



**DEL CÁLCULO VARIACIONAL A LA
TEORÍA DEL CONTROL ÓPTIMO:
APLICACIÓN A SISTEMAS LEJOS DEL
EQUILIBRIO**

Natalia Ruiz Pino



DEL CÁLCULO VARIACIONAL A LA TEORÍA DEL CONTROL ÓPTIMO: APLICACIÓN A SISTEMAS LEJOS DEL EQUILIBRIO

Natalia Ruiz Pino

Memoria presentada como parte de los requisitos
para la obtención del título de Doble Grado en
Física y Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por
Prof. Antonio Prados Montaña
Dpto. Física Atómica, Molecular y Nuclear

Índice general

English Abstract	1
Resumen	3
I Del cálculo variacional a la teoría del control óptimo	5
1. Introducción. Cálculo de variaciones	7
2. Teoría del control óptimo	15
2.1. Problema de control óptimo	15
2.2. Tratamiento variacional del problema de control óptimo	18
2.3. El principio del máximo	23
2.3.1. Enunciado del principio del máximo	24
2.3.2. El principio del máximo en acción: aparcando un coche con aceleración acotada	25
II Aplicación a sistemas lejos del equilibrio	31
3. Minimización del tiempo de conexión	33
3.1. Medios granulares	33
3.2. Descripción del sistema	35
3.3. Tratamiento matemático del sistema	40
3.3.1. Aplicación del principio del máximo a sistemas lineales: comprobación de hipótesis	40
3.3.2. Aplicación del principio del máximo a sistemas lineales: resolución del sistema y cálculo de trayectorias	41

4. Análisis de los resultados	49
4.1. Tiempo de cambio y final como función de la intensidad del termostato	49
4.2. Trayectorias de la temperatura y la kurtosis	52
4.3. Rango de validez de la aproximación lineal	54
5. Conclusiones	63
A. Apéndice. Valores límite de la intensidad del termostato	65
Anexo	67

English Abstract

Throughout history, time has marked a determining factor in multiple processes, from optimization of tasks in assembly lines, search for routes of minimum time, etc. In this fierce fight against time, mathematics has developed a series of powerful tools to tackle all the problems that require minimizing time. In our case, the problem we deal with comes from a granular system that will be led from an initial non-equilibrium stationary state (NESS) to another NESS in the shortest possible time, by controlling the intensity of an external thermostat.

In order to face this problem, it is necessary to become familiar with mathematical optimization methods that fit the theoretical framework imposed by our problem. This requirement lead us to study the so-called *maximum principle*, the fundamental pillar of the branch of mathematics known as optimal control theory. We also study its linear variants, which allow us to solve the problem when the final and initial states are close to each other. Although we do not present a rigorous demonstration of the principle of the maximum, we reach it in an intuitive way using the tools of variational calculus. Along the way, we also illustrate the limitations of variational calculus when dealing with non-holonomic constraints, like the bounded interval of possible values for the intensity of the thermostat in our problem.

Once we are equipped with the necessary mathematical tools, we address the study of the specific physical problem we are interested in. First, we briefly review the dynamics of granular systems and the equations that govern it, in order to be able to apply the mathematical tools presented above. Second, applying the maximum principle, we solve the optimization problem and thus engineer a protocol for the intensity of the thermostat that minimizes the connection time between the two NESS. We analyze the behavior of the system when applying the optimal protocol and solve its dynamics analytically. Moreover, the dependence of these results with the available range for the intensities of the thermostat is investigated. Finally, we explore the limit of applicability of the linear approximation.

Resumen

El tiempo, a lo largo de la historia, ha marcado un factor determinante en múltiples procesos y ha impuesto límites a batir en otros tantos, desde optimización de tareas en cadenas de montaje, búsqueda de rutas de mínimo tiempo, etc. En esa lucha encarnizada a contrarreloj del hombre contra el tiempo, la matemática ha puesto a nuestro servicio toda una serie de potentes herramientas para abordar, desde ingeniosos puntos de vista, todos los problemas que requieren minimizar el tiempo. En nuestro caso, el problema que tratamos viene de la mano de un sistema granular que, mediante un termostato externo, conducimos desde un estado estacionario de no-equilibrio inicial a otro final en el menor tiempo posible.

Para poder abordar esta cuestión es necesario familiarizarse con los métodos matemáticos de optimización que se ajustan mejor al marco teórico impuesto por nuestro problema. Este requerimiento nos lleva a estudiar el principio del máximo, pilar fundamental de la conocida como *teoría del control óptimo*, y sus variantes lineales, que nos permiten resolver el problema cuando los estados finales e iniciales son próximos entre sí. Aunque no presentamos una demostración rigurosa del principio del máximo, llegamos a él de forma intuitiva empleando las herramientas del cálculo variacional. En este camino mostramos también las limitaciones del cálculo variacional para tratar problemas con ligaduras “no holónomas”, como las presentes en nuestro sistema debido a la acotación en la intensidad del termostato.

Una vez equipados con las herramientas matemáticas necesarias, abordaremos el estudio del problema físico en cuestión. Exponemos, sin entrar en demasiado formalismo, la dinámica de los gases granulares y las ecuaciones que la gobiernan, a fin de poder encuadrarlas en el marco matemático expuesto anteriormente. Aplicando el principio del máximo, resolvemos el problema de optimización, diseñando un protocolo para la intensidad del termostato que nos permite minimizar el tiempo de conexión entre dos estados estacionarios y analizamos el comportamiento del sistema al aplicar dicho protocolo, resolviendo analíticamente su dinámica. Así mismo, se investiga la dependencia de los resultados obtenidos con el rango de valores disponibles para la intensidad del termostato. Por último, exploramos el límite de validez de la aproximación lineal.

