo especial de Lorentz*. Dicho conjunto está relacionado con la noción de orientación de \mathbb{E}^3 de la siguiente forma: dada una orientación $B \in \mathcal{B}$, $B' \in \mathcal{B}$ está positivamente orientada si la matriz A del cambio de base pertenece a $SO_1(3)$. Por lo tanto, parece lógico hacer una distinción entre las matrices ortogonales que preservan la orientación y las que no.

Definición 2.3.1 Se define el *grupo ortocrono* como el grupo

$$O_1^+(3) = \{A \in O_1(3) : A \text{ preserva la orientación temporal}\},$$

donde decimos que A preserva la orientación temporal si la isometría definida por A lleva bases orientadas hacia el futuro en otra base orientada al futuro, es decir, si $a_{33} > 0$.

El grupo ortocrono tiene también dos componentes, una de las cuales se denomina *grupo ortocrono especial de Lorentz*, que es la intersección del grupo ortocrono con el grupo especial de Lorentz, es decir,

$$O_1^{++}(3) = O_1^+(3) \cap SO_1(3).$$

Esto prueba entonces que $O_1(3)$ tiene exactamente cuatro componentes conexas, a diferencia del espacio euclídeo \mathbb{E}^3 , que tiene exactamente dos componentes conexas, siendo una de ellas el grupo de rotaciones $SO(3)$. Otra diferencia reside en el grupo ortocrono especial de Lorentz $O_1^{++}(3)$ ya que, desde el punto de vista topológico, no es un conjunto compacto, a diferencia del subgrupo $SO(3) \subset O(3)$ del espacio euclídeo, que sí lo es.

Las otras tres componentes conexas de $O_1(3)$ se obtienen de combinar el valor de su determinante (1 ó -1) con la propiedad de si preservan la orientación temporal o no. De este modo, se obtienen las componentes:

$$\begin{aligned} O_1^{+-}(3) &= \{A \in SO_1(3) : a_{33} < 0\}, \\ O_1^{-+}(3) &= \{A \in O_1^+(3) : \det(A) = -1\}, \\ O_1^{--}(3) &= \{A \in O_1(3) : \det(A) = -1, a_{33} < 0\}. \end{aligned}$$

Todas estas cuatro componentes se pueden expresar fácilmente en función del grupo ortocrono especial de Lorentz a través de las isometrías T_1, T_2 de \mathbb{E}_1^3 definidas por:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, las componentes de $O_1(3)$ pueden expresarse como

$$O_1^{+-}(3) = T_2 \cdot T_1 \cdot O_1^{++}(3), \quad O_1^{-+}(3) = T_1 \cdot O_1^{++}(3), \quad O_1^{--}(3) = T_2 \cdot O_1^{++}(3).$$

No obstante, no hemos dado una demostración rigurosa que asegure la existencia de dichas componentes. Sin embargo, esto puede probarse fácilmente si nos restringimos al plano de Minkowski \mathbb{E}_1^2 .

Veamos cómo:

Consideremos una isometría cualquiera dada por una matriz A de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_1(2).$$

Veamos qué forma puede tener A . Por ser A la matriz de una isometría, en particular es una matriz ortogonal, luego verifica que $A'GA = G$, donde en este caso,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De esta forma, realizando el producto de matrices llegamos a las siguientes tres ecuaciones:

$$a^2 - c^2 = 1, \quad b^2 - d^2 = -1, \quad ab - cd = 0.$$

Si observamos detenidamente las dos primeras ecuaciones, podemos darnos cuenta que se corresponden con las ecuaciones de dos hipérbolas cuyos ejes focales son perpendiculares.

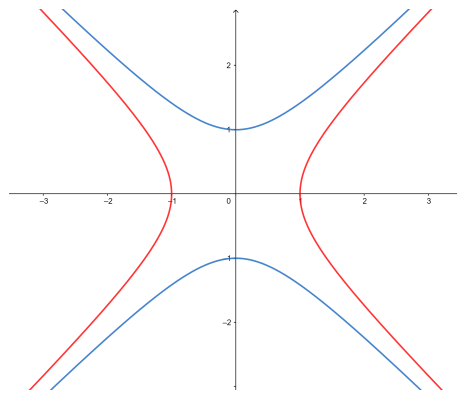


Figura 2.3: Hipérbolas de ecuaciones $x^2 - y^2 = 1$ y $x^2 - y^2 = -1$.

Luego, por tanto, dando las respectivas soluciones para estas hipérbolas, y combinándolas con las posibles soluciones de la tercera ecuación, obtendremos las cuatro componentes que buscamos.

1. Una solución para la primera ecuación es $a = \cosh(t)$, $c = \sinh(t)$, mientras que para la segunda ecuación podemos considerar las dos soluciones siguientes:
 - a) Una primera solución es $b = \sinh(s)$, $d = \cosh(s)$. Entonces, considerando la tercera ecuación podemos concluir que $s = t$.
 - b) La otra solución es $b = \sinh(s)$, $d = -\cosh(s)$, y por la tercera ecuación podemos concluir que $s = -t$.
2. La otra solución de la primera ecuación es $a = -\cosh(t)$, $c = \sinh(t)$. De nuevo, para la segunda ecuación podemos considerar las dos soluciones siguientes:
 - a) Una solución es $b = \sinh(s)$, $d = \cosh(s)$, que combinándola con la tercera ecuación podemos concluir que $s = -t$.
 - b) La otra solución es $b = \sinh(s)$, $d = -\cosh(s)$, y por la tercera ecuación podemos concluir que $s = t$.

Por lo tanto, hemos obtenido cuatro isometrías diferentes que vienen dadas por las matrices

$$\begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh(t) & -\sinh(t) \\ \sinh(t) & -\cosh(t) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -\cosh(t) & -\sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & -\cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Cada una de estas isometrías ejerce de representante de cada una de las componentes de $O_1(2)$, puesto que cada una pertenece a una única componente. En concreto, y siguiendo el orden en el que aparecen, pertenecen a $O_1^{++}(2)$, $O_1^{--}(2)$, $O_1^{-+}(2)$, $O_1^{+-}(2)$. Esto prueba la existencia de las cuatro componentes de $O_1(2)$.

Recordemos que en el caso euclídeo, la matriz A de una isometría de \mathbb{E}^2 verifica que $A'GA = G$, con

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

luego las ecuaciones que obtenemos son

$$a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0.$$

Ahora, las dos primeras ecuaciones se corresponden con las ecuaciones de la circunferencia unidad S^1 , luego al combinarlas con la tercera ecuación como hicimos anteriormente, obtenemos las dos componentes conexas de $O(2)$. Esto explica la diferencia fundamental del grupo de isometrías del espacio euclídeo con respecto al del espacio de Minkowski.

Capítulo 3

Curvas en el espacio de Minkowski.

Vamos a desarrollar la teoría de curvas en el espacio de Minkowski y a poner de manifiesto así las diferencias y semejanzas que existen con la teoría de curvas que repasamos en el primer capítulo.

Como hemos venido haciendo a lo largo de todo este trabajo, nos basaremos en los resultados obtenidos en [7].

3.1. Teoría local de curvas en el espacio de Minkowski.

La definición de una curva regular en el espacio de Minkowski es la misma que la escrita en la *Definición 1.2.1*, donde en este caso el espacio de llegada es \mathbb{E}_1^3 . Vamos a empezar hablando de curvas alabeadas, aunque puntualmente haremos algunas menciones a curvas planas.

Como ocurría con los vectores, las curvas en \mathbb{E}_1^3 también tienen causalidad, que vendrá determinada por su vector velocidad $\alpha'(t)$.

Definición 3.1.1 Una curva α en \mathbb{E}_1^3 se dice que es:

1. *Espacial* en t , si $\alpha'(t)$ es un vector espacial.
2. *Temporal* en t , si $\alpha'(t)$ es un vector temporal.
3. *Luminosa* en t , si $\alpha'(t)$ es un vector luminoso.

La curva se dirá espacial (resp. temporal, luminosa) si es espacial (resp. temporal, luminosa) para todo $t \in I$.

Observación 3.1.2 Toda curva temporal o luminosa es regular, ya que el vector nulo es un vector espacial.

Notemos que una curva en \mathbb{E}_1^3 puede no ser de ningún tipo de los descritos en la definición anterior, sino que puede tener una causalidad diferente en distintos intervalos. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.1.3 Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ la curva definida por

$$\alpha(t) = \left(\sin(t), \cos(t), \frac{t^2}{2} \right).$$

Dado que $\alpha'(t) = (\cos(t), -\sin(t), t)$, se tiene que α es regular y, además, $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 1 - t^2$, por lo que la curva es *espacial* en el intervalo $(-1, 1)$, *temporal* en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, y *luminosa* en $\{-1, 1\}$. Además, notemos que $|\alpha'(\pm 1)| = 0$, pero α es regular en todo \mathbb{R} y, en particular, lo es en ± 1 .

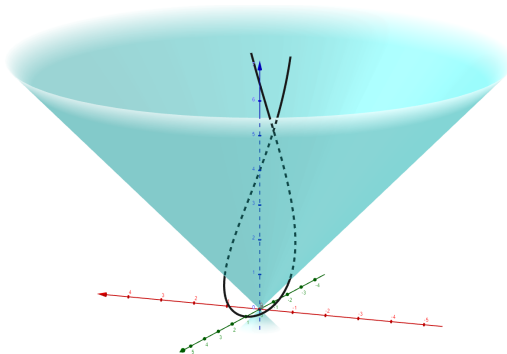


Figura 3.1: Gráfica de la curva $\alpha(t)$ sobre el cono temporal futuro.

La condición de ser espacial (o temporal) es una propiedad local, es decir, si α es una curva espacial (o temporal) en $t_0 \in I$, entonces existe un intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ alrededor de t_0 donde α es espacial (o temporal). Esto se debe a que, dado $t_0 \in I$, si $\langle \alpha'(t_0), \alpha'(t_0) \rangle \neq 0$, por continuidad se puede asegurar la existencia de un intervalo alrededor de t_0 donde $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle$ tiene el mismo signo que en $t = t_0$.

Vamos a ver algunos ejemplos de la causalidad de algunas curvas planas comúnmente conocidas.

Ejemplo 3.1.4 Consideremos las siguientes curvas planas contenidas en un plano afín de \mathbb{E}_1^3 y estudiemos su causalidad:

1. La *recta* que pasa por un punto p de ecuación $\alpha(t) = p + tv$, $p, v \in \mathbb{E}_1^2$, $v \neq 0$, tiene la misma causalidad que el vector v , ya que su vector velocidad es $\alpha'(t) = v$.

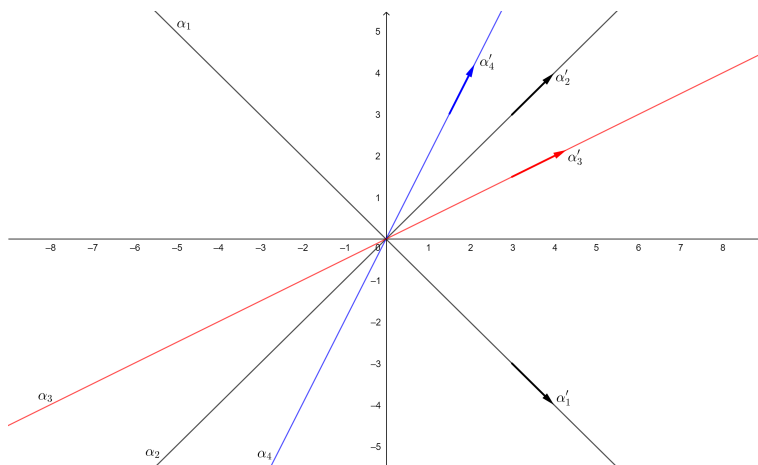


Figura 3.2: Causalidad de rectas en \mathbb{E}_1^2 .

En la *Figura 3.2* podemos observar las rectas luminosas $\alpha_1(t) = (t, -t)$, $\alpha_2(t) = (t, t)$, puesto que sus respectivos vectores tangentes son $\alpha'_1(t) = (1, -1)$, $\alpha'_2(t) = (1, 1)$, la recta $\alpha_3(t) = (2t, t)$ que es espacial, ya que su vector tangente es $\alpha'_3(t) = (2, 1)$, y la recta temporal $\alpha_4(t) = (t, 2t)$, con su respectivo vector tangente $\alpha'_4(t) = (1, 2)$.

2. La *circunferencia unidad* $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ sobre el plano espacial $z = 0$, es una curva espacial, ya puesto que su vector velocidad $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ verifica $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, para todo $t \in I$, luego es un vector espacial.

3. La *parábola* $\alpha(t) = (t, t^2, t^2)$ sobre el plano luminoso $y - z = 0$ es una curva espacial, ya que $\alpha'(t) = (1, 2t, 2t)$ y $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 1$, para todo $t \in I$.
4. Las *hipérbolas* $\alpha_1(t) = (0, r \sinh t, r \cosh t)$, $\alpha_2(t) = (0, r \cosh t, r \sinh t)$ son, respectivamente, espacial y temporal sobre el plano temporal $x = 0$, ya que sus respectivos vectores velocidad son $\alpha'_1(t) = (0, r \cosh t, r \sinh t)$, $\alpha'_2(t) = (0, r \sinh t, r \cosh t)$, lo que conduce a

$$\begin{aligned} \langle \alpha'_1(t), \alpha'_1(t) \rangle &= r^2(\cosh^2 t - \sinh^2 t) = r^2 > 0, \\ \langle \alpha'_2(t), \alpha'_2(t) \rangle &= r^2(\sinh^2 t - \cosh^2 t) = -r^2 < 0. \end{aligned}$$

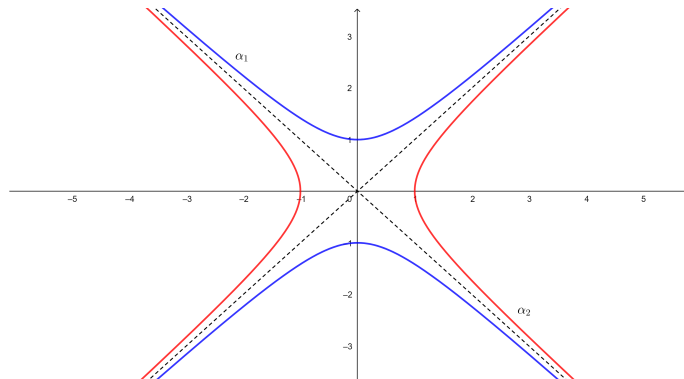


Figura 3.3: Gráfica de la hipérbola espacial $\alpha_1(t)$ y de la hipérbola temporal $\alpha_2(t)$ sobre el plano \mathbb{E}_1^2 .

