



# **TOPOLOGÍA DE GRAFOS FÍNITOS**

**Jesús Baena Gómez**





# TOPOLOGÍA DE GRAFOS FÍNITOS

Jesús Baena Gómez

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Francisco Jesús Fernández Lasheras



# Índice general

|                                                            |           |
|------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>English Abstract</b>                                    | <b>1</b>  |
| <b>1. Introducción</b>                                     | <b>3</b>  |
| 1.1. Grafos y morfismos de grafos . . . . .                | 3         |
| 1.2. Caminos y grupo fundamental . . . . .                 | 9         |
| 1.3. Estrellas . . . . .                                   | 14        |
| <b>2. Recubrimientos</b>                                   | <b>17</b> |
| <b>3. Inmersiones. Teorema de Howson</b>                   | <b>25</b> |
| <b>4. Teorema de Marshall Hall</b>                         | <b>33</b> |
| <b>5. Grafos centrales</b>                                 | <b>39</b> |
| <b>6. Apéndice A. Otros resultados sobre grupos libres</b> | <b>47</b> |
| <b>7. Apéndice B. Grafos de Cayley</b>                     | <b>49</b> |



# English Abstract

The goal of this work is to prove some standard theorems on free groups by using graphs and their topology. For this, we have followed Stallings' paper *Topology of Finite Graphs* [11].

We will use the fundamental group of a connected graph, which is a free group, and immersions and coverings of graphs to represent subgroups of a free group. In this way, we will see Howson's Theorem that if  $A$  and  $B$  are finitely generated subgroups of a free group, then  $A \cap B$  is finitely generated, and M. Hall's Theorem. This last theorem states that if  $S$  is a finitely generated subgroup of a free group  $F$  and  $\beta_1, \dots, \beta_l \in F$  but  $\beta_1, \dots, \beta_l \notin S$ , then there exists a subgroup  $S'$  of finite index in  $F$  such that  $S \subset S'$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_l \notin S'$ , and there exists a free basis of  $S'$  having a subset which is a free basis of  $S$ .

Lastly, we will use core-graphs to proof that if  $A$  and  $B$  are finitely generated subgroups of a free group and if  $A \cap B$  is of finite index in both  $A$  and  $B$ , then  $A \cap B$  is of finite index in  $A \vee B$ , the subgroup generated by  $A \cup B$ .



# 1 | Introducción

En este capítulo desarrollaremos las secciones 1, 2 y 3 de [11], donde trataremos las ideas básicas que usaremos en el resto del trabajo. Además de [11], hemos consultado también [2].

## 1.1 Grafos y morfismos de grafos

Empecemos definiendo el concepto de grafo. Utilizaremos la definición dada por Serre, la cual difiere un poco de la definición habitual en teoría de grafos.

**Definición 1.1.** *Un grafo  $\Gamma = (V, E)$  está formado por:*

- *Un conjunto de vértices  $V$ .*
- *Un conjunto de aristas  $E$ .*
- *Una función  $\iota : E \rightarrow V$ , llamada vértice inicial.*
- *Una función  $\bar{\phantom{e}} : E \rightarrow E$ , llamada arista inversa. Se debe cumplir que  $\bar{\bar{e}} = e$  y  $\bar{e} \neq e$ , para todo  $e \in E$ . La arista  $\bar{e}$  recibe el nombre de arista inversa de  $e$ .*

**Observación 1.1.** *Podemos usar también la notación  $V(\Gamma)$  y  $E(\Gamma)$  para referirnos al conjunto de vértices y al conjunto de aristas de un grafo  $\Gamma$  respectivamente.*

**Definición 1.2.** *Un grafo es finito si tiene un número finito de vértices y aristas.*

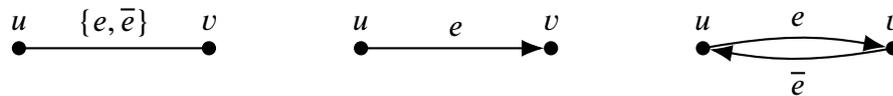
Los grafos que usaremos en este trabajo son finitos.

La definición de grafo que hemos usado nos indica que cada arista  $e$  del grafo está acompañada de su arista inversa  $\bar{e}$ . Lo podemos ver como que las aristas vienen dadas en pares de la forma  $\{e, \bar{e}\}$ .

**Definición 1.3.** Dada  $e \in E(\Gamma)$ , entonces el vértice  $\iota(e)$  recibe el nombre de vértice inicial de  $e$  y el vértice  $\tau(e)$  recibe el nombre de vértice final de  $e$  y se denota  $\tau(e)$ .

**Observación 1.2.** La definición de grafo dada por Serre permite que haya aristas tales que su vértice inicial coincide con su vértice final y aristas múltiples (aristas que tienen el mismo vértice inicial y el mismo vértice final).

A un grafo le podemos asignar una representación gráfica. Cada vértice lo representamos mediante un punto y cada arista por un segmento de recta o curva uniendo sus vértices inicial y final. Por ejemplo, los vértices  $u$  y  $v$  y un par de aristas  $\{e, \bar{e}\}$ , con  $\iota(e) = u$  y  $\tau(e) = v$  los podemos representar de tres formas distintas:



**Definición 1.4.** La valencia de un vértice  $v$  es el número de aristas que tienen a  $v$  como vértice inicial.

**Definición 1.5.** Una orientación de un grafo consiste en la elección de exactamente una arista de cada par  $\{e, \bar{e}\}$ .

**Definición 1.6.** Un morfismo  $f$  entre dos grafos  $\Gamma$  y  $\Delta$  es un par de funciones entre el conjunto de vértices de  $\Gamma$  y de  $\Delta$

$$f : V(\Gamma) \rightarrow V(\Delta)$$

y entre el conjunto de aristas de  $\Gamma$  y de  $\Delta$

$$f : E(\Gamma) \rightarrow E(\Delta)$$

tal que se preserva la estructura. Es decir, se cumple que los siguientes diagramas son conmutativos.

$$\begin{array}{ccc} E(\Gamma) & \xrightarrow{\bar{\quad}} & E(\Gamma) \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ E(\Delta) & \xrightarrow{\bar{\quad}} & E(\Delta) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E(\Gamma) & \xrightarrow{\iota} & V(\Gamma) \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ E(\Delta) & \xrightarrow{\iota} & V(\Delta) \end{array}$$

**Definición 1.7.** Dado un morfismo  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$ , una orientación de  $\Delta$  determina una única orientación de  $\Gamma$  que es preservada por  $f$ . A esta orientación se le llama la orientación de  $\Gamma$  inducida por  $f$ .

Ahora que hemos visto los grafos y sus morfismos, vamos definir dos construcciones: los pushouts y los pullbacks de grafos. Las definiciones están tomadas de [1].

**Definición 1.8.** Sean  $\Gamma, \Delta_1$  y  $\Delta_2$  tres grafos y  $f : \Gamma \rightarrow \Delta_1$  y  $g : \Gamma \rightarrow \Delta_2$  dos morfismos. El pushout de los morfismos  $f$  y  $g$  es un grafo  $P$  y dos morfismos  $i : \Delta_1 \rightarrow P$  y  $j : \Delta_2 \rightarrow P$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

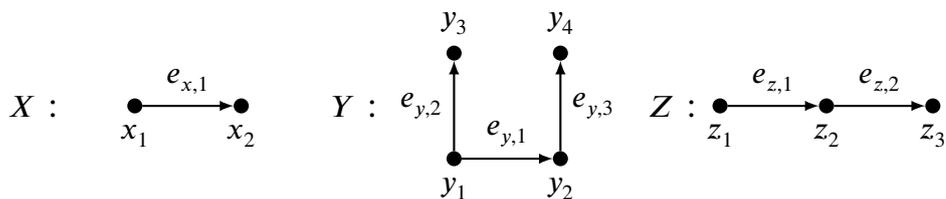
$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{f} & \Delta_1 \\ g \downarrow & & \downarrow i \\ \Delta_2 & \xrightarrow{j} & P \end{array}$$

Además, para cualesquiera otros  $Q, i'$  y  $j'$  que hagan que el diagrama conmute, entonces debe existir una única  $u : P \rightarrow Q$  que también hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{f} & \Delta_1 \\ g \downarrow & & \downarrow i \\ \Delta_2 & \xrightarrow{j} & P \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{i'} \\ \xrightarrow{j'} \\ \xrightarrow{u} \end{array} Q$$

Los pushouts no siempre existen en los grafos. Para que exista el pushout de dos morfismos  $f : \Gamma \rightarrow \Delta_1$  y  $g : \Gamma \rightarrow \Delta_2$  tienen que existir orientaciones de  $\Gamma, \Delta_1$  y  $\Delta_2$  que se preserven por  $f$  y  $g$ , y en este caso, el grafo  $P$  es fácil de construir. Es la unión disjunta de  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  en la que se han identificado los vértices y las aristas que tienen la misma preimagen en  $\Gamma$ . Los morfismos  $i$  y  $j$  son los morfismos naturales.

**Ejemplo 1.1.** Consideremos los grafos  $X, Y$  y  $Z$  dados de la siguiente manera:



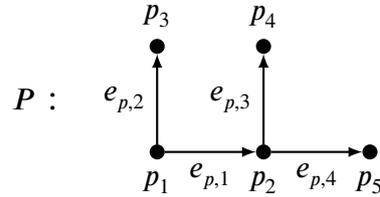
Y los morfismos entre grafos  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : X \rightarrow Z$  donde:

$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \quad y \quad f(e_{x,1}) = e_{y,1}, f(\overline{e_{x,1}}) = \overline{e_{y,1}}.$$

6 TOPOLOGÍA DE GRAFOS FÍNITOS

$$g(x_1) = z_1, \quad g(x_2) = z_2, \quad \text{y} \quad g(e_{x,1}) = e_{z,1}, \quad f(\overline{g_{x,1}}) = \overline{e_{z,1}}.$$

El pushout del diagrama  $Z \leftarrow X \rightarrow Y$  es el grafo



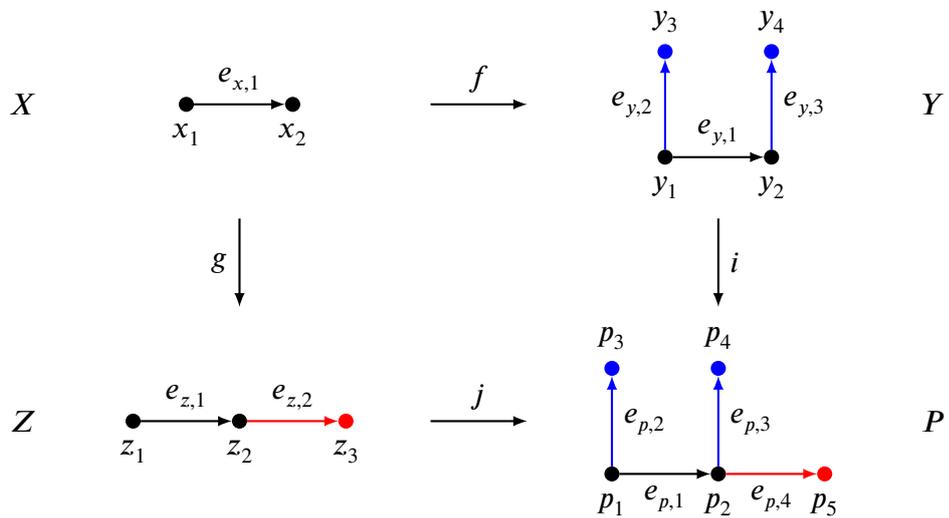
y los morfismos  $i : Y \rightarrow P, j : Z \rightarrow P$  donde

$$p_1 = i(y_1) = j(z_1), \quad p_2 = i(y_2) = j(z_2), \quad p_3 = i(y_3), \quad p_4 = i(y_4), \quad p_5 = j(z_3),$$

$$e_{p,1} = i(e_{y,1}) = j(e_{z,1}), \quad e_{p,2} = i(e_{y,2}), \quad e_{p,3} = i(e_{y,3}), \quad e_{p,4} = j(e_{z,2}),$$

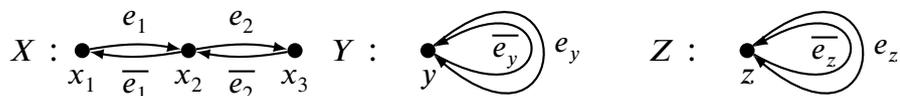
$$\overline{e_{p,1}} = i(\overline{e_{y,1}}) = j(\overline{e_{z,1}}), \quad \overline{e_{p,2}} = i(\overline{e_{y,2}}), \quad \overline{e_{p,3}} = i(\overline{e_{y,3}}), \quad \overline{e_{p,4}} = j(\overline{e_{z,2}}),$$

Visto en el diagrama queda:



A continuación damos un ejemplo donde el pushout no existe.

**Ejemplo 1.2.** Consideremos los grafos  $X, Y$  y  $Z$  dados de la siguiente manera:



Y los morfismos entre grafos  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : X \rightarrow Z$  donde:

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = y \quad \text{y} \quad f(e_1) = f(e_2) = e_y, \quad f(\overline{e_1}) = f(\overline{e_2}) = \overline{e_y}.$$

$$g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) = z \quad \text{y} \quad g(e_1) = g(\overline{e_2}) = e_z, \quad g(\overline{e_1}) = g(e_2) = \overline{e_z}.$$

Si intentamos hacer el pushout del diagrama  $Z \leftarrow X \rightarrow Y$  obtenemos el grafo  $P$ .



Este grafo tiene solo una arista, por lo que su inversa debe coincidir con ella misma, lo que viola la definición de grafo que usamos.

**Definición 1.9.** Sean  $\Gamma_1, \Gamma_2$  y  $\Delta$  tres grafos y  $f : \Gamma_1 \rightarrow \Delta$  y  $g : \Gamma_2 \rightarrow \Delta$  dos morfismos. El pullback de los morfismos  $f$  y  $g$  es un grafo  $P$  y dos morfismos  $i : P \rightarrow \Gamma_1$  y  $j : P \rightarrow \Gamma_2$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{i} & \Gamma_1 \\ j \downarrow & & \downarrow f \\ \Gamma_2 & \xrightarrow{g} & \Delta \end{array}$$

Además, para cualesquiera otros  $Q, i'$  y  $j'$  que hagan que el diagrama conmute, entonces debe existir una única  $u : Q \rightarrow P$  que también hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccccc} Q & & & & \\ & \searrow u & & & \\ & & P & \xrightarrow{i} & \Gamma_1 \\ & & j \downarrow & & \downarrow f \\ & & \Gamma_2 & \xrightarrow{g} & \Delta \end{array}$$

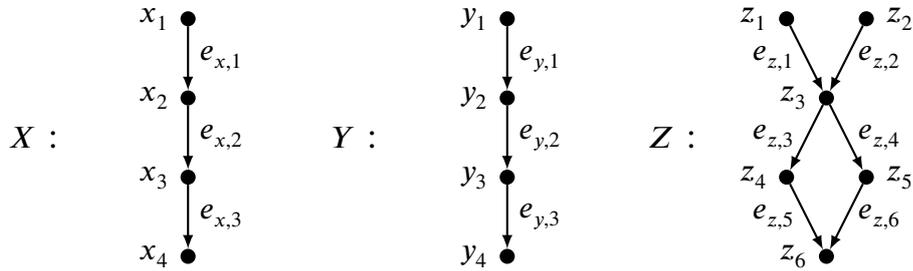
(Note: In the original image, there are also arrows from Q to Gamma\_1 labeled i' and from Q to Gamma\_2 labeled j'.)

El grafo  $P$  es un subgrafo del producto  $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ . Se construye de la siguiente forma:

- $V(P) = \{(u, v) \in V(\Gamma_1) \times V(\Gamma_2) : f(u) = g(v)\}$ .
- $A(P) = \{(e_1, e_2) \in E(\Gamma_1) \times E(\Gamma_2) : f(e_1) = g(e_2)\}$ .
- $\iota : E(P) \rightarrow V(P)$ , definida como  $(e_1, e_2) \rightarrow (\iota(e_1), \iota(e_2))$ .
- $\bar{\phantom{x}} : E(P) \rightarrow E(P)$ , definida como  $(e_1, e_2) \rightarrow (\overline{e_1}, \overline{e_2})$ .

Los morfismos  $i$  y  $j$  son los morfismos naturales.