Parte I

Del cálculo variacional a la teoría del control óptimo

1 | Introducción. Cálculo de variaciones

La búsqueda de máximos y mínimos de una función es un problema transversal en muchas áreas del conocimiento. Es por ello por lo que el problema de la optimización ha sido objeto recurrente de estudio y conforma un amplio campo de las matemáticas, focalizado en la resolución de una variopinta cantidad de problemas vertebrados en torno a la búsqueda de un extremo.

Una de las herramientas matemáticas más potentes en el tratamiento de estas cuestiones en el marco infinito dimensional es el cálculo en variaciones. Sin embargo, esta herramienta resulta, ante muchos problemas físicos que se plantean de forma natural, insuficiente. El exceso de regularidad que se demanda en las funciones tratadas, las dificultades para acomodar restricciones en los rangos de los parámetros involucrados o la complejidad para introducir condiciones de contorno más generales hacen necesario el desarrollo de una nueva teoría matemática que dé cabida a estas cuestiones, desde un enfoque más dinámico y natural en el tratamiento de determinados problemas: la teoría de control óptimo.

Uno de nuestros objetivos en este trabajo es la exposición, de manera resumida, de los principales aspectos de ambas teorías, tendiendo un puente entre ambas que evidencie la estrecha conexión existente entre estas dos ramas que puede, en ocasiones, quedar oculta tras el formalismo matemático. Comencemos estudiando el cálculo en variaciones [1]. Para exponer la bases del cálculo variacional vamos a fijar el problema que deseamos abordar. A fin de simplificar la notación, y sin pérdida de generalidad, supongamos que nos enfrentamos a un problema de minimización:

| Definición 1.1 (Problema de optimización). *Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado de funciones y sea $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional definido sobre dicho espacio. Consideremos el problema de hallar el mínimo de J en la norma $\|\cdot\|$ fijada, esto es, encontrar:*

$$y^* \in V \text{ tal que } \forall \epsilon \in \mathbb{R} \text{ se debe cumplir que } J(y^*) \leq J(y), \forall y \text{ tal que } \|y^* - y\| < \epsilon.$$

Nuestro objetivo será deducir condiciones necesarias de extremo. Para ello, y de manera similar a como se procede en dimensión finita, empleando la derivada de primer y segundo orden de una función, debemos equiparnos con una herramienta matemática que nos ofrezca información sobre el crecimiento del funcional J . A esta herramienta se la conoce como variación de J y

gracias a ella podremos derivar una condición necesaria de mínimo. La definición de este objeto matemático es

Definición 1.2 (Primera variación de un funcional). Sea $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional, y sea $y \in V$ un elemento arbitrario pero fijo del espacio de funciones V . Definimos la primera variación de J en y en el sentido de Gateaux, notada como δJ_y , como el funcional lineal $\delta J_y: V \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica, $\forall \eta \in V$ y $\forall \epsilon \in \mathbb{R}$ cumpliendo que $y + \epsilon \eta \in V$, la siguiente ecuación

$$J(y + \epsilon \eta) = J(y) + \delta J_y(\eta) \epsilon + o(\epsilon), \quad (1.1)$$

donde definimos $o(\epsilon)$ como $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} = 0$. Como puede comprobarse, la definición de primera variación se corresponde con el de derivada escalar usual respecto del parámetro ϵ : fijadas y y η , $\delta J_y(\eta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(y + \epsilon \eta) - J(y)}{\epsilon}$. La existencia de este objeto matemático no está garantizada, y dependerá tanto de la forma del funcional J como del punto y donde deseemos calcularlo.

Esta definición nos permite, gracias a la introducción del parámetro ϵ , olvidarnos por completo de la norma con la que trabajamos, pues cuando deseemos evaluar el funcional en puntos cercanos a y (como haremos en breve para deducir la condición necesaria de primer orden) bastará tomar ϵ suficientemente pequeño, ya que

$$\|(y + \epsilon \eta) - y\| = \|\epsilon \eta\| = |\epsilon| \|\eta\| \quad (1.2)$$

converge a 0 cuando ϵ tiende a 0, independientemente de la norma de η (siempre y cuando esta sea finita, lo cual resulta evidente pues $\eta \in V$). La derivada de Gateaux es una herramienta matemática que, aunque muy útil, no aprovecha toda la información disponible del entorno del punto al no emplear en ningún momento el concepto de norma. Existe una definición alternativa, conocida como la derivada de Fréchet [2], que sí incorpora esta nueva información (en lugar de trabajar con perturbaciones del tipo $y + \epsilon \eta$ lo hace con otras de la forma $y + \eta$ donde exigimos que η esté, en norma, próxima a y). Esto permite obtener condiciones más perfiladas pero presenta, por otra parte, un tratamiento menos intuitivo que la derivada de Gateaux, al ser esta una derivada escalar.

La derivada de Gateaux nos va a permitir establecer lo que se conoce como **condición necesaria de mínimo de primer orden**. Para ello, comencemos tomando nuestra función y^* que resultará ser un mínimo local sobre un subconjunto A del espacio de funciones V , lo cual hace aún mas general nuestro argumento. Definamos el siguiente concepto clave:

Definición 1.3 (Perturbación admisible). Llamaremos perturbación admisible en $A \subset V$ para un punto y^* a cualquier $\eta \in V$ cumpliendo que existe un $\epsilon_\eta > 0$ tal que $\forall \epsilon \in \mathbb{R}$ verificando que $|\epsilon| \leq \epsilon_\eta$, se tiene que la función definida como $y^* + \epsilon \eta \in A$; y escribiremos $\eta \in P_{adm}$.