En particular, la circunferencia es una curva cerrada plana de periodo 2π . Este tipo particular de curvas tienen una teoría muy amplia en el espacio euclídeo que incluye varios resultados clásicos importantes, como, por ejemplo, la desigualdad isoperimétrica (por la cual podemos concluir que la circunferencia es la única curva que maximiza el área), o el Teorema de los cuatro vértices. Recordemos la noción de curva cerrada plana.

Definición 3.1.5 Una curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ se dice que es una *curva cerrada* si es una curva parametrizada que es periódica, es decir, existe un valor mínimo $T > 0$ tal que $\alpha(t + T) = \alpha(t)$, para todo $t \in I$. En particular, la traza de dicha curva es un conjunto compacto.

Nos preguntamos ahora entonces cómo se comportan las curvas cerradas planas en el espacio de Minkowski. Vamos a empezar viendo cómo la causalidad de una curva en \mathbb{E}_1^3 impone restricciones sobre las curvas cerradas planas.

Teorema 3.1.6 Sea α una curva regular cerrada en \mathbb{E}_1^3 contenida en un plano P . Si α es espacial, entonces P es un plano espacial.

Demostración: Por reducción al absurdo, supongamos que el plano P no es espacial. Entonces, podemos distinguir dos casos en función de la causalidad de P :

1. El plano P es temporal. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que el plano P es el plano de ecuación $x = 0$. Entonces, como α está en P , podemos escribir la expresión de $\alpha(t)$ como $\alpha(t) = (0, y(t), z(t))$. Usando que α es periódica, se tiene que la función $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es también periódica, por lo que tiene un máximo en algún punto t_0 , por lo que $y'(t_0) = 0$, y por tanto, $\alpha'(t_0) = (0, 0, z'(t_0))$. Por ser α regular, $z'(t_0) \neq 0$ y entonces α sería una curva temporal en $t = t_0$, lo cual es una contradicción con el hecho de que α es espacial.

2. El plano P es luminoso. Supongamos sin pérdida de generalidad que P es el plano $y - z = 0$. Entonces, $\alpha(t) = (x(t), y(t), y(t))$. Por un razonamiento análogo al anterior, $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función periódica, y por tanto tiene un máximo en algún punto t_0 . Por tanto, $x'(t_0) = 0$, y de esta forma, $\alpha'(t_0) = (0, y'(t_0), y'(t_0))$. Como α es regular, $y'(t_0) \neq 0$, lo que implica que $\alpha'(t_0)$ es luminoso, lo cual es una contradicción.

Por tanto, la única posibilidad es que P sea espacial. \square

Notemos que con este Teorema no estamos diciendo que si α es una curva regular cerrada temporal (o luminosa) en un plano P , esto implique que P sea temporal (o luminoso). De hecho, esta posibilidad no existe, ya que, mediante una isometría, podemos llevar una curva cerrada contenida en un plano, en una curva cerrada en \mathbb{E}^2 , por lo que podemos concluir que la teoría de curvas cerradas en \mathbb{E}_1^3 es la misma que la de curvas cerradas en \mathbb{E}^2 . Siguiendo esta idea, podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 3.1.7 *No existen curvas cerradas en \mathbb{E}_1^3 que sean temporales o luminosas.*

Demostración: Por reducción al absurdo, supongamos que α es una curva cerrada. En particular, $z = z(t)$ es periódica, por lo que existe un t_0 tal que $z'(t_0) = 0$. Entonces

$$\langle \alpha'(t_0), \alpha'(t_0) \rangle = x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2 \geq 0,$$

lo cual es una contradicción si α es temporal. Pero si α es luminoso, entonces $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$, con lo que $\alpha'(t_0) = 0$, lo cual es una contradicción, ya que α es regular. \square

Observación 3.1.8 Podemos reescribir el Teorema 3.1.6 como sigue: *si α es una curva regular cerrada en \mathbb{E}_1^3 contenida en un plano P , entonces P es espacial.*

Volviendo a las curvas alabeadas, vamos a ver algunos ejemplos de estas curvas en \mathbb{E}_1^3 .

Ejemplo 3.1.9

1. La curva $\alpha(t) = (ht, r \sinh t, r \cosh t)$, con $h \neq 0$, $r > 0$, es una curva espacial contenida en el cilindro hiperbólico de ecuación $y^2 - z^2 = -r^2$, pues el pseudoproducto escalar de su vector velocidad es $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = h^2 + r^2$.

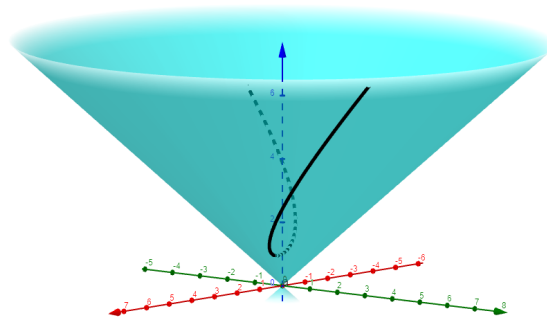


Figura 3.4: La curva $\alpha(t)$ sobre el cono temporal futuro, con $h = 2$, $r = 1$.

2. La curva $\alpha(t) = (ht, r \cosh t, r \sinh t)$, con $h^2 - r^2 < 0$ (resp. $h^2 + r^2 > 0, h^2 + r^2 = 0$), es una curva temporal (resp. espacial, luminosa) ya que su vector velocidad es $\alpha'(t) = (h, r \sinh t, r \cosh t)$, y verifica $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = h^2 - r^2$.

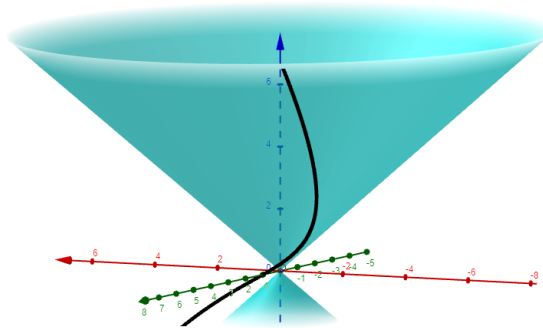


Figura 3.5: La curva $\alpha(t)$, para $h = -1,6, r = 1$.

3. La curva $\alpha(t) = (\cosh rt, rt, \sinh rt)$ tiene como vector tangente a $\alpha'(t) = (r \sinh rt, r, r \cosh rt)$, que es un vector luminoso, para todo $t \in I$. Luego la curva α es luminosa.

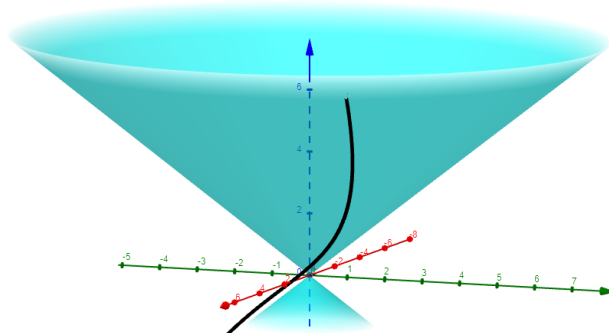


Figura 3.6: La curva $\alpha(t)$, para $r = 1,5$.

Recordemos que una curva regular en el espacio euclídeo es localmente el grafo de dos funciones diferenciables definidas en un eje de coordenadas de \mathbb{R}^3 . Esto se debe a la regularidad de la curva, como consecuencia del Teorema de la función inversa, por lo que dicha propiedad no depende de la métrica. De hecho, en \mathbb{E}_1^3 la causalidad de la curva nos determina sobre qué eje están definidas las dos funciones anteriores. De esta forma, podemos dar el siguiente resultado.

Proposición 3.1.10 *Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ una curva temporal o luminosa y $t_0 \in I$. Entonces, existen $\epsilon > 0$ y dos funciones diferenciables $f, g : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $t = \phi(s)$ y $\beta(s) = \alpha(\phi(s)) = (f(s), g(s), s)$.*

Demostración: Si escribimos $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, por ser α temporal o luminosa se tiene que

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 - z'(t)^2 \leq 0,$$

de donde podemos asumir que $z'(t_0) \neq 0$, para cualquier $t_0 \in I$. Por el Teorema de la función inversa, se tiene que existen $\delta, \epsilon > 0$ tales que

$$z : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow (z(t_0) - \epsilon, z(t_0) + \epsilon)$$

es un difeomorfismo. Si denotamos $J = (z(t_0) - \epsilon, z(t_0) + \epsilon)$ y a $\phi = z^{-1}$, entonces, la curva $\beta = \alpha \circ \phi$ satisface

$$\alpha(\phi(s)) = \beta(s) = ((x \circ \phi)(s), (y \circ \phi)(s), s).$$

Tomando $f = x \circ \phi$ y $g = y \circ \phi$ se obtiene el resultado. \square

En el espacio euclídeo vimos también cómo parametrizar una curva mediante la longitud de su arco, de tal forma que $|\dot{\alpha}(s)| = 1$, lo que llamamos parametrización natural. En el espacio de Minkowski, podemos realizar la misma parametrización para las curvas espaciales y temporales.

Proposición 3.1.11 *Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ una curva espacial o temporal. Dado $t_0 \in I$, existen $\epsilon, \delta > 0$ y un difeomorfismo $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ tales que la curva $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ dada por $\beta = \alpha \circ \phi$ satisface $|\dot{\beta}(s)| = 1$, para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, es decir, β es la parametrización natural de α .*

Demostración: Definimos la función $S : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$S(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du.$$

Como $S'(t_0) > 0$, la función S es un difeomorfismo local alrededor de $t = t_0$. Dado que $S(t_0) = 0$, existen $\epsilon, \delta > 0$ tales que $S : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow (-\epsilon, \epsilon)$ es un difeomorfismo. Tomando $\phi = S^{-1}$ obtenemos el resultado. \square

No hemos dado una parametrización natural para curvas luminosas, ya que para este tipo de curvas no tiene sentido hablar de reparametrizar por su longitud de arco, pues el módulo de su vector velocidad es nulo, por lo que no podemos aplicar el Teorema de la función inversa. Sin embargo, vamos a ver una pseudo-parametrización de las mismas de la siguiente forma:

De $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ podemos obtener fácilmente que $\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$. Por la *Proposición 2.1.17*, $\text{Span}\{\alpha'(t)\}^\perp$ es un plano luminoso. Entonces, $\alpha''(t)$ puede ser espacial o luminoso. Distinguimos los dos casos:

1. Si $\alpha''(t)$ es luminoso, entonces es proporcional a $\alpha'(t)$ por la *Proposición 2.1.12*, para todo $t \in I$. Por tanto, integrando dos veces obtenemos que

$$\alpha(t) = e^t a + b, \quad a, b \in \mathbb{R}^3, \quad \langle a, a \rangle = 0.$$

Luego α es la parametrización de una recta luminosa.

2. Si $\alpha''(t)$ es espacial, entonces podemos parametrizar α de tal forma que $|\alpha''(t)| = 1$. Con esta idea, obtenemos el siguiente resultado:

Lema 3.1.12 *Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ una curva luminosa que no es una recta. Entonces, existe una reparametrización de α dada por $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$ tal que $|\ddot{\beta}(s)| = 1$. Diremos entonces que α está pseudo-parametrizada por su longitud de arco.*

Demostración: Tomando $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$ obtenemos

$$\ddot{\beta}(s) = \ddot{\phi}(s)\alpha'(\phi(s)) + \dot{\phi}(s)^2\alpha''(\phi(s)),$$

lo que implica que

$$\langle \ddot{\beta}(s), \ddot{\beta}(s) \rangle = \dot{\phi}(s)^4 |\alpha''(\phi(s))|^2,$$

donde hemos usado que $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$ y, como consecuencia, $\langle \alpha', \alpha'' \rangle = 0$. Tomando ϕ como la solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{\phi}(s) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha''(\phi(s))|}},$$

se obtiene el resultado. □

Observación 3.1.13 Si $\alpha = \alpha(t)$ es una curva regular y $\beta = \alpha \circ \phi$ es una reparametrización de α , entonces la causalidad de α y β es la misma.

