Contraejemplos en Análisis: Lineabilidad

Juan Condado Peñaranda

TFM del Máster Universitario en Matemáticas

Directores:

María del Carmen Calderón Moreno

José Antonio Prado Bassas

2020-2021

Summary

In 1966, Russian mathematician Vladimir Gurariy proved that the set of continuous functions on the interval $[0,1]$ that are nowhere differentiable contains, except for the zero function, an infinite-dimensional vector space (that is, it is *lineable*, a term coined by Gurariy himself). This is a surprising result to say the least, since it evinces that, however difficult it is to find any such function, not only there are many of them, but they also constitute large algebraic structures.

The study of lineability and algebrability (the analogous property for algebras instead of vector spaces) has gained in popularity over the 21st century; the book [1] is a sizeable compilation of results in the field. Based on two recent articles [2, 4], this work addresses the lineability and algebrability of *anti-L'Hôpital* and *anti-Weierstrass M* spaces, which are respectively formed by functions and sequences of functions which verify the conclusions of L'Hôpital's Rule and Weierstrass M Criterion despite failing to meet their hypotheses.

In Chapter 1 we include some notions and results that are required in the following chapters, so as to make the text as self-contained as possible. Specifically, we briefly review real analytic functions, we lay out the basic theory of cardinal numbers in plenty of detail, we give the general proof of the Dimension Theorem, we prove that the dimension of $\mathbb{R}$ over $\mathbb{Q}$ is $\mathfrak{c}$, we recall the concepts of algebra and free algebra, we list several well-known results in Topology and Functional Analysis, and we introduce the spaces of functions and sequences of functions that are used throughout the work.

Chapter 2 contains the definitions of lineability and algebrability, as well as a criterion that provides a sufficient condition for an α-lineable set to be densely α-lineable, which is used in the two remaining chapters.

Chapter 3 begins with a review of L'Hôpital's Rule and an example of a function to which it cannot be applied. Inspired by this function, we define the anti-L'Hopital space on a given subset of $\mathbb{R}$ and characterise when it is non-empty. Finally, we obtain the dense $\mathfrak{c}$-lineability and the strong $\mathfrak{c}$-algebrability of these spaces.

Chapter 4 has the same structure as the previous one. First we recall the concept of uniform convergence, the Cauchy Criterion (which gives an equivalent condition to uniform convergence) and the Weierstrass M Criterion (which gives a sufficient condition). Then we construct an example of a sequence of functions which is uniformly convergent but does not meet the hypotheses of the Weierstrass M Criterion. Next we define anti-Weierstrass M spaces, we obtain a big family of examples and we use it to show the $\mathfrak{c}$-lineability. Lastly, we prove a couple of technical lemmas and the strong $\mathfrak{c}$-algebrability.

Resumen

En 1966, el matemático ruso Vladimir Gurariy demostró que el conjunto de las funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ que no son derivables en ninguna parte contiene, salvo por la función nula, un espacio vectorial de dimensión infinita (es decir, es *lineable*, término acuñado por el propio Gurariy). Se trata cuando menos de un resultado sorprendente, pues pone de manifiesto que, a pesar de la dificultad de encontrar tales funciones, no sólo hay muchas, sino que además constituyen estructuras algebraicas grandes.

El estudio de la lineabilidad y la algebrabilidad (la propiedad análoga con álgebras en vez de con espacios vectoriales) ha cobrado cierto auge en el siglo XXI; un compendio amplio de resultados en el campo es el libro [1]. Este trabajo aborda, siguiendo dos artículos recientes [2, 4], la lineabilidad y la algebrabilidad de los espacios *anti-L'Hôpital* y *anti-M de Weierstrass*, que están formados respectivamente por funciones y por sucesiones de funciones que verifican las conclusiones de la Regla de L'Hôpital y del Criterio M de Weierstrass pese a no cumplir sus hipótesis.

En el Capítulo 1 incluimos nociones y resultados que se requieren en los siguientes capítulos, con el ánimo de que el texto sea lo más autocontenido posible. En concreto, repasamos brevemente las funciones analíticas reales, desarrollamos con bastante detalle la teoría básica de números cardinales, damos la demostración general del Teorema de la Dimensión, probamos que la dimensión de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ es $\mathfrak{c}$, recordamos los conceptos de álgebra y álgebra libre, recogemos varios teoremas conocidos de Topología y de Análisis Funcional, e introducimos los espacios de funciones y de sucesiones de

funciones que se emplean a lo largo del trabajo.

El Capítulo 2 contiene las definiciones de lineabilidad y algebrabilidad, así como un criterio que proporciona una condición suficiente para que un conjunto α-lineable sea densamente α-lineable, el cual se usa en los dos capítulos restantes.

En el Capítulo 3 comenzamos revisando la Regla de L'Hôpital y dando un ejemplo de función a la que no se le puede aplicar. Inspirándonos en esta función, definimos el espacio anti-L'Hôpital en un subconjunto dado de $\mathbb{R}$ y caracterizamos cuándo es no vacío. Para terminar, obtenemos la $\mathfrak{c}$-lineabilidad densa y la $\mathfrak{c}$-algebrabilidad fuerte de dichos espacios.

El Capítulo 4 tiene la misma estructura que el anterior. Primero repasamos el concepto de convergencia uniforme, el Criterio de Cauchy (que da una condición equivalente a ella) y el Criterio M de Weierstrass (que da una condición suficiente). Después construimos un ejemplo de sucesión de funciones que converge uniformemente aunque no cumple las hipótesis del Criterio M de Weierstrass. A continuación definimos los espacios anti-M de Weierstrass, obtenemos una gran familia de ejemplos y la utilizamos para mostrar la $\mathfrak{c}$-lineabilidad. Finalmente, probamos un par de lemas técnicos y acabamos con la $\mathfrak{c}$-algebrabilidad fuerte.

Índice general

Summary **iii**

Resumen **v**

1. Preliminares **1**

1.1. Notación 1

1.2. Funciones analíticas reales 2

1.3. Números cardinales 5

1.4. Espacios vectoriales 18

1.5. Álgebras 23

1.6. Topología y Análisis Funcional 24

1.7. Algunos espacios de funciones y de sucesiones de funciones 26

2. Introducción a la lineabilidad **31**

3. Funciones anti-L'Hôpital **35**

3.1. Regla de L'Hôpital 35

3.2. Caracterización de la existencia de funciones anti-L'Hôpital 38

3.3. Algebrabilidad y espaciabilidad de las funciones anti-L'Hôpital 44

4. Sucesiones de funciones anti-M de Weierstrass **53**

4.1. Criterio M de Weierstrass 53

4.2. Lineabilidad de las sucesiones de funciones anti-M 57

4.3. Algebrabilidad de las sucesiones de funciones anti-M 64

Bibliografía **73**

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Notación

A lo largo de este trabajo, $\mathbb{N}$ representará el conjunto de los números naturales, sin el 0, y $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como es habitual, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ serán respectivamente los conjuntos de los números enteros, racionales, reales y complejos; emplearemos $\mathbb{K}$ para denotar indistintamente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Dados $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$, el disco de centro z y radio r en el plano complejo lo indicaremos con $D(z, r)$. Representaremos el conjunto de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ e indeterminadas $X_1, \ldots, X_p$ por $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_p]$. Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo K y $C \subseteq V$, el subespacio vectorial generado por C será $K\langle C\rangle$.

Fijado un espacio topológico X, denotaremos por $\mathcal{C}(X)$ el conjunto de las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$. Además, si U es un abierto de $\mathbb{R}$, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}^i(U)$ representará el conjunto de las funciones $f\colon U \to \mathbb{R}$ derivables al menos i veces en U ($\mathcal{D}^1(U) = \mathcal{D}(U)$) y $\mathcal{C}^i(U)$ el subconjunto de $\mathcal{D}^i(U)$ formado por las funciones cuya derivada i-ésima sea continua en U. Indicaremos con $\mathcal{C}^\infty(U)$ el conjunto de las funciones indefinidamente derivables en U. Dado $1 \leq r < +\infty$, ℓ_r será el conjunto de las sucesiones $(a_n)_{n=1}^\infty$ de números reales tales que $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^r < +\infty$, y c_0 será el de las sucesiones convergentes a 0.

Por último, si C es un conjunto arbitrario, $\mathcal{P}(C)$ será el conjunto formado por todas las partes o subconjuntos de C. Mediante $\sqcup$ indicaremos la unión disjunta. Si C y D son conjuntos, C^D denotará el conjunto de las funciones $f\colon D \to C$. Ocasionalmente, una función $f \in C^D$ la escribiremos en forma de «tupla»: $f = (f(d))_{d\in D}$.

1.2. Funciones analíticas reales

En esta sección definimos las funciones analíticas reales y damos sus propiedades básicas, que usaremos en el Capítulo 3.

Definición 1.1. Sea U un abierto de $\mathbb{R}$. Una función $f\colon U \to \mathbb{R}$ se dice ***analítica*** en un punto $x_0 \in U$ si hay alguna serie de potencias con coeficientes reales $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ que coincide con f en un intervalo $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq U$ con $r > 0$, es decir, tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \qquad \text{para todo } x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

Cuando f es analítica en todos los puntos de U, se dice simplemente que es ***analítica*** en U. El conjunto formado por tales f se representa por $\mathcal{C}^\omega(U)$, y es claro que

$$\mathcal{C}(U) \supseteq \mathcal{D}(U) \supseteq \mathcal{C}^1(U) \supseteq \mathcal{D}^2(U) \supseteq \mathcal{C}^2(U) \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{C}^\infty(U) \supseteq \mathcal{C}^\omega(U),$$

siendo todos los contenidos estrictos, en contraste con lo que ocurre en $\mathbb{C}$, donde todos son igualdades excepto el primero.

Proposición 1.2 (operaciones con funciones analíticas)**.** *Sea U un abierto de $\mathbb{R}$. Dadas dos funciones $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ analíticas en un punto $x_0 \in U$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene:*

(a) $f + g$ es analítica en x_0;

(b) λf es analítica en x_0;

(c) fg es analítica en x_0.

Demostración. Los dos primeros apartados son consecuencia de la linealidad de las series de potencias. Para el tercero, al ser f y g analíticas en x_0, se podrán encontrar sendas series de potencias tales que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \qquad g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x - x_0)^m$$

para cada $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$. Como toda serie de potencias converge absolutamente en su intervalo de convergencia (abierto), para cada $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ el Teorema de Mertens asegura que el producto de Cauchy de ambas series converge a $f(x)g(x) = (fg)(x)$, y este producto resulta ser

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{n,m \geq 0 \\ n+m=k}} a_n(x - x_0)^n b_m(x - x_0)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{n,m \geq 0 \\ n+m=k}} a_n b_m \right) (x - x_0)^k,$$

una nueva serie de potencias centrada en x_0. Por tanto, fg es analítica en x_0. $\square$

Proposición 1.3 (condición suficiente para la analiticidad real)**.** *Para que una función $f\colon U \to \mathbb{R}$ definida en un abierto U de $\mathbb{R}$ sea analítica en un punto $x_0 \in U$, basta que exista una función F holomorfa en un disco $D(x_0, r)$ con $r > 0$ de manera que $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq U$ y $F(x) = f(x)$ en todo $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.*

Demostración. Utilizando resultados conocidos de Variable Compleja,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!}(z - x_0)^n \qquad \text{para todo } z \in D(x_0, r). \tag{1.1}$$

Además, para cada $x \in (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq D(x_0, r)$,

$$F'(x) = \lim_{z \to x} \frac{F(z) - F(x)}{z - x},$$

y dado que este límite tiene que ser $F'(x)$ comoquiera que z se aproxime a x,

$$F'(x) = \lim_{\substack{t \to x \\ t \in (x_0 - r, x_0 + r)}} \frac{F(t) - F(x)}{t - x} = \lim_{\substack{t \to x \\ t \in (x_0 - r, x_0 + r)}} \underbrace{\frac{f(t) - f(x)}{t - x}}_{\in \mathbb{R}},$$

luego $F'(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$. Reiterando se obtiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(x) \in \mathbb{R}$ en todo $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$. En particular, $F^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ (notar que $F^{(0)}(x_0) = F(x_0) = f(x_0) \in \mathbb{R}$), y así (1.1) conlleva que f se puede expresar en $(x_0 - r, x_0 + r)$ como serie de potencias con coeficientes reales centrada en x_0. Concluimos que f es analítica en x_0. $\square$

Corolario 1.4 (composición de funciones analíticas)**.** *Sean $f\colon U \to \mathbb{R}$ y $g\colon V \to \mathbb{R}$ funciones definidas en abiertos $U, V \subseteq \mathbb{R}$ tales que $f(U) \subseteq V$. Si f es analítica en un punto $x_0 \in U$ y g es analítica en $f(x_0)$, entonces $g \circ f\colon U \to \mathbb{R}$ es analítica en x_0.*

Demostración. Como f es analítica en x_0 y g es analítica en $y_0 \coloneqq f(x_0)$, existen $r, s > 0$ y sendas series de potencias con coeficientes reales tales que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad g(y) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (y - y_0)^m$$

para todos $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, $y \in (y_0 - s, y_0 + s)$. De acuerdo con la Fórmula de Cauchy-Hadamard, las series de potencias con variable compleja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_0)^n$ y $\sum_{m=0}^{\infty} b_m (w - y_0)^m$ tienen el mismo radio de convergencia que las correspondientes series con variable real, luego poniendo

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_0)^n, \qquad G(w) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (w - y_0)^m$$

quedan definidas dos funciones holomorfas $F\colon D(x_0, r) \to \mathbb{C}$ y $G\colon D(y_0, s) \to \mathbb{C}$ que coinciden con f y g en los intervalos $(x_0 - r, x_0 + r)$ y $(y_0 - s, y_0 + s)$ respectivamente. Por último, ya que $F(x_0) = f(x_0) = y_0$ y F es continua en x_0, habrá algún $0 < r' < r$ tal que $F(D(x_0, r')) \subseteq D(y_0, s)$, con lo que la composición $G \circ F$ estará bien definida y será holomorfa en $D(x_0, r')$ y coincidirá con $g \circ f$ en $(x_0 - r', x_0 + r')$. Por la proposición anterior, esto basta para garantizar la analiticidad de $g \circ f$ en x_0. $\square$

También como consecuencia de la proposición anterior, obtenemos una condición suficiente útil para que una función sea analítica:

Corolario 1.5. *La restricción de cualquier función holomorfa sobre un abierto de $\mathbb{C}$ a un abierto de $\mathbb{R}$ contenido en éste es analítica.*

Corolario 1.6. *Sea U un abierto de $\mathbb{R}$ y $f\colon U \to \mathbb{R}$. Entonces el conjunto $\{x \in U : f \text{ es analítica en } x\} \subseteq U$ es abierto en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Fijado x_0 en el conjunto, se argumenta como al principio del Corolario 1.4 que existe una serie de potencias con coeficientes reales que converge en un disco $D(x_0, r)$ con $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq U$ y que representa a f en $(x_0 - r, x_0 + r)$. El corolario anterior garantiza que f es analítica en $(x_0 - r, x_0 + r)$, es decir, que $(x_0 - r, x_0 + r)$ está contenido en el conjunto. Esto significa que x_0 es interior al conjunto, luego éste es abierto. $\square$

1.3. Números cardinales

Desarrollamos aquí la teoría básica de números cardinales, que nos será de utilidad en los capítulos posteriores. Seguimos esencialmente la exposición que puede verse en [1, págs. 1-10].

Definición 1.7. Dados dos conjuntos no vacíos A y B, se denota:

(a) $|A| \leq |B|$ si hay alguna aplicación inyectiva de A en B;

(b) $|A| \geq |B|$ si hay alguna aplicación sobreyectiva de A en B;

(c) $|A| = |B|$ si hay alguna aplicación biyectiva de A en B;

(d) $|A| \neq |B|$ si no hay ninguna aplicación biyectiva de A en B;

(e) $|A| < |B|$ si $|A| \leq |B|$ pero $|A| \neq |B|$;

(f) $|A| > |B|$ si $|A| \geq |B|$ pero $|A| \neq |B|$.

El símbolo $|A|$ se lee «cardinal de A».

Nota. Representemos por $\#(C)$ el número de elementos de cada conjunto finito C. Si A y B son conjuntos finitos, es claro que $\#(A) \leq \#(B)$ si y sólo si $|A| \leq |B|$, $\#(A) \geq \#(B)$ si y sólo $|A| \geq |B|$, etc. Así, el cardinal viene a ser una extensión del número de elementos a conjuntos cualesquiera. En particular, en el caso de conjuntos finitos C, el cardinal puede identificarse con el número de elementos y resulta natural escribir $|C| = \#(C)$ (también $|\varnothing| = 0$). Además, es usual denotar $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ ($\aleph$ es la letra hebrea *álef*) y $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Enseguida veremos que $\aleph_0$ es el menor cardinal infinito y que $\mathfrak{c} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > \aleph_0$. Los conjuntos finitos o de cardinal $\aleph_0$ se denominan ***numerables***. Por otro lado, observar que de $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$ se deduce que $|A| \leq |C|$. Los resultados que damos a continuación muestran que $\leq$ posee todas las propiedades que cabe esperar.

Proposición 1.8. $|A| \leq |B|$ *equivale a* $|B| \geq |A|$.

Demostración. Si $|A| \leq |B|$, por definición existe una aplicación inyectiva $f\colon A \to B$. Entonces cualquier aplicación $g\colon B \to A$ que haga corresponder a cada $b \in f(A)$ su única antimagen por f es sobreyectiva, pues todo $a \in A$ es imagen por g de $f(a)$, luego $|B| \geq |A|$. Para el recíproco, si $|B| \geq |A|$, hay alguna aplicación $f\colon B \to A$ sobreyectiva y cualquier aplicación $g\colon A \to B$ que asocie a cada $a \in A$ una antimagen suya por f es inyectiva, ya que de $g(a) = g(a')$ con $a, a' \in A$ se sigue que $a = f(g(a)) = f(g(a')) = a'$, por lo que $|A| \leq |B|$. $\square$

Lema 1.9. *Si se puede encontrar una inyección de un conjunto E en un subconjunto suyo $F \subseteq E$ (con lo que $|E| \leq |F|$), entonces $|E| = |F|$.*

Demostración. Podemos suponer que $F \neq E$, pues de lo contrario la conclusión se verifica trivialmente. Por hipótesis, existe alguna aplicación inyectiva $u\colon E \to F$. Para cada $x \in E \setminus F$ $(\neq \varnothing)$, llamemos

$$S_x = \{x, u(x), u^2(x), \dots\} = \{u^n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$$

(los exponentes indican cuántas veces se compone u consigo misma). Es fácil ver, teniendo en cuenta la inyectividad de u, que exponentes $n \in \mathbb{N}_0$ distintos dan lugar a elementos $u^n(x)$ distintos y que $S_x \cap S_y = \varnothing$ para todos $x, y \in E \setminus F$ con $x \neq y$. Notar que

$$S := \bigsqcup_{x \in E \setminus F} S_x = (E \setminus F) \sqcup \underbrace{\bigsqcup_{x \in E \setminus F} \{u^n(x) : n \in \mathbb{N}\}}_{=: G \subseteq F},$$

de modo que $E = S \sqcup (F \setminus S)$. Probemos que la aplicación $v \colon E \to F$ definida mediante

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in S, \\ x & \text{si } x \in F \setminus S \end{cases}$$

es biyectiva:

- *v es inyectiva.* Supongamos que $v(x) = v(y)$ para ciertos $x, y \in E$. Como $v(S) \subseteq S$, $v(F \setminus S) \subseteq F \setminus S$ y $S \cap (F \setminus S) = \varnothing$, o bien $x, y \in S$, o bien $x, y \in F \setminus S$. En el primer caso, $u(x) = u(y)$ y, por ser u inyectiva, $x = y$; y en el segundo, directamente $x = y$.
- *v es sobreyectiva.* Sea $x \in F$. Si $x \notin S$, entonces $x = v(x)$; y si $x \in S = (E \setminus F) \sqcup G$, como $x \in F$, necesariamente $x \in G$, luego existen $y \in E \setminus F$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $x = u^n(y) = u(u^{n-1}(y))$, con $u^{n-1}(y) \in S$, y así $x = v(u^{n-1}(y))$. □

Teorema 1.10 (Cantor-Bernstein-Schröder)**.** *$|A| = |B|$ si y sólo si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$.*

Demostración. La implicación directa es evidente. Para la recíproca, si $f \colon A \to B$ y $g \colon B \to A$ son inyectivas, $g \circ f$ lleva inyectivamente A en $g(B) \subseteq A$. Por el lema precedente, $|A| = |g(B)|$. Pero, como g es inyectiva, al restringir su codominio a $g(B)$ se obtiene una biyección entre B y $g(B)$, así que $|B| = |g(B)| = |A|$. □

Teorema 1.11 (comparación de cardinales)**.** *Si α y β son números cardinales, entonces $\alpha \leq \beta$ o $\beta \leq \alpha$.*

Demostración. Sean A y B conjuntos tales que $|A| = \alpha$ y $|B| = \beta$. Debemos probar que hay una inyección de A en B o de B en A. Para ello, en el conjunto

$$\mathcal{S} = \{(C, D, f) : C \subseteq A, D \subseteq B, f \colon C \to D \text{ es biyectiva}\}$$

($\mathcal{S} \neq \varnothing$, sin más que tomar C y D unipuntuales) consideramos el orden parcial definido por

$$(C_1, D_1, f_1) \leq (C_2, D_2, f_2) \Longleftrightarrow C_1 \subseteq C_2,\ D_1 \subseteq D_2,\ f_1(x) = f_2(x) \text{ en todo } x \in C_1.$$

Sea $\mathcal{T} = \{(C_i, D_i, f_i)\}_{i\in I}$ una ***cadena*** de $\mathcal{S}$, esto es, un subconjunto donde $\leq$ es un orden total. Llamando $C = \cup_{i\in I} C_i \subseteq A$ y $D = \cup_{i\in I} D_i \subseteq B$, la aplicación $f\colon C \to D$ dada por

$$f(x) = f_i(x) \text{ para cualquier } i \in I \text{ con } x \in C_i$$

está bien definida y es biyectiva:

- *f está bien definida.* Si $x \in C_i \cap C_j$, al ser $\mathcal{T}$ cadena, $(C_i, D_i, f_i) \leq (C_j, D_j, f_j)$ o al revés; supongamos por ejemplo que $(C_i, D_i, f_i) \leq (C_j, D_j, f_j)$. Entonces $C_i \subseteq C_j$, $D_i \subseteq D_j$ y f_i coincide con f_j en C_i, por lo que $f_i(x) = f_j(x)$.
- *f es inyectiva.* Supongamos que $f(x) = f(y)$ para ciertos $x, y \in C$. Escogiendo $i, j \in I$ con $x \in C_i$ e $y \in C_j$, $f_i(x) = f(x) = f(y) = f_j(y)$. Igual que en el punto anterior, si por ejemplo $(C_i, D_i, f_i) \leq (C_j, D_j, f_j)$, resulta que $C_i \subseteq C_j$ y $f_i(x) = f_j(x) = f_j(y)$, lo que implica $x = y$ por ser f_j inyectiva.
- *f es sobreyectiva.* Dado $z \in D$, hay algún $i \in I$ tal que $z \in D_i$. Como f_i es biyectiva, existirá $x \in C_i$ tal que $f_i(x) = z$, y entonces $f(x) = z$.