*Ejemplo 1.3.* Consideremos los grafos  $X, Y$  y  $Z$  dados de la siguiente manera:



Y los morfismos entre grafos  $f : X \rightarrow Z$  y  $g : Y \rightarrow Z$  donde:

$$f(x_1) = z_1, f(x_2) = z_3, f(x_3) = z_4, f(x_4) = z_6,$$

$$f(e_{x,1}) = e_{z,1}, f(e_{x,2}) = e_{z,3}, f(e_{x,3}) = e_{z,5},$$

$$f(\overline{e_{x,1}}) = \overline{e_{z,1}}, f(\overline{e_{x,2}}) = \overline{e_{z,3}}, f(\overline{e_{x,3}}) = \overline{e_{z,5}},$$

$$g(y_1) = z_2, g(y_2) = z_3, g(y_3) = z_5, g(y_4) = z_6,$$

$$g(e_{y,1}) = e_{z,2}, g(e_{y,4}) = e_{z,3}, g(e_{y,3}) = e_{z,6},$$

$$g(\overline{e_{y,1}}) = \overline{e_{z,2}}, g(\overline{e_{y,2}}) = \overline{e_{z,4}}, g(\overline{e_{y,3}}) = \overline{e_{z,6}}.$$

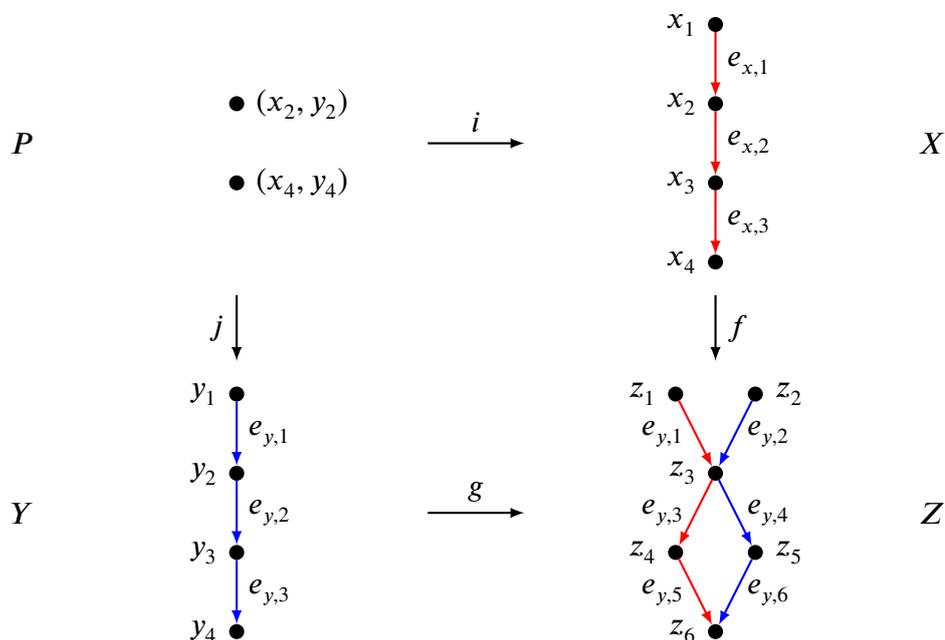
El pullback del diagrama  $X \rightarrow Z \leftarrow Y$  es el grafo



y los morfismos  $i : P \rightarrow X, j : P \rightarrow Y$ , donde

$$i((x_2, y_2)) = x_2, i((x_4, y_4)) = x_4, \quad y \quad j((x_2, y_2)) = y_2, j((x_4, y_4)) = y_4.$$

Visto en el diagrama queda:



## 1.2 Caminos y grupo fundamental

En esta sección veremos los conceptos de camino, homotopía y grupo fundamental de un grafo. Las definiciones las daremos de manera combinatoria, aunque luego veremos que coinciden con las definiciones topológicas usuales. Por esta razón, los resultados que veamos en esta sección no los demostraremos, pues derivan de la teoría topológica usual.

**Definición 1.10.** Sea  $\Gamma$  un grafo. Un camino  $p$  en  $\Gamma$  de longitud  $n = |p|$  con vértice inicial  $u$  y vértice final  $v$  es una secuencia de aristas de  $\Gamma$ ,  $p = e_1 e_2 \dots e_n$ , tal que cumplen que  $\tau(e_i) = \iota(e_{i+1})$  para  $i = 1, \dots, n - 1$  y  $\iota(e_1) = u$  y  $\tau(e_n) = v$ .

Para  $n = 0$ , dado cualquier vértice  $v$ , denotamos por  $\Lambda_v$  al único camino de longitud 0 cuyos vértices inicial y final son  $v$ .

**Definición 1.11.** Dado un camino  $p = e_1 e_2 \dots e_{n-1} e_n$ , se define su camino inverso como  $\bar{p} = \overline{e_n e_{n-1} \dots e_2 e_1}$ .

Para  $n = 0$ , se define  $\bar{\Lambda}_v = \Lambda_v$ .

**| Definición 1.12.** *Un lazo (o camino cerrado) es un camino en el que el vértice inicial es igual al vértice final.*

*Si  $v$  es el vértice inicial y final del lazo decimos que es un lazo basado en  $v$ .*

**| Definición 1.13.** *Un grafo es conexo si para cualquier par de vértices hay al menos un camino que los une.*

A continuación vamos a definir una operación entre caminos: la concatenación.

**| Definición 1.14.** *Sean dos caminos  $p = a_1 \dots a_n$  y  $q = b_1 \dots b_m$  en  $\Gamma$  tales que el vértice final de  $p$  coincide con el vértice inicial de  $q$ . Se define la concatenación de los caminos  $p$  y  $q$  como*

$$pq = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$$

*Se denota por  $P(\Gamma)$  al conjunto de todos los caminos en  $\Gamma$  con la operación de concatenación.*

Dado un morfismo  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$ , éste define una nueva función que denotaremos por el mismo símbolo,

$$\begin{aligned} f : P(\Gamma) &\rightarrow P(\Delta) \\ p = e_1 \dots e_n &\mapsto f(p) = f(e_1) \dots f(e_n). \end{aligned}$$

Ahora que hemos visto los conceptos básicos sobre caminos, nos disponemos a tratar el concepto de homotopía.

**| Definición 1.15.** *Una ida y vuelta es un camino (o segmento de camino) de la forma  $e\bar{e}$  o  $\bar{e}e$ .*

**| Definición 1.16.** *Un camino es reducido si no contiene idas y vueltas.*

Si un camino  $p$  contiene una ida y vuelta, entonces la podemos eliminar y obtenemos otro camino  $p'$ , el cual tiene los mismos vértices inicial y final que  $p$ .

**| Definición 1.17.** *Sea  $p$  un camino en  $\Gamma$ . Si  $p'$  es un camino que se obtiene a partir de  $p$  eliminando una ida y vuelta, entonces se dice que  $p'$  se ha obtenido por reducción elemental de  $p$  y se denota*

$$p \searrow p'$$

A partir de la reducción elemental podemos construir una relación de equivalencia en  $P(\Gamma)$ , denotada  $\sim$ . Tenemos que  $p \sim q$  si  $q$  se obtiene a partir de  $p$  tras una cantidad finita de reducciones elementales y/o sus inversas.

Intuitivamente es fácil ver que  $\sim$  es una relación de equivalencia. Para la propiedad reflexiva, tenemos que  $p$  se obtiene de sí mismo al no añadir ni eliminar ninguna ida y vuelta. Para la simétrica, si  $q$  se obtiene de  $p$  mediante una serie de pasos, entonces tenemos que  $p$  se obtiene que  $q$  haciendo los pasos contrarios en orden inverso. Por último, para la transitiva, si  $q$  se obtiene de  $p$  mediante una serie de pasos,  $\sigma_1$ , y  $r$  se obtiene de  $q$  mediante otra serie de pasos,  $\sigma_2$ , entonces obtenemos  $r$  a partir de  $p$  aplicando primero  $\sigma_1$  y posteriormente aplicando  $\sigma_2$ .

**| Definición 1.18.** *La relación de equivalencia  $\sim$  recibe el nombre de relación de homotopía.*

**Proposición 1.1.** Todo camino es homotópico a un camino reducido.

Intuitivamente esto lo obtenemos eliminando sucesivamente idas y vueltas hasta llegar a un camino reducido.

**Proposición 1.2.** La concatenación de caminos es compatible con la relación de homotopía. Es decir, si tenemos  $p \sim p'$  y  $q \sim q'$ , entonces tenemos  $pq \sim p'q'$ .

A partir de estos resultados podemos definir los conceptos de grupoide fundamental y grupo fundamental.

**| Definición 1.19.** *Dado un grafo  $\Gamma$ , el conjunto de las clases de homotopía de los caminos en  $\Gamma$  con el producto  $[p] \cdot [q] = [pq]$  se llama grupoide fundamental. Se denota por  $\pi(\Gamma)$ .*

**| Definición 1.20.** *Sea  $\Gamma$  un grafo y  $v$  un vértice de  $\Gamma$ . El grupo fundamental de  $\Gamma$  basado en  $v$  es el conjunto de las clases de homotopía de los lazos en  $\Gamma$  basados en  $v$  con el producto  $[p] \cdot [q] = [pq]$ . Se denota por  $\pi_1(\Gamma, v)$ .*

**| Teorema 1.1.**  $\pi_1(\Gamma, v)$  es un grupo.

Dado un morfismo  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$ , éste determina una función que también denotaremos por el mismo símbolo,

$$f : \pi_1(\Gamma, v) \rightarrow \pi_1(\Delta, f(v))$$

$$[p] \mapsto [f(p)].$$

A continuación damos un par de resultados que nos dan una propiedad importante sobre el grupo fundamental de un grafo conexo, los cuales se han tomado de [7].

**Proposición 1.3.** Sea  $\Gamma$  un grafo conexo,  $u$  y  $v$  dos vértices de  $\Gamma$  y  $\gamma$  un camino con vértice inicial  $u$  y vértice final  $v$ . Entonces  $f_\gamma : \pi_1(\Gamma, v) \rightarrow \pi_1(\Gamma, u)$  definida como  $f_\gamma([p]) = [\gamma p \bar{\gamma}]$  es un isomorfismo.

**Corolario 1.1.** Sea  $\Gamma$  un grafo conexo. Entonces  $\pi_1(\Gamma, v)$  no depende de la elección de  $v$ , salvo isomorfismo.

En este caso, la notación se suele abreviar a  $\pi_1(\Gamma)$ .

La teoría clásica de grupos nos proporciona el siguiente resultado.

**Proposición 1.4.** Sea  $\Gamma$  un grafo con un solo vértice  $v$  y sea  $\mathcal{O}$  una orientación de  $\Gamma$ . Entonces  $\pi_1(\Gamma, v)$  es el grupo libre sobre  $\mathcal{O}$ .

Por último, veamos qué son los árboles y algunas propiedades de estos.

**Definición 1.21.** Un bosque es un grafo en el que todos los lazos reducidos tienen longitud cero.

Un árbol es un bosque conexo.

**Definición 1.22.** Un árbol maximal de un grafo conexo  $\Gamma$  es un subgrafo de  $\Gamma$  tal que es un árbol y contiene todos los vértices de  $\Gamma$ .

**Proposición 1.5.** Si  $u$  y  $v$  son vértices de un árbol  $T$ , entonces existe un único camino reducido en  $T$  que empieza en  $u$  y acaba en  $v$ . Este camino se denota  $[u, v]_T$ .

Finalmente, la proposición 1.4 generaliza a:

**Proposición 1.6.** Sea  $v$  un vértice de un grafo conexo  $\Gamma$  y  $T$  un árbol maximal de  $\Gamma$ . Sea  $\mathcal{O}$  una orientación de  $\Gamma$ . Para cada  $e \in \mathcal{O} - T$  consideramos el lazo en  $v$

$$p_e = [v, i(e)]_T e [\tau(e), v]_T.$$

Entonces  $\pi_1(\Gamma, v)$  es libre sobre  $\mathcal{O} - T$ , siendo la clase de homotopía de  $p_e$  el elemento de  $\pi_1(\Gamma, v)$  correspondiente a  $e$ .

## Comparación con las definiciones topológicas

Para poder comparar las definiciones, primero tenemos que ver un grafo como un espacio topológico. La siguiente definición está tomada de [5].

**Definición 1.23.** La realización geométrica  $B\Gamma$  de un grafo  $\Gamma$  es:

$$B\Gamma = \bigcup_{e \in V(\Gamma) \cup E(\Gamma)} \{e\} \times [0, 1] / \sim,$$

donde  $[0, 1]$  es el intervalo unidad en  $\mathbb{R}$  y  $\sim$  es la relación de equivalencia generada por

1.  $(v, t) \sim (v, 0)$ ,
2.  $(e, 0) \sim (i(e), t)$ ,
3.  $(\bar{e}, t) \sim (e, 1 - t)$ ,

donde  $v \in V(\Gamma)$ ,  $e \in E(\Gamma)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Es fácil comprobar que  $B\Gamma$  es un CW complejo de dimensión uno.

Un camino en el grafo  $\Gamma$  lo podemos ver como un camino en el sentido topológico,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B\Gamma$ . Todo camino en  $\Gamma$  tiene su equivalente en  $B\Gamma$ , pero la mayoría de caminos en  $B\Gamma$  no se pueden expresar como sucesión de aristas. Estos caminos de  $B\Gamma$  son los que empiezan en un vértice pero, en lugar de recorrer la arista completa, vuelven al vértice inicial, o los que recorren una arista pero no de manera directa.

A pesar de esto, todo camino de  $B\Gamma$  es homotópico a uno que sí se puede expresar como sucesión de aristas. Los dos casos mencionados anteriormente son homotópicos al camino constante en el vértice inicial o al camino que recorre la arista de forma directa, respectivamente.

Además, podemos ver que un camino de  $B\Gamma$  que se pueda expresar de la forma  $e\bar{e}$  es homotópico al camino constante en  $i(e)$ . Luego nuestra definición combinatoria de homotopía coincide con la habitual en topología.

Por último, el grupo fundamental que hemos definido es isomorfo al grupo fundamental habitual. El isomorfismo es el siguiente,

$$f : \pi_1(\Gamma, v) \rightarrow \pi_1(B\Gamma, v)$$

$$[p] \mapsto [p']$$

donde  $p' : [0, 1] \rightarrow B\Gamma$  es una parametrización de  $p$ . El isomorfismo está bien definido, pues si dos caminos son homotópicos en  $\Gamma$ , sus parametrizaciones en  $B\Gamma$  también lo son.

Para mayor referencia, se puede consultar [4].

### 1.3 Estrellas

**Definición 1.24.** Sea  $\Gamma$  un grafo y  $v \in V(\Gamma)$ . La estrella de  $v$  en  $\Gamma$  se define como

$$St(v, \Gamma) = \{e \in E(\Gamma) : i(e) = v\}.$$

**Definición 1.25.** La cardinalidad de  $St(v, \Gamma)$  se llama valencia de  $v$  en  $\Gamma$ .

Todo morfismo de grafos  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  induce en cada vértice  $v$  de  $\Gamma$  una función

$$f_v : St(v, \Gamma) \rightarrow St(f(v), \Delta).$$

definida como la restricción de  $f$  a  $St(v, \Gamma)$ . Según cómo se comporte  $f_v$  para cada vértice  $v$  de  $\Gamma$ , el morfismo  $f$  recibe varios nombres.

**Definición 1.26.** Si para cada vértice  $v$  de  $\Gamma$ ,  $f_v$  es inyectiva, entonces  $f$  recibe el nombre de *inmersión*.

Si para cada vértice  $v$  de  $\Gamma$ ,  $f_v$  es sobreyectiva, entonces  $f$  recibe el nombre de *localmente sobreyectiva*.

Si para cada vértice  $v$  de  $\Gamma$ ,  $f_v$  es biyectiva, entonces  $f$  recibe el nombre de *recubrimiento*.

### Plegamientos

**Definición 1.27.** Dos aristas  $e_1$  y  $e_2$  de un grafo  $\Gamma$  son admisibles si  $i(e_1) = i(e_2)$  y  $e_1 \neq \bar{e}_2$ .

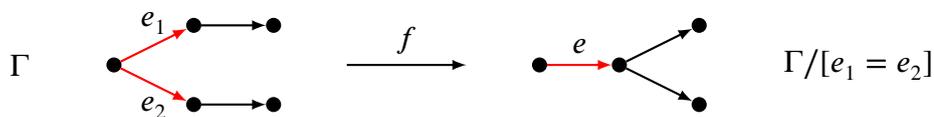
Si tenemos dos aristas admisibles,  $e_1$  y  $e_2$ , podemos identificar  $\tau(e_1)$  con  $\tau(e_2)$ ,  $e_1$  con  $e_2$  y  $\bar{e}_1$  con  $\bar{e}_2$ , obteniendo un grafo denotado  $\Gamma/[e_1 = e_2]$ .

**Definición 1.28.** El morfismo  $f : \Gamma \rightarrow \Gamma/[e_1 = e_2]$  que realiza el procedimiento anterior recibe el nombre de *plegamiento*.

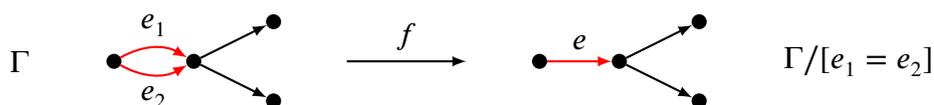
El grafo  $\Gamma/[e_1 = e_2]$  lo llamamos el resultado de plegar  $e_1$  y  $e_2$  en  $\Gamma$ .

Si las aristas  $e_1$  y  $e_2$  son iguales, entonces el plegamiento es la identidad. Si las aristas son distintas, podemos distinguir dos tipos, según si los vértices finales son distintos o iguales. A continuación damos ejemplos de estos dos últimos.