3.2. El triedro de Frenet. Curvatura y torsión.

Al igual que hicimos en el espacio euclídeo, buscamos construir una base ortonormal para cada punto de una curva regular $\alpha(s)$ con la cual podremos estudiar, entre otras cosas, la curvatura y la torsión de α . Asumiremos que las curvas están parametrizadas naturalmente o, en el caso de las curvas luminosas, pseudo-parametrizadas naturalmente. En estas condiciones, el *vector tangente* $\mathbf{t}(s) = \dot{\alpha}(s)$ es unitario. Análogamente a como hicimos en \mathbb{E}^3 , y dado que $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = \pm 1$ (0 en el caso en que α sea luminosa), podemos derivar respecto a s , obteniendo que

$$\langle \mathbf{t}(s), \dot{\mathbf{t}}(s) \rangle = 0,$$

es decir, podemos afirmar que $\dot{\mathbf{t}}(s)$ es ortogonal a $\mathbf{t}(s)$. De esta forma, podremos definir el *vector normal* $\mathbf{n}(s)$ tal y como hicimos en el espacio euclídeo, solo que en este caso, y como veremos un poco más adelante, la curvatura dependerá de la causalidad de la curva. Por último, el vector ortogonal al vector tangente y al vector normal es el *vector binormal*, aunque, en este caso, sí que habrá diferencias con \mathbb{E}^3 en el caso de curvas espaciales y luminosas. De esta forma podremos construir el triedro de Frenet $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$.

Sin embargo, debido a la causalidad del vector velocidad, surgen algunos problemas en el espacio de Minkowski:

1. Si la curva fuese luminosa, $\mathbf{t}(s)$ sería un vector luminoso, por lo que el triedro $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ no sería una base ortonormal. En esta situación, buscaremos una base nula en lugar de una base ortonormal.
2. Si la base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es ortonormal en \mathbb{E}_1^3 , dado que el vector binormal se define como $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$, no podemos asegurar que la base esté positivamente orientada. De hecho, si $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)$ son espaciales, no lo estará.
3. En el caso en que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ fuese una base ortonormal, sería conveniente que estuviese orientada al futuro, aunque esto no se puede asegurar ni siquiera en el caso en que la curva fuese temporal.

El ejemplo mas simple de curva es una recta. Si $p \in \mathbb{E}_1^3$ es un punto, y $v \neq 0$ un vector (como vimos, la causalidad de este vector determinará la causalidad de la recta), la recta que pasa por p con la dirección v se puede parametrizar como $\alpha(s) = p + sv$. Así, $\ddot{\alpha}(s) = 0$ y decimos que su curvatura es nula.

Por otro lado, si α es una curva regular que verifica que $\ddot{\alpha}(s) = 0$ para algún s , integrando dos veces obtenemos que $\alpha(s) = p + vs$, para algun $p \in \mathbb{E}_1^3$, $v \neq 0$. Esto quiere decir que α es la parametrización de una recta que pasa por p con dirección v . Sin embargo, notemos que una recta, como conjunto de \mathbb{E}_1^3 , se puede parametrizar de tal manera que $\ddot{\alpha}(s) \neq 0$, como por ejemplo $\alpha(s) = (s^3 + s, 0, 0)$, que es una parametrización de la recta $\text{Span}\{e_1\}$.

Una vez tenidos en cuenta estos problemas que pueden surgir, vamos a construir el triedro de Frenet según la causalidad de la curva. Nos restringiremos a las curvas cuyo vector tangente verifique $\dot{\mathbf{t}}(s) \neq 0$, para todo s , y además, $\dot{\mathbf{t}}(s)$ no sea proporcional a $\mathbf{t}(s)$. Así evitaremos que la curva sea una recta. Teniendo en cuenta esto, construyamos primero el triedro de Frenet para curvas temporales.

3.2.1. Curvas temporales.

Si $\alpha(s)$ es una curva temporal, $\mathbf{t}(s)$ es un vector temporal, por lo que por la *Proposición 2.1.17* podemos asegurar que $\dot{\mathbf{t}}(s)$ es un vector espacial linealmente independiente de $\mathbf{t}(s)$. Es por ello que tanto el triedro de Frenet como las nociones de curvatura y torsión serán los mismos que en \mathbb{E}^3 para estas curvas.

Definición 3.2.1 Sea $\alpha(s)$ una curva regular temporal en \mathbb{E}_1^3 . Se define la *curvatura* de $\alpha(s)$ como

$$\kappa(s) = |\dot{\mathbf{t}}(s)|.$$

De esta forma, definimos el vector normal de una curva temporal como el vector ortogonal a \mathbf{t} dado por

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\dot{\mathbf{t}}(s)}{\kappa(s)},$$

o equivalentemente

$$\dot{\mathbf{t}}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$

Notemos que $\mathbf{n}(s)$ es unitario y además se cumple que $\kappa(s) = \langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle$. En este caso, el vector binormal es el único vector

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$$

unitario y espacial.

Definición 3.2.2 Sea $\alpha(s)$ una curva temporal. Se define la *torsión* de $\alpha(s)$ como

$$\tau(s) = \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle.$$

De esta forma, el triedro de Frenet $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base ortonormal de \mathbb{E}_1^3 positivamente orientada, pues

$$\det(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}) = \langle \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 1 > 0.$$

Razonando de manera análoga al caso euclídeo, podemos obtener unas *ecuaciones de Frenet* de la siguiente forma:

Por construcción tenemos que

$$\dot{\mathbf{t}}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s),$$

con lo que podemos deducir la primera ecuación. Para calcular las ecuaciones de $\dot{\mathbf{n}}(s)$ haremos uso del *Teorema 2.1.10*. En efecto, por ser el triedro de Frenet una base ortonormal, podemos escribir:

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = -\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle \mathbf{t}(s) + \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \mathbf{n}(s) + \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s),$$

donde el signo negativo de la primera componente se debe a que $\mathbf{t}(s)$ es temporal. Como $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 1$, puede deducirse fácilmente que $\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0$. Por otra parte, la coordenada $\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$ es, por definición, la torsión $\tau(s)$ de la curva. Por último, de $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s) \rangle$ puede obtenerse mediante una sencilla derivada que

$$\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle + \langle \mathbf{n}(s), \dot{\mathbf{t}}(s) \rangle = 0,$$

por lo que podemos deducir que $\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = -\langle \mathbf{n}(s), \dot{\mathbf{t}}(s) \rangle = -\langle \mathbf{n}(s), \kappa(s)\mathbf{n}(s) \rangle = -\kappa(s)$. Por tanto, la ecuación de Frenet para $\dot{\mathbf{n}}(s)$ es

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = \kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s).$$

Por último, calculemos la ecuación para $\dot{\mathbf{b}}(s)$. De nuevo, por el *Teorema 2.1.10* tenemos que

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = -\langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle \mathbf{t}(s) + \langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \mathbf{n}(s) + \langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s).$$

De manera análoga a la anterior, podemos deducir que $\langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0$, y también que

$$\langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = -\langle \mathbf{b}(s), \dot{\mathbf{t}}(s) \rangle = \langle \mathbf{b}(s), \kappa(s)\mathbf{n}(s) \rangle = 0,$$

pues $\mathbf{b}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ son ortogonales. Igualmente, podemos concluir que

$$\langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = -\langle \mathbf{b}(s), \dot{\mathbf{n}}(s) \rangle = -\tau(s).$$

Por tanto, la ecuación para $\dot{\mathbf{b}}(s)$ es

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s).$$

En resumen, las ecuaciones de Frenet para las curvas temporales pueden escribirse matricialmente como

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

o equivalentemente,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}}(s) = & \kappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \dot{\mathbf{n}}(s) = & \kappa(s)\mathbf{t}(s) & +\tau(s)\mathbf{b}(s), \\ \dot{\mathbf{b}}(s) = & -\tau(s)\mathbf{n}(s). \end{cases}$$

Observación 3.2.3 La geometría diferencial del espacio de Minkowski nunca coincidirá con la del espacio euclídeo pues, por el *Teorema 2.1.8*, el índice de \mathbb{E}_1^3 es 1, por lo que ninguna base ortonormal de \mathbb{E}_1^3 podrá tener simultáneamente los tres vectores espaciales, que es el caso de \mathbb{E}^3 (porque el índice de \mathbb{E}^3 es 0).

3.2.2. Curvas espaciales.

En este caso, $\mathbf{t}(s)$ es un vector espacial, y como $\dot{\mathbf{t}}(s)$ es ortogonal a él, podrá ser espacial, temporal o luminoso. Veamos caso por caso:

1. El vector $\dot{\mathbf{t}}(s)$ es **espacial**. Este caso es el más sencillo, pues en estas circunstancias nos encontramos prácticamente en el mismo caso que en las curvas temporales, por lo que la definición de la curvatura $\kappa(s) = |\dot{\mathbf{t}}(s)|$ es la misma, lo que hace que el vector normal $\mathbf{n}(s)$ también se defina igual, es decir, como

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\dot{\mathbf{t}}(s)}{\kappa(s)}.$$

En este caso, el vector binormal $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ es un vector temporal. Este hecho va a suponer la única diferencia respecto a las curvas temporales, ya que al ser $\mathbf{b}(s)$ temporal, el producto escalar $\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$ será negativo, por lo que tendremos que dar otra definición para la torsión.

Definición 3.2.4 Sea $\alpha(s)$ una curva espacial cuyo vector normal es espacial. Se define la *torsión* de $\alpha(s)$ como

$$\tau(s) = -\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle.$$

Otra de las diferencias reside en la orientación del triedro de Frenet, ya que en este caso, la base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ está negativamente orientada, pues al ser $\mathbf{b}(s)$ temporal, se tiene que

$$\det(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)) = \langle \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -1 < 0.$$

Para terminar, la última de las diferencias tiene que ver con sus ecuaciones de Frenet. Análogamente a como hicimos en el caso temporal, deducimos las ecuaciones de Frenet de la siguiente forma:

Al igual que antes, la ecuación para $\dot{\mathbf{t}}(s)$ viene dada por la propia definición del vector normal, por lo que es

$$\dot{\mathbf{t}}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$

Por otro lado, en este caso el vector temporal es el vector binormal, por lo que las expresiones de $\dot{\mathbf{n}}(s)$ y $\dot{\mathbf{b}}(s)$ con respecto a la base son, respectivamente,

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle \mathbf{t}(s) + \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \mathbf{n}(s) - \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s),$$

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = \langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle \mathbf{t}(s) + \langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \mathbf{n}(s) - \langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s).$$

Por la misma razón de antes, tenemos que $\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0$. Centrándonos primero en las coordenadas de $\dot{\mathbf{n}}(s)$, por la definición de la torsión tenemos que $-\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \tau(s)$, mientras que para la primera coordenada, utilizando que $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0$, deducimos que

$$\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = -\langle \mathbf{n}(s), \dot{\mathbf{t}}(s) \rangle = -\langle \mathbf{n}(s), \kappa(s)\mathbf{n}(s) \rangle = -\kappa(s).$$

Para las coordenadas de $\dot{\mathbf{b}}(s)$ procedemos igual, deduciendo que

$$\langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = -\langle \mathbf{b}(s), \dot{\mathbf{t}}(s) \rangle = -\langle \mathbf{b}(s), \kappa(s)\mathbf{n}(s) \rangle = 0,$$

pues $\mathbf{b}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ son ortogonales, y por la misma razón, podemos obtener

$$\langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = -\langle \mathbf{b}(s), \dot{\mathbf{n}}(s) \rangle = \tau(s).$$

Por tanto, las ecuaciones de Frenet para el caso de curvas espaciales con vector normal espacial vienen dadas por el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}}(s) = & \kappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \dot{\mathbf{n}}(s) = & -\kappa(s)\mathbf{t}(s) & +\tau(s)\mathbf{b}(s), \\ \dot{\mathbf{b}}(s) = & \tau(s)\mathbf{n}(s). \end{cases}$$

2. El vector $\dot{\mathbf{t}}(s)$ es **temporal**. En este caso tenemos que tener especial cuidado al definir la curvatura, ya que es un vector temporal. Por tanto, definiremos la curvatura como

$$\kappa(s) = |\dot{\mathbf{t}}(s)| = \sqrt{-\langle \dot{\mathbf{t}}(s), \dot{\mathbf{t}}(s) \rangle}.$$

Esta definición es consecuencia directa de la definición que dimos de la norma en \mathbb{E}_1^3 . Los vectores normal y binormal se definen como lo hemos estado haciendo hasta ahora, es decir

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\dot{\mathbf{t}}(s)}{\kappa(s)}, \quad \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s),$$

donde ahora $\mathbf{b}(s)$ es espacial. Esto hace que la torsión tenga la misma definición que en el caso temporal, $\tau(s) = \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$, y que la base esté positivamente orientada. Por último vamos a deducir las ecuaciones de Frenet para estas curvas.

Una vez más, ya tenemos la ecuación para $\dot{\mathbf{t}}(s)$, dada por

$$\dot{\mathbf{t}}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$

Para las otras dos ecuaciones, volvemos a usar el *Teorema 2.1.10* para afirmar que

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle \mathbf{t}(s) - \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \mathbf{n}(s) + \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s),$$

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = \langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle \mathbf{t}(s) - \langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \mathbf{n}(s) + \langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \mathbf{b}(s),$$

donde de nuevo $\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0$. Por otro lado, podemos volver a deducir que $\langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = -\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -\tau(s)$, por la definición de la torsión, y así obtenemos también la coordenada de $\dot{\mathbf{n}}$ con respecto a $\mathbf{b}(s)$. Por último, al igual que en el resto de casos, utilizando que $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0$ por un lado, y que $\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0$ por el otro, deducimos que

$$\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = -\langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = -\langle \mathbf{n}(s), \kappa(s)\mathbf{n}(s) \rangle = \kappa(s),$$

$$\langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = -\langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -\langle \mathbf{b}(s), \kappa(s)\mathbf{n}(s) \rangle = 0.$$

Por tanto, las ecuaciones de Frenet para el caso de las curvas espaciales con vector normal temporal son

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}}(s) = & \kappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \dot{\mathbf{n}}(s) = & \kappa(s)\mathbf{t}(s) & +\tau(s)\mathbf{b}(s), \\ \dot{\mathbf{b}}(s) = & \tau(s)\mathbf{n}(s). \end{cases}$$

3. El vector $\dot{\mathbf{t}}(s)$ es **luminoso**. Al ser $\dot{\mathbf{t}}(s)$ luminoso, no tiene sentido hablar de curvatura, pues $|\dot{\mathbf{t}}(s)| = 0$, **aunque esto no quiere decir que todas estas curvas sean rectas**. Por tanto, al no haber una noción de curvatura, definiremos el vector normal de la curva como

$$\mathbf{n}(s) = \dot{\mathbf{t}}(s).$$

Al ser luminoso, no podremos construir una base ortonormal como en los otros casos, pues éstas no contienen vectores luminosos. En su lugar, buscaremos un vector $\mathbf{b}(s)$ luminoso (que además será único), de tal forma que sea ortogonal a $\mathbf{t}(s)$ y verifique que $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -1$. De esta forma, el conjunto $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ constituye una base nula que, a priori, no sabemos si está positivamente orientada o no. Además, para estas curvas la noción de torsión es distinta a la conocida hasta ahora, aunque su expresión sí es la habitual.