Se sigue que $(C, D, f) \in \mathcal{S}$. Además, por construcción $(C_i, D_i, f_i) \leq (C, D, f)$ para todo $i \in I$, luego $\mathcal{T}$ está acotada superiormente y, en virtud del Lema de Zorn, $\mathcal{S}$ tiene algún elemento maximal (C_m, D_m, f_m). Veamos que $C_m = A$ o $D_m = B$: si fuese $C_m \neq A$ y $D_m \neq B$, podríamos tomar $a \in A \setminus C_m$ y $b \in B \setminus D_m$, con lo que la aplicación $g\colon C_m \sqcup \{a\} \to D_m \sqcup \{b\}$ dada por $g(x) = f_m(x)$ para cada $x \in C_m$ y $g(a) = b$ sería biyectiva y se tendría $(C_m, D_m, f_m) < (C_m \sqcup \{a\}, D_m \sqcup \{b\}, g) \in \mathcal{S}$, en contradicción con la maximalidad. Así pues, o bien $C_m = A$, en cuyo caso cambiando el codominio de $f_m\colon A \to B_m \subseteq B$ por B se obtiene una inyección de A en B; o bien $D_m = B$, y entonces cambiando el codominio de $f_m^{-1}\colon B \to C_m \subseteq A$ por A se obtiene una inyección de B en A. $\square$

Observar que el resultado anterior hace que tengan sentido las expresiones $\max\{\alpha, \beta\}$ y $\min\{\alpha, \beta\}$, donde α y β son números cardinales.

Proposición 1.12. *Para todo conjunto A, se cumple $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

Demostración. La aplicación $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$ dada por $f(a) = \{a\}$ es inyectiva, por lo que $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Además, ninguna $g\colon A \to \mathcal{P}(A)$ es sobreyectiva, pues forzosamente $B := \{a \in A : a \notin g(a)\} \notin g(A)$: si fuese $B \in g(A)$, existiría $a_0 \in A$ tal que $B = g(a_0)$, y entonces se tendría $a_0 \in B$ si y sólo si $a_0 \notin g(a_0) = B$, lo cual es absurdo. Por tanto, $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. □

Proposición 1.13. *Si A es infinito, necesariamente $|A| \geq \aleph_0$.*

Demostración. Sea $x_1 \in A$. Ya que A es infinito, se puede tomar $x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$, después $x_3 \in A$ con $x_3 \neq x_1, x_2$, y así sucesivamente. En consecuencia, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de A tal que $x_i \neq x_j$ cuando $i \neq j$ y la aplicación $f\colon \mathbb{N} \to A$ dada por $f(n) = x_n$ es inyectiva, lo que implica que $\aleph_0 = |\mathbb{N}| \leq |A|$, o equivalentemente, $|A| \geq \aleph_0$. □

Definición 1.14 (aritmética de cardinales)**.** Sean α y β números cardinales. Se escribe:

(a) $\alpha + \beta = |A \sqcup B|$, siendo A y B conjuntos disjuntos tales que $|A| = \alpha$ y $|B| = \beta$;

(b) $\alpha \cdot \beta = |A \times B|$, siendo A y B conjuntos tales que $|A| = \alpha$ y $|B| = \beta$;

(c) $\alpha^{\beta} = |A^I|$, siendo A e I conjuntos tales que $|A| = \alpha$ y $|I| = \beta$.

Naturalmente, hay que comprobar que estas definiciones no dependen de qué conjuntos se escojan para representar cada cardinal. Veamos, por ejemplo, el caso de la potencia. Supongamos que $|A| = |A'| = \alpha$ y que $|I| = |I'|$, de tal manera que existen biyecciones $\varphi\colon A \to A'$ y $\psi\colon I \to I'$. Entonces la aplicación $F\colon A^I \to (A')^{I'}$ que asocia a cada $f \in A^I$ la aplicación $F(f) = \varphi \circ f \circ \psi^{-1} \in (A')^{I'}$ es biyectiva:

- *F es inyectiva.* Si $F(f) = F(g)$ para ciertas $f, g \in A^I$, $\varphi \circ f \circ \psi^{-1} = \varphi \circ g \circ \psi^{-1}$, de donde se sigue que $\varphi^{-1} \circ (\varphi \circ f \circ \psi^{-1}) \circ \psi = \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ g \circ \psi^{-1}) \circ \psi$. Por la asociatividad de la composición, $(\varphi^{-1}\circ\varphi)\circ f\circ(\psi^{-1}\circ\psi) = (\varphi^{-1}\circ\varphi)\circ g\circ(\psi^{-1}\circ\psi)$, es decir, $f = g$.

- *F es sobreyectiva.* Toda $f \in (A')^{I'}$ puede expresarse como $f = \varphi\circ(\varphi^{-1}\circ f\circ\psi)\circ\psi^{-1}$, con $(\varphi^{-1}\circ f\circ\psi) \in A^I$, así que $f = F(\varphi^{-1}\circ f\circ\psi)$.

Así, $|A^I| = |(A')^{I'}|$ y la definición de α^β es consistente.

Proposición 1.15 (propiedades de la aritmética de cardinales)**.** *Para cualesquiera cardinales α, β, γ, se verifica:*

(a) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

(b) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

(c) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;

(d) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$;

(e) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$;

(f) $(\alpha \cdot \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$;

(g) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$;

(h) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma} = (\alpha^\gamma)^\beta$.

Demostración. Se trata de comprobaciones sencillas. Hagamos, para ilustrarlo, (e). Tomando conjuntos A, B y C tales que $|A| = \alpha$, $|B| = \beta$, $|C| = \gamma$ y $B\cap C = \varnothing$, el lado izquierdo de la igualdad es $|A\times(B\sqcup C)|$. Notar que $(A\times B)\cap(A\times C) = A\times(B\cap C) = \varnothing$, por lo que el lado derecho es $|(A \times B) \sqcup (A \times C)|$. Pero $(A \times B) \sqcup (A \times C) = A \times (B \sqcup C)$ (igualdad entre conjuntos), y por tanto sus cardinales coinciden, que es lo que queríamos probar. $\square$

Proposición 1.16 (compatibilidad entre el orden y las operaciones de cardinales)**.** *Si $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ son cardinales con $\alpha_1 \leq \alpha_2$ y $\beta_1 \leq \beta_2$, entonces:*

(a) $\alpha_1 + \beta_1 \leq \alpha_2 + \beta_2$;

(b) $\alpha_1 \cdot \beta_1 \leq \alpha_2 \cdot \beta_2$;

(c) $\alpha_1^{\beta_1} \leq \alpha_2^{\beta_2}$.

Demostración. De nuevo se trata de comprobaciones muy sencillas. $\square$

Teorema 1.17. *Sean α y β números cardinales. Siempre que al menos uno de ellos sea infinito, se tiene:*

(a) $\alpha + \beta = \max\{\alpha, \beta\}$;

(b) $\alpha \cdot \beta = \max\{\alpha, \beta\}$.

Demostración. No hay pérdida de generalidad en suponer que $\alpha \geq \beta$, lo que implica que $\max\{\alpha, \beta\} = \alpha$ y que α es infinito. En toda la demostración A es un conjunto con $|A| = \alpha$.

(a) Dividimos la demostración en tres casos:

- *Caso* $\beta = n \in \mathbb{N}$. Tomando $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ con $b_i \neq b_j$ si $i \neq j$ y $A \cap B = \varnothing$, lo que debemos probar es que $|A \sqcup B| = |A|$. Dado que A es infinito, existirá $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq A$ con $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$. Sea $f\colon A \sqcup B \to A$ la aplicación dada por $f(b_k) = a_k$ para $k = 1, \ldots, n$, $f(a_k) = a_{k+n}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $f(a) = a$ para cada $a \in A \setminus \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Es claro que f es biyectiva, lo que da la igualdad de cardinales buscada.

- *Caso* $\alpha = \beta$. Tenemos que ver que $\alpha + \alpha = \alpha$ sabiendo que α es infinito. Con ese fin, sea

$$\mathcal{S} = \{f\colon C \times \{0, 1\} \to C : C \subseteq A,\ f \text{ es biyectiva}\}.$$

Puesto que A es infinito, existe $N := \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq A$ con $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$ y la aplicación $h\colon N \times \{0, 1\} \to N$ dada por

$$h(a_k, r) = \begin{cases} a_{2k} & \text{si } r = 0 \\ a_{2k-1} & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

es biyectiva, de modo que $h \in \mathcal{S}$ y $\mathcal{S} \neq \varnothing$.

Para cada $f \in \mathcal{S}$, denotamos por C_f el subconjunto de A tal que f tiene por dominio $C_f \times \{0,1\}$ y por codominio C_f. Claramente, la relación $\leq$ definida en $\mathcal{S}$ por

$$f \leq g \Longleftrightarrow \begin{cases} C_f \subseteq C_g \\ f(x,r) = g(x,r) \text{ en todo } (x,r) \in C_f \times \{0,1\} \end{cases}$$

es un orden parcial, y de forma muy parecida a como se hizo en la demostración del Teorema 1.11 se comprueba que toda cadena de $\mathcal{S}$ está acotada por arriba. Por el Lema de Zorn, $\mathcal{S}$ posee algún elemento maximal $f_m\colon C_m \times \{0,1\} \to C_m$ (hemos puesto $C_m \coloneqq C_{f_m}$). Como f_m es biyectiva, porque $f_m \in \mathcal{S}$, $|C_m| = |C_m \times \{0,1\}|$, y por las propiedades aritméticas de los cardinales

$$\begin{aligned} |C_m| &= |C_m \times \{0,1\}| = |C_m| \cdot |\{0,1\}| = |C_m| \cdot 2 = |C_m| \cdot (1+1) \\ &= |C_m| + |C_m|. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Observar que a donde queremos llegar es a la igualdad (1.2) con A en vez de con $C_m \subseteq A$. Ahora, como $A = C_m \sqcup (A \setminus C_m)$,

$$|A| = |C_m| + |A \setminus C_m|, \tag{1.3}$$

y por lo tanto, si $A \setminus C_m$ fuese finito, necesariamente C_m sería infinito y podríamos aplicar el caso anterior para deducir que $|C_m| + |A \setminus C_m| = |C_m|$, lo cual implicaría por (1.3) que $|A| = |C_m|$, igualdad que nos daría el resultado buscado $|A| + |A| = |A|$ por (1.2). Veamos por reducción al absurdo que efectivamente $A \setminus C_m$ es finito:

Si $A \setminus C_m$ fuese infinito, se podría construir una biyección $g\colon M \times \{0,1\} \to M$ para cierto $M \subseteq A \setminus C_m$ infinito numerable por el mismo procedimiento que hemos empleado para construir h al principio. Así, definiendo $f\colon (C_m \sqcup N) \times \{0,1\} = (C_m \times \{0,1\}) \sqcup (N \times \{0,1\}) \to C_m \sqcup N$ mediante

$$f(x,r) = \begin{cases} f_m(x,r) & \text{si } x \in C_m, \\ g(x,r) & \text{si } x \in M, \end{cases}$$

f es biyectiva, luego $f \in \mathcal{S}$, y $f_m < f$, en contradicción con la maximalidad de f_m. Concluimos que $A \setminus C_m$ es finito.

- *Caso general.* Como $\alpha \geq \beta$ y $\alpha \geq \alpha$, sumando estas dos desigualdades se obtiene que $\alpha + \alpha \geq \alpha + \beta$. Además, trivialmente $\alpha + \beta \geq \alpha$, luego $\alpha \leq \alpha + \beta \leq \alpha + \alpha$. Pero, según el caso anterior, $\alpha + \alpha = \alpha$, así que $\alpha \leq \alpha + \beta \leq \alpha$ y el Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder permite concluir que $\alpha + \beta = \alpha$.

(b) Dividimos la demostración en dos casos:

- *Caso* $\alpha = \beta$. Tenemos que ver que $\alpha \cdot \alpha = \alpha$ sabiendo que α es infinito. Sea

$$\mathcal{S} = \{f \colon C \times C \to C : C \subseteq A,\ f \text{ es biyectiva}\}$$

($\mathcal{S} \neq \varnothing$, sin más que tomar C unipuntual). Para cada $f \in \mathcal{S}$, denotamos por C_f el subconjunto de A tal que $C_f \times C_f$ es el dominio y C_f el codominio de f. La relación $\leq$ definida en $\mathcal{S}$ mediante

$$f \leq g \iff \begin{cases} C_f \subseteq C_g \\ f(x,y) = g(x,y) \text{ en todo } (x,y) \in C_f \times C_f \end{cases}$$

es de orden, y como en el apartado anterior o en el Teorema 1.11, se comprueba que toda cadena de $\mathcal{S}$ está acotada superiormente. De acuerdo con el Lema de Zorn, $\mathcal{S}$ tiene algún elemento maximal $f_m \colon C_m \times C_m \to C_m$ (hemos puesto $C_m := C_{f_m}$). Como $f_m \in \mathcal{S}$ es biyectiva, $|C_m| = |C_m \times C_m| = |C_m| \cdot |C_m|$. Notar que ésta es, cambiando $C_m \subseteq A$ por A, la igualdad a la que queremos llegar, por lo que si fuese $|C_m| = |A|$, habríamos terminado. Veamos por reducción al absurdo que efectivamente $|C_m| = |A|$:

Ya que $C_m \subseteq A$, $|C_m| \leq |A|$. Por lo tanto, si fuese $|C_m| \neq |A|$, se tendría $|C_m| < |A|$. Por otra parte, la igualdad $|C_m| \cdot |C_m| = |C_m|$ obliga a que C_m sea infinito, y como $A = C_m \sqcup (A \setminus C_m)$, teniendo en cuenta (a),

$$\begin{aligned} |A| &= |C_m| + |A \setminus C_m| = \text{máx}\{|C_m|, |A \setminus C_m|\} \\ &= |A \setminus C_m|. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $|C_m| < |A \setminus C_m|$, y esto quiere decir que C_m se puede inyectar en $A \setminus C_m$, o equivalentemente, que C_m está en correspondencia biyectiva con un subconjunto $D \subseteq A \setminus C_m$, de modo que $|C_m| = |D|$ y $C_m \cap D = \varnothing$. Pongamos $E \coloneqq (C_m \times D) \sqcup (D \times C_m) \sqcup (D \times D)$. Los tres conjuntos cuya unión disjunta forma E tienen cardinal $|C_m| \cdot |C_m| = |C_m|$, que es infinito; luego, por el segundo caso de (a), $|E| = |C_m| = |D|$, y así existe una biyección $g\colon E \to D$. Deducimos que la aplicación $f\colon (C_m \times C_m) \sqcup E \to C_m \sqcup D$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} f_m(x, y) & \text{si } (x, y) \in C_m \times C_m \\ g(x, y) & \text{si } (x, y) \in E \end{cases}$$

es biyectiva. Pero

$$\begin{aligned} (C_m \times C_m) \sqcup E &= (C_m \times C_m) \sqcup [(C_m \times D) \sqcup (D \times C_m) \sqcup (D \times D)] \\ &= (C_m \sqcup D) \times (C_m \sqcup D), \end{aligned}$$

por lo que $f \in \mathcal{S}$ y $f_m < f$, en contradicción con la maximalidad de f_m. Se sigue que $|C_m| = |A|$ y este caso está completo.

■ *Caso general.* Multiplicando las desigualdades $\alpha \geq \beta$ y $\alpha \geq \alpha$, resulta que $\alpha \cdot \beta \geq \alpha \cdot \alpha$. Además, trivialmente $\alpha \cdot \alpha \geq \alpha$, luego $\alpha \leq \alpha \cdot \alpha \leq \alpha \cdot \beta$. Pero, por el caso anterior, $\alpha \cdot \alpha = \alpha$, así que $\alpha \leq \alpha \cdot \beta \leq \alpha$ y el Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder afirma que $\alpha \cdot \beta = \alpha$. □

Corolario 1.18. *Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ números cardinales. Siempre que alguno de ellos sea infinito, se tiene:*

(a) $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$;

(b) $\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n = \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Demostración. Veamos (b), por ejemplo; (a) es idéntica. Para $n = 2$ es el teorema anterior. Suponiendo la propiedad cierta para $n-1$ cardinales (hipótesis de inducción), probemos que también lo es para n cardinales $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

- Si sólo un cardinal α_i de los n es infinito, teniendo en cuenta las propiedades de la aritmética de cardinales y el caso $n = 2$,

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = \alpha_i \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \alpha_k = \text{máx}\left\{\alpha_i, \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \alpha_k\right\} = \alpha_i = \text{máx}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$$

(aquí no hemos necesitado la hipótesis de inducción).

- Si hay dos cardinales infinitos α_i y α_j, teniendo en cuenta lo mismo que en el caso precedente y además la hipótesis de inducción,

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = \alpha_i \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \alpha_k = \text{máx}\left\{\alpha_i, \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \alpha_k\right\} = \text{máx}\left\{\alpha_i, \max_{\substack{1\leq k\leq n \\ k\neq i}} \alpha_k\right\} = \text{máx}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}.$$

$\square$

Corolario 1.19. *Se verifica que* $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

Demostración. Tenemos $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \sqcup \{0\} \sqcup (-\mathbb{N})$. Trivialmente $-\mathbb{N}$ está en biyección con $\mathbb{N}$, lo que implica que $|-\mathbb{N}| = \aleph_0$, y así $|\mathbb{Z}| = \aleph_0 + 1 + \aleph_0 = \aleph_0$, según el corolario anterior. En cuanto a $\mathbb{Q}$, cualquier aplicación de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que asocie a cada $x \in \mathbb{Q}$ un par $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $x = p/q$ es inyectiva, luego $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}| \cdot |\mathbb{Z}| = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. Como $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, también $\aleph_0 = |\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{Q}|$, y el Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder permite concluir que $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$. $\square$

Teorema 1.20. *Se verifican las siguientes propiedades:*

(a) $|\mathcal{P}(A)| = 2^\alpha$ *si* $|A| = \alpha$;

(b) $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$;

(c) todo intervalo no degenerado (es decir, no vacío ni unipuntual) en $\mathbb{R}$ *tiene cardinal* $\mathfrak{c}$.

Demostración. Para (a), notemos que la aplicación $f \colon \mathcal{P}(A) \to \{0, 1\}^A$ que a cada $S \in \mathcal{P}(A)$ le asocia $f(S) = (x_a)_{a\in A}$ con $x_a = 1$ si $a \in S$ y $x_a = 0$ si $a \in A \setminus S$ es biyectiva. Por tanto, $|\mathcal{P}(A)| = |\{0, 1\}^A| = |\{0, 1\}|^{|A|} = 2^\alpha$.

En cuanto a (b), teniendo en cuenta (a) y la Proposición 1.12, $2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Veamos que $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. La aplicación $g\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ que hace corresponder a cada $x \in \mathbb{R}$ su cortadura de Dedekind $g(x) = (-\infty, x) \cap \mathbb{Q}$ es inyectiva: dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, podemos suponer por ejemplo que $x < y$, y entonces los números racionales del intervalo $[x, y)$ pertenecen a $g(y)$ pero no a $g(x)$, luego $g(x) \neq g(y)$. En consecuencia, $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = 2^{|\mathbb{Q}|} = 2^{\aleph_0}$. Por otra parte, la aplicación $h\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ dada por $h(a_n)_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/10^n =$ número real cuya representación decimal es $0{,}a_1a_2a_3\ldots$ es inyectiva, pues la única manera de que un número tenga dos representaciones decimales es que una acabe en infinitos 0 consecutivos y otra en infinitos 9 consecutivos. Por consiguiente, $2^{\aleph_0} = |\{0,1\}|^{|\mathbb{N}|} = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Las dos desigualdades probadas implican que $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ por el Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder.

Por último, probamos (c) en los casos $I = (a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$ e $I = (0,1)$, que son los que necesitaremos más adelante. Como $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ y la traslación $\tau_a\colon (0, +\infty) \to (a, +\infty)$ dada por $\tau_a(x) = x + a$ son biyecciones, la composición $\tau_a \circ \exp$ es una biyección entre $\mathbb{R}$ y $(a, +\infty)$. Por tanto, $|(a, +\infty)| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Por otro lado, puesto que la transformación afín $\sigma\colon (0,1) \to (-\pi/2, \pi/2)$ dada por $\sigma(x) = \pi x - \pi/2$ y $\operatorname{tg}\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ son biyecciones, la composición $\operatorname{tg} \circ \sigma$ es una biyección entre $(0,1)$ y $\mathbb{R}$, por lo que $|(0,1)| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. □

Proposición 1.21. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea A_n un conjunto con $|A_n| \leq \aleph_0$. Entonces*

$$\left| \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right| \leq \aleph_0.$$

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A_n \neq \varnothing$ cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $|A_n| = \aleph_0$, pongamos $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \ldots\}$, y si A_n es finito, $A_n = \{a_{n1}, \ldots, a_{nk_n}\}$ (en ambos casos $a_{nm} \neq a_{nm'}$ si $m \neq m'$). Sea $f\colon \cup_{n=1}^{\infty} A_n \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ una aplicación que asocie a cada $x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ un par (n, m) tal que $x = a_{nm}$ (no hay una sola elección posible, pues cada x puede pertenecer a varios A_n). Es claro que f es inyectiva, así que $|\cup_{n=1}^{\infty} A_n| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}| \cdot |\mathbb{N}| = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. □

Proposición 1.22. *Sean α y β cardinales. Si β es infinito y $2 \leq \alpha \leq 2^\beta$, entonces $\alpha^\beta = 2^\beta$. En particular, $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.*

Demostración. Como β es infinito, $\beta \cdot \beta = \beta$ por el Teorema 1.17. Teniendo en cuenta la relación con el orden y las propiedades de la aritmética de cardinales, $2^\beta \leq \alpha^\beta \leq (2^\beta)^\beta = 2^{\beta\cdot\beta} = 2^\beta$, y la primera parte se sigue del Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder. Finalmente, ya que $2 \leq \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ (Proposición 1.20-(b)). □

Teorema 1.23 (Principio del Palomar)**.** *Sean A y B conjuntos, A infinito, tales que $|A| > |B|$. Entonces para cada aplicación $f\colon A \to B$ existe $b \in T$ tal que $f^{-1}(\{b\})$ es infinito.*

El nombre de este teorema alude a la siguiente interpretación de su enunciado: si se tiene un conjunto infinito de palomas A, un conjunto de palomares B y hay más palomas que palomares, al repartir las palomas entre los palomares (lo que equivale a establecer una aplicación $f\colon A \to B$), forzosamente habrá que colocar infinitas palomas en algún palomar.

Demostración. Supuesto A infinito, basta probar que si una aplicación $f\colon A \to B$ cumple que $f^{-1}(\{b\})$ es finito para todo $b \in B$, necesariamente $|A| \leq |B|$. Notar que con estas hipótesis B tiene que ser infinito, porque de lo contrario

$$A = \bigsqcup_{b\in B} f^{-1}(\{b\})$$

sería finito, al ser unión finita de conjuntos finitos.