**Ejemplo 1.4.** Plegamiento donde  $e_1 \neq e_2$  y  $\tau(e_1) \neq \tau(e_2)$ .

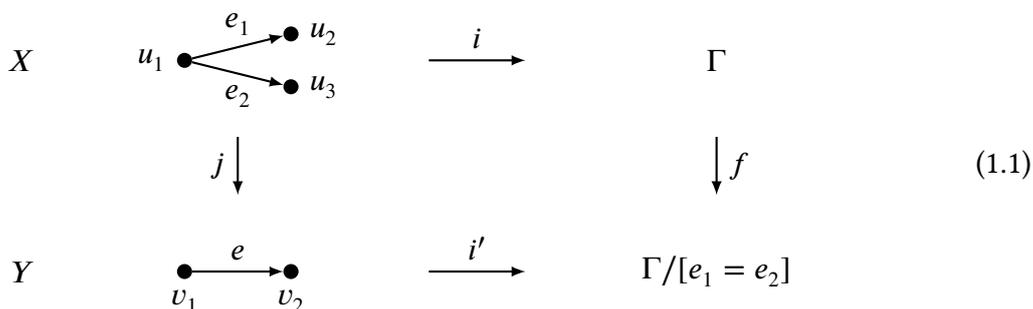


**Ejemplo 1.5.** Plegamiento donde  $e_1 \neq e_2$  y  $\tau(e_1) = \tau(e_2)$ .

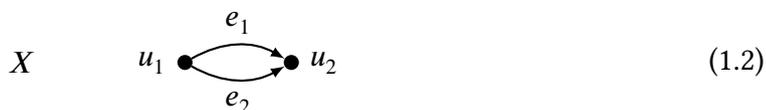


En el capítulo siguiente veremos el efecto que produce un plegamiento al pasar al grupo fundamental (ver corolario 2.1).

**Observación 1.3.** Un plegamiento lo podemos representar mediante un pushout. El siguiente diagrama muestra el caso  $e_1 \neq e_2$  y  $\tau(e_1) \neq \tau(e_2)$ .



Si tenemos el caso  $e_1 \neq e_2$  y  $\tau(e_1) = \tau(e_2)$  entonces en el diagrama 1.1 hay que sustituir  $X$  por el siguiente grafo.



Por último, para el caso  $e_1 = e_2$  se toma  $X = Y$ .

**Proposición 1.7.** Sea  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  un morfismo de grafos y sean  $e_1, e_2 \in E(\Gamma)$  tales que  $\iota(e_1) = \iota(e_2)$  y  $f(e_1) = f(e_2)$ . Entonces  $e_1$  y  $e_2$  son un par de aristas admisibles.

**Demostración.** Tenemos que ver que  $\iota(e_1) = \iota(e_2)$  y  $e_1 \neq \overline{e_2}$ . Lo primero ya lo tenemos. Lo segundo lo demostramos por reducción al absurdo.

Supongamos que  $e_1 = \overline{e_2}$ . Entonces  $f(e_1) = f(\overline{e_2})$ , y por ser  $f$  un morfismo,  $f(e_1) = \underline{f(\overline{e_2})} = f(e_2)$ . Por otra parte, tenemos que  $f(e_1) = f(e_2)$ , luego obtenemos  $f(e_2) = f(e_2)$ . Esto viola nuestra definición de grafo, luego tenemos que  $e_1 \neq \overline{e_2}$ . **|**

**Observación 1.4.** En las condiciones de la proposición 1.7 se dice que el morfismo  $f$  pliega las aristas  $e_1$  y  $e_2$ . En este caso,  $f$  lo podemos factorizar como

$$\Gamma \rightarrow \Gamma/[e_1 = e_2] \rightarrow \Delta,$$

donde  $\Gamma \rightarrow \Gamma/[e_1 = e_2]$  es un plegamiento.

**Proposición 1.8.** Sea un morfismo  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  tal que  $f$  no es una inmersión. Entonces  $f$  pliega al menos dos aristas distintas de  $\Gamma$ .

**Demostración.** Por definición, como  $f$  no es inmersión, entonces existe un vértice  $v$  de  $\Gamma$  tal que la función  $f_v : St(v, \Gamma) \rightarrow St(f(v), \Delta)$  no es inyectiva. Luego en  $\Gamma$  deben existir dos aristas  $a$  y  $b$  distintas que tienen como vértice inicial  $v$  y tales que  $f(a) = f(b)$ . Luego,  $f$  pliega las aristas  $a$  y  $b$ . **|**

Aplicando la proposición 1.8 y la observación 1.4 obtenemos el siguiente teorema.

**| Teorema 1.2.** Sea  $\Gamma$  es un grafo finito y  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  un morfismo de grafos. Entonces podemos encontrar una sucesión finita de plegamientos,  $\Gamma \rightarrow \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \dots \rightarrow \Gamma_n$ , y una inmersión,  $\Gamma_n \rightarrow \Delta$ , tal que la composición de la inmersión con los plegamientos nos da el morfismo  $f$ .

**Observación 1.5.** La secuencia de plegamientos no es única. Por ejemplo, podemos cambiar el orden en el que los realizamos.

## 2 | Recubrimientos

En este capítulo desarrollaremos la sección 4 de [11]. A partir de ahora, salvo que se diga lo contrario, todos los grafos que usemos en este trabajo son conexos.

Recordemos la definición de recubrimiento. Un morfismo  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  es un recubrimiento si, para cada vértice  $v$  de  $\Gamma$ , la función  $f_v : St(v, \Gamma) \rightarrow St(f(v), \Delta)$  que induce es biyectiva.

Podemos ver que si  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  es un recubrimiento y  $\Delta$  es conexo, entonces  $f$  es sobreyectivo. Para ello, supongamos que no fuese sobreyectivo. Entonces sean  $u, v$  vértices de  $\Delta$  tales que  $u$  tenga preimagen y  $v$  no. Como  $\Delta$  es conexo, existe un camino que une  $u$  y  $v$ . En ese camino, existen dos vértices,  $w_1$  y  $w_2$ , unidos por una arista  $e$  con  $i(e) = w_1$  y tales que  $w_1$  tiene preimagen y  $w_2$  no. Sea  $w'_1$  una de las preimágenes de  $w_1$ . Por ser  $f$  un recubrimiento, existe una arista  $e'$  de la estrella de  $w'_1$  tal que  $f(e') = e$ , y, por tanto,  $\tau(e')$  tiene imagen y es  $f(\tau(e')) = w_2$ . Llegamos a contradicción pues  $w_2$  no tenía preimagen.

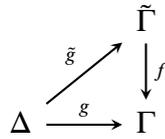
Se comprueba que nuestra definición de recubrimiento coincide con la definición topológica habitual. Dado el recubrimiento  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  con  $\Delta$  conexo, este induce una función en las realizaciones geométricas  $f : B\Gamma \rightarrow B\Delta$ . Igual ocurre con las  $f_v$ . Como  $f$  es sobreyectiva y cada  $f_v$  es biyectiva, tenemos que para todo punto  $x \in B\Delta$  tiene un entorno abierto  $U$  en  $B\Delta$  tal que  $f^{-1}(U)$  es una unión disjunta de conjuntos abiertos en  $B\Gamma$ , cada uno de los cuales es homeomorfo a  $U$  por  $f$ . Esta es la definición habitual de recubrimiento.

Veamos algunos resultados sobre recubrimientos. No damos demostración de ellos pues derivan de la teoría general sobre espacios recubridores en el sentido topológico habitual, la cual se ha consultado en [7] y [9].

**Proposición 2.1 (elevación de caminos).** Sea  $f : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  un recubrimiento,  $\tilde{v}$  un vértice de  $\tilde{\Gamma}$  y  $p$  un camino en  $\Gamma$  con vértice inicial  $v = f(\tilde{v})$ . Entonces existe un único camino  $\tilde{p}$  en  $\tilde{\Gamma}$  con vértice inicial  $\tilde{v}$  tal que  $f(\tilde{p}) = p$ .

**Proposición 2.2 (elevación de homotopías).** En la proposición 2.1, si  $p$  es una ida y vuelta, entonces  $\tilde{p}$  es una ida y vuelta. Por tanto, si  $p \sim q$ , entonces  $\tilde{p} \sim \tilde{q}$ .

**Proposición 2.3 (elevación general).** Sea  $f : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  un recubrimiento y  $g : \Delta \rightarrow \Gamma$  un morfismo de grafos, con  $\Delta$  conexo. Sea también  $v$  un vértice de  $\Delta$  y  $\tilde{u}$  un vértice de  $\tilde{\Gamma}$  tal que  $g(v) = f(\tilde{u})$ . Entonces existe  $\tilde{g} : \Delta \rightarrow \tilde{\Gamma}$  tal que  $\tilde{g}(v) = \tilde{u}$  y  $f \circ \tilde{g} = g$  si y solo si  $g(\pi_1(\Delta, v)) \subset f(\pi_1(\tilde{\Gamma}, \tilde{u}))$ . Además, si  $\tilde{g}$  existe, es única.



El morfismo  $\tilde{g}$  recibe el nombre de elevación de  $g$  (con respecto al recubrimiento  $f : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ ).

**Proposición 2.4.** Sea  $f : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  un recubrimiento y  $\tilde{u}$  un vértice de  $\tilde{\Gamma}$ . Entonces

$$f : \pi_1(\tilde{\Gamma}, \tilde{u}) \rightarrow \pi_1(\Gamma, f(\tilde{u}))$$

es inyectiva.

**Proposición 2.5 (existencia de recubrimientos).** Sea  $\Gamma$  un grafo conexo,  $u$  un vértice de  $\Gamma$  y  $S \subset \pi_1(\Gamma, u)$  un subgrupo. Entonces existe un recubrimiento  $f : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  donde  $\tilde{\Gamma}$  es conexo y tiene un vértice  $\tilde{u}$  tal que  $f(\tilde{u}) = u$  y  $f(\pi_1(\tilde{\Gamma}, \tilde{u})) = S$ . Además, cualesquiera dos de estos recubrimientos son isomorfos. El índice de  $S$  en  $\pi_1(\Gamma, u)$  es la cardinalidad de  $f^{-1}(u)$ .

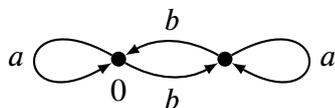
**Observación 2.1.** Recordemos de teoría de grupos que el índice de un subgrupo  $H$  en un grupo  $G$  es el número de clases laterales de  $H$  en  $G$ .

**Ejemplo 2.1.** Consideremos el siguiente grafo.



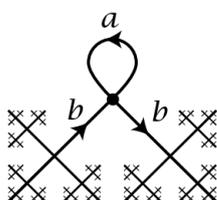
Su grupo fundamental es el grupo libre de dos generadores.  $\pi_1(\Delta, v) = F_2 = \langle a, b \rangle$ .

El siguiente grafo  $\Gamma_1$  es un recubridor de  $\Delta$ . El recubrimiento  $f_1 : \Gamma_1 \rightarrow \Delta$  está definido según las etiquetas de las aristas.



Tomando como vértice base el vértice 0, podemos ver que el subgrupo de  $F_2$  que representa es  $H = \langle a, b^2, bab^{-1} \rangle$ . Además, como la cardinalidad de  $f_1^{-1}(v)$  es 2, tenemos que el índice de  $H$  en  $F_2$  es 2.

El siguiente grafo  $\Gamma_2$  es otro recubridor de  $\Delta$ .



Tomando como vértice base el vértice marcado, podemos ver que el subgrupo de  $F_2$  que representa es  $K = \langle a \rangle$ . En este caso, el índice de  $K$  en  $F_2$  es infinito.

Para poder continuar necesitamos ver el concepto de acciones de grupos, tomado de [3].

**Definición 2.1.** Sea  $G$  un grupo con elemento neutro  $e$  y sea  $A$  un conjunto. Una acción de grupo por la izquierda del grupo  $G$  en el conjunto  $A$  es una aplicación  $G \times A \rightarrow A$  (escrito como  $ga$  para todo  $g \in G$  y  $a \in A$ ) que satisface las siguientes propiedades:

1.  $g_1(g_2a) = (g_1g_2)a$ , para todo  $g_1, g_2 \in G$ ,  $a \in A$ .
2.  $ea = a$ , para todo  $a \in A$ .

De manera similar, una acción de grupo por la derecha es una aplicación  $A \times G \rightarrow A$  que satisface las siguientes propiedades:

1.  $(ag_1)g_2 = a(g_1g_2)$ , para todo  $g_1, g_2 \in G$ ,  $a \in A$ .
2.  $ae = a$ , para todo  $a \in A$ .

Intuitivamente, una acción del grupo  $G$  en  $A$  significa que cada elemento de  $G$  actúa como una permutación en  $A$  de una forma consistente con las operaciones de grupo de  $G$ .

Una vez definido qué es una acción de grupo, veamos cómo puede actuar un grupo sobre un grafo.

**Definición 2.2.** Sea  $G$  un grupo. Un  $G$ -grafo  $\Gamma$  es un grafo junto a una acción por la izquierda de  $G$  en  $\Gamma$  mediante morfismos de grafos, tal que  $ge \neq \bar{e}$  para todo  $g \in G$  y para toda arista  $e$  de  $\Gamma$ .

El hecho de que  $G$  actúe mediante morfismos de grafos implica que  $g\iota(e) = \iota(ge)$  y  $g\bar{e} = \overline{ge}$ , para todo  $g \in G$  y para toda arista  $e$  de  $\Gamma$ . Es decir, todo  $g \in G$  induce un morfismo  $\Gamma \rightarrow \Gamma$ .

En este caso, dado un grupo  $G$  y un  $G$ -grafo  $\Gamma = (V, E)$ , podemos construir un nuevo grafo, al cual denotaremos como  $\Gamma/G$  y llamaremos grafo cociente.

- Su conjunto de vértices se define como  $\tilde{V} = V / \sim$ , donde  $v \sim gv, \forall g \in G, v \in V$ .
- Su conjunto de aristas se define como  $\tilde{E} = E / \sim$ , donde  $e \sim ge, \forall g \in G, e \in E$ .
- Su función vértice inicial  $\iota : \tilde{E} \rightarrow \tilde{V}$  se define como  $\iota([e]) = [\iota(e)]$ , con  $e \in E$ .
- Su función arista inversa  $\bar{\phantom{e}} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}$  se define como  $\overline{[e]} = [\bar{e}]$ , con  $e \in E$ .

La función  $\iota$  está bien definida. Sean dos aristas  $e$  y  $e'$  tales que  $[e] = [e']$ . Entonces existe  $g \in G$  tal que  $e' = ge$ . Luego

$$\iota(e') = \iota(ge) = g\iota(e)$$

y por tanto  $[\iota(e)] = [\iota(e')]$ . Análogamente podemos comprobar que la función  $\bar{\phantom{e}}$  también está bien definida.

Por último, podemos ver que  $\Gamma/G$  es un grafo según nuestra definición. Por ser  $\Gamma$  un grafo tenemos que  $\bar{\bar{e}} = e$ , luego  $\overline{[\bar{e}]} = [\bar{\bar{e}}] = [e]$ . Además, como  $\bar{e} \neq e$  y en la definición 2.2 hemos impuesto que  $ge \neq \bar{e}$ , obtenemos  $\overline{[e]} = [\bar{e}] \neq [e]$ .

También podemos definir un morfismo  $f_G : \Gamma \rightarrow \Gamma/G$  como  $f_G(e) = [e]$  y  $f_G(v) = [v]$ , donde  $e \in E(\Gamma)$  y  $v \in V(\Gamma)$ .

**Proposición 2.6.** El morfismo  $f_G : \Gamma \rightarrow \Gamma/G$  es localmente sobreyectivo.

**Demostración.** Sea  $v$  un vértice de  $\Gamma$ . Hay que ver que  $f_v : St(v, \Gamma) \rightarrow St([v], \Gamma/G)$  es sobreyectiva. Para ello, sea  $[e]$  una arista de  $St([v], \Gamma/G)$ .

Por definición de estrella, tenemos que  $[v] = \iota([e]) = [\iota(e)]$ . Como  $v$  y  $\iota(e)$  pertenecen a la misma clase, tenemos que existe un  $g \in G$  tal que  $v = g\iota(e) = \iota(ge)$ . Luego la arista  $ge$  pertenece a  $St(v, \Gamma)$  y se tiene que  $f_v(ge) = [e]$ , por lo que  $f_v$  es sobreyectiva. |

**Definición 2.3.** Decimos que un grupo  $G$  actúa libremente sobre  $\Gamma$  si cada vez que se tenga que  $gv = v$ , con  $g \in G$  y  $v$  vértice de  $\Gamma$ , entonces  $g$  es el elemento identidad de  $G$  (denotado  $g = 1$ ).

**Proposición 2.7.** Si  $G$  actúa libremente sobre  $\Gamma$  entonces  $f_G : \Gamma \rightarrow \Gamma/G$  es un recubrimiento.

**Demostración.** Por la proposición 2.6 tenemos que es localmente sobreyectivo. Queda probar que es una inmersión.

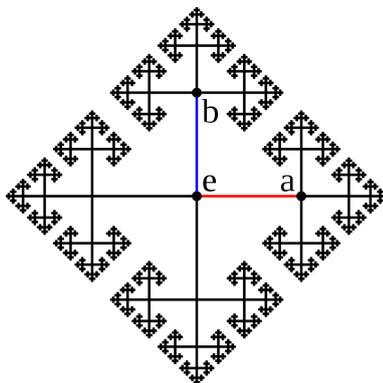
Sea  $v$  un vértice de  $\Gamma$ . Veamos que  $f_v : St(v, \Gamma) \rightarrow St([v], \Gamma/G)$  es inyectiva. Para ello, sean  $e_1$  y  $e_2$  dos aristas de  $St(v, \Gamma)$  tales que  $[e_1] = [e_2]$  en  $St([v], \Gamma/G)$ . Por definición, existe un  $g \in G$  tal que  $e_1 = ge_2$ , luego

$$e_1 = ge_2 \Rightarrow \iota(e_1) = \iota(ge_2) = g\iota(e_2) \Rightarrow v = gv.$$

Como  $G$  actúa libremente en  $\Gamma$ , obtenemos que  $g = 1$  y por tanto  $e_1 = e_2$ . Luego  $f_v$  es inyectiva para cualquier  $v$  y por tanto  $f_G$  es una inmersión. |

**Definición 2.4.** El recubrimiento universal  $f : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  de un grafo conexo  $\Gamma$  es un recubrimiento donde  $\tilde{\Gamma}$  es conexo y  $\pi_1(\tilde{\Gamma})$  trivial.