Definición 3.2.5 Sea $\alpha(s)$ una curva espacial cuyo vector normal $\mathbf{n}(s)$ es luminoso. Entonces, se define la *pseudo-torsión* de $\alpha(s)$ como

$$\tau(s) = -\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle.$$

Aunque la expresión es la misma que en otros casos, como veremos más adelante, existen diferencias con la noción de torsión que conocemos de \mathbb{E}^3 .

Por último, podemos calcular sus ecuaciones de Frenet. Al no ser una base ortonormal, no podemos hacer uso del *Teorema 2.1.10*, por lo que calcularemos las coordenadas de cada vector directamente. Para la primera ecuación, tenemos que

$$\dot{\mathbf{t}}(s) = \mathbf{n}(s).$$

Por otro lado, podemos expresar $\dot{\mathbf{n}}(s)$ y $\dot{\mathbf{b}}(s)$ como

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = \lambda_1(s)\mathbf{t}(s) + \mu_1(s)\mathbf{n}(s) + \nu_1(s)\mathbf{b}(s),$$

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = \lambda_2(s)\mathbf{t}(s) + \mu_2(s)\mathbf{n}(s) + \nu_2(s)\mathbf{b}(s),$$

donde $\lambda_i, \mu_i, \nu_i \in \mathbb{R}$. La idea es multiplicar ambas expresiones por los vectores de la base y así conseguir una expresión para sus coordenadas. Por tanto, se obtiene que:

$$\langle \mathbf{t}(s), \dot{\mathbf{n}}(s) \rangle = \lambda_1(s),$$

$$\langle \mathbf{n}(s), \dot{\mathbf{n}}(s) \rangle = -\nu_1(s),$$

$$\langle \mathbf{b}(s), \dot{\mathbf{n}}(s) \rangle = -\mu_1(s),$$

$$\langle \mathbf{t}(s), \dot{\mathbf{b}}(s) \rangle = \lambda_2(s),$$

$$\langle \mathbf{n}(s), \dot{\mathbf{b}}(s) \rangle = -\nu_2(s),$$

$$\langle \mathbf{b}(s), \dot{\mathbf{b}}(s) \rangle = -\mu_2(s),$$

donde hemos usado que $\mathbf{t}(s)$ es ortogonal a $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$, y que $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -1$. Por una parte, como $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$ son luminosos, se obtiene fácilmente que $\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0$, por lo que tenemos que $\nu_1(s) = \mu_2(s) = 0$, para todo s . Por otro lado, como $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0$, entonces se tiene que

$$\langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle + \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0, \quad (3.2.1)$$

pero como $\langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \mathbf{n}(s), \dot{\mathbf{n}}(s) \rangle = 0$, entonces $\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0$, y en particular, $\lambda_1(s) = 0$, para todo s . Por el mismo razonamiento que hemos usado para obtener 3.2.1, obtenemos que

$$\langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle + \langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0,$$

y en este caso, $\langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \langle \mathbf{n}(s), \dot{\mathbf{b}}(s) \rangle = -1$, por lo que $\langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 1$, y en particular, $\lambda_2(s) = 1$, para todo s . Por último, por la definición de la pseudo-torsión, podemos obtener que $\mu_1(s) = \tau(s)$, $\nu_2(s) = -\tau(s)$, por lo que las ecuaciones son

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s),$$

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = \mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s).$$

Resumiendo, las ecuaciones de Frenet para las curvas espaciales con vector normal luminoso vienen dadas por el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 1 & 0 & -\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

o equivalentemente,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}}(s) = & \mathbf{n}(s), \\ \dot{\mathbf{n}}(s) = & -\tau(s)\mathbf{n}(s), \\ \dot{\mathbf{b}}(s) = \mathbf{t}(s) & -\tau(s)\mathbf{b}(s). \end{cases}$$

Observación 3.2.6 Recordemos que la causalidad de un vector no tiene por qué ser la misma en todo el intervalo, sino que puede ir variando en función del valor de s . Eso supone que el triedro de Frenet para curvas espaciales variará también en función del valor de s , pues el vector normal puede ser espacial, temporal o luminoso. Por ello, para hacer el estudio anterior hemos supuesto que la causalidad de $\ddot{\alpha}(s)$ es siempre la misma.

3.2.3. Curvas luminosas.

Por último, vamos a estudiar el caso de las curvas luminosas. Dado que $\mathbf{t}(s)$ es un vector luminoso, obtendremos resultados similares a los obtenidos para curvas espaciales con vector normal luminoso. Definimos entonces el vector normal como $\mathbf{n}(s) = \dot{\mathbf{t}}(s)$, que en este caso es espacial. Para este tipo de curvas, al no poder construir una base ortonormal, buscamos una base nula, por lo que el vector binormal será el único vector luminoso $\mathbf{b}(s)$ que es ortogonal a $\mathbf{n}(s)$ y verifica que $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -1$. De esta forma, el conjunto $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base nula de \mathbb{E}_1^3 .

En este caso, tampoco hablaremos de curvatura aunque, de nuevo, **esto no quiere decir que las curvas luminosas sean únicamente rectas**. Más adelante veremos algunos ejemplos de curvas luminosas que no son rectas. En este caso, no damos la noción de torsión, sino que al igual que en las curvas espaciales con vector normal luminoso, hablamos de pseudo-torsión.

Definición 3.2.7 Sea $\alpha(s)$ una curva luminosa. Se define la *pseudo-torsión* de $\alpha(s)$ como

$$\tau(s) = -\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle.$$

El cálculo de las ecuaciones de Frenet es totalmente análogo al anterior. De nuevo, la primera ecuación es

$$\dot{\mathbf{t}}(s) = \mathbf{n}(s),$$

mientras que para las otras dos tenemos de nuevo las expresiones

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = \lambda_1(s)\mathbf{t}(s) + \mu_1(s)\mathbf{n}(s) + \nu_1(s)\mathbf{b}(s),$$

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = \lambda_2(s)\mathbf{t}(s) + \mu_2(s)\mathbf{n}(s) + \nu_2(s)\mathbf{b}(s),$$

con $\lambda_i, \mu_i, \nu_i \in \mathbb{R}$. Multiplicamos por los vectores de la base, obteniendo el sistema

$$\langle \mathbf{t}(s), \dot{\mathbf{n}}(s) \rangle = -\nu_1(s),$$

$$\langle \mathbf{n}(s), \dot{\mathbf{n}}(s) \rangle = \mu_1(s),$$

$$\langle \mathbf{b}(s), \dot{\mathbf{n}}(s) \rangle = -\lambda_1(s),$$

$$\langle \mathbf{t}(s), \dot{\mathbf{b}}(s) \rangle = -\nu_2(s),$$

$$\langle \mathbf{n}(s), \dot{\mathbf{b}}(s) \rangle = \mu_2(s),$$

$$\langle \mathbf{b}(s), \dot{\mathbf{b}}(s) \rangle = -\lambda_2(s).$$

Por la misma razón de antes $\lambda_2(s) = \mu_1 = 0$, para todo s , y por la definición de la pseudo-torsión, se tiene que $\lambda_1 = \tau(s)$ y $\mu_2(s) = \tau(s)$. Haciendo el mismo procedimiento que en la ecuación (3.2.1), obtenemos que

$$\langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle + \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0,$$

$$\langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle + \langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0.$$

Como $\langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 1$ por un lado, y $\langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0$, deducimos que $\nu_1 = 1$ y $\nu_2 = 0$. Por tanto, las ecuaciones son

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = \tau_1(s)\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s),$$

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = \tau_2(s)\mathbf{n}(s).$$

En resumen, matricialmente las ecuaciones de Frenet son

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & 1 \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

o equivalentemente,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}}(s) = & \mathbf{n}(s), \\ \dot{\mathbf{n}}(s) = \tau(s)\mathbf{t}(s) & +\mathbf{b}(s), \\ \dot{\mathbf{b}}(s) = & \tau(s)\mathbf{n}(s). \end{cases}$$

Observación 3.2.8 No todos los autores coinciden en los conceptos dados para curvas luminosas, ya que la elección de la base nula de Frenet no es única.

Una vez hemos visto los triedros de Frenet (o su base nula) de una curva de cada causalidad, vamos a calcular el triedro de Frenet de algunas curvas que vimos en el *Ejemplo 3.1.9*, así como de otras curvas que tienen cierto interés.

Ejemplo 3.2.9 1. Sea la curva espacial $\alpha(t) = (ht, r \sinh t, r \cosh t)$, con $h \neq 0, r > 0$. Tenemos que parametrizar naturalmente la curva mediante la reparametrización

$$t \mapsto \frac{s}{\sqrt{h^2 + r^2}},$$

pues recordemos que $|\alpha'(t)| = h^2 + r^2$. Así, la curva queda parametrizada naturalmente como

$$\alpha(s) = \left(\frac{hs}{\sqrt{h^2 + r^2}}, r \sinh \frac{s}{\sqrt{h^2 + r^2}}, r \cosh \frac{s}{\sqrt{h^2 + r^2}} \right).$$

Sus vectores derivadas son

$$\dot{\alpha}(s) = \mathbf{t}(s) = \frac{1}{\sqrt{h^2 + r^2}} \left(h, r \cosh \frac{s}{\sqrt{h^2 + r^2}}, r \sinh \frac{s}{\sqrt{h^2 + r^2}} \right),$$

$$\ddot{\alpha}(s) = \dot{\mathbf{t}}(s) = \frac{r}{h^2 + r^2} \left(0, \sinh \frac{s}{\sqrt{h^2 + r^2}}, \cosh \frac{s}{\sqrt{h^2 + r^2}} \right).$$

Luego $\dot{\mathbf{t}}(s)$ es temporal, por lo que $\kappa(s) = \sqrt{-\langle \dot{\mathbf{t}}(s), \dot{\mathbf{t}}(s) \rangle} = \frac{r}{h^2 + r^2}$ y su vector normal es

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\ddot{\alpha}(s)}{\kappa(s)} = \left(0, \sinh \frac{s}{\sqrt{h^2 + r^2}}, \cosh \frac{s}{\sqrt{h^2 + r^2}} \right),$$

Por último, su vector binormal es

$$\mathbf{b}(s) = \frac{1}{h^2 + r^2} \left(r, h \cosh \frac{s}{\sqrt{h^2 + r^2}}, h \sinh \frac{s}{\sqrt{h^2 + r^2}} \right),$$

con lo que tenemos ya formado el triedro de Frenet y podemos obtener el valor de la torsión

$$\tau = \frac{h}{h^2 + r^2}.$$

2. Sea la curva regular parametrizada naturalmente $\alpha(s) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}, 0 \right)$, que es una circunferencia euclídea contenida en el plano espacial $z = 0$. Podemos entonces calcular directamente su vector tangente

$$\mathbf{t}(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r}, 0 \right), \quad \dot{\mathbf{t}}(s) = \frac{1}{r} \left(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r}, 0 \right).$$

Podemos concluir entonces que $\alpha(s)$ es una curva espacial con vector normal espacial y que su curvatura es

$$\kappa(s) = \frac{1}{r}.$$

Para terminar de completar el triedro, obtenemos los vectores normal y binormal

$$\mathbf{n}(s) = \left(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r}, 0 \right), \quad \mathbf{b}(s) = (0, 0, -1).$$

Por tanto, la base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ no está ni positivamente orientada ni dirigida al futuro, como dijimos al principio de la sección. Por último, del hecho de que $\dot{\mathbf{b}}(s) = 0$, y usando las ecuaciones de Frenet, podemos concluir que su torsión $\tau = 0$.

3. Consideremos la curva α dada por

$$\alpha(t) = (2t, 1 - t^2, -1 - t^2).$$

Como se tiene que $\alpha'(t) = (2, -2t, -2t)$, la curva es espacial. Además, $\alpha''(s) = (0, -2, -2)$, que es luminoso, luego la curva es espacial con vector normal luminoso, pues la causalidad del vector no depende de la parametrización. Como $|\alpha'(s)| = 2$, reparametrizamos la curva por su pseudo-parametrización natural mediante el cambio

$$t \mapsto \frac{s}{2}.$$

De esta forma, obtenemos la curva

$$\alpha(s) = \left(s, 1 - \frac{s^2}{4}, -1 - \frac{s^2}{4} \right).$$

Ya podemos obtener la base nula de Frenet, que viene dada por los vectores

$$\mathbf{t}(s) = \left(1, -\frac{s}{2}, -\frac{s}{2} \right), \quad \mathbf{n}(s) = \dot{\mathbf{t}}(s) = \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \quad \mathbf{b}(s) = \left(s, 1 - \frac{s^2}{4}, -1 - \frac{s^2}{4} \right).$$

Como $\dot{\mathbf{n}}(s) = 0$, podemos concluir que la pseudo-torsión es $\tau = 0$. Notemos que esta curva es plana, pues está incluida en el plano de ecuación $y - z = 2$.