Pongamos, para cada $b \in B$,

$$f^{-1}(\{b\}) = \{a_{b1}, \ldots, a_{bn_b}\}$$

(sin repetir elementos). Llamando

$$C_{bn} = \begin{cases} \{a_{bn}\} & \text{si } 1 \leq n \leq n_b \\ \varnothing & \text{si } n > n_b \end{cases} \qquad \text{para cada } (b,n) \in B \times \mathbb{N},$$

A se puede expresar como

$$A = \bigsqcup_{b \in B} f^{-1}(\{b\}) = \bigsqcup_{b \in B} \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_{bn} = \bigsqcup_{(b,n) \in B \times \mathbb{N}} C_{bn}.$$

Es decir, para cada $a \in A$ hay un solo $g(a) \in B \times \mathbb{N}$ con $a \in C_{bn}$. Ya que cada C_{bn} consta como mucho de un elemento, la aplicación $g\colon A \to B \times \mathbb{N}$ resultante es inyectiva, y esto prueba que

$$|A| \leq |B \times \mathbb{N}| = |B| \cdot |\mathbb{N}| = |B| \cdot \aleph_0 = \max\{|B|, \aleph_0\} = |B|;$$

la penúltima igualdad se debe al Teorema 1.17 y la última a la Proposición 1.13, que afirma que $\aleph_0$ es el menor cardinal infinito. □

1.4. Espacios vectoriales

Definición 1.24. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Se dice que un subconjunto $S \subseteq V$ es:

(a) ***linealmente independiente*** o ***libre*** si de $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$; $\lambda_i \in K$, $x_i \in S$ para $i = 1, \ldots, n$) se sigue que $\lambda_i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$ (vacuamente el conjunto vacío es libre);

(b) ***generador*** si $V = K\langle S \rangle$;

(c) ***base*** si es a la vez linealmente independiente y generador.

Teorema 1.25 (existencia de bases)**.** *Todo espacio vectorial posee base.*

Demostración. Sea V un espacio vectorial sobre K. Si $V = \{0\}$, entonces $\varnothing$ es base de V; supongamos que $V \neq \{0\}$. En $\mathcal{S} = \{S \subseteq V : S \text{ es libre}\}$, considerar la relación de orden $\subseteq$ (notar que $\mathcal{S} \neq \varnothing$, ya que contiene a $\varnothing$ y a los $\{v\}$ con $0 \neq v \in V$). Fijada una cadena $\mathcal{T}$ de $\mathcal{S}$, veamos que

$$U = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$$

es libre: si para determinados $n \in \mathbb{N}$, $v_1, \ldots, v_n \in U$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ se tiene $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$, eligiendo $T_i \in \mathcal{T}$ con $v_i \in T_i$ para $i = 1, \ldots, n$, por ser $\mathcal{T}$ cadena existirá una permutación $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ tal que $T_{\sigma(1)} \subseteq \ldots \subseteq T_{\sigma(n)}$, con lo que $v_i \in T_{\sigma(n)}$ para $i = 1, \ldots, n$, y como $T_{\sigma(n)}$ es libre, $\lambda_i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$.

En consecuencia, $U \in \mathcal{S}$, y por construcción $T \subseteq U$ cualquiera que sea $T \in \mathcal{T}$, así que $\mathcal{T}$ está acotada superiormente. El Lema de Zorn afirma que $\mathcal{S}$ tiene algún elemento maximal S_m. Y debe ser $K\langle S_m \rangle = V$, porque si existiera $x \in V \setminus K\langle S_m \rangle$, entonces $S_m \sqcup \{x\}$ sería libre. En efecto, si una combinación lineal de elementos de $S_m \sqcup \{x\}$ es nula y en ella no aparece x, todos los escalares deben ser nulos por ser S_m libre; y si aparece x, su escalar debe ser nulo porque de lo contrario x se podría despejar como combinación lineal del resto y $x \in K\langle S_m \rangle$, con lo que queda una combinación lineal nula sin x, cuyos escalares deben ser nulos por el caso anterior. Así, S_m es libre y genera V, o lo que es lo mismo, S_m es base de V. $\square$

Lema 1.26. *Sea A un conjunto infinito y denotemos por $\mathcal{F}(A)$ el conjunto de sus partes finitas, es decir, $\mathcal{F}(A) = \{F \subseteq A : F \text{ es finito}\}$. Entonces $|\mathcal{F}(A)| = |A|$.*

Demostración. La aplicación $f\colon A \to \mathcal{F}(A)$ dada por $f(a) = \{a\}$ es inyectiva. Por tanto, $|A| \leq |\mathcal{F}(A)|$ y, por el Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder, basta probar que $|\mathcal{F}(A)| \leq |A|$. Llamando

$$C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A^n = \{\text{tuplas (finitas) de elementos de } A\},$$

la aplicación $g\colon \mathcal{F}(A) \setminus \{\varnothing\} \to C$ que hace corresponder a cada $F \in \mathcal{F}(A)$ una tupla $g(F) \in A$ con los $|F|$ elementos de F (da igual en qué orden) es inyectiva, luego

$$|\mathcal{F}(A) \setminus \{\varnothing\}| \leq |C|. \tag{1.4}$$

Además, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$, $|A^n| = |A|^n = \text{máx}\{|A|\} = |A|$ (Corolario 1.18), por lo que existe una biyección $\varphi_n\colon A^n \to A$. La aplicación $h\colon C \to \mathbb{N} \times A$ dada por $h(a_1, \ldots, a_n) = (n, \varphi_n(a_1, \ldots, a_n))$ es biyectiva, por lo que

$$|C| = |\mathbb{N} \times A| = |\mathbb{N}| \cdot |A| = \aleph_0 \cdot |A| = \text{máx}\{\aleph_0, |A|\} = |A|,$$

y así (1.4) se puede reescribir como

$$|\mathcal{F}(A) \setminus \{\varnothing\}| \leq |A|.$$

Por último, dado que

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}(A)| &= |\mathcal{F}(A) \setminus \{\varnothing\}| + |\{\varnothing\}| = |\mathcal{F}(A) \setminus \{\varnothing\}| + 1 = \text{máx}\{|\mathcal{F}(A) \setminus \{\varnothing\}, 1\} \\ &= |\mathcal{F}(A) \setminus \{\varnothing\}|,\end{aligned}$$

concluimos que $|\mathcal{F}(A)| \leq |A|$. □

Teorema 1.27. *Sea V un espacio vectorial sobre K. Dados dos subconjuntos $S, T \subseteq V$ con S libre y T generador, $|S| \leq |T|$.*

Demostración. Si T es finito, entonces V está finitamente generado y el teorema es conocido de Álgebra Lineal elemental. Supongamos que T es infinito y que $|S| > |T|$ (lo que implica que S también es infinito) y veamos que se llega a un absurdo. Por hipótesis, $V = K\langle T\rangle$. Por lo tanto, cada $v \in S$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores de una parte finita $f(v)$ de T. Queda así definida una aplicación $f\colon S \to \mathcal{F}(T)$. Por el lema anterior $|S| > |T| = |\mathcal{F}(T)|$, y estamos en condiciones de aplicar el Principio del Palomar para deducir que existe $F \in \mathcal{F}(T)$ tal que $f^{-1}(\{F\})$ es infinito. Finalmente, ya que $f^{-1}(\{F\}) \subseteq S$, $f^{-1}(\{F\})$ es libre; pero, por definición de f, $f^{-1}(\{F\}) \subseteq K\langle F\rangle$, y por consiguiente el subespacio finitamente generado $K\langle F\rangle$ contiene infinitos vectores linealmente independientes, lo cual contradice el resultado para T finito. □

Corolario 1.28 (Teorema de la Dimensión)**.** *Todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen igual cardinal, que se denomina* **dimensión** *del espacio vectorial.*

Demostración. Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ bases de un mismo espacio vectorial V sobre K. Como $\mathcal{B}_1$ es libre y $\mathcal{B}_2$ genera V, el teorema precedente asegura que $|\mathcal{B}_1| \leq |\mathcal{B}_2|$. Pero asimismo $\mathcal{B}_2$ es libre y $\mathcal{B}_1$ genera V, luego $|\mathcal{B}_2| \leq |\mathcal{B}_1|$. Por el Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder, $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$. □

Proposición 1.29. *Considerar $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. Fijada una enumeración $(q_k)_{k=0}^{\infty}$ de $\mathbb{Q}$ (es decir, $\mathbb{Q} = \{q_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ y distintos k se corresponden con distintos q_k, lo cual es posible por el Corolario 1.19), el conjunto*

$$S = \left\{ \sum_{q_k < r} \frac{1}{k!} : r \in \mathbb{R} \right\}$$

es linealmente independiente. En consecuencia, la dimensión de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ es $\mathfrak{c}$.

Demostración. Llamemos

$$a_r = \sum_{q_k < r} \frac{1}{k!} \qquad \text{para cada } r \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

de modo que $S = \{a_r\}_{r \in \mathbb{R}}$. Es claro que $S \subseteq \mathbb{R}$, ya que

$$a_r = \sum_{q_k < r} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e < +\infty.$$

Además, si $r < s$,

$$a_s = \sum_{q_k < s} \frac{1}{k!} = \sum_{q_k < r} \frac{1}{k!} + \sum_{r \leq q_k < s} \frac{1}{k!} = a_r + \sum_{r \leq q_k < s} \frac{1}{k!}.$$

Dado que hay números racionales en el intervalo $[r, s)$, esta última suma no es nula y $a_r \neq a_s$. Así pues, índices $r \in \mathbb{R}$ distintos dan lugar a vectores $a_r \in S$ distintos y $|\mathbb{R}| \leq |S|$. Como $S \subseteq \mathbb{R}$, también $|S| \leq |\mathbb{R}|$. Por el Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder, $|S| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

Suponer que $\lambda_1 a_{r_1} + \cdots + \lambda_p a_{r_p} = 0$ para determinados $\lambda_i \in \mathbb{Q}$, $r_i \in \mathbb{R}$ (r_i distintos dos a dos). Para probar que S es linealmente independiente, debemos ver que $\lambda_i = 0$ para todo i. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $r_1 > r_2 > \cdots > r_k$ y, multiplicando por un múltiplo común de los denominadores, que $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ para todo i.

Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots k} \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \\
&= \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right) \\
&\leq \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right) \\
&= \frac{e-1}{n+1},
\end{aligned}$$

expresión que tiende a 0 cuando $n \to +\infty$. Por lo tanto, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(|\lambda_1| + \cdots + |\lambda_p|) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} < 1 \qquad \text{siempre que } n \geq n_1.$$

Sea $n_2 = \text{máx}\{n_1, |\lambda_1|\} \in \mathbb{N}$. Puesto que en el intervalo (r_2, r_1) hay infinitos números racionales, existirá $n > n_2$ tal que $r_1 > q_n > r_2 > \cdots > r_p$. Para este n fijado,

$$a_{r_1} = \sum_{q_k < r_1} \frac{1}{k!} = \sum_{\substack{k<n \\ q_k<r_1}} \frac{1}{k!} + \sum_{\substack{k>n \\ q_k<r_1}} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!},$$

y para $i = 2, \ldots, p$,

$$a_{r_i} = \sum_{q_k < r_i} \frac{1}{k!} = \sum_{\substack{k<n \\ q_k<r_i}} \frac{1}{k!} + \sum_{\substack{k>n \\ q_k<r_i}} \frac{1}{k!}.$$

Consecuentemente, $\lambda_1 a_{r_1} + \cdots + \lambda_p a_{r_p} = 0$ se puede reescribir como

$$\lambda_1 \sum_{\substack{k<n \\ q_k<r_1}} \frac{1}{k!} + \cdots + \lambda_p \sum_{\substack{k<n \\ q_k<r_p}} \frac{1}{k!} + \frac{\lambda_1}{n!} = -\lambda_1 \sum_{\substack{k>n \\ q_k<r_1}} \frac{1}{k!} - \cdots - \lambda_p \sum_{\substack{k>n \\ q_k<r_p}} \frac{1}{k!},$$

y multiplicando por $n!$,

$$\lambda_1 \sum_{\substack{k<n \\ q_k<r_1}} \frac{n!}{k!} + \cdots + \lambda_p \sum_{\substack{k<n \\ q_k<r_p}} \frac{n!}{k!} + \lambda_1 = -\lambda_1 \sum_{\substack{k>n \\ q_k<r_1}} \frac{n!}{k!} - \cdots - \lambda_p \sum_{\substack{k>n \\ q_k<r_p}} \frac{n!}{k!}. \tag{1.6}$$

El lado derecho de (1.6) tiene por valor absoluto

$$\left| -\lambda_1 \sum_{\substack{k>n \\ q_k<r_1}} \frac{n!}{k!} - \cdots - \lambda_p \sum_{\substack{k>n \\ q_k<r_p}} \frac{n!}{k!} \right| \leq (|\lambda_1| + \cdots |\lambda_p|) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} < 1,$$

y además es entero, porque lo es el lado izquierdo ($\lambda_i \in \mathbb{Z}$ para todo i y los sumatorios que aparecen son sumas finitas de naturales, pues $k < n$). Por ende, ambos lados de (1.6) son 0, en particular el izquierdo, y así

$$\lambda_1 = -\lambda_1 \sum_{\substack{k<n \\ q_k<r_1}} \frac{n!}{k!} - \cdots - \lambda_p \sum_{\substack{k<n \\ q_k<r_p}} \frac{n!}{k!} \equiv 0 \ (\text{mód } n).$$

Pero, como $|\lambda_1| < n$, la única posibilidad es que $\lambda_1 = 0$. Reiterando, $\lambda_i = 0$ para todo i y queda probada la independencia lineal.

Sea $\mathcal{B}$ una base de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ (ya hemos demostrado que todo espacio vectorial tiene base). Entonces, por el Teorema 1.27, $\mathfrak{c} = |S| \leq |\mathcal{B}|$, y dado que $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$, también $|\mathcal{B}| \leq |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Según el Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder, $|\mathcal{B}| = \mathfrak{c}$ y la dimensión de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ es $\mathfrak{c}$. □

Corolario 1.30. *Existe $C \subseteq (1, +\infty)$ con $|C| = \mathfrak{c}$ linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$.*

Demostración. Manteniendo la notación de la proposición precedente, para que $a_r > 1$ es suficiente que $r > \text{máx}\{q_0, q_1\}$, ya que entonces la suma (1.5) incluye los sumandos asociados a $k = 0$ y a $k = 1$, que son $1 + 1 = 2$. Esto implica que $C = \{a_r : r > \text{máx}\{q_0, q_1\}\} \subseteq (1, +\infty)$ es un conjunto de números reales linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$, y es claro que $|C| = |(\text{máx}\{q_0, q_1\}, +\infty)| = \mathfrak{c}$ (Teorema 1.20-(c)). □

1.5. Álgebras

Definición 1.31. Un ***álgebra*** sobre $\mathbb{K}$ es un conjunto $\mathcal{A}$ dotado de tres operaciones binarias $+\colon \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (suma), $\cdot_{\mathbb{K}}\colon \mathbb{K}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (producto por escalares) y $\cdot\colon \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (producto interno) tales que $(A, +, \cdot_{\mathbb{K}})$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y para todos $a, b, c \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ se verifica:

(a) $(ab)c = a(bc)$;

(b) $a(b+c) = ab + ac, \quad (a+b)c = ac + bc$;

(c) $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.

Si el producto interno es conmutativo, se dice que $\mathcal{A}$ es un ***álgebra conmutativa.*** Los subconjuntos de $\mathcal{A}$ que sean álgebras con las operaciones heredadas se denominan ***subálgebras*** de A.

Proposición 1.32. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra conmutativa, y sea $S \subseteq A$. Entonces*

$$\mathcal{A}(S) = \{P(a_1, \ldots, a_p) : p \in \mathbb{N},\, P \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_p],\, P(0, \ldots, 0) = 0,\, a_1, \ldots, a_p \in S\}$$

es una subálgebra que contiene a S y que está contenida en cualquier otra subálgebra que contenga a S. Así, $\mathcal{A}(S)$ es la menor subálgebra que contiene a S, y por eso se llama **subálgebra generada** *por S.*

Definición 1.33. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra conmutativa sobre $\mathbb{K}$ y α un cardinal. Se dice que $\mathcal{A}$ está ***libremente α-generada*** si hay algún $S \subseteq \mathcal{A}$ con cardinal α que genera $\mathcal{A}$ y cumple la siguiente implicación: dados $p \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_p]$ con $P(0, \ldots, 0) = 0$ y $a_1, \ldots a_p \in S$ ($a_i \neq a_j$ si $i \neq j$) tales que $P(a_1, \ldots, a_p) = 0$, necesariamente $P = 0$. En tal caso se dice también que S es un sistema libre que genera $\mathcal{A}$, o que A es el álgebra libre generada por S.

1.6. Topología y Análisis Funcional

Listamos a continuación varios resultados conocidos que nos harán falta de Topología y Análisis Funcional. En la mayoría de los casos no incluimos las demostraciones aquí.

Recordemos que un espacio topológico se dice ***separable*** si posee algún subconjunto denso y numerable, y ***2-numerable*** si admite alguna base de abiertos numerable. Las siguientes proposiciones recogen las propiedades que usaremos de este tipo de espacios:

Proposición 1.34. *Para un espacio métrico E, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) E es separable;

(b) E es 2-numerable.

Demostración. Véase [6, Teor. IX.5.6]. □

Proposición 1.35. *Sea I un conjunto tal que $|I| \leq \mathfrak{c}$. Si para cada $i \in I$ se tiene un espacio topológico separable X_i, entonces $\prod_{i \in I} X_i$ es separable dotado de la topología producto.*

Demostración. Véase [6, Teor. VIII.7.2]. □

Proposición 1.36. *Todo espacio métrico separable tiene cardinal inferior o igual a $\mathfrak{c}$.*

Demostración. Sea (E, d) un espacio métrico separable y D un subconjunto denso numerable suyo. Si dos puntos $x, y \in E$ satisfacen $d(x, a) = d(y, a)$ para todo $a \in D$, entonces $x = y$. En efecto, si fuese $x \neq y$, se tendría $d(x, y) > 0$ y, por ser D denso, existiría $a \in D$ tal que $d(x, a) < d(x, y)/2$, lo que implicaría el absurdo $d(x, y) \leq d(x, a) + d(y, a) = 2d(x, a) < d(x, y)$. Esto prueba que la aplicación $f \colon E \to \mathbb{R}^D$ dada por $f(x) = (d(x, a))_{a \in D}$ es inyectiva, luego $|E| \leq |\mathbb{R}^D| = |\mathbb{R}|^{|D|} = \mathfrak{c}^{|D|}$. Como $|D| \leq \aleph_0$, las Proposiciones 1.16 y 1.22 permiten deducir que $|E| \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. □

Teorema 1.37. *Sea X un espacio topológico de Baire y E un espacio métrico. Si una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones continuas $f_n \colon X \to E$ converge puntualmente a una función $f \colon X \to E$, entonces el conjunto de los puntos de continuidad de f, es decir,*

$$\{x \in X : f \text{ es continua en } x\},$$

es denso en X.

Terminamos la sección recordando cómo las familias separantes de seminormas inducen topologías sobre espacios vectoriales:

Definición 1.38. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una ***seminorma*** sobre X es una aplicación $p \colon X \to \mathbb{R}$ tal que:

(a) $p(x) \geq 0$ para todo $x \in X$;

(b) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ para todos $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$;

(c) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ para todos $x, y \in X$.

Es decir, p cumple las mismas propiedades que una norma, sólo que puede valer 0 en algún elemento no nulo. Una familia P de seminormas se dice que es ***separante*** si para cada $x \in X \setminus \{0\}$ hay alguna $p \in P$ con $p(x) \neq 0$.

Teorema 1.39. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea P una familia separante de seminormas sobre X. Entonces, existe una topología sobre X que hace de él un espacio vectorial topológico localmente convexo tal que para cada $x \in X$ la familia*

$$\{B(x; p_1, \dots, p_n; \varepsilon) : n \in \mathbb{N},\, p_1, \dots, p_n \in P,\, \varepsilon > 0\},$$

donde

$$B(x; p_1, \dots, p_n; \varepsilon) = \{y \in X : p_i(y - x) < \varepsilon \text{ para } i = 1, \dots, n\},$$

es una base de entornos de x.

Dicha topología satisface las siguientes propiedades:

(a) una sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ converge a x si y sólo si $p(x_k - x) \to 0$ cuando $k \to \infty$ para toda $p \in P$;

(b) es la menos fina que hace continuas a todas las seminormas de P;

(c) si P es numerable, entonces X es metrizable.

Demostración. Véase [7, Cap. 1]. □

1.7. Algunos espacios de funciones y de sucesiones de funciones

Introducimos en esta última sección los espacios de funciones y de sucesiones de funciones que utilizaremos en los Capítulos 3 y 4. Siempre que aparezcan dichos espacios, se debe entender que se consideran con las estructuras algebraica y topológica definidas aquí.

El espacio de las funciones continuas en un intervalo compacto. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, denotamos $\mathcal{C}[a,b] = \mathcal{C}([a,b]) = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$. Es claro que $\mathcal{C}[a,b]$ es un álgebra con la suma de funciones, el producto de funciones por escalares y el producto de funciones. Además, es sabido que la aplicación $\|\cdot\|_\infty\colon \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

es una norma que hace de $\mathcal{C}[a,b]$ un espacio de Banach (es decir, $\mathcal{C}[a,b]$ es completo para la distancia a la que da lugar la norma).

El famoso Teorema de Aproximación de Weierstrass afirma que el conjunto $\Pi[a,b]$ de las funciones polinómicas en $[a,b]$ es denso en $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ (consultar [8, Teor. 7.26]). Es fácil demostrar, empleando la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, que el conjunto de las funciones polinómicas con coeficientes racionales $\Pi_\mathbb{Q}[a,b]$ es denso en $\Pi[a,b]$, y por tanto también en $\mathcal{C}[a,b]$. Notar que

$$\Pi_\mathbb{Q}[a,b] = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \Pi_\mathbb{Q}^n[a,b],$$

siendo $\Pi_\mathbb{Q}^n[a,b]$ el subconjunto de $\Pi_\mathbb{Q}[a,b]$ formado por las funciones polinómicas de grado n. La aplicación de $\Pi_\mathbb{Q}^n[a,b]$ en $\mathbb{Q}^n$ que asocia a cada $q_n x^n + \cdots + q_1 x + q_0$ la n-tupla $(q_n, \ldots, q_1, q_0)$ es inyectiva, por lo que $|\Pi_\mathbb{Q}^n[a,b]| \le |\mathbb{Q}^n| = \aleph_0$. Consecuentemente, por la Proposición 1.21, $|\Pi_\mathbb{Q}[a,b]| \le \aleph_0$, y así $\mathcal{C}[a,b]$ es separable.