Una perturbación admisible es, por tanto, una función cualquiera del espacio que verifique que, al multiplicarla por un parámetro suficientemente pequeño y sumarla a y^* , la función resultante de esta operación permanezca contenida en A . Por tanto, sea J un funcional tal que existe su primera

variación y sea y^* un mínimo local sobre A , se verifica la siguiente ecuación,

$$J(y^* + \epsilon\eta) = J(y^*) + \delta J_{y^*}(\eta)\epsilon + o(\epsilon), \quad \forall \eta \in P_{adm}, \quad (1.3)$$

que no es más que una aplicación de la definición de primera variación al conjunto de perturbaciones admisibles. Por ende,

$$J(y^* + \epsilon\eta) - J(y^*) = \delta J_{y^*}(\eta)\epsilon \geq 0, \quad \forall \eta \in P_{adm}. \quad (1.4)$$

Dado que ϵ puede ser tanto positivo como negativo podemos concluir

$$\boxed{\delta J_y(\eta) = 0, \quad \forall \eta \in P_{adm}.} \quad (1.5)$$

Esta es la **condición necesaria de primer orden**. El conjunto de perturbaciones admisibles da “idea” de cómo es el conjunto de funciones sobre el que minimizamos (a primer orden en ϵ) y nos proporciona una forma de inspeccionar el entorno del candidato a mínimo y^* sin más que generar vecinos de la forma $y^* + \epsilon\eta$ con $\eta \in P_{adm}$. Por tanto, si somos capaces de caracterizar dicho conjunto de perturbaciones admisibles y además nuestro conjunto A contiene una gran cantidad de puntos que pueden ser descritos en estos términos (de nada sirve si en A apenas hay puntos de la forma $y^* + \epsilon\eta$), esta condición será considerablemente útil en la generación de candidatos a mínimo local.

Para continuar perfilando las condiciones necesarias de mínimo es necesario introducir la antes mencionada segunda variación de un funcional:

Definición 1.4 (Segunda variación de un funcional). *Llamaremos, cuando exista, segunda variación de J a la forma cuadrática*

$$\delta^2 J_y: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.6)$$

tal que $\forall \eta \in V$ y $\forall \epsilon \in \mathbb{R}$ se verifica

$$J(y + \epsilon\eta) = J(y) + \delta J_y(\eta)\epsilon + \delta^2 J_y(\eta)\epsilon^2 + o(\epsilon^2). \quad (1.7)$$

Gracias a ella podemos introducir la **condición necesaria de segundo orden**. Situándonos en el mismo escenario que formulamos en la deducción de la condición necesaria de primer orden y asumiendo la existencia de la segunda variación, podemos desarrollar el valor del funcional en una función cualquiera $y^* + \epsilon\eta \in A$ como sigue,

$$J(y^* + \epsilon\eta) = J(y^*) + \delta J_{y^*}(\eta)\epsilon + \delta^2 J_{y^*}(\eta)\epsilon^2 + o(\epsilon^2), \quad \forall \eta \in P_{adm}, \quad (1.8)$$

y aplicando la condición necesaria de primer orden,

$$J(y^* + \epsilon\eta) - J(y^*) = \delta^2 J_{y^*}(\eta)\epsilon^2 + o(\epsilon^2) \geq 0, \quad \forall \eta \in P_{adm}. \quad (1.9)$$

En esta ocasión ϵ^2 es una cantidad positiva de modo que la condición necesaria para que la desigualdad anterior se mantenga es que

$$\delta^2 J_{y^*}(\eta)\epsilon^2 \geq 0, \quad \forall \eta \in P_{adm}, \quad (1.10)$$

donde hemos usado la definición de $o(\epsilon^2)$ para afirmar que existirá un valor de ϵ límite tal que para todo ϵ con valor absoluto menor que dicho límite el término cuadrático en ϵ (esto es, la segunda variación), dominará a $o(\epsilon^2)$, imponiendo su signo. De este modo, (1.10) conforma la **condición necesaria de segundo orden**.

Estas condiciones generales pueden aplicarse a una gran variedad de problemas. Si fijamos como marco general el espacio normado $V = (C^1[a, b], \|\cdot\|_1)$, esto es, el espacio de funciones $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuas, con valor $\|y\|_1 := \max_{[a,b]}|y| + \max_{[a,b]}|y'|$ bien definido, y como funcional uno de la forma

$$J(y) = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))dx, \quad (1.11)$$

donde $L(x_1, x_2, x_3)$ será una función que tomará valores sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,¹ podemos particularizar las condiciones anteriores a los problemas que presentamos a continuación.

Condiciones de primer orden: Ecuaciones de Euler-Lagrange.- Llamamos problema básico del cálculo variacional al problema de minimizar J en el espacio V sujeto a las condiciones de contorno $y(a) = y_0$, $y(b) = y_f$. Al particularizar la *condición necesaria de primer orden* obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange. Para deducirlas bastará reconocer el conjunto $A \subset V$ sobre el que deseamos minimizar, que en este caso será

$$A = \{y \in C^1[a, b] \mid y(a) = y_0, y(b) = y_f\} \quad (1.12)$$

y, por ende, el conjunto de perturbaciones admisibles es

$$P_{adm} = \{\eta \in C^1[a, b] \mid \eta(a) = \eta(b) = 0\}. \quad (1.13)$$

Por otro lado, la forma concreta que adopta la primera variación para un funcional del tipo (1.11) (suponiendo que L es derivable respecto de y e y' y llamando y al mínimo a fin de no recargar la notación) será

$$J(y + \epsilon\eta) = \int_a^b L(x, y(x) + \epsilon\eta(x), y'(x) + \epsilon\eta'(x))dx = J(y) + \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y}\epsilon\eta + \frac{\partial L}{\partial y'}\epsilon\eta' \right) dx.$$

Por tanto,

$$\delta J_y(\eta) = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y}\eta + \frac{\partial L}{\partial y'}\eta' \right) dx. \quad (1.14)$$

¹Esto es, en general y tiene n componentes y nos estamos enfrentando a un problema "multidimensional".