4. Sea la curva

$$\alpha(s) = r \left(0, \cosh \frac{s}{r}, \sinh \frac{s}{r} \right).$$

Esta curva es la parametrización por su longitud de arco de la curva $\alpha(t) = r(0, \cosh t, \sinh t)$, que vimos en el *Ejemplo 3.1.4*. Por tanto, la curva es temporal y su vector tangente es

$$\mathbf{t}(s) = \left(0, \sinh \frac{s}{r}, \cosh \frac{s}{r} \right).$$

Podemos entonces calcular su curvatura:

$$\dot{\mathbf{t}}(s) = \frac{1}{r} \left(0, \cosh \frac{s}{r}, \sinh \frac{s}{r} \right),$$

por lo que $\kappa(s) = \frac{1}{r}$. Ya podemos calcular el triedro de Frenet:

$$\mathbf{n}(s) = \left(0, \cosh \frac{s}{r}, \sinh \frac{s}{r} \right), \quad \mathbf{b}(s) = (-1, 0, 0).$$

Podemos finalizar diciendo que su torsión es $\tau = 0$. Observemos que esta curva es plana.

5. Sea la curva luminosa $\alpha(s) = \frac{1}{r^2} (\cosh rs, rs, \sinh rs)$. Sabemos que su vector tangente es

$$\mathbf{t}(s) = \frac{1}{r} (\sinh rs, 1, \cosh rs),$$

por lo que podemos calcular los vectores normal y binormal

$$\mathbf{n}(s) = (\cosh rs, 0, \sinh rs), \quad \mathbf{b}(s) = \frac{r}{2} (\sinh rs, -1, \cosh rs).$$

Así, su pseudo-torsión es $\tau = -\frac{r^2}{2}$.

Con estas nociones, al igual que hicimos en el espacio euclídeo, en \mathbb{E}_1^3 podemos definir una fórmula para calcular la curvatura y la torsión de una curva sin necesidad de que ésta esté parametrizada naturalmente. Nos centraremos en las curvas de Frenet, aunque el resultado para la pseudo-torsión es totalmente análogo. Sea entonces α una curva regular, y $\beta = \alpha \circ \phi$ su parametrización por longitud de arco, que supondremos que es una curva de Frenet. Entonces, es claro que se tiene

$$\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta \circ \phi^{-1}, \quad \tau_\alpha = \tau_\beta \circ \phi^{-1},$$

que no depende de la reparametrización, salvo en algunos casos en el signo de τ . Teniendo en cuenta esto, y las ecuaciones de Frenet generalizadas para curvas de Frenet, podemos deducir análogamente al caso euclídeo que

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}, \quad \tau_\alpha(t) = -\epsilon\delta \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}.$$

3.2.4. Teorema fundamental de curvas alabeadas en \mathbb{E}_1^3

En \mathbb{E}^3 vimos un resultado de existencia y unicidad para la torsión y la curvatura, el *Teorema fundamental de curvas alabeadas*. Vamos a ver que este resultado también existe en \mathbb{E}_1^3 pero con algunas restricciones, y vamos a estudiar algunas propiedades de la torsión para finalizar la teoría de curvas alabeadas. Empecemos primero con la definición de curva de Frenet.

Definición 3.2.10 Se llama *curva de Frenet* a las curvas temporales y a las curvas espaciales con vector normal espacial o temporal. Además, las ecuaciones de Frenet de estas curvas tienen una única forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\delta\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \epsilon\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

donde $\epsilon = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle$, y $\delta = \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle$.

Observación 3.2.11 Supondremos que las curvas de Frenet están parametrizadas naturalmente.

Para las curvas luminosas y espaciales con vector normal luminoso también puede darse una generalización de las ecuaciones de Frenet:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \delta\tau & \epsilon\tau & \delta \\ \epsilon & \delta\tau & -\epsilon\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

donde en este caso $\epsilon, \delta \in \{0, 1\}$, y además $\epsilon \neq \delta$. Así, la torsión es

$$\tau(s) = -\epsilon\delta \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle.$$

Recordemos que en el espacio euclídeo, la torsión mide hasta qué punto una curva es plana de tal manera que una curva es plana si y sólo si su torsión es nula. Esta propiedad se mantiene en el espacio de Minkowski para curvas de Frenet.

Proposición 3.2.12 Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ una curva de Frenet parametrizada naturalmente. Entonces, $\alpha(s)$ es plana si y solo si su torsión es idénticamente nula.

Como las curvas de \mathbb{E}^3 son un caso particular de curvas de Frenet, parece claro que la demostración para el caso del espacio de Minkowski es idéntica a la estudiada en la asignatura de *Geometría Local de Curvas y Superficies*, por lo que la omitiremos. Para las curvas luminosas y espaciales con vector normal luminoso obtenemos un resultado similar, aunque en este caso obtendremos una segunda condición.

Proposición 3.2.13 *Sea $\alpha(s)$ una curva luminosa o curva espacial con vector normal luminoso pseudo-parametrizada naturalmente. Se verifica:*

1. *Si la pseudo-torsión es cero, entonces la curva es plana.*
2. *Si la curva luminosa es plana, entonces es una recta, mientras que si es una curva espacial con vector normal luminoso, entonces la condición anterior es necesaria pero no suficiente, es decir, existen curvas espaciales con vector normal luminoso que son planas pero cuya pseudo-torsión no es cero.*

Demostración:

1. Si $\tau = 0$, entonces $\dot{\mathbf{n}}(s) = 0$, pues recordemos que el vector binormal forma parte de la base nula y, por tanto, no puede ser el vector nulo. De esta forma, se tiene que $\mathbf{n}(s) = v \in \mathbb{E}_1^3$, $v \neq 0$, para todo s . Tomando $s_0 \in I$, definimos la función

$$f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), v \rangle.$$

Entonces, $f(s_0) = 0$ y $f'(s) = \langle \mathbf{t}(s), v \rangle = 0$, lo que implica que $f(s)$ es constante y, por tanto, $\alpha(s)$ es una curva plana.

2. Veamos primero el resultado para curvas luminosas. Sea $\alpha(s)$ una curva luminosa plana. Entonces, esta curva está contenida en un plano temporal o luminoso. En el primer caso sabemos, por la *Proposición 2.1.14*, que solo hay dos vectores luminosos linealmente independientes, mientras que en el segundo caso solo hay un único vector luminoso, por la *Proposición 2.1.15*. Esto implica que $\mathbf{t}(s)$ es proporcional a una dirección fija, lo que hace que $\alpha(s)$ sea una recta.

Para el caso de las curvas espaciales con vector normal luminoso basta con ver un contraejemplo. Sea la curva

$$\alpha(s) = \left(s, \frac{s^3}{3}, \frac{s^3}{3} \right),$$

que está contenida en el plano de ecuación $y - z = 0$. Para calcular la pseudo-torsión necesitamos la base nula de Frenet, que viene dada por

$$\mathbf{t}(s) = (1, s^2, s^2), \quad \mathbf{n}(s) = (0, 2s, 2s), \quad \mathbf{b}(s) = \left(\frac{s}{2}, \frac{-1}{4s}, \frac{-1}{4s} \right),$$

donde hemos usado que $\dot{\mathbf{n}}(s) = (0, 2, 2)$. Por tanto, α es una curva espacial con vector normal luminoso. Si calculamos la pseudo-torsión obtenemos que

$$\tau(s) = \frac{1}{s},$$

que es distinta de cero para todo s , mientras que α es una curva plana. □

Este resultado explica por qué tenemos el concepto de pseudo-torsión y no de torsión para curvas luminosas y espaciales con vector normal luminoso. Aun así, la pseudo-torsión también cumple que es invariante bajo movimientos rígidos. El siguiente resultado nos será útil cuando enunciemos el equivalente al *Teorema fundamental de curvas alabeadas* en \mathbb{E}_1^3 .

Teorema 3.2.14 *Para las curvas de Frenet, la curvatura es invariante bajo movimientos rígidos, y la torsión es invariante bajo este tipo de movimiento salvo signo, que dependerá si es un movimiento directo o indirecto.*

En el caso de las curvas luminosas y espaciales con vector normal luminoso, se tiene que la pseudo-torsión es invariante bajo movimientos rígidos, con independencia de que éste sea directo o indirecto.

Demostración: Sea $Mx = Ax + b$ un movimiento rígido, con $A \in O_1(3)$ (porque los movimientos son un caso particular de isometría), $b \in \mathbb{E}_1^3$, y además $\beta = M \circ \alpha$. La prueba para el caso de las curvas de Frenet es la misma que en el caso euclídeo, aunque en este caso no la omitiremos. Supongamos entonces primero que α es una curva de Frenet. Entonces, la relación entre los respectivos triedros de Frenet es

$$\mathbf{t}_\beta = A\mathbf{t}_\alpha, \quad \mathbf{n}_\beta = A\mathbf{n}_\alpha, \quad \mathbf{b}_\beta = \pm A\mathbf{b}_\alpha,$$

donde el signo de \mathbf{b}_α depende de si M es un movimiento directo o indirecto, es decir, del signo de $\det(A)$. Con estas relaciones, es claro que $\kappa_\alpha = \kappa_\beta$ y $\tau_\beta = \pm\tau_\alpha$.

Supongamos ahora que α es una curva espacial con vector normal luminoso. Entonces

$$\mathbf{t}_\beta = A\mathbf{t}_\alpha,$$

y por tanto, $\mathbf{t}'_\beta = A\mathbf{t}'_\alpha$ es luminoso, lo que implica también que

$$\mathbf{n}_\beta = \mathbf{t}'_\beta = A\mathbf{t}'_\alpha = A\mathbf{n}_\alpha.$$

Por la construcción de la base nula de Frenet, el vector $A\mathbf{b}_\alpha$ es luminoso y ortogonal a \mathbf{t}_β , por lo que

$$\langle A\mathbf{b}_\alpha, \mathbf{n}_\beta \rangle = \langle A\mathbf{b}_\alpha, A\mathbf{n}_\alpha \rangle = -1,$$

y así, $\mathbf{b}_\beta = A\mathbf{b}_\alpha$. Esto hace que

$$\tau_\beta = -\langle \mathbf{n}'_\beta, \mathbf{b}_\beta \rangle = -\langle A\mathbf{n}'_\alpha, A\mathbf{b}_\alpha \rangle = \tau_\alpha.$$

El caso en que α sea una curva luminosa es el más sencillo de todos, pues entonces $\beta = M \circ \alpha$ es una curva luminosa pseudo-parametrizada naturalmente y se obtiene directamente que

$$\mathbf{t}_\beta = A\mathbf{t}_\alpha, \quad \mathbf{n}_\beta = A\mathbf{n}_\alpha, \quad \mathbf{b}_\beta = A\mathbf{b}_\alpha,$$

lo que prueba que $\tau_\alpha = \tau_\beta$. □

Finalmente, vamos a ver el equivalente al *Teorema fundamental de curvas alabeadas* en el espacio de Minkowski. Recordemos que este Teorema nos daba un resultado de existencia y unicidad. En el espacio de Minkowski, el resultado de existencia se mantendrá, aunque con pequeños matices, al igual que en el espacio euclídeo, independientemente de la causalidad de la curva. Sin embargo, solo podremos asegurar la unicidad en algunos casos específicos de curvas, ya que, por lo general, no se tiene unicidad.

Empecemos viendo la existencia de curvas con curvatura $\kappa(s)$, y torsión $\tau(s)$ dadas. Distinguiremos dos casos, empezando por las curvas de Frenet.

Teorema 3.2.15 *Sean $\kappa(s) > 0$ y $\tau(s)$, con $s \in I$, dos aplicaciones diferenciables. Entonces, existen tres curvas parametrizadas regularmente $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ diferentes (es decir, tales que no existe un movimiento rígido que lleve una en otra) tales que su curvatura y torsión son, respectivamente, $\kappa(s)$ y $\tau(s)$.*

Observación 3.2.16 Notemos que con este primer resultado de existencia, ya estamos afirmando que, en general, no existe unicidad.

Demostración: La demostración es muy similar a la que se realiza para demostrar el *Teorema fundamental de curvas alabeadas* en el caso euclídeo. En este caso, veremos que para dos funciones $\kappa(s), \tau(s)$ dadas, podremos obtener exactamente tres curvas, una temporal, una espacial con vector normal espacial, y otra espacial con vector normal temporal, tales que $\kappa(s), \tau(s)$ son su curvatura y torsión, respectivamente.

Sea entonces $s_0 \in I$, y sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal cuyos vectores serán las condiciones iniciales de un sistema diferencial ordinario. Supongamos que e_1 es un vector temporal tal que dicha base está positivamente orientada. En este caso, definimos el sistema diferencial ordinario

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = & \kappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) = \kappa(s)\mathbf{t}(s) & +\tau(s)\mathbf{b}(s), \\ \mathbf{b}'(s) = & -\tau(s)\mathbf{n}(s), \end{cases}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{t}(s_0) = e_1, \\ \mathbf{n}(s_0) = e_2, \\ \mathbf{b}(s_0) = e_3. \end{cases}$$

Por el Teorema de Picard, sabemos que en un entorno de s_0 dicho sistema tiene una y solo una solución $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$.