El espacio de las funciones continuas en $\mathbb{R}$. Recordemos que $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$, que es un álgebra con las operaciones habituales. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, la aplicación $p_n\colon \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$p_n(f) = \max_{x\in[-n,n]} |f(x)|$$

es una seminorma, y la familia $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ formada por todas ellas es separante. En efecto, si $0 \neq f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq 0$ y, tomando $n \in \mathbb{N}$ con

$n \geq |x|$, se tiene que $p_n(f) \geq |f(x)| > 0$. De acuerdo con el Teorema 1.39, se puede considerar en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ la topología inducida por $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dada una sucesión $(f_k)_{k=1}^{\infty}$, se tendrá que $f_k \to f$ cuando $k \to \infty$ si y sólo si $p_n(f_k - f) \to 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que equivale a que

$$\max_{x\in[-n,n]} |f_k(x) - f(x)| \to 0$$

cuando $k \to \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, a que $f_k \to f$ uniformemente en todo $[-n, n]$ con $n \in \mathbb{N}$. Como todo compacto está contenido en un intervalo de esta forma, concluimos que $f_k \to f$ con la topología inducida por $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si y sólo si $f_k \to f$ uniformemente en compactos. Por otra parte, dado que $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es numerable, $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ es metrizable.

Veamos que $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ también es separable con la topología que acabamos de introducir. Para ello, consideremos el conjunto $\Pi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$, que ya hemos probado que es numerable (en el razonamiento anterior no importa que el dominio sea $[a, b]$ o $\mathbb{R}$). Nos falta por demostrar su densidad en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Sea $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y tomemos un entorno básico de f, que sabemos que es de la forma $B(f; p_{n_1}, \ldots, p_{n_r}; \varepsilon)$ para ciertos $r \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ por el Teorema 1.39. Debemos mostrar que $\Pi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) \cap B(f; p_{n_1}, \ldots, p_{n_r}; \varepsilon) \neq \varnothing$. Sin pérdida de generalidad, supongamos los índices ordenados de modo que $n_1 < n_2 < \cdots < n_r$, con lo que $p_{n_1} \leq p_{n_2} \leq \cdots \leq p_{n_r}$ en todo $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, y así

$$\begin{aligned} B(f; p_{n_1}, \ldots, p_{n_r}; \varepsilon) &= \{g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : p_{n_i}(g - f) < \varepsilon \text{ para } i = 1, \ldots, r\} \\ &= \{g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : p_{n_r}(g - f) < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

La condición $p_{n_r}(g - f) < \varepsilon$ equivale a $\|g - f\|_{\mathcal{C}[-n_r,n_r]} < \varepsilon$, y como $\Pi_{\mathbb{Q}}[-n_r, n_r]$ es denso en $\mathcal{C}[-n_r, n_r]$, existe $g \in \Pi_{\mathbb{Q}}[-n_r, n_r]$ para la que se verifica esta desigualdad. Por consiguiente, su extensión a $\mathbb{R}$ está en $\Pi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) \cap B(f; p_{n_1}, \ldots, p_{n_r}; \varepsilon)$ y tenemos la densidad.

El espacio de las sucesiones de funciones continuas $(\mathcal{C}[a, b])^{\mathbb{N}}$. El conjunto $(\mathcal{C}[a, b])^{\mathbb{N}}$ de las sucesiones de funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ es un álgebra cuando se lo dota de las operaciones componente a componente, es decir:

$$(f_n)_{n=1}^{\infty} + (g_n)_{n=1}^{\infty} = (f_n + g_n)_{n=1}^{\infty},\ c(f_n)_{n=1}^{\infty} = (cf_n)_{n=1}^{\infty},\ (f_n)_{n=1}^{\infty}(g_n)_{n=1}^{\infty} = (f_ng_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, la aplicación $p_k \colon (\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ dada por

$$p_k(f_n)_{n=1}^{\infty} = \|f_k\|_{\infty}$$

es una seminorma, y la familia $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ formada por todas ellas es separante. En efecto, si $0 \neq (f_n)_{n=1}^{\infty} \in (\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_k \neq 0$ y, por lo tanto, $p_k(f_n)_{n=1}^{\infty} = \|f_k\|_{\infty} > 0$. Según el Teorema 1.39, $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ induce en $(\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}}$ una topología que hace de él un espacio vectorial topológico metrizable. Una base de entornos para cada $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es

$$\mathcal{B} = \{B((f_n)_{n=1}^{\infty}; p_{k_1}, \dots, p_{k_r}; \varepsilon) : (f_n)_{n=1}^{\infty} \in (\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}},\ r \in \mathbb{N},\ k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0\},$$

donde

$$\begin{aligned} B((f_n)_{n=1}^{\infty}; &p_{k_1}, \dots, p_{k_r}; \varepsilon) \\ &= \{(g_n)_{n=1}^{\infty} \in (\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}} : p_{k_i}((g_n)_{n=1}^{\infty} - (f_n)_{n=1}^{\infty}) < \varepsilon \text{ para } i = 1, \dots, r\} \\ &= \{(g_n)_{n=1}^{\infty} \in (\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}} : \|g_{k_i} - f_{k_i}\|_{\infty} < \varepsilon \text{ para } i = 1, \dots, r\} \\ &= \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n, \end{aligned}$$

siendo U_n la bola de centro f_{k_i} y radio ε en $\mathcal{C}[a,b]$ cuando $n = k_i$ para algún $i = 1, \dots, r$ y $U_n = \mathcal{C}[a,b]$ para cualquier otro n. Es sencillo entonces ver que $\mathcal{B}$ también es base de entornos de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ si se considera la topología producto en

$$(\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_{\infty}),$$

luego ambas topologías coinciden. En particular, ya que $\mathcal{C}[a,b]$ es separable, también lo es $(\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}}$ por la Proposición 1.35.

El espacio $\ell_{\infty}(\mathcal{C}[a,b])$. Definimos $\|\cdot\|_{\ell_{\infty}} \colon (\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}} \to [0, +\infty]$ mediante

$$\|(f_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_{\infty}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{\infty}$$

y $\ell_{\infty}(\mathcal{C}[a,b]) = \left\{(f_n)_{n=1}^{\infty} \in (\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}} : \|(f_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_{\infty}} < +\infty\right\}$. Se comprueba sin dificultad que $\|\cdot\|_{\ell_{\infty}}$ es una norma en $\ell_{\infty}(\mathcal{C}[a,b])$. Así, $(\ell_{\infty}(\mathcal{C}[a,b]), \|\cdot\|_{\ell_{\infty}})$ es espacio normado.

El espacio $c_0(\mathcal{C}[a,b])$. Definimos $c_0(\mathcal{C}[a,b]) = \{(f_n)_{n=1}^\infty \in (\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}} : \|f_n\|_\infty \to 0\}$, que es subespacio vectorial de $\ell_\infty(\mathcal{C}[a,b])$. Por lo tanto, $(c_0(\mathcal{C}[a,b]), \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ es espacio normado.

El subespacio vectorial

$$c_{00}(\mathcal{C}[a,b]) = \{(f_n)_{n=1}^\infty \in (\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}} : \text{existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ con } f_n = 0 \text{ para todo } n \geq n_0\}$$

es denso en $c_0(\mathcal{C}[a,b])$. En efecto, dados $(f_n)_{n=1}^\infty \in c_0(\mathcal{C}[a,b])$ y $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n\|_\infty < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Así, la sucesión $(g_n)_{n=1}^\infty \in c_{00}(\mathcal{C}[a,b])$ con $g_n = f_n$ si $n < n_0$ y $g_n = 0$ si $n \geq n_0$ verifica que

$$\begin{aligned}\|(g_n)_{n=1}^\infty - (f_n)_{n=1}^\infty\|_{\ell_\infty} = \|(g_n - f_n)_{n=1}^\infty\|_{\ell_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n - f_n\|_\infty = \sup_{n\geq n_0} \|g_n - f_n\|_\infty \\ = \sup_{n\geq n_0} \|f_n\|_\infty \leq \varepsilon\end{aligned}$$

y se tiene la densidad.

Veamos que $c_0(\mathcal{C}[a,b])$ es separable. Ya sabemos que $\Pi_{\mathbb{Q}}[a,b]$ es denso en $\mathcal{C}[a,b]$ y numerable. Considerar ahora $D = \{(f_n)_{n=1}^\infty \in c_{00}(\mathcal{C}[a,b]) : f_n \in \Pi_{\mathbb{Q}}[a,b] \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} = c_{00}(\Pi_{\mathbb{Q}}[a,b])$. Notar que

$$D = \bigcup_{n=1}^\infty \{(f_1, \ldots, f_n, 0, \ldots, 0, \ldots) : f_i \in \Pi_{\mathbb{Q}}[a,b] \text{ para } i = 1, \ldots, n\}$$

y que el n-ésimo conjunto de esta unión tiene cardinal $|(\Pi_{\mathbb{Q}}[a,b])^{\{1,\ldots,n\}}| = \aleph_0^n = \aleph_0$, así que $|D| \leq \aleph_0$ por la Proposición 1.21. Además D es denso en $c_{00}(\mathcal{C}[a,b])$. En efecto, dados $(f_n)_{n=1}^\infty \in c_{00}(\mathcal{C}[a,b])$ y $\varepsilon > 0$, habrá algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_n = 0$ siempre que $n > n_0$. Para $n = 1, \ldots, n_0$, se tiene $f_n \in \mathcal{C}[a,b]$, y como $\Pi_{\mathbb{Q}}[a,b]$ es denso en $\mathcal{C}[a,b]$, existirá $g_n \in \Pi_{\mathbb{Q}}[a,b]$ con $\|g_n - f_n\|_\infty < \varepsilon$. Poniendo $g_n = 0$ para $n > n_0$, la sucesión $(g_n)_{n=1}^\infty \in D$ cumple que

$$\|(g_n)_{n=1}^\infty - (f_n)_{n=1}^\infty\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n - f_n\|_\infty = \sup_{1\leq n\leq n_0} \|g_n - f_n\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Con esto se tiene la densidad de D en $c_{00}(\mathcal{C}[a,b])$ y por tanto en $c_0(\mathcal{C}[a,b])$. Concluimos que $c_0(\mathcal{C}[a,b])$ es separable.

Capítulo 2

Introducción a la lineabilidad

En este breve capítulo damos las definiciones básicas de lineabilidad y algebrabilidad, propiedades que estudiaremos en espacios concretos en los Capítulos 3 y 4. Probamos también un criterio de lineabilidad que nos será de utilidad más adelante.

Definición 2.1. Sea X un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{K}$, $C \subseteq X$ y α un número cardinal. Se dice que C es:

(a) α***-lineable*** si X posee algún subespacio vectorial S de dimensión α tal que $S \setminus \{0\} \subseteq C$;

(b) ***densamente*** α***-lineable*** si C es α-lineable y el subespacio S puede tomarse denso en X.

Cuando no se precisa el cardinal α, se entiende que se exige que α sea infinito. Notar además que la condición $S \setminus \{0\} \subseteq C$ es equivalente a $S \subseteq C \cup \{0\}$.

La demostración del siguiente teorema, que proporciona una condición suficiente para que un conjunto α-lineable sea densamente α-lineable, está extraída de [3, Teor. 2.3]:

Teorema 2.2. *Sea X un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{K}$, $A, B \subseteq X$ y α un número cardinal. Supongamos que:*

(a) A es α-lineable;

(b) B contiene, salvo por el 0, algún subespacio vectorial denso;

(c) $A + B \subseteq A$;

(d) existe una base $\mathcal{B}$ de abiertos de X con $|\mathcal{B}| \leq \alpha$.

Entonces A contiene, salvo por el 0, algún subespacio vectorial denso. Más aún, si $A \cap B = \varnothing$, A es densamente α-lineable.

Demostración. Por (a) y (b), existen subespacios vectoriales S_A y S_B de X con $\dim S_A = \alpha$, $S_A \subseteq A \cup \{0\}$, $S_B \subseteq B \cup \{0\}$ y S_B denso en X. Sea $\{a_i\}_{\in I}$ una base vectorial de S_A y $\mathcal{B} = \{U_j\}_{j \in J}$. Según el Teorema de la Dimensión, $|I| = \alpha$, y por hipótesis $|J| \leq \alpha = |I|$, luego podemos tomar una aplicación sobreyectiva $\varphi \colon I \to J$. Recordando que un conjunto es denso si y solamente si corta a todos los abiertos no vacíos (o, equivalentemente, a todos los de una base), $S_B \cap U_j \neq \varnothing$ para todo $j \in J$. Sea $b_j \in S_B \cap U_j$ para cada $j \in J$.

Por ser X espacio vectorial topológico, $\{\text{entornos de } x\} = \{x+U : U \text{ es entorno de } 0\}$ para cada $x \in X$. Por tanto, dado $j \in J$, como U_j es entorno de b_j, $U_j = b_j + V_j$ para algún entorno V_j de 0; pero esto implica que $V_j = U_j - b_j$, con lo que $U_j - b_j$ es entorno de 0. Puesto que el producto por escalares $\mathbb{K} \times X \to X$ es continuo y para cada $i \in I$ es $(0, a_i) \mapsto 0$, para cada $i \in I$ existe $\varepsilon_{ij} > 0$ tal que $[-\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}]a_i \subseteq U_j - b_j$ y, en particular, $\varepsilon_{ij} a_i \in U_j - b_j$. Así,

$$\varepsilon_{ij} a_i + b_j \in U_j \qquad \text{para todos } i \in I,\ j \in J. \tag{2.1}$$

Llamemos $S = \mathbb{K}\langle \varepsilon_{i\varphi(i)} a_i + b_{\varphi(i)} : i \in I \rangle$. Para cada $j \in J$, al ser φ sobreyectiva, existe $i \in I$ con $\varphi(i) = j$, y entonces $\varepsilon_{ij} a_i + b_j = \varepsilon_{i\varphi(i)} a_i + b_{\varphi(i)} \in S \cap U_j$. Vemos así que S corta a todos los abiertos U_j de la base $\mathcal{B}$, lo que conlleva que S es denso en X. Además, cualquier $x \in S \setminus \{0\}$ es de la forma

$$x = \underbrace{\lambda_1 \varepsilon_{i_1 \varphi(i_1)} a_{i_1} + \cdots + \lambda_p \varepsilon_{i_p \varphi(i_p)} a_{i_p}}_{=:u} + \underbrace{\lambda_1 b_{\varphi(i_1)} + \cdots + \lambda_p b_{\varphi(i_p)}}_{=:v} \tag{2.2}$$

con $p \in \mathbb{N}$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, $i_1, \dots, i_p \in I$; y como $u \in S_A \setminus \{0\}$ (porque $\{a_i\}_{i \in I}$ es libre y algún escalar de la combinación lineal de u es no nulo) y $v \in S_B$, $x \in (S_A \setminus \{0\}) + S_B \subseteq A + (B \cup \{0\}) \subseteq A$. Por tanto, $S \setminus \{0\} \subseteq A$ y A contiene, salvo por el 0, un subespacio vectorial denso.

Para terminar, supongamos que $A \cap B = \varnothing$ y comprobemos que S tiene dimensión α. Sean $i_1, \dots, i_p \in I$ (distintos dos a dos) y $\lambda_1, \dots \lambda_p \in \mathbb{K}$ de tal manera que la combinación lineal (2.2) se anule. Si fuese $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0)$, entonces $u \neq 0$ y $v = -u \in S_A \setminus \{0\} \subseteq A$ y también $v \in S_B \setminus \{0\} \subseteq B$, luego v pertenece tanto a A como a B, lo que contradice nuestra suposición $A \cap B = \varnothing$. Consecuentemente, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$, distintos $i \in I$ dan lugar a distintos $\varepsilon_{i\varphi(i)} a_i + b_{\varphi(i)}$ y el conjunto $\{\varepsilon_{i\varphi(i)} a_i + b_{\varphi(i)} : i \in I\}$ tiene cardinal $|I| = \alpha$ y es linealmente independiente. Es decir, $\dim S = \alpha$, como queríamos probar. $\square$

Corolario 2.3. *Sea X un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{K}$ metrizable y separable, $A, B \subseteq X$ y α un cardinal infinito. Supongamos que:*

(a) A es α-lineable;

(b) B contiene, salvo por el 0, algún subespacio vectorial denso;

(c) $A + B \subseteq A$;

(d) $A \cap B = \varnothing$.

Entonces A es densamente α-lineable.

Demostración. Por la Proposición 1.34, X es 2-numerable, es decir, admite una base de abiertos $\mathcal{B}$ con $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0 \leq \alpha$. Así, se cumplen las hipótesis del teorema anterior y A es densamente α-lineable. $\square$

Definición 2.4. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra conmutativa sobre $\mathbb{K}$, $C \subseteq \mathcal{A}$ y α un número cardinal. Se dice que C es:

(a) ***α-algebrable*** si $\mathcal{A}$ posee alguna subálgebra $\mathcal{S}$ generada por un conjunto de cardinal α (es decir, α-generada) tal que $\mathcal{S} \setminus \{0\} \subseteq C$;

(b) ***fuertemente*** α***-algebrable*** si $\mathcal{A}$ posee alguna subálgebra $\mathcal{S}$ generada libremente por un conjunto de cardinal α tal que $\mathcal{S} \setminus \{0\} \subseteq C$.

Como antes, la condición $\mathcal{S} \setminus \{0\} \subseteq C$ se puede sustituir por $\mathcal{S} \subseteq C \cup \{0\}$.

Capítulo 3

Funciones anti-L'Hôpital

3.1. Regla de L'Hôpital

Este capítulo, basado en el artículo [2], está dedicado al estudio de la lineabilidad y la algebrabilidad de ciertos espacios de funciones a las cuales no se les puede aplicar la Regla de L'Hôpital. Comenzamos recordando dicho resultado, del que puede verse una demostración en [8, Teor. 5.13].

Teorema 3.1 (Regla de L'Hôpital)**.** *Sean I un intervalo, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto de acumulación de I y $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ funciones derivables en $I \setminus \{x_0\}$ con $g'(x) \neq 0$ en todo $x \in I \setminus \{x_0\}$. Supongamos que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

y que se cumple alguna de las condiciones siguientes:

(a) $f(x) \to 0$ *y* $g(x) \to 0$ *cuando* $x \to x_0$*;*

(b) $|g(x)| \to +\infty$ *cuando* $x \to x_0$*.*

Entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

El siguiente ejemplo ilustra que el límite de $f'(x)/g'(x)$ puede no existir aunque exista el de $f(x)/g(x)$. En tales casos esto último no puede probarse mediante la Regla de L'Hôpital.

Ejemplo. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Como el seno está acotado,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Sin embargo, el límite del cociente de derivadas es

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to 0} \left(2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right),$$

que no existe, puesto que $2x \operatorname{sen}(1/x) \to 0$ y $\cos(1/x)$ oscila cuando $x \to 0$. Por tanto, no se puede aplicar la Regla de L'Hôpital para calcular el límite de $f(x)/x$ cuando $x \to 0$.

Si se define $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x^2)$ para $x \neq 0$, se tiene la misma situación, sólo que en este caso el límite cuando $x \to 0$ de

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$$

no existe en $\mathbb{R}$ porque f' ni siquiera está acotada alrededor de 0 (basta considerar la sucesión $x_n = 1/\sqrt{2\pi n} \to 0$, que cumple $f'(x_n) = -2\sqrt{2\pi n} \to -\infty$). A lo largo del capítulo vamos a trabajar con funciones como esta segunda f, que llamamos anti-L'Hôpital y que pasamos a definir.

Definición 3.2 (funciones anti-L'Hôpital)**.** Sea $Z \subseteq \mathbb{R}$. Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice ***anti-L'Hôpital*** en Z si cumple las tres condiciones siguientes:

(a) f es derivable en todo $\mathbb{R}$;

(b) f es analítica en cada punto de $\mathbb{R} \setminus Z$;

(c) para cada $x_0 \in Z$,

$$\limsup_{x \to x_0^+} |f'(x)| = +\infty = \limsup_{x \to x_0^-} |f'(x)|.$$

El conjunto de las funciones anti-L'Hôpital en Z lo representamos por $\mathcal{ALH}_Z$. Además, escribimos $\mathcal{ALH}_Z^0 = \{f \in \mathcal{ALH}_Z : f(x) = 0 \text{ en todo } x \in Z\}$.

La segunda función del ejemplo anterior es anti-L'Hôpital en $Z = \{0\}$.

Nota. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, la función

$$\delta > 0 \longmapsto \sup_{x \in (x_0, x_0+\delta)} g(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

es claramente creciente en $(0, +\infty)$. En consecuencia, existe

$$\lim_{\delta \to 0^+} \left(\sup_{x \in (x_0, x_0+\delta)} g(x) \right) = \inf_{\delta > 0} \left(\sup_{x \in (x_0, x_0+\delta)} g(x) \right) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

y por definición

$$\limsup_{x \to x_0^+} g(x)$$

es el valor de este límite/ínfimo.

En particular, la condición

$$\limsup_{x \to x_0^+} |f'(x)|$$

de la definición precedente equivale a que

$$\sup_{x \in (x_0, x_0+\delta)} |f'(x)| = +\infty \qquad \text{para todo } \delta > 0,$$

es decir, a que f' no esté acotada en ningún intervalo $(x_0, x_0 + \delta)$ con $\delta > 0$. Con el límite superior por la izquierda la situación es análoga.

Nota. Dada $f \in \mathcal{ALH}_Z$, para cada $x_0 \in Z$ el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe (vale $f'(x_0)$), hecho que sin embargo no puede deducirse mediante la Regla de L'Hôpital, pues

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'} = \lim_{x \to x_0} f'(x)$$

no existe en $\mathbb{R}$ por la condición (c). Así, las funciones de $\mathcal{ALH}_Z$ (a continuación veremos exactamente para qué Z existen) muestran que para que se cumpla la conclusión de la Regla de L'Hôpital no hace falta que se cumpla la hipótesis de la existencia del límite del cociente de derivadas. $\mathcal{ALH}_Z$ es, pues, un conjunto de «contraejemplos» a la Regla de L'Hôpital.

3.2. Caracterización de la existencia de funciones anti-L'Hôpital

La siguiente proposición caracteriza para qué conjuntos Z existen funciones anti-L'Hôpital:

Proposición 3.3. *Sea $Z \subseteq \mathbb{R}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *Z es cerrado y tiene interior vacío;*

(b) *existe alguna función derivable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ analítica en cada punto de $\mathbb{R} \setminus Z$ y con f' discontinua en cada punto de Z;*

(c) *$\mathcal{ALH}_Z \neq \varnothing$;*

(d) *$\mathcal{ALH}_Z^0 \neq \varnothing$;*

(e) *existe alguna $f \in \mathcal{ALH}_Z$ cuyos ceros son exactamente los puntos de Z.*

Demostración. Evidentemente, (e) $\Longrightarrow$ (d) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (b). Para ver que (b) $\Longrightarrow$ (a), supongamos que f es como en (b). Si f fuera analítica en algún punto $x_0 \in \mathbb{R} \setminus Z$, se podría desarrollar en serie de potencias en algún intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$ con $r > 0$ y sería indefinidamente derivable en él, con lo que f' sería continua en x_0. Puesto que no es el caso, f no es analítica en ninguno de estos puntos y su conjunto de puntos de analiticidad es $\mathbb{R} \setminus Z$, que debe ser abierto por el Corolario 1.6. En consecuencia, Z es cerrado. Además, definiendo $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante

$$f_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right]$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, las f_n son continuas y $f_n \to f'$ puntualmente, y como $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo y, por tanto, espacio de Baire, el Teorema 1.37 afirma que el conjunto de puntos de continuidad de f' es denso en $\mathbb{R}$. Pero este conjunto es $\mathbb{R} \setminus Z$, pues f es analítica en $\mathbb{R} \setminus Z$ y por hipótesis f' no es continua en ningún punto de Z. Recordando que un conjunto es denso si y sólo si su complementario tiene interior vacío, concluimos que Z tiene interior vacío.