**Ejemplo 2.2.** El recubrimiento universal del grafo de un vértice y dos aristas,  $a$  y  $b$ , es el siguiente.



Veamos un último resultado relacionado con las acciones de grupo. Para ello, dado un recubrimiento  $f : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ , hacemos que  $\pi_1(\Gamma, v)$  opere a la derecha del conjunto  $f^{-1}(v)$ . Esto se puede consultar con más detalle en [9], capítulo V, sección §7.

**| Definición 2.5.** Sean  $f : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  un recubrimiento y  $v$  un vértice de  $\Gamma$ . Para cada vértice  $\tilde{v} \in f^{-1}(v)$  y elemento  $\alpha \in \pi_1(\Gamma, v)$ , definimos  $\tilde{v}\alpha \in f^{-1}(v)$  de la siguiente forma. Por las proposiciones 2.1 y 2.2, existe una única clase de caminos  $\tilde{\alpha}$  en  $\tilde{\Gamma}$  tal que  $f(\tilde{\alpha}) = \alpha$  y que el vértice inicial de  $\tilde{\alpha}$  es  $\tilde{v}$ . Definimos  $\tilde{v}\alpha$  como el vértice final de la clase de caminos  $\tilde{\alpha}$ .

Estas son las condiciones necesarias para que  $\pi_1(\Gamma, v)$  sea un grupo de operadores a la derecha de  $f^{-1}(v)$ . Además,  $\pi_1(\Gamma, v)$  opera de forma transitiva sobre  $f^{-1}(v)$ . Es decir, para cualesquiera dos vértices de  $\tilde{u}, \tilde{v} \in f^{-1}(v)$ , existe un elemento  $\alpha \in \pi_1(\Gamma, v)$  tal que  $\tilde{u}\alpha = \tilde{v}$ .

**Proposición 2.8.** En las condiciones anteriores, dado  $\tilde{v} \in f^{-1}(v)$ , el subgrupo de  $\pi_1(\Gamma, v)$  que deja invariante el punto  $\tilde{v}$  mediante la acción anterior es  $f(\pi_1(\tilde{\Gamma}, \tilde{v}))$ . (Y a ese subgrupo se le llama subgrupo de isotropía de  $\tilde{v}$ .)

Por tanto, si  $\tilde{\Gamma}$  es conexo,  $f^{-1}(v)$  es isomorfo como  $\pi_1(\Gamma, v)$ -espacio al espacio de las clases laterales,  $\pi_1(\Gamma, v)/f(\pi_1(\tilde{\Gamma}, \tilde{v}))$ .

Para acabar este capítulo, veamos la definición del join de dos subgrupos y cómo podemos relacionarlos con los pushouts y los grupos fundamentales.

**| Definición 2.6.** Sean  $A$  y  $B$  subgrupos de un grupo  $G$ . Se define el join de  $A$  y  $B$ ,  $A \vee B$ , como el subgrupo generado por  $A \cup B$ .

**| Teorema 2.1 (Representación del join mediante pushout).** Sea

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\alpha_1} & \Delta_1 \\ \alpha_2 \downarrow & & \downarrow \beta_1 \\ \Delta_2 & \xrightarrow{\beta_2} & \Theta \end{array}$$

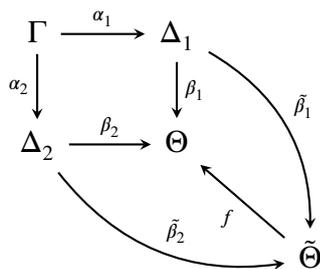
el diagrama de un pushout, donde  $\Gamma, \Delta_1$  y  $\Delta_2$  son conexos. Sea  $u$  un vértice de  $\Gamma$  y sean  $v_1, v_2$  y  $w$  las imágenes de  $u$  en  $\Delta_1, \Delta_2$  y  $\Theta$ , respectivamente. Entonces

$$\pi_1(\Theta, w) = \beta_1(\pi_1(\Delta_1, v_1)) \vee \beta_2(\pi_1(\Delta_2, v_2)) \tag{2.1}$$

**Demostración.** Definimos  $S = \beta_1(\pi_1(\Delta_1, v_1)) \vee \beta_2(\pi_1(\Delta_2, v_2))$ , el lado derecho de 2.1. Tenemos que  $S \subset \pi_1(\Theta, w)$ . Además, como  $\Gamma$  no es el grafo vacío y  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$

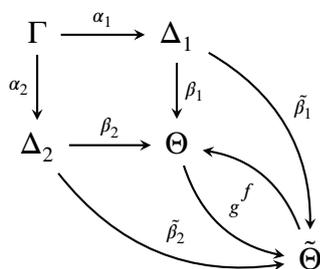
son conexos,  $\Theta$  también lo es. Luego, por la proposición 2.5, existe un recubrimiento  $f : \tilde{\Theta} \rightarrow \Theta$ , donde  $\tilde{\Theta}$  es conexo y con un vértice  $\tilde{w} \in V(\tilde{\Theta})$  tal que  $f(\tilde{w}) = w$  y  $f(\pi_1(\tilde{\Theta}, \tilde{w})) = S$ .

Aplicando la proposición 2.3 a  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , como  $\beta_i(\pi_1(\Delta_i, v_i)) \subset f(\pi_1(\tilde{\Theta}, \tilde{w})) = S$  para  $i = 1, 2$ , existen dos funciones  $\tilde{\beta}_1 : \Delta_1 \rightarrow \tilde{\Theta}$  y  $\tilde{\beta}_2 : \Delta_2 \rightarrow \tilde{\Theta}$  tales que  $\tilde{\beta}_1(v_1) = \tilde{\beta}_2(v_2) = \tilde{w}$ ,  $f \circ \tilde{\beta}_1 = \beta_1$  y  $f \circ \tilde{\beta}_2 = \beta_2$ .



Luego  $\tilde{\beta}_1 \circ \alpha_1$  y  $\tilde{\beta}_2 \circ \alpha_2 : \Gamma \rightarrow \tilde{\Theta}$  son elevaciones de  $\beta_1 \circ \alpha_1 = \beta_2 \circ \alpha_2$ . Por la unicidad de 2.3,  $\tilde{\beta}_1 \circ \alpha_1 = \tilde{\beta}_2 \circ \alpha_2$ .

Como es un diagrama de un pushout, existe un morfismo  $g : \Theta \rightarrow \tilde{\Theta}$  que hace que el diagrama conmute.



Luego tenemos  $f \circ g = id_{\Theta}$ . Esto produce el siguiente diagrama.

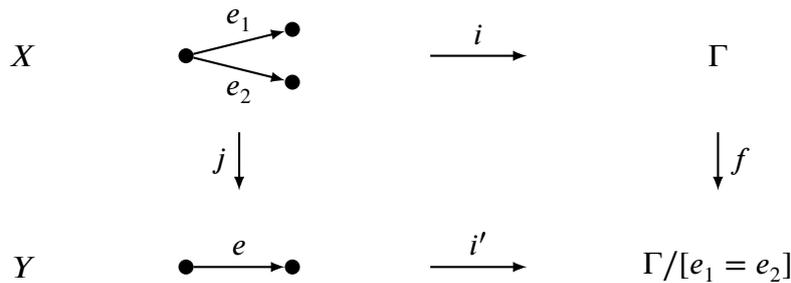
$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\Theta, w) & \xrightarrow{g} & \pi_1(\tilde{\Theta}, \tilde{w}) \\ \downarrow id & \swarrow f & \\ \pi_1(\Theta, w) & & \end{array}$$

Por tanto,  $f : \pi_1(\tilde{\Theta}, \tilde{w}) \rightarrow \pi_1(\Theta, w)$  es sobreyectiva. Es más, por la proposición 2.4, tenemos que es un isomorfismo. Luego

$$\pi_1(\Theta, w) = f(\pi_1(\tilde{\Theta}, \tilde{w})) = S = \beta_1(\pi_1(\Delta_1, v_1)) \vee \beta_2(\pi_1(\Delta_2, v_2)). \quad \color{red}{\blacksquare}$$

**Corolario 2.1.** Si  $e_1$  y  $e_2$  son un par de aristas admisibles de un grafo conexo  $\Gamma$ , entonces el plegamiento  $\Gamma \rightarrow \Gamma/[e_1 = e_2]$  induce un homomorfismo sobreyectivo entre los grupos fundamentales.

**Demostración.** El plegamiento  $f : \Gamma \rightarrow \Gamma/[e_1 = e_2]$  lo podemos representar mediante el siguiente diagrama pushout (observación 1.3).



Hemos representado el caso  $e_1 \neq e_2$  y  $\tau(e_1) \neq \tau(e_2)$ . Para los otros casos la demostración es análoga.

En el diagrama, los grafos  $X$ ,  $Y$  y  $\Gamma$  son conexos, luego aplicamos el teorema 2.1 y obtenemos

$$\pi_1(\Gamma/[e_1 = e_2]) = f(\pi_1(\Gamma)) \vee i'(\pi_1(Y)).$$

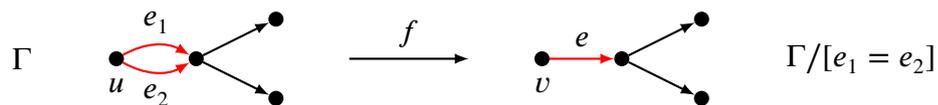
Como  $Y$  tiene grupo fundamental trivial, tenemos que  $i'(\pi_1(Y))$  es también trivial, por lo que queda

$$\pi_1(\Gamma/[e_1 = e_2]) = f(\pi_1(\Gamma)).$$

Es decir,  $f$  es sobreyectivo entre los grupos fundamentales. |

**Observación 2.2.** Se puede comprobar que si  $e_1 = e_2$  o  $\tau(e_1) \neq \tau(e_2)$ , entonces el plegamiento induce un isomorfismo. Si  $e_1 \neq e_2$  y  $\tau(e_1) = \tau(e_2)$ , entonces al hacer el plegamiento se elimina uno de los generadores del grupo fundamental.

En el siguiente ejemplo podemos ver como el generador  $[e_1 \bar{e}_2]$  de  $\pi_1(\Gamma, u)$  desaparece, pues  $f([e_1 \bar{e}_2]) = [e \bar{e}] = [\Lambda_v]$ .



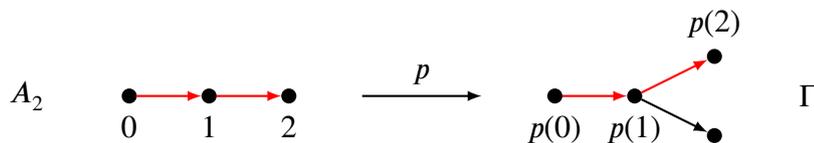
### 3 | Inmersiones. Teorema de Howson

En este capítulo nos centraremos en la sección 5 de [11]. Las inmersiones tienen algunas de las propiedades de los recubrimientos y representan subgrupos de un grupo dado más eficientemente que estos últimos.

Recordemos la definición. Un morfismo  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  es una inmersión si para cada vértice  $v$  de  $\Gamma$  la función inducida  $f_v : St(v, \Gamma) \rightarrow St(f(v), \Delta)$  es inyectiva.

Un camino reducido  $p$  de longitud  $n$  en  $\Gamma$  lo podemos ver como una inmersión  $A_n \rightarrow \Gamma$ , donde  $A_n$  es el grafo correspondiente al intervalo  $[0, n]$  subdividido en los enteros.

*Ejemplo 3.1 (Camino reducido  $p$  como inmersión).*



A continuación damos algunas propiedades de las inmersiones.

**Proposición 3.1 (Composición de inmersiones es inmersión).** Sean  $f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ ,  $g : \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_3$  inmersiones. Entonces  $g \circ f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_3$  es una inmersión.

**Demostración.** Sea  $v$  un vértice de  $\Gamma_1$ . Tenemos que ver que

$$(g \circ f)_v = g_v \circ f_v : St(v, \Gamma_1) \rightarrow St(g(f(v)), \Gamma_3)$$

es inyectiva. Como  $f$  y  $g$  son inmersiones,  $f_v$  y  $g_v$  son inyectivas. Luego  $(g \circ f)_v$  es inyectiva por ser composición de inyectivas y por tanto  $g \circ f$  es una inmersión. |

**Proposición 3.2 (Preservación de caminos reducidos).** Sea  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  una inmersión de grafos y sea  $p$  un camino reducido en  $\Gamma$ . Entonces  $f(p)$  es un camino reducido en  $\Delta$ .

**Demostración.** Si el camino reducido  $p$  lo vemos como una inmersión,  $p : A_n \rightarrow \Gamma$ , entonces  $f(p)$  es la composición de dos inmersiones,  $f \circ p : A_n \rightarrow \Delta$ . Por la proposición 3.1,  $f(p) = f \circ p$  es una inmersión y por tanto un camino reducido.  $\blacksquare$

**Proposición 3.3 (Unicidad de elevaciones de caminos).** Sea  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  una inmersión y sean  $p, q$  dos caminos en  $\Gamma$  tales que tienen el mismo vértice inicial y se cumple que  $f(p) = f(q)$ . Entonces  $p = q$ .

**Demostración.** Se demuestra por inducción en  $|p|$ . Notemos que  $f(p) = f(q)$  implica  $|p| = |q|$ . El caso  $|p| = 0$  lo tenemos pues los vértices iniciales coinciden. Supongamos que  $p = a_1 \dots a_{n-1} a_n$  y  $q = b_1 \dots b_{n-1} b_n$  y se cumple que  $a_i = b_i$  para  $i = 1 \dots n-1$ . Como  $a_{n-1} = b_{n-1}$  tenemos que  $\tau(a_{n-1}) = \tau(b_{n-1})$  y por tanto  $\iota(a_n) = \iota(b_n)$ . Llamemos  $v = \iota(a_n)$ . Tenemos que  $a_n$  y  $b_n$  pertenecen a  $St(v, \Gamma)$ . Por otra parte, como  $f(p) = f(q)$  tenemos que  $f(a_n) = f(b_n)$ . Luego, usando que  $f_v$  es inyectiva por ser  $f$  una inmersión obtenemos que  $a_n = b_n$  y por tanto  $p = q$ .  $\blacksquare$

**Proposición 3.4 (Unicidad de elevaciones en general).** Sea  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  una inmersión,  $\Theta$  un grafo conexo,  $g_1, g_2 : \Theta \rightarrow \Gamma$  dos morfismos tales que  $f \circ g_1 = f \circ g_2$  y  $v$  un vértice de  $\Theta$  tal que  $g_1(v) = g_2(v)$ . Entonces  $g_1 = g_2$ .

**Demostración.** Probemos primero que  $g_1(u) = g_2(u)$  para todo vértice  $u$  de  $\Theta$ . Sea  $u$  un vértice de  $\Theta$ . Como  $\Theta$  es conexo, existe un camino  $p$  en  $\Theta$  que empieza en  $v$  y acaba en  $u$ . Luego  $g_1(p)$  es un camino en  $\Gamma$  con vértice inicial  $g_1(v)$  y vértice final  $g_1(u)$  y  $g_2(p)$  es un camino en  $\Gamma$  con vértice inicial  $g_2(v)$  y vértice final  $g_2(u)$ . Tenemos que  $f(g_1(p)) = f(g_2(p))$  y  $g_1(v) = g_2(v)$ , luego aplicando la proposición 3.3 tenemos que  $g_1(p) = g_2(p)$  y por tanto  $g_1(u) = g_2(u)$ . Además, como  $u$  es cualquier vértice, también tenemos que  $g_1(e) = g_2(e)$  para toda arista  $e$  de  $\Theta$ , pues al ser  $\Theta$  conexo, dada una arista cualquiera de  $\Theta$  existe un camino que empiece en  $v$  y pase por esa arista.  $\blacksquare$

**Proposición 3.5 (Unicidad de caminos reducidos).** Sea  $\Gamma$  un grafo. Si  $p$  y  $q$  son caminos reducidos y homotópicos en  $\Gamma$ , entonces  $p = q$ .

**Demostración.** Sea  $\Delta$  el grafo resultado de identificar todos los vértices de  $\Gamma$  en un vértice. Tenemos que el morfismo identificación  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  es biyectivo en las aristas, y, por tanto, es una inmersión. Como  $p \sim q$ , tenemos que  $f(p) \sim f(q)$ . Además, como  $p$  y  $q$  son reducidos, aplicando la proposición 3.2, obtenemos que  $f(p)$  y  $f(q)$  son reducidos.

El grafo  $\Delta$  tiene un solo vértice, por lo que su grupo fundamental es el grupo libre

sobre una orientación de este. La teoría de los grupos libres nos dice que por cada clase existe una única palabra reducida. Aplicando esto a grafos obtenemos que cada clase de homotopía tiene como representante un único camino reducido. Por tanto,  $f(p) = f(q)$ .