La elección de este sistema diferencial ordinario no es trivial, sino que estamos buscando que las soluciones $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ formen un triedro de Frenet de una cierta curva temporal $\alpha(s)$, para así poder probar que $\kappa(s), \tau(s)$ son, respectivamente, su curvatura y torsión. Asimismo, la elección de la causalidad de las condiciones iniciales tampoco es trivial, y en función de la que tenga cada vector de la base obtendremos una curva diferente (obteniendo así las tres curvas buscadas).

Vamos entonces a ver que efectivamente $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base ortonormal con las mismas propiedades causales que las condiciones iniciales $\{e_1, e_2, e_3\}$. Consideremos entonces el sistema diferencial ordinario:

$$\begin{cases} \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle' = \kappa(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle + \kappa(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle + \tau(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle, \\ \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle' = \kappa(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle - \tau(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle, \\ \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle' = \kappa(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle + \tau(s)\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle - \tau(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle, \\ \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle' = 2\kappa(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle, \\ \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle' = 2\kappa(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle + 2\tau(s)\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{n}(s) \rangle, \\ \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle' = -2\tau(s)\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{n}(s) \rangle, \end{cases}$$

con condiciones iniciales en $s = s_0$ dadas por $(0, 0, 0, -1, 1, 1)$. Sin embargo, las funciones

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0, \quad f_4 = -1, \quad f_5 = f_6 = 1,$$

son solución de dicho sistema diferencial ordinario con esas condiciones iniciales. De nuevo, por el Teorema de Picard, sabemos que existe una única solución del sistema en un entorno de s_0 , por lo que podemos deducir:

$$\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = -1, \quad \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0.$$

En otras palabras, $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base ortonormal de \mathbb{E}_1^3 , con $\mathbf{t}(s)$ un vector temporal. Además, está positivamente orientada pues, al ser ortonormal, sabemos que $\det(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)) = \pm 1$,

pero como se verifica que en $s = s_0$ es 1 (por como hemos definido las condiciones iniciales), entonces $\det(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)) = 1$, para todo $s \in I$.

Si definimos la curva

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{t}(u) du,$$

entonces la base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es su triedro de Frenet, por lo que $\alpha(s)$ es una curva temporal parametrizada naturalmente, pues $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$. Vamos a ver entonces que $\kappa(s)$ es su curvatura, y $\tau(s)$ su torsión. Sabemos que la curvatura de α se calcula como $\kappa_\alpha(s) = |\dot{\mathbf{t}}(s)|$ o, equivalentemente, $\kappa_\alpha(s) = |\ddot{\alpha}(s)|$, por lo que, usando las ecuaciones de Frenet, podemos obtener

$$\kappa_\alpha(s) = |\ddot{\alpha}(s)| = \kappa(s)|\mathbf{n}(s)| = \kappa(s),$$

pues $\mathbf{n}(s)$ es unitario y espacial. Por tanto, $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$. Por otro lado, la torsión se calcula como $\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$, luego utilizando las ecuaciones de Frenet obtenemos

$$\tau_\alpha(s) = \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \langle \kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \tau(s)\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \tau(s),$$

donde hemos usado que $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$ son ortogonales, y $\mathbf{b}(s)$ unitario y espacial.

Por tanto, hemos demostrado que dadas dos funciones $\kappa(s), \tau(s)$, existe una curva temporal tal que dichas funciones son, respectivamente, su curvatura y torsión. Veamos los otros dos casos.

Para el caso de una curva espacial con vector normal espacial, consideramos la base ortonormal negativamente orientada $\{e_1, e_2, e_3\}$, donde e_3 es un vector temporal. En este caso, el sistema diferencial ordinario a resolver es

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = & \kappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) = & -\kappa(s)\mathbf{t}(s) & +\tau(s)\mathbf{b}(s), \\ \mathbf{b}'(s) = & \tau(s)\mathbf{n}(s), \end{cases}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{t}(s_0) = e_1, \\ \mathbf{n}(s_0) = e_2, \\ \mathbf{b}(s_0) = e_3. \end{cases}$$

Realizando el mismo razonamiento que en el caso temporal, llegamos a que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base ortonormal de \mathbb{E}_1^3 , donde en este caso el vector temporal es $\mathbf{b}(s)$. Además, esta base está negativamente orientada, pues en $s = s_0$ lo está, y podemos razonar de igual forma que en el caso anterior.

Si definimos de nuevo la curva

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{t}(u) du,$$

entonces la base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es su triedro de Frenet, por lo que $\alpha(s)$ es una curva espacial con vector normal espacial parametrizada naturalmente, pues $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$. Veamos ahora que $\kappa(s)$ es su curvatura, y $\tau(s)$ su torsión. La curvatura de α se calcula al igual que antes, luego utilizando las ecuaciones de Frenet correspondientes llegamos a

$$\kappa_\alpha(s) = |\dot{\mathbf{t}}(s)| = \kappa(s)|\mathbf{n}(s)| = \kappa(s),$$

pues $\mathbf{n}(s)$ vuelve a ser unitario y espacial. Por tanto, $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$. Por otro lado, la torsión en este caso se calcula como $-\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$, luego utilizando de nuevo las ecuaciones de Frenet obtenemos

$$\tau_\alpha(s) = \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -\langle -\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -\tau(s)\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \tau(s),$$

donde hemos usado que $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$ son ortogonales, y $\mathbf{b}(s)$ unitario y temporal. Así, ya hemos demostrado que $\tau_\alpha(s) = \tau(s)$.

Por último, veamos el caso de una curva espacial con vector normal temporal. Consideremos la base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$, en este caso positivamente orientada, con e_2 un vector temporal. Ahora, el sistema diferencial ordinario a resolver es

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = & \kappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) = & \kappa(s)\mathbf{t}(s) & +\tau(s)\mathbf{b}(s), \\ \mathbf{b}'(s) = & \tau(s)\mathbf{n}(s), \end{cases}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{t}(s_0) = e_1, \\ \mathbf{n}(s_0) = e_2, \\ \mathbf{b}(s_0) = e_3. \end{cases}$$

De nuevo, el razonamiento es el mismo, y llegamos a que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base ortonormal de \mathbb{E}_1^3 , siendo ahora el vector temporal $\mathbf{n}(s)$. Esta base está positivamente orientada, pues en $s = s_0$ lo está, y podemos razonar de igual forma que en los casos anteriores.

Si definimos una vez más la curva

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{t}(u)du,$$

entonces la base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es su triedro de Frenet, por lo que $\alpha(s)$ es una curva espacial con vector normal temporal parametrizada naturalmente, pues $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$. Veamos por último que $\kappa(s)$ es su curvatura, y $\tau(s)$ su torsión. La curvatura de α se calcula en este caso como $\kappa(s) = |\dot{\mathbf{t}}(s)|$, teniendo en cuenta que es un vector temporal. Utilizando las ecuaciones de Frenet correspondientes llegamos a

$$\kappa_\alpha(s) = |\dot{\mathbf{t}}(s)| = \kappa(s)|\mathbf{n}(s)| = \kappa(s)\sqrt{-\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle} = \kappa(s),$$

pues $\mathbf{n}(s)$ es unitario y temporal. Por tanto, $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$. Por otro lado, la torsión en este caso se calcula de nuevo como $\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$, luego utilizando las ecuaciones de Frenet obtenemos

$$\tau_\alpha(s) = \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \langle \kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \tau(s)\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \tau(s),$$

donde hemos usado que $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$ son ortogonales, y $\mathbf{b}(s)$ unitario y espacial. Así, ya hemos demostrado que $\tau_\alpha(s) = \tau(s)$.

Por tanto, queda probado que dadas dos funciones $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ diferenciables, existen exactamente tres curvas cuya curvatura y torsión coinciden con $\kappa(s)$ y $\tau(s)$. \square

Para las curvas luminosas y espaciales con vector normal luminoso obtenemos un resultado muy similar, que también dependerá de las condiciones iniciales.

Teorema 3.2.17 *Sea $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces, existe una curva luminosa y otra curva espacial con vector normal luminoso cuya pseudo-torsión es τ .*

Demostración: La demostración es análoga a la anterior, pero considerando en este caso bases nulas en lugar de bases ortonormales. Tenemos que ver dos casos que, como pasó anteriormente, vendrán determinados por la causalidad de las condiciones iniciales.

Sea entonces $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base nula de \mathbb{E}_1^3 con e_1 un vector espacial. Tratamos de resolver el sistema diferencial ordinario

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = & \mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) = & \tau(s)\mathbf{n}(s), \\ \mathbf{b}'(s) = & \mathbf{t}(s) & -\tau(s)\mathbf{b}(s), \end{cases}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{t}(s_0) &= e_1, \\ \mathbf{n}(s_0) &= e_2, \\ \mathbf{b}(s_0) &= e_3. \end{cases}$$

Vamos a ver que la solución $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base nula, y una vez probado eso, que existe una curva espacial con vector normal luminoso pseudo-parametrizada naturalmente $\alpha(s)$ con base nula $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$, para finalmente comprobar que $\tau(s)$ es su correspondiente pseudo-torsión.

Sabemos que dicho sistema tiene una única solución en un entorno de s_0 en virtud del Teorema de Picard. Actuando igual que antes, definimos otro sistema diferencial ordinario de la forma:

$$\begin{cases} \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle' &= \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle + \tau(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle, \\ \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle' &= \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle + \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle - \tau(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle, \\ \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle' &= \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle, \\ \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle' &= 2 \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle, \\ \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle' &= 2\tau(s) \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle, \\ \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle' &= 2 \langle \mathbf{t}\mathbf{b}(s) \rangle - 2\tau(s) \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle, \end{cases}$$

con condiciones iniciales $(0, 0, -1, 1, 0, 0)$. Dado que las funciones

$$f_1 = f_2 = f_5 = f_6 = 0, \quad f_3 = -1, \quad f_4 = 1,$$

son solución del sistema diferencial con las condiciones iniciales, por el Teorema de Picard podemos asegurar que es la única solución. Por lo tanto, podemos deducir que

$$\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -1, \quad \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 1.$$

Por tanto, el conjunto $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base nula para \mathbb{E}_1^3 con las mismas propiedades que $\{e_1, e_2, e_3\}$. Si definimos la curva

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{t}(u) du,$$

en particular $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base nula para $\alpha(s)$, puesto que $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$. Por tanto, $\alpha(s)$ es una curva espacial con vector normal luminoso pseudo-parametrizada naturalmente. Vamos a calcular su pseudo-torsión y vamos a ver que coincide con $\tau(s)$. Para este tipo de curvas, la pseudo-torsión se calcula como $\tau_\alpha(s) = -\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$; por lo tanto, fijándonos en las ecuaciones de Frenet correspondientes obtenemos que

$$\tau_\alpha(s) = -\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -\langle \tau(s)\mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -\tau(s) \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \tau(s).$$

Por tanto, hemos probado que $\tau(s)$ es la pseudo-torsión de una curva espacial con vector normal luminoso.

Veamos ahora que también lo es para una curva luminosa. Consideramos ahora la base nula $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{E}_1^3 , donde ahora el vector espacial es e_2 . El sistema diferencial a resolver en este caso es

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) &= & \mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) &= \tau(s)\mathbf{t}(s) & \mathbf{b}(s), \\ \mathbf{b}'(s) &= & \tau(s)\mathbf{n}(s), \end{cases}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{t}(s_0) &= e_1, \\ \mathbf{n}(s_0) &= e_2, \\ \mathbf{b}(s_0) &= e_3. \end{cases}$$

Al igual que en la demostración anterior, esta parte de la demostración es totalmente análoga al caso anterior, por lo que la omitiremos.

Por tanto, tenemos que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base nula de \mathbb{E}_1^3 con las mismas propiedades que $\{e_1, e_2, e_3\}$. De nuevo, si definimos la curva $\alpha(s)$ como

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{t}(u) du,$$

tenemos que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base nula para $\alpha(s)$, puesto que $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$. Por tanto, en este caso $\alpha(s)$ es una curva luminosa pseudo-parametrizada por su longitud de arco. Igual que antes, vamos a calcular su pseudo-torsión. En este caso, la pseudo-torsión se calcula igual que antes, por lo que usando las ecuaciones de Frenet correspondientes obtenemos que

$$\tau_\alpha(s) = -\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -\langle \tau(s)\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -\tau(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \tau(s),$$

puesto que $\mathbf{b}(s)$ es un vector luminoso.

Por tanto, hemos probado que dada una función $\tau(s)$, existen exactamente dos curvas, una espacial con vector normal luminoso y otra luminosa, tal que $\tau(s)$ es su pseudo-torsión. \square

Una vez probada la existencia, nos centramos en la unicidad de dichas curvas, que como hemos dicho (y visto en el *Teorema 3.2.15*) no se da en general. Veamos primero el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.18 Sean las curvas $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ y $\beta(s) = (0, \cosh s, \sinh s)$. Mediante unos sencillos cálculos, se obtiene que $\kappa = 1, \tau = 0$, es decir, ambas curvas tienen la misma curvatura y la misma torsión, aun no existiendo ningún movimiento rígido que lleve una en la otra (ya que α es una curva espacial y β una temporal).

En un primer momento, podría parecer que la no unicidad se puede deber a la distinta causalidad de las curvas. Sin embargo, esta no unicidad no se debe solo a esta circunstancia, sino que también tenemos que tener en cuenta el triedro de Frenet de ambas curvas, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.19 Sean $\alpha = \alpha(s)$ la curva anterior y $\gamma(s) = (0, \sinh s, \cosh s)$. Estas curvas tienen la misma curvatura $\kappa = 1$, la misma torsión $\tau = 0$, y ambas son espaciales, pero, aun así, no existe ningún movimiento rígido que lleve α en γ , ya que \mathbf{n}_α es espacial, mientras que \mathbf{n}_γ es temporal.