Falta por demostrar que (a) $\Longrightarrow$ (e). Si $Z = \varnothing$, se trata simplemente de encontrar una función analítica en $\mathbb{R}$ sin ceros, y a tal efecto sirven las constantes no nulas, analíticas en $\mathbb{R}$ trivialmente. Supongamos que $Z \neq \varnothing$. Al ser Z cerrado, $\mathbb{R} \setminus Z$ es abierto, y todo abierto de $\mathbb{R}$ se puede expresar como unión disjunta de una cantidad numerable de intervalos abiertos, luego existe algún N numerable (por fijar ideas, $N = \{1, 2, \ldots, m\}$ con $m \in \mathbb{N}$ o $N = \mathbb{N}$) tal que

$$\mathbb{R} \setminus Z = \bigsqcup_{n \in N} (a_n, b_n), \tag{3.1}$$

siendo $-\infty \leq a_n < b_n \leq +\infty$ para cada $n \in N$. Notemos que como mucho un a_n es $-\infty$ y como mucho un b_n es $+\infty$, ya que de lo contrario la unión no sería disjunta, y no puede ser $a_n = -\infty$ y $b_n = +\infty$ para el mismo $n \in N$, porque entonces $\mathbb{R} \setminus Z = \mathbb{R}$, imposible si $Z \neq \varnothing$.

Para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $c > 0$, definamos

$$\begin{aligned}
\psi_{a,b,c,d}(x) &= (x-a)^c (b-x)^c \left(d + \operatorname{sen} \frac{1}{(x-a)(b-x)}\right) \mathbf{1}_{(a,b)}(x), \\
\psi_{-\infty,b,c,d}(x) &= (b-x)^c \left(d + \operatorname{sen} \frac{1}{b-x}\right) \mathbf{1}_{(-\infty,b)}(x), \\
\psi_{a,+\infty,c,d}(x) &= (x-a)^c \left(d + \operatorname{sen} \frac{1}{x-a}\right) \mathbf{1}_{(a,+\infty)}(x),
\end{aligned}$$

donde $g(x)\mathbf{1}_I(x)$ significa $g(x)$ si $x \in I$ y 0 si $x \in \mathbb{R}\setminus I$. Estas funciones ψ son analíticas en los intervalos abiertos de sus indicadores $\mathbf{1}$. Por ejemplo, para $\psi_{a,b,c,d}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, la función de variable compleja

$$z \longmapsto (z-a)^c(b-z)^c\left(d + \operatorname{sen}\frac{1}{(z-a)(b-z)}\right) \tag{3.2}$$

es holomorfa en $\Omega \coloneqq \mathbb{C}\setminus((-\infty, a]\cup[b, +\infty))$, pues $(z-a)^c = e^{c\,\mathrm{Log}(z-a)}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus(-\infty, a]$, $(b-z)^c = e^{c\,\mathrm{Log}(b-z)}$ lo es en $\mathbb{C}\setminus[b, +\infty)$ y el último factor lo es en $\mathbb{C}\setminus\{a, b\}$ (recordar que el logaritmo principal complejo Log es holomorfo en $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$). Como Ω contiene a (a, b), $\psi_{a,b,c,d}$ es analítica en (a, b) gracias al Corolario 1.5. Los demás casos son similares pero más sencillos.

Elijamos $c \in (1, 2)$ y $d > 1$ cualesquiera, y sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f = \sum_{n\in N} \psi_{a_n,b_n,c,d}.$$

Teniendo en cuenta que $\psi_{a,b,c,d}(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}\setminus(a, b)$, sin excluir los casos $a = -\infty$ y $b = +\infty$, es claro que $f(x) = 0$ cuando $x \in Z$ y que $f(x) = \psi_{a_n,b_n,c,d}(x)$, siendo $n \in N$ el único índice tal que $x \in (a_n, b_n)$, cuando $x \in \mathbb{R}\setminus Z$.

- *f es analítica en $\mathbb{R}\setminus Z$.* Fijado $n \in N$, $f(x) = \psi_{a_n,b_n,c,d}(x)$ para cada $x \in (a_n, b_n)$. Dado que $\psi_{a_n,b_n,c,d}$ es analítica en (a_n, b_n), f también, y al ser n arbitrario, concluimos que f es analítica en $\mathbb{R}\setminus Z$.

- *f se anula exactamente en Z.* Ya hemos señalado que $f(x) = 0$ para todo $x \in Z$, y si $x \in \mathbb{R}\setminus Z$, existe un único $n \in N$ con $x \in (a_n, b_n)$ y se tiene que $f(x) = \psi_{a_n,b_n,c,d}(x) \neq 0$ (notar que los factores con el seno de las funciones ψ no se anulan nunca, porque $|\operatorname{sen}(\cdot)| \leq 1$ en todo $\mathbb{R}$ y $d > 1$). Así pues, los ceros de f son exactamente los puntos de Z.

- *f es derivable en $\mathbb{R}$.* En los puntos de $\mathbb{R}\setminus Z$ ya está probado, por el primer punto. Sea $x_0 \in Z$. Veremos que $f'_+(x_0) = 0$, y análogamente $f'_-(x_0) = 0$, con lo cual $f'(x_0) = 0$. Por (3.1), $a_n \in Z$ para todo $n \in N$, ya que en caso contrario a_n sería interior a algún intervalo de la unión distinto de (a_n, b_n), que intersecaría a éste, y la unión no sería disjunta. Análogamente $b_n \in Z$ para todo $n \in N$.

Supongamos que x_0 no es el extremo izquierdo de ninguno de los (a_n, b_n). Entonces $(x_0, x_0 + r) \cap Z \neq \varnothing$ para todo $r > 0$. En efecto, si hubiese algún $r > 0$ tal que $(x_0, x_0 + r) \cap Z = \varnothing$, se tendría que $(x_0, x_0 + r) \subseteq \mathbb{R} \setminus Z$, y al ser $(x_0, x_0 + r)$ conexo, estaría contenido en alguna componente conexa de $\mathbb{R} \setminus Z$. Pero dichas componentes conexas son los (a_n, b_n), puesto que cada (a_n, b_n) es conexo y cualquier conexo más grande contendría $a_n \in Z$ o $b_n \in Z$, por lo que se saldría de $\mathbb{R} \setminus Z$ (los conexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos). Por lo tanto, $(x_0, x_0 + r) \subseteq (a_n, b_n)$ para algún $n \in N$, y de aquí se sigue que $a_n \leq x_0 < x_0 + r \leq b_n$. No puede ser $a_n < x_0$, porque en tal caso $x_0 \in (a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus Z$, y así $x_0 = a_n$, en contradicción con nuestra suposición. Concluimos que $(x_0, x_0 + r) \cap Z \neq \varnothing$ para todo $r > 0$.

En definitiva, debemos considerar dos casos: $x_0 = a_n$ para algún $n \in N$ y $(x_0, x_0 + r) \cap Z \neq \varnothing$. Si $x_0 = a_n$ para algún $n \in N$, supuesto $b_n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'_+(x_0) &= \lim_{x \to a_n^+} \frac{f(x) - f(a_n)}{x - a_n} = \lim_{x \to a_n^+} \frac{\psi_{a_n, b_n, c, d}(x)}{x - a_n} \\ &= \lim_{x \to a_n^+} \left[(x - a_n)^{c-1} (b_n - x)^c \left(d + \operatorname{sen} \frac{1}{(x - a_n)(b_n - x)} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

pues $c - 1 > 0$, $(b_n - x)^c$ tiende a la constante $(b_n - a_n)^c$ y el tercer factor está acotado. Cuando $b_n = +\infty$ se obtiene la misma expresión pero sin $(b_n - x)^c$ ni $b_n - x$ en el denominador del seno, que también tiende a 0.

Ahora, si $(x_0, x_0 + r) \cap Z \neq \varnothing$ para todo $r > 0$, sea $\varepsilon > 0$ y fijemos $r = (\varepsilon/(d + 1))^{1/(2c-1)} > 0$. Tomando $y \in (x_0, x_0 + r) \cap Z \neq \varnothing$, para cada $x \in (x_0, y)$, o bien $x \in Z$, y entonces

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{0 - 0}{x - x_0} = 0;$$

o bien $x \in \mathbb{R} \setminus Z$, en cuyo caso existe un solo $n(x) \in N$ tal que $x \in (a_{n(x)}, b_{n(x)})$ y por fuerza

$$x_0 < a_{n(x)} < x < b_{n(x)} \leq y < x_0 + r \tag{3.3}$$

(si fuese $a_{n(x)} < x_0$, se tendría $x_0 \in (a_{n(x)}, b_{n(x)}) \subseteq \mathbb{R} \setminus Z$; y si fuese $y < b_{n(x)}$, se tendría $y \in (a_{n(x)}, b_{n(x)}) \subseteq \mathbb{R} \setminus Z$). En consecuencia, para cada $x \in (x_0, y) \cap (\mathbb{R} \setminus Z)$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| &= \left|\frac{\psi_{a_{n(x)},b_{n(x)},c,d}(x)}{x-x_0}\right| \\ &= \frac{x-a_{n(x)}}{x-x_0}(x-a_{n(x)})^{c-1}(b_{n(x)}-x)^c\left(d+\operatorname{sen}\frac{1}{(x-a_{n(x)})(b_{n(x)}-x)}\right) \\ &< (d+1)r^{2c-1} = \varepsilon,\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta (3.3), y por tanto

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| < \varepsilon \qquad \text{para todo } x \in (x_0, y),$$

lo que significa que este cociente tiende a 0 cuando $x \to x_0^+$, es decir, $f'_+(x_0) = 0$.

- *Para cada* $x_0 \in Z$,

$$\limsup_{x\to x_0^+} |f'(x)| = +\infty = \limsup_{x\to x_0^-} |f'(x)|.$$

Lo probamos solamente con el límite por la derecha, al ser el otro análogo. Igual que en el punto anterior, hay dos casos posibles: $x_0 = a_n$ para algún $n \in N$ y $(x_0, x_0+r)\cap Z \neq \varnothing$ para todo $r > 0$. En el primero, $f(x) = \psi_{a_n,b_n,c,d}(x)$ para todo $x \in (a_n, b_n)$, y supuesto que $b_n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f'(x) = c(-2x+a_n+b_n)(x-a_n)^{c-1}(b_n-x)^{c-1}\left(d+\operatorname{sen}\frac{1}{(x-a_n)(b_n-x)}\right)& \\ -(-2x+a_n+b_n)(x-a_n)^{c-2}(b_n-x)^{c-2}\cos\left(\frac{1}{(x-a_n)(b_n-x)}\right)& \qquad (3.4)\end{aligned}$$

en todo $x \in (a_n, b_n)$. La función

$$\varphi\colon x \in \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] \longmapsto (x-a_n)(b_n-x) = -x^2+(a_n+b_n)x-a_nb_n \in \mathbb{R}$$

crece de manera estricta y continua de 0 a $(b_n-a_n)^2/4$ en su intervalo de definición. Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/(2\pi k) < (b_n-a_n)^2/4$ para todo $k \geq k_0$. Poniendo $x_k = \varphi^{-1}(1/(2\pi k))$ para cada $k \geq k_0$, se obtiene una sucesión $(x_k)_{k=k_0}^{\infty}$ contenida en $[0, (a_n+b_n)/2]$ que satisface $x_k \to a_n$ cuando $k \to \infty$ y $\varphi(x_k) = 1/(2\pi k)$ para todo $k \geq k_0$, luego $\operatorname{sen}(1/\varphi(x_k)) = \operatorname{sen}(2\pi k) = 0$ y $\cos(1/\varphi(x_k)) = \cos(2\pi k) = 1$ para todo $k \geq k_0$. Por lo tanto, recordando que $1 < c < 2$,

$$f'(x_k) = cd(-2x_k + a_n + b_n)(x_k - a_n)^{c-1}(b_n - x_k)^{c-1} - \frac{-2x_k + a_n + b_n}{(x_k - a_n)^{2-c}(b_n - x_k)^{2-c}}$$
$$\to -\infty,$$

y en particular, dado que $x_k \to a_n = x_0$ cuando $k \to \infty$, f' no está acotada en ningún intervalo $(x_0, x_0 + r)$ con $r > 0$, lo que equivale a la condición deseada sobre el límite superior según la primera nota de este capítulo. Cuando $b_n = +\infty$, en lugar de (3.4) se obtiene la expresión más simple

$$f'(x) = c(x - a_n)^{c-1}\left(d + \operatorname{sen}\frac{1}{x - a_n}\right) - (x - a_n)^{c-2}\cos\frac{1}{x - a_n}$$

para todo $x \in (a_n, +\infty)$, y escribiendo $x_k = a_n + 1/(2\pi k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$, queda definida una sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ contenida en $(a_n, +\infty)$ que satisface $x_k \to a_n$ cuando $k \to \infty$ y $x_k - a_n = 1/(2\pi k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, con lo que $\operatorname{sen}(1/(x_k - a_n)) = \operatorname{sen}(2\pi k) = 0$ y $\cos(1/(x_k - a_n)) = \cos(2\pi k) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Así,

$$\lim_{k\to\infty} f'(x_k) = \lim_{k\to\infty}\left[cd(x_k - a_n)^{c-1} - \frac{1}{(x_k - a_n)^{2-c}}\right] = -\infty,$$

ya que $1 < c < 2$, y esto permite razonar del mismo modo que cuando $b_n \in \mathbb{R}$.

Para finalizar, consideremos el caso $(x_0, x_0 + r) \cap Z \neq \varnothing$ para todo $r > 0$. Fijado $k \in \mathbb{N}$, se puede tomar $x \in (x_0, x_0 + 1/k) \cap Z$, y también $y, z \in Z$ tales que $x_0 < z < y < x$. Es imposible que $(z, x) \subseteq Z$, porque entonces y sería punto interior de Z, con lo que existe $w \in (z, x) \cap (\mathbb{R} \setminus Z)$, y habrá un único $n(k) \in N$ tal que $w \in (a_{n(k)}, b_{n(k)})$. Si $w \in (z, y)$, $(a_{n(k)}, b_{n(k)}) \subseteq (z, y)$, ya que de lo contrario $(a_{n(k)}, b_{n(k)})$ contendría z o y y el correspondiente número no pertenecería a Z. Análogamente, si $w \in (y, x)$, $(a_{n(k)}, b_{n(k)}) \subseteq (y, x)$. Por lo tanto, siempre se tiene $(a_{n(k)}, b_{n(k)}) \subseteq (x_0, x_0 + 1/k)$. Por los cálculos hechos en el caso precedente (válidos para cualquier intervalo (a_n, b_n), aunque ahora x_0 no es ningún extremo izquierdo a_n), se puede encontrar para cada $k \in \mathbb{N}$ una sucesión en $(a_{n(k)}, b_{n(k)})$ que converja a $a_{n(k)}$ y cuya sucesión imagen por f'

converja a $-\infty$. Así, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in (a_{n(k)}, b_{n(k)}) \subseteq (x_0, x_0 + 1/k)$ tal que $f'(x_k) < -k$. Se deduce que $x_k \to x_0^+$ y que $f'(x_k) \to -\infty$, luego f' no está acotada en ningún $(x_0, x_0 + r)$ con $r > 0$ y esto completa la demostración. $\square$

3.3. Algebrabilidad y espaciabilidad de las funciones anti-L'Hôpital

Estamos en condiciones de estudiar la algebrabilidad y la lineabilidad de las funciones anti-L'Hôpital. Recordar que en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ consideramos las estructuras introducidas en la Sección 1.7.

Teorema 3.4. *Sea $Z \neq \varnothing$ un cerrado de $\mathbb{R}$ con interior vacío. Entonces:*

(a) $\mathcal{ALH}_Z^0$ es fuertemente $\mathfrak{c}$-algebrable en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$;

(b) $\mathcal{ALH}_Z$ es densamente $\mathfrak{c}$-lineable en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Demostración. Para (a), razonando como en la demostración precedente, existe N numerable tal que

$$\mathbb{R} \setminus Z = \bigsqcup_{n \in N} (a_n, b_n),$$

donde $-\infty \leq a_n < b_n \leq +\infty$ para todo $n \in N$ (recordar que como mucho un a_n es $-\infty$ y como mucho un b_n es $+\infty$). Para $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $c > 1$, definamos

$$\begin{aligned}
\psi_{a,b,c}(x) &= (x-a)^c (b-x)^c \operatorname{sen}\left(\exp \frac{1}{(x-a)(b-x)}\right) \mathbf{1}_{(a,b)}(x), \\
\psi_{-\infty,b,c}(x) &= (b-x)^c \operatorname{sen}\left(\exp \frac{1}{b-x}\right) \mathbf{1}_{(-\infty,b)}(x), \\
\psi_{a,+\infty,c}(x) &= (x-a)^c \operatorname{sen}\left(\exp \frac{1}{x-a}\right) \mathbf{1}_{(a,+\infty)}(x).
\end{aligned}$$

Estas funciones ψ son analíticas en los intervalos abiertos de sus indicadores $\mathbf{1}$. Por ejemplo, para $\psi_{a,b,c,d}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, la función de variable compleja

$$z \longmapsto (z-a)^c (b-z)^c \operatorname{sen}\left(\exp \frac{1}{(z-a)(b-z)}\right)$$

es analítica en $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, a) \cup (b, +\infty))$ (ver (3.2) de la demostración anterior), luego $\psi_{a,b,c}$, restricción suya a (a, b), es analítica en (a, b) por el Corolario 1.5. Los demás casos son similares pero más sencillos.

Para cada $c > 1$, definamos $g_c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante

$$g_c = \sum_{n \in N} \psi_{a_n, b_n, c}.$$

Teniendo en cuenta que $\psi_{a,b,c}(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus (a, b)$, sin excluir los casos $a = -\infty$ y $b = +\infty$, es claro que $g_c(x) = 0$ cuando $x \in Z$ y que $g_c(x) = \psi_{a_n, b_n, c}(x)$, siendo $n \in N$ el único índice tal que $x \in (a_n, b_n)$, cuando $x \in \mathbb{R} \setminus Z$. En particular, g_c es analítica en $\mathbb{R} \setminus Z$. Veamos que g_c es derivable, con derivada nula, en cada punto de Z (con lo que g_c resulta derivable en todo $\mathbb{R}$). Sea $x_0 \in Z$. Igual que en la proposición anterior, hay dos posibilidades: $x_0 = a_n$ para algún $n \in N$ o $(x_0, x_0 + r) \cap Z \neq \varnothing$ para todo $r > 0$. En el primer caso, supuesto $b_n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (g_c)'_+(x_0) &= \lim_{x \to a_n^+} \frac{g_c(x) - g_c(a_n)}{x - a_n} = \lim_{x \to a_n^+} \frac{\psi_{a_n, b_n, c}(x)}{x - a_n} \\ &= \lim_{x \to a_n^+} \left[(x - a_n)^{c-1} (b_n - x)^c \operatorname{sen} \left(\exp \frac{1}{(x - a_n)(b_n - x)} \right) \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

pues $(x - a_n)^{c-1} \to 0$, al ser $c > 1$, $(b_n - x)^c \to (b_n - a_n)^c \in \mathbb{R}$ y el tercer factor está acotado. Si $b_n = +\infty$, se obtiene el producto de $(x - a_n)^{c-1}$ por un seno, expresión que también tiende a 0.

Tratemos el caso $(x_0, x_0 + r) \cap Z \neq \varnothing$ para todo $r > 0$. Sea $\varepsilon > 0$ y fijemos $r = (\varepsilon/(d + 1))^{1/(2c-1)} > 0$. Tomando $y \in (x_0, x_0 + r) \cap Z \neq \varnothing$, para cada $x \in (x_0, y)$, o bien $x \in Z$, y entonces

$$\frac{g_c(x) - g_c(x_0)}{x - x_0} = \frac{0 - 0}{x - x_0} = 0;$$

o bien $x \in \mathbb{R} \setminus Z$, en cuyo caso existe un solo $n(x) \in N$ tal que $x \in (a_{n(x)}, b_{n(x)})$ y por fuerza

$$x_0 < a_{n(x)} < x < b_{n(x)} \leq y < x_0 + r \tag{3.5}$$

(si fuese $a_{n(x)} < x_0$, se tendría $x_0 \in (a_{n(x)}, b_{n(x)}) \subseteq \mathbb{R} \setminus Z$; y si fuese $y < b_{n(x)}$, se tendría $y \in (a_{n(x)}, b_{n(x)}) \subseteq \mathbb{R} \setminus Z$). En consecuencia, para cada $x \in (x_0, y) \cap (\mathbb{R} \setminus Z)$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{g_c(x) - g_c(x_0)}{x - x_0}\right| &= \left|\frac{\psi_{a_{n(x)}, b_{n(x)}, c}(x)}{x - x_0}\right| \\ &= \frac{x - a_{n(x)}}{x - x_0}(x - a_{n(x)})^{c-1}(b_{n(x)} - x)^c \left|\operatorname{sen}\left(\exp\frac{1}{(x - a_{n(x)})(b_{n(x)} - x)}\right)\right| \\ &< (d+1)r^{2c-1} = \varepsilon,\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta (3.5), y por tanto

$$\left|\frac{g_c(x) - g_c(x_0)}{x - x_0}\right| < \varepsilon \qquad \text{para todo } x \in (x_0, y),$$

lo que significa que este cociente tiende a 0 cuando $x \to x_0^+$, es decir, $(g_c)'_+(x_0) = 0$. Análogamente se prueba que $(g_c)'_-(x_0) = 0$, y así $g_c'(x_0) = 0$.

Por el Corolario 1.30, existe $C \subsetneq (1, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$ linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$ con $|C| = \mathfrak{c}$. En particular, dados $p \in \mathbb{N}$ y p números distintos $c_1, \ldots, c_p \in C$, se tiene $\sum_{j=1}^{p} k_j c_j \neq \sum_{j=1}^{p} m_j c_j$ en cuanto $\mathbf{k} \neq \mathbf{m}$, siendo $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$, $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_p) \in \mathbb{N}_0^p$. Llamemos $\mathcal{A}$ al álgebra generada por $S = \{g_c : c \in C\}$ y veamos que satisface las condiciones deseadas:

- *Las funciones de $\mathcal{A}$ son derivables en $\mathbb{R}$, analíticas en $\mathbb{R} \setminus Z$ y se anulan en Z.* Hemos probado antes que S está contenido en

$$\mathcal{A}_1 = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R} \setminus Z) : f(x) = 0 \text{ en todo } x \in Z\} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}),$$

que es una subálgebra de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, al ser estable para las tres operaciones: suma, producto por escalares y producto interno (recordar la Proposición 1.2). Como $\mathcal{A}$ es la menor subálgebra de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ que contiene a S, esto conlleva que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_1$. Es decir, las funciones de $\mathcal{A}$ son derivables en $\mathbb{R}$, analíticas en $\mathbb{R} \setminus Z$ y se anulan en Z (estas propiedades también pueden deducirse de la forma de las funciones de $\mathcal{A}$, que son expresiones polinómicas sin término independiente en los elementos de S, según la Proposición 1.32).