Además,  $p \sim q$  implica que  $p$  y  $q$  tienen el mismo vértice inicial. Luego, usando la proposición 3.3, tenemos que  $p = q$ . |

**Proposición 3.6 (Inyectividad de  $\pi_1$ ).** Sea  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  una inmersión y  $v$  un vértice de  $\Gamma$ . Entonces

$$f : \pi_1(\Gamma, v) \rightarrow \pi_1(\Delta, f(v))$$

es inyectiva.

**Demostración.** Sea  $\alpha$  un elemento de  $\pi_1(\Gamma, v)$  tal que  $\alpha \neq 1$ . Entonces  $\alpha$  lo podemos representar como un lazo  $p$  basado en  $v$ , con  $p$  reducido y  $|p| \geq 1$ . Por la proposición 3.2,  $f(p)$  es reducido. Como  $|f(p)| = |p| \geq 1$ , por la proposición 3.5 tenemos que  $f(p)$  no es homotópico a un camino de longitud 0, luego  $f(\alpha) \neq 1$  y por tanto  $f$  es inyectiva. |

**Algoritmo 3.1 (Subgrupos finitamente generados).** Dado un conjunto finito de elementos  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \pi_1(\Delta, u)$ , existe un algoritmo que representa el subgrupo  $S$  de  $\pi_1(\Delta, u)$  generado por  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , mediante una inmersión  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$ , de la siguiente forma:

Representamos  $\alpha_i$  por un lazo  $p_i$  basado en  $u$ . Sea  $\Gamma_1$  el grafo formado por  $n$  circunferencias unidos por un vértice  $v$ , donde la circunferencia  $i$ -ésima está subdividido en  $|p_i|$  segmentos, y  $f_1 : \Gamma_1 \rightarrow \Delta$  el morfismo que lleva la circunferencia  $i$ -ésima a  $p_i$ .

Tenemos que  $f_1(\pi_1(\Gamma_1, v)) = S$ . Por el teorema 1.2 podemos factorizar  $f_1$  mediante una serie de plegamientos y una inmersión:

$$\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_k \xrightarrow{f_k} \Delta,$$

donde  $f_k$  es la inmersión.

Por el corolario 2.1, cada plegamiento es sobreyectivo sobre  $\pi_1$ . Por tanto, si llamamos  $w$  a la imagen de  $v$  en  $\Gamma_k$ , tenemos que

$$f_k(\pi_1(\Gamma_k, w)) = S.$$

Luego  $f_k$  es la inmersión deseada.

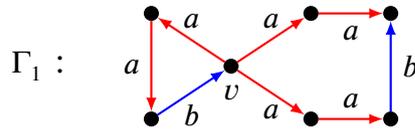
Por último, eligiendo un árbol maximal en  $\Gamma_k$ , podemos encontrar una base libre de  $\pi_1(\Gamma_k, w)$  (proposición 1.6), la cual, por la proposición 3.6, nos da una base libre de  $S$ .

A continuación damos un ejemplo de aplicación de este algoritmo.

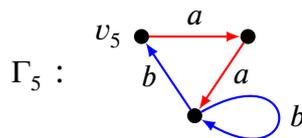
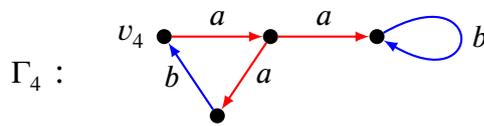
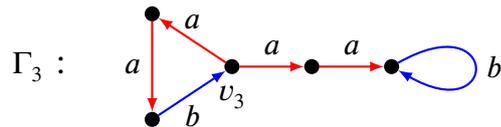
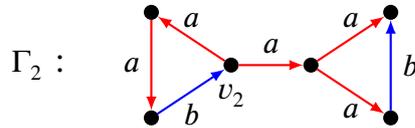
*Ejemplo 3.2.* Consideremos el siguiente grafo.

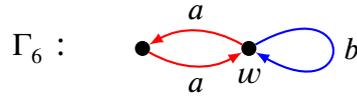


Su grupo fundamental es el grupo libre de dos generadores.  $\pi_1(\Delta, u)$  está generado por  $\{a, b\}$ . Sea  $S$  el subgrupo de  $\pi_1(\Delta, u)$  generado por  $\{a^2b, a^2b^{-1}a^{-2}\}$ . El grafo  $\Gamma_1$  es el siguiente.



Denotamos por  $a$  y por  $b$  las aristas cuya imagen en  $\Delta$  son  $a$  y  $b$ , respectivamente. A continuación mostramos los grafos que obtenemos al realizar los plegamientos. Solo podemos plegar las aristas que tienen la misma imagen en  $\Delta$ .





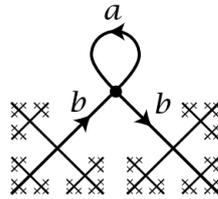
Hemos acabado con los plegamientos. Tenemos que  $\pi_1(\Gamma_6, w)$  es el grupo libre generado por  $\{a^2, b\}$ . Luego  $\{a^2, b\}$  es una base libre de  $S$ .

**Observación 3.1.** Dado un subgrupo  $S$ , podemos obtener a partir del algoritmo anterior el recubrimiento que lo representa. Para ello, obtenemos primero la inmersión  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$ . Para cada vértice  $v$  de  $\Gamma$  donde  $f_v$  no es biyectiva, pegamos a  $v$  los subárboles infinitos apropiados del recubridor universal para hacer que  $f_v$  sea biyectiva.

**Ejemplo 3.3.** Sea  $\Delta$  el siguiente grafo de un vértice  $u$  y dos aristas  $a$  y  $b$ .  $\pi_1(\Delta, u)$  está generado por  $\{a, b\}$ . Sea  $S$  el subgrupo de  $\pi_1(\Delta, u)$  generado por  $\{a\}$ . La inmersión  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  que lo representa se define de la siguiente forma.



Si lo extendemos a un recubrimiento obtenemos el siguiente grafo.



El siguiente teorema nos relaciona intersecciones de grupos y pullbacks de inmersiones.

**Teorema 3.1 (Representación de intersecciones mediante pullback de inmersiones).** Sea

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma_3 & \xrightarrow{g_1} & \Gamma_1 \\
 g_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\
 \Gamma_2 & \xrightarrow{f_2} & \Delta
 \end{array}$$

el diagrama de un pullback de grafos. Sean  $f_1$  y  $f_2$  inmersiones. Sean  $v_1$  y  $v_2$  vértices de  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , respectivamente, tales que  $f_1(v_1) = f_2(v_2) = w$ . Sea  $v_3$  el correspondiente vértice

en  $\Gamma_3$ . Definimos  $f_3 = f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2 : \Gamma_3 \rightarrow \Delta$ , y definimos

$$S_i = f_i(\pi_1(\Gamma_i, v_i)) \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

Entonces  $S_3 = S_1 \cap S_2$ .

**Demostración.** Lo demostramos por doble inclusión.

$S_3 \subset S_1 \cap S_2$  la obtenemos facilmente de  $f_3 = f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$ .

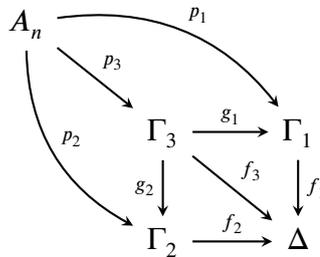
$$S_3 = f_3(\pi_1(\Gamma_3, v_3)) = f_1(g_1(\pi_1(\Gamma_3, v_3))) \subset f_1(\pi_1(\Gamma_1, v_1)) = S_1.$$

$$S_3 = f_3(\pi_1(\Gamma_3, v_3)) = f_2(g_2(\pi_1(\Gamma_3, v_3))) \subset f_2(\pi_1(\Gamma_2, v_2)) = S_2.$$

Luego  $S_3 \subset S_1 \cap S_2$ .

Para probar  $S_3 \supset S_1 \cap S_2$ , sea  $\alpha \in S_1 \cap S_2$ . Entonces hay caminos cerrados reducidos  $p_1, p_2$  en  $\Gamma_1, \Gamma_2$  basados en  $v_1, v_2$  tales que  $f_1(p_1)$  y  $f_2(p_2)$  pertenecen a la clase de homotopía de  $\alpha$ . Por la proposición 3.2,  $f_1(p_1)$  y  $f_2(p_2)$  son reducidos. Aplicando 3.5 obtenemos  $f_1(p_1) = f_2(p_2)$  (y, por tanto,  $|f_1(p_1)| = |f_2(p_2)| = |p_1| = |p_2|$ ).

Si vemos  $p_1$  y  $p_2$  como inmersiones  $A_n \rightarrow \Gamma_1, A_n \rightarrow \Gamma_2$ , donde  $n = |p_1| = |p_2|$  y  $A_n$  es el grafo correspondiente al intervalo  $[0, n]$  subdividido en los enteros, por la propiedad de los pullbacks, existe un camino  $p_3$  en  $\Gamma_3$  tal que  $p_1 = g_1(p_3)$  y  $p_2 = g_2(p_3)$ .



Como  $p_1$  y  $p_2$  son caminos cerrados basados en  $v_1$  y  $v_2$ , y teniendo en cuenta las definiciones de  $g_1$  y  $g_2$ , tenemos que  $p_3$  es un lazo basado en  $v_3$ . Luego  $f_3(p_3)$  pertenece a la clase de homotopía de  $\alpha$  y por tanto representa a un elemento de  $S_3$ . |

**Corolario 3.1 (Teorema de Howson).** Sean  $S_1$  y  $S_2$  subgrupos finitamente generados de un grupo libre  $F$ . Entonces  $S_1 \cap S_2$  es finitamente generado.

**Demostración.** Representamos  $F$  como  $\pi_1(\Delta, v)$ , donde  $\Delta$  es un grafo con un único vértice  $v$ . Los subgrupos  $S_1$  y  $S_2$  son finitamente generados, luego usando el algoritmo 3.1 los representamos mediante inmersiones  $f_1 : \Gamma_1 \rightarrow \Delta, f_2 : \Gamma_2 \rightarrow \Delta$ , donde  $\Gamma_1$

y  $\Gamma_2$  son grafos conexos finitos. Tenemos  $\mathcal{S}_1 = f_1(\pi_1(\Gamma_1, v_1))$  y  $\mathcal{S}_2 = f_2(\pi_1(\Gamma_2, v_2))$ , donde  $f_1(v_1) = f_2(v_2) = v$ .

Construimos el pullback  $\Gamma_3$ , el cual es finito pues  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  lo son. Por el teorema 3.1,  $\mathcal{S}_3 = f_3(\pi_1(\Gamma_3, v_3)) = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ , donde  $f_3 = f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$  y  $v_3$  es el vértice correspondiente a  $v_1$  y  $v_2$ .

Veamos que  $f_3$  es una inmersión. De la definición de pullback obtenemos que si  $e_3 = (e_1, e_2)$  es una arista de  $\Gamma_3$ , donde  $e_1 \in E(\Gamma_1)$ ,  $e_2 \in E(\Gamma_2)$ , entonces

$$f_3(e_3) = f_3((e_1, e_2)) = f_1(g_1((e_1, e_2))) = f_1(e_1),$$

$$f_3(e_3) = f_3((e_1, e_2)) = f_2(g_2((e_1, e_2))) = f_2(e_2).$$

Luego, si  $u_3 = (u_1, u_2) \in V(\Gamma_3)$  con  $u_1 \in V(\Gamma_1)$ ,  $u_2 \in V(\Gamma_2)$ , tenemos

$$(f_3)_{u_3}(e_3) = (f_3)_{u_3}((e_1, e_2)) = (f_1)_{u_1}(e_1) = (f_2)_{u_2}(e_2)$$

Como  $f_1$  y  $f_2$  son inmersiones,  $(f_1)_{u_1}$  y  $(f_2)_{u_2}$  son inyectivas, luego  $(f_3)_{u_3}$  también lo es y, por tanto,  $f_3$  es una inmersión.

Teníamos que  $f_3(\pi_1(\Gamma_3, v_3)) = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ , y por la proposición 3.6 obtenemos que  $f_3 : \pi_1(\Gamma_3, v_3) \rightarrow \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  es inyectiva, luego  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  y  $\pi_1(\Gamma_3, v_3)$  son isomorfos. Luego una base libre finita de  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  la podemos obtener a partir de aplicar  $f_3$  a una base libre de  $\pi_1(\Gamma_3, v_3)$ . Esta última se puede calcular eligiendo un árbol maximal en la componenete de  $\Gamma_3$  que contiene a  $v_3$  (proposición 1.6). |

**Observación 3.2.** Como Gersten demostró, [5], una detallada comprobación de las características de Euler prueba la desigualdad de H. Neumann [10] en el rango de  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ : si  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  es no trivial, entonces

$$r(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) - 1 \leq 2(r(\mathcal{S}_1) - 1)(r(\mathcal{S}_2) - 1).$$

Para acabar esta sección, hablaremos sobre traslaciones de inmersiones.

**Definición 3.1.** Una traslación de un morfismo de grafos  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  consiste en un isomorfismo  $g : \Gamma \rightarrow \Gamma$  tal que  $f \circ g = f$ .

El conjunto de todas las traslaciones de  $f$  forman un grupo,  $G(f)$ . La asociatividad la tenemos por ser automorfismos. El elemento neutro es el isomorfismo identidad. Podemos ver que  $Id \in G(f)$ , pues  $f \circ Id = f$ . El elemento inverso de  $g$  es el isomorfismo inverso  $g^{-1}$ , el cual pertenece a  $G(f)$  pues  $f \circ g = f \Rightarrow f = f \circ g^{-1}$ .

$G(f)$  actúa sobre  $\Gamma$ . Como  $f \circ g = f$ , no puede ocurrir que  $g(e) = \bar{e}$  para una arista  $e$ . Si ocurriese, entonces  $f(e) = f(\bar{e}) = \overline{f(e)}$ , lo cual es incompatible con nuestra definición de grafo. Además,  $f$  factoriza a través del cociente  $\Gamma \rightarrow \Gamma/G(f)$ .

*Proposición 3.7.* Sea  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  una inmersión, con  $\Gamma$  conexo. Entonces  $G(f)$  actúa libremente sobre  $\Gamma$ .

*Demostración.* Tomando en la proposición 3.4 (unicidad de elevaciones)  $\Theta = \Gamma$ ,  $g_1 = g$  y  $g_2 = Id$  se obtiene la definición de grupo que actúa libremente (definición 2.3). **|**

## 4 | Teorema de Marshall Hall

En este capítulo veremos la sección 6 de [11]. Primero veamos un teorema el cual nos permitirá demostrar el Teorema de Marshall Hall.

**Teorema 4.1.** *Sea  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  una inmersión de grafos. Supongamos que  $\Delta$  tiene solo un vértice y que  $\Gamma$  tiene un número finito de vértices. Entonces existe un grafo  $\Gamma'$  que contiene a  $\Gamma$ , tal que  $\Gamma' - \Gamma$  está formado solo por aristas, y existe un morfismo  $f' : \Gamma' \rightarrow \Delta$  extensión de  $f$ , tal que  $f'$  es un recubrimiento. (Y, si  $\Delta$  es un grafo finito, la demostración muestra cómo construir y enumerar de manera efectiva las extensiones  $\Gamma'$  y  $f'$ .)*

**Demostración.** Sea  $V$  el conjunto de vértices de  $\Gamma$ . Sea  $\mathcal{O}$  una orientación de  $\Delta$ . Para cada  $e \in \mathcal{O}$ , definimos

$$R_e = \{(u, v) \in V \times V : \text{existe una arista } e_1 \text{ de } \Gamma \\ \text{tal que } f(e_1) = e, \iota(e_1) = u, \tau(e_1) = v\}.$$

Veamos que las proyecciones sobre sus coordenadas  $R_e \rightarrow V$  son inyectivas. Lo demostramos para la primera proyección. La demostración para la segunda es similar. Sean  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in R_e$  tales que  $u_1 = u_2$ . Si llamamos  $u$  a  $u_1 = u_2$ , por definición de  $R_e$ , existen dos aristas  $e_1$  y  $e_2$  de  $\Gamma$  tales que  $f(e_1) = f(e_2) = e, \iota(e_1) = \iota(e_2) = u, \tau(e_1) = v_1$  y  $\tau(e_2) = v_2$ . Como  $e_1, e_2 \in St(u, \Gamma)$ ,  $f(e_1) = f(e_2)$  y  $f$  es una inmersión (luego  $f_u$  es inyectiva), tenemos que  $e_1 = e_2$ . Por tanto,  $\tau(e_1) = v_1 = v_2 = \tau(e_2)$ .

Como las proyecciones son inyectivas, podemos ver  $R_e$  como una biyección de un subconjunto de  $V$  en otro. Como  $V$  es finito, esa biyección la podemos extender a todo  $V$ , de manera que existe  $S_e \subset V \times V$  tal que  $R_e \subset S_e$  y  $S_e$  es una biyección  $V \rightarrow V$  (si  $(u, v) \in S_e$ , entonces  $S_e(u) = v$ ).

Usando una elección de  $S_e$  para cada  $e \in \mathcal{O}$ , construimos  $\Gamma'$  y  $f'$  de la siguiente forma.

El conjunto de vértices de  $\Gamma'$  es  $V$ . El conjunto de aristas de  $\Gamma'$  es  $E'$ , definido como

$$E' = \{(u, v, e) : u, v \in V, e \text{ es un arista de } \Delta; \\ \text{si } e \in \mathcal{O}, \text{ entonces } (u, v) \in S_e; \text{ si } \bar{e} \in \mathcal{O}, \text{ entonces } (v, u) \in S_{\bar{e}}\}.$$

Para  $\varepsilon = (u, v, e) \in E'$ , definimos  $\bar{\varepsilon} = (v, u, \bar{e})$  y  $\iota(\varepsilon) = u$ .