Basta aplicar integración por partes y nuestra definición de perturbación admisible (con el fin de que desaparezcan los términos de contorno) para obtener, imponiendo que dicha variación sea nula, las conocidas como **ecuaciones de Euler-Lagrange**

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right] \eta \, dx = 0. \quad (1.15)$$

Como esto ocurre $\forall \eta \in P_{adm}$ podemos concluir que

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0, \quad (1.16)$$

usando la arbitrariedad de η como función diferenciable. A aquellas funciones diferenciables que verifiquen las ecuaciones de Euler-Lagrange las denominaremos **extremos del funcional J** .²

Condiciones de segundo orden: condición de Legendre.- Para obtener esta condición comencemos computando la segunda variación de nuestro funcional,

$$\delta^2 J_y(\eta) = \frac{1}{2} \int_a^b \left[L_{yy} \eta^2 + 2L_{yy'} \eta \eta' + L_{y'y'} \eta'^2 \right] dx, \quad (1.17)$$

donde hemos empleado por primera vez la notación L_{yy} para referirnos a la segunda derivada parcial respecto de y . Usaremos la notación de subíndices para las derivadas cuando esto nos evite sobrecargar innecesariamente la notación. Para realizar este cálculo basta evaluar el funcional, fijada una perturbación arbitraria $\eta \in V$, en la función $y + \epsilon \eta$. Esto convierte a J en una función escalar de ϵ a la que es legítimo calcularle su desarrollo de Taylor en torno a $\epsilon = 0$ hasta segundo orden en el parámetro. Si integramos por partes $\int_a^b 2L_{yy'} \eta \eta' dx$, teniendo en cuentas las condiciones de contorno (1.13), con el fin de eliminar el término de la segunda variación que depende del producto de la perturbación y su derivada, nos queda una expresión para $\delta^2 J_y$ de la forma

$$\delta^2 J_y = \int_a^b \left[P(x) \eta'^2 + Q(x) \eta^2 \right] dx, \quad (1.18)$$

donde

$$P(x) = \frac{1}{2} L_{y'y'}(x, y(x), y'(x)), \quad Q(x) = \frac{1}{2} \left[L_{yy}(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} L_{yy'}(x, y(x), y'(x)) \right]. \quad (1.19)$$

El hecho de que aparezcan derivadas de tercer orden del Lagrangiano nos obligará a exigir unas hipótesis extra de regularidad que pueden verse ampliamente satisfechas si imponemos que $L \in C^3$.

²Notemos que hay n ecuaciones de Lagrange en general, ya que y tiene n componentes.

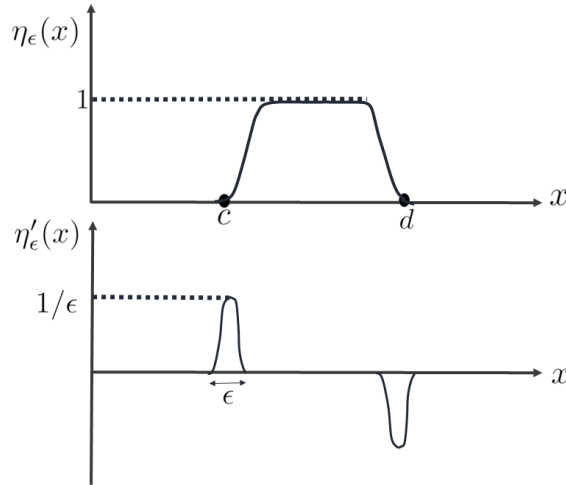


Figura 1.1: Familia de perturbaciones adecuadas para la deducción de la condición de Legendre. En el panel superior aparece recogida una familia de perturbaciones de valor nulo fuera de un intervalo $[c, d]$ y valor acotado superiormente por uno en dicho intervalo, mientras que en el panel inferior se presentan las derivadas de dichas perturbaciones, que no se hallan acotadas, pues dependiendo de la pendiente de las funciones η_ϵ , estas podrían disparar su valor.

Esta asunción nos da una cierta regularidad sobre P y Q , que deben ser funciones necesariamente continuas.

Habiendo calculado ya la expresión de la segunda derivada podemos aplicar la condición general necesaria de segundo orden. Para ello consideremos una función $y^* \in (C^1([a, b]), \|\cdot\|_1)$ mínimo local, debe entonces cumplirse que

$$\delta^2 J_{y^*} = \int_a^b [P(x)\eta'^2 + Q(x)\eta^2] dx \geq 0. \quad (1.20)$$

La idea reside, aunque no nos detendremos en la construcción pues no es objeto de este trabajo (para una deducción más rigurosa consultar [2, 3]), en diseñar una familia de perturbaciones admisibles dependientes de un parámetro, pongamos ϵ , que deben cumplir (al ser admisibles) la condición necesaria de segundo orden

$$\delta^2 J_{y^*}(\eta_\epsilon) \geq 0, \quad (1.21)$$

cuyo rango se encuentre acotado entre 0 y 1 pero cuya derivada crezca al disminuir ϵ , como muestra la figura 1.1. Este tipo de perturbación nos sugiere que el término dominante y que por tanto impondrá su signo dentro de la integral será el término $P(x)\eta'_\epsilon{}^2$ que dominará frente a $Q(x)\eta_\epsilon$, pues mientras que para valores de ϵ cada vez más pequeños el valor de η_ϵ permanece

acotado por la unidad, su derivada se dispara. De este modo acabamos de deducir la conocida como **condición necesaria de Legendre**: Si $y^*(x)$ es un mínimo, entonces debe cumplirse que

$$L_{y'y'}(x, y^*(x), y'^*(x)) \geq 0. \quad (1.22)$$

Para entender la información que nos ofrece esta condición debemos definir lo que llamaremos el hamiltoniano de una función, así como el momento:

Definición 1.5 (Hamiltoniano). Definimos la función hamiltoniano, H , como sigue:

$$H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4 x_3 - L(x_1, x_2, x_3), \quad \text{con } n \geq 1. \quad (1.23)$$

Definición 1.6 (Momento). Definimos la función momento, p , como sigue:

$$p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad p = L_{x_3}(x_1, x_2, x_3), \quad \text{con } n \geq 1. \quad (1.24)$$