■ *$\mathcal{A}$ está libremente $\mathfrak{c}$-generada por S.* Es claro que $|S| = |C| = \mathfrak{c}$, pues las g_c son distintas entre sí. Mostremos que $\mathcal{A}$ está libremente generada por S. Para ello, fijemos $p \in \mathbb{N}$, un polinomio $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_p]$ con $P(0, \ldots, 0) = 0$ y p puntos distintos $c_1, \ldots, c_p \in C$, que sin pérdida de generalidad podemos suponer ordenados de manera que $c_1 < c_2 < \cdots < c_p$. Partiendo de la hipótesis de que $F := P(g_{c_1}, \ldots, g_{c_p}) = 0$, debemos demostrar que $P = 0$, y lo haremos por reducción al absurdo. Si fuese $P \neq 0$, habría un subconjunto finito $K \subseteq \mathbb{N}_0^p \setminus \{(0, \ldots, 0\}$ y un escalar $\lambda_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ para cada $\mathbf{k} \in K$ tales que

$$P = \sum_{\mathbf{k} \in K} \lambda_{\mathbf{k}} X_1^{k_1} \cdots X_p^{k_p},$$

donde $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_p)$, y así

$$F(x) = \sum_{\mathbf{k} \in K} \lambda_{\mathbf{k}} g_{c_1}(x)^{k_1} \cdots g_{c_p}(x)^{k_p} = 0 \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

En particular, esto sucede en cada componente conexa (a_n, b_n) de $\mathbb{R} \setminus Z$. Si existe $n \in N$ con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, ya que $g_{c_j}(x) = \psi_{a_n, b_n, c_j}(x)$ para cada $x \in (a_n, b_n)$, la igualdad $F(x) = 0$ para todo $x \in (a_n, b_n)$ se traduce en que

$$\sum_{\mathbf{k} \in K} \lambda_{\mathbf{k}} ((x - a_n)(b_n - x))^{|\mathbf{kc}|} \operatorname{sen}^{|\mathbf{k}|} \left(\exp \frac{1}{(x - a_n)(b_n - x)} \right) = 0 \tag{3.7}$$

para todo $x \in (a_n, b_n)$, denotando $|\mathbf{u}| = u_1 + \cdots + u_p$ y $\mathbf{uv} = (u_1 v_1, \ldots, u_p v_p)$ para $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_p), \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_p) \in [0, +\infty)^p$. Dado que los exponentes $|\mathbf{kc}| = \sum_{j=1}^p k_j c_j > 0$ son distintos dos a dos, según hemos señalado ya, hay un solo $\mathbf{k}_0 \in K$ tal que

$$|\mathbf{k}_0 \mathbf{c}| = \min_{\mathbf{k} \in K} |\mathbf{kc}| =: s. \tag{3.8}$$

Como dijimos en la demostración de la proposición anterior, $\varphi(x) = (x - a_n)(b_n - x)$ crece forma estricta y continua de 0 a $(b_n - a_n)^2/4$ en $(a_n, (a_n + b_n)/2]$, luego $\exp(1/\varphi)$ decrece de forma estricta y continua de $+\infty$ a $4/(b_n - a_n)^2$ en ese mismo intervalo. Sea $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\pi/2 + 2\pi m > 4/(b_n - a_n)^2$ para todo $m \geq m_0$. Poniendo $x_m = (\exp(1/\varphi))^{-1}(\pi/2 + 2\pi m)$ para cada $m \geq m_0$, queda determinada una sucesión $(x_m)_{m=m_0}^{\infty}$ en $(a_n, (a_n + b_n)/2]$ tal que $x_m \to a_n^+$ y $\operatorname{sen}(1/\varphi(x_m)) = \operatorname{sen}(\pi/2 + 2\pi m) = 1$

para todo $m \geq m_0$, con lo que (3.7) implica que

$$\sum_{\mathbf{k}\in K} \lambda_{\mathbf{k}}((x_m - a_n)(b_n - x_m))^{|\mathbf{kc}|} = 0$$

para todo $m \geq m_0$. Separando $\mathbf{k}_0$ de las demás p-tuplas de K,

$$\lambda_{\mathbf{k}_0}((x_m - a_n)(b_n - x_m))^s + \sum_{\substack{\mathbf{k}\in K\\ \mathbf{k}\neq\mathbf{k}_0}} \lambda_{\mathbf{k}}((x_m - a_n)(b_n - x_m))^{|\mathbf{kc}|} = 0,$$

y extrayendo el primer sumando como factor común,

$$\lambda_{\mathbf{k}_0}((x_m - a_n)(b_n - x_m))^s \left[1 + \sum_{\substack{\mathbf{k}\in K\\ \mathbf{k}\neq\mathbf{k}_0}} \frac{\lambda_{\mathbf{k}}}{\lambda_{\mathbf{k}_0}}((x_m - a_n)(b_n - x_m))^{|\mathbf{kc}|-s}\right] = 0.$$

Dado que el factor de fuera del corchete no se anula nunca (pues $x_m \in (a_n, (a_n + b_n)/2] \subseteq (a_n, b_n)$ para todo $m \geq m_0$), resulta que

$$1 + \sum_{\substack{\mathbf{k}\in K\\ \mathbf{k}\neq\mathbf{k}_0}} \frac{\lambda_{\mathbf{k}}}{\lambda_{\mathbf{k}_0}}((x_m - a_n)(b_n - x_m))^{|\mathbf{kc}|-s} = 0 \qquad \text{para todo } m \geq m_0,$$

y haciendo $m \to \infty$, como $|\mathbf{kc}| > s$ siempre que $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0$, se obtiene que $1 + 0 = 0$, lo cual es absurdo.

Si no existiera $n \in N$ con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, entonces $N = \{1, 2\}$ y $\mathbb{R} \setminus Z = (-\infty, b_1) \sqcup (a_2, +\infty)$ con $b_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $b_1 < a_2$. En este caso, (3.6) para $x \in (a_2, +\infty)$ se traduce en que

$$F(x) = \sum_{\mathbf{k}\in K} \lambda_{\mathbf{k}}(x - a_2)^{|\mathbf{kc}|} \operatorname{sen}^{|\mathbf{k}|}\left(\exp\frac{1}{x - a_2}\right) = 0 \qquad \text{para todo } x \in (a_2, +\infty),$$

y escribiendo

$$x_m = a_2 + \frac{1}{\log(\pi/2 + 2\pi m)}$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, se obtiene una sucesión $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ en $(a_2, +\infty)$ con $x_m \to a_2^+$ y $\operatorname{sen}(\exp(1/(x_m - a_2))) = \operatorname{sen}(\pi/2 + 2\pi m) = 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$, por lo que

$$F(x_m) = \sum_{\mathbf{k}\in K} \lambda_{\mathbf{k}}(x_m - a_2)^{|\mathbf{kc}|} = 0 \qquad \text{para todo } m \in \mathbb{N},$$

y extrayendo el factor $\lambda_{\mathbf{k}_0}(x_m - a_2)^s$, donde $\mathbf{k}_0$ y s son como en (3.8),

$$1 + \sum_{\substack{\mathbf{k}\in K \\ \mathbf{k}\neq\mathbf{k}_0}} \frac{\lambda_{\mathbf{k}}}{\lambda_{\mathbf{k}_0}} (x_m - a_2)^{|\mathbf{kc}|-s} = 0 \qquad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Haciendo $m \to \infty$, $1 + 0 = 0$, porque $|\mathbf{kc}| > s$ siempre que $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0$, y llegamos otra vez a una contradicción. En consecuencia, $P = 0$ y $\mathcal{A}$ está libremente generada por S.

- *Cualquiera que sea* $F \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$,

$$\limsup_{x\to x_0^+} |F'(x)| = +\infty \lim_{x\to x_0^-} |F'(x)| \qquad \text{para todo } x_0 \in Z.$$

Lo hacemos con el límite por la derecha, pues con el límite por la izquierda es análogo. Fijemos $F \in \mathcal{A}$ y $x_0 \in Z$. Por la Proposición 1.32, existen algún $p \in \mathbb{N}$, algún $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_p] \setminus \{0\}$ con $P(0, \dots, 0) = 0$ y algunos $c_1, \dots, c_p \in C$ (que suponemos ordenados $c_1 < c_2 < \cdots < c_p$) de forma que $F = P(g_{c_1}, \dots, g_{c_p})$. Tenemos que considerar, como hemos hecho varias veces, dos casos: $x_0 = a_n$ para algún $n \in N$, o bien $(x_0, x_0 + r) \cap Z \neq \varnothing$ para todo $r > 0$.

Supongamos que $x_0 = a_n$ para algún $n \in N$. Si $b_n \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \sum_{\mathbf{k}\in K} \lambda_{\mathbf{k}}((x - a_n)(b_n - x))^{|\mathbf{kc}|} \operatorname{sen}^{|\mathbf{k}|}\left(\exp \frac{1}{(x - a_n)(b_n - x)}\right)$$

para todo $x \in (a_n, b_n)$, y al derivar,

$$\begin{aligned} F'(x) = (a_n+b_n-2x) \sum_{\mathbf{k}\in K} \lambda_{\mathbf{k}} \Bigg[& |\mathbf{kc}|((x-a_n)(b_n-x))^{|\mathbf{kc}|-1} \operatorname{sen}^{|\mathbf{k}|}\left(\exp \frac{1}{(x - a_n)(b_n - x)}\right) \\ & - |\mathbf{k}|((x - a_n)(b_n - x))^{|\mathbf{kc}|-2} \exp\left(\frac{1}{(x - a_n)(b_n - x)}\right) \\ & \operatorname{sen}^{|\mathbf{k}|-1}\left(\exp \frac{1}{(x - a_n)(b_n - x)}\right) \cos\left(\exp \frac{1}{(x - a_n)(b_n - x)}\right) \Bigg] \end{aligned}$$

para todo $x \in (a_n, b_n)$. Con la notación del punto anterior de esta demostración, a partir de algún m tiene sentido poner $x_m = (\exp(1/\varphi))^{-1}(3\pi/4+2\pi m)$, y consecuentemente $x_m \to a_n^+$ y $\operatorname{sen}(\exp(1/\varphi(x_m)) = \operatorname{sen}(3\pi/4 + 2\pi m) = 1/\sqrt{2}$ y $\cos(\exp(1/\varphi(x_m)) =$

$\cos(3\pi/4 + 2\pi m) = -1/\sqrt{2}$ a partir de cierto m. Así,

$$F'(x_m) = (a_n + b_n - 2x_m) \sum_{\mathbf{k}\in K} \frac{\lambda_{\mathbf{k}}}{2^{|\mathbf{k}|/2}} \left[|\mathbf{kc}|((x_m - a_n)(b_n - x_m))^{|\mathbf{kc}|-1}\right]$$
$$+ (a_n + b_n - 2x_m) \sum_{\mathbf{k}\in K} \frac{\lambda_{\mathbf{k}}|\mathbf{k}|}{2^{|\mathbf{k}|/2}}((x_m - a_n)(b_n - x_m))^{|\mathbf{kc}|-2} \exp\left(\frac{1}{(x_m - a_n)(b_n - x_m)}\right).$$

Con la notación de (3.8), al extraer como factor común $((x_m-a_n)(b_m-x_n))^{s-2}\exp(1/((x_m-a_n)(b_n - x_m)))$ en la segunda línea,

$$F'(x_m) = (a_n + b_n - 2x_m) \sum_{\mathbf{k}\in K} \frac{\lambda_{\mathbf{k}}}{2^{|\mathbf{k}|/2}} \left[|\mathbf{kc}|((x_m - a_n)(b_n - x_m))^{|\mathbf{kc}|-1}\right]$$
$$+ (a_n + b_n - 2x_m)((x_m - a_n)(b_m - x_n))^{s-2} \exp\left(\frac{1}{(x_m - a_n)(b_n - x_m)}\right)$$
$$\cdot \left[\frac{\lambda_{\mathbf{k}_0}|\mathbf{k}_0|}{2^{|\mathbf{k}_0|/2}} + \sum_{\substack{\mathbf{k}\in K\\ \mathbf{k}\neq\mathbf{k}_0}} \frac{\lambda_{\mathbf{k}}|\mathbf{k}|}{2^{|\mathbf{k}|/2}}((x_m - a_n)(b_n - x_m))^{|\mathbf{kc}|-s}\right].$$

Puesto que $t^\theta e^{1/t} \to +\infty$ cuando $t \to 0^+$ para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$, la sucesión de la línea central tiende a $+\infty$ cuando $m \to \infty$. Recordando que $|\mathbf{kc}| > s$ si $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0$, el corchete tiende a $(\lambda_{\mathbf{k}_0}|\mathbf{k}_0|)/2^{|\mathbf{k}_0|/2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Y la primera línea tiende a 0 porque $|\mathbf{kc}| = \sum_{j=1}^{p} k_j c_j > 1$, al ser algún $k_j \in \mathbb{N}$ y todo $c_j > 1$. Se sigue que $F'(x_m)$ diverge a $+\infty$ o a $-\infty$ (en función del signo de $\lambda_{\mathbf{k}}$), con lo que F' no está acotada en ningún $(x_0, x_0 + r) = (a_n, a_n + r)$ con $r > 0$.

Si en cambio $b_n = +\infty$,

$$F(x) = \sum_{\mathbf{k}\in K} \lambda_{\mathbf{k}}(x - a_n)^{|\mathbf{kc}|} \operatorname{sen}^{|\mathbf{k}|}\left(\exp\frac{1}{x - a_n}\right)$$

para todo $x \in (a_n, +\infty)$, y al derivar,

$$F'(x) = \sum_{\mathbf{k}\in K} \lambda_{\mathbf{k}} \left[|\mathbf{kc}|(x - a_n)^{|\mathbf{kc}|-1} \operatorname{sen}^{|\mathbf{k}|}\left(\exp\frac{1}{x - a_n}\right)\right.$$
$$\left. - |\mathbf{k}|(x - a_n)^{|\mathbf{kc}|-2} \exp\left(\frac{1}{x - a_n}\right) \operatorname{sen}^{|\mathbf{k}|-1}\left(\exp\frac{1}{x - a_n}\right) \cos\left(\exp\frac{1}{x - a_n}\right)\right]$$

para todo $x \in (a_n, +\infty)$. Para cada m a partir de cierto valor, existe $x_m \in (a_n, +\infty)$ con $\exp(1/(x_m - a_n)) = 3\pi/4 + 2\pi m$, de modo que los senos de la expresión anterior valen $1/\sqrt{2}$ y los cosenos $-1/\sqrt{2}$ en cada x_m. Así,

$$F'(x_m) = \sum_{\mathbf{k}\in K} \frac{\lambda_{\mathbf{k}}}{2^{|\mathbf{k}|/2}} |\mathbf{kc}|(x_m - a_n)^{|\mathbf{kc}|-1} + \sum_{\mathbf{k}\in K} \frac{\lambda_{\mathbf{k}}|\mathbf{k}|}{2^{|\mathbf{k}|/2}} (x_m - a_n)^{|\mathbf{kc}|-2} \exp\left(\frac{1}{x_m - a_n}\right).$$

El primer sumatorio tiende a 0 cuando $m \to \infty$ porque $|\mathbf{kc}| > 1$, y extrayendo en el segundo como factor común $(x_m - a_n)^{s-2} \exp(1/(x_m - a_n))$, de nuevo con la notación (3.8), este sumatorio es igual a

$$(x_m - a_n)^{s-2} \exp\left(\frac{1}{x_m - a_n}\right) \left[\frac{\lambda_{\mathbf{k}_0}|\mathbf{k}_0|}{2^{|\mathbf{k}_0|/2}} + \sum_{\substack{\mathbf{k}\in K\\ \mathbf{k}\neq\mathbf{k}_0}} \frac{\lambda_{\mathbf{k}}|\mathbf{k}|}{2^{|\mathbf{k}|/2}} (x_m - a_n)^{|\mathbf{kc}|-s}\right],$$

que tiende a $+\infty$ o a $-\infty$, según el signo de $\lambda_{\mathbf{k}_0}$, pues $t^\theta e^{1/t} \to +\infty$ cuando $t \to 0^+$ para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$ y $|\mathbf{kc}| > s$ siempre que $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0$. Se sigue que F' no está acotada en ningún $(x_0, x_0 + r) = (a_n, a_n + r)$ con $r > 0$.

Supongamos que $(x_0, x_0 + r) \cap Z \neq \varnothing$ para todo $r > 0$. Igual que en el último párrafo de la demostración de la proposición anterior, para cada $m \in \mathbb{N}$ hay un $n(m) \in N$ con $(a_{n(m)}, b_{n(m)}) \subseteq (x_0, x_0 + 1/m)$. Por los cálculos que hemos hecho más arriba en este punto (válidos para cualquier (a_n, b_n), aunque ahora x_0 no es ningún a_n), para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $x_m \in (a_{n(m)}, b_{n(m)})$ con $|F'(x_m)| > m$. Se deduce que $x_m \to a_m^+$ y que $|F'(x_m)| \to +\infty$ cuando $m \to \infty$, por lo que F' no está acotada en ningún $(x_0, x_0 + r)$ con $r > 0$ y esto prueba la condición sobre el límite superior por la derecha.

- $\mathcal{A} \setminus \{0\} \subseteq \mathcal{ALH}_Z$. Es consecuencia del primer y el tercer punto de este apartado (a).

El apartado (b) resulta de aplicar el Corolario 2.3 con $X = \mathcal{C}(\mathbb{R})$, que es un espacio vectorial topológico metrizable y separable (Sección 1.7), $A = \mathcal{ALH}_Z$ y $B = \Pi(\mathbb{R})$. Observar que $\mathcal{ALH}_Z^0 \subseteq \mathcal{ALH}_Z = A$. Como $\mathcal{ALH}_Z^0$ es fuertemente $\mathfrak{c}$-algebrable, en particular es $\mathfrak{c}$-lineable (toda álgebra libremente $\mathfrak{c}$-generada es espacio vectorial de dimensión al menos $\mathfrak{c}$, porque el sistema libre de generadores es asimismo linealmente independiente, y contendrá por tanto un subespacio de dimensión $\mathfrak{c}$), de donde se sigue la $\mathfrak{c}$-lineabilidad del conjunto más grande A. Además, B es subespacio vectorial denso en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, por lo que trivialmente contiene un subespacio denso salvo por el 0. La derivada de una función de A no es continua en los puntos de $Z \neq \varnothing$, mientras que las derivadas de los polinomios son continuas en $\mathbb{R}$, así que $A \cap B = \varnothing$. Finalmente, dados $f \in A$ y $P \in B$, $f + P$ es derivable en $\mathbb{R}$ y analítica en $\mathbb{R} \setminus Z$. Sea $x_0 \in Z$ y $r > 0$. Entonces, para cada $x \in (x_0, x_0 + r)$,

$$|(f+P)'(x)| = |f'(x) + P'(x)| \geq |f'(x)| - |P'(x)| \geq |f'(x)| - \max_{y \in [x_0, x_0+r]} |P'(y)|,$$

y como f' no está acotada en $(x_0, x_0 + r)$, $|(f + P)'(x)|$ se puede hacer tan grande como se quiera en este intervalo, luego $f + P \in A$, $A + B \subseteq A$ y queda probado que se verifican todas las condiciones exigidas por el Corolaro 2.3. □

Observación. El teorema anterior no se puede mejorar en cuanto a cardinal/dimensión, dado que, al ser $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ metrizable y separable, $|\mathcal{C}(\mathbb{R})| \leq \mathfrak{c}$ por la Proposición 1.36. En particular, el teorema prueba que el cardinal de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ y su dimensión como espacio vectorial real son $\mathfrak{c}$.

Capítulo 4

Sucesiones de funciones anti-M de Weierstrass

4.1. Criterio M de Weierstrass

En este último capítulo estudiamos la lineabilidad y la algebrabilidad de ciertos espacios de sucesiones de funciones a las que no se les puede aplicar el Criterio M de Weierstrass. Nuestra referencia fundamental es el artículo [4]. Comenzamos recordando la noción de convergencia uniforme y el Criterio de Cauchy, que la caracteriza.

Definición 4.1 (convergencia uniforme)**.** Sea A un conjunto cualquiera, y sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en A y con valores en $\mathbb{R}$. Dada una función $f\colon A \to \mathbb{R}$, se dice que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ***converge uniformemente*** a f si para cada $\varepsilon > 0$ hay algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, siempre que $n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in A$.

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a f si lo hace la sucesión de sumas parciales asociada a ella $(\sum_{k=1}^{n} f_k)_{n=1}^{\infty}$.

Proposición 4.2 (Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de sucesiones)**.** *Sea A un conjunto y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en A y con valores en $\mathbb{R}$. Entonces $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente convergente en A si y sólo si para cada*

$\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $n, m \geq n_0$ se tenga $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ en todo $x \in A$ (en palabras, si y sólo si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es **uniformemente de Cauchy***).*

Demostración. Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en A. Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de convergencia uniforme, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ es $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ en todo $x \in A$. Por tanto, si $n, m \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

en todo $x \in A$, lo que significa que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente de Cauchy.

Para cada $x \in A$, $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, y como $\mathbb{R}$ es completo, $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ tiene límite $f(x) \in \mathbb{R}$, con lo que queda definida una función $f\colon A \to \mathbb{R}$. Veamos que la convergencia $f_n \to f$ es uniforme. Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis hay algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ para todos $n, m \geq n_0$, $x \in A$, y al hacer $m \to \infty$ resulta que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ para todos $n \geq n_0$, $x \in A$. □

Corolario 4.3 (Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de series)**.** *Sea A un conjunto y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en A y con valores en $\mathbb{R}$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en A si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $m \geq k \geq n_0$ se tenga*

$$\left| \sum_{n=k}^{m} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

en todo $x \in A$.

Demostración. Aplicar la proposición anterior a la sucesión de funciones $(\sum_{k=1}^{n} f_k)_{n=1}^{\infty}$. □

De aquí se sigue inmediatamente el Criterio M de Weierstrass (véase, por ejemplo, [8, Teor. 7.9]).

Teorema 4.4 (Criterio M de Weierstrass)**.** *Sea A un conjunto cualquiera, y sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones con dominio A y valores en $\mathbb{R}$. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene una constante $M_n > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M_n$ en todo $x \in A$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absoluta y uniformemente a alguna función en A.*

Antes de seguir, damos un ejemplo de sucesión a la que no se le puede aplicar el Criterio M extraído de [5, Ejemplo 1.10].

Ejemplo. La sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{sen}^2(2^{n+1}\pi x)\mathbf{1}_{\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)}(x)$$

da lugar a una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ que converge uniformemente, pero ello no se puede deducir mediante el Criterio M de Weierstrass.

