Operadores esencialmente normales y existencia de subespacios invariantes

Álvaro Aguilar Reyes

Un trabajo de fin de máster presentado con
la supervisión de Miguel Lacruz Martín

Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla
28 de Junio de 2021

Abstract

A main problem of Operator Theory consists of studying which operators have an invariant subspace, or what properties they must have to possess it.

In this project we will work on separable complex Hilbert spaces and we will begin by defining and viewing properties of the classical topologies that we will use. Later, we will continue studying compact operators and proving the existence of invariant subspace.

Next, we will do the same with normal operators, relying on the spectral theorem. Finally, we will define what is known as an essentially normal operator, and we will study a fairly recent result on the existence of these invariant subspaces under certain hypotheses.

Resumen

Un problema principal de la Teoría de Operadores consiste en estudiar qué operadores tienen subespacio invariante, o que propiedades deben tener para poseerlo.

En este proyecto trabajaremos sobre espacios de Hilbert separables complejos y comenzaremos definiendo y viendo propiedades de las topologías clásicas que usaremos. Después, continuaremos estudiando los operadores compactos y probando la existencia de subespacio invariante.

A continuación, haremos lo mismo con los operadores normales, apoyándonos en el teorema espectral. Finalmente, definiremos lo que se conoce como operador esencialmente normal, y estudiaremos un resultado bastante reciente sobre la existencia de dichos subespacios invariantes bajo ciertas hipótesis.

Índice

Capítulo 1

Introducción

Un problema muy importante en teoría de operadores durante las últimas décadas es el problema del subespacio invariante. Consiste en, dado un espacio de Banach X y un operador T lineal y continuo sobre X, encontrar un subespacio cerrado no trivial E de X de manera que $TE \subseteq E$. Von Neumann probó en 1935 en un trabajo no publicado que todo operador compacto en un espacio de Hilbert complejo posee subespacio invariante. Posteriormente, en 1954 Aronszajn y Smith extienden este resultado a operadores en espacios de Banach. Más adelante, Bernstein y Robinson prueban en 1966 que si un operador es polinomialmente compacto (es decir, que existe un polinomio p tal que $p(T)$ es un operador compacto), entonces posee subespacio invariante. Dicha prueba se hizo usando análisis no estándar, sin embargo, Halmos obtuvo una demostración del mismo resultado usando métodos clásicos. Finalmente, en 1973 Victor Lomonosov prueba que todo operador no escalar en un espacio de Banach que conmute con un operador compacto tiene subespacio invariante. El resultado llegó como un relámpago en un cielo despejado, provocando un gran estruendo en la comunidad matemática.

También se realizaron investigaciones para encontrar operadores sin subespacios invariantes. Per Enflo construyó en 1976 el primer ejemplo en un espacio de Banach de un operador que no lo tenía, aunque dicho ejemplo no apareció publicado hasta 1987. Mientras tanto, Beauzamay simplificó el ejemplo y Read encontró otros distintos. En 2011, Angyros y Haydon construyeron un espacio de Banach en el que todo operador es suma de un escalar y un compacto, y por el teorema de Lomonosov, todos tienen subespacio invariante.

No obstante, después de tantas décadas, la pregunta de la existencia de subespacio invariante para operadores en espacios de Hilbert permanece abierta. Éste será el ámbito de este trabajo, estudiaremos la existencia de subespacio invariante para ciertos operadores en espacios de Hilbert. Remarcaremos que a lo largo de todo el trabajo, cuando hablemos de espacios de Hilbert lo notaremos con H, y estos espacios siempre serán separables, complejos y de dimensión infinita (a no ser que se indique lo contrario). De igual manera, notaremos $B(H)$ al espacio de los operadores lineales y continuos sobre H y siempre que consideremos un operador $T \in B(H)$, este operador será no nulo (a no ser que se diga lo contrario).

En el primer capítulo del trabajo estudiaremos las topologías en espacios de Hilbert y en el álgebra de operadores que usaremos. Las definiremos y veremos algunas propiedades de estas topologías, siguiendo los resultados vistos en [2]. En la última sección, estudiaremos la compacidad de la bola unidad en la topología fuerte de operadores y daremos ejemplos que nos serán útiles en las conclusiones del trabajo. En dicha sección, seguiremos los resultados estudiados en [3].

En el segundo capítulo resolveremos el problema de subespacio invariante para operadores compactos en espacios de Hilbert. Empezaremos definiendo estos operadores y viendo algunas propiedades, y a continuación, estudiaremos el espectro de un operador compacto usando la alternativa de Fredholm. Finalmente, utilizaremos lo anterior para demostrar el teorema de Victor Lomonosov de 1973, que nos da la existencia de subespacios invariantes que buscábamos. Para todo esto, utilizaremos resultados vistos en [1], [5] y [7].

En el tercer capítulo seguiremos una estructura bastante parecida al anterior, pero encontraremos subespacios invariantes para operadores normales. Para ello, empezaremos por definirlos y dar algunas propiedades suyas. Después, utilizando resultados vistos en el Máster, enunciaremos el teorema espectral, con el cual, siguiendo las ideas dadas en [6], podemos probar la existencia de subespacios invariantes para operadores normales, así como un teorema que nos será de utilidad en el siguiente capítulo, éste es, el teorema de Fuglede-Putnam.

Finalmente, en el último capítulo estudiaremos el resultado más interesante y que también fue dado por Victor Lomonosov en 1980 ([4]). En este, estudiaremos la existencia de subespacio invariante para operadores esencialmente normales que cumplan ciertas condiciones. Para conseguirlo, definiremos estos operadores, daremos algunas propiedades y probaremos que tanto los operadores compactos como los normales son esencialmente normales. Después, usaremos resultados de [2] para estudiar la descomposición polar de un operador, y ayudándonos de esto, probaremos finalmente lo que buscábamos. También, para acabar, daremos algunas conclusiones relativas a los operadores esencialmente normales y veremos que, como comentábamos antes, el problema del subespacio invariante todavía esta abierto en muchos sentidos.

Capítulo 2

Topologías

En este capítulo presentaremos las topologías que usaremos a lo largo del trabajo, así como algunas de sus propiedades, para dejar claro dónde estamos trabajando. Estudiaremos la topología débil en espacios de Hilbert, las topologías en el álgebra de operadores y veremos brevemente algunos resultados sobre la compacidad de la bola unidad en la topología fuerte de operadores. Todos los resultados de las primeras dos secciones del capítulo se han estudiado siguiendo [2]. Sin embargo, los enunciados del último capítulo fueron estudiadas en [3].

2.1. Topología débil en espacios de Hilbert

Un espacio de Hilbert es un espacio métrico, y por tanto, un espacio topológico. La topología métrica (o topología de la norma) de un espacio de Hilbert H es frecuentemente llamada la topología fuerte. Una base para la topología fuerte es la colección de bolas abiertas, es decir, conjuntos de la forma

$$\{f \in H : \|f - f_0\| < \varepsilon\}$$

donde $f_0 \in H$ es el centro de la bola y $\varepsilon > 0$ es el radio.

Otra topología, llamada topología débil, juega un importante papel en la teoría de espacios de Hilbert.

Definición 2.1.1. Llamamos topología débil de un espacio de Hilbert H a la topología dada por la subbase (no una base) definida por la colección de todos los conjuntos de la forma

$$\{f \in H : |(f - f_0, g_0)| < \varepsilon\}$$

donde $(\cdot, \cdot)$ representa el producto escalar en H, $f_0, g_0 \in H$ y $\varepsilon > 0$.
Se sigue de lo anterior que una base para la topología débil es la colección de todos los

conjuntos de la forma

$$\{f \in H : |(f - f_0, g_i)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, k\}$$

donde k es un entero positivo, $f_0, g_1, \ldots, g_k \in H$ y $\varepsilon > 0$.

A partir de la anterior definición de bases para esta topología se prueba que, dada (f_n) una sucesión en H y $f \in H$, entonces $f_n \longrightarrow f$ débilmente si y sólo si $(f_n, g) \longrightarrow (f, g)$ para cualquier $g \in H$.

Veamos la relación que existe entre la topología débil y la fuerte en espacios de Hilbert.

Proposición 2.1.2. *Sea H un espacio de Hilbert. Cada conjunto débilmente cerrado en H es fuertemente cerrado en H, pero el recíproco no es cierto. Sin embargo, cada subespacio de H es débilmente cerrado.*

Demostración. Si S es un conjunto débilmente cerrado en H y si (f_n) es una sucesión de vectores en S con $f_n \longrightarrow f$ fuertemente, entonces, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|(f_n, g) - (f, g)| \leq \|f_n - f\| \cdot \|g\| \longrightarrow 0$$

Luego $f_n \longrightarrow f$ débilmente, y por ser S débilmente cerrado, tenemos que $f \in S$. Esto prueba que los conjuntos débilmente cerrados son fuertemente cerrados.

Veamos que el recíproco no se cumple. Sea $\{e_1, e_2, \cdots\}$ una sucesión ortonormal. Para cada vector $f \in H$, los productos escalares (f, e_n) son los coeficientes de Fourier de f, y, de esta manera, son los términos de una serie de cuadrados absolutamente convergentes. Por tanto, $(f, e_n) \longrightarrow 0$ para cualquier f, o lo que es lo mismo, $e_n \longrightarrow 0$ débilmente. Entonces, el conjunto $\{e_1, e_2, \cdots\}$ no es débilmente cerrado, pues 0 no pertenece al conjunto, al ser los e_n ortonormales. Sin embargo, en la topología fuerte, dicho conjunto es discreto, ya que, para $n \neq m$

$$\begin{aligned} \|e_n - e_m\|^2 &= (e_n - e_m, e_n - e_m) = (e_n, e_n) - (e_n, e_m) - (e_m, e_n) + (e_m, e_m) \\ &= 1 - 0 - 0 + 1 = 2 \Longrightarrow d(e_n, e_m) = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Por tanto, al ser discreto es fuertemente cerrado. Luego hemos encontrado un conjunto fuertemente cerrado que no es débilmente cerrado.

Nos falta probar que todo subespacio es débilmente cerrado. Si (f_n) es una sucesión en un subespacio M, y si $f_n \longrightarrow f$ débilmente, entonces, por definición, $(f_n, g) \longrightarrow (f, g)$ para cualquier $g \in H$. Como f_n es ortogonal a $M^\perp$ (donde se define $M^\perp = \{g \in H : (f, g) = 0,\ \forall f \in M\}$), se sigue que f es ortogonal a $M^\perp$, por la convergencia débil anterior. Por tanto, $f \in M$, como queríamos demostrar.

□

Acabamos de ver que la convergencia fuerte implica la convergencia débil. Ahora estudiaremos cuándo ocurre lo contrario.

Proposición 2.1.3. *Sea H un espacio de Hilbert. Si $f_n \longrightarrow f$ débilmente en H y $\|f_n\| \longrightarrow \|f\|$, entonces $f_n \longrightarrow f$ fuertemente en H.*

Demostración. La prueba se deriva fácilmente de la igualdad

$$\|f_n-f\|^2 = (f_n-f, f_n-f) = (f_n, f_n)-(f_n, f)-(f, f_n)+(f, f) = \|f_n\|^2-(f, f_n)-(f_n, f)+\|f\|^2$$

Como $f_n \longrightarrow f$ débilmente, entonces

- $(f, f_n) \longrightarrow (f, f) = \|f\|^2$
- $(f_n, f) \longrightarrow (f, f) = \|f\|^2$

Usando esto y la hipótesis de que $\|f_n\| \longrightarrow \|f\|$, nos queda que

$$\|f_n - f\|^2 \longrightarrow \|f\|^2 - \|f\|^2 - \|f\|^2 + \|f\|^2 = 0 \Longrightarrow \|f_n - f\| \longrightarrow 0$$

Por tanto, $f_n \longrightarrow f$ fuertemente, como queríamos probar. □

Cuando se trabaja con convergencia en topologías, siempre es interesante preguntarse qué ocurre en la bola unidad. Veamos que en dicha bola, la convergencia fuerte y la convergencia débil uniforme coinciden.

Proposición 2.1.4. *La convergencia fuerte es la misma que la convergencia débil uniforme en la bola unidad. De hecho, si H es un espacio de Hilbert, $(f_n) \subset H$ una sucesión, entonces $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$ para un cierto $f \in H$ si y sólo si $(f_n, g) \longrightarrow (f, g)$ uniformemente para todo $g \in H$ con $\|g\| = 1$.*

Demostración. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $f = 0$.

Veamos la primera implicación. Se tiene entonces que $\|f_n\| \longrightarrow 0$. Además, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y tomando $g \in H$ con $\|g\| = 1$, tenemos que $|(f_n, g)| \leq \|f_n\| \cdot \|g\| = \|f_n\|$. Por tanto, se sigue que $(f_n, g) \longrightarrow 0$ uniformemente, como se quería probar.

Vamos a probar ahora la otra implicación. Supongamos que $(f_n, g) \longrightarrow 0$ uniformemente, para todo $g \in H$ con $\|g\| = 1$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, si $n \in \mathbb{N}$ es suficientemente grande, se tiene

$$|(f_n, g)| < \epsilon$$

Por la uniformidad, sabemos que el valor de n no depende de g. Dicho de otro modo, si n es suficientemente grande, se tiene que

$$\left|\left(f_n, \frac{g}{\|g\|}\right)\right| < \varepsilon$$

para cualquier $g \in H$ con $g \neq 0$. Así tenemos que

$$|(f_n, g)| \leq \varepsilon \|g\| \textit{ para cualquier } g$$

Ahora, si n es suficientemente grande, y tomando $g = f_n$, obtenemos que

$$|(f_n, f_n)| = \|f_n\|^2 \leq \varepsilon \|f_n\|$$

O dicho de otro modo,

$$\|f_n\| \leq \varepsilon$$

Por tanto, hemos probado que $\|f_n\| \longrightarrow 0$, como queríamos.

□

El siguiente resultado es bastante interesante y referente a la compacidad de la bola unidad con la topología débil. Algunas veces es conocido como el teorema de Tychonoff-Alaoglu.

Proposición 2.1.5. *La bola unidad en un espacio de Hilbert es débilmente compacta.*

Demostración. Sea H un espacio de Hilbert, para cada $f \in H$ sea D_f el disco cerrado $D_f = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|f\|\}$ en el plano complejo, y sea $\mathbf{D}$ el producto cartesiano de todos los D_f, con la topología producto usual. Para cada g en la bola unidad, la aplicación $f \longmapsto (f, g)$ es un punto, digamos $\delta(g)$, en $\mathbf{D}$. Esto se debe a que $\delta(g)(f) = (f, g) \in D_f$, para todo $f \in H$, ya que, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\| \leq \|f\|$. Si notamos B_H la bola unidad del espacio de Hilbert H, sea

$$\begin{array}{rccc} \delta : & B_H & \longrightarrow & \mathbf{D} \\ & g & \longmapsto & \delta(g) \end{array}$$

La aplicación δ así definida es un homeomorfismo de la bola unidad (con la topología débil) en $\mathbf{D}$ (con la topología producto). Veámoslo. Claramente es inyectiva, ya que si $\delta(g) = \delta(h)$ con $h \neq g$, entonces $(f, g) = (f, h)$ para cualquier $f \in H$, es decir, $(f, g - h) = 0$ para cualquier $f \in H$. Tomando $f = g - h$, nos queda que $\|g - h\| = 0$, es decir, $g = h$, y por tanto δ es inyectiva. Para la continuidad supongamos que (f_n) converge débilmente a f en la bola unidad. Por la topología débil, (f_n, g) converge a (f, g) para cualquier $g \in H$. Esto es lo mismo que decir que $\overline{(g, f_n)}$ converge a $\overline{(g, f)}$ para cualquier $g \in H$. Usando ahora la continuidad de la conjugación, nos queda que (g, f_n) converge a (g, f) para cualquier $g \in H$, o lo que es lo mismo, $\delta(f_n)$ converge a $\delta(f)$. Por tanto, la aplicación δ es continua. Sin embargo, δ no es sobreyectiva, ya que $\delta(g)$ es lineal, pero no todos los elementos de $\mathbf{D}$ tienen porqué serlo. Consideraremos entonces la aplicación $\delta : B_H \longrightarrow Im(\delta)$, y calcularemos explícitamente cuánto vale su imagen. Si $\varphi \in \mathbf{D}$, por ser $\mathbf{D}$ un espacio producto, φ es de la forma

$$\varphi : H \longrightarrow \mathbb{C} \textit{ tal que } \varphi(f) \in D_f, \, \forall f \in H$$

Claramente, $\|\varphi\| \leq 1$, ya que $|\varphi(f)| \leq \|f\|$ para todo $f \in H$. Si consideramos $A \subset \mathbf{D}$ definida como $A = \{\varphi \in \mathbf{D} : \varphi \textit{ es lineal}\}$ tenemos, por el teorema de representación de Riesz, que para cualquier $\varphi \in A$, al ser lineal, existe un único $g \in H$ con $\|g\|_H = \|\varphi\| \leq 1$ y tal que $\varphi(f) = (f, g)$ para todo $f \in H$. Por tanto, $\varphi = \delta(g)$ y tenemos que $Im(\delta) = A$. Luego $\delta : B_H \longrightarrow Im(\delta)$ es biyectiva y continua. Falta ver que es de inversa continua. Definimos

$$\begin{array}{rccc} \delta^{-1}: & Im(\delta) & \longrightarrow & B_H \\ & \varphi & \longmapsto & g \end{array}$$

donde $g \in B_H$ es el dado por el teorema de representación de Riesz. Sea (φ_n) una sucesión en $Im(\delta)$ que converge a φ en la topología producto, y sean $g_n = \delta^{-1}(\varphi_n)$, $g = \delta^{-1}(\varphi)$. Veamos que (g_n) converge a g en la topología débil. Como (φ_n) converge a φ en la topología producto, entonces converge puntualmente, es decir, $(\varphi_n(f))$ converge a $\varphi(f)$ para todo $f \in H$. Dicho de otro modo,

$$\varphi_n(f) = (f, g_n) \longrightarrow \varphi(f) = (f, g) \textit{ para todo } f \in H$$

Lo anterior es equivalente a decir que $\overline{(g_n, f)} \longrightarrow \overline{(g, f)}$, y usando lo continuidad de la conjugación, que $(g_n, f) \longrightarrow (g, f)$ para todo $f \in H$. Por definición, tenemos que (g_n) converge a g en la topología débil, y por tanto, que δ^{-1} es continua y δ es un homeomorfismo.

El argumento hasta ahora logró construir un homeomorfismo δ de la bola unidad en su imagen contenida en $\mathbf{D}$. Tenemos que $\mathbf{D}$ es un espacio de Hausdorff compacto en la topología producto, por ser un producto cartesiano de espacios de Hausdorff compactos (los D_f). El resto del argumento mostrará que $Im(\delta)$ es cerrada en $\mathbf{D}$ (y entonces compacta, por ser un cerrado contenido en un compacto). Una vez probado esto, la compacidad débil de la bola unidad es evidente, ya que se trata de un homeomorfismo.

Pasamos pues a probar que la imagen de δ es cerrada. Sea (φ_n) una sucesión en $\delta(B_H)$ tal que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ con la topología producto. Claramente $\varphi \in \mathbf{D}$, por ser éste un compacto. Veamos que además $\varphi \in \delta(B_H)$, y así habremos probado que es cerrada. Usaremos de nuevo que la convergencia en la topología producto implica la convergencia puntual, luego si consideramos $f_1, f_2 \in H$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, usando que los φ_n son lineales (por pertenecer a la imagen de δ) se tiene que

$$\varphi(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \lim_{n\to+\infty} [\alpha_1\varphi_n(f_1) + \alpha_2\varphi_n(f_2)]$$

Usando ahora que el límite puntual es lineal, tenemos que

$$\varphi(f_1 + f_2) = \alpha_1 \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(f_1) + \alpha_2 \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(f_2) = \alpha_1\varphi(f_1) + \alpha_2\varphi(f_2)$$

Por tanto, φ es lineal, luego $\varphi \in \delta(B_H)$ y la imagen de δ es cerrada en la topología producto. Por tanto, es compacta en la topología producto, y por ser δ un homeomorfismo, la bola unidad de H es compacta en la topología débil. $\square$

Para acabar, estudiemos cuándo la bola unidad de un espacio de Hilbert con la topología débil es metrizable.