El morfismo  $f' : \Gamma' \rightarrow \Delta$  lo definimos llevando cada vértice de  $V$  al único vértice de  $\Delta$ , y  $f'(\varepsilon) = e$ , para cada  $\varepsilon = (u, v, e) \in E'$ . Veamos que es un recubrimiento.

Sea  $w \in V$ . Tenemos que ver que  $f'_w$  es biyectiva. Para probar la inyectividad, sean  $\varepsilon_1 = (u_1, v_1, e_1), \varepsilon_2 = (u_2, v_2, e_2) \in St(w, \Gamma')$  tales que  $f'_w(\varepsilon_1) = f'_w(\varepsilon_2)$  (es decir,  $e_1 = e_2 = e$  y  $u_1 = u_2 = w$ ). Por definición de  $E'$ , si  $e \in \mathcal{O}$ , tenemos que  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in S_e$ . Como  $S_e$  se puede ver como una biyección y  $u_1 = u_2$ , entonces  $v_1 = v_2$ . El argumento es similar si  $\bar{e} \in \mathcal{O}$ . Veamos ahora que  $f'_w$  es sobreyectiva. Sea  $e \in St(f'(w), \Delta)$ . Si  $e \in \mathcal{O}$ , tenemos que  $e$  es imagen de  $(w, S_e(w), e)$ . Si  $e \notin \mathcal{O}$ , entonces es imagen de  $(w, S_{\bar{e}}^{-1}(w), e)$ . Luego  $f'_w$  es biyectiva y por tanto  $f'$  es un recubrimiento.

Por último, vemos  $\Gamma$  como un subgrafo de  $\Gamma'$  mediante un morfismo  $a : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  donde para cada vértice  $v$  de  $\Gamma$ ,  $a(v) = v$ , y para cada arista  $e_1$  de  $\Gamma$ ,  $a(e_1) = (\iota(e_1), \tau(e_1), f(e_1))$ . |

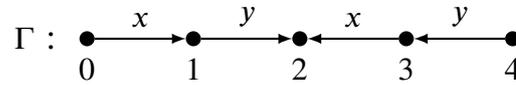
**Ejemplo 4.1.** Sea  $F$  el grupo libre sobre  $x, y$ . Veamos cuántos subgrupos  $S$  de índice 5 hay en  $F$  para los cuales  $\{1, x, xy, xyx^{-1}, xyx^{-1}y^{-1}\}$  es un sistema de representantes de las clases laterales a derecha de  $S$  en  $F$ , mediante la acción de la definición 2.5. Para ello, representamos  $F$  como el grupo fundamental del siguiente grafo  $\Delta$ .



Vamos a representar un subgrupo  $S$  como el grupo fundamental de un recubrimiento  $f' : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ , lo cual se puede por la proposición 2.5. Además, queremos que el subgrupo  $S$  tenga índice 5 en  $\pi_1(\Delta, v)$ , luego  $\tilde{\Gamma}$  debe tener 5 vértices (última parte de la proposición 2.5).

Para construir este recubrimiento, usamos el procedimiento de la prueba del teorema 4.1. Tenemos que  $f'^{-1}(v)$  es isomorfo al espacio de las clases laterales (última

parte de la proposición 2.8), luego debemos partir del siguiente grafo  $\Gamma$  si queremos que  $\{1, x, xy, xyx^{-1}, xyx^{-1}y^{-1}\}$  sea un sistema de representantes de las clases laterales a derecha de  $S$  en  $F$ .



El vértice base es 0. La inmersión  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  está definida según las etiquetas de las aristas.

Para la arista  $x$ , la biyección parcial  $R_x$  nos dice:  $0 \rightarrow 1$  y  $3 \rightarrow 2$ ; mientras que  $R_y$  nos indica:  $1 \rightarrow 2$  y  $4 \rightarrow 3$ . Para construir el grafo  $\tilde{\Gamma}$  debemos extender las biyecciones parciales a las biyecciones totales  $S_x$  y  $S_y$ . Tenemos para  $R_x$  tres vértices libres, luego se puede extender de  $3! = 6$  formas distintas. Igual con  $R_y$ . Luego hay  $6 \cdot 6 = 36$  construcciones posibles para  $\tilde{\Gamma}$ , dando cada una de estas uno de los subgrupos que estamos considerando (tomando como vértice base el 0). Por tanto, hay 36 subgrupos de  $F$  de índice 5 para los cuales  $\{1, x, xy, xyx^{-1}, xyx^{-1}y^{-1}\}$  es un sistema de representantes de las clases laterales derechas de  $S$  en  $F$ .

Continuamos el ejemplo construyendo uno de los posibles grafos  $\tilde{\Gamma}$ . Elegimos las siguientes extensiones.

$$S_x : 0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 4.$$

$$S_y : 0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3.$$

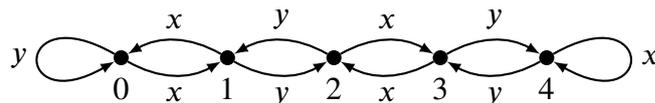
Luego el conjunto de vértices de  $\tilde{\Gamma}$  es  $0, 1, 2, 3, 4$ , mientras que las aristas son las siguientes.

$$\varepsilon_1 = (0, 1, x), \varepsilon_2 = (1, 0, x), \varepsilon_3 = (2, 3, x), \varepsilon_4 = (3, 2, x), \varepsilon_5 = (4, 4, x),$$

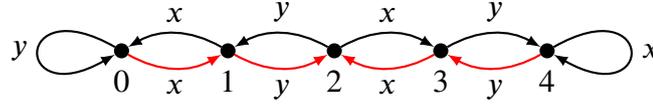
$$\varepsilon_6 = (0, 0, y), \varepsilon_7 = (1, 2, y), \varepsilon_8 = (2, 1, y), \varepsilon_9 = (3, 4, y), \varepsilon_{10} = (4, 3, y).$$

El recubrimiento  $f' : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Delta$  se define como  $f'(\varepsilon_i) = x$  si  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , y  $f'(\varepsilon_i) = y$  si  $i = 6, 7, 8, 9, 10$ .

El grafo  $\tilde{\Gamma}$  es el siguiente. Las etiquetas de las aristas indican la imagen por  $f'$ .



Por último, buscamos una base del subgrupo. Para ello, elegimos el siguiente árbol de  $\tilde{\Gamma}$  (marcado en rojo).



Obtenemos que el subgrupo  $S$  está generado por

$$\{y, x^2, xy^2x^{-1}, xyx^{-2}y^{-1}x^{-1}, xyx^{-1}y^{-2}xy^{-1}x^{-1}, xyx^{-1}y^{-1}xyxy^{-1}x^{-1}\}.$$

**Observación 4.1.** Podemos ver que un cambio en el vértice base en  $\tilde{\Gamma}$  cambia el subgrupo  $f'(\pi_1(\tilde{\Gamma}, 0))$  a un subgrupo conjugado en  $\pi_1(\Delta, v)$ . Por ejemplo, en el caso anterior, si cambiamos el punto base a 1 obtenemos el conjugado  $S' = x^{-1}Sx$ .

**Observación 4.2.** Dado un grupo libre  $F$  finitamente generado y un entero positivo  $n$ , existen un número finito de subgrupos de  $F$  de índice  $n$ . Si representamos  $F$  como el grupo fundamental de un grafo  $\Delta$  con un vértice, cada recubrimiento conexo de  $n$  vértices de  $\Delta$  se corresponde con un subgrupo de  $F$  de índice  $n$ .

**Corolario 4.1 (Teorema de Marshall Hall).** Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l$  elementos de un grupo libre  $F$ . Sea  $S$  el subgrupo de  $F$  generado por  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ . Supongamos que  $\beta_i \notin S$  para  $i = 1, \dots, l$ . Entonces existe un subgrupo  $S'$  de índice finito en  $F$ , tal que  $S \subset S'$ ,  $\beta_i \notin S'$  para  $i = 1, \dots, l$ , y existe una base libre de  $S'$ , la cual tiene un subconjunto que es una base libre de  $S$ .

La demostración original se encuentra en [6].

**Demostración.** Representamos  $F$  como  $\pi_1(\Delta)$ , donde  $\Delta$  tiene solo un vértice. Sea  $\Gamma_1$  la unión por un vértice  $v_1$  de circunferencias y arcos, subdivididos apropiadamente, y  $f_1 : \Gamma_1 \rightarrow \Delta$  un morfismo, de forma que las circunferencias en  $\Gamma_1$ , bajo  $f_1$ , representan los  $\alpha_j$  y los arcos en  $\Gamma_1$  representan los  $\beta_i$ . Entonces tenemos

$$f_1(\pi_1(\Gamma_1, v_1)) = S.$$

Como  $\Gamma_1$  es un grafo finito conexo, por el teorema 1.2, el morfismo  $f_1$  puede ser factorizado mediante una serie de plegamientos y una inmersión  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$ . Por el corolario 2.1,  $f(\pi_1(\Gamma, v)) = S$ , donde  $v$  es un vértice apropiado. Como  $\beta_i \notin S$ , la imagen del  $i$ -ésimo arco de  $\Gamma_1$  en  $\Gamma$  no es un lazo.

Ahora aplicamos el teorema 4.1 a  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$ . Extendemos  $f$  a un recubrimiento  $f' : \Gamma' \rightarrow \Delta$ , sin añadir nuevos vértices. Definimos  $S' = f'(\pi_1(\Gamma', v))$ . Por la proposición 2.5, el índice de  $S'$  en  $F$  es el número de vértices de  $\Gamma$ . Claramente,  $S \subset S'$ ,

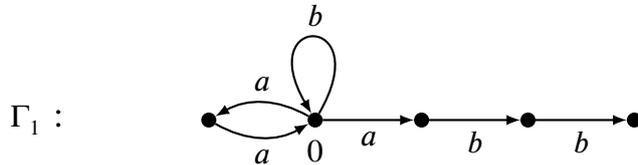
ya que  $\Gamma \subset \Gamma'$ . Además, los caminos en  $\Gamma$  que representan a los  $\beta_i$  (las imágenes de los arcos de  $\Gamma_1$ ) no son lazos. Por tanto,  $\beta_i \notin S'$ , pues por ser  $f'$  un recubrimiento, el morfismo inducido en los grupos fundamentales es inyectivo (proposición 2.4). Finalmente, usando que un árbol maximal  $T$  de  $\Gamma$  es también un árbol maximal de  $\Gamma'$  (ya que no se han añadido vértices), encontramos una base libre de  $\pi_1(\Gamma', v)$  la cual contiene una base libre de  $\pi_1(\Gamma, v)$ . Aplicando  $f$  y  $f'$  a estas bases obtenemos una base libre de  $S'$ , la cual tiene un subconjunto que es una base libre de  $S$ . |

**Ejemplo 4.2.** Sea  $F$  el grupo libre generado por  $\{a, b\}$ . Tenemos que  $\alpha_1 = a^2$ ,  $\alpha_2 = b$  y  $\beta_1 = ab^2$  son elementos de  $F$ . Sea  $S$  el subgrupo de  $F$  generado por  $\{a^2, b\}$ . Tenemos que  $ab^2 \notin S$ . Según el Teorema de Marshall Hall (corolario 4.1), existe un subgrupo  $S'$  de índice finito en  $F$  tal que  $S \subset S'$ ,  $ab^2 \notin S'$  y existe una base libre de  $S'$  la cual tiene un subconjunto que es una base libre de  $S$ . Calculemos  $S'$ . Para ello, seguimos los pasos de la demostración del corolario 4.1.

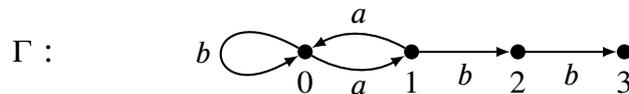
Representamos  $F$  como el grupo fundamental del siguiente grafo  $\Delta$ .



El grafo  $\Gamma_1$  es el siguiente, y el morfismo  $f_1 : \Gamma_1 \rightarrow \Delta$  está definido según las etiquetas de las aristas.



Tenemos que  $f_1(\pi_1(\Gamma_1, 0)) = S$ . El morfismo  $f_1$  puede ser factorizado mediante una serie de plegamientos y una inmersión  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$ . Realizamos los plegamientos y obtenemos el siguiente grafo  $\Gamma$ . Las etiquetas de las aristas indican la imagen por  $f$ .



Las biyecciones parciales son:

$$R_a : 0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0.$$

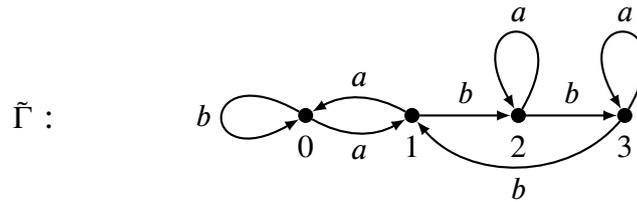
$$R_b : 0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3.$$

Ahora tenemos que extender  $f$  a un recubrimiento  $f' : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Delta$ . Para ello, extendemos las biyecciones parciales a biyecciones totales. Por ejemplo:

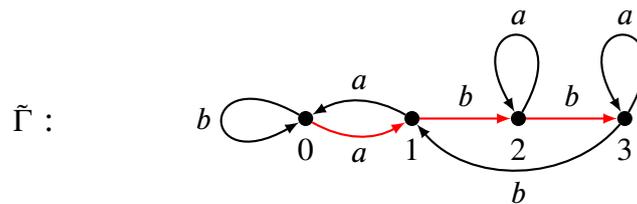
$$S_a : 0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3.$$

$$S_b : 0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1.$$

Obtenemos el siguiente grafo  $\tilde{\Gamma}$ . Las etiquetas de las aristas indican la imagen por  $f'$ .



Por último, buscamos una base de  $S'$ . Para ello, elegimos el siguiente árbol de  $\tilde{\Gamma}$  (marcado en rojo).



Obtenemos que  $S'$  está generado por

$$\{b, a^2, abab^{-1}a^{-1}, ab^2ab^{-2}a^{-1}, ab^3a^{-1}\}.$$

**Corolario 4.2.** Sea  $F$  un grupo libre y  $S$  un conjunto finito de elementos de  $F$ . Sea  $G$  el subgrupo finitamente generado por  $S$ ,  $G = \langle S \rangle \subseteq F$ . Entonces  $G$  es la intersección de todos los subgrupos  $H$  de  $F$  de índice finito que contienen a  $G$ . Es decir,

$$G = \bigcap_{H \in M} H \quad \text{donde } M = \{H \leq F : G \subseteq H \text{ y } [F : H] < \infty\}.$$

**Demostración.** Lo demostramos por doble inclusión.  $\subseteq$  es obvio, pues  $G \subseteq H$  para cada  $H$ .  $\supseteq$  lo demostramos por reducción al absurdo. Supongamos que existe  $\beta \in \bigcap_M H$  tal que  $\beta \notin G$  y  $\beta \neq 1$ . Por el teorema de Marshall Hall (corolario 4.1), existe un subgrupo  $H'$  de  $F$  de índice finito tal que  $G \subseteq H'$  y  $\beta \notin H'$ . Esto es una contradicción.  $H'$  pertenece a  $M$ , pues  $G \subseteq H'$  y  $H'$  tiene índice finito en  $F$ . Como  $\beta \notin H'$ , obtenemos que  $\beta \notin \bigcap_M H$ , pero habíamos supuesto que  $\beta \in \bigcap_M H$ . |

## 5 | Grafos centrales

En este capítulo desarrollaremos la sección 7 de [11].

Cada grafo conexo con grupo fundamental no trivial contiene un subgrafo "núcleo" donde está concentrado el grupo fundamental. El grafo original está formado por ese núcleo y varios árboles unidos a éste.

En el caso de un grafo finito  $\Gamma$ , podemos obtener su núcleo eliminando las aristas exteriores una a una. Si  $\Gamma$  no tiene vértices de valencia 1,  $\Gamma$  es su propio núcleo. Si  $\Gamma$  tiene un vértice  $v$  tal que solo existe una única arista  $e$  con  $v = \iota(e)$ , entonces eliminando  $v$ ,  $e$  y  $\bar{e}$  obtenemos un grafo más pequeño  $\Gamma'$ . Repitiendo este proceso un número finito de veces llegamos al núcleo de  $\Gamma$ .

A continuación vamos a dar una definición rigurosa de lo anterior.

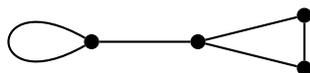
**Definición 5.1.** Un lazo cíclicamente reducido de un grafo  $\Gamma$  es un lazo  $p = e_1 e_2 \dots e_n$ , tal que es reducido y  $e_1 \neq \bar{e}_n$ .

*Observación 5.1.* Un lazo cíclicamente reducido  $p$  de longitud  $n$  en  $\Gamma$  lo podemos ver como una inmersión  $C_n \rightarrow P$ , donde  $C_n$  es el grafo correspondiente a una circunferencia subdividida en  $n$  aristas.

*Observación 5.2.* Si una arista  $e$  pertenece a un lazo cíclicamente reducido  $p$ , cambiando la arista inicial de  $p$  podemos encontrar otro lazo cíclicamente reducido  $p'$  donde  $e$  es la primera arista de  $p'$ . Por ejemplo, si  $p = e_1 e_2 e e_4$ , entonces  $p' = e e_4 e_1 e_2$ .