Evaluando las definiciones anteriores para el caso en que las variables describen una trayectoria parametrizada en x se tiene:

$$\begin{aligned} p(x, y, y') &= L_{y'}(x, y, y'), \\ H(x, y(x), y'(x), p(x, y, y')) &= p(x, y, y')y' - L(x, y, y'). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Si consideramos (x, y, y', p) como variables independientes (esto sería, antes de ser evaluadas sobre la trayectoria) y fijamos (x, y, p) a unos valores determinados, es legítimo estudiar el comportamiento de H respecto de la variable y' (como variable independiente respecto de las otras tres). Lo que nos dice la condición de Legendre es que si y^* es mínimo local, para cualquier x fijo del intervalo $[a, b]$ se debe verificar que si $(y^*(x))'$ es un extremo del hamiltoniano, entonces debe necesariamente ser un máximo, puesto que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x, y, y', p)}{\partial y'} \Big|_{x, y, p} &= p - \frac{\partial L(x, y, y')}{\partial y'} \Big|_{x, y, p} = p - L_{y'} = 0, \\ \frac{\partial^2 H(x, y, y', p)}{\partial^2 y'} \Big|_{x, y, p} &= -L_{y'y'}(x, y, y'). \end{aligned} \quad (1.26)$$

La primera ecuación es nula por la propia definición de momento, y la segunda ecuación es menor o igual a 0 al ser evaluada sobre y^* , por la condición de Legendre.

2 | Teoría del control óptimo

En esta sección reformularemos el problema de minimización de una forma más conveniente de cara a nuestros futuros cálculos, estableciendo así el marco general del conocido como problema de control óptimo.

2.1 Problema de control óptimo

La idea de partida en la resolución de cualquier problema en cálculo de variaciones era fijar un funcional a minimizar, definir un conjunto de funciones con una cierta regularidad y buscar, de entre todas ellas, aquella que generase el valor mínimo. Sin embargo, podríamos cambiar este enfoque *estático*, en el que simplemente buscamos entre la colección de curvas permitidas, por uno en el que vamos progresivamente construyendo la curva en base de pequeñas decisiones óptimas que tomamos en cada instante.

Puede entenderse de la siguiente forma: supongamos que partimos de un cierto punto x_0 en un instante de tiempo t_0 y deseamos minimizar un cierto funcional J . La pregunta que surge de manera natural dado un punto de partida es: ¿cuál es la dirección de avance óptima? Es decir, ¿qué x' (de aquí en adelante notaremos x' como la derivada temporal de x) debería escoger en el tiempo t_0 para avanzar en la dirección de minimización? Escogida esta velocidad nos hallamos en un punto $x_0 + x'(t_0)dt$ en un tiempo $t_0 + dt$. Se plantea por tanto el mismo dilema, ¿qué rumbo fijar ahora desde las nuevas coordenadas?.

Repitiendo este proceso de forma iterativa, acabaríamos contruyendo una trayectoria óptima basada en la toma de decisiones infinitesimalmente óptimas. Esta forma dinámica de abordar el problema nos va a permitir acomodar restricciones de manera muy sencilla e introducir de forma natural un sistema controlado mediante un parámetro, que en ocasiones modeliza de manera más natural ciertos problemas que se nos pueden presentar. Es precisamente esta forma de proceder la que evidencia el uso de la variable temporal como variable natural independiente para parametrizar nuestra trayectoria, que notaremos, en lugar de $y(x)$ como hicimos anteriormente, como $x(t)$.

Antes de plantear más formalmente el problema de control óptimo resulta interesante hacer un breve comentario: como ya hemos notado antes, nuestras decisiones se basarán en fijar una

determinada velocidad o , de forma más general, de fijar un valor del parámetro externo, u , que controle mediante alguna función propia del sistema considerado a la velocidad en cuestión. La clave en todo esto reside, por tanto, en determinar qué valor de u tomamos una vez alcanzado un estado $(t, x(t), x'(t))$ para que la trayectoria que tracemos durante el siguiente intervalo infinitesimal sea la adecuada. Vamos a ver que la herramienta matemática que nos acotará el número de valores candidatos para u en ese estado es precisamente el hamiltoniano. El cómo genera esta información el hamiltoniano puede resultarnos familiar si recordamos la condición de Legendre y suponemos un sistema de control sencillo donde el parámetro de control sea directamente la velocidad $x' = u$: *si $u^*(t)$ es la decisión óptima a tomar en el instante t , esto es, si $x^*(t)$ es óptima, $u^*(t)$ será un máximo del Hamiltoniano.*

Ahora sí, formalicemos el marco general de un problema de control óptimo. Existen tres partes que definen el problema:

Sistema de control óptimo.- Nos indicará la relación entre el parámetro de control y la velocidad de la trayectoria.

$$x' = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.1)$$

Evidentemente desearemos que, una vez escogido un control $u(t)$ (ya veremos qué condiciones de regularidad le impondremos), el sistema presente una *solución* única. Hay pues, tres cuestiones principales que debemos atender llegados a este punto: qué regularidad imponemos sobre u como función del tiempo, qué hipótesis de regularidad imponemos sobre f para que el sistema tenga solución y, más importante, qué entenderemos como *solución* del sistema. Con respecto a la regularidad de $u(t)$ trabajaremos en el contexto de las funciones medibles en t , aunque en el problema que a nosotros nos compete nos bastará exigir que sea continua a trozos, y esa constituirá nuestra hipótesis de regularidad a la hora de deducir el principio del máximo.