Lema 2.1.6. *La bola unidad de un espacio de Hilbert H separable con la topología débil es metrizable.*

Demostración. En la prueba que veremos no sólo probaremos que es metrizable, sino que además daremos una métrica concreta para la topología débil de la bola unidad de H. Como nuestro espacio de Hilbert es separable, existe $\{e_1, e_2, \dots\}$ base ortonormal numerable de H. Para cada vector $f \in H$ escribimos

$$|f| = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} |(f, e_j)|$$

Como, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $|(f, e_j)| \leq \|f\| \cdot \|e_j\| = \|f\|$ para todo j, tenemos que

$$|f| \leq \|f\| \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \|f\| < +\infty$$

luego la serie converge, y además define una norma en H. Si definimos $d(f, g) = |f - g|$ para cualesquiera $f, g \in H$ con $\|f\| \leq 1$, $\|g\| \leq 1$, entonces d es una métrica en la bola unidad de H. Para probar que d es la métrica asociada a la topología débil de la bola unidad es suficiente con probar que, si (f_n) es una sucesión en la bola unidad, entonces

$$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \textit{ débilmente } \Longleftrightarrow |f_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Vamos a probarlo. Supongamos que $f_n \longrightarrow 0$ débilmente. En particular, por la definición de convergencia débil se tiene que

$$(f_n, e_j) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \textit{ para todo } j$$

Sea $\varepsilon > 0$ y $J \in \mathbb{N}$. Por la convergencia anterior, para cada $j \in \{1, \dots, J\}$ existe un $n_j \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq n_j$ se cumple que $|(f_m, e_j)| < \varepsilon$. Sea $n_0 = \max\limits_{1 \leq j \leq J} \{n_j\}$, entonces para todo $m \geq n_0$ se verifica que

$$|(f_m, e_j)| < \varepsilon \textit{ para todo } j \in \{1, \dots, J\}$$

Por tanto, si consideramos $S_J(f_m)$ la suma parcial J-ésima de la serie $|f_m|$ se tiene que

$$S_J(f_m) = \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{2^j} |(f_m, e_j)| < \varepsilon \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{2^j} \leq \varepsilon$$

Como J era arbitrario, se tiene que dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \geq n_0$ se verifica que

$$|f_m| < \varepsilon$$

Como ε era arbitrario, esto es equivalente a decir que

$$|f_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Supongamos ahora que $|f_n| \longrightarrow 0$. Como la suma de la serie de $|f_n|$ domina cada término, es decir,

$$\frac{1}{2^k}|(f_n, e_k)| \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j}|(f_n, e_j)| = |f_n|,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

se sigue que $(f_n, e_j) \longrightarrow 0$ cuando n tiende a infinito, para todo j. Esto implica que si tomamos $g \in H$ una combinación lineal finita de los e_j, entonces $(f_n, g) \longrightarrow 0$. Tales combinaciones lineales son claramente densas (como $\{e_1, e_2, \ldots\}$ es una base de H, todo elemento de H se puede ver como el límite de una sucesión de combinaciones lineales finitas de elementos de la base). Luego, si $h \in H$, entonces

$$|(f_n, h)| = |(f_n, h + g - g)| \leq |(f_n, h - g)| + |(f_n, g)|$$

para cualquier g combinación lineal finita de los e_j. Dado $\varepsilon > 0$, por la densidad de dichas combinaciones lineales finitas, elegimos g de manera que $\|h - g\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ahora, como se tiene que $(f_n, g) \longrightarrow 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica que $|(f_n, g)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Aplicando todo esto a la desigualdad anterior y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y que $\|f_n\| \leq 1$, nos queda que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica que

$$|(f_n, h)| \leq |(f_n, h-g)| + |(f_n, g)| \leq \|f_n\| \cdot \|h-g\| + |(f_n, g)| \leq \|h-g\| + |(f_n, g)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Como ε era arbitrario, esto significa que $(f_n, h) \longrightarrow 0$. Como esto ocurre para cualquier $h \in H$, por definición tenemos que $f_n \longrightarrow 0$ débilmente en la bola unidad de H.

Por tanto, hemos probado que la bola unidad en un espacio de Hilbert separable con la topología débil es metrizable, y además su métrica es

$$d(f, g) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j}|(f - g, e_j)|$$

para cualquier f y g en dicha bola.

□

2.2. Topologías en el álgebra de operadores

Un espacio de Hilbert tiene dos topologías útiles (la topología fuerte y la débil), sin embargo, el espacio de operadores sobre un espacio de Hilbert tiene varias. Empecemos estudiando la topología uniforme o topología de la norma.

Definición 2.2.1. Si la distancia entre dos operadores A y B se define como $d(A, B) = \|A - B\|$, el conjunto de todos los operadores en un espacio de Hilbert se convierte en un espacio métrico. La topología heredada por esta métrica es la que denominaremos topología uniforme o topología de la norma.

Poco después de la introducción de una topología en una estructura algebraica, como es el espacio de operadores de un espacio de Hilbert, es necesario preguntarse sobre la continuidad de las operaciones algebraicas pertinentes. En el caso actual, resulta que todas las operaciones algebraicas elementales (combinaciones lineales, conjugación, multiplicación) son continuas en todas sus variables simultáneamente, y la norma de un operador es también una función continua. Todas estas pruebas son elementales, gracias a la convergencia en esta topología (si (A_n) es una sucesión de operadores que converge hacia A, entonces $\|A_n - A\|$ converge a cero).

La principal operación algebraica no mencionada antes es la inversión. Como no todos los operadores son invertibles, la pregunta sobre la continuidad de la inversión tiene sentido sólo en un subconjunto del espacio de operadores.

Proposición 2.2.2. *El conjunto de los operadores invertibles sobre un espacio de Hilbert H es abierto en la topología uniforme. Además, si A es un operador sobre H, la aplicación $A \longmapsto A^{-1}$ del conjunto de operadores invertibles en sí mismo es continua con la topoogía de la norma.*

Demostración. Un truco estándar para demostraciones en el espacio de operadores es la identidad

$$(I - A)^{-1} = 1 + A + A^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$$

Si $\|A\| < 1$, entonces la serie converge (con respecto a la norma del operador), y manipulaciones algebraicas prueban que esta suma efectivamente actúa como el inverso de $I - A$.

Remplazando A por $I - A$ y reescribiendo la hipótesis, tenemos que si $\|I - A\| < 1$ entonces A es invertible, y

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (I - A)^n$$

Se sigue que

$$\|A^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|(I-A)^n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|I-A\|^n = \frac{1}{1-\|I-A\|}$$

Supongamos ahora que A_0 es un operador invertible. Entonces

$$I - AA_0^{-1} = (A_0 - A)A_0^{-1}$$

para cada A. Se sigue entonces que si $\|A_0 - A\| < \dfrac{1}{\|A_0^{-1}\|}$, entonces $\|I - AA_0^{-1}\| < 1$. Esto implica que si $\|A_0 - A\| < \dfrac{1}{\|A_0^{-1}\|}$, entonces A es invertible, ya que por lo anterior, AA_0^{-1} lo sería, pero el producto de dos operadores invertibles también lo es, y multiplicando por A_0 nos queda que A es invertible. Entonces, usando lo anterior y que AA_0^{-1} es invertible, nos queda que

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\| &= \|A_0^{-1}(A_0 A^{-1})\| \leq \|A_0^{-1}\| \cdot \|A_0 A^{-1}\| \leq \|A_0^{-1}\| \cdot \frac{1}{1 - \|I - (A_0 A^{-1})^{-1}\|} \\ &= \frac{\|A_0^{-1}\|}{1 - \|I - AA_0^{-1}\|} \leq \frac{\|A_0^{-1}\|}{1 - \|A_0 - A\| \cdot \|A_0^{-1}\|} \end{aligned}$$

Como conclusión, dado un operador invertible A_0 podemos encontrar un entorno de radio $\dfrac{1}{\|A_0^{-1}\|}$ de manera que para todo operador A perteneciente a dicho entorno, se verifica que A es invertible, y por tanto todo el entorno está contenido en el subconjunto de los operadores invertibles y dicho subconjunto es abierto. No sólo eso, sino que acabamos de probar que todo elemento de dicho entorno, además de invertible, verifica que la norma de su inverso es acotada.

Con el resultado del párrafo anterior también podemos probar la continuidad de la inversión. Dado $\varepsilon > 0$, tenemos que encontrar $\delta > 0$ tal que si $\|A - A_0\| < \delta$, entonces $\|A^{-1} - A_0^{-1}\| < \varepsilon$. Si tomamos $\delta < \dfrac{1}{\|A_0^{-1}\|}$, entonces por el párrafo anterior existe una constante $M > 0$ tal que $\|A^{-1}\| < M$. Observemos que

$$\|A_0^{-1} - A^{-1}\| = \|A_0^{-1}(A - A_0)A^{-1}\| \leq \|A_0^{-1}\| \cdot \|A - A_0\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Tomando entonces $\delta = \text{mín}\left\{\dfrac{\varepsilon}{M\|A_0^{-1}\|}, \dfrac{1}{\|A_0^{-1}\|}\right\}$, nos queda que

$$\|A_0^{-1} - A^{-1}\| < \varepsilon$$

y por tanto, la inversión es continua, como queríamos probar.

$\square$

Ahora pasaremos a definir las topologías fuerte y débil en el álgebra de operadores, así como a ver algunas propiedades de estas topologías.

Definición 2.2.3. Una subbase para la topología fuerte de operadores es la colección de todos los conjuntos de la forma

$$\{A : \|(A - A_0)f\| < \varepsilon\}$$

donde A_0 es un operador sobre un espacio de Hilbert H, $f \in H$ y $\varepsilon > 0$. Correspondientemente, una base para dicha topología es la colección de todos los conjuntos de la forma

$$\{A : \|(A - A_0)f_i\| < \varepsilon, \;\; i = 1, \ldots, k\}$$

donde k es un entero positivo, $f_i \in H$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_0 es un operador sobre H y $\varepsilon > 0$.

Diremos entonces que una sucesión (A_n) de operadores sobre H converge a A en la topología fuerte de operadores si $(A_n f)$ converge fuertemente a Af para cualquier $f \in H$ (es decir, $\|A_n f - Af\| \longrightarrow 0$ para cada $f \in H$).

Definición 2.2.4. Una subbase para la topología débil de operadores es la colección de todos los conjuntos de la forma

$$\{A : |((A - A_0)f, g)| < \varepsilon\}$$

donde A_0 es un operador sobre un espacio de Hilbert H, $f, g \in H$ y $\varepsilon > 0$. Una base para dicha topología es la colección de todas las intersecciones finitas de los conjuntos anteriores.

Diremos entonces que una sucesión (A_n) de operadores sobre H converge a A en la topología débil de operadores si $A_n f$ converge débilmente a Af para cada $f \in H$ (es decir, $(A_n f, g) \longrightarrow (Af, g)$ para cualesquiera $f, g \in H$).

Las preguntas más fáciles de resolver son las relativas a la comparación.

Proposición 2.2.5. *La topología débil de operadores es más pequeña que la topología fuerte de operadores, y ésta a su vez es más pequeña que la topología de la norma. En otras palabras, cada abierto en la topología débil de operadores es abierto en la topología fuerte de operadores, y cada abierto en la topología fuerte de operadores es abierto en la topología de la norma. En todavía otras palabras, la convergencia en norma implica la convergencia fuerte de operadores, y la convergencia fuerte de operadores implica la convergencia débil de operadores.*

Demostración. Veamos esto último, y lo anterior será equivalente. Sea (A_n) una sucesión de operadores sobre un espacio de Hilbert H y A otro operador.

- Si (A_n) converge a A en la topología de la norma, entonces $\|A_n - A\| \longrightarrow 0$. Entonces, para cualquier $f \in H$ se tiene que

$$\|A_n f - Af\| = \|(A_n - A)f\| \leq \|A_n - A\| \cdot \|f\| \longrightarrow 0 \Longrightarrow \|A_n f - Af\| \longrightarrow 0$$

  Por tanto, (A_n) converge a A en la topología fuerte.

- Si (A_n) converge a A en la topología fuerte, entonces $\|A_n f - Af\| \longrightarrow 0$, para cualquier $f \in H$. Si tomamos $f, g \in H$ cualesquiera, se tiene por la desigualdad de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} |(A_n f, g) - (Af, g)| = |(A_n f - Af, g)| \leq \|A_n f - Af\| \cdot \|g\| \longrightarrow 0 \\ \Longrightarrow |(A_n f, g) - (Af, g)| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

  Por tanto, (A_n) converge a A en la topología débil.

□

En presencia de uniformidad en la bola unidad, las implicaciones son reversibles (como se vio en la proposición 2.1.4). Vamos a verlo en detalle.

Proposición 2.2.6. *Sea H un espacio de Hilbert, (A_n) una sucesión de operadores sobre H. Si $(A_n f, g) \longrightarrow (Af, g)$ uniformemente para cualquier $g \in H$ con $\|g\| = 1$ y cualquier $f \in H$, entonces $\|A_n f - Af\| \longrightarrow 0$ para cualquier $f \in H$. Si $\|A_n f - Af\| \longrightarrow 0$ uniformemente para cualquier $f \in H$ con $\|f\| = 1$, entonces $\|A_n - A\| \longrightarrow 0$.*

Demostración. La primera afirmación del enunciado es un caso particular de la proposición 2.1.4, luego no hay nada más que probar. Para demostrar la segunda afirmación, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A = 0$. La hipótesis para este caso es que, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\|A_n f\| < \varepsilon \textit{ para cualquier } f \in H \textit{ con } \|f\| = 1$$

La uniformidad nos dice que n_0 no depende de f. Se sigue entonces que para $n \geq n_0$ tenemos

$$\|A_n \frac{f}{\|f\|}\| < \varepsilon \textit{ para cualquier } f \neq 0$$

Así, obtenemos que

$$\|A_n f\| \leq \varepsilon \|f\| \textit{ para cualquier } f$$

Esto implica que para cualquier $n \geq n_0$, entonces

$$\|A_n\| \leq \varepsilon$$

Como ε era arbitrario, nos queda que $\|A_n\| \longrightarrow 0$, y ya hemos probado lo que queríamos.

□

Ahora, veremos un interesante resultado relativo a la continuidad en el álgebra de operadores, respondiendo a la siguiente pregunta: ¿Cuál de las tres topologías anteriores (uniforme, fuerte y débil) hace a la norma (es decir, la aplicación $A \longmapsto \|A\|$) continua?

Lema 2.2.7. *La topología uniforme hace a la norma continua, pero las topologías fuerte y débil hacen a la norma discontinua.*

Demostración. La prueba para la topología uniforme se deriva de la conocida desigualdad

$$|\|A\| - \|B\|| \leq \|A - B\|$$

Así, si (A_n) es una sucesión de operadores en un espacio de Hilbert que converge a A en la topología uniforme (es decir, $\|A_n - A\| \longrightarrow 0$), entonces

$$|\|A_n\| - \|A\|| \leq \|A_n - A\| \longrightarrow 0 \Longrightarrow \|A_n\| \longrightarrow \|A\|$$

Por tanto, la norma es continua en la topología uniforme. Esta prueba no dice nada sobre las convergencia en cualquier otra topología. Una norma es siempre continua con respecto a la topología que define, pero otras topologías pueden variar.

Vamos a dar un ejemplo para ver que la norma no es continua en la topología fuerte, y entonces tampoco lo será en la topología débil (porque la topología débil es más pequeña que la fuerte, es decir, todo abierto de la topología débil es abierto de la fuerte).

Sea $\{e_n\}$ una base ortonormal de nuestro espacio de Hilbert H, y consideramos los subespacios cerrados

$$M_n = \overline{\langle e_n, e_{n+1}, \cdots \rangle}$$

Claramente $\{M_n\}$ es una sucesión decreciente de subespacios cerrados no nulos con intersección nula, es decir,

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} M_n = \{0\}$$

Consideramos $\{P_n\}$ la correspondiente sucesión de proyecciones ortogonales. Cada P_n está definida para cada $x \in H$ como

$$P_n x = (x, e_n)e_n + (x, e_{n+1})e_{n+1} + \cdots$$

Por la identidad de Parseval, tenemos que

$$\|P_n x\|^2 = \sum_{k=n}^{+\infty} |(x, e_k)|^2$$

Tenemos entonces que $\|P_n\|^2$ es la cola de la serie $\sum_{k=1}^{+\infty}|(x,e_k)|^2$, y dicha serie es convergente, ya que de nuevo por la identidad de Parseval,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|(x,e_k)|^2 = \|x\|^2 < +\infty$$

Por tanto, las colas de la serie convergen a 0, es decir,

$$\|P_n x\| \longrightarrow 0 \textit{ para todo } x \in H$$

Lo anterior es equivalente a decir que P_n converge fuertemente a 0. Si la norma fuera continua en la topología fuerte, entonces $\{\|P_n\|\}$ debería converger a 0, pero esto no ocurre, ya que por ser proyecciones ortogonales, $\|P_n\| = 1$ para todo n. Por tanto, la norma no es continua en la topología fuerte, luego tampoco es continua en la topología débil.

□

Al igual que en el lema anterior, podemos seguir resolviendo preguntas útiles sobre continuidad en cada una de las topologías que hemos visto. Otro resultado interesante es resolver la pregunta: ¿Cuál de las tres topologías anteriores hace al adjunto (la aplicación $A \longmapsto A^*$) continuo?

Lema 2.2.8. *El adjunto es continuo con respecto a la topología uniforme y la topología débil, y discontinuo con respecto a la topología fuerte.*

Demostración. La prueba para la topología uniforme se debe a la igualdad

$$\|A^* - B^*\| = \|(A-B)^*\| = \|A - B\|$$

Claramente, si (A_n) es una sucesión de operadores sobre un espacio de Hilbert H que converge a A en la topología uniforme, entonces $\|A_n - A\| \longrightarrow 0$, luego

$$\|A_n^* - A^*\| = \|A_n - A\| \longrightarrow 0$$

Por tanto, el adjunto es continuo con la topología uniforme.

Ahora, debido a la definición de continuidad topológica, si una función de un espacio a otro es continua, entonces sigue siendo así si la topología del dominio se hace más grande, y permanece así si la topología del rango se hace más pequeña (este es el motivo por el que la discontinuidad de la norma en la topología fuerte implica la discontinuidad de la norma en la topología débil). Sin embargo, si una aplicación de un espacio en si mismo es continua, no se sabe cómo se comportará cuando cambiamos la topología. De hecho, cualquier cosa puede ocurrir, y el adjunto prueba esto.

Para probar la discontinuidad fuerte del adjunto, sea B el "backward shift", es decir, el operador que, dado un vector de un espacio de Hilbert H escrito en coordenadas de su base, digamos $f = (f_1, f_2, \cdots) \in H$, entonces

$$Bf = (0, f_1, f_2, \cdots)$$

Entonces el adjunto del operador B se define como, para $f = (f_1, f_2, \cdots) \in H$

$$B^*f = (f_2, f_3, \cdots)$$

Definamos $A_k = (B^*)^k$. Entonces, tenemos que, usando la identidad de Parseval

$$\|A_k f\|^2 = \|(f_k, f_{k+1}, \cdots)\|^2 = \sum_{n=k}^{+\infty} |f_n|^2$$

Como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|^2 = \|f\|^2 < +\infty$$

tenemos que $\|A_k f\|$ es, para cada $f \in H$, la cola de una serie convergente, y por tanto, se tiene que $\|A_k f\| \longrightarrow 0$ para cualquier $f \in H$. Hemos probado entonces que $A_k \longrightarrow 0$ en la topología fuerte. Sin embargo, no se verifica que $A_k^* \longrightarrow 0$ fuertemente. Esto se debe a que si $f \neq 0$, entonces $(A_k^* f)$ no es una sucesión de Cauchy, y por tanto, no converge en norma a cero. Tomando $n, m \in \mathbb{N}$ y usando que $A_k^* = B^k$ y que $\|B^k f\| = \|f\|$ para cualquier k, tenemos que

$$\begin{aligned}\|A_{m+n}^* f - A_n^* f\|^2 &= \|B^{m+n} f - B^n f\|^2 = \|B^m f - f\|^2 = \|B^m f\|^2 - 2Re(B^m f, f) + \|f\|^2 \\ &= 2(\|f\|^2 - Re(f, (B^*)^m f))\end{aligned}$$

Como vimos antes, $\|(B^*)^m f\| = \|A_m f\| \longrightarrow 0$, luego $Re(f, (B^*)^m f) \longrightarrow 0$, y nos queda que $\|A_{m+n}^* f - A_n^* f\|$ no se hace pequeña cuando m y n se hacen grandes. De hecho, cuando m se hace grande, $\|A_{m+n}^* f - A_n^* f\|$ converge a $\sqrt{2}\|f\|$. Por tanto, tenemos que $A_k \longrightarrow 0$ fuertemente, pero A_k^* no converge, luego el adjunto no es continuo en la topología fuerte.

Finalmente, para la continuidad del adjunto en la topología débil, dados $A, C \in B(H)$ y $f, g \in H$, utilizaremos la igualdad

$$|(A^* f, g) - (C^* f, g)| = |(f, Ag) - (f, Cg)| = |(Ag, f) - (Cg, f)|$$

Así, si (A_n) es una sucesión de operadores sobre H que converge débilmente a A, entonces $|(A_n g, f) - (Ag, f)| \longrightarrow 0$ para cualesquiera $f, g \in H$. Luego por la igualdad anterior, para cada $f, g \in H$ tenemos que

$$|(A_n^* f, g) - (A^* f, g)| = |(A_n g, f) - (Ag, f)| \longrightarrow 0$$

Por tanto, $A_n^* \longrightarrow A^*$ débilmente, y hemos probado la continuidad del adjunto en la topología débil.

$\square$

2.3. Compacidad en topología fuerte de operadores

Para finalizar el capítulo, en esta última sección veremos algunos resultados de compacidad en la topología fuerte de operadores, con los cuales podremos estudiar cuándo la bola unidad del álgebra de operadores es compacta con dicha topología. Recordemos que notamos $B(H)$ al álgebra de operadores sobre H, y empecemos viendo un resultado previo.