**Definición 5.2.** Un grafo  $\Gamma$  es un grafo central si  $\Gamma$  es conexo, tiene al menos una arista, y cada arista pertenece al menos a un lazo cíclicamente reducido.

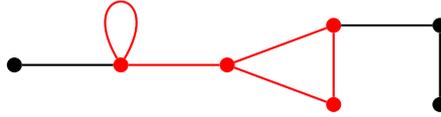
*Ejemplo 5.1.* El siguiente grafo es un grafo central.



**| Definición 5.3.** Sea  $\Gamma$  un grafo conexo tal que su grupo fundamental es no trivial. Una arista esencial de  $\Gamma$  es una arista que pertenece a algún lazo cíclicamente reducido.

**| Definición 5.4.** El núcleo de  $\Gamma$  está formado por todas las aristas esenciales de  $\Gamma$  y todos los vértices iniciales de las aristas esenciales.

**Ejemplo 5.2.** En el siguiente grafo coloreamos de rojo su núcleo.



De las definiciones anteriores obtenemos el siguiente par de resultados.

**Proposición 5.1.** Un grafo conexo finito  $\Gamma$  es un grafo central si y solo si la valencia de cada vértice es al menos 2.

**Demostración.** Si  $\Gamma$  es un grafo central, cada arista debe pertenecer a un lazo cíclicamente reducido, luego todos los vértices deben tener al menos valencia 2. A la inversa, si hay un vértice con valencia 1, entonces su arista no puede pertenecer a un lazo cíclicamente reducido, luego no es un grafo central. **|**

Por tanto, el proceso descrito en la introducción de este capítulo de eliminar las aristas exteriores nos da el núcleo de cualquier grafo finito conexo con grupo fundamental no trivial.

**Proposición 5.2.** Si  $\Gamma$  es un grafo conexo con grupo fundamental no trivial y  $\Gamma'$  es el núcleo de  $\Gamma$ , entonces  $\Gamma'$  es un grafo central. Si  $v$  es un vértice de  $\Gamma'$ , entonces la inclusión  $\pi_1(\Gamma', v) \rightarrow \pi_1(\Gamma, v)$  es un isomorfismo.

**Demostración.** Para la primera parte, la definición de núcleo de un grafo implica la definición de grafo central.

Para la segunda, las aristas que no pertenecen al núcleo de  $\Gamma$  no forman parte de ningún lazo cíclicamente reducido, y, por tanto, no añaden ningún generador a  $\pi_1(\Gamma, v)$  que no estuviese en  $\pi_1(\Gamma', v)$ . Luego la inclusión es sobreyectiva. Además, la inclusión es inyectiva (proposición 3.6, pues esta inclusión se induce de la inclusión  $\Gamma' \rightarrow \Gamma$ , que es una inmersión). Por tanto, la inclusión es un isomorfismo. **|**

**| Definición 5.5.** Sea  $S$  un subgrupo de un grupo  $G$ . Decimos que  $S \subset G$  cumple la condición de Burnside si, para cada  $g \in G$ , existe un entero positivo  $n$  tal que  $g^n \in S$ .

**Proposición 5.3.** Si  $S$  cumple la condición de Burnside en  $G$ , entonces también lo hace cualquier subgrupo conjugado de  $S$ .

*Demostración.* Sea  $S$  un subgrupo de  $G$  que cumple la condición de Burnside y sea  $x \in G$ . Veamos que  $xSx^{-1}$  cumple la condición de Burnside en  $G$ .

Sea  $g \in G$ . Definimos  $h = x^{-1}gx \in G$ . Tenemos que  $g = xhx^{-1}$ . Como  $S$  cumple la condición de Burnside, tenemos que existe un entero positivo  $n$  tal que  $h^n \in S$ . Luego

$$g^n = (xhx^{-1})^n = xh^n x^{-1} \in xSx^{-1}. \quad |$$

*Proposición 5.4.* Sea  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  un recubrimiento de grafos conexos tal que la cardinalidad de  $f^{-1}$  es finita para cada vértice de  $\Delta$ . Sea  $v$  un vértice de  $\Gamma$ . Entonces  $f(\pi_1(\Gamma, v)) \subset \pi_1(\Delta, f(v))$  cumple la condición de Burnside.

La idea de esta demostración se encuentra en [8].

*Demostración.* Por la proposición 2.5, el índice de  $f(\pi_1(\Gamma, v))$  en  $\pi_1(\Delta, f(v))$  es la cardinalidad de  $f^{-1}(f(v))$ , la cual hemos supuesto que es finita. Luego si demostramos que los subgrupos de índice finito cumplen la condición de Burnside tenemos el resultado.

Sea  $S$  un subgrupo de  $G$  de índice  $n$ . El grupo  $G$  lo podemos expresar como la unión disjunta de sus clases laterales.

$$G = g_1S \sqcup g_2S \sqcup \dots \sqcup g_nS,$$

donde  $g_1, \dots, g_n \in G$ . Dado  $g \in G$ , para cada  $m \in \mathbb{N}$  existe una  $i \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $g^m \in g_iS$ . Como el número de clases laterales es finito, existen  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$  con  $m_2 > m_1$  tal que  $g^{m_1}, g^{m_2} \in g_jS$  para algún  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Luego tomando  $m = m_2 - m_1 \in \mathbb{N}$  tenemos

$$g^m = g^{m_2 - m_1} = g^{-m_1} g^{m_2} \in S. \quad |$$

*Proposición 5.5.* Sea  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$  una inmersión de grafos conexos, donde  $\Delta$  es un grafo central. Sea  $v$  un vértice de  $\Gamma$ . Si además se tiene que  $f(\pi_1(\Gamma, v)) \subset \pi_1(\Delta, f(v))$  cumple la condición de Burnside, entonces  $f$  es un recubrimiento.

*Demostración.* Tenemos que probar que  $f$  es localmente sobreyectiva. Sea  $w$  un vértice de  $\Gamma$  y  $e$  una arista de  $\Delta$  con  $f(w) = \iota(e)$ . Por hipótesis,  $f(\pi_1(\Gamma, v))$  cumple la condición de Burnside. Además, por ser  $\Gamma$  conexo, tenemos que  $f(\pi_1(\Gamma, w))$  es un subgrupo conjugado de este (observación 4.1). Como la condición de Burnside se conserva bajo conjugación (proposición 5.3), tenemos que  $f(\pi_1(\Gamma, w))$  la cumple.

Como  $\Delta$  es un grafo central, existe un lazo cíclicamente reducido  $p$  en  $\Delta$  cuya primer arista es  $e$ . Luego la clase de homotopía de  $p$  pertenece a  $\pi_1(\Delta, f(w))$ . Como

$f(\pi_1(\Gamma, w)) \subset \pi_1(\Delta, f(w))$  cumple la condición de Burnside, existe un entero positivo  $n$  tal que la clase de homotopía de  $p^n$  pertenece a  $f(\pi_1(\Gamma, w))$ . Luego existe un camino reducido  $q$  de  $\Gamma$  basado en  $w$  tal que  $f(q) \sim p^n$ . Como  $p$  es cíclicamente reducido,  $p^n$  es reducido. Luego, como  $f$  es una inmersión,  $f(q)$  es reducido (proposición 3.2), y, por tanto,  $f(q) = p^n$  (proposición 3.5). En consecuencia, el primer término de  $q$  es una arista  $e_1$  de  $\Gamma$  tal que  $i(e_1) = w$  y  $f(e_1) = e$ . |

**Observación 5.3.** Esta proposición nos permite ver si un subgrupo finitamente generado de un grupo libre tiene índice finito.

Para ello, en el algoritmo 3.1, representamos el subgrupo mediante una inmersión  $f : \Gamma \rightarrow \Delta$ , donde  $\Gamma$  es finito y  $\Delta$  es un grafo de un vértice (y por tanto, es un grafo central). Si  $f$  es un recubrimiento, entonces el subgrupo tiene índice finito y es igual al número de vértices de  $\Gamma$ . Si  $f$  no es un recubrimiento, entonces la proposición 5.5 nos indica que el subgrupo no cumple la condición de Burnside, y por tanto tiene índice infinito.

Antes de ver el último teorema, veamos algunos resultados que usaremos en la demostración.

**Proposición 5.6.** Sean  $f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$  y  $g : \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_3$  recubrimientos. Entonces  $g \circ f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_3$  es un recubrimiento.

**Demostración.** Tenemos que ver que  $(g \circ f)_v = g_v \circ f_v : St(v, \Gamma_1) \rightarrow St(g(f(v)), \Gamma_3)$  es biyectiva para cada vértice  $v$  de  $\Gamma_1$ . Como  $f$  y  $g$  son recubrimientos,  $f_v$  y  $g_v$  son biyectivas. Luego  $(g \circ f)_v$  es biyectiva por ser composición de funciones biyectivas. Por tanto,  $g \circ f$  es un recubrimiento. |

**Proposición 5.7.** Sea

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \xrightarrow{f} & \Gamma_2 \\ h \downarrow & \swarrow g & \\ \Gamma_3 & & \end{array}$$

un diagrama conmutativo donde  $\Gamma_1, \Gamma_2$  y  $\Gamma_3$  son grafos y  $f$  y  $h$  son recubrimientos. Entonces  $g$  es un recubrimiento.

**Demostración.** Como  $h = g \circ f$ , dado un vértice  $v$  cualquiera de  $\Gamma_1$ , tenemos que  $h_v = g_v \circ f_v : St(v, \Gamma_1) \rightarrow St(g(f(v)), \Gamma_3)$ . Además,  $f_v$  es biyectiva, luego su inversa  $f_v^{-1} : St(f(v), \Gamma_2) \rightarrow St(v, \Gamma_1)$  también lo es. En consecuencia,  $g_v = h_v \circ f_v^{-1}$  es biyectiva por ser composición de biyectivas. Por tanto,  $g$  es un recubrimiento. |

**Proposición 5.8.** Sea  $f : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  el recubrimiento universal de  $\Gamma$ . Entonces, el grupo de traslaciones de  $f$ ,  $G(f)$ , es isomorfo a  $\pi_1(\Gamma)$ .

*Demostración.* Deriva de la teoría de espacios recubridores en el sentido topológico usual (ver [7] o [9]).

*Proposición 5.9.* Sea  $f : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  el recubrimiento universal de  $\Gamma$ . Entonces,  $\Gamma$  es isomorfo a  $\tilde{\Gamma}/G(f)$ , y, por tanto, también a  $\tilde{\Gamma}/\pi_1(\Gamma)$ .

*Demostración.* Deriva de la teoría de espacios recubridores en el sentido topológico usual (ver [9]).

**Teorema 5.1.** Sea  $S_1$  y  $S_2$  subgrupos finitamente generados de un grupo libre  $F$ . Supongamos que  $S_1 \cap S_2$  tiene índice finito tanto en  $S_1$  como en  $S_2$ . Entonces  $S_1 \cap S_2$  tiene índice finito en el join  $S_1 \vee S_2$ .

*Demostración.* De forma similar a la demostración del Teorema de Howson (corolario 3.1), representamos la situación mediante el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \Theta_3 & \xrightarrow{g'_1} & \Theta_1 \\ g'_2 \downarrow & & \downarrow f'_1 \\ \Theta_2 & \xrightarrow{f'_2} & \Delta \end{array}$$

Representamos  $F$  como  $\pi_1(\Delta, w)$ , donde  $\Delta$  es un grafo con un único vértice  $w$ . Representamos  $S_1$  y  $S_2$  mediante las inmersiones  $f'_1 : \Theta_1 \rightarrow \Delta$  y  $f'_2 : \Theta_2 \rightarrow \Delta$ , y la intersección  $S_1 \cap S_2$  mediante la inmersión de una componente del pullback  $\Theta_3$ . Si  $S_1 \cap S_2$  es no trivial, podemos conjugarlo de manera que el punto base de  $\Theta_3$  esté en el núcleo  $\Gamma_3$  de la componente que representa a  $S_1 \cap S_2$ . Los núcleos de  $\Theta_1$  y  $\Theta_2$  son  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , respectivamente. Si denotamos por  $f_1, f_2, g_1$  y  $g_2$  a las restricciones de  $f'_1, f'_2, g'_1$  y  $g'_2$  al núcleo correspondiente ( $f_1 = f'_1|_{\Gamma_1}$ , etc.), obtenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_3 & \xrightarrow{g_1} & \Gamma_1 \\ g_2 \downarrow & \searrow f_3 & \downarrow f_1 \\ \Gamma_2 & \xrightarrow{f_2} & \Delta \end{array}$$

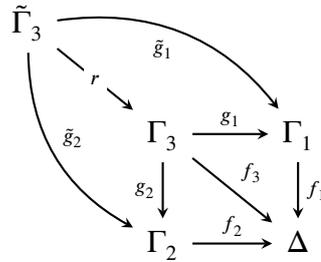
En este diagrama,  $f_1$  y  $f_2$  son inmersiones,  $\Gamma_3$  es un subgrafo del pullback;  $\Gamma_1, \Gamma_2$  y  $\Gamma_3$  son grafos centrales;  $f_3 = f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$ ;  $v_3$  es un vértice de  $\Gamma_3$ ,  $v_1$  y  $v_2$  son las imágenes de  $v_3$  en  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , respectivamente;  $w = f_1(v_1) = f_2(v_2) = f_3(v_3)$ . El grupo  $F = \pi_1(\Delta, w)$  y

$$S_i = f_i(\pi_1(\Gamma_i, v_i)), \quad i = 1, 2, 3$$

$$S_3 = S_1 \cap S_2.$$

Como  $S_3$  tiene índice finito en  $S_1$  y en  $S_2$ , entonces  $g_1(\pi_1(\Gamma_3, v_3)) \subset \pi_1(\Gamma_1, v_1)$  y  $g_2(\pi_1(\Gamma_3, v_3)) \subset \pi_1(\Gamma_2, v_2)$  cumplen la condición de Burnside (prueba de la proposición 5.4). Luego, por la proposición 5.5,  $g_1$  y  $g_2$  son recubrimientos.

Sea  $r : \tilde{\Gamma}_3 \rightarrow \Gamma_3$  el recubrimiento universal. El diagrama queda:



Como  $r$ ,  $g_1$  y  $g_2$  son recubrimientos, tenemos que  $\tilde{g}_1$  y  $\tilde{g}_2$  son recubrimientos. Además, el grupo de traslaciones de  $\tilde{g}_1$ ,  $G(\tilde{g}_1)$ , es isomorfo a  $\pi_1(\Gamma_1)$  y, por tanto, se puede identificar con  $S_1$ . Análogamente, se puede identificar  $G(\tilde{g}_2)$  con  $S_2$ .

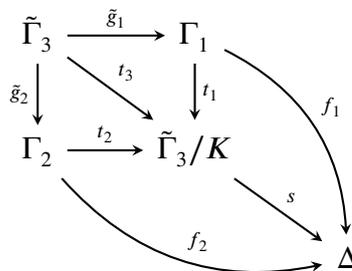
Tenemos que  $f_3 = f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$  es una inmersión, pues es composición de inmersiones ( $g_1$  y  $g_2$  son recubrimientos y, por tanto, inmersiones). Luego la función  $h$  definida como  $h = f_3 \circ r$  es una inmersión (composición de inmersiones).

Consideramos  $\sigma \in G(\tilde{g}_1)$ . Luego  $\sigma : \tilde{\Gamma}_3 \rightarrow \tilde{\Gamma}_3$  es un automorfismo de grafos tal que  $\tilde{g}_1 \circ \sigma = \tilde{g}_1$ : Es decir,  $g_1 \circ r \circ \sigma = g_1 \circ r$ . Luego

$$f_1 \circ g_1 \circ r \circ \sigma = f_1 \circ g_1 \circ r \Rightarrow f_3 \circ r \circ \sigma = f_3 \circ r \Rightarrow h \circ \sigma = h.$$

Por tanto,  $\sigma$  es una traslación de la inmersión  $h$ . De manera similar, las traslaciones de  $\tilde{g}_2$  son traslaciones de  $h$ .

Tenemos que  $\Gamma_1 = \tilde{\Gamma}_3 / G(\tilde{g}_1)$  y  $\Gamma_2 = \tilde{\Gamma}_3 / G(\tilde{g}_2)$ . Sea  $K$  el grupo de traslaciones de  $h$  generado por  $G(\tilde{g}_1) \cup G(\tilde{g}_2)$ . Obtenemos el siguiente diagrama conmutativo.



$(\tilde{\Gamma}_3/K, t_1, t_2)$  es el pushout de  $\tilde{g}_1$  y  $\tilde{g}_2$ . El morfismo  $s : \tilde{\Gamma}_3/K \rightarrow \Delta$  existe por la propiedad de los pushouts.

Como  $h = f_3 \circ r : \tilde{\Gamma}_3 \rightarrow \Delta$  es una inmersión,  $K$  actúa libremente sobre  $\tilde{\Gamma}_3$  (proposición 3.7). Luego,  $t_3$  es un recubrimiento (proposición 2.7). Como  $\tilde{g}_1$  es también un recubrimiento, obtenemos que  $t_1$  es un recubrimiento (proposición 5.7). Análogamente,  $t_2$  es un recubrimiento.