Entonces, parece claro que la unicidad se dará en los casos en los que la causalidad de los vectores del triedro de Frenet coincida (y por tanto, también coincidirá la causalidad de la curva). Con esta idea, enunciaremos el siguiente teorema referente a la unicidad. Utilizaremos el siguiente concepto en el teorema y su demostración.

Definición 3.2.20 Sean $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ dos curvas (pseudo)parametrizadas naturalmente. Decimos que el triedro de Frenet de α y β tienen la misma causalidad si coinciden las causalidades de sus vectores, es decir, si la causalidad de $\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{b}_\alpha$ es la misma que la de $\mathbf{t}_\beta, \mathbf{n}_\beta, \mathbf{b}_\beta$, respectivamente.

Teorema 3.2.21 Sean $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ dos curvas parametrizadas regularmente que tienen la misma causalidad de su base de Frenet. Entonces, si ambas curvas tienen la misma curvatura y (pseudo)torsión, existe un movimiento rígido M de \mathbb{E}_1^3 tal que $\beta = M \circ \alpha$.

Demostración: Supongamos que $\alpha(s)$ y $\beta(s)$ tienen la misma curvatura y torsión (o pseudo-torsión si es el caso). Queremos ver que existe un movimiento rígido M de tal forma que $\beta = M \circ \alpha$.

Sea entonces $s_0 \in I$ y consideremos la isometría $A \in O_1(3)$ tal que A lleva el triedro de Frenet (o base nula de Frenet en su caso) de α en la de β en $s = s_0$, es decir,

$$A\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0), \quad A\mathbf{n}_\alpha(s_0) = \mathbf{n}_\beta(s_0), \quad A\mathbf{b}_\alpha(s_0) = \mathbf{b}_\beta(s_0).$$

Si tomamos $b = \beta(s_0) - A\alpha(s_0)$, podemos definir el movimiento rígido $Mx = Ax + b$, y así considerar la curva $\gamma(s) = M \circ \alpha(s)$. Nuestro objetivo es probar que $\gamma(s) = \beta(s)$. Por el *Teorema 3.2.14* sabemos que $\kappa_\beta(s) = \kappa_\gamma(s)$, y también que $\tau_\beta(s) = \tau_\gamma(s)$, ya que M es un movimiento directo, y donde $\tau(s)$ denota la torsión o la pseudo-torsión, según el caso. Esto implica que $\gamma(s)$ verifica las ecuaciones de Frenet de $\beta(s)$, así como las condiciones iniciales en $s = s_0$. Por tanto, en virtud del Teorema de Picard de existencia y unicidad de solución en un entorno de s_0 , podemos asegurar que:

$$\mathbf{t}_\beta(s) = \mathbf{t}_\gamma(s), \quad \mathbf{n}_\beta(s) = \mathbf{n}_\gamma(s), \quad \mathbf{b}_\beta(s) = \mathbf{b}_\gamma(s).$$

En concreto, del hecho de que $\mathbf{t}_\beta(s) = \mathbf{t}_\gamma(s)$, podemos deducir que $\dot{\beta}(s) = \dot{\gamma}(s)$, luego integrando llegamos a que $\gamma(s) = \beta(s) + c$, siendo c la constante de integración. Sin embargo, por la como hemos definido el movimiento M , se cumple que $\gamma(s_0) = \beta(s_0)$, lo que implica que $c = 0$, por lo que podemos concluir que $\gamma(s) = \beta(s)$, para todo $s \in I$, con lo que queda probado que dos curvas con igual curvatura y torsión (o pseudo-torsión si es el caso), y con la misma causalidad del triedro de Frenet (o de la base nula de Frenet), difieren en un movimiento rígido. \square

3.3. Curvas planas.

Vamos a estudiar ahora el caso de las curvas planas, centrándonos en el estudio de la curvatura $\kappa(s)$ que, a diferencia del espacio \mathbb{E}_1^3 , queremos que tenga signo. En este caso, y a diferencia del plano euclídeo, tenemos dos opciones. Por un lado, podemos hacer el estudio de curvas en el plano de Minkowski \mathbb{E}_1^2 . Por otro lado, podemos estudiar las curvas de \mathbb{E}_1^3 contenidas en un plano afín. Sin embargo, dicho plano puede ser espacial, temporal o luminoso:

- Si el plano fuese espacial, entonces la métrica sería definida positiva, por lo que las bases ortogonales estarían compuestas por dos vectores espaciales y, así, el plano sería isométrico al plano euclídeo \mathbb{E}^2 ; luego este estudio ya se ha visto en la asignatura de *Geometría Local de Curvas y Superficies*.
- Si el plano fuese temporal, entonces la métrica tendría índice 1, luego el plano sería isométrico al plano \mathbb{E}_1^2 de Minkowski, por lo que estaríamos en la misma situación que en la primera opción.
- Por último, el caso de que el plano sea luminoso es totalmente nuevo y no se puede cubrir ni con el plano euclídeo ni con el plano de Minkowski. Sin embargo, este caso no lo consideraremos, pues deberíamos buscar una base nula para este plano, pero no hemos visto este concepto para dimensiones distintas a 3.

Por tanto, vamos a hacer el estudio para las curvas que estén contenidas en el plano de Minkowski $\mathbb{E}_1^2 = (\mathbb{R}^2, (dx)^2 - (dy)^2)$. Además, no haremos el estudio para curvas luminosas, pues para estas curvas la noción de curvatura no existe y, además, como vimos en el *Proposición 3.2.13*, si una curva luminosa

es plana entonces es una recta, por lo que este caso no tiene un gran interés geométrico.

Sea entonces una curva de Frenet $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$. Definimos su vector tangente como

$$\mathbf{t}(s) = \dot{\alpha}(s).$$

A su vez, el vector $\dot{\mathbf{t}}(s)$ es ortogonal a $\mathbf{t}(s)$, lo que, al estar en el plano de Minkowski, implica que $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ tienen distinta causalidad. Recordemos que en \mathbb{E}^2 la elección de $\mathbf{n}_e(s)$ se hacía de tal forma que el diedro de Frenet $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_e(s)\}$ estuviese positivamente orientado. Como en \mathbb{E}_1^2 queremos, aparte de definir el diedro de Frenet de tal forma que esté positivamente orientado, que la curvatura tenga signo, la elección del vector normal estará sujeta al orden de $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$, que a su vez dependerá de cuál sea el vector espacial. De esta forma, las dos opciones son:

- Si la curva es espacial, definiremos el vector normal $\mathbf{n}(s)$ de tal forma que la base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ esté positivamente orientada.
- Si la curva es temporal, definiremos el vector normal $\mathbf{n}(s)$ de tal forma que la base $\{\mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s)\}$ esté positivamente orientada.

Observación 3.3.1 Recordemos que en \mathbb{E}^2 , dado un vector $u = (a, b)$, los vectores ortogonales a él son $v_1 = (-b, a)$, $v_2 = (b, -a)$. En el caso del plano de Minkowski, como la métrica no es definida positiva, dado un vector $u = (a, b)$, los vectores ortogonales a él son $v_1 = (b, a)$, $v_2 = (-b, -a)$.

Una vez definido el diedro, podemos empezar a estudiar ya la curvatura. En este caso, definiremos la curvatura $\kappa(s)$ de la curva como la función que verifica que

$$\dot{\mathbf{t}}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$

Si tomamos $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = \epsilon$, donde $\epsilon \in \{1, -1\}$, según la curva sea espacial o temporal, se tiene que $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = -\epsilon$ y, así, la curvatura puede calcularse como

$$\kappa(s) = -\epsilon \langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle.$$

Por lo tanto, la curvatura tendrá signo positivo o negativo según sea su causalidad. Por otra parte, como hicimos en el espacio \mathbb{E}_1^3 , también podemos calcular las ecuaciones de Frenet, que serán

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \dot{\mathbf{n}}(s) = \kappa(s)\mathbf{t}(s), \end{cases}$$

donde la segunda ecuación la hemos deducido de la siguiente manera:

1. Si el diedro es $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$, entonces la curvatura es $\kappa(s) = -\langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle$ luego, si usamos el *Teorema 2.1.10*, sabemos que

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle \mathbf{t}(s) - \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \mathbf{n}(s),$$

donde $\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0$, y $\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = -\langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \kappa(s)$.

2. Si el diedro es $\{\mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s)\}$, entonces la curvatura es $\kappa(s) = \langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle$ luego, de nuevo por el *Teorema 2.1.10*, sabemos que

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = -\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle \mathbf{t}(s) + \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \mathbf{n}(s),$$

donde $\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0$, y $\langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = -\langle \dot{\mathbf{t}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = -\kappa(s)$.

Observemos que estas ecuaciones son coherentes con las obtenidas para el caso de curvas alabeadas espaciales (con vector normal temporal) y temporales, suprimiendo las coordenadas con respecto al vector binormal. Por tanto, el signo negativo de la curvatura contrarresta el signo negativo de la métrica de Minkowski cuando el vector tangente no es espacial.

Ejemplo 3.3.2 1. Sea el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = -r^2\}$. Este conjunto corresponde a la hipérbola $\alpha_1(t)$ del *Ejemplo 3.1.4*, por lo que es una curva espacial. Como el conjunto tiene dos componentes conexas

$$A^+ = \{(x, y) \in A : y > 0\}, \quad A^- = \{(x, y) \in A : y < 0\},$$

vamos a ver la curvatura para cada una de las ramas. Para la rama A^+ , podemos parametrizarla naturalmente como

$$\alpha(s) = \left(r \sinh \frac{s}{r}, r \cosh \frac{s}{r} \right),$$

con lo que su diedro de Frenet es $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$, con vectores

$$\mathbf{t}(s) = \left(\cosh \frac{s}{r}, \sinh \frac{s}{r} \right), \quad \mathbf{n}(s) = \left(\sinh \frac{s}{r}, \cosh \frac{s}{r} \right).$$

Así, se tiene que $\dot{\mathbf{t}}(s) = \frac{1}{r} \left(\sinh \frac{s}{r}, \cosh \frac{s}{r} \right)$, luego su curvatura es $\kappa(s) = \frac{1}{r}$, para todo s .

Para la rama A^- , parametrizamos como

$$\beta(s) = \left(r \sinh \frac{s}{r}, -r \cosh \frac{s}{r} \right),$$

donde en este caso los vectores del diedro son

$$\mathbf{t}(s) = \left(\cosh \frac{s}{r}, -\sinh \frac{s}{r} \right), \quad \mathbf{n}(s) = \left(-\sinh \frac{s}{r}, \cosh \frac{s}{r} \right).$$

Por lo tanto, ahora $\dot{\mathbf{t}}(s) = \frac{1}{r} \left(-\sinh \frac{s}{r}, \cosh \frac{s}{r} \right)$ y así su curvatura es $\kappa(s) = -\frac{1}{r}$, para todo s .

2. Sea el conjunto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = r^2\}$. En este caso, este conjunto corresponde a la hipérbola $\alpha_2(t)$ del *Ejemplo 3.1.4*, por lo que es una curva temporal. Como, de nuevo, el conjunto tiene dos componentes conexas

$$B^+ = \{(x, y) \in B : x > 0\}, \quad B^- = \{(x, y) \in B : x < 0\},$$

vamos a ver la curvatura para cada una de las ramas. Para la rama B^+ , podemos parametrizarla naturalmente como

$$\alpha(s) = \left(r \cosh \frac{s}{r}, r \sinh \frac{s}{r} \right),$$

con lo que su diedro de Frenet es $\{\mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s)\}$, con vectores

$$\mathbf{t}(s) = \left(\sinh \frac{s}{r}, \cosh \frac{s}{r} \right), \quad \mathbf{n}(s) = \left(\cosh \frac{s}{r}, \sinh \frac{s}{r} \right).$$

Así, se tiene que $\dot{\mathbf{t}}(s) = \frac{1}{r} \left(\cosh \frac{s}{r}, \sinh \frac{s}{r} \right)$, luego su curvatura es $\kappa(s) = \frac{1}{r}$, para todo s .

Para la rama B^- , parametrizamos como

$$\beta(s) = \left(-r \cosh \frac{s}{r}, r \sinh \frac{s}{r} \right),$$

donde en este caso los vectores del diedro son

$$\mathbf{t}(s) = \left(-\sinh \frac{s}{r}, \cosh \frac{s}{r} \right), \quad \mathbf{n}(s) = \left(\cosh \frac{s}{r}, -\sinh \frac{s}{r} \right).$$

Por lo tanto, ahora $\dot{\mathbf{t}}(s) = \frac{1}{r} \left(-\cosh \frac{s}{r}, \sinh \frac{s}{r} \right)$ y así su curvatura es $\kappa(s) = -\frac{1}{r}$, para todo s .