Lema 2.3.1. *Un subconjunto S de un espacio de Hilbert H es relativamente compacto si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ hay un subconjunto compacto K_ε de H tal que $S \subseteq K_\varepsilon + \varepsilon B_H$.*

Demostración. $\boxed{\Longrightarrow}$ Como S es relativamente compacto, entonces $\overline{S}$ es compacto, luego por el lema 6.0.5, $\overline{S}$ es totalmente acotado. Dado $\varepsilon > 0$, sean $x_1, \ldots, x_n \in H$ tal que

$$\overline{S} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon)$$

Tomemos $K_\varepsilon = \{x_1, \ldots, x_n\}$, que claramente es compacto. Entonces

$$S \subseteq \overline{S} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon) = K_\varepsilon + \varepsilon B_H$$

como queríamos demostrar.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $\varepsilon > 0$ y sean $x_1, \ldots, x_n \in H$ tales que

$$K_{\frac{\varepsilon}{2}} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Esto se tiene por el lema 6.0.5 y porque $K_{\frac{\varepsilon}{2}}$ es compacto. Por hipótesis y lo anterior, tenemos que

$$S \subseteq K_{\frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} B_H \subseteq \left(\{x_1, \ldots, x_n\} + \frac{\varepsilon}{2} B_H\right) + \frac{\varepsilon}{2} B_H = \{x_1, \ldots, x_n\} + \varepsilon B_H = \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon)$$

Por tanto, S es totalmente acotado. Si tomamos $\overline{S}$, también tenemos que es totalmente acotado, y además es completo por ser un cerrado en un espacio de Hilbert, que también es espacio de Banach, luego por el lema anterior $\overline{S}$ es compacto, y por tanto S es relativamente compacto.

□

Lema 2.3.2. *Sea S un subconjunto acotado de $B(H)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *S es relativamente compacto en la topología fuerte de operadores.*
2. *$\{Tx : T \in S\}$ es relativamente compacto para todo $x \in H$.*
3. *Hay un subconjunto denso D de H tal que $\{Tx : T \in S\}$ es relativamente compacto para todo $x \in D$.*

Demostración. $\boxed{(1) \Longrightarrow (2)}$ Supongamos que S es relativamente compacto en la topología fuerte de operadores. Definamos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \phi_x : & B(H) & \longrightarrow & H \\ & T & \longmapsto & Tx \end{array}$$

para cualquier $x \in H$. Dicha aplicación es continua para la topología fuerte de operadores, ya que si $T_n \longrightarrow T$ fuertemente, entonces $\|T_n x - Tx\| \longrightarrow 0$ para cualquier $x \in H$, es decir, $\phi_x(T_n) \longrightarrow \phi_x(T)$. Por tanto, por continuidad, $(\phi_x)|_S = \{Tx : T \in S\}$ es relativamente compacto para cualquier $x \in H$.

$\boxed{(2) \Longrightarrow (1)}$ Notemos $S_x = \{Tx : T \in S\}$, para cualquier $x \in H$. Por definición de espacio producto, tenemos que

$$S \subseteq \prod_{x \in H} S_x$$

Como cada S_x es relativamente compacto, por el teorema de Tykhonov (teorema 6.0.10), $\prod\limits_{x \in H} S_x$ es relativamente compacto, luego tenemos que S es relativamente compacto, como queríamos.

$\boxed{(2) \Longrightarrow (3)}$ Es trivial, ya que $D \subseteq H$.

$\boxed{(3) \Longrightarrow (2)}$ Como S es acotado, existe $M > 0$ tal que $\|T\| \leq M$ para todo $T \in S$. Como D es un subconjunto denso de H, para todo $x \in H$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe un $y \in D$ tal que

$$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Además, tenemos que

$$\{Tx : T \in S\} \subseteq \{Ty : T \in S\} + \{T(x - y) : T \in S\}$$

Por un lado, se tiene que

$$\|T(x - y)\| \leq \|T\| \cdot \|x - y\| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \Longrightarrow \{T(x - y) : T \in S\} \subseteq \varepsilon B_H$$

Por otro lado, tenemos que

$$\{Ty : T \in S\} \subseteq \overline{\{Ty : T \in S\}}$$

Luego, por (3), como $y \in D$ entonces $\overline{\{Ty : T \in S\}}$ es compacto. Notando $K_\varepsilon = \overline{\{Ty : T \in S\}}$, llegamos a que

$$\{Tx : T \in S\} \subseteq K_\varepsilon + \varepsilon B_H$$

y por el lema anterior, tenemos que $\{Tx : T \in S\}$ es relativamente compacto, para todo $x \in X$.

□

Con esto ya podemos caracterizar cuando la bola unidad del álgebra de operadores con la topología fuerte es compacta, ya que claramente dicha bola es un subconjunto acotado de $B(H)$. Veamos algunos ejemplos de esto.

Ejemplo 2.3.3. Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita, y sea $(E_i)_{i\in I}$ una familia de subespacios de H de dimensión finita cuya unión es total en H. Si $\mathcal{R}$ es una subálgebra de $B(H)$ con la propiedad de que E_i es invariante por R para todo $R \in \mathcal{R}$ y para todo $i \in I$, entonces la clausura de la bola unidad de $\mathcal{R}$ es fuertemente compacta. Vamos a ver que esto se verifica.

Consideremos el subconjunto denso D de H dado por

$$D = span\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)$$

Si $x \in D$, entonces existen $i_1, \ldots, i_n$ y existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k} \quad \textit{con } x_{i_k} \in E_{i_k} \textit{ para cada } k$$

Entonces, tenemos que

$$\{Rx : R \in \mathcal{R}, \|R\| \leq 1\} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \{Rx_{i_k} : R \in \mathcal{R}, \|R\| \leq 1\}$$

Tenemos que se verifica que

- Como cualquier $R \in \mathcal{R}$ deja invariante a los E_i, nos queda que para cualquier k

  $$\{Rx_{i_k} : R \in \mathcal{R}, \|R\| \leq 1\} \subseteq \|x_{i_k}\| \cdot B_{E_{i_k}}$$

  Por tanto, como $\dim(E_{i_k}) < +\infty$, tenemos por el teorema 6.0.9 que B_{i_k} es compacto para todo k, luego $\{Rx_{i_k} : R \in \mathcal{R}, \|R\| \leq 1\}$ es relativamente compacto para todo k (ya que su clausura sería un cerrado contenido en un compacto).

- El producto de un escalar por un conjunto relativamente compacto sigue siendo relativamente compacto, luego $\lambda_k\{Rx_{i_k} : R \in \mathcal{R}, \|R\| \leq 1\}$ es relativamente compacto para todo k.

- La suma de conjuntos relativamente compactos sigue siendo relativamente compacta, es decir
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\{Rx_{i_k} : R \in \mathcal{R}, \|R\| \leq 1\}$$
es relativamente compacta.

Por tanto, nos queda entonces que $\{Rx : R \in \mathcal{R}, \|R\| \leq 1\}$ es relativamente compacto, para cualquier $x \in D$, con D denso. Se sigue entonces que el álgebra $\mathcal{R}$ satisface la condición (3) del lema anterior, y por tanto, la clausura de la bola unidad de $\mathcal{R}$ es fuertemente compacta.

Ejemplo 2.3.4. Una aplicación de lo anterior nos da un ejemplo más concreto. Sea H un espacio de Hilbert separable, $(e_n)_{n\geq 0}$ una base ortonormal de H, y denotemos B al "backward shift" sobre H, es decir, $Be_0 = 0$ y $Be_n = e_{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Llamemos $E_n = \langle e_0, e_1, \cdots e_n \rangle$. Está claro que la unión de E_n es densa en H, que cada E_n es invariante por B y que $\|B\| \leq 1$. Se sigue entonces, por el ejemplo anterior, que el "backward shift" es un operador fuertemente compacto.

En el siguiente ejemplo utilizaremos el concepto de conmutante de un operador, es decir, el conjunto de los operadores que conmutan con dicho operador. También se usará el concepto de operador compacto. Se les dará a ambas una definición formal más adelante.

Ejemplo 2.3.5. La clausura de la bola unidad del conmutante $\mathcal{R}$ de un operador compacto K con rango denso es fuertemente compacta. Veámoslo.

Sea $D = K(H)$, donde H es el espacio de Hilbert tal que $K \in B(H)$. Sea $y \in D$, digamos $y = Kx$ para cierto $x \in H$. Entonces

$$\{Ry : R \in \mathcal{R}, \|R\| \leq 1\} = \{RKx : R \in \mathcal{R}, \|R\| \leq 1\} = \{KRx : R \in \mathcal{R}, \|R\| \leq 1\} \subseteq \|x\| \cdot K(B_H)$$

De nuevo, por el apartado (3) del lema anterior, tenemos que la clausura de la bola unidad del conmutante de K es fuertemente compacta.

Capítulo 3

Operadores compactos

En este capítulo estudiaremos los operadores compactos sobre un espacio de Hilbert, veremos algunas propiedades importantes suyas y demostraremos que los operadores compactos poseen subespacio invariante. Los resultados de la primera y segunda sección se estudian en [7], excepto los referentes a la alternativa de Fredholm en la segunda sección, que fueron vistos en [1]. En cambio, los resultados de la última sección del capítulo se han visto en [5].

3.1. Definición y algunas propiedades

Empecemos definiendo lo que se conoce como un operador compacto, y dando un ejemplo de este tipo de operadores.

Definición 3.1.1. Sea H un espacio de Hilbert y $K \in B(H)$ un operador. Diremos que K es compacto si para todo subconjunto acotado de H, su imagen por K es relativamente compacta, es decir, para todo $S \subseteq H$ con S acotado, entonces $\overline{K(S)}$ es compacto.

Ejemplo 3.1.2. Sea $H = l^2$ nuestro espacio de Hilbert y $\lambda = \left(1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$. Consideremos el operador $K = diag(\lambda)$, es decir, K es el operador cuya matriz asociada es una matriz cuya diagonal es el vector λ y el resto de entradas de dicha matriz son 0. Si (e_n) es una base ortonormal de H, entonces

$$Ke_n = \frac{1}{n} e_n$$

Es decir, si $x \in H$, se tiene que

$$Kx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(x, e_n)e_n$$

y por la identidad de Parseval, se verifica que

$$\|Kx\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}|(x, e_n)|^2$$

Veamos que el operador K es compacto. Para ello, usaremos la proposición 6.0.6. Sea $A \subseteq H$ acotado, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que $\|y\| \leq M$ para todo $y \in A$. Claramente KA está acotado, ya que si $x \in KA$, entonces

$$\|KA\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}|(x, e_n)|^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\|x\|^2 = \|x\|^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq M\frac{\pi^2}{6}$$

Luego KA es acotado, y basta ver que se verifica la igualdad de la proposición. Usando la ortogonalidad de los e_n, que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge y que las colas de una serie convergente convergen a cero, nos queda que

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in KA} \sum_{j=n}^{+\infty}|(x, e_j)|^2 = \lim_{n\to+\infty} \sup_{y\in A} \sum_{j=n}^{+\infty}|(Ky, e_j)|^2 = \lim_{n\to+\infty} \sup_{y\in A} \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{j^2}|(y, e_j)|^2 \leq \\
&\leq \lim_{n\to+\infty} \sup_{y\in A} \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{j^2}\|y\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \sup_{y\in A}\|y\|^2 \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \leq \lim_{n\to+\infty} M \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = \\
&= M \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in KA} \sum_{j=n}^{+\infty}|(x, e_j)|^2 \leq 0
\end{aligned}$$

Y como es un límite de elementos positivos, nos queda que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in KA} \sum_{j=n}^{+\infty}|(x, e_j)|^2 = 0$$

Por tanto, por la proposición 6.0.6, KA es relativamente compacto. Como esto ocurre para cualquier A acotado, tenemos que K es compacto, como queríamos probar.

Vamos a ver una propiedad importante de los operadores compactos, la cual nos dice que el producto de un operador compacto por cualquier otro operador también es compacto.

Proposición 3.1.3. *Sea H un espacio de Hilbert y $K \in B(H)$ un operador compacto. Entonces, para todo $T \in B(H)$, se tiene que KT y TK también son compactos.*

Demostración. Sea $S \subseteq H$ un subconjunto acotado.

- Como S es acotado y T es continuo, entonces $T(S)$ es acotado. Por tanto, como $KT(S) = K(T(S))$ y K es compacto, entonces $KT(S)$ es relativamente compacto, luego KT es compacto.

- Como S es acotado y K es compacto, $K(S)$ es relativamente compacto. Entonces, como $TK(S) = T(K(S))$ y T es continuo, nos queda que $TK(S)$ es relativamente compacto, luego TK es compacto.

$\square$

Para la siguiente propiedad de los operadores compactos necesitaremos un resultado de Ascoli-Arzelá, el cual se estudia en el grado y viene incluido en el apéndice como el teorema 6.0.8.

Proposición 3.1.4. *Sea H un espacio de Hilbert y $K \in B(H)$. Entonces K es compacto si y sólo si K^* es compacto.*

Demostración. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que K es compacto. Sea (x_n) una sucesión acotada en H, y notemos $y_n = K^*x_n$. Tenemos que probar que (y_n) posee una subsucesión convergente (o lo que es lo mismo, que posee una subsucesión de Cauchy, porque nuestro espacio es completo), y así K^* será compacto. Tomando $z \in B_H$, tenemos que

$$(y_n, z) = (K^*x_n, z) = (x_n, Kz)$$

Consideramos la función $f_n : \overline{KB_H} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como $f_n(z) = (x_n, z)$. Notemos $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Claramente $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(\overline{KB_H}, \|\cdot\|_\infty)$, ya que si (z_m) converge a z, entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y por verificarse que $\|x_n\| \leq M$ para todo n, con $M > 0$ una constante, se tiene que

$$|f_n(z_m) - f_n(z)| = |(x_n, z_m - z)| \leq \|x_n\| \cdot \|z_m - z\| \leq M\|z_m - z\| \longrightarrow 0 \Longrightarrow f_n(z_m) \longrightarrow f_n(z)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, como K es compacto y B_H está acotado, nos queda que $\overline{KB_H}$ es compacto, y nos encontramos en las condiciones del teorema de Ascoli-Arzelá. Veamos que $\mathcal{F}$ es equicontinua y uniformemente acotada.

- Usando que (x_n) es acotada ($\|x_n\| \leq M$ para todo n) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

  $$|f_n(z) - f_n(w)| = |(x_n, z - w)| \leq \|x_n\| \cdot \|z - w\| \leq M\|z - w\|$$

  Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, si tomamos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $z, w \in \overline{KB_H}$ verificando $\|z - w\| < \delta$ se tiene que

  $$|f_n(z) - f_n(w)| \leq M\|z - w\| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \Longrightarrow |f_n(z) - f_n(w)| < \varepsilon$$

  Por tanto, la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua.

- Usando de nuevo que $\|x_n\| \leq M$ para todo n, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y que $\overline{KB_H}$ es compacto y por tanto acotado (existe una constante $C > 0$ tal que $\|z\| \leq C$ para todo $z \in \overline{KB_H}$), nos queda que para todo n se cumple

$$|f_n(z)| = |(x_n, z)| \leq \|x_n\| \cdot \|z\| \leq M \cdot C$$

Luego, la familia $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada.

Por tanto, por el teorema de Ascoli-Arzelá, la familia $\mathcal{F}$ es relativamente compacta. Tenemos entonces que existe (f_{n_k}) una subsucesión convergente, es decir, una subsucesión de Cauchy. Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe un $N > 0$ tal que para todo $n_j, n_k > N$ se tiene que

$$\|f_{n_j} - f_{n_k}\|_\infty < \varepsilon$$

Utilizando ahora la igualdad para $z \in H$ que nos dice que

$$\|z\| = \sup_{x \in B_H} |(z, x)|$$

nos queda que, para cualesquiera j y k, se tiene

$$\begin{aligned}\|y_{n_j} - y_{n_k}\| &= \|K^*(x_{n_j} - x_{n_k})\| = \sup_{w \in B_H} |(K^*(x_{n_j} - x_{n_k}), w)| = \sup_{w \in B_H} |(x_{n_j} - x_{n_k}, Kw)| \\ &= \sup_{z \in KB_H} |(x_{n_j} - x_{n_k}, z)| = \|f_{n_j} - f_{n_k}\|_\infty\end{aligned}$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe un $N > 0$ tal que para todo $n_j, n_k > N$ se tiene que

$$\|y_{n_j} - y_{n_k}\| < \varepsilon$$

Luego (y_{n_k}) es una subsucesión de Cauchy, y por tanto convergente, y K^* es compacto.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos ahora que K^* es compacto. Por la implicación anterior, tenemos que $(K^*)^*$ es compacto, pero como nuestro espacio es un espacio de Hilbert, tenemos que $(K^*)^* = K$, y por tanto K es compacto.

□

3.2. Espectro de un operador compacto

En esta sección veremos un resultado muy interesante de operadores compactos, que además nos resultará útil al momento de probar la existencia de subespacio invariante para estos operadores. Para ello, primero recordemos la definición de espectro de un operador.

Definición 3.2.1. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$. Definimos el espectro de T como

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es invertible}\}$$

donde I representa el operador identidad, es decir, $I(x) = x$ para todo $x \in H$.

Podemos obtener entonces el siguiente resultado.

Proposición 3.2.2. *Sea H un espacio de Hilbert con $\dim H = \infty$, $K \in B(H)$ un operador compacto. Entonces $0 \in \sigma(K)$.*

Demostración. Vamos a probarlo por reducción al absurdo. Supongamos que $0 \notin \sigma(K)$, y entonces tenemos que $K - 0I = K$ es invertible, es decir, existe $K^{-1} \in B(H)$ tal que

$$KK^{-1} = K^{-1}K = I$$

Como K es compacto, por la proposición 3.1.3 tenemos que KK^{-1} y $K^{-1}K$ son compactos, o lo que es lo mismo, que I es compacto.

Si consideramos $\overline{B}_H$ la bola unidad cerrada de H, claramente es acotada, luego $\overline{I(B_H)} = \overline{B}_H$ es compacta. Pero esto es una contradicción, ya que por el teorema 6.0.9, la bola unidad cerrada de un espacio de Banach es compacta sí y sólo si el espacio es de dimensión finita. Como nuestro espacio H tiene dimensión infinita, $\overline{B}_H$ no puede ser compacta, y podemos concluir que $0 \in \sigma(K)$, como queríamos.

$\square$

A continuación, probaremos los tres primeros apartados de la alternativa de Fredholm, los cuales nos serán útiles para obtener el resultado que necesitamos.

Lema 3.2.3. *Sea H un espacio de Hilbert y $K \in B(H)$ un operador compacto. Entonces, si denotamos I al operador identidad, tenemos que se verifica*

a) $\ker(I - K)$ *tiene dimensión finita*

b) $Im(I - K)$ *es cerrada*

c) $\ker(I - K) = \{0\} \Longleftrightarrow Im(I - K) = H$

Demostración.

a) Sea $E = \ker(I - K)$. Entonces $B_E \subset K(B_H)$, ya que si $x \in B_E$, entonces $Kx = x$ y $\|x\| = 1$. Evidentemente, como $x \in B_H$ y $Kx = x$, nos queda que $x \in K(B_H)$. Ahora, como K es compacto y B_H es acotado, $\overline{K(B_H)}$ es compacto, y como B_E es un cerrado contenido en $\overline{K(B_H)}$, nos queda que B_E es compacta. Por el teorema de Banach-Alaoglu (teorema 6.0.9), tenemos que E ha de tener dimensión finita, es decir, $\ker(I - K)$ tiene dimensión finita.

b) Sea (u_n) una sucesión en H y (f_n) una sucesión en $Im(I-K)$, con $f_n = u_n - Ku_n$ tal que (f_n) converge hacia cierto f. Veamos que $f \in Im(I-K)$. Llamemos

$$d_n = dist(u_n, \ker(I-K))$$

Como $\ker(I-K)$ es de dimensión finita (por el apartado (a)), existe $v_n \in \ker(I-K)$ tal que $d_n = \|u_n - v_n\|$ para cada n. Además, como v_n está en el núcleo de $(I-K)$, entonces $Kv_n = v_n$, y se tiene que

$$f_n = u_n - Ku_n = u_n - v_n + Kv_n - Ku_n = (u_n - v_n) - K(u_n - v_n)$$

Demostremos que la sucesión $(\|u_n - v_n\|)$ está acotada. Vamos a razonar por reducción al absurdo, suponiendo que existe una subsucesión tal que $\|u_{n_j} - v_{n_j}\| \longrightarrow +\infty$. Poniendo $w_n = \dfrac{u_n - v_n}{\|u_n - v_n\|}$, se tendría que

$$w_{n_j} - Kw_{n_j} = \frac{(u_{n_j} - v_{n_j}) - K(u_{n_j} - v_{n_j})}{\|u_{n_j} - v_{n_j}\|} = \frac{f_{n_j}}{\|u_{n_j} - v_{n_j}\|}$$

Como $f_{n_j} \longrightarrow f$ (por ser una subsucesión de una sucesión convergente) y $\|u_{n_j} - v_{n_j}\| \longrightarrow +\infty$, nos queda que

$$w_{n_j} - Kw_{n_j} \longrightarrow 0$$

Ahora, como (w_{n_j}) está acotada, ya que tiene norma igual a 1, usando que K es compacto podemos extraer una sub-subsucesión, a la que notaremos $(w_{n_{j_k}})$, de manera que $Kw_{n_{j_k}} \longrightarrow z$ para cierto $z \in H$. Asi, tenemos que

$$\|w_{n_{j_k}} - z\| \leq \|w_{n_{j_k}} - Kw_{n_{j_k}}\| + \|Kw_{n_{j_k}} - z\| \longrightarrow 0$$

y obtenemos que $w_{n_{j_k}} \longrightarrow z$. Por tanto, como $w_{n_j} - Kw_{n_j} \longrightarrow 0$, nos queda que $z \in \ker(I-K)$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} dist(w_n, \ker(I-K)) &= \frac{dist(u_n, \ker(I-K)) - dist(v_n, \ker(I-K))}{\|u_n - v_n\|} \\ &= \frac{dist(u_n, \ker(I-K))}{\|u_n - v_n\|} = 1 \end{aligned}$$

ya que $v_n \in \ker(I-K)$ y $dist(u_n, \ker(I-K)) = \|u_n - v_n\|$. Como esto ocurre para todo n, tomando límite en la sub-subsucesión tenemos que

$$dist(z, \ker(I-K)) = \lim_{n_{j_k} \to +\infty} dist(w_{n_{j_k}}, \ker(I-K)) = 1$$

Pero esto no puede ocurrir, ya que vimos que $z \in \ker(I-K)$. Por tanto, hemos obtenido una contradicción, y concluimos que $(\|u_n - v_n\|)$ es acotada, y como K es compacto, podemos extraer una subsucesión (que volveremos a notar con n_j pero es distinta de la anterior) de manera que $K(u_{n_j} - v_{n_j}) \longrightarrow l$ para cierto $l \in H$.