La cuestión sobre la existencia de solución del sistema quedará ampliamente satisfecha si $f(t, x, u)$ es continua en t , C^1 en la variable x y continua en u . Bajo estas suposiciones podemos garantizar la existencia de una única función $x(t)$ absolutamente continua,¹ es decir, definida sobre un cierto intervalo $[t_0, t_f]$, que es continua en todo tiempo t y diferenciable para casi todo t , y que cumple la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s), u(s)) ds. \quad (2.2)$$

Esta función $x(t)$, cuya existencia y unicidad queda garantizada en el marco anterior, es la solución de nuestro sistema diferencial. Como puede comprobarse, en el planteamiento del problema de control óptimo no se exige ningún tipo de regularidad sobre la trayectoria, sino que su regularidad surge de forma natural al introducir el parámetro de control y resolver la ecuación. De esta forma,

¹Intuitivamente, diferenciable salvo en un conjunto de puntos de medida nula.

si exigimos que $u(t)$ sea continuo a trozos, la mínima regularidad que obtenemos para $x(t)$ es ser absolutamente continua, lo cual es inherente a su condición de solución del sistema. De esta forma, desaparece toda posible discusión sobre espacios normados donde plantear el problema: habrá un único espacio, el de los controles continuos a trozos (o si queremos generalizar, el de los controles medibles) con imagen un conjunto cualquiera, U , sobre el que definiremos un problema de minimización *global* que nos liberará del “yugo” de la norma.

Coste.- El funcional J con el que trabajaremos conforma el conocido como problema de Bolza,

$$J(u; x_0, t_0, x_f, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t))dt + K(x_f, t_f). \quad (2.3)$$

Destaquemos dos aspectos referentes a la ecuación anterior. Primero, la similitud entre el término integral y el funcional tratado en el contexto del cálculo variacional es evidente, basta recordar que $x'(t) = f(t, x(t), u(t))$ y de este modo, el lagrangiano que aparece en calculo de variaciones quedaría como:

$$L(t, x(t), x'(t)) = L(t, x, f(x, x(t), u(t))) = \tilde{L}(t, x(t), u(t)). \quad (2.4)$$

Nótese que el camino inverso de paso de un lagrangiano cualquiera con dependencia en $u(t)$ a otro con dependencia en $x'(t)$ no tiene porque ser siempre posible. Segundo, aparece el término K que se conoce como *coste final*. Un problema de Bolza donde solo tenemos el término integral se conoce como problema de Lagrange, mientras que el problema que solo presente un coste final se conoce como problema de Mayer. Vamos a poder pasar de una formulación a otra sin problema, puesto que ambos planteamientos resultan equivalentes.

Conjunto objetivo.- Este último ingrediente es de vital importancia, pues nos permitirá acomodar una gran variedad de problemas en el contexto del control óptimo. El conjunto objetivo o conjunto blanco (*target set* en inglés) nos brinda una forma muy cómoda de recoger las condiciones de contorno del problema, englobándolas en un conjunto $S \subset [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. De este modo un problema de estado y tiempos finales fijos presenta un conjunto objetivo $S = t_f \times x_f$, en un problema de tiempo final fijo y extremo libre tenemos $S = t_f \times \mathbb{R}^n$, y un problema donde a tiempo final fijo el estado final deba reposar sobre un determinado subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ tendríamos $S = t_f \times M$.

También podemos imaginar una situación donde t_f no sea fijo, de modo que se necesitará una definición concreta para este tiempo final. Para ello bastará exigir que *la parte espacial de S* sea un conjunto cerrado, de modo que definiremos t_f como el menor de los tiempos tal $x(t)$ interseca dicha parte espacial (que está bien definido por ser S cerrado).² Notemos que esta definición de

²Podría ocurrir que si el conjunto es abierto el tiempo t_f no estuviese bien definido pues la trayectoria podría acercarse indefinidamente a S sin llegar a tocarlo, por ejemplo $x(t) = \sqrt{t}$ y $S = (-\infty, 0)$.

tiempo final presenta como caso particular aquel en el que t_f es fijo. Habiendo tratado los tres ingredientes principales punto por punto estamos en condiciones de formular el problema de control óptimo completo:

Definición 2.1 (Problema de control óptimo). Buscamos $u: \mathbb{R} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ una función continua a trozos (o, más generalmente, medible) con rango contenido en U tal que, al ser introducido en el sistema

$$x' = f(t, x, u), \quad x(t_0) = t_0, \quad (2.5)$$

genere una trayectoria $x(t)$ que, por un lado, interseque al conjunto objetivo y por otro minimice, conjuntamente con $u(t)$, el funcional J .

Como puede comprobarse, la función clave que minimiza el funcional es el control y no la trayectoria $x(t)$, pues esta última queda unívocamente determinada una vez se ha fijado el primero.

2.2 Tratamiento variacional del problema de control óptimo

Para introducir el principio del máximo, que se trata de un teorema que ofrece unas condiciones necesarias muy útiles para la resolución de una gran cantidad de problemas de control óptimo, desde la óptica del cálculo de variaciones hemos de restringirnos a un problema de control que encaje dentro de esta teoría. Consideremos pues el siguiente problema: Tomemos S como $S = \{t_f\} \times \mathbb{R}^n$, esto es, un problema de tiempo final fijo y estado final libre. Tomemos el rango de U como \mathbb{R}^m , esto es, tenemos un problema sin restricciones sobre u (no hay restricción en su imagen ni tampoco sobre el conjunto blanco que debe golpear la trayectoria que este genere). Consideremos un funcional de la forma

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t))dt + K(x(t_f)), \quad (2.6)$$

donde el término de coste final, $K(x_f(t_f))$ no depende explícitamente del tiempo t_f .

Nuestro objetivo es deducir unas condiciones necesarias de mínimo global para u (esto es, el control óptimo u^* debe cumplir $J(u^*) \leq J(u)$ para cualquier función u que sea continua a trozos), empleando las herramientas que hasta ahora hemos descrito. Es claro que si u^* es un mínimo en sentido global lo será en sentido local si dotamos al espacio de las funciones continuas a trozos (espacio de controles aceptables) de una norma cualquiera, por ejemplo, la norma 0 (esto es $\|x\|_0 := \max_{[a,b]} |x|$). Esto nos permite llevarnos el problema a un terreno conocido donde podemos plantearnos extraer condiciones necesarias de primer y segundo orden de la mera particularización de las condiciones necesarias ya deducidas. Esto es precisamente lo que vamos a hacer.