En el plano euclídeo, definimos la curvatura como $\kappa(s) = \dot{\theta}(s)$, donde θ es una determinación continua del ángulo que forma el eje OX con el vector tangente. Esta idea puede ser extendida también al plano de Minkowski, teniendo en cuenta las restricciones de este espacio a la hora de medir ángulos que vimos en el capítulo anterior. Así, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3.3 *Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ una curva temporal parametrizada naturalmente. Supongamos que existe un vector temporal unitario $v \in \mathbb{E}_1^2$ de tal forma que v y $\mathbf{t}(s)$ están sobre el mismo cono temporal, para todo $s \in I$. Si θ es una determinación continua del ángulo entre dichos vectores, entonces*

$$\kappa(s) = \pm \dot{\theta}(s).$$

Demostración: Por el Teorema 2.2.1 (desigualdad de Cauchy-Schwarz inversa), sabemos que se tiene $\langle \mathbf{t}(s), v \rangle = -\cosh(\theta(s))$, pues ambos vectores son unitarios. Entonces, derivando esta expresión:

$$-\dot{\theta}(s) \sinh(\theta(s)) = \kappa(s) \langle \mathbf{n}(s), v \rangle.$$

Ahora, por el Teorema 2.1.10, podemos escribir al vector v como:

$$v = -\langle v, \mathbf{t}(s) \rangle \mathbf{t}(s) + \langle v, \mathbf{n}(s) \rangle \mathbf{n}(s),$$

luego entonces, multiplicando por el vector v , obtenemos que

$$-1 = -\langle v, \mathbf{t}(s) \rangle^2 + \langle v, \mathbf{n}(s) \rangle^2 = -\cosh^2(\theta(s)) + \langle v, \mathbf{n}(s) \rangle^2.$$

De esta forma, se tiene que $\langle v, \mathbf{n}(s) \rangle = \pm \sinh(\theta(s))$ y, por tanto, $\dot{\theta}(s) = \pm \kappa(s)$. □

El Teorema también se cumple si la curva es espacial y el vector $\mathbf{t}(s)$ forma un ángulo constante con un vector unitario espacial que esté en la misma componente de \mathbb{U}_1^2 , es decir, que ambos estén en \mathbb{S}_1^{1+} ó \mathbb{S}_1^{1-} .

Observación 3.3.4 Gracias a este Teorema, también podemos asegurar una propiedad que se cumplía en el espacio euclídeo: una curva es una recta si y solo si su curvatura es nula.

Con este resultado, podemos estudiar la existencia y unicidad de curvas con curvatura $\kappa(s)$, tal y como hicimos para las curvas en \mathbb{E}_1^3 , y en lo que sería el equivalente al *Teorema fundamental de curvas planas* del plano euclídeo.

Para la existencia, vamos a hacer una observación previa. Al igual que en el plano euclídeo, podemos obtener una parametrización de la curva en términos de la integral de la curvatura. Como hemos visto antes, $\kappa(s) = \pm \dot{\theta}(s)$, luego si la función diferenciable $\kappa(s)$ es conocida, entonces

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s \kappa(t) dt.$$

De esta forma, podemos definir dos curvas α y β , espacial y temporal respectivamente, tal que $\kappa(s)$ es su curvatura, de la siguiente manera:

$$\alpha(s) = \left(\int_{s_0}^s \cosh \theta(t) dt, \int_{s_0}^s \sinh \theta(t) dt \right),$$

$$\beta(s) = \left(\int_{s_0}^s \sinh \theta(t) dt, \int_{s_0}^s \cosh \theta(t) dt \right).$$

Así, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.3.5 *Sea $\kappa = \kappa(s)$ una función continua. Entonces, existe una curva espacial o temporal parametrizada naturalmente tal que $\kappa(s)$ es su curvatura. Además, esta curva es única salvo movimientos rígidos directos de \mathbb{E}_1^2 . De hecho, si $\alpha(s)$ es una curva espacial o temporal, y $Mx = Ax + b$ es movimiento rígido de \mathbb{E}_1^2 con $A \in SO_1(2)$, entonces la relación entre los diedros de Frenet de $\alpha(s)$ y $\beta(s) = M \circ \alpha(s)$ es:*

$$\mathbf{t}_\beta(s) = A\mathbf{t}_\alpha(s), \quad \mathbf{n}_\beta(s) = A\mathbf{n}_\alpha(s).$$

Demostración: Sean $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ dos curvas espaciales parametrizadas naturalmente con la misma curvatura $\kappa = \kappa(s)$. Fijado $s_0 \in I$, los diedros de Frenet $\{\mathbf{t}_\alpha(s_0), \mathbf{n}_\alpha(s_0)\}$ y $\{\mathbf{t}_\beta(s_0), \mathbf{n}_\beta(s_0)\}$ son dos bases positivamente orientadas. Entonces, existe una isometría $A \in SO_1(2)$ tal que

$$A(\mathbf{t}_\alpha(s_0)) = \mathbf{t}_\beta(s_0), \quad A(\mathbf{n}_\alpha(s_0)) = \mathbf{n}_\beta(s_0).$$

Considerando $b = \beta(s_0) - A\alpha(s_0)$, definimos el movimiento rígido $Mx = Ax + b$. Entonces, la curva $\gamma = M \circ \alpha$ satisface que $\kappa_\gamma = \kappa$, pues $\det(A) = 1$. Si denotamos al diedro de γ como $\{\mathbf{t}_\gamma(s_0), \mathbf{n}_\gamma(s_0)\}$, las curvas γ y β coinciden en $s = s_0$. Así, definimos la función diferenciable $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(s) = |\mathbf{t}_\gamma(s) - \mathbf{t}_\beta(s)|^2 - |\mathbf{n}_\gamma(s) - \mathbf{n}_\beta(s)|^2.$$

Derivando f , y teniendo en cuenta las ecuaciones de Frenet y la ortogonalidad de los vectores tangente y normal, deducimos que $f'(s) = 0$, para todo $s \in I$, es decir, f es constante. Como $f(s_0) = 0$ por lo visto anteriormente, se tiene que $f(s) = 0$, para todo $s \in I$. Ahora, como la métrica no es definida positiva, no podemos asegurar que $|\mathbf{t}_\gamma(s) - \mathbf{t}_\beta(s)| = |\mathbf{n}_\gamma(s) - \mathbf{n}_\beta(s)| = 0$. Aun así, desarrollando los cuadrados de la ecuación $f(s) = 0$, obtenemos que

$$\langle \mathbf{n}_\gamma(s), \mathbf{n}_\beta(s) \rangle + 1 = \langle \mathbf{t}_\gamma(s), \mathbf{t}_\beta(s) \rangle - 1.$$

Observemos que $\mathbf{t}_\gamma(s)$ y $\mathbf{t}_\beta(s)$ están en la misma componente de vectores espaciales unitarios, es decir, ambos están en \mathbb{S}_1^{1+} ó en \mathbb{S}_1^{1-} . Por lo tanto, por lo visto en el capítulo anterior, sabemos que $\langle \mathbf{t}_\gamma(s), \mathbf{t}_\beta(s) \rangle \geq 1$, para todo $s \in I$. A los vectores $\mathbf{n}_\gamma(s)$ y $\mathbf{n}_\beta(s)$ les ocurre lo mismo. En este caso, al ser temporales se verifica que $\langle \mathbf{n}_\gamma(s), \mathbf{n}_\beta(s) \rangle \leq -1$, pues ambos están en el mismo cono temporal. Así, tenemos que

$$0 \geq \langle \mathbf{n}_\gamma(s), \mathbf{n}_\beta(s) \rangle + 1 = \langle \mathbf{t}_\gamma(s), \mathbf{t}_\beta(s) \rangle - 1 \geq 0,$$

es decir, $\langle \mathbf{t}_\gamma(s), \mathbf{t}_\beta(s) \rangle = 1$, por lo que $\mathbf{t}_\gamma(s) = \mathbf{t}_\beta(s)$. Entonces, $A\dot{\alpha}(s) = \dot{\beta}(s)$, para todo s . Integrando, existe un $c \in \mathbb{E}_1^2$ tal que $\beta(s) = A\alpha(s) + c$. Evaluando en $s = s_0$, obtenemos que $c = b$, con lo que podemos concluir que $\beta(s) = \gamma(s) = M \circ \alpha(s)$. Es decir, si dos curvas tienen la misma curvatura, entonces difieren en un movimiento rígido.

La demostración para el caso de curvas temporales es totalmente análoga al caso espacial. \square

Observación 3.3.6 En la demostración hemos usado que $\mathbf{t}_\beta(s) = A\mathbf{t}_\alpha(s)$, $\mathbf{n}_\beta(s) = A\mathbf{n}_\alpha(s)$ para deducir que

$$\dot{\mathbf{t}}_\beta(s) = A\dot{\mathbf{t}}_\alpha(s) = A(\kappa_\alpha(s)\mathbf{n}_\alpha(s)) = \kappa_\alpha(s)A\mathbf{n}_\alpha(s) = \kappa_\alpha(s)\mathbf{n}_\beta(s),$$

lo que implica que $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(s)$.

Por último y para finalizar el estudio de curvas planas, vamos a revisar la noción de ángulo entre dos vectores del plano de Minkowski que dimos en el capítulo anterior. Recordemos que en el plano euclídeo, el ángulo entre dos vectores unitarios u y v de la circunferencia unidad \mathbf{S}^1 puede medirse como la longitud de arco de la curva más corta en \mathbf{S}^1 que une los puntos u y v . En \mathbb{E}_1^2 , la idea es exactamente la misma, pero tendremos que tener cuidado de que ambos vectores estén en la misma componente de \mathbb{U}_1^2 .

Teorema 3.3.7 Sean u y v dos vectores unitarios de \mathbb{E}_1^2 que están en la misma componente de \mathbb{U}_1^2 . Entonces, el ángulo $\angle(u, v)$ es la longitud de arco de la curva en \mathbb{U}_1^2 que une u y v .

Demostración: Veamos primero el caso en que ambos vectores sean temporales. Sean u, v dos vectores temporales unitarios que están en el mismo cono temporal, y supongamos que $u = (\sinh \varphi, \cosh \varphi)$, $v = (\sinh \psi, \cosh \psi)$, con $\varphi \leq \psi$. El arco de curva de \mathbb{H}^1 entre u y v es $\alpha(s) = (\sinh s, \cosh s)$, $s \in [\varphi, \psi]$, y su longitud $L_\varphi^\psi(\alpha)$ es:

$$L_\varphi^\psi(\alpha) = \int_\varphi^\psi |\dot{\alpha}(s)| ds = \int_\varphi^\psi 1 ds = \psi - \varphi.$$

Si calculamos el ángulo entre ambos vectores mediante la igualdad que vimos en la *desigualdad de Cauchy-Schwarz inversa*,

$$-\langle u, v \rangle = -\sinh(\varphi)\sinh(\psi) + \cosh(\varphi)\cosh(\psi) = \cosh(\psi - \varphi),$$

pues $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$. Por tanto, el ángulo es $\angle(u, v) = \psi - \varphi$, pues $\psi - \varphi \geq 0$.

Tomemos ahora u, v dos vectores unitarios espaciales que estén en la misma componente de \mathbb{U}_1^2 . Supongamos en este caso que $u = (\cosh \varphi, \sinh \varphi)$, $v = (\cosh \psi, \sinh \psi)$, con $\varphi \leq \psi$. De nuevo, el arco de curva que une u y v es $\alpha(s) = (\cosh s, \sinh s)$, $s \in [\varphi, \psi]$, cuya longitud es:

$$L_\varphi^\psi(\alpha) = \int_\varphi^\psi |\dot{\alpha}(s)| ds = \int_\varphi^\psi 1 ds = \psi - \varphi.$$

Usando ahora la *Definición 2.2.2*, obtenemos que:

$$\langle u, v \rangle = \cosh(\varphi)\cosh(\psi) - \sinh(\varphi)\sinh(\psi) = \cosh(\psi - \varphi),$$

donde hemos usado la misma identidad para los cosenos hiperbólicos que en el caso temporal. Por tanto, como $\psi - \varphi \geq 0$, el ángulo es $\angle(u, v) = \psi - \varphi$. \square

Observación 3.3.8 Algunos autores definen el ángulo entre dos vectores de una manera ligeramente diferente. Si los vectores u y v son unitarios, temporales, y están en el mismo cono temporal, entonces el ángulo es $\angle(u, v) = \varphi$, donde $\varphi \in [0, \infty)$ es el valor tal que la isometría

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix} \in O_1^{++}(2)$$

verifica $R_\varphi(u) = v$.

En el caso en que u, v sean dos vectores unitarios espaciales que están en la misma componente de \mathbb{U}_1^2 , el ángulo se define como

$$\angle(u, v) = \angle(F(u), F(v)),$$

donde F es la reflexión con respecto a la recta $y = x$. Ambas definiciones son coherentes con respecto a la que se ha dado anteriormente en este trabajo.

Otros autores también definen el ángulo entre vectores temporales y espaciales que están en distintas componentes de \mathbb{U}_1^2 , llevándose ambos vectores a la componente \mathbb{H}_+^1 mediante sucesivas reflexiones a través del cono luminoso de \mathbb{E}_1^2 (i.e, a través de las rectas $y = \pm x$). Sin embargo, en estos casos no existe un arco de curva de \mathbb{U}_1^2 que una u y v .

Bibliografía

- [1] Manfredo P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. N.J. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- [2] Departamento de Álgebra. *Apuntes de Álgebra Lineal y Geometría I*. Departamento de Álgebra, Universidad de Sevilla. 2017/2018.
- [3] Departamento de Geometría y Topología. *Apuntes de Geometría Local de Curvas y Superficies*. Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Sevilla. 2019.
- [4] Manuel Gutiérrez. *Espacio vectorial de Minkowski*. Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga. 2010
- [5] M. A. Hernández Cifre, J. A. Pastor. *Un curso de geometría diferencial*. CSIC, Madrid, 2010.
- [6] M. A. Javaloyes, M. Sánchez. *An introduction to Lorentzian Geometry and its applications*. XVI Escola de Geometria Diferencial, Sao Paulo, 12-16 julio 2010. Sao Carlos: Rima 2010.
- [7] Rafael López. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. *Int. Electron. J. Geom.* **7** (2014), no. 1, 44-107.
- [8] Barrett O'Neill. *Elementary Differential Geometry*, (2nd. Ed.). Academic Press, San Diego, 2006.

Webgrafía

- [9] <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Minkowski/>
- [10] <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lorentz/>