Ahora bien, como
$$f_n = (u_n - v_n) - K(u_n - v_n)$$
entonces
$$u_n - v_n = f_n + K(u_n - v_n)$$
Y nos queda que
$$u_{n_j} - v_{n_j} \longrightarrow f + l$$
Llamando $g = f + l$, tenemos que

$$\begin{aligned} g - Kg = (f+l) - K(f+l) = \lim_{n_j \to +\infty} [(u_{n_j} - v_{n_j}) - K(u_{n_j} - v_{n_j}) + K(u_{n_j} - v_{n_j}) - \\ - K((u_{n_j} - v_{n_j}) - K(u_{n_j} - v_{n_j})) - K(K(u_{n_j} - v_{n_j}))] = \lim_{n_j \to +\infty} [(u_{n_j} - v_{n_j}) - \\ - K(u_{n_j} - v_{n_j}) + K(K(u_{n_j} - v_{n_j})) - K(K(u_{n_j} - v_{n_j}))] = \\ = \lim_{n_j \to +\infty} [(u_{n_j} - v_{n_j}) - K(u_{n_j} - v_{n_j})] = \lim_{n_j \to +\infty} f_{n_j} = f \end{aligned}$$

Por tanto, hemos probado que $f = g - Kg$, es decir, que $f \in Im(I-K)$. Luego $Im(I-K)$ es cerrada.

c) $\boxed{\Longrightarrow}$ Razonemos por reducción al absurdo, suponiendo que
$$E_1 = Im(I-K) \neq H$$
Por el apartado (b), E_1 es un cerrado contenido en un espacio de Banach, y por lo tanto, E_1 también es un espacio de Banach. También $K(E_1) \subset E_1$, ya que si $x \in E_1$ entonces existe $y \in H$ tal que $(I-K)y = y - Ky = x$, y tendríamos que
$$Kx = K(y - Ky) = Ky - K(Ky) = (I-K)(Ky) \Longrightarrow Kx \in E_1$$
Entonces $K|_{E_1}$ es un operador compacto sobre el espacio de Banach E_1, y $E_2 = (I-K)(E_1)$ es un subespacio cerrado de E_1. Además, $E_2 \neq E_1$, ya que como $\ker(I-K) = \{0\}$, entonces $(I-K)$ es inyectivo. Si suponemos que $E_1 = E_2$, entonces tomando $y \in H \setminus E_1$ tenemos que $(I-K)y = x \in E_1$, y por lo tanto, existe un cierto $z \in E_2$ tal que $x = z$, es decir, existe un cierto $w \in E_1$ tal que $(I-K)w = z = x$. Por la inyectividad de $(I-K)$, nos queda que $w = y$, pero $y \notin E_1$, luego llegamos a una contradicción.

Poniendo $E_n = (I - K)^n(H)$ se obtiene una sucesión estrictamente decreciente de subespacios cerrados. Por el lema de Riesz, existe una sucesión (u_n) tal que $u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$ y $dist(u_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$ para cada n. Se cumple entonces que

$$Ku_n - Ku_m = -(u_n - Ku_n) + (u_m - Ku_m) + (u_n - u_m)$$

Observando que si $n > m + 1$, entonces $E_{n+1} \subset E_n \subset E_{m+1} \subset E_m$, y usando que

- $(u_n - Ku_n) \in E_{n+1}$
- $(u_m - Ku_m) \in E_{m+1}$
- $u_n \in E_n$

nos queda que

$$-(u_n - Ku_n) + (u_m - Ku_m) + u_n \in E_{m+1}$$

Entonces

$$\|Ku_n - Ku_m\| = \|[-(u_n - Ku_n) + (u_m - Ku_m) + u_n] - u_m\| \geq dist(u_m, E_{m+1}) \geq \frac{1}{2}$$

Por tanto, la sucesión (Ku_n) no posee ninguna subsucesión convergente, pero esto es absurdo, ya que K es compacto. Luego $Im(I - K) = H$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Usando el teorema 6.0.11, nuestra hipótesis y que $H^\perp = \{0\}$, nos queda que

$$\ker(I - K^*) = (Im(I - K))^\perp = H^\perp = \{0\}$$

Como K es compacto, por la proposición 3.1.4 tenemos que K^* también es compacto. Utilizando esto y que $\ker(I - K^*) = \{0\}$, tenemos por la implicación anterior que

$$Im(I - K^*) = H$$

Entonces, usando la misma igualdad de antes, tenemos que

$$\ker(I - (K^*)^*) = (Im(I - K^*))^\perp = H^\perp = \{0\}$$

Pero como H es un espacio de Hilbert, $(K^*)^* = K$, luego hemos probado que $\ker(I - K) = \{0\}$, como queríamos.

$\square$

Con esto ya podemos pasar a probar el resultado que queremos, y que será clave para resolver el problema de subespacio invariante en operadores compactos.

Teorema 3.2.4. *Sea H un espacio de Hilbert y $K \in B(H)$ un operador compacto. Entonces se tiene que*

$$\sigma(K) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \textit{ es un valor propio y } \lambda \neq 0\}$$

Demostración. Claramente, si $\lambda \neq 0$ es un valor propio, entonces $K - \lambda I$ no es invertible. Esto se debe a que si $x \in H$ es el vector propio asociado a λ, se tiene que $x \neq 0$, y entonces

$$Kx - \lambda x = 0 = K0 - \lambda 0$$

Como $x \neq 0$, entonces $K - \lambda I$ no es inyectivo, luego no puede ser invertible y $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$.

Supongamos ahora que $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ y veamos que λ es un valor propio. Razonemos por reducción al absurdo. Si λ no es un valor propio, entonces $\ker(K - \lambda I) = \{0\}$, o equivalentemente, $K - \lambda I$ es inyectivo. Por la proposición 3.2.3, esto es equivalente a que $Im(K - \lambda I) = H$, es decir, $K - \lambda I$ es sobreyectivo. Por tanto, $K - \lambda I$ es biyectivo, luego es invertible, pero esto es una contradicción, ya que $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$. Por tanto, λ es un valor propio distinto de cero.

□

Finalmente, estudiaremos lo que se conoce como radio espectral, ya que también nos será muy útil en el resultado que buscamos.

Definición 3.2.5. Sea H un espacio de Hilbert, $T \in B(H)$ un operador y $\sigma(T)$ el espectro de T. Se define el radio espectral de T, al que notaremos $\rho(T)$, como

$$\rho(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

El radio espectral cumple la siguiente fórmula, la cual ya se ha estudiado en el Máster:

$$\rho(T) = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|T^n\|}$$

3.3. Subespacios invariantes

En esta sección vamos a probar la existencia de subespacio invariante para cualquier operador compacto sobre un espacio de Hilbert H, siguiendo los resultados de Victor Lomonosov en [7]. Empecemos recordando la definición de subespacio invariante.

Definición 3.3.1. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$. Diremos que T posee subespacio invariante si existe $E \subset H$ un subespacio cerrado no trivial, es decir, $E \neq 0$ y $E \neq H$, tal que $T(E) \subseteq E$.

Aunque el problema que queremos resolver es saber si los operadores compactos poseen subespacio invariante, el resultado que daremos es aún más amplio. Para ello, necesitamos definir también lo siguiente.

Definición 3.3.2. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$. Llamaremos el conmutante de T, notado $\{T\}'$, al conjunto

$$\{T\}' = \{A \in B(H) : TA = AT\}$$

Observación 3.3.3. Cabe destacar que es evidente ver que $\{T\}'$ es una subálgebra del álgebra de operadores $B(H)$. Sin embargo, $\{T\}'$ no tiene por qué ser una subálgebra conmutativa, ya que los elementos del conmutante no tiene por qué conmutar entre sí.

Definición 3.3.4. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$. Diremos que T posee subespacio hiperinvariante si existe $E \subset H$ un subespacio cerrado no trivial, es decir, $E \neq 0$ y $E \neq H$, tal que $A(E) \subseteq E$ para todo $A \in \{T\}'$.

Es evidente que si T posee subespacio hiperinvariante, en particular posee subespacio invariante, ya que claramente $T \in \{T\}'$. Veamos entonces el resultado que nos interesa.

Teorema 3.3.5. *Sea H un espacio de Hilbert y $K \in B(H)$ un operador compacto no escalar. Entonces K posee subespacio hiperinvariante.*

Demostración. Sea λ un valor propio de K y consideremos el conjunto $M_\lambda = \{x \in H : Kx = \lambda x\}$. Claramente $M_\lambda \neq H$, porque K no es escalar. Pero además, $M_\lambda \neq \{0\}$, ya que al ser λ un valor propio, existe $x \in H \setminus \{0\}$ vector propio asociado a λ tal que $Kx = \lambda x$. Entonces los conjuntos M_λ son hiperinvariantes para K, ya que si $x \in M_\lambda$ y $A \in \{K\}'$, entonces

$$KAx = AKx = A\lambda x = \lambda Ax \Longrightarrow Ax \in M_\lambda$$

Por tanto, $A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$ para cualquier $A \in \{K\}'$.

Por tanto, usando la proposición 6.0.16 hemos demostrado lo que queríamos, ya que para todo $A \in \{K\}'$ se verifica

$$A\left(\overline{M_\lambda}\right) \subseteq \overline{A(M_\lambda)} \subseteq \overline{M_\lambda}$$

Luego hemos terminado siempre que K posea valores propios. Veamos que también se cumple el teorema cuando K no los tiene. Supongamos que K no posee valores propios. Entonces, por la proposición 3.2.2 y por el teorema 3.2.4 tenemos que el espectro de K es nulo, es decir, $\sigma(K) = \{0\}$. Entonces $\rho(K) = 0$, y por la fórmula del radio espectral tenemos que

$$\|K^n\|^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 0$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\|K\| = 1$ (multiplicado K por $\dfrac{1}{\|K\|}$ si fuese necesario). Ahora, fijemos $x_0 \in H$ con $\|Kx_0\| > 1$. Se tiene entonces que $\|x_0\| > 1$, ya que

$$1 < \|Kx_0\| \leq \|K\| \cdot \|x_0\| = \|x_0\|$$

Sea $B = \overline{B}(x_0, 1)$ la bola unidad cerrada de centro x_0 y radio 1. Claramente $0 \notin B$, y además, $0 \notin \overline{KB}$ (ya que $\overline{KB} \subset \overline{B}(Kx_0, 1)$ y $\|Kx_0\| > 1$). Todo lo que usaremos en el resto de la demostración es lo anterior, que $\|K^n\|^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 0$ y que $\overline{KB}$ es compacta, por ser K compacto y B acotado.

Para cada $y \in H$ fijo con $y \neq 0$, el conjunto

$$M_y = \{Ay : A \in \{K\}'\}$$

es una variedad lineal que es invariante para todos los operadores que conmutan con K. Esto ocurre ya que para cualesquiera $A \in \{K\}'$ y $D \in \{K\}'$, se tiene que $AD \in \{K\}'$ pues

$$ADK = AKD = KAD$$

Luego si $Dy \in M_y$ para un cierto $D \in \{K\}'$, entonces para cualquier $A \in \{K\}'$ se tiene que $ADy \in M_y$, es decir, $A(M_y) \subseteq M_y$. Por tanto, deducimos que, para cualquier $y \in H$ con $y \neq 0$, la clausura de M_y es un subespacio que es hiperinvariante para K.

Hemos probado entonces el teorema, a no ser que todos los subespacios hiperinvariantes sean triviales, es decir, $M_y = \{0\}$ ó $M_y = H$, para todo $y \in H$. Si $y \neq 0$, claramente $M_y \neq \{0\}$ ya que $Ky \in M_y$ y $Ky \neq 0$. Lo anterior se cumple porque si $Ky = 0$, como $y \neq 0$, entonces 0 sería un valor propio para K, pero estamos suponiendo que K no tiene valores propios. Luego sólo hemos de ver que para algún $y \neq 0$ la clausura de M_y es distinta de H, o lo que es lo mismo, tenemos que ver que para algún $y \neq 0$ se tiene que M_y no es denso.

Probaremos que no es posible que M_y sea denso para todo $y \neq 0$ por reducción al absurdo. Supongamos que sí ocurre. Entonces para cada $y \neq 0$ existe un operador $A \in \{K\}'$ tal que $\|Ay - x_0\| < 1$, por densidad. En otras palabras, si notamos

$$\mathcal{U}(A) = \{y \in H : \|Ay - x_0\| < 1\}$$

entonces la unión de todos los conjuntos $\mathcal{U}(A)$ donde $A \in \{K\}'$ es $H \setminus \{0\}$. Recordemos que $B = \overline{B}(x_0, 1)$. Claramente $A(\mathcal{U}(A)) \subseteq B$. Como la clausura de KB es un conjunto compacto contenido en $H \setminus \{0\}$, y como cada $\mathcal{U}(A)$ es claramente un conjunto abierto, entonces por definición de compacidad, existe un conjunto finito $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de operadores en el conmutante de K tales que

$$KB \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}(A_i)$$

Ahora, como $Kx_0 \in KB$, por lo anterior existe un i_1 tal que $Kx_0 \in \mathcal{U}(A_{i_1})$. En otras palabras, $A_{i_1}Kx_0 \in B$. Entonces $KA_{i_1}Kx_0 \in KB$, es decir, existe un i_2 tal que $KA_{i_1}Kx_0 \in$

$\mathcal{U}(A_{i_2})$, luego $A_{i_2}KA_{i_1}Kx_0 \in B$. Podemos seguir este proceso recursivo cuanto queramos, y en la etapa m tendríamos que

$$A_{i_m}KA_{i_{m-1}}K\cdots A_{i_1}Kx_0 \in B$$

para ciertos $i_1, \ldots, i_m$. Recordando que cada A_i conmuta con K, tenemos que

$$A_{i_m}KA_{i_{m-1}}K\cdots A_{i_1}Kx_0 = A_{i_m}A_{i_{m-1}}\cdots A_{i_1}K^m x_0$$

Ahora notemos

$$c = \max\{\|A_i\| : 1 \leq i \leq n\}$$

También llamemos

$$x_m = A_{i_m}A_{i_{m-1}}\cdots A_{i_1}K^m x_0$$

Como $x_m \in B$ para cada m y $0 \notin B$, existe una cierta constante $M > 0$ tal que $\|x_m\| \geq M$ para todo m. Entonces tendríamos que

$$M \leq \|x_m\| \leq \|A_{i_m}\| \cdot \|A_{i_{m-1}}\| \cdots \|A_{i_1}\| \cdot \|K^m\| \cdot \|x_0\| \leq c^m \|K^m\| \cdot \|x_0\|$$

Elevando todo a $\dfrac{1}{m}$ nos queda que

$$M^{\frac{1}{m}} \leq c\|K^m\|^{\frac{1}{m}} \cdot \|x_0\|^{\frac{1}{m}}$$

Finalmente, tomando límite cuando m tiene a infinito y utilizando que $C^{\frac{1}{m}} \longrightarrow 1$ para cualquier constante $C > 0$, junto con la fórmula del radio espectral, tenemos que

$$1 \leq c \lim_{m\to+\infty} \|K^m\|^{\frac{1}{m}} = 0$$

Luego hemos llegado a que $1 \leq 0$, lo cual es una contradicción. Esta contradicción prueba que M_y no puede ser denso para todo $y \neq 0$, y hemos concluido la demostración del teorema.

$\square$

Nota 3.3.6. El caso en el que el operador K sea escalar se probará en el siguiente capítulo, usando el apartado (3) del ejemplo 4.1.2 junto con el apartado (a) del teorema 4.3.6.

Hemos demostrado entonces que dado un espacio de Hilbert H y $K \in B(H)$ un operador compacto no escalar, todos los operadores que conmuten con K poseen subespacio invariante (de hecho existe uno que es invariante para todos los que conmutan con K), y en particular K también lo tiene. Por tanto, el problema del subespacio invariante queda resuelto para operadores compactos.

Capítulo 4

Operadores normales

En este capítulo seguiremos un esquema similar al anterior, pero estudiaremos los operadores normales sobre un espacio de Hilbert. Veremos algunas propiedades características suyas y demostraremos que los operadores normales también poseen subespacio invariante, siguiendo los resultados dados en [6].

4.1. Definición y algunas propiedades

Al igual que en el capítulo anterior, empecemos definiendo que son los operadores normales y dando algunos ejemplos.

Definición 4.1.1. Sea H un espacio de Hilbert, $A \in B(H)$ un operador y A^* su adjunto. Diremos que A es un operador normal si conmuta con su adjunto, es decir, si

$$AA^* = A^*A$$

Ejemplo 4.1.2.

1. Todo operador autoadjunto es normal.
2. Todo operador unitario es normal.
3. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Todo operador de la forma $T = \lambda I$ es normal.

Vamos a ver algunas propiedades interesantes de los operadores normales. Para la primera de ellas, necesitaremos del siguiente resultado previo.

Lema 4.1.3. *Sea H un espacio de Hilbert y $B \in B(H)$ un operador. Entonces*

$$\|B^*B\| = \|B\|^2$$

Demostración. Si B es el operador nulo, es evidente que se cumple. Sea ahora $B \in B(H)$ cualquiera, no nulo. Es evidente que se tiene, para cualquier $x \in H$,

$$\|B^*Bx\| \leq \|B^*\| \cdot \|Bx\| \leq \|B^*\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|$$

Y por tanto,

$$\|B^*B\| \leq \|B^*\| \cdot \|B\|$$

Usando ahora la conocida igualdad $\|B^*\| = \|B\|$, llegamos a que

$$\|B^*B\| \leq \|B\|^2$$

Veamos ahora la otra desigualdad. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que, para cualquier $x \in H$

$$|(B^*Bx, x)| \leq \|B^*Bx\| \cdot \|x\| \leq \|B^*B\| \cdot \|x\| \cdot \|x\| = \|B^*B\| \cdot \|x\|^2$$

Tomando ahora $x \in H$ con $\|x\| \leq 1$, tendríamos que

$$|(B^*Bx, x)| \leq \|B^*B\| \cdot \|x\|^2 \leq \|B^*B\|$$

Como esto ocurre para cualquier $x \in H$ con $\|x\| \leq 1$, podemos tomar supremo, de manera que nos queda

$$\|B^*B\| \geq \sup_{\|x\|\leq 1} |(B^*Bx, x)| = \sup_{\|x\|\leq 1} |(Bx, Bx)| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Bx\|^2 = \|B\|^2$$

Luego $\|B^*B\| \geq \|B\|^2$, y por tanto hemos llegado a que $\|B^*B\| = \|B\|^2$, como queríamos demostrar.

□

Con este lema, podemos pasar a enunciar la propiedad que queremos y que nos caracteriza la norma de un operador normal.

Teorema 4.1.4. *Sea H un espacio de Hilbert y $A \in B(H)$ un operador normal. Entonces*

$$\|A\| = \rho(A)$$

donde $\rho(A)$ es el radio espectral del operador A.