Nuestro esquema de razonamiento será el siguiente: consideraremos u^* el óptimo global del problema, perturbaremos dicho u^* y estudiaremos como esa perturbación altera la trayectoria óptima (a primer orden en un cierto parámetro). Reescribiremos el funcional incorporando el sistema de control en forma de restricción en el integrando, multiplicada por unas funciones $p(t)$ cualesquiera (que pueden dar una falsa impresión de ser los multiplicadores de Lagrange, pero su verdadera naturaleza será esclarecida más adelante). Sustituyendo el control y trayectorias perturbadas, calcularemos la primera variación e impondremos que esta se anule. Haciendo uso de la libertad con la que los $p(t)$ fueron escogidos, seremos capaces de deducir un sistema diferencial de primer orden y dos ecuaciones que involucren a unos $p^*(t)$ muy particulares y a la trayectoria óptima $x^*(t)$, junto con unas condiciones iniciales que derivaremos del término de coste final. Las ecuaciones diferenciales obtenidas se corresponderán con las **ecuaciones canónicas** ampliamente conocidas en el marco de la mecánica teórica.

Posteriormente, el estudio del término dominante en la segunda variación nos permitirá entender la dependencia del hamiltoniano con el control, una vez este primero ha sido evaluado sobre la trayectoria óptima.

Perturbación del control y la trayectoria.- Comenzamos perturbando u en lugar de x pues ahora minimizamos el funcional respecto de u y no respecto de la trayectoria. De este modo, definimos el conjunto de perturbaciones admisibles para el control como

$$P_{adm(u)} = \{\chi \text{ continuas a trozos sobre } [t_0, t_f]\}. \quad (2.7)$$

Así los controles que se obtienen aplicando este tipo de perturbaciones serán de la forma:

$$u = u^* + \epsilon \chi, \quad (2.8)$$

con ϵ un parámetro real arbitrario. Podemos, fijada una perturbación cualquiera χ , definir una familia de trayectorias parametrizadas en ϵ , $x(t, \epsilon)$, resultado de resolver el sistema de control aplicando los distintos controles. Dicha familia cumple que $x(t, \epsilon = 0) = x^*(t)$.

Si tomamos ϵ suficientemente pequeño y asumimos que la dependencia de $x(t, \epsilon)$ con dicho parámetro es diferenciable, podemos hacer un desarrollo de Taylor a orden uno en ϵ ,

$$x(t, \epsilon) = x^*(t) + x_\epsilon(t, 0)\epsilon + o(\epsilon). \quad (2.9)$$

Por ende, llamando η a la perturbación de la trayectoria óptima a primer orden en ϵ ,

$$\eta = x_\epsilon(t, 0), \quad (2.10)$$

podemos plantearnos encontrar la relación entre la perturbación del control χ y la de la trayectoria η , a $o(\epsilon)$. Para ello disponemos del sistema de ecuaciones diferenciales

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.11)$$

que ligan el control y la trayectoria. Como $x(t, \epsilon)$ ha sido generada por cada $u^* + \epsilon \chi$ a través del sistema anterior basta sustituir y retener a primer orden en ϵ , lo que nos conduce a

$$\eta'(t) = f_x(t, x^*(t), u^*(t))\eta(t) + f_u(t, x^*(t), u^*(t))\chi(t), \quad (2.12)$$

que describe la evolución temporal de la perturbación η . Si aplicamos la condición inicial del sistema de control tendríamos $x^*(t_0) + \epsilon\eta(t_0) = x_0$ o, de modo equivalente, $\eta(t_0) = 0$. Podemos escribir esta ecuación de la dinámica de η de forma más conveniente como

$$\eta' = A^*(t)\eta + B^*(t)\chi, \quad \eta(t_0) = 0, \quad (2.13)$$

siendo $A^*(t) := f_x^*(t)$ (entendiendo la estrella en f como f evaluada en el control y trayectoria óptima) y $B^*(t) := f_u^*(t)$.

Primera variación.- Una vez caracterizadas las perturbaciones del control y la trayectoria óptimos, procedemos a calcular la primera variación del funcional. Para ello, reescribimos el problema introduciendo en el funcional el sistema de control en forma de restricción, multiplicado por unas funciones cualesquiera $p(t)$,

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} [L(t, x, u) + p(t)(x' - f(t, x, u))] dt + K(x_f). \quad (2.14)$$

Notemos lo siguiente: en esta reescritura del problema no hemos hecho nada “innovador”, pues no hemos eliminado la restricción al introducirla en el integrando. Vamos a seguir considerando la función η como aquella generada por la aplicación de la perturbación del control al sistema de control, esto es, η no es libre, sino que seguirá ligada a χ . Simplemente hemos hecho una afirmación trivial que, sin embargo, nos servirá para obtener unas condiciones que nos resulten familiares. Si u^* es óptimo del problema $J(u)$ con restricción $x' = f(t, x, u)$ lo será también del problema $J(u) + \int_{t_0}^{t_f} p(t)(x' - f(t, x, u))dt$ con $p(t)$ cualquiera, sujeto a la misma restricción $x' = f(t, x, u)$.