Como  $\Gamma_1$  es un grafo finito, la cardinalidad de  $t_1^{-1}(u)$  es finita, donde  $u_1$  es un vértice de  $\tilde{\Gamma}_3/K$ . Luego  $S_1$  tiene índice finito en  $s(\pi_1(\tilde{\Gamma}_3/K))$ , el cual contiene a  $S_1$  y a  $S_2$ ; y, por tanto,  $S_1$  tiene índice finito en  $S_1 \vee S_2$ . Como  $S_1 \cap S_2$  tiene índice finito en  $S_1$ , obtenemos que  $S_1 \cap S_2$  también tiene índice finito en  $S_1 \vee S_2$ . |



## 6 | Apéndice A. Otros resultados sobre grupos libres

Usando recubrimientos podemos ver el siguiente par de resultados.

**| Teorema 6.1 (Teorema de Nielsen-Schreier).** *Todo subgrupo de un grupo libre es libre.*

*Demostración.* Sea  $S$  un subgrupo de un grupo libre  $F$ . Sea  $\Gamma$  un grafo con un vértice,  $v$ , tal que  $\pi_1(\Gamma, v) = F$ . Por la proposición 2.5, existe un recubrimiento  $f : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ , con  $\tilde{\Gamma}$  conexo y  $\pi_1(\tilde{\Gamma}, \tilde{v}) = S$  (con  $\tilde{v}$  un vértice tal que  $f(\tilde{v}) = v$ ). Como el grupo fundamental es un grupo libre, tenemos que  $S = \pi_1(\tilde{\Gamma}, \tilde{v})$  es libre. **|**

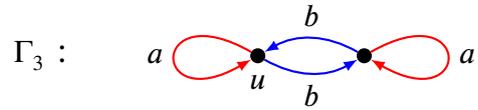
**| Teorema 6.2.** *Para todo  $n$  entero positivo, el grupo libre de  $n$  generadores,  $F_n$ , es isomorfo a un subgrupo de  $F_2 = \langle a, b \rangle$ .*

*Demostración.* Los casos  $F_1 = \langle a \rangle$  y  $F_2 = \langle a, b \rangle$  son obvios. Para cada  $n > 2$ , consideramos el recubrimiento  $f_n : \Gamma_n \rightarrow \Delta$ , donde  $\Delta$  es el grafo de un vértice y dos aristas,  $\Gamma_n$  es conexo y la base de  $\pi_1(\Gamma_n)$  tiene  $n$  generadores.

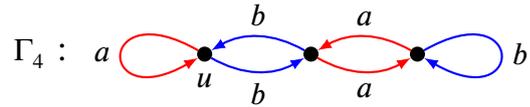


$$F_2 = \pi_1(\Delta) = \langle a, b \rangle$$

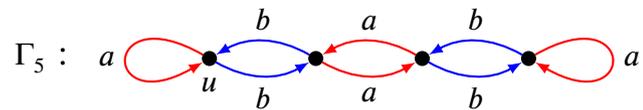
Una opción para  $\Gamma_n$  es el grafo correspondiente a una sucesión de  $n$  circunferencias tangentes. Por ejemplo, para los primeros valores de  $n$  obtenemos los siguientes grafos. ( $f_n$  está definida según las etiquetas de las aristas.)



$$F_3 = f_3(\pi_1(\Gamma_3, u)) = \langle a, b^2, bab^{-1} \rangle \subset F_2$$



$$F_4 = f_4(\pi_1(\Gamma_4, u)) = \langle a, b^2, ba^2b^{-1}, baba^{-1}b^{-1} \rangle \subset F_2$$



$$F_5 = f_5(\pi_1(\Gamma_5, u)) = \langle a, b^2, ba^2b^{-1}, bab^2a^{-1}, b^{-1}, babab^{-1}a^{-1}b^{-1} \rangle \subset F_2$$

⋮

|

## 7 | Apéndice B. Grafos de Cayley

La siguiente definición está tomada de [2].

**Definición 7.1.** Sea  $G$  un grupo y  $S$  un conjunto de generadores de  $G$ . El grafo de Cayley asociado a  $G$  y  $S$ ,  $\Gamma_C(G, S)$ , se define de la siguiente forma.

- El conjunto de vértices es  $G$ .
- El conjunto de aristas orientadas positivamente es  $G \times S$ .
- El vértice inicial de  $(g, s)$  es  $\iota((g, s)) = g$ .
- El vértice final de  $(g, s)$  es  $\tau((g, s)) = gs$ .
- La arista inversa de  $(g, s)$  es  $(g, s) = (gs, s^{-1})$ .

En este contexto consideramos  $s^{-1}$  como un símbolo formal, y no un elemento del grupo  $G$ . Luego  $(gs, s^{-1}) \notin G \times S$  incluso en el caso donde el elemento  $s^{-1} \in S$ .

La etiqueta de la arista  $(g, s)$  es el elemento  $s$ .

El grupo  $G$  actúa sobre  $\Gamma_C(G, S)$  mediante multiplicaciones por la izquierda mediante isomorfismos. Un elemento  $g \in G$  envía un vértice  $g'$  al vértice  $gg'$  y una arista  $(g', s)$  a la arista  $(gg', s)$ . Esta acción es libre y sin inversiones de aristas.

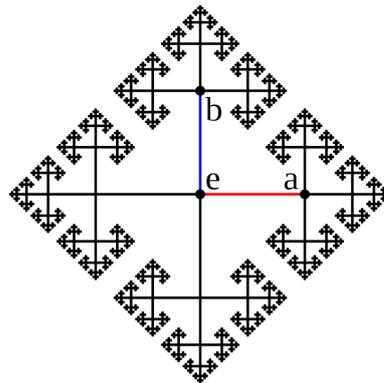
**Observación 7.1.** De forma similar, se puede definir el grafo de Cayley mediante acciones por la derecha.

Un grafo de Cayley  $\Gamma_C(G, S)$  es siempre conexo, pues cada elemento de  $G$  es producto de elementos de  $S$ , por lo que siempre hay un camino en el grafo uniendo cada vértice con el vértice identidad  $e$ . Además, cada relación de  $G$  determina en el grafo de Cayley un lazo basado en el vértice  $e$ .

Tenemos también que un grafo de Cayley  $\Gamma_C(G, S)$  es un recubrimiento del grafo  $\Delta$  de un vértice tal que  $\pi_1(\Delta)$  es el grupo libre generado por  $S$ . Esto es fácil de ver,

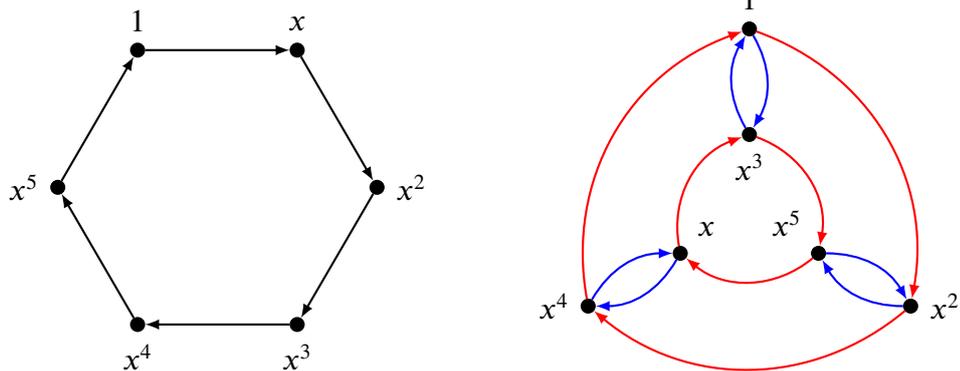
pues cada elemento de  $G$  se puede multiplicar por cada uno de los generadores de  $S$ . Luego de cada vértice del grafo de Cayley parten cada una de las aristas correspondientes a cada elemento de  $S$ . De la misma forma, como cada elemento de  $G$  se puede multiplicar por cada uno de los inversos de los elementos  $S$ , tenemos que a cada vértice del grafo de Cayley llegan cada una de las aristas correspondientes a cada elemento de  $S$ .

*Ejemplo 7.1.* El grafo de Cayley de  $F_2 = \langle a, b \rangle$  respecto a los generadores  $S = \{a, b\}$  es el siguiente.

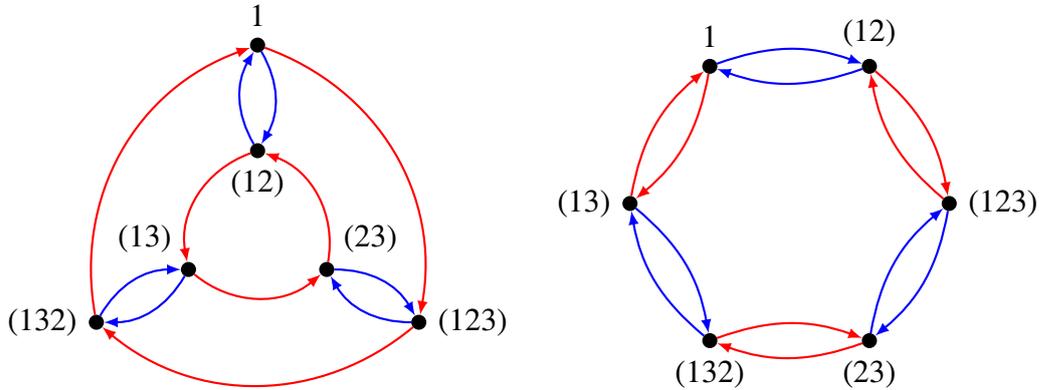


*Observación 7.2.* El grafo de Cayley no es único para un mismo grupo. Depende del conjunto de generadores elegido.

*Ejemplo 7.2.* A la izquierda, el grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}_6 = \langle x|x^6 \rangle$  respecto a  $S_1 = \{x\}$ . A la derecha, respecto a  $S_2 = \{x^2, x^3\}$  (en rojo, las aristas correspondientes a  $x^2$ ; en azul, las correspondientes a  $x^3$ ).



*Ejemplo 7.3.* A la izquierda, el grafo de Cayley de  $S_3$  respecto  $\{(123), (12)\}$  (en rojo, las aristas correspondientes a  $(123)$ ; en azul, las correspondientes a  $(12)$ ). A la derecha, respecto a  $\{(12), (13)\}$  (en rojo,  $(13)$ ; en azul,  $(12)$ ).

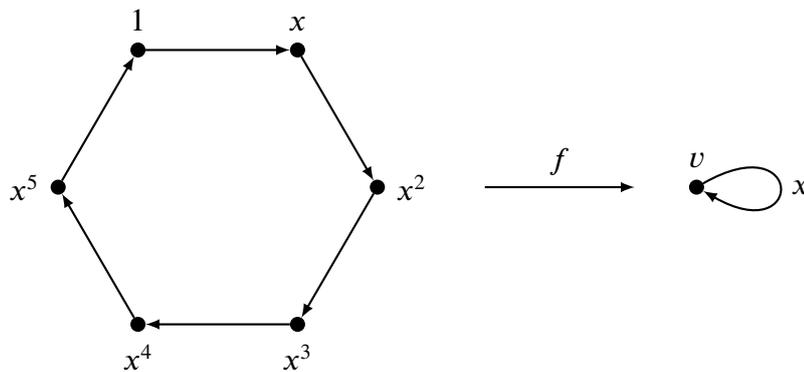


Sea  $F$  el grupo libre generado por  $S$ . Veamos que todo grupo generado por  $S$  es isomorfo a un grupo cociente de  $F$ . Para ello, tenemos que ver un grafo de Cayley  $\Gamma_C(G, S)$  como un recubrimiento  $f : \Gamma_C(G, S) \rightarrow \Delta$ , donde  $\Delta$  es el grafo de un vértice  $v$  y  $\pi_1(\Delta)$  es el grupo libre generado por  $S$ . Si tomamos como vértice base del grafo de Cayley el vértice correspondiente al elemento neutro 1, tenemos que

$$G = f^{-1}(v) \stackrel{(*)}{=} \pi_1(\Delta) / f(\pi_1(\Gamma_C(G, S), 1)) = \langle S \rangle / f(\pi_1(\Gamma_C(G, S)), 1).$$

(\*) lo obtenemos de la proposición 2.8.

*Ejemplo 7.4.* Veamos el grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}_6 = \langle x | x^6 \rangle$  respecto a  $S_1 = \{x\}$  como un recubrimiento.



Tenemos que  $\mathbb{Z}_6 = \langle x \rangle / \langle x^6 \rangle$ .

Para acabar, veamos un último resultado. Para ello, tenemos que definir antes el concepto de recubrimiento regular.

**Definición 7.2.** Sea  $f : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  un recubrimiento de grafos y  $\tilde{v}$  un vértice de  $\tilde{\Gamma}$  y  $v$  un vértice de  $\Gamma$  tal que  $f(\tilde{v}) = v$ . El recubrimiento  $f$  se dice regular si  $f(\pi_1(\tilde{\Gamma}, \tilde{v}))$  es un subgrupo normal de  $\pi_1(\Gamma, v)$ .

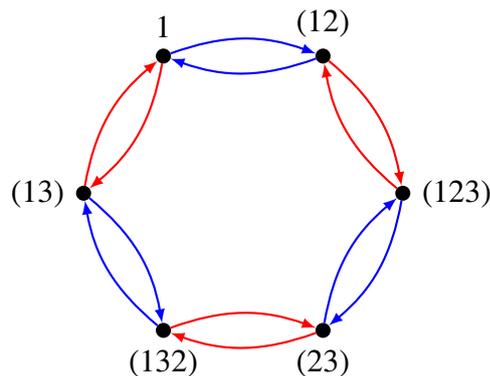
En este caso el grupo de automorfismos de  $f$ ,  $G(f)$ , actúa de forma transitiva sobre  $f^{-1}(v)$ , con  $v \in V(\Gamma)$  ([9], capítulo V, lema 8.1).

El siguiente resultado nos dice que los grafos de Cayley son recubrimientos regulares. Lo hemos obtenido de [9] (capítulo V, proposición 8.2), aplicándolo a grafos de Cayley.

**Proposición 7.1.** Sea  $G$  un grupo,  $S$  un conjunto de generadores de  $G$  y  $\Gamma_C(G, S)$  el grafo de Cayley asociado. Por la forma en la que  $G$  actúa sobre  $\Gamma_C(G, S)$ , tenemos que  $\Gamma_C(G, S)/G$  es el grafo de un vértice tal que su grupo fundamental es el grupo libre generado por  $S$ . Sea entonces  $f : \Gamma_C(G, S) \rightarrow \Gamma_C(G, S)/G$  la proyección natural de  $\Gamma_C(G, S)$  sobre su espacio cociente. Entonces,  $(\Gamma_C(G, S), f)$  es un recubrimiento regular de  $\Gamma_C(G, S)/G$ , y  $G = G(f)$ .

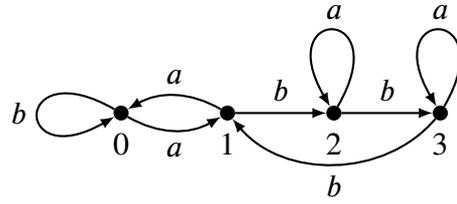
Luego, si vemos un grafo de Cayley como el recubridor de un grafo con un vértice, por ser un recubridor regular, tenemos que si la elevación de un generador  $\alpha$  en un vértice  $u$  es un lazo, entonces la elevación de  $\alpha$  en cualquier otro vértice  $v$  es también un lazo. De igual forma, si la elevación en un vértice  $u$  es un arco abierto, entonces la elevación en cualquier otro vértice  $v$  es otro arco abierto.

**Ejemplo 7.5.** El siguiente grafo es el grafo de Cayley de  $S_3$  respecto a  $\{(12), (13)\}$  (en rojo, (13); en azul, (12)).



Podemos ver que las elevaciones de (12) y (13) siempre son arcos abiertos, independientemente del vértice escogido.

*Ejemplo 7.6.* El siguiente grafo es el recubridor del grafo de un vértice y dos aristas,  $a$  y  $b$ . Las etiquetas de las aristas indican la imagen por el recubrimiento.



Este grafo no es un grafo de Cayley, pues no es un recubrimiento regular. Por ejemplo, podemos ver que la elevación de la arista  $b$  en el vértice 0 es un lazo, mientras que la elevación en el vértice 1 es un arco abierto.



# Bibliografía

- [1] ADÁMEK, J., HERRLICH, H., AND STRECKER, G. E. Abstract and concrete categories. the joy of cats.
- [2] BOGOPOLSKI, O. *Introduction to group theory*, vol. 6. European Mathematical Society, 2008.
- [3] DUMMIT, D. S. Richard m. Foote. *Abstract Algebra* (2004).
- [4] GEOGHEGAN, R. *Topological methods in group theory*, vol. 243. Springer Science & Business Media, 2007.
- [5] GERSTEN, S. M. Intersection of finitely generated subgroups of free groups and resolutions of graphs. *Inventiones mathematicae* 71, 3 (1983), 567–591.
- [6] HALL, M. Coset representations in free groups. *Transactions of the American Mathematical Society* 67, 2 (1949), 421–432.
- [7] HATCHER, A. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [8] LOPEZ DE GAMIZ ZEARRA, J. Finite graphs, free groups and Stallings' foldings.
- [9] MASSEY, W. S. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Springer Science & Business Media, 1991.
- [10] NEUMANN, W. D. On intersections of finitely generated subgroups of free groups. In *Groups—Canberra 1989*. Springer, 1990, pp. 161–170.
- [11] STALLINGS, J. R. Topology of finite graphs. *Inventiones mathematicae* 71, 3 (1983), 551–565.