Demostración. Por la fórmula del radio espectral (definición 3.2.5), tenemos que

$$\rho(A) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

Por tanto, para probar lo que queremos es suficiente con probar que $\|A^n\| = \|A\|^n$ para una cantidad infinita de $n \in \mathbb{N}$. Entonces tendríamos que

$$\rho(A) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\|A\|^n} = \lim_{n\to+\infty} \|A\| = \|A\|$$

Vamos a probar esto por inducción. Para $n = 2$, se tiene por el lema anterior que

$$\|A^2\|^2 = \|(A^2)^*A^2\|$$

Utilizando que A es normal, nos queda que

$$\|A^2\|^2 = \|A^*A^*AA\| = \|A^*AA^*A\| = \|A^*AAA^*\| = \|(AA^*)^*(AA^*)\|$$

Utilizando dos veces nuevamente el lema anterior, llegamos a que

$$\|A^2\|^2 = \|(AA^*)^*(AA^*)\| = \|AA^*\|^2 = \|A^*A\|^2 = (\|A\|^2)^2$$

Por tanto, tenemos finalmente que

$$\|A^2\| = \|A\|^2$$

Ahora, supongamos que lo anterior se verifica para $n = 2^{k-1}$ y veamos que también se cumple para $n = 2^k$. Por hipótesis de inducción, tenemos que

$$\|A^{2^{k-1}}\| = \|A\|^{2^{k-1}}$$

Utilizando esto y que también se cumple para $n = 2$, llegamos a que

$$\|A^{2^k}\| = \|\left(A^{2^{k-1}}\right)^2\| = \|A^{2^{k-1}}\|^2 = \left(\|A\|^{2^{k-1}}\right)^2 = \|A\|^{2^k}$$

Luego hemos probado que $\|A^{2^k}\| = \|A\|^{2^k}$ para todo k, y como vimos antes, con esto podemos concluir que $\|A\| = \rho(A)$, como queríamos.

$\square$

Ahora veamos otro resultado interesante, que nos va a permitir relacionar los valores propios de un operador normal con los valores propios de su adjunto.

Teorema 4.1.5. *Sea H un espacio de Hilbert y $A \in B(H)$ un operador normal. Entonces $Ax = \lambda x$ si y solamente si $A^*x = \overline{\lambda}x$, para $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Demostración. $\boxed{\Longrightarrow}$ Utilizando que A es un operador normal y las propiedades del operador adjunto y el producto escalar, tenemos que

$$\begin{aligned}&\|Ax - \lambda x\|^2 = \|(A-\lambda)x\|^2 = ((A-\lambda)x, (A-\lambda)x) = (Ax, Ax) - (Ax, \lambda x) - (\lambda x, Ax) + \\ &+ (\lambda x, \lambda x) = (A^*Ax, x) - \overline{\lambda}(x, A^*x) - \lambda(A^*x, x) + \lambda\overline{\lambda}(x, x) = (AA^*x, x) - \overline{\lambda}(x, A^*x) - \\ &- \lambda(A^*x, x) + \overline{\lambda}\lambda(x, x) = (A^*x, A^*x) - (\overline{\lambda}x, A^*x) - (A^*x, \overline{\lambda}x) + (\overline{\lambda}x, \overline{\lambda}x) = \\ &= (A^*x - \overline{\lambda}x, A^*x) - (A^*x - \overline{\lambda}x, \overline{\lambda}x) = (A^*x - \overline{\lambda}x, A^*x - \overline{\lambda}x) = \\ &= \|A^*x - \overline{\lambda}x\|^2\end{aligned}$$

Luego tenemos que $\|Ax - \lambda x\| = \|A^*x - \overline{\lambda}x\|$. Usando ahora que $Ax = \lambda x$, nos queda que

$$\|A^*x - \overline{\lambda}x\| = \|Ax - \lambda x\| = 0$$

Por tanto, $A^*x = \overline{\lambda}x$, como queríamos demostrar.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos ahora que $A^*x = \overline{\lambda}x$. Por la demostración anterior, tenemos que esto implica que

$$(A^*)^*x = \overline{\overline{\lambda}}x$$

Finalmente, usando que $(A^*)^* = A$ y que $\overline{\overline{\lambda}} = \lambda$, obtenemos que

$$Ax = \lambda x$$

Y hemos probado lo que queríamos.

□

Del anterior teorema se deriva fácilmente el siguiente corolario, que relaciona los valores propios de un operador con los de su adjunto.

Corolario 4.1.6. *Sea H un espacio de Hilbert y $A \in B(H)$ un operador normal. Entonces $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de A si y solamente si $\overline{\lambda}$ es un valor propio de A^*.*

Demostración. Si λ es un valor propio de A, por definición existe un vector $x \in H$ no nulo, tal que $Ax = \lambda x$. Por el teorema anterior, tenemos que $A^*x = \overline{\lambda}x$. Como $x \neq 0$, nos queda que $\overline{\lambda}$ es un valor propio de A^*, como queríamos.

El recíproco es análogo. Por tanto, λ es un valor propio de A si y solamente si $\overline{\lambda}$ es un valor propio de A^*, como queríamos probar.

□

4.2. El teorema espectral

En esta sección daremos una serie de resultados que nos permitirán obtener un teorema muy importante para resolver el problema que queremos. Dicho teorema es el teorema espectral, y nos permitirá dar una caracterización de los operadores normales como integrales respecto de un espacio de medida concreto. Todos los resultados de esta sección se presentarán sin demostración, ya que todos han sido vistos y probados en la asignatura *Variable compleja y operadores* del Máster Universitario en Matemáticas. Se añadirán a este capítulo en vez de en el apéndice para facilitar la lectura y comprensión de la siguiente sección.

Definición 4.2.1. Sea Σ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y H un espacio de Hilbert. Una resolución de la identidad o medida espectral es una aplicación $E : \Sigma \longrightarrow B(H)$ con las propiedades:

1. $E(\emptyset) = 0, E(\Omega) = I$.
2. $E(A)$ es una proyección autoadjunta (proyección ortogonal), para todo $A \in \Sigma$.
3. $E(A_1 \cap A_2) = E(A_1) \circ E(A_2) = E(A_2) \circ E(A_1)$, para todos $A_1, A_2 \in \Sigma$.
4. Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, entonces $E(A_1 \cup A_2) = E(A_1) + E(A_2)$.
5. Para todos $x, y \in H$, si denotamos $E_{x,y}(A) = (E(A)x, y)$, para todo $A \in \Sigma$, entonces $E_{x,y}$ es una medida compleja en Σ.

Proposición 4.2.2. *Sea E una resolución de la identidad en $B(H)$ definida en (Ω, Σ). Entonces:*

1. *$E_{x,x}$ es una medida positiva para todo $x \in H$.*
2. *Para cada $x \in H$, la aplicación $A \longmapsto E(A)x$ es una medida vectorial (H-valorada) numerablemente aditiva.*
3. *Si $(A_n) \subset \Sigma$, y $E(A_n) = 0$, para todo n, entonces* $E\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 0$.

Definición 4.2.3. Sea E una medida espectral definida en (Ω, Σ). Definimos $L^\infty(E)$ como el espacio de (clases de) funciones medibles $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ que son esencialmente acotadas; esto es, que existe $C > 0$ tal que $E(\{|f| > C\}) = 0$. $L^\infty(E)$ es un espacio de Banach para la norma del supremo esencial

$$\|f\|_{L^\infty(E)} = \text{mín}\{C \geq 0 : E(\{|f| > C\}) = 0\}$$

Proposición 4.2.4. *$L^\infty(E)$ es un álgebra de Banach para el producto puntual de funciones.*

Proposición 4.2.5. *En $L^\infty(E)$ las funciones simples son densas.*

Proposición 4.2.6. *Sea E una resolución de la identidad en $B(H)$ definida en (Ω, Σ). Para toda $f \in L^\infty(E)$, existe un operador único $T \in B(H)$ tal que*

$$(Tx, y) = \int f dE_{x,y}$$

para todo $x, y \in H$.

Definición 4.2.7. Sean E una resolución de la identidad en $B(H)$ definida en (Ω, Σ), y $f \in L^\infty(E)$. Se define $T = \int f dE$, la integral de f con respecto a E, como el único operador $T \in B(H)$ que satisface

$$(Tx, y) = \int f dE_{x,y}$$

para todo $x, y \in H$.

Proposición 4.2.8. *Sean E una resolución de la identidad en $B(H)$ definida en (Ω, Σ), $f, g \in L^\infty(E)$, $T = \int f dE$ y $S = \int g dE$. Entonces:*

1. $T^* = \int \overline{f} dE$.
2. *Si f es esencialmente real-valorada, entonces T es hermítico.*
3. $T \circ S = S \circ T = \int f g dE$.
4. $\|T\| = \|f\|_{L^\infty(E)}$.
5. *$\sigma(T)$ es el E-rango esencial de f; esto es, $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ es el abierto más grande G tal que $E(f^{-1}(G)) = 0$.*

Lema 4.2.9. *Sea A un álgebra de Banach con unidad e y sea B una subálgebra cerrada de A con $e \in B$. Para todo $x \in B$ se tienen $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$ y $\partial(\sigma_B(x)) \subset \partial(\sigma_A(x))$. Consecuentemente, si $\sigma_A(x) \subset \mathbb{R}$, entonces $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.*

Lema 4.2.10. *Sea $\mathcal{A} \subset B(H)$ una subálgebra cerrada conmutativa, con $I \in \mathcal{A}$ y con la propiedad de que $T^* \in \mathcal{A}$, para todo $T \in \mathcal{A}$. Se tienen:*

1. *$\phi(T) \in \mathbb{R}$, para todo $\phi \in \Delta(\mathcal{A})$ y todo $T \in \mathcal{A}$ que sea hermítico*
2. *$\phi(T^*) = \overline{\phi(T)}$, para todo $\phi \in \Delta(\mathcal{A})$ y todo $T \in \mathcal{A}$*
3. *Para todo $T \in \mathcal{A}$, el espectro $\sigma_{\mathcal{A}}(T)$ de T en $\mathcal{A}$ coincide con el espectro $\sigma(T)$ de T en $B(H)$*

Lema 4.2.11. *Sea T un operador normal y p un polinomio complejo de dos variables. Entonces se tiene*

$$\|p(T, T^*)\| = \sup\{|p(\lambda, \overline{\lambda})| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

Teorema 4.2.12. ***(Teorema espectral)*** *Sea $T \in B(H)$ un operador normal. Existe una única medida espectral E definida en la σ-álgebra $\mathcal{B}$ de los subconjuntos de Borel de $\sigma(T)$ tal que:*

$$\int_{\sigma(T)} z dE(z) = T$$

Más aún, dado $S \in B(H)$, se tiene que S conmuta con T si y sólo si S conmuta con todas las proyecciones $E(A)$, para todo Borel A de $\sigma(T)$.

Nota 4.2.13. A la última parte del teorema anterior, la relacionada con la conmutatividad del operador normal, se le conoce en [6] como teorema de Fuglede. Sin embargo, en la asignatura de *Variable compleja y operadores* se demostró junto con el teorema espectral como se enuncia arriba, y por eso la incluiremos así en este trabajo.

4.3. Subespacios invariantes y teorema de Fuglede-Putnam

En esta última sección del capítulo utilizaremos los enunciados vistos en las secciones anteriores y el teorema espectral para probar los dos resultados más importantes del capítulo: la existencia de subespacio invariante para operadores normales y el teorema de Fuglede-Putnam.

Empecemos resolviendo el problema del subespacio invariante. Para ello, antes necesitaremos de unos resultados previos. Lo primero que haremos es estudiar que se conoce como espacio que reduce a un operador, y daremos un resultado sobre espacios reductores de operadores normales.

Definición 4.3.1. Sea H un espacio de Hilbert, $A \in B(H)$ un operador y $E \subset H$ un subespacio de H. Diremos que E reduce a A si E es invariante para A y para A^*, es decir

- $AE \subseteq E$
- $A^*E \subseteq E$

Proposición 4.3.2. *Sea H un espacio de Hilbert y $A \in B(H)$. Si un subespacio E de H reduce a A entonces $E^\perp$ es invariante por A y por A^*.*

Demostración. Sea $x \in E^\perp$ e $y \in E$. Entonces

$$(Ax, y) = (x, A^*y)$$

Como $y \in E$ y E reduce a A, tenemos que $A^*y \in E$, luego, como $x \in E^\perp$, nos queda que

$$(Ax, y) = 0$$

Como esto ocurre para todo $y \in E$, nos queda que $Ax \in E^\perp$. Por tanto, $E^\perp$ es invariante por A. El resultado es análogo para A^*, usando que E es invariante por A. Por tanto, hemos probado lo que queríamos.

$\square$

Proposición 4.3.3. *Sea H un espacio de Hilbert y $A \in B(H)$. Un subespacio E de H reduce a A si y sólo si $AP = PA$, donde P es una proyección ortogonal de H sobre E.*

Demostración. Notemos que $E = P(H) = P(E)$, por ser P proyección.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos primero que E reduce a A. Entonces $AE \subseteq E$ y $A^*E \subseteq E$. Tenemos entonces que

$$(I-P)AP(H) = (I-P)A(E) \subseteq (I-P)(E) = E - PE = E - E = \{0\}$$

Por tanto, nos queda que

$$(I-P)AP = 0 \Longrightarrow PAP = AP$$

Ahora, como P es la proyección ortogonal de E, sabemos por la proposición 6.0.13 que $(I-P)$ es la proyección ortogonal de $E^\perp$. Por la proposición anterior, sabemos que $E^\perp$ es invariante por A, luego podemos volver a usar el razonamiento de arriba y llegamos a que

$$(I-P)A(I-P) = A(I-P)$$

Desarrollando lo anterior y usando que $PAP = AP$, tenemos

$$(I-P)A(I-P) = A(I-P) - PA(I-P) = A - AP - PA + PAP = A - PA$$

$$A(I-P) = A - AP$$

Por tanto, nos queda que

$$A - PA = A - AP \Longrightarrow PA = AP$$

Luego hemos probado que P conmuta con A, y ya tenemos lo que queríamos.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos ahora que $PA = AP$ y veamos que E reduce a A. Usando que $PE = E$, tenemos

$$PA(E) = AP(E) = A(E)$$

Como $PH = E$, nos queda que $PA(E) \subseteq E$, luego $A(E) \subseteq E$.

Usando ahora que $P^* = P$ (por ser una proyección ortogonal), tenemos que

$$(PA)^* = (AP)^* \Longrightarrow A^*P^* = P^*A^* \Longrightarrow PA^* = A^*P$$

Y siguiendo el mismo razonamiento de antes, llegamos a que $A^*(E) \subseteq E$. Por tanto, tenemos que E reduce a A, y hemos probado lo que queríamos.

$\square$

Teorema 4.3.4. *Sea H un espacio de Hilbert, $A = \int_{\sigma(A)} zdE(z)$ un operador normal sobre H y S un conjunto de Borel. Entonces $E(S)(H)$ reduce a A.*

Demostración. Notemos que

- $E(S) = \int \chi_S dE$
- $A = \int_{\sigma(A)} zdE(z) = \int z\chi_{\sigma(A)}dE(z)$

Por el apartado (3) de la proposición 4.2.8, tenemos que $E(S)$ conmuta con A. Como $E(S)$ es la proyección ortogonal de $(E(S))(H)$ y $E(S)A = AE(S)$, por la proposición anterior, $(E(S))(H)$ reduce a A, y ya tenemos lo que queríamos.

$\square$

Ahora, veremos cómo caracterizar si un operador es escalar o no en función de su espectro.

Teorema 4.3.5. *Sea H un espacio de Hilbert y $A \in B(H)$ un operador normal cuyo espectro es un punto, es decir, $\sigma(A) = \{\lambda_0\}$ con $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Entonces A es escalar, dicho de otro modo, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $A = \lambda I$.*

Demostración. Por el teorema espectral, sabemos que

$$A = \int_{\sigma(A)} zdE(z)$$

Pero como $\sigma(A) = \{\lambda_0\}$ y $sop(E) = \sigma(A)$, nos queda que

$$A = \int_{\sigma(A)} zdE(z) = \int_{\sigma(A)} \lambda_0 dE(z) = \lambda_0 \int_{\sigma(A)} dE(z) = \lambda_0 E(\sigma(A)) = \lambda_0 E(\mathbb{C}) = \lambda_0 I$$

Por tanto, A es escalar, como queríamos probar.

$\square$

Con todo esto, ya podemos pasar a probar el resultado que buscamos, y que nos resolverá el problema del subespacio invariante para operadores normales.

Teorema 4.3.6. *Sea H un espacio de Hilbert y $A \in B(H)$ un operador normal. Entonces se cumple que*

a) Si A es escalar (es decir, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $A = \lambda I$), entonces A posee subespacio invariante.

b) Si A no es escalar, entonces A posee subespacio hiperinvariante.

Demostración.

a) Si A es escalar, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $A = \lambda I$. Para todo subespacio $M \subset H$ no trivial, se tiene por ser subespacio vectorial que si $x \in M$, entonces $\alpha x \in M$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Por tanto, claramente $A(M) \subseteq M$, y A posee subespacio invariante.

b) Sea A un operador normal no escalar. Entonces, por el teorema 4.3.5, existen $z_1, z_2 \in \sigma(A)$ con $z_1 \neq z_2$. Sea E la medida espectral de A, $r = \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$ y $S = B(z_1, r)$.

Veamos que $E(S)$ es no trivial. Por el teorema espectral, tenemos que $A = \displaystyle\int_{\sigma(A)} z dE(z)$. Usando el apartado (5) de la proposición 4.2.8 (como $f = id$), tenemos que $\sigma(A) = sop(E)$. Podemos entonces ver que:

- $E(S)$ es no nula: Si $E(S)$ fuera nula, es decir $E(S) = 0$, entonces $S \subseteq \mathbb{C} \setminus sop(E)$. Como $\sigma(A) = sop(E)$ y $S \cap \sigma(A) \neq \emptyset$ porque $z_1 \in S$ y $z_1 \in \sigma(A)$, no puede ocurrir que $S \subseteq \mathbb{C} \setminus sop(E)$, y por tanto, $E(S)$ es no nula.

- $E(S) \neq I$: Si $E(S) = I$, entonces $I - E(S) = 0$. Pero por el apartado (4) de la definición de medida espectral, se deduce que $E(U \setminus V) = E(U) - E(V)$, para cualesquiera U, V. Por tanto, nos queda que

  $$0 = I - E(S) = E(\mathbb{C} \setminus S)$$

  Llegamos entonces a que $\mathbb{C} \setminus S \subseteq \mathbb{C} \setminus sop(E)$. Usando de nuevo que $sop(E) = \sigma(A)$, como $z_2 \in \sigma(A)$ y $z_2 \in \mathbb{C} \setminus S$, no puede ocurrir que $\mathbb{C} \setminus S \subseteq \mathbb{C} \setminus sop(E)$, y por tanto, $E(S) \neq I$.

Luego tenemos que $(E(S))(H) \neq 0, H$, es decir, dicho subespacio es no trivial, y por el teorema 4.3.4, tenemos que $(E(S))(H)$ reduce a A, lo cual indica que $(E(S))(H)$ es un subespacio invariante por A. Veamos que además es un subespacio hiperinvariante.

Sea $T \in B(H)$ tal que $TA = AT$. Por el teorema espectral, T conmuta con cualquier proyección $(E(U))$, con U un borel de $\sigma(A)$. En particular, T conmuta con $E(S)$, es decir, $TE(S) = E(S)T$. Nos queda entonces que

$$T(E(S))(H) = (TE(S))H = E(S)(TH) \subseteq (E(S))(H)$$

Por tanto, $(E(S))(H)$ es invariante para T, y como T era cualquier operador que conmute con A, llegamos finalmente a que $(E(S))(H)$ es un subespacio hiperinvariante para A, como queríamos demostrar.

$\square$

Por tanto, obtenemos que al igual que ocurría con los operadores compactos, todo operador normal sobre un espacio de Hilbert posee subespacio invariante, y además todo operador que conmute con un operador normal también tiene subespacio invariante (de hecho, existe uno que es invariante para todos los que conmutan con un operador normal).

Veamos ahora el otro resultado importante y que nos será muy útil en el siguiente capítulo, el teorema de Fuglede-Putnam. Para ello, necesitaremos del siguiente lema previo.

Lema 4.3.7. *Si A es normal y $AB = BA$, entonces $A^*B = BA^*$.*

Demostración. Como A es normal, por el teorema espectral sabemos que

$$A = \int_{\sigma(A)} z dE(z)$$

Como $A^* = \int_{\sigma(A)} \overline{z} dE(z)$ por el apartado (1) de la Proposición 4.2.8, tenemos que para cada x e y fijos

$$(A^*Bx, y) = \int_{\sigma(A)} \overline{z} dE_{Bx,y}(z)$$

Recordemos que $E_{Bx,y}(z) = (E(z)Bx, y)$. Usando ahora que A conmuta con B, por el teorema espectral, B conmuta con $E(z)$, luego

$$E_{Bx,y}(z) = (E(z)Bx, y) = (BE(z)x, y) = (E(z)x, B^*y) = E_{x,B^*y}(z)$$

Por tanto,

$$(A^*Bx, y) = \int_{\sigma(A)} \overline{z} dE_{Bx,y}(z) = \int_{\sigma(A)} \overline{z} dE_{x,B^*y}(z) = (A^*x, B^*y) = (BA^*x, y)$$

Luego nos queda

$$(A^*Bx, y) = (BA^*x, y) \Longrightarrow ((A^*B - BA^*)x, y) = 0$$

Como esto ocurre para todo $y \in H$, tenemos que

$$(A^*B - BA^*)x = 0$$

Finalmente, como lo anterior se verifica para todo $x \in H$, llegamos a que

$$A^*B - BA^* = 0 \Longrightarrow A^*B = BA^*$$

como queríamos demostrar.