Para verlo, notemos primero que f_1 es nula fuera de $(1/2^2, 1/2)$, f_2 es nula fuera de $(1/2^3, 1/2^2)$, f_3 es nula fuera de $(1/2^4, 1/2^3)$, etc. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ es $f_n(x) = 0$ en todo $x \in [1/2, 1] \cup \{1/2^s\}_{s \geq 2}$, y así

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 0 \qquad \text{en todo } x \in [1/2, 1] \cup \{1/2^s\}_{s \geq 2}.$$

Si $x \notin [1/2, 1] \cup \{1/2^s\}_{s \geq 2}$, entonces hay un solo $n(x) \in \mathbb{N}$ tal que $x \in (1/2^{n(x)+1}, 1/2^{n(x)})$ y $f_n(x) = 0$ excepto cuando $n = n(x)$. Por lo tanto, en este caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_{n(x)}(x) = \frac{1}{n(x)} \operatorname{sen}^2(2^{n(x)+1}\pi x),$$

y concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge (absolutamente, por ser de términos no negativos) en $[0, 1]$.

Dados $m \geq k$, la suma

$$\sum_{n=k}^{m} f_n(x)$$

vale 0 o $f_{n(x)}(x)$, y en este último caso $k \leq n(x) \leq m$, luego

$$f_{n(x)}(x) = \frac{1}{n(x)} \operatorname{sen}^2(2^{n(x)+1}\pi x) \leq \frac{1}{n(x)} \leq \frac{1}{k}.$$

Tenemos así que

$$0 \leq \sum_{n=k}^{m} f_n(x) \leq \frac{1}{k} \qquad \text{para todos } m \geq k,\ x \in A.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon$. Entonces, cualesquiera que sean $m \geq k \geq n_0$,

$$0 \leq \sum_{n=k}^{m} f_n(x) \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \qquad \text{para todo } x \in [0,1],$$

y según el corolario anterior esto basta para afirmar que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente.

Por otra parte, cada f_n alcanza su máximo en $x = 3/2^{n+2} \in (1/2^{n+1}, 1/2^n)$, cuando $2^n \pi x = 3\pi/2$, el cuadrado del seno es 1 y $f_n(x) = 1/n$. Así, $\|f_n\|_\infty = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n = +\infty$, por lo que no es posible encontrar ninguna sucesión de mayorantes que dé lugar a una serie convergente para aplicar el Criterio M de Weierstrass.

A lo largo del capítulo trabajaremos con sucesiones de este tipo, que llamamos anti-M y que pasamos a definir.

Definición 4.5. Una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty} \in (\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}}$ se dice ***anti-M de Weierstrass*** (o, abreviadamente, ***anti-M***) si la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

converge absoluta y uniformemente en $[a,b]$ pero

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = +\infty.$$

El conjunto de las funciones anti-M en $[a,b]$ se representa por $\mathcal{AMW}[a,b]$ o, si no hay lugar a confusión respecto al intervalo, $\mathcal{AMW}$.

Nótese que la sucesión del ejemplo anterior pertenece a $\mathcal{AMW}[0,1]$.

Nota. En las condiciones de la definición anterior, al ser cada $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua,

$$\|f_n\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f_n(x)|.$$

Por tanto, cualquier sucesión $(M_n)_{n=1}^\infty$ de cotas superiores de las f_n (es decir, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $|f_n(x)| \leq M_n$ en todo $x \in [a,b]$) cumplirá $\|f_n\|_\infty \leq M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde se sigue que

$$\sum_{n=1}^\infty M_n = +\infty$$

y no es posible aplicar el Criterio M de Weiestrass para probar que $(f_n)_{n=1}^\infty$ es absoluta y uniformemente convergente. Así pues, el espacio $\mathcal{AMW}[a,b]$ está formado por las sucesiones de funciones continuas en $[a,b]$ cuya serie asociada converge absoluta y uniformemente a pesar de que no se les puede aplicar el Criterio M de Weierstrass, por no existir ninguna sucesión de cotas que dé lugar a una serie convergente.

4.2. Lineabilidad de las sucesiones de funciones anti-M

En esta sección abordamos la lineabilidad de los espacios que acabamos de introducir. Empezamos probando que, como consecuencia del Criterio de Cauchy, $\mathcal{AMW}$ está contenido en el espacio $c_0(\mathcal{C}[a,b])$ definido en la Sección 1.7:

Proposición 4.6. $\mathcal{AMW} \subseteq c_0(\mathcal{C}[a,b]) \subseteq \ell_\infty(\mathcal{C}[a,b]) \subseteq (\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}}$.

Demostración. Sea $(f_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{AMW}$. Entonces $\sum_{n=1}^\infty f_n$ converge uniformemente en $[a,b]$. Para cada $\varepsilon > 0$, por el Criterio de Cauchy hay algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq k \geq n_0$, entonces

$$\left|\sum_{n=k}^m f_n(x)\right| < \varepsilon \qquad \text{en todo } x \in [a,b];$$

en particular, haciendo $m = k \geq n_0$, $|f_n(x)| < \varepsilon$ para todos $n \geq n_0, x \in [a,b]$. Consecuentemente, $\|f_n\|_\infty < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$ y $\|f_n\|_\infty \to 0$ cuando $n \to \infty$, o lo que es lo mismo, $(f_n)_{n=1}^\infty \in c_0(\mathcal{C}[a,b])$. Las demás contenciones son obvias. $\square$

Los definición y los resultados siguientes van encaminados a construir una familia de ejemplos de funciones anti-M, que luego usaremos para probar la lineabilidad.

Definición 4.7. Denotamos por $\mathcal{F}$ el conjunto de las sucesiones $(u_n)_{n=1}^{\infty} \in (\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}}$ que cumplen las dos condiciones siguientes:

(a) $\operatorname{sop}(u_n) \cap \operatorname{sop}(u_m) = \varnothing$ siempre que $n \neq m$;

(b) existen $L, M > 0$ tales que $L \leq \|u_n\|_\infty \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Aquí, dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $\operatorname{sop}(f)$ denota el ***soporte*** de f, es decir, $\operatorname{sop}(f) = \{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\}$.

Lema 4.8. *Sea $(u_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$ y $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares en $\mathbb{R}$. Entonces:*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ *converge absolutamente en $[a,b]$;*

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ *converge uniformemente en $[a,b]$ si y sólo si $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$;*

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n u_n\|_\infty < +\infty$ *si y sólo si $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$.*

Demostración.

(a) Dado $x \in [a,b]$, o bien x no pertenece a ningún $\operatorname{sop}(u_n)$, en cuyo caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n u_n(x)| = 0;$$

o bien hay un solo $n(x) \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \operatorname{sop}(u_{n(x)})$, por ser los soportes disjuntos, y entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n u_n(x)| = |a_{n(x)} u_{n(x)}(x)|.$$

Esto prueba la convergencia absoluta.

(b) Supongamos que la serie converge uniformemente en $[a,b]$. Como $(u_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$, existe $L > 0$ tal que $L \leq \|u_n\|_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Criterio de Cauchy, para cada $\varepsilon > 0$ hay algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $m \geq k \geq n_0$ se tiene

$$\left|\sum_{n=k}^{m} a_n u_n(x)\right| < L\varepsilon \qquad \text{en todo } x \in [a,b];$$

en particular, haciendo $m = k \geq n_0$, resulta que

$$|a_n u_n(x)| < L\varepsilon \qquad \text{para todos } n \geq n_0,\ x \in A.$$

Dado que cada u_n es continua, existe $x_n \in [a,b]$ tal que $|u_n(x_n)| = \|u_n\|_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y así, si $n \geq n_0$,

$$|a_n| = \frac{|a_n u_n(x_n)|}{|u_n(x_n)|} = \frac{|a_n u_n(x_n)|}{\|u_n\|_\infty} < \frac{L\varepsilon}{L} = \varepsilon,$$

con lo que $(a_n)_{n=1}^\infty \in c_0$.

Recíprocamente, supongamos que $(a_n)_{n=1}^\infty \in c_0$. Como $(u_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}$, existe $M > 0$ tal que $\|u_n\|_\infty \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, ya que $(a_n)_{n=1}^\infty \in c_0$, hay algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \varepsilon/M$ para todo $n \geq n_0$. En consecuencia, si $m \geq k \geq n_0$, para cada $x \in [a,b]$, o bien la suma

$$\left|\sum_{n=k}^{m} a_n u_n(x)\right|$$

vale 0, o bien vale $|a_{n(x)} u_{n(x)}(x)|$, siendo $k \leq n(x) \leq m$ el único índice con $x \in \operatorname{sop}(u_{n(x)})$, y como $|a_{n(x)} u_{n(x)}(x)| \leq |a_{n(x)}|M < (\varepsilon/M)M = \varepsilon$, en ambos casos es menor que ε. En virtud del Criterio de Cauchy, concluimos que la serie converge uniformemente.

(c) Sean $L, M > 0$ tales que $L \leq \|u_n\|_\infty \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $L|a_n| \leq \|a_n u_n\|_\infty \leq M|a_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y el Criterio de Comparación asegura que $\sum_{n=1}^\infty \|a_n u_n\|_\infty < +\infty$ si y sólo si $\sum_{n=1}^\infty |a_n| < +\infty$, es decir, si y sólo si $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1$. □

Corolario 4.9. *Cualesquiera que sean $(u_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}$ y $(a_n)_{n=1}^\infty \in c_0 \setminus \ell_1$, la serie de funciones $\sum_{n=1}^\infty a_n u_n$ converge absoluta y uniformemente en $[a,b]$ pero $\sum_{n=1}^\infty \|a_n u_n\|_\infty = +\infty$, o lo que es lo mismo, $(a_n u_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{AMW}$.*

Ejemplo. Sea $f \in \mathcal{C}[a,b] \setminus \{0\}$ y $\Lambda = (t_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales tal que

$$a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots < b, \qquad \lim_{n\to\infty} t_n = b.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos en $[a,b]$ la función

$$u_n^{\Lambda,f}(x) = \begin{cases} f(a)\dfrac{x - t_{3n-2}}{t_{3n-1} - t_{3n-2}} & \text{si } x \in [t_{3n-2}, t_{3n-1}], \\[2ex] f\left(a + \dfrac{b-a}{t_{3n} - t_{3n-1}}(x - t_{3n-1})\right) & \text{si } x \in [t_{3n-1}, t_{3n}], \\[2ex] f(b)\dfrac{t_{3n+1} - x}{t_{3n+1} - t_{3n}} & \text{si } x \in [t_{3n}, t_{3n+1}], \\[2ex] 0 & \text{si } x \notin (t_{3n-2}, t_{3n+1}). \end{cases}$$

Observemos que, aunque t_{3n-2}, t_{3n-1}, t_{3n} y t_{3n+1} pertenecen a dos de los cuatro trozos en los que se da la definición de $u_n^{\Lambda,f}$, se obtiene el mismo valor para ambos, por lo que $u_n^{\Lambda,f}$ está bien definida y, más aún, $u_n^{\Lambda,f} \in \mathcal{C}[a,b]$. Además, es claro que $\operatorname{sop}(u_n^{\Lambda,f}) \subseteq (t_{3n-2}, t_{3n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y como estos intervalos abiertos son disjuntos dos a dos, $\operatorname{sop}(u_n^{\Lambda,f}) \cap \operatorname{sop}(u_m^{\Lambda,f}) = \varnothing$ si $n \neq m$. Por otra parte, en el intervalo $[t_{3n-2}, t_{3n-1}]$ la gráfica de $u_n^{\Lambda,f}$ es el segmento que une $(t_{3n-2}, 0)$ con $(t_{3n-1}, f(a))$; en $[t_{3n-1}, t_{3n}]$ se tiene $u_n^{\Lambda,f}(x) = f(\tau_n(x))$, siendo $\tau_n \colon [t_{3n-1}, t_{3n}] \to [a,b]$ una transformación afín biyectiva, así que $u_n^{\Lambda,f}$ toma los mismos valores que f; y en $[t_{3n}, t_{3n+1}]$ la gráfica de $u_n^{\Lambda,f}$ es el segmento que une $(t_{3n}, f(b))$ con $(t_{3n+1}, 0)$. Todo esto implica que $\|u_n^{\Lambda,f}\|_\infty = \|f\|_\infty$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. En particular, al ser $\|f\|_\infty > 0$, $u_n^{\Lambda,f} \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dadas $f, g \in \mathcal{C}[a,b] \setminus \{0\}$ con $f \neq g$, existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) \neq g(x)$, y por lo tanto $u_n^{\Lambda,f}(\tau_n^{-1}(x)) = f(x) \neq g(x) = u_n^{\Lambda,g}(\tau_n^{-1}(x))$, de donde se sigue que $u_n^{\Lambda,f} \neq u_n^{\Lambda,g}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, la aplicación $\mathcal{J}_\Lambda \colon \mathcal{C}[a,b] \setminus \{0\} \to \mathcal{F} \subseteq (\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}}$ dada por $\mathcal{J}_\Lambda(f) = (u_n^{\Lambda,f})_{n=1}^{\infty}$ es inyectiva. Por consiguiente, su extensión $\mathcal{J}_\Lambda \colon \mathcal{C}[a,b] \to \mathcal{F} \sqcup \{0\} \subseteq (\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}}$ con $\mathcal{J}_\Lambda(0) = 0$ también es inyectiva, y es fácil comprobar que es lineal. Puesto que la imagen de un subespacio vectorial de dimensión α por una aplicación lineal e inyectiva es otro subespacio de dimensión α, si S es un subespacio de $\mathcal{C}[a,b]$ de dimensión α, entonces $\mathcal{J}_\Lambda(S)$ es un subespacio de $(\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}}$ de dimensión α contenido en $\mathcal{F} \sqcup \{0\}$.

Finalmente, recordar de la Sección 1.7 que en el espacio vectorial

$$\ell_\infty(\mathcal{C}[a,b]) = \left\{ (f_n)_{n=1}^\infty \in (\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < +\infty \right\}$$

tenemos definida la norma

$$\|(f_n)_{n=1}^\infty\|_{\ell_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty.$$

Así, $\mathcal{F} \subseteq \ell_\infty(\mathcal{C}[a,b])$ y para cada $f \in \mathcal{C}[a,b] \setminus \{0\}$,

$$\|\mathcal{J}_\Lambda(f)\|_{\ell_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n^{\Lambda,f}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Hemos probado, pues, lo siguiente:

Proposición 4.10. *Sea $\Lambda = (t_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de números reales con $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n < \cdots < b$ y $t_n \to b$ cuando $n \to \infty$. Entonces la aplicación $\mathcal{J}_\Lambda \colon \mathcal{C}[a,b] \to \ell_\infty(\mathcal{C}[a,b])$ definida por*

$$\mathcal{J}_\Lambda(f) = \begin{cases} (u_n^{\Lambda,f})_{n=1}^\infty & si\ f \neq 0, \\ 0 & si\ f = 0 \end{cases}$$

es una isometría lineal cuya imagen está contenida en $\mathcal{F} \sqcup \{0\}$.

Teorema 4.11. *Sea M un subespacio vectorial tal que $M \setminus \{0\} \subseteq c_0 \setminus \ell_1$. Dada una sucesión $(u_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}$, el conjunto*

$$S = \{(a_n u_n)_{n=1}^\infty : (a_n)_{n=1}^\infty \in M\}$$

es un subespacio vectorial con $S \setminus \{0\} \subseteq \mathcal{AMW}$. Además, si $\{(a_n^i)_{n=1}^\infty\}_{i\in I}$ es una base de M, entonces $\{(a_n^i u_n)_{n=1}^\infty\}_{i\in I}$ es una base de S, por lo que ambos tienen la misma dimensión.

Demostración. Consideremos la aplicación $\Phi\colon c_0 \to (\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}}$ dada por $\Phi(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n u_n)_{n=1}^{\infty}$. Es claro que Φ es lineal. Si $\Phi(a_n)_{n=1}^{\infty} = 0$, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$, $a_n u_n(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$. Pero $u_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (porque $(u_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$), luego para cada $n \in \mathbb{N}$ hay algún $x \in [a,b]$ tal que $u_n(x) \neq 0$, y así $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto prueba que Φ es inyectiva. Por consiguiente, $S = \Phi(M)$ es subespacio vectorial y se cumple lo referente a bases y dimensiones. La inclusión $S \setminus \{0\} \subseteq \mathcal{AMW}$ es consecuencia del Corolario 4.9. $\square$

Corolario 4.12. *El conjunto $\mathcal{AMW}$ es $\mathfrak{c}$-lineable en $(\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}}$.*

Demostración. Se obtiene aplicando el teorema anterior a

$$M = \mathbb{R}\left\langle \left(\frac{1}{n^c}\right)_{n=1}^{\infty} : 0 < c < 1 \right\rangle.$$

Los elementos no nulos de M son de la forma

$$\left(\frac{\lambda_1}{n^{c_1}} + \frac{\lambda_2}{n^{c_2}} + \cdots + \frac{\lambda_k}{n^{c_k}}\right)_{n=1}^{\infty}$$

con $k \in \mathbb{N}$, $0 < c_j < 1$ distintos y $\lambda_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ para $j = 1, \ldots, k$. Evidentemente, estas sucesiones convergen a 0. Por otra parte, suponiendo que $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$ (lo que no conlleva pérdida de generalidad),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\lambda_1}{n^{c_1}} + \frac{\lambda_2}{n^{c_2}} + \cdots + \frac{\lambda_k}{n^{c_k}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{c_1}} \left|\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{n^{c_2 - c_1}} + \cdots + \frac{\lambda_k}{n^{c_k - c_1}}\right|,$$

y como la sucesión del valor absoluto tiende a $|\lambda_1| > 0$, estará acotada inferiormente por algún $\varepsilon > 0$ de algún $n_0 \in \mathbb{N}$ en adelante. Así,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\lambda_1}{n^{c_1}} + \frac{\lambda_2}{n^{c_2}} + \cdots + \frac{\lambda_k}{n^{c_k}}\right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{c_1}} \left|\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{n^{c_2 - c_1}} + \cdots + \frac{\lambda_k}{n^{c_k - c_1}}\right| \\
&\geq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{c_1}} \left|\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{n^{c_2 - c_1}} + \cdots + \frac{\lambda_k}{n^{c_k - c_1}}\right| \\
&\geq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{n^{c_1}} = +\infty,
\end{aligned}$$

por lo que ningún elemento no nulo de M pertenece a ℓ_1 y $M \setminus \{0\} \subseteq c_0 \setminus \ell_1$, como exige el teorema.

Veamos que $\{(1/n^c)_{n=1}^\infty : 0 < c < 1\}$ es libre y, por tanto, base de M, lo cual implicará que la dimensión de M es $|(0,1)| = \mathfrak{c}$. Sean $k \in \mathbb{N}$, $0 < c_j < 1$ distintos y $\lambda_j \in \mathbb{R}$ para $j = 1, \ldots, k$ tales que

$$\lambda_1 \left(\frac{1}{n^{c_1}}\right)_{n=1}^\infty + \lambda_2 \left(\frac{1}{n^{c_2}}\right)_{n=1}^\infty + \cdots + \lambda_k \left(\frac{1}{n^{c_k}}\right)_{n=1}^\infty = 0,$$

es decir,

$$\frac{\lambda_1}{n^{c_1}} + \frac{\lambda_2}{n^{c_2}} + \cdots + \frac{\lambda_k}{n^{c_k}} = 0 \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Suponiendo de nuevo, sin pérdida de generalidad, que $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$, al multiplicar esta igualdad por n^{c_1} resulta que

$$\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{n^{c_2 - c_1}} + \cdots + \frac{\lambda_k}{n^{c_k - c_1}} = 0 \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

y haciendo $n \to \infty$, $\lambda_1 = 0$. Reiterando, $\lambda_j = 0$ para $j = 1, \ldots, k$ y se tiene la independencia lineal. □

Teorema 4.13. *El conjunto $\mathcal{AMW}$ es densamente $\mathfrak{c}$-lineable en $c_0(\mathcal{C}[a,b])$.*

Demostración. Como $c_0(\mathcal{C}[a,b])$ es normado, es espacio vectorial topológico metrizable, y también es separable. Ya hemos visto que $\mathcal{AMW}$ es $\mathfrak{c}$-lineable. Por otro lado, el subespacio vectorial

$$c_{00}(\mathcal{C}[a,b]) = \{(f_n)_{n=1}^\infty \in (\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}} : \text{existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } f_n = 0 \text{ para todo } n \geq n_0\}$$

es denso en $c_0(\mathcal{C}[a,b])$ (Sección 1.7) y, por lo tanto, trivialmente contiene un subespacio denso en $c_0(\mathcal{C}[a,b])$ salvo por el 0. Si $(f_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{AMW}$ y $(g_n)_{n=1}^\infty \in c_{00}(\mathcal{C}[a,b])$, entonces $f_n + g_n = f_n$ a partir de algún n, de manera que $(f_n + g_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{AMW}$; es decir, $\mathcal{AMW} + c_{00}(\mathcal{C}[a,b]) \subseteq \mathcal{AMW}$. Finalmente, notemos que $c_{00}(\mathcal{C}[a,b]) \cap \mathcal{AMW} = \varnothing$, porque para toda sucesión $(g_n)_{n=1}^\infty \in c_{00}(\mathcal{C}[a,b])$ es $g_n = 0$ a partir de algún n y, en consecuencia, $\sum_{n=1}^\infty \|g_n\|_\infty$ es una suma finita, lo que implica que $(g_n)_{n=1}^\infty \notin \mathcal{AMW}$. Estamos en condiciones de aplicar el Corolario 2.3 para deducir que $\mathcal{AMW}$ es densamente $\mathfrak{c}$-lineable en $c_0(\mathcal{C}[a,b])$. □

Observación. Los dos resultados que acabamos de probar no se pueden mejorar en cuanto a la dimensión, ya que tanto $(\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}}$ como $c_0(\mathcal{C}[a,b])$ son metrizables y separables (Sección 1.7), por lo que su cardinal es a lo sumo $\mathfrak{c}$ (Proposición 1.36). Observar que, de hecho, los teoremas implican que estos dos espacios tienen cardinal y dimensión iguales a $\mathfrak{c}$.

4.3. Algebrabilidad de las sucesiones de funciones anti-M

En esta última sección tratamos la algebrabilidad de las sucesiones de funciones anti-M. Primero probamos dos lemas técnicos que necesitaremos en el teorema principal:

Lema 4.14. *Sea $\{g_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{C}[a,b]$ un conjunto de funciones que genera un álgebra libre en $\mathcal{C}[a,b]$. Dada una familia $\{q_i\}_{i\in I}$ de funciones polinómicas de grado exactamente 1, el conjunto $\{q_i \circ g_i\}_{i\in I}$ también genera un álgebra libre en $\mathcal{C}[a,b]$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}[a,b]$ el álgebra generada por $\{q_i \circ g_i\}_{i\in I}$. Para cada $i \in I$, existen $A_i, B_i \in \mathbb{R}$ con $A_i \neq 0$ tales que $q_i(x) = A_i x + B_i$. Sean $p \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_p]$ con $P(0,\dots,0) = 0$ e $i_1,\dots,i_p \in I$ (distintos dos a dos) tales que $F \coloneqq P(q_{i_1} \circ g_{i_1},\dots,q_{i_p} \circ g_{i_p}) = 0$. Veamos que debe ser $P = 0$. En adelante escribimos $i_j = j$ para $j = 1,\dots,p$ a fin de aligerar la notación.