□

Teorema 4.3.8. ***(Teorema de Fuglede-Putnam)*** *Si A y C son operadores normales, y si B es un operador tal que $AB = BC$, entonces $A^*B = BC^*$.*

Demostración. Consideremos las matrices

$$S = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces S es normal, ya que como A y C son normales, entonces

$$\begin{aligned} SS^* &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & C^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^* & 0 \\ 0 & CC^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^*A & 0 \\ 0 & C^*C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & C^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \\ &= S^*S \end{aligned}$$

También, como $AB = BC$, tenemos que

$$ST = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & BC \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = TS$$

Entonces, por el lema anterior tenemos que $S^*T = TS^*$, luego tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & A^*B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = S^*T = TS^* = \begin{pmatrix} 0 & BC^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos concluir entonces que $A^*B = BC^*$, y hemos probado lo que queríamos.

□

Capítulo 5

Operadores esencialmente normales

En este capítulo terminaremos la teoría del trabajo, dando el resultado más interesante. Definiremos que se conoce por operador esencialmente normal, daremos algunos ejemplos y propiedades de ellos y, a través de la descomposición polar de un operador, obtendremos los resultados que nos permiten obtener subespacios invariantes para operadores esencialmente normales que cumplen ciertas condiciones. Los resultados de la primera y tercera sección son de [4], mientras que los de la segunda sección se estudian en [2]. Finalmente, daremos algunas conclusiones, que confirman que el problema del subespacio invariante está abierto para los operadores esencialmente normales que no verifiquen las condiciones de la tercera sección.

5.1. Definición y algunas propiedades

En esta sección, como viene siendo habitual, empezaremos definiendo qué son los operadores esencialmente normales, y viendo algunos ejemplos de ellos.

Definición 5.1.1. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$ un operador. Diremos que T es un operador esencialmente normal si $TT^* - T^*T$ es un operador compacto.

Ejemplo 5.1.2. El operador "shift" es un operador esencialmente normal. Veámoslo. Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in H$, recordemos que

$$Sx = (x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$$
$$S^*x = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

Entonces

$$(SS^* - S^*S)x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) - (0, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

Luego $SS^* - S^*S$ es la proyección sobre la primera coordenada, que es claramente un operador compacto, y por tanto, S es un operador esencialmente normal.

Veamos algunas propiedades de este tipo de operadores. Empecemos viendo qué podemos decir del adjunto de un operador esencialmente normal.

Proposición 5.1.3. *Sea H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$ un operador esencialmente normal. Entonces T^* también es esencialmente normal.*

Demostración. Como T es esencialmente normal, existe un operador compacto $K \in B(H)$ tal que

$$TT^* - T^*T = K$$

Tomando adjuntos, nos queda que

$$T^*T - TT^* = K^*$$

Usando la proposición 3.1.4, como K es compacto, K^* también lo es, luego por definición T^* es esencialmente normal, como queríamos demostrar.

□

Ahora, veremos que los operadores que hemos estado estudiando hasta ahora resultan ser operadores esencialmente normales.

Proposición 5.1.4. *Sea H un espacio de Hilbert y $K \in B(H)$ un operador compacto. Entonces K es esencialmente normal.*

Demostración. Como K es compacto, por la proposición 3.1.3 tenemos que KK^* y K^*K son operadores compactos. Además, la suma de operadores compactos es compacta, ya que si $K, L \in B(H)$ son operadores compactos, entonces, para cualquier $A \subset H$ acotado, se tiene por continuidad que

$$\overline{(K+L)A} \subseteq \overline{KA} + \overline{LA}$$

Como K y L son operadores compactos y A es acotado, $\overline{KA}$ y $\overline{LA}$ son compactos, y como la suma de compactos es compacta, nos queda que $\overline{(K+L)A}$ es un cerrado contenido en un compacto, y por lo tanto, es compacto. Luego $K+L$ es un operador compacto, y hemos probado que la suma de operadores compactos es un operador compacto.

Por tanto, como KK^* y K^*K son operadores compactos, entonces $KK^* - K^*K$ es un operador compacto, luego nos queda que K es un operador esencialmente normal, como queríamos probar.

□

Proposición 5.1.5. *Sea H un espacio de Hilbert y $A \in B(H)$ un operador normal. Entonces A es esencialmente normal.*

Demostración. La prueba es evidente, ya que por definición de operador normal, $AA^* = A^*A$, luego

$$AA^* - A^*A = 0$$

Como el operador nulo es claramente compacto, nos queda que A es esencialmente normal, como queríamos demostrar.

$\square$

Por tanto, ya hemos encontrado algunos operadores esencialmente normales que sí poseen subespacio invariante. Veremos más aún, pero para ello, primero necesitamos estudiar lo que se conoce como descomposición polar de un operador.

5.2. Descomposición polar

En esta sección veremos una serie de resultados previos que nos serán útiles para probar la existencia de subespacios invariantes para los operadores esencialmente normales. Estudiaremos la descomposición polar. En los números complejos, es muy frecuente descomponer un número en un producto de su módulo por su ángulo, es decir, si $|z| = r$ y $ang(z) = \theta$, escribimos $z = re^{i\theta}$. Esta es la descomposición polar de un complejo, y además es única. En esta sección veremos que se puede realizar algo similar con los operadores lineales y continuos en un espacio de Hilbert. Empecemos dando la siguiente definición.

Definición 5.2.1. Sea H un espacio de Hilbert y $V \in B(H)$ un operador. Diremos que V es una isometría parcial si $\|Vx\| = \|x\|$ para todo $x \in \ker(V)^\perp$. Llamaremos espacio inicial de V a $\ker(V)^\perp$.

Teorema 5.2.2. *Sea H un espacio de Hilbert y $V \in B(H)$ un operador. Entonces V es una isometría parcial si y sólo si V^*V es una proyección.*

Demostración. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que V es una isometría parcial sobre H con espacio inicial M. Si E es la proyección de H sobre M, y si $x \in M$, entonces

$$(V^*Vx, x) = (Vx, Vx) = \|Vx\|^2 = \|x\|^2 = (x, x) = (Ex, x)$$

Ahora, si $x \in M^\perp$, entonces $(Ex, x) = 0$, y por definición de espacio inicial tenemos que $x \in \ker(V)$, luego

$$(V^*Vx, x) = 0 = (Ex, x)$$

Como $H = M \oplus M^\perp$, nos queda que $(V^*Vx, x) = (Ex, x)$ para todo $x \in H$, luego $V^*V = E$ como queríamos probar.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos ahora que $V^*V = E$, donde E es una proyección de H sobre un cierto M. Entonces, para todo $x \in H$, usando que $E = E^2$ y $E = E^*$ por ser una proyección, se tiene que

$$\|Vx\|^2 = (Vx, Vx) = (V^*Vx, x) = (Ex, x) = (E^2x, x) = (Ex, Ex) = \|Ex\|^2$$

Así, $\|Vx\| = \|x\|$ si $x \in M$ y $Vx = 0$ si $x \in M^\perp$. Luego $\ker(V) = M^\perp$, y V es una isometría en $\ker(V)^\perp = M$. Por tanto, V es una isometría parcial, y ya hemos probado lo que queríamos.

$\square$

Corolario 5.2.3. *Sea H un espacio de Hilbert y $V \in B(H)$ una isometría parcial. Entonces V^* también es una isometría parcial.*

Demostración. Como V es una isometría parcial, por el teorema 5.2.2 tenemos que V^*V es una proyección. Recordemos que un operador E es una proyección sí y sólo si $E^2 = E$. Por tanto, $(V^*V)^2 = V^*V$. Luego usando esto, tenemos que se verifica que

$$(VV^*)^3 = VV^*VV^*VV^* = V(V^*VV^*V)V^* = V(V^*V)^2V^* = VV^*VV^* = (VV^*)^2$$

Ahora, veamos que si A es un operador normal tal que $A^3 = A^2$, entonces A es una proyección. Como $A^3 = A^2$, entonces $\sigma(A^3 - A^2) = \{0\}$. Usando el teorema de la aplicación espectral (teorema 6.0.14) y considerando el polinomio $p(z) = z^3 - z^2$, tenemos que

$$\{0\} = \sigma(A^3 - A^2) = \sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\} = \{\lambda^3 - \lambda^2 : \lambda \in \sigma(A)\}$$

Por tanto, $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$. Esto implica que $\sigma(A) = \{0, 1\}$. Usando ahora que A es normal, que $\lambda^2 = \lambda$ si $\lambda \in \{0, 1\}$, y el teorema espectral junto con el apartado (c) de la proposición 4.2.8, nos queda que

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda dE(\lambda) = \int_{\sigma(A)} \lambda^2 dE(\lambda) = A^2$$

Por tanto, $A^2 = A$ y A es una proyección.

Ahora, como VV^* es normal, pues $(VV^*)^* = VV^*$, y como $(VV^*)^3 = (VV^*)^2$, nos queda que VV^* es una proyección. Utilizando de nuevo el teorema 5.2.2, tenemos que V^* es una isometría parcial, y hemos probado lo que queríamos.

$\square$

Con esto, podemos pasar a probar el resultado que nos interesa, y que nos permitirá descomponer un operador lineal y continuo en un producto de una isometría parcial por un operador positivo.

Teorema 5.2.4. *Sea H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$ un operador. Entonces existe una isometría parcial V en H y existe un operador positivo P en H tales que $T = VP$. Los operadores V y P pueden ser encontrados de manera que* $\ker(V) = \ker(P)$*, y esta condición adicional determina la unicidad.*

Demostración. Empecemos con la construcción de P. Recordemos que T^*T es positivo en H, luego sabemos que existe un operador positivo P tal que $P^2 = T^*T$. Por ser P positivo, tenemos por definición que $P^* = P$, luego para todo $x \in H$ se cumple que

$$\|Px\|^2 = (Px, Px) = (P^2x, x) = (T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2$$

De manera que la ecuación

$$VPx = Tx$$

define inequívocamente un operador lineal y continuo V del rango de P (al que notaremos R) en el espacio de Hilbert H, y tal que V es una isometría en R. La linealidad y continuidad de V son obvias, por la linealidad y continuidad de P y T. Veamos que la definición es consistente. Si existen $x_1, x_2 \in H$ con $x_1 \neq x_2$ y $Px_1 = Px_2$, entonces $P(x_1 - x_2) = 0$. Por tanto,

$$0 = \|P(x_1 - x_2)\| = \|T(x_1 - x_2)\| = \|Tx_1 - Tx_2\|$$

Por tanto, $Tx_1 = Tx_2$, y el operador V es consistente.

Ahora, como V es acotado en R, existe una única extensión acotada de V a $\overline{R}$, y, por esto, una única extensión a una isometría parcial sobre H con $\overline{R}$ su espacio inicial, es decir, definiríamos el operador V de manera que V es una isometría sobre $\overline{R}$ y $V\left(\overline{R}^{\perp}\right) = 0$. Entonces, la ecuación $T = VP$ se tiene por construcción. El núcleo de la isometría parcial V es el complemento ortogonal de su espacio inicial, que es la clausura del rango de P, y como el complemento ortogonal del rango de un operador hermítico es su núcleo y $P^* = P$, nos queda que $\ker(V) = \ker(P)$. Con esto probamos la existencia.

Para probar la unicidad, supongamos que $T = VP$, con V una isometría parcial y P un operador positivo tal que $\ker(V) = \ker(P)$. Es obvio que se tiene que

$$T^* = (VP)^* = P^*V^* = PV^* \Longrightarrow T^* = PV^*$$

Por el teorema 5.2.2 sabemos que $V^*V = E$, donde E es una proyección de H sobre el espacio inicial de V. Por tanto,

$$T^*T = PV^*VP = PEP$$

Ahora utilizaremos el teorema 6.0.11, que dice que si $S \in B(H)$ entonces

$$\overline{ran(S^*)} = \ker(S)^{\perp}$$

Como el espacio inicial de V es $\ker(V)^{\perp}$ y $\ker(V) = \ker(P)$, por la igualdad anterior tenemos que el espacio inicial de V es la clausura del rango de P^*, pero como $P^* = P$, tenemos que el espacio inicial de V es la clausura del rango de P. Por tanto, como E era la proyección sobre dicho espacio inicial, nos queda que $EP = P$, de manera que

$$T^*T = PEP = P^2$$

Con esto tenemos la unicidad de P. Ahora, como $H = \ker(P) \oplus \ker(P)^{\perp} = \ker(P) \oplus \overline{ran(P)}$, y como $Vx = 0$ si $x \in \ker(P)$ y $VPx = Tx$ en la clausura del rango de P, nos queda que V también está determinado de manera única como definimos antes. Por tanto, hemos probado con esto la unicidad de V y P.

$\square$

Lo anterior nos permite descomponer un operador lineal y continuo en una isometría parcial por un operador positivo. Sin embargo, el resultado que necesitamos es más restrictivo, es decir, necesitamos que la isometría parcial sea un operador unitario. Para ello, usaremos el siguiente resultado.

Corolario 5.2.5. *Sea H un espacio de Hilbert, $T \in B(H)$ un operador y $T = VP$ su descomposición polar. Si T es inyectivo y tiene rango denso, entonces V es un operador unitario.*

Demostración. Empezaremos probando que $\ker(S^*S) = \ker(S)$ para cualquier operador $S \in B(H)$. Es evidente que $\ker(S) \subseteq \ker(S^*S)$, pues si $x \in \ker(S)$, entonces $S^*Sx = S^*0 = 0$. Supongamos ahora que $x \in \ker(S^*S)$. Entonces, para todo $y \in H$ se tiene que

$$(S^*Sx, y) = 0$$

En particular, si tomamos $y = x$ nos queda que

$$0 = (S^*Sx, x) = (Sx, Sx) = \|Sx\|^2 \Longrightarrow \|Sx\| = 0$$

Por tanto, $Sx = 0$, y $x \in \ker(S)$. Luego hemos probado que $\ker(S^*S) = \ker(S)$.

Usando esto y que $P^2 = P^*P$ (por ser P un operador positivo), observemos que

$$\ker(V) = \ker(P) = \ker(P^2) = \ker(T^*T) = \ker(T)$$

Si T es inyectivo, entonces $\ker(T) = \{0\}$. Por tanto, $\ker V = \{0\}$, y como V es una isometría sobre el complemento ortogonal de su núcleo, nos queda que V es una isometría sobre H, y esto es equivalente a decir que $V^*V = I$, porque

$$(V^*Vx, x) = (Vx, Vx) = \|Vx\|^2 = \|x\|^2 = (x, x)$$

para todo $x \in H$. Por tanto, $V^*Vx = x$ para todo $x \in H$, y nos queda que $V^*V = I$.

Ahora, por el corolario 5.2.3, tenemos que V^* también es una isometría parcial, cuyo espacio inicial es $\ker(V^*)^\perp$. Usando de nuevo el teorema 6.0.11 y que $ran(V) = ran(T)$ por construcción, tenemos que

$$\ker(V^*) = (\overline{ran(V)})^\perp = (\overline{ran(T)})^\perp$$

Como el rango de T es denso, $\overline{ran(T)} = H$, de manera que $\ker(V^*) = \{0\}$. Entonces, por el mismo razonamiento anterior, se verificaría que $(V^*)^*V^* = VV^* = I$.

Por tanto, nos queda que $VV^* = V^*V = I$, y por definición, tenemos que V es un operador unitario.

□

Con todo esto, ya podemos encaminarnos a probar el resultado que buscábamos, y que nos permitirá concluir el capítulo.

5.3. Subespacios invariantes

En esta última sección, resolveremos el problema más importante del trabajo, que será encontrar subespacios invariantes para operadores esencialmente normales bajo unas ciertas hipótesis. Para ello, como va siendo costumbre, necesitaremos de unos resultados previos, que pasamos a demostrar.

Empecemos recordando la definición de límite de Banach.

Definición 5.3.1. Un límite de Banach (que notaremos Lim) es un funcional lineal y continuo $Lim : l^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ definido sobre el espacio de Banach l^∞ tal que, para cualesquiera $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ con $x, y \in l^\infty$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se cumple que

1. $Lim(\alpha x + \beta y) = \alpha Lim(x) + \beta Lim(y)$ (linealidad)
2. Si $x_n \geq 0$ para todo $n \geq 1$, entonces $Lim(x) \geq 0$
3. $Lim(x) = Lim(Sx)$, donde S es el operador "shift" definido como

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$$

4. Si x es una sucesión convergente, entonces $Lim(x) = \lim x$

Como consecuencia de las anteriores propiedades, un límite de Banach también verifica que

$$\liminf x \leq Lim(x) \leq \limsup x$$

Ahora, para continuar necesitaremos hacer la siguiente construcción. Sea H un espacio de Hilbert separable y Lim un límite de Banach en l^{∞}. Sabemos por resultados de Análisis Funcional que toda sucesión débilmente convergente es acotada. Denotamos H_1 al espacio de sucesiones en H que convergen débilmente a 0, y definimos para cualesquiera $(x_n), (y_n) \in H_1$ la forma sesquilineal semidefinida positiva

$$((x_n), (y_n)) = Lim(x_n, y_n)$$

El espacio obtenido al hacer el cociente de H_1 por el núcleo de la anterior forma sesquilineal es un espacio prehilbertiano. El espacio resultante de completar el anterior espacio prehilbertiano será denotado $\widehat{H}$, y la aplicación canónica de H_1 a $\widehat{H}$ se denotará $\eta : H_1 \longrightarrow \widehat{H}$. Notemos que $\eta(x_n)$ es la clase de equivalencia de las sucesiones $(y_n) \in H_1$ tales que $Lim\|x_n - y_n\|^2 = 0$. Esto se debe a que estamos haciendo cociente por el núcleo de la forma sesquilineal, y se tiene que

$$((x_n), (x_n)) = 0 \Longleftrightarrow Lim(x_n, x_n) = 0 \Longleftrightarrow Lim\|x_n\|^2 = 0$$

Por tanto, la relación de equivalencia definida por el cociente es $(x_n) \sim (y_n)$ si y sólo si $Lim\|x_n - y_n\|^2 = 0$, y de aquí es evidente la anterior definición de η. Veamos como podemos relacionar operadores lineales y continuos sobre H con operadores lineales y continuos sobre $\widehat{H}$.

Proposición 5.3.2. *Todo operador lineal y continuo T en H induce un operador lineal y continuo $\widehat{T}$ en $\widehat{H}$, de manera que, si $(x_n) \in H_1$, entonces*

$$\widehat{T}\eta(x_n) = \eta(Tx_n)$$

Demostración. Empecemos viendo que está bien definido. Claramente $\eta(x_n) \in \widehat{H}$, y como $(Tx_n) \in H_1$, por continuidad de T, tenemos que $\eta(Tx_n) \in \widehat{H}$. Por tanto,

$$\widehat{T}\eta(x_n) = \eta(Tx_n)$$

está bien definido. Veamos que es consistente, es decir, que si (x_n) es equivalente a (y_n), entonces (Tx_n) es equivalente a (Ty_n). Pero esto es evidente, ya que si $(x_n) \sim (y_n)$ entonces $Lim\|x_n - y_n\|^2 = 0$, y tendríamos que

$$Lim\|Tx_n - Ty_n\|^2 \leq Lim\left(\|T\|^2 \cdot \|x_n - y_n\|^2\right) = \|T\|^2 \left(Lim\|x_n - y_n\|^2\right) = 0$$

Por tanto, $(Tx_n) \sim (Ty_n)$.

Falta ver que $\widehat{T}$ es un operador lineal y continuo. Sin embargo esto es trivial, ya que η y T son lineales y continuos, luego su composición $\widehat{T}\eta(x_n) = \eta(Tx_n)$ también lo será. Por tanto, hemos probado que $\widehat{T}$ es un operador lineal y continuo sobre $\widehat{H}$.

□

Veamos algunas propiedades de estos operadores.

Proposición 5.3.3. *Sean T y S operadores lineales y continuos sobre H_1. Entonces se verifica*

1. $\widehat{(TS)} = \widehat{T}\widehat{S}$
2. $\widehat{(T^*)} = \left(\widehat{T}\right)^*$
3. *Si T es un operador compacto, entonces $\widehat{T} = 0$*
4. *Si T es un operador esencialmente normal, entonces $\widehat{T}$ es normal*

Demostración.
a) Utilizando la definición de $\widehat{T}$ y $\widehat{S}$, se tiene que para todo $(x_n) \in H_1$

$$\widehat{(TS)}\eta(x_n) = \eta(TSx_n) = \widehat{T}\eta(Sx_n) = \widehat{T}\widehat{S}\eta(x_n)$$

Luego claramente $\widehat{(TS)} = \widehat{T}\widehat{S}$.

b) Sean $(x_n), (y_n) \in H_1$ cualesquiera. Se tiene que

$$\begin{aligned}(\eta(x_n), \left(\widehat{T}\right)^* \eta(y_n)) &= (\widehat{T}\eta(x_n), \eta(y_n)) = (\eta(Tx_n), \eta(y_n)) = Lim(Tx_n, y_n) = Lim(x_n, T^*y_n) \\ &= (\eta(x_n), \eta(T^*y_n)) = (\eta(x_n), \widehat{(T^*)}\eta(y_n))\end{aligned}$$

Como esto ocurre para todo $(x_n) \in H_1$, nos queda que

$$\left(\widehat{T}\right)^* \eta(y_n) = \widehat{(T^*)}\eta(y_n)$$

Y como lo anterior ocurre para todo $(y_n) \in H_1$, concluimos que

$$\left(\widehat{T}\right)^* = \widehat{(T^*)}$$

como queríamos probar.

c) Supongamos que T es compacto. Usaremos que si (x_n) es una sucesión en H que tiende a 0 débilmente y posee una subsucesión que converge en norma a 0, entonces $\|x_n\| \longrightarrow 0$. Para probar esto, definimos el conjunto

$$\Omega = \{x \in H : \textit{ Existe una subsucesión } (x_{n_k}) \textit{ tal que } \|x_{n_k} - x\| \longrightarrow 0\}$$

Como estamos suponiendo que existe una subsucesión (digamos (x_{n_j})) tal que $\|x_{n_j}\| \longrightarrow 0$, entonces $0 \in \Omega$. Ahora, si $x \in \Omega$, entonces existe una subsucesión (x_{n_k}) de manera que $\|x_{n_k} - x\| \longrightarrow 0$, luego para todo $y \in H$ se tiene por la desigualdad de Cauchy-Schwarz que

$$(x_{n_k} - x, y) \leq \|x_{n_k} - x\| \cdot \|y\| \longrightarrow 0 \Longrightarrow (x_{n_k} - x, y) \longrightarrow 0$$

Por tanto, (x_{n_k}) converge débilmente a x, pero como (x_n) converge débilmente a 0 y (x_{n_k}) es una subsucesión, entonces debe ocurrir que $x = 0$. Luego hemos probado que $\Omega = \{0\}$. Ahora, usando que $\|x_n\| \leq \sup\limits_{n_k} \|x_{n_k}\|$, nos queda que

$$\|x_n\| \longrightarrow 0$$

como queríamos ver. Usemos esto para probar lo que buscábamos. Sea (x_n) una sucesión en H que tiende a 0 débilmente. Como T es continuo, (Tx_n) también converge débilmente a 0. Ahora, como (x_n) es acotada y T es compacto, (Tx_n) posee una subsucesión convergente, digamos (Tx_{n_j}). Supongamos que dicha subsucesión converge a un cierto $x \in H$. Como vimos antes, la convergencia en norma implica la convergencia débil, luego nos queda que $(Tx_{n_j}) \longrightarrow x$ débilmente, pero como (Tx_n) converge débilmente a 0 y (Tx_{n_j}) es una subsucesión, nos queda que $x = 0$. Por tanto, (Tx_n) es una sucesión en H que converge débilmente a 0 y que posee una subsucesión (Tx_{n_j}) que converge en norma a 0. Por lo que hemos probado más arriba, nos queda que $\|Tx_n\| \longrightarrow 0$. Entonces, podemos deducir fácilmente que

$$\lim \|Tx_n\|^2 = 0$$

Por tanto, por la propiedad (4) de la definición de límite de Banach, nos queda que $Lim\|Tx_n\|^2 = 0$. Luego, por la definición de la aplicación canónica η, tenemos que $\eta(Tx_n) = \eta(0) = 0$ (porque (Tx_n) y 0 están en la misma clase de equivalencia). Por tanto,

$$\widehat{T}\eta(x_n) = \eta(Tx_n) = 0$$

Como esto ocurre para todo $(x_n) \in H_1$, llegamos a que $\widehat{T} = 0$, como queríamos.

d) Supongamos que T es esencialmente normal, es decir, existe un operador compacto K tal que

$$TT^* - T^*T = K$$

Usando los tres apartados anteriores y la linealidad, llegamos a que

$$0 = \widehat{K} = (TT^* - T^*T)^\wedge = \widehat{T}(\widehat{T})^* - (\widehat{T})^*\widehat{T} \Longrightarrow \widehat{T}(\widehat{T})^* = (\widehat{T})^*\widehat{T}$$

Por tanto, $\widehat{T}$ es un operador normal, y hemos probado lo que queríamos.

$\square$

Ya hemos definido pues el espacio donde vamos a trabajar. Ahora podemos encaminarnos a probar el resultado que nos dará la clave para probar lo que queremos. Sin embargo, primero necesitaremos de varios lemas previos, que pasamos a enunciar y demostrar.

Lema 5.3.4. *Sea H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$ un operador. Sea (T_n) una sucesión en el conmutante $\{T\}'$ de T que converge débilmente a cero. Entonces existe un operador $R : H \longrightarrow \widehat{H}$ tal que $RT = \widehat{T}R$ y que verifica para todo $x \in H$ que*

$$\liminf \|T_n x\| \leq \|Rx\| \leq \limsup \|T_n x\|$$

Demostración. Para cada vector $x \in H$ definimos $Rx = \eta(T_n x)$. Claramente R está bien definido y es un operador lineal y continuo, por la continuidad y linealidad de T_n y η. Entonces, como $(T_n) \subseteq \{T\}'$, tenemos que

$$RTx = \eta(T_n Tx) = \eta(TT_n x) = \widehat{T}\eta(T_n x) = \widehat{T}Rx$$

Como esto ocurre para todo $x \in H$, nos queda que $RT = \widehat{T}R$, como queríamos ver.

Ahora, recordemos la propiedad de los límites de Banach que nos dice que

$$\liminf x_n \leq Lim(x_n) \leq \limsup x_n$$

También, necesitamos recordar una propiedad de los límites superiores e inferiores. Sean (a_n) y (b_n) sucesiones positivas cualesquiera, entonces

$$\liminf a_n b_n \geq (\liminf a_n)(\liminf b_n)$$
$$\limsup a_n b_n \leq (\limsup a_n)(\limsup b_n)$$

Usando ahora que $\|\eta(T_n x)\|^2 = (\eta(T_n x), \eta(T_n x)) = Lim\|T_n x\|^2$ (por definición de η), la propiedad de los límites de Banach que mencionamos y las dos desigualdades anteriores, tenemos que

$$(\liminf \|T_n x\|)^2 \leq \liminf \|T_n x\|^2 \leq Lim\|T_n x\|^2 = \|\eta(T_n x)\|^2 = \|Rx\|^2$$

$$\|Rx\|^2 = \|\eta(T_n x)\|^2 = Lim\|T_n x\|^2 \leq \limsup \|T_n x\|^2 \leq (\limsup \|T_n x\|)^2$$

Por tanto, $(\liminf \|T_n x\|)^2 \leq \|Rx\|^2 \leq (\limsup \|T_n x\|)^2$, y tomando raíz cuadrada nos queda que

$$\liminf \|T_n x\| \leq \|Rx\| \leq \limsup \|T_n x\|$$

como queríamos demostrar.

□

Definición 5.3.5. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$ un operador. Diremos que T es una cuasiafinidad en H si T es inyectivo y de rango denso.

Lema 5.3.6. *Sea H un espacio de Hilbert, $A, B \in B(H)$ operadores normales y $R \in B(H)$ una cuasiafinidad. Si se cumple que $AR = RB$, entonces A y B son unitariamente equivalentes (es decir, existe un operador unitario $U \in B(H)$ tal que $A = UBU^*$).*

Demostración. Como R es una cuasiafinidad, por el corolario 5.2.5 sabemos que existe un operador unitario U y un operador positivo P con $U, P \in B(H)$, $P^2 = R^*R$ y $R = UP$ su descomposición polar. Como A y B son operadores normales y $AR = RB$, por el teorema de Fuglede-Putnam (teorema 4.3.8) tenemos que $A^*R = RB^*$. Por tanto, se tiene que

$$BR^*R = (BR^*)R = (RB^*)^*R = (A^*R)^*R = (R^*A)R = R^*(AR) = R^*RB$$

Luego, como $P^2 = R^*R$ nos queda que

$$BP^2 = P^2B$$

Se sigue entonces, usando el lema 6.0.15 para la función raíz cuadrada, que

$$BP = PB$$

Finalmente, por hipótesis teníamos que $AR = RB$, o dicho de otro modo, que $AUP = UPB$. Entonces podemos concluir con lo anterior que

$$AUP = UPB = UBP$$

Ahora, como $R = UP$ y U unitario, entonces $U^*R = P$. Usando que U es un isomorfismo (por ser unitario) y que el rango de R es denso (por ser cuasiafinidad), nos queda que el rango de P es denso. Luego se verifica que, como $AU, BU \in B(H)$ y coinciden en un espacio denso ($ran(P)$), entonces por continuidad $AU = UB$. Finalmente, como U es unitario, nos queda que $A = UBU^*$, y hemos probado que A y B son unitariamente equivalentes, como queríamos.

□

Lema 5.3.7. *Sean H_1 y H_2 dos espacios de Hilbert, y sean $A : H_1 \longrightarrow H_2$ y $B : H_2 \longrightarrow H_1$ operadores lineales y continuos. Si $\overline{ran(B)} = H_1$, entonces $\overline{ran(AB)} = \overline{ran(A)}$.*

Demostración.
$\boxed{\subseteq}$ Esta contención es obvia. Claramente $ran(AB) \subseteq ran(A)$, y tomando clausura nos queda que $\overline{ran(AB)} \subseteq \overline{ran(A)}$.

$\boxed{\supseteq}$ Sea $z \in ran(A)$. Entonces existe un $y \in H_1$ de manera que $z = Ay$. Como la clausura del rango de B es densa en H_1, existe una sucesión $(x_n) \subseteq ran(B)$ de manera que

$$y = \lim_{n \to +\infty} Bx_n$$

Por tanto, usando la continuidad de A, nos queda que

$$z = A\left(\lim_{n\to+\infty} Bx_n\right) = \lim_{n\to+\infty} ABx_n \Longrightarrow z \in \overline{ran(AB)}$$

Luego $\overline{ran(AB)} \supseteq \overline{ran(A)}$, y hemos probado lo que queríamos.

□

Lema 5.3.8. *Sea H un espacio de Hilbert, $A \in B(H)$ un operador normal y $E \subset H$ un subespacio que reduce a A. Entonces $A|_E$ es un operador normal.*

Demostración. Se tiene claramente que

$$(A|_E)^* = A^*|_E$$

Como $A, A^* \in B(E)$ y A es normal, nos queda que

$$(A|_E)^*(A|_E) = A^*|_E A|_E = (A^*A)|_E = (AA^*)|_E = (A|_E)(A|_E)^*$$

Por tanto, $A|_E$ es normal, como queríamos ver.

□

Con esto, podemos probar el resultado del que vamos a deducir la existencia de subespacio invariante para operadores esencialmente normales bajo unas ciertas condiciones. Para ello, primero definiremos las nociones con las que trabajaremos.

Definición 5.3.9. Sea H un espacio de Hilbert y $T, S \in B(H)$ operadores. Diremos que T y S son semejantes si existe un operador $R \in B(H)$ invertible, con

$$T = R^{-1}SR$$

Definición 5.3.10. Sea H un espacio de Hilbert y $T, S \in B(H)$ operadores. Diremos que T y S son cuasisemejantes si existen dos cuasiafinidades $R, V \in B(H)$, con

$$TR = RS$$

$$VT = SV$$

Definición 5.3.11. Sea H un espacio de Hilbert y $(T_n) \subset B(H)$ una sucesión de operadores. Diremos que dicha sucesión converge lentamente a cero si converge a cero en la topología débil de operadores y para todo $x \in H \setminus \{0\}$ se cumple que

$$\liminf_{n\to+\infty} \|T_n x\| > 0$$

Definición 5.3.12. Sea H un espacio de Hilbert y $(T_n) \subset B(H)$ una sucesión de operadores. Diremos que dicha sucesión converge muy lentamente a cero si converge lentamente a cero y existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in H \setminus \{0\}$ se cumple que

$$\liminf_{n\to+\infty} \|T_n x\| \geq \delta \|x\|$$

Finalmente, pasemos a ver el resultado que nos dará la clave para probar la existencia de subespacio invariante que buscábamos.

Teorema 5.3.13. *Sea H un espacio de Hilbert y T un operador esencialmente normal tal que existen sucesiones en $\{T\}'$ y $\{T^*\}'$, respectivamente, que convergen lentamente (muy lentamente) a cero. Entonces T es cuasisemejante (semejante) a un operador normal.*

Demostración. Notemos (T_n) la sucesión en el conmutante de T que converge lentamente a cero. Por definición, converge a cero en la topología débil de operadores. Por el lema 5.3.4, existe un operador $R : H \longrightarrow \widehat{H}$ tal que $RT = \widehat{T}R$ y

$$\liminf \|T_n x\| \leq \|Rx\| \leq \limsup \|T_n x\|$$

Además, como (T_n) converge lentamente a cero, se tiene también por definición que para todo $x \in H$ con $x \neq 0$ se verifica

$$\liminf \|T_n x\| > 0$$

Por tanto, tenemos que para todo $x \neq 0$ se cumple

$$\|Rx\| \geq \liminf \|T_n x\| > 0 \Longrightarrow \|Rx\| > 0$$

Deducimos entonces que $\ker(R) = \{0\}$, es decir, el operador R es inyectivo.

Ahora, por la proposición 5.1.3, tenemos que T^* también es esencialmente normal, luego de manera análoga podemos encontrar un operador S tal que $ST^* = \left(\widehat{T}\right)^* S$ y $\ker(S) = \{0\}$. Tomando adjunto en la última igualdad, nos queda que $TS^* = S^*\widehat{T}$, y usando las desigualdades anteriores tenemos que

$$\widehat{T}(RS^*) = RTS^* = (RS^*)\widehat{T}$$

Como T es esencialmente normal, por el apartado (d) de la proposición 5.3.3 tenemos que $\widehat{T}$ es normal, luego por el teorema de Fuglede-Putnam (teorema 4.3.8) nos queda que

$$\left(\widehat{T}\right)^* (RS^*) = (RS^*) \left(\widehat{T}\right)^*$$

Usando que $\overline{ran(S^*)} = \ker(S)^\perp$ y que $\ker(S) = \{0\}$, nos queda que $\overline{ran(S^*)} = H$, luego por el lema 5.3.7 deducimos que $\overline{ran(RS^*)} = \overline{ran(R)}$. Se sigue de estas relaciones y de la proposición 6.0.16 que $\overline{ran(R)}$ es invariante por $\widehat{T}$ y $\left(\widehat{T}\right)^*$, ya que

$$\widehat{T}\left(\overline{R(H)}\right) = \widehat{T}\left(\overline{RS^*(\widehat{H})}\right) \subseteq \overline{\widehat{T}RS^*(\widehat{H})} = \overline{RS^*\widehat{T}(\widehat{H})} \subseteq \overline{R(H)}$$

$$\left(\widehat{T}\right)^*\left(\overline{R(H)}\right) = \left(\widehat{T}\right)^*\left(\overline{RS^*(\widehat{H})}\right) \subseteq \overline{\left(\widehat{T}\right)^* RS^*(\widehat{H})} = \overline{RS^*\left(\widehat{T}\right)^*(\widehat{H})} \subseteq \overline{R(H)}$$

Por tanto, $\overline{ran(R)}$ reduce a T, y por el lema 5.3.8 la restricción $T_R = \widehat{T}|_{\overline{ran(R)}}$ es normal. Análogamente, el operador $T_S = \widehat{T}|_{\overline{ran(S)}}$ también es normal.

Sean U_R y U_S operadores unitarios de $\overline{ran(R)}$ y $\overline{ran(S)}$, respectivamente, en H, y sean $N_R = U_R T_R U_R^{-1}$, $N_S = U_S T_S U_S^{-1}$, $R_1 = U_R R$ y $S_1 = U_S S$. Entonces N_R y N_S son operadores normales en H, por ser T_R y T_S normales y U_R y U_S unitarios (también son normales). Además R_1 y S_1 son cuasiafinidades. La inyectividad se tiene por la inyectividad de R y S y por ser U_R y U_S unitarios. La densidad del rango se debe a que, para cualquier $x \in H$

$$R_1^* x = R^* U_R^* x = 0 \Longleftrightarrow U_R^* x \in \ker(R^*) = \left(\overline{ran(R)}\right)^\perp$$

Como $U_R^* x \in \overline{ran(R)}$ (por definición de U_R) y como $U_R^* x \in \left(\overline{ran(R)}\right)^\perp$, nos queda que $U_R^* x = 0$, y por ser U_R^* unitario, sólo puede ocurrir si $x = 0$. Por tanto, $\ker(R_1^*) = \{0\}$, y usando de nuevo que $\ker(R_1^*) = \left(\overline{ran(R_1)}\right)^\perp$, nos queda que $\overline{ran(R_1)} = H$. Entonces efectivamente R_1 es una cuasiafinidad, y se prueba de manera totalmente análoga que S_1 también lo es.

Luego usando todo lo anterior se verifica que

$$R_1 T = U_R R T = U_R \widehat{T} R = U_R T_R R = U_R T_R U_R^{-1} U_R R = N_R R_1$$

Por tanto, $R_1 T = N_R R_1$. De manera análoga,

$$S_1 T^* = U_S S T^* = U_S \left(\widehat{T}\right)^* S = U_S \left(\widehat{T}\right)^* U_S^{-1} U_S S = \left(U_S \widehat{T} U_S^{-1}\right)^* U_S S = N_S^* S_1$$

Luego $S_1 T^* = N_S^* S_1$, y tomando adjuntos tenemos que $T S_1^* = S_1^* N_S$. Por tanto, usando las igualdades anteriores nos queda que

$$N_R(R_1 S_1^*) = R_1 T S_1^* = (R_1 S_1^*) N_S$$

Como $R_1 S_1^*$ es una cuasiafinidad (esto es obvio sabiendo que R_1 y S_1 lo son y usando la definición junto con la igualdad $\overline{ran(S_1^*)} = \ker(S_1)^\perp$), por el lema 5.3.6 tenemos que existe un operador unitario U de manera que $N_S = U^* N_R U$. Entonces, deducimos que

$$T S_1^* = S_1^* N_S = S_1^* U^* N_R U$$

O dicho de otro modo,

$$T(S_1^*U^*) = (S_1^*U^*)N_R$$

Además, $S_1^*U^*$ es una cuasiafinidad (de nuevo por ser S_1^* una cuasiafinidad y por ser U unitario). Por tanto, hemos encontrado dos cuasiafinidades R_1 y $S_1^*U^*$ y un operador normal N_R de manera que

$$R_1T = N_RR_1$$

$$T(S_1^*U^*) = (S_1^*U^*)N_R$$

Por definición, hemos probado que T es cuasiasemejante a un operador normal, como queríamos.

Notemos que bajo la condición de convergencia muy lentamente a cero, el operador R_1 pasa a ser un operador invertible, ya que por definición de R y de convergencia muy lenta se tiene que existe $\delta > 0$ de manera que para todo $x \in H$ con $x \neq 0$ se verifica

$$\|Rx\| \geq \liminf \|T_nx\| \geq \delta\|x\|$$

Esto implica que $ran(R)$ es cerrado, y como R era inyectivo, nos queda que R es un isomorfismo sobre su rango. Ahora, U_R es unitario, luego también es un isomorfismo, y como U_R está definido sobre el rango de R, nos queda que $R_1 = U_RR$ es un isomorfismo por composición. Por tanto, R_1 es invertible, y de la igualdad $R_1T = N_RR_1$ anterior, deducimos que

$$T = R_1^{-1}N_RR_1$$

De nuevo por definición, deducimos que T es semejante a un operador normal, y hemos terminado la demostración.

□

Con este teorema, se puede probar el resultado que estábamos buscando, y que concluye la última demostración de esta sección. Esto es, la existencia de subespacios invariantes para operadores esencialmente normales bajo ciertas hipótesis. Sin embargo, antes de dicha prueba, necesitaremos como es habitual algunos resultados previos, que pasamos a demostrar.