Si fuese $P \neq 0$, habría un conjunto finito $K \subseteq \mathbb{N}_0^p \setminus \{(0,\dots,0)\}$ y un escalar $\lambda_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ para cada $\mathbf{k} \in J$ de forma que

$$P = \sum_{\mathbf{k}\in K} \lambda_{\mathbf{k}} X_1^{k_1} \cdots X_p^{k_p}.$$

Así,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{\mathbf{k}\in K} \lambda_{\mathbf{k}} (q_1(g_1(x)))^{k_1} \cdots (q_p(g_p(x)))^{k_p} \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in K} \lambda_{\mathbf{k}} (A_1 g_1(x) + B_1)^{k_1} \cdots (A_p g_p(x) + B_p)^{k_p} \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in K} \lambda_{\mathbf{k}} \sum_{j_1=1}^{k_1} \binom{k_1}{j_1} B_1^{j_1} (A_1 g_1(x))^{k_1-j_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{k_p} \binom{k_p}{j_p} B_p^{j_p} (A_p g_p(x))^{k_p-j_p} \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in K} \sum_{j_1=0}^{k_1} \cdots \sum_{j_p=0}^{k_p} \lambda_{\mathbf{k}} \binom{k_1}{j_1} B_1^{j_1} (A_1 g_1(x))^{k_1-j_1} \cdots \binom{k_p}{j_p} B_p^{j_p} (A_p g_p(x))^{k_p-j_p} \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in K} \sum_{j_1=0}^{k_1} \cdots \sum_{j_p=0}^{k_p} \left(\lambda_{\mathbf{k}} \prod_{l=1}^{p} \binom{k_l}{j_l} B_l^{j_l} A_l^{k_l-j_l} \right) g_1(x)^{k_1-j_1} \cdots g_p(x)^{k_p-j_p} = 0
\end{aligned}$$

para todo $x \in [a,b]$. Es decir,

$$\sum_{\mathbf{k}\in K} \sum_{j_1=0}^{k_1} \cdots \sum_{j_p=0}^{k_p} \left(\lambda_{\mathbf{k}} \prod_{l=1}^{p} \binom{k_l}{j_l} B_l^{j_l} A_l^{k_l-j_l} \right) g_1^{k_1-j_1} \cdots g_p^{k_p-j_p} = 0,$$

y esto es una expresión polinómica en $g_1, \ldots, g_p$ sin término independiente. Como $\{g_i\}_{i\in I}$ es un sistema libre de generadores,

$$\lambda_{\mathbf{k}} \prod_{l=1}^{p} \binom{k_l}{j_l} B_l^{j_l} A_l^{k_l-j_l} = 0$$

cualesquiera que sean $\mathbf{k} \in K$ y $j_l = 0, \ldots, k_l$ para $l = 1, \ldots, p$. En particular, tomando $j_l = 0$ para $l = 1, \ldots, p$,

$$\lambda_{\mathbf{k}} \prod_{l=1}^{p} A_l^{k_l} = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{k} \in K,$$

y dado que $A_l \neq 0$ para $l = 1, \ldots, p$, concluimos que $\lambda_{\mathbf{k}} = 0$ para todo $\mathbf{k} \in K$ y $P = 0$. □

Lema 4.15. *Sea* $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0 \setminus \bigcup_{r\geq 1} \ell_r$. *Dado* $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ *con* $P(0) = 0$, *se tiene* $(P(a_n))_{n=1}^{\infty} \in c_0 \setminus \ell_1$.

Demostración. El polinomio P será de la forma $P = \lambda_s X^s + \lambda_{s+1} X^{s+1} + \cdots + \lambda_t X^t$ con $1 \leq s \leq t$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$ para todo j y $\lambda_s \neq 0$. Entonces $P(a_n) = \lambda_s a_n^s + \lambda_{s+1} a_n^{s+1} + \cdots + \lambda_t a_n^t \to 0$ cuando $n \to \infty$, por lo que $(P(a_n))_{n=1}^\infty \in c_0$. Además, como $(a_n)_{n=1}^\infty \notin \ell_1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0$ para todo $n \geq n_0$, luego tiene sentido el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|P(a_n)|}{|a_n^s|} = \lim_{n\to\infty} \left|\lambda_s + \lambda_{s+1} a_n + \cdots + \lambda_t a_n^{t-s}\right| = |\lambda_s| > 0.$$

Dado que $(a_n)_{n=1}^\infty \notin \ell_s$, la serie $\sum_{n=1}^\infty |a_n^s| = \sum_{n=1}^\infty |a_n|^s$ diverge, y el Criterio de Comparación por Paso al Límite asegura que $\sum_{n=1}^\infty |P(a_n)|$ diverge también, es decir, $(P(a_n))_{n=1}^\infty \notin \ell_1$. $\square$

Teorema 4.16. *Sea $(a_n)_{n=1}^\infty \in c_0 \setminus \bigcup_{r\geq 1} \ell_r$, y supongamos que $G = \{g_i\}_{i\in I}$ es un sistema libre que genera un álgebra $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}[a,b]$. Dada una sucesión $\Lambda = (t_n)_{n=0}^\infty$ tal que $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n < \cdots < b$ y $t_n \to b$, la familia*

$$S = \{(a_n u_n^i)_{n=1}^\infty : (u_n^i)_{n=1}^\infty = \mathcal{J}_\Lambda(\delta_i g_i + 1),\, i \in I\},$$

donde $\delta_i = 1/g_i(a)$ si $g_i(a) \neq 0$ y $\delta_i = 1$ si $g_i(a) = 0$, tiene el mismo cardinal que I y es un sistema libre que genera un álgebra contenida en $\mathcal{AMW} \cup \{0\}$.

Demostración. Debemos probar tres cosas:

■ *$\mathcal{A}$ está libremente generada por S.* Fijemos $p \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_p]$ tal que $P(0, \ldots, 0) = 0$ e índices $i_1, \ldots, i_p \in I$ distintos entre sí. A fin de aligerar la notación, podemos suponer que $i_j = j$ para $j = 1, \ldots, p$. Partiendo de la hipótesis de que $(F_n)_{n=1}^\infty \coloneqq P((a_n u_n^1)_{n=1}^\infty, \ldots, (a_n u_n^p)_{n=1}^\infty) = 0$, tenemos que ver que $P = 0$. Igual que en la demostración anterior, si fuese $P \neq 0$, habría un conjunto finito $K \subseteq \mathbb{N}_0^p \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ y un escalar $\lambda_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ para cada $\mathbf{k} \in K$ de forma que

$$P = \sum_{\mathbf{k}\in K} \lambda_{\mathbf{k}} X_1^{k_1} \cdots X_p^{k_p},$$

con lo que

$$\begin{aligned}(F_n)_{n=1}^{\infty} &= \sum_{\mathbf{k}\in K} \lambda_{\mathbf{k}}((a_n u_n^1)_{n=1}^{\infty})^{k_1} \cdots ((a_n u_n^p)_{n=1}^{\infty})^{k_p} \\ &= \left(\sum_{\mathbf{k}\in K} \lambda_{\mathbf{k}} a_n^{|\mathbf{k}|} (u_n^1)^{k_1} \cdots (u_n^p)^{k_p} \right)_{n=1}^{\infty} = 0\end{aligned}$$

y, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(x) = \sum_{\mathbf{k}\in K} \lambda_{\mathbf{k}} a_n^{|\mathbf{k}|} u_n^1(x)^{k_1} \cdots u_n^p(x)^{k_p} = 0 \qquad \text{para todo } x \in [a,b], \tag{4.1}$$

donde $|\mathbf{k}| = k_1 + \cdots + k_p$. Dado que $(u_n^i)_{n=1}^{\infty} = \mathcal{J}_\Lambda(\delta_i g_i + 1)$ para todo $i \in I$, hay una aplicación biyectiva afín $\tau_n \colon [t_{3n-1}, t_{3n}] \to [a,b]$ tal que $u_n^i(x) = (\delta_i g_i + 1)(\tau_n(x))$ en todo $x \in [t_{3n-1}, t_{3n}]$. Teniendo esto en cuenta, la igualdad (4.1) para $x \in [t_{3n-1}, t_{3n}]$ se puede reescribir como

$$F_n(x) = \sum_{\mathbf{k}\in K} \lambda_{\mathbf{k}} a_n^{|\mathbf{k}|} ((\delta_1 g_1 + 1)(\tau_n(x)))^{k_1} \cdots ((\delta_p g_p + 1)(\tau_n(x)))^{k_p} = 0$$

para todo $x \in [t_{3n-1}, t_{3n}]$, y al ser τ_n biyectiva,

$$\sum_{\mathbf{k}\in K} \lambda_{\mathbf{k}} a_n^{|\mathbf{k}|} ((\delta_1 g_1 + 1)(x))^{k_1} \cdots ((\delta_p g_p + 1)(x))^{k_p} = 0 \qquad \text{para todo } x \in [a,b],$$

o lo que es lo mismo, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{\mathbf{k}\in K} \lambda_{\mathbf{k}} a_n^{|\mathbf{k}|} (\delta_1 g_1 + 1)^{k_1} \cdots (\delta_p g_p + 1)^{k_p} = 0.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande para que $a_n \neq 0$ (sabemos que existe porque $(a_n)_{n=1}^{\infty} \notin \ell_1$). Como $\{g_i\}_{i\in I}$ es libre, por el primer lema también lo es $\{\delta_i g_i + 1\}_{i\in I}$, pues $\delta_i \neq 0$ para todo $i \in I$, y lo anterior es una expresión polinómica sin término independiente en varias funciones distintas de esta familia, por lo que $\lambda_{\mathbf{k}} a_n^{|\mathbf{k}|} = 0$ para todo $\mathbf{k} \in J$ y, al ser $a_n^{|\mathbf{k}|} \neq 0$, $\lambda_{\mathbf{k}} = 0$ para todo $\mathbf{k} \in K$.

■ $|S| = |I|$. En el punto anterior sólo hemos supuesto que los índices $i_1, \ldots, i_p$ sean distintos dos a dos. Si existiesen $i, i' \in I$ con $(a_n u_n^i)_{n=1}^{\infty} = (a_n u_n^{i'})_{n=1}^{\infty}$ a pesar de que

$i \neq i'$, se tendría $P((a_n u_n^i)_{n=1}^\infty, (a_n u_n^{i'})_{n=1}^\infty) = 0$ para el polinomio $P = X_1 - X_2 \neq 0$, en contradicción con lo que acabamos de probar. Así pues, índices distintos dan lugar a sucesiones distintas y $|S| = |I|$.

- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{AMW} \cup \{0\}$. Sea $(F_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Por la Proposición 1.32, existen $p \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_p]$ con $P(0, \dots, 0) = 0$ e índices distintos $i_1, \dots, i_p \in I$ de forma que $(F_n)_{n=1}^\infty = P((a_n u_n^1)_{n=1}^\infty, \dots, (a_n u_n^p)_{n=1}^\infty)$ (volvemos a poner $i_j = j$ para $j = 1, \dots, p$). Debe ser $P \neq 0$, así que, como en el punto precedente, hay algún conjunto finito $K \subseteq \mathbb{N}_0^p \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ y algún escalar $\lambda_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ para cada $\mathbf{k} \in K$ tales que

$$F_n = \sum_{\mathbf{k} \in K} \lambda_{\mathbf{k}} a_n^{|\mathbf{k}|} (u_n^1)^{k_1} \cdots (u_n^p)^{k_p} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Queremos ver que $(F_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{AMW}$, es decir, que la serie $\sum_{n=1}^\infty F_n$ converge absoluta y uniformemente pero $\sum_{n=1}^\infty \|F_n\|_\infty = +\infty$.

Fijado $\mathbf{k} \in K$, se tiene $(\lambda_{\mathbf{k}} a_n^{|\mathbf{k}|})_{n=1}^\infty \in c_0 \setminus \ell_1$, ya que $(a_n)_{n=1}^\infty \in c_0 \setminus \ell_{|\mathbf{k}|}$, y $((u_n^1)^{k_1} \cdots (u_n^p)^{k_p})_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}$. En efecto,

$$\operatorname{sop}((u_n^1)^{k_1} \cdots (u_n^p)^{k_p}) = \operatorname{sop}\left(\prod_{\substack{l=1 \\ k_l \neq 0}}^{p} (u_n^l)^{k_l} \right) = \bigcap_{\substack{l=1 \\ k_l \neq 0}}^{p} \operatorname{sop}(u_n^l),$$

y como $(u_n^i)_{n=1}^\infty = \mathcal{J}_\Lambda(\delta_i g_i + 1)$ para todo $i \in I$, siendo $\delta_i g_i + 1 \neq 0$ (en a esta función vale 1 o 2, por definición de δ_i), $(u_n^i)_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}$ para todo $i \in I$, lo cual implica que $\operatorname{sop}(u_n^i) \cap \operatorname{sop}(u_m^i) = \varnothing$ si $n = m$, y por tanto

$$\begin{aligned} \operatorname{sop}((u_n^1)^{k_1} \cdots (u_n^p)^{k_p}) \cap \operatorname{sop}((u_m^1)^{k_1} \cdots (u_m^p)^{k_p}) &= \bigcap_{\substack{l=1 \\ k_l \neq 0}}^{p} \operatorname{sop}(u_n^l) \cap \bigcap_{\substack{l=1 \\ k_l \neq 0}}^{p} \operatorname{sop}(u_m^l) \\ &= \bigcap_{\substack{l=1 \\ k_l \neq 0}}^{p} (\operatorname{sop}(u_n^l) \cap \operatorname{sop}(u_m^l)) = \varnothing. \end{aligned}$$

Esto prueba la condición (a) de la Definición 4.7. En cuanto a (b), dado que $(u_n^i)_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}$ para todo $i \in I$, para cada $i \in I$ existe $M_i > 0$ tal que $\|u_n^i\|_\infty \leq M_i$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n^1(x)^{k_1} \cdots u_n^p(x)^{k_p}| = |u_n^1(x)|^{k_1} \cdots |u_n^p(x)|^{k_p} \leq \|u_n^1\|_\infty^{k_1} \cdots \|u_n^p\|_\infty^{k_p} \leq M_1^{k_1} \cdots M_p^{k_p}$$

en todo $x \in [a,b]$, luego $\|(u_n^1)^{k_1}\cdots(u_n^p)^{k_p}\|_\infty \leq M_1^{k_1}\cdots M_p^{k_p}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como $(u_n^i)_{n=1}^\infty = \mathcal{J}_\Lambda(\delta_i g_i + 1)$ para todo $i \in I$, recordando cómo funciona la aplicación $\mathcal{J}_\Lambda$, $u_n^i(t_{3n-1}) = (\delta_i g_i + 1)(a) = 1$ o 2 para todos $i \in I$, $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $|(u_n^1(t_{3n-1}))^{k_1}\cdots(u_n^p(t_{3n-1}))^{k_p}| \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se deduce que $\|(u_n^1)^{k_1}\cdots(u_n^p)^{k_p}\|_\infty \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y queda probada (b). Así, $((u_n^1)^{k_1}\cdots(u_n^p)^{k_p})_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}$ para cualquier $\mathbf{k} \in K$.

Sea $f_{\mathbf{k}n} = \lambda_{\mathbf{k}} a_n^{|\mathbf{k}|}(u_n^1)^{k_1}\cdots(u_n^p)^{k_p}$ para $\mathbf{k} \in K$, $n \in \mathbb{N}$. De acuerdo con el Lema 4.8, para cada $\mathbf{k} \in K$ la serie $\sum_{n=1}^\infty f_{\mathbf{k}n}$ converge absoluta y uniformemente. Pero, para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^N F_n = \sum_{n=1}^N \sum_{\mathbf{k}\in K} f_{\mathbf{k}n} = \sum_{\mathbf{k}\in K}\sum_{n=1}^N f_{\mathbf{k}n},$$

y como cada $\sum_{n=1}^\infty f_{\mathbf{k}n}$ con $\mathbf{k} \in K$ converge uniformemente, lo mismo le sucede a $\sum_{n=1}^\infty F_n$. Además, si $x \in [a,b]$, para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^N |F_n(x)| = \sum_{n=1}^N \left|\sum_{\mathbf{k}\in K} f_{\mathbf{k}n}(x)\right| \leq \sum_{n=1}^N \sum_{\mathbf{k}\in K} |f_{\mathbf{k}n}(x)| = \sum_{\mathbf{k}\in K}\sum_{n=1}^N |f_{\mathbf{k}n}(x)|,$$

que converge cuando $N \to \infty$. Por tanto, la sucesión de sumas parciales de $\sum_{n=1}^\infty |F_n(x)|$ está acotada y $\sum_{n=1}^\infty F_n$ converge absolutamente.

Finalmente, notar que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$|F_n(t_{3n-1})| = \left|\sum_{\mathbf{k}\in K} \lambda_{\mathbf{k}} a_n^{|\mathbf{k}|} \underbrace{((\delta_1 g_1 + 1)(a))^{k_1}\cdots((\delta_p g_p + 1)(a))^{k_p}}_{=:\theta_k \neq 0}\right|,$$

y el Lema 4.15 aplicado al polinomio $P = \sum_{\mathbf{k}\in K} \lambda_{\mathbf{k}}\theta_{\mathbf{k}} X^{|\mathbf{k}|}$ afirma que $(P(a_n))_{n=1}^\infty \notin \ell_1$, con lo que

$$\sum_{n=1}^\infty \|F_n\|_\infty \geq \sum_{n=1}^\infty |F_n(t_{3n-1})| = \sum_{n=1}^\infty |P(a_n)| = +\infty.$$

Concluimos que $(F_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{AMW}$, luego $\mathcal{A}\setminus\{0\} \subseteq \mathcal{AMW}$ y la demostración está completa. □

Corolario 4.17. *$\mathcal{AMW}$ es fuertemente $\mathfrak{c}$-algebrable en $(\mathcal{C}[a,b])^{\mathbb{N}}$.*

Demostración. Sea $C \subseteq (0, +\infty)$ un conjunto con $|C| = \mathfrak{c}$ linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$ (recordar la Proposición 1.29 y el Corolario 1.30). Considerar el álgebra generada por $\{e^{cx}\}_{c \in C}$ en $\mathcal{C}[a, b]$, que vamos a ver que es sistema libre. Fijemos $p \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_p]$ con $P(0, \ldots, 0) = 0$ y $c_1, \ldots, c_p \in C$ distintos tales que $F := P(e^{c_1 x}, \ldots, e^{c_p x}) = 0$. Como en otras ocasiones, si fuese $P \neq 0$, existirían $K \subseteq \mathbb{N}_0^p \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ finito y un escalar $\lambda_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ para cada $\mathbf{k} \in J$ de forma que

$$F(x) = \sum_{\mathbf{k} \in K} \lambda_{\mathbf{k}} (e^{c_1 x})^{k_1} \cdots (e^{c_p x})^{k_p} = \sum_{\mathbf{k} \in K} \lambda_{\mathbf{k}} e^{|\mathbf{kc}| x} \qquad \text{para todo } x \in [a, b],$$

donde la yuxtaposición de dos tuplas representa su producto componente a componente (y las barras $|\cdot|$ significan lo mismo que en la demostración anterior). Así, la función holomorfa

$$z \in \mathbb{C} \longmapsto \sum_{\mathbf{k} \in K} \lambda_{\mathbf{k}} e^{|\mathbf{kc}| z} \in \mathbb{C}$$

se anula en $[a, b]$, que evidentemente tiene puntos de acumulación en $\mathbb{C}$. Por el Principio de Prolongación Analítica, se anula en todo $\mathbb{C}$ y, en particular,

$$\sum_{\mathbf{k} \in K} \lambda_{\mathbf{k}} e^{|\mathbf{kc}| x} = 0 \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Ahora, como C es linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$, $|\mathbf{nc}| = \sum_{j=1}^p n_j c_j \neq \sum_{j=1}^p m_j c_j = |\mathbf{mc}|$ en cuanto $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_p)$, $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}_0^p$, $\mathbf{m} \neq \mathbf{n}$. Por tanto, existe un único $\mathbf{k}_0 \in K$ tal que

$$s := \min_{\mathbf{k} \in K} |\mathbf{kc}| = |\mathbf{k}_0 \mathbf{c}| > 0.$$

Separando el sumando correspondiente de los demás,

$$\lambda_{\mathbf{k}_0} e^{sx} + \sum_{\substack{\mathbf{k} \in K \\ \mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0}} \lambda_{\mathbf{k}} e^{|\mathbf{kc}| x} = 0,$$

y dividiendo entre $\lambda_{\mathbf{k}_0} e^{sx} \neq 0$,

$$1 + \sum_{\substack{\mathbf{k} \in K \\ \mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0}} \frac{\lambda_{\mathbf{k}}}{\lambda_{\mathbf{k}_0}} e^{(|\mathbf{kc}| - s) x} = 0 \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Al hacer $x \to -\infty$, resulta que $1 + 0 = 0$, pues $|\mathbf{kc}| > s$ siempre que $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0$. Este absurdo conlleva que el sistema $\{e^{cx}\}_{c \in C}$ es libre, y basta aplicar el teorema precedente con $G = \{e^{cx}\}_{c \in C}$ para deducir que $\mathcal{AMW} \cup \{0\}$ contiene un álgebra libremente $\mathfrak{c}$-generada. $\square$

Observación. De nuevo, este resultado no se puede mejorar en cuanto a cardinal, pues $\mathcal{C}[a,b]$ es metrizable y separable, y por lo tanto su cardinal es como mucho $\mathfrak{c}$. Por lo que acabamos de probar, tiene que ser exactamente $\mathfrak{c}$.

Bibliografía

Referencias fundamentales

[1] Aron, Richard M.; Bernal González, Luis; Pellegrino, Daniel M.; Seoane Sepúlveda, Juan B. *Lineability. The Search for Linearity in Mathematics.* CRC Press, 2016.

[2] Bernal González, Luis; Calderón Moreno, María del Carmen. *Anti-L'Hôpital Differentiable Functions*, Mediterr. J. Math. **14**, 8 (2017).

[3] Bernal González, Luis; Ordóñez Cabrera, Manuel H. *Lineability criteria with applications*, J. Funct. Anal. **266** (2014), 3977–4025.

[4] Calderón Moreno, María del Carmen; Gerlach Mena, Pablo J.; Prado Bassas, José A. *Anti M-Weierstrass function sequences*, J. Math. Anal. App. **491** (2020), 124261.

Referencias complementarias

[5] Bourchtein, Andrei; Bourchtein, Ludmila. *Counterexamples on Uniform Convergence. Sequences, Series, Functions, and Integrals*. Wiley, 2017.

[6] Dugundji, James. *Topology.* Allyn and Bacon, 1966.

[7] Rudin, Walter. *Functional Analysis.* McGraw Hill, 1973.

[8] Rudin, Walter. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw Hill, 1964.