Lema 5.3.14. *Sea H un espacio de Hilbert y $A, B \in B(H)$ dos operadores. Si A y B son cuasisemejantes y B tiene un subespacio hiperinvariante, entonces A también posee un subespacio hiperinvariante.*

Demostración. Por ser A y B cuasisemejantes, existen dos cuasiafinidades R y S de manera que

$$AR = RB$$

$$SA = BS$$

Sea E el subespacio hiperinvariante de B y definimos

$$F_0 = \{TRx : x \in E,\, T \in \{A\}'\}$$

Finalmente, denotamos $F = \overline{F_0}$, y vamos a probar que el subespacio F es hiperinvariante para A. Para ello, veamos que si $C_1, C_2 \in \{A\}'$, entonces $C_1C_2 \in \{A\}'$. Esto se debe a que

$$C_1C_2A = C_1AC_2 = AC_1C_2$$

Por tanto, sea $C \in \{A\}'$ cualquiera, entonces para todo $x \in E$ y $T \in \{A\}'$ se tiene que

$$CTRx \in F_0 \Longrightarrow CF_0 \subseteq F_0$$

Por tanto, nos queda que

$$CF = C\overline{F_0} \subseteq \overline{CF_0} \subseteq \overline{F_0} = F$$

Luego $CF \subseteq F$ para todo $C \in \{A\}'$. Veamos que F es no trivial. Claramente $F \neq \{0\}$, ya que $E \neq \{0\}$. Sea ahora $C \in \{A\}'$ cualquiera. Se tiene que

$$SCRB = SCAR = SACR = BSCR$$

Por tanto, B conmuta con SCR para cualquier $C \in \{A\}'$. Notemos ahora que

$$SF_0 = \{SCRx : x \in E,\, C \in \{A\}'\}$$

Como E es hiperinvariante para B y SCR conmuta con B, nos queda que E es invariante para SCR, para cualquier $C \in \{A\}'$. Por tanto, para todo $x \in E$, tenemos que $SCRx \in E$, de lo que deducimos que

$$SF_0 \subseteq E$$

Por tanto, llegamos a que

$$SF = S\overline{F_0} \subseteq \overline{SF_0} \subseteq \overline{E} = E$$

Finalmente, esto implica que $\overline{SF} \subseteq E$. Recordemos que

- Como E es un subespacio hiperinvariante, $E \neq H$
- Como S es una cuasiafinidad, $\overline{SH} = H$

Por tanto, si $F = H$, tendríamos que $\overline{SF} = H$, pero $\overline{SF} \subseteq E \neq H$. Por reducción al absurdo, nos queda que $F \neq H$, y hemos probado que F es un subespacio hiperinvariante para A.

$\square$

Definición 5.3.15. Sea H un espacio de Hilbert y $A \in B(H)$ un operador. Se define el doble conmutante del operador A como

$$\{A\}'' = \{B \in B(H) : BT = TB \textit{ para todo } T \in \{A\}'\}$$

Veamos un resultado extremadamente sencillo, pero que nos permitirá aclarar la relación entre el conmutante y el doble conmutante, y que además nos será muy útil.

Proposición 5.3.16. *Sea H un espacio de Hilbert y $A \in B(H)$ un operador. Entonces se verifica*

a) $A \in \{A\}''$

b) $\{A\}'' \subseteq \{A\}'$

Demostración.
a) Esto es evidente, ya que A conmuta con todo elemento de $\{A\}'$.

b) Sea $B \in \{A\}''$. Como $A \in \{A\}'$ se tiene que B conmuta con A, luego $B \in \{A\}'$.

□

Con todo lo anterior, podemos pasar ya a probar el resultado que queremos, y que concluye esta sección.

Teorema 5.3.17. *Sea H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$ un operador esencialmente normal no escalar.*

a) Si existen sucesiones en $\{T\}'$ y $\{T^*\}'$, respectivamente, que convergen a cero débilmente, pero no fuertemente, entonces T posee subespacio invariante

b) Si existen sucesiones en $\{T\}''$ y $\{T^*\}''$, respectivamente, que convergen a cero débilmente, pero no fuertemente, entonces T posee subespacio hiperinvariante.

Demostración.
a) Vamos a probar el resultado haciendo dos reducciones al absurdo, una de ellas contenida en la otra. Notemos (T_n) la sucesión en el conmutante de T que converge débilmente a cero, pero no fuertemente. La primera reducción al absurdo será suponer que T no posee ningún subespacio invariante. La segunda será suponer que (T_n) no converge lentamente a cero. Por definición de convergencia lenta, esto implica que existe un $x \in H \setminus \{0\}$ de manera que

$$\liminf_{n \to +\infty} \|T_n x\| = 0$$

Por propiedades de los límites inferiores, lo anterior implica que existe una subsucesión (T_{n_j}) de manera que

$$\lim_{j \to +\infty} \|T_{n_j} x\| = 0$$

Sea $\{T\}''$ el doble conmutante de T, y definimos

$$E = \{Sx : S \in \{T\}''\}$$

Como $T, S \in \{T\}''$, entonces $TS \in \{T\}''$, ya que para todo $A \in \{T\}'$ se tiene que

$$TSA = TAS = ATS$$

Por tanto, $TSx \in E$ para todo $S \in \{T\}''$, o dicho de otro modo, $TE \subseteq E$. Pero como T no posee subespacio invariante, por hipótesis, y como $E \neq \{0\}$ (porque $x \in E$ ya que la identidad pertenece a $\{T\}''$), entonces E tiene que ser de rango denso.

Tenemos entonces que

$$\|T_{n_j}Sx\| = \|ST_{n_j}x\| \leq \|S\| \cdot \|T_{n_j}x\| \longrightarrow 0$$

Como (T_{n_j}) es acotada (por converger débilmente a 0) y como $\|T_{n_j}y\| \longrightarrow 0$ para todo y perteneciente a un conjunto de rango denso, nos queda que T_{n_j} converge fuertemente a cero. Usando el mismo razonamiento de la demostración del apartado (c) de la proposición 5.3.3 para operadores, tenemos que como (T_n) es una sucesión que converge débilmente a cero y posee una subsucesión que converge fuertemente a cero, entonces (T_n) converge fuertemente a cero. Pero esto es una contradicción, porque por hipótesis (T_n) converge débilmente pero no fuertemente a cero. Por tanto, tenemos por reducción al absurdo que (T_n) converge lentamente a cero.

Si T^* poseyera un subespacio invariante M, entonces evidentemente $M^\perp$ sería un subespacio invariante para T, y por hipótesis esto no puede ocurrir. Por tanto, T^* no tiene subespacio invariante, y haciendo el mismo desarrollo anterior obtenemos que existe una sucesión en $\{T^*\}'$ que converge lentamente a cero. Luego, por el teorema 5.3.13, tenemos que T es cuasisemejante a un operador normal. Entonces tenemos que existe una cuasiafinidad (que por notación llamaremos S) de manera que

$$TS = SN_R$$

Si N_R es escalar, entonces $N_R = \lambda I$ para un cierto $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, luego tendríamos

$$TS = SN_R = S\lambda I = \lambda IS$$

Como S es de rango denso (por ser una cuasiafinidad), la anterior igualdad implica que $T = \lambda I$, pero por hipótesis T es no escalar, luego N_R no puede ser escalar. Por tanto, por el teorema 4.3.6 tenemos que N_R posee subespacio hiperinvariante.

Como T es cuasisemejante a un operador que posee subespacio hiperinvariante, por el lema 5.3.14 tenemos que T posee subespacio hiperinvariante, pero esto es una contradicción, porque estábamos suponiendo que T no posee subespacio invariante. Por tanto, por reducción al absurdo, llegamos a que T debe poseer subespacio invariante, y ya hemos probado lo que queríamos.

b) En esta demostración seguiremos un desarrollo casi idéntico a la del apartado anterior. De nuevo tomaremos dos reducciones al absurdo, una contenida en la otra. Notemos (T_n) la sucesión en el doble conmutante de T que converge débilmente a cero, pero no fuertemente. La primera reducción al absurdo será suponer que T no posee ningún subespacio hiperinvariante. La segunda será suponer que (T_n) no converge lentamente a cero. De nuevo tenemos que existe un $x \in H \setminus \{0\}$ de manera que existe una subsucesión (T_{n_j}) que verifica

$$\lim_{j \to +\infty} \|T_{n_j} x\| = 0$$

Ahora definimos

$$E = \{Sx : S \in \{T\}'\}$$

Sean $A, S \in \{T\}'$ cualesquiera. Ya vimos anteriormente que $AS \in \{T\}'$. Por tanto, tenemos que

$$ASx \in E \Longrightarrow AE \subseteq E$$

Por tanto, $\overline{E}$ es un subespacio hiperinvariante para T, pero estamos suponiendo que T no posee subespacio hiperinvariante. Luego, como $E \neq \{0\}$ (porque $x \in E$ ya que la identidad pertenece a $\{T\}'$), entonces E tiene que ser de rango denso.

Tenemos entonces que

$$\|T_{n_j} Sx\| = \|ST_{n_j} x\| \leq \|S\| \cdot \|T_{n_j} x\| \longrightarrow 0$$

Usando el mismo razonamiento del apartado anterior llegamos a que (T_n) converge fuertemente a cero, lo cual es una contradicción. Por tanto, hemos encontrado una sucesión en $\{T\}''$ que converge lentamente a cero. De igual forma que antes, obtenemos que existe una sucesión en $\{T^*\}''$ que converge lentamente a cero.

Ahora, por el apartado (b) de la proposición 5.3.16, tenemos que $\{T\}'' \subset \{T\}'$ y que $\{T^*\}'' \subset \{T^*\}'$. Por tanto, hemos encontrado sucesiones en $\{T\}'$ y $\{T^*\}'$, respectivamente, que convergen lentamente a cero. Por el teorema 5.3.13, tenemos que T es cuasisemejante a un operador normal, y siguiendo el mismo desarrollo que antes, llegamos a que dicho operador normal no es escalar, luego posee subespacio hiperinvariante.

De nuevo, como T es cuasisemejante a un operador que posee subespacio hiperinvariante, por el lema 5.3.14 tenemos que T posee subespacio hiperinvariante, pero esto es una contradicción, porque estábamos suponiendo que no lo tenía. Por tanto, por reducción al absurdo, llegamos a que T debe poseer subespacio hiperinvariante, y ya hemos terminado la demostración.

$\square$

Nota 5.3.18. La hipótesis de T no escalar se debe a que claramente si T es escalar posee subespacio invariante, usando el apartado (3) del ejemplo 4.1.2 y el apartado (a) del teorema 4.3.6.

5.4. Conclusiones

En la sección anterior acabamos de ver que existe subespacio invariante para operadores esencialmente normales que cumplen una cierta condición, en este caso, que tanto su conmutante como el conmutante de su adjunto tengan una sucesión que converge débilmente a cero pero no fuertemente. La pregunta lógica que nos hacemos es, ¿existen operadores esencialmente normales que no verifiquen esta condición? Si no existieran, habríamos probado la existencia de subespacio invariante para todos los operadores esencialmente normales, lo cual sería una revolución. Sin embargo, se puede probar que sí existen operadores que no verifican esta condición, aunque por comodidad, lo haremos mediante una equivalencia con el teorema 5.3.17. Para ello, nos ayudaremos de algunos resultados previos.

Definición 5.4.1. Una subálgebra $\mathcal{A} \subset B(H)$ del álgebra de operadores se llamará SC-álgebra si su bola unidad es relativamente compacta (es decir, si la clausura de la bola unidad es compacta) en topología fuerte de operadores.

Nota 5.4.2. Por notación, escribiremos β para referirnos a la topología fuerte de operadores y denotaremos σ a la topología débil de operadores.

Lema 5.4.3. *Sea $\mathcal{A} \subset B(H)$ una subálgebra del álgebra de operadores. Entonces $\mathcal{A}$ es una SC-álgebra si y sólo si $\beta = \sigma$ en la clausura de la bola unidad de $\mathcal{A}$.*

Demostración. $\boxed{\Longrightarrow}$ Denotemos B a la clausura de la bola unidad de $\mathcal{A}$. Por hipótesis, B es compacta en β. Consideramos la función identidad

$$id : (B, \beta) \longrightarrow (B, \sigma)$$

Claramente id es sobreyectiva, por ser la identidad. Además, id es continua, ya que por la proposición 2.2.5, cada abierto en la topología débil de operadores es abierto en la topología fuerte de operadores, luego id^{-1} lleva abiertos de σ en abiertos de β, y id es continua. Ahora, tenemos por hipótesis que (B, β) es compacto, y por la proposición 6.0.19, sabemos que (B, σ) es Hausdorff. Por tanto, usando la proposición 6.0.20, nos queda que $id : (B, \beta) \longrightarrow (B, \sigma)$ es un homeomorfismo, o lo que es lo mismo, que $\beta = \sigma$ en B, como buscábamos.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Por hipótesis, $\beta = \sigma$ en B. Usando la proposición 6.0.21, tenemos que B es compacto en σ, y por lo anterior, nos queda que B es compacto en β, luego $\mathcal{A}$ es una SC-álgebra, como queríamos demostrar.

$\square$

Con todo esto, podemos dar un resultado equivalente al teorema 5.3.17, el cual pasamos a enunciar.

Teorema 5.4.4. *Sea H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$ un operador esencialmente normal no escalar. Si ni $\{T\}'$ ni $\{T^*\}'$ son SC-álgebras, entonces T posee subespacio invariante.*

Demostración. Denotemos B a la clausura de la bola unidad del conmutante de T. Como $\{T\}'$ no es una SC-álgebra, por el lema anterior tenemos que $\sigma \neq \beta$ en B. Por ser H un espacio de Hilbert separable, ambas topologías son metrizables en B, y usando esto junto con la proposición 2.2.5, deducimos que lo anterior ($\sigma \neq \beta$ en B) implica que existe una sucesión en B que converge débilmente, pero no lo hace fuertemente. Denotemos dicha sucesión como (T_n) y supongamos que converge débilmente a T. Entonces hemos encontrado una sucesión en $\{T\}'$, la cual sería $(T_n - T)$, que converge débilmente a cero, pero no lo hace fuertemente.

Como $\{T^*\}'$ tampoco es una SC-álgebra, siguiendo un desarrollo análogo, podemos encontrar una sucesión en $\{T^*\}'$ que converge débilmente a cero, pero no fuertemente. Por tanto, usando el teorema 5.3.17, tenemos que eso implica que T posee subespacio invariante, y ya hemos probado lo que queríamos.

□

Usando esta equivalencia del teorema 5.3.17, podemos ver de forma más sencilla que existen operadores esencialmente normales que no verifican la condiciones del teorema anterior, y por tanto, que no podemos saber si tienen o no subespacio invariante. Un ejemplo de esto serían los operadores compactos de rango denso, ya que éstos son operadores esencialmente normales y en el ejemplo 2.3.5 vimos que la clausura de la bola unidad del conmutante de dichos operadores es fuertemente compacta.

Por tanto, para responder al problema del subespacio invariante en operadores esencialmente normales, hemos probado la condición que a priori parece más difícil, que sería la de considerar que ni el conmutante de nuestro operador ni el conmutante de su adjunto son SC-álgebras. Faltaría por probar entonces la condición que en principio se intuye más fácil, que sería cuando el conmutante de nuestro operador es una SC-álgebra. Es decir, todavía tenemos la siguiente pregunta:

Problema abierto: ¿Dados H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$ un operador esencialmente normal cuyo conmutante es una SC-álgebra, entonces T tiene subespacio invariante?

Sin embargo, aún no se ha dado solución a este problema, y por lo tanto, no se conoce la existencia de subespacios invariantes para todos los operadores esencialmente normales.

Capítulo 6

Apéndice

En este capítulo incluiremos algunos de los resultados menos conocidos que utilizamos en el trabajo y que, sin embargo, presentaremos sin demostración ya que ya fueron probados durante el Grado o el Máster en Matemáticas.

Definición 6.0.1. Se dice que una sucesión de vectores (u_n) en un espacio prehilbertiano es un sistema ortogonal si se verifica $(u_n|u_m) = 0$ para todo $n \neq m$. Si además $\|u_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces se dice que (u_n) es un sistema ortonormal.

Definición 6.0.2. Se dice que un sistema ortonormal (u_n) en un espacio de Hilbert H es completo cuando además, la variedad lineal generada por $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en H. También se dice que (u_n) es una base ortonormal de H. Si (u_n) es un sistema ortonormal completo de un espacio prehilbertiano H, entonces se define la sucesión (c_n) de coeficientes de Fourier de un vector $x \in H$ como $c_n = (x|u_n)$.

Proposición 6.0.3. *Sea $\{u_1, \ldots, u_n\}$ un sistema ortonormal completo finito en un espacio prehilbertiano H, y sea $x \in \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$, digamos $x = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k$. Entonces $c_k = (x|u_k)$ para todo $1 \leq k \leq n$, y además*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(x|u_k)|^2$$

Teorema 6.0.4. *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Si x, y son vectores en un espacio prehilbertiano, entonces $|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.*

Lema 6.0.5. *Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X$ un subconjunto. Son equivalentes*

1. *K es compacto*

2. *K es completo y totalmente acotado, es decir, $\forall\varepsilon > 0$ existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon)$*

Proposición 6.0.6. *$\Omega \subseteq l^2$ es relativamente compacto si y sólo si Ω es acotado y además*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\Omega} \sum_{j=n}^{+\infty} |(x, e_j)|^2 = 0$$

Definición 6.0.7. Sean X e Y dos espacios métricos y $\mathcal{F}$ una familia de funciones de X en Y. Denotaremos con d_X y d_Y las métricas respectivas de estos espacios. La familia $\mathcal{F}$ es equicontinua en un punto $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ para todo $f \in \mathcal{F}$ y todo x tal que $d_X(x_0, x) < \delta$. La familia es equicontinua si lo es en cada punto de X.

Teorema 6.0.8. *(Ascoli-Arzelá) Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X, \|\cdot\|_\infty)$ una familia de funciones continuas con la norma infinito. Son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ es relativamente compacta.*
2. *$\mathcal{F}$ es equicontinua y uniformemente acotada.*

Teorema 6.0.9. *Sea X un espacio de Banach. Entonces la bola unidad cerrada de X es compacta si y sólo si X es de dimensión finita.*

Teorema 6.0.10. *El producto de cualquier colección de espacios topológicos compactos también es compacto.*

Teorema 6.0.11. *Sea H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$ un operador. Entonces*

$$\overline{ran(T^*)} = \ker(T)^\perp$$

Definición 6.0.12. Sea V un espacio vectorial y $E \subset V$ un subespacio. Una proyección de V sobre E es un operador lineal $P : V \longrightarrow E$ tal que $P^2 = P$.

Cuando V es un espacio de Hilbert, podemos usar el concepto de ortogonalidad. Una proyección P de un espacio de Hilbert H sobre un subespacio E se llama proyección ortogonal si satisface $(Px, y) = (x, Py)$ para todo $x, y \in H$.

Proposición 6.0.13. *Sea H un espacio de Hilbert, $E \subset H$ un subespacio, P la proyección ortogonal de H sobre E y Q la proyección ortogonal de H sobre $E^\perp$. Entonces, para todo $x \in H$, se tiene que*

$$x = Px + Qx$$

De aquí puede deducirse también que $Q = I - P$.

Teorema 6.0.14. *Sea H un espacio de Hilbert, $T \in B(H)$ y $p \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio. Entonces*
$$\sigma(p(T)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$$

Lema 6.0.15. *Sea H un espacio de Hilbert con $T, S \in B(H)$ operadores normales. Si $TS = ST$, entonces $Sf(T) = f(T)S$, para toda f continua en un entorno del espectro de T.*

Proposición 6.0.16. *Sea H un espacio de Hilbert, $T \in B(H)$ un operador y $A \subset H$ cualquiera. Entonces*
$$T(\overline{A}) \subseteq \overline{T(A)}$$

Definición 6.0.17. Un álgebra compleja (real) es un espacio vectorial A sobre $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) en el que hay definido un producto que verifica, para todos $x, y, z \in A$, y todo $\alpha \in \mathbb{K}$, las propiedades:

1. $(xy)z = x(yz)$
2. $x(y + z) = xy + xz$, $(y + z)x = yx + zx$
3. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

Definición 6.0.18. Sea A un álgebra sobre $\mathbb{K}$. Se dice que A es conmutativa si lo es su producto, es decir, si $xy = yx$ para todos $x, y \in A$. Se dice que A tiene elemento neutro o unidad si lo tiene su producto, es decir, si existe $e \in A$ tal que $ex = xe = x$ para todo $x \in A$.

Proposición 6.0.19. *Sea H un espacio de Hilbert y $\mathcal{A} \subset B(H)$ una subálgebra del álgebra de operadores. Entonces la clausura de la bola unidad de $\mathcal{A}$ es un espacio Hausdorff en la topología débil de operadores.*

Proposición 6.0.20. *Sean (X, τ) un espacio topológico compacto, (Y, τ') un espacio topológico Hausdorff y $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ una aplicación. Entonces, si f es continua y sobreyectiva, se tiene que f es un homeomorfismo.*

Proposición 6.0.21. *Sea H un espacio de Hilbert y $\mathcal{A} \subset B(H)$ una subálgebra del álgebra de operadores. Entonces la clausura de la bola unidad de $\mathcal{A}$ es un espacio compacto en la topología débil de operadores.*

Bibliografía

[1] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris. Théorie et applications. [Theory and applications].

[2] Paul Richard Halmos. *A Hilbert space problem book*, volume 17 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 2 edition.

[3] Miguel Lacruz, Victor Lomonosov, and Luis Rodríguez-Piazza. Strongly compact algebras. *RACSAM. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat.*, 100(1-2):191–207.

[4] V. I. Lomonosov. A construction of an intertwining operator. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 14(1):67–68.

[5] A. J. Michaels. Hilden's simple proof of lomonosov's invariant subspace theorem. *Adv. Math.*, 25(1):56–58.

[6] Heydar Radjavi and Peter Rosenthal. *Invariant subspaces*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 77. Springer-Verlag, New York-Heidelberg.

[7] Walter Rudin. *Functional analysis*. International series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 2 edition.