Es importante entender que esta reformulación es esencialmente diferente a la que conduce a los multiplicadores de Lagrange. En esta última, nos liberamos de la restricción incluyéndola en el funcional multiplicada por unas funciones **únicas** escogidas para poder reescribir el problema como: u^* óptimo de $J(u) + \int_{t_0}^{t_f} p(t)(x' - f(t, x, u))dt$ con $p(t)$ unas ciertas funciones únicas en un problema sin restricciones. Puntualizado este aspecto que resultará vital para legitimar la elección que haremos de $p(t)$ y el hecho de que η continúe ligada a χ a través de la expresión anteriormente deducida, podemos plantearnos el problema de calcular la primera variación del recién modificado $J(u)$. Para facilitar el cálculo de la variación reescribamos el funcional J en términos de la función hamiltoniano, que en este nuevo contexto presentará un dominio de definición y una dependencia con (t, x, u, p) de la forma:

$$H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(t, x, u, p) := pf(t, x, u) - L(t, x, u), \quad \text{con } n \geq 1 \text{ y } m \geq 1. \quad (2.15)$$

Consiguientemente $J(u)$ puede expresarse, utilizando la notación $\langle \rangle$ para denotar el producto escalar (entendido en este contexto como la multiplicación de funciones), como

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} (\langle p, x' \rangle - H) dt + K(x_f), \quad (2.16)$$

donde tanto p, x, u, H son vistas en la integral como funciones temporales. Evaluando J sobre el control y la trayectoria perturbados, con el fin de calcular la primera variación, tenemos

$$J(u^* + \epsilon \chi) = \int_{t_0}^{t_f} [\langle p, x^{*'} + \epsilon \eta' + o(\epsilon) \rangle - H(t, x^* + \epsilon \eta + o(\epsilon), u^* + \epsilon \chi)] dt + K(x_f^* + \epsilon \eta(t_f) + o(\epsilon)). \quad (2.17)$$

Calculamos la primera variación desarrollando cada uno de los tres términos que aparecen a primer orden en ϵ ,

$$\begin{aligned} i) \quad & \int_{t_0}^{t_f} \langle p, x^{*'} + \epsilon \eta' + o(\epsilon) \rangle dt \approx \int_{t_0}^{t_f} [\langle p, x^{*'} \rangle + \epsilon \langle p, \eta' \rangle] dt, \\ ii) \quad & \int_{t_0}^{t_f} H(t, x^* + \epsilon \eta + o(\epsilon), u^* + \epsilon \chi) dt \approx \int_{t_0}^{t_f} [H^* + (H_x^* \eta + H_u^* \chi) \epsilon] dt, \\ iii) \quad & K(x_f^* + \epsilon \eta + o(\epsilon)) = K(x_f^*) + K_x(x^*(t_f)) \epsilon \eta + o(\epsilon) \approx K(x_f^*) + \epsilon \langle K_x(x^*(t_f)), \eta \rangle. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Usando el hecho de que $x - x^* \approx \epsilon \eta$ e integrando por partes se tiene que

$$\int_{t_0}^{t_f} \langle p, x' - x^{*'} \rangle dt = \langle p, \epsilon \eta \rangle \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \langle p', \epsilon \eta \rangle \approx \langle p(t_f), \epsilon \eta(t_f) \rangle - \int_{t_0}^{t_f} \langle p', \epsilon \eta \rangle dt, \quad (2.19)$$

donde el signo \approx quiere decir que hemos omitido $o(\epsilon)$. Uniendo (2.18) y (2.19) tenemos que la **primera variación del funcional** queda como

$$\delta J_{u^*}(\eta) = \int_{t_0}^{t_f} (\langle p, \eta' \rangle - \langle H_x^*, \eta \rangle + \langle H_u^*, \chi \rangle) dt + \langle K_x^*, \eta \rangle \quad (2.20)$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} (\langle p' - H_x^*, \eta \rangle + \langle H_u^*, \chi \rangle) dt + \langle K_x(x^*(t_f)) + p(t_f), \eta(t_f) \rangle. \quad (2.21)$$

Gracias a que los $p(t)$ son unas funciones cualesquiera podemos tomar como $p(t)$ la función solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno

$$p' = -H_x(t, x^*, u^*, p), \quad p(t_f) = -K_x(x^*(t_f)). \quad (2.22)$$

Sustituyendo la solución de dicho sistema, que notaremos por $p^*(t)$, en la expresión de la primera variación e imponiendo que esta se anule tenemos que

$$\delta J_{u^*}(\eta) = \int_{t_0}^{t_f} \langle H_u^*, \chi \rangle dt = 0. \quad (2.23)$$

Todo el proceso de integración por partes anterior nos ha permitido librarnos del término en η cuya forma concreta era desconocida y del cual solo conocíamos su derivada. Gracias a este trabajo previo, solo contamos con una expresión en la perturbación del control, definida en (2.8). Dada la completa generalidad con la que esta ha sido escogida de entre las funciones continuas a trozos, y asumiendo que H_u^* es una función continua, podemos concluir que:

$$H_u(t, x^*(t), u^*(t), p^*(t)) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f]. \quad (2.24)$$

Esto es, fijado un tiempo t , $u^*(t)$ es un punto estacionario de $H(t, x^*(t), u, p^*(t))$, siendo $x^*(t)$ y $p^*(t)$ las soluciones del sistema diferencial acoplado

$$x^{*'} = H_p^*, \quad p^{*'} = -H_x^*, \quad (2.25)$$

con las condiciones de contorno

$$x^*(t_0) = x_0, \quad p^*(t_f) = -K_x(x^*(t_f)), \quad (2.26)$$

donde hemos escrito de manera compacta el sistema de control y la ecuación de $p^*(t)$ mediante el uso del hamiltoniano.

Fijémonos de qué forma aparece aquí el momento, $p(t)$, pues en principio $p(t)$ son unas funciones cualesquiera que multiplican a la restricción al ser introducida en el integrando del funcional. Por otra parte, $p^*(t)$ se corresponde con una elección muy particular de función, la solución del sistema anterior, que nos permitirá expresar la variación de una forma muy conveniente. Notemos también como esta definición parece generalizar la definición de *momento óptimo* obtenido en el desarrollo de cálculo de variaciones: basta considerar un sistema de control donde la velocidad coincida con el control, esto es, $x' = u$, y entonces p^* vendrá dado 2.25 tomando $u^* = x'^*$, es decir, $p^{*'} = -H_x(t, x^*, x'^*)$.

Segunda variación.- Si mantenemos la elección de $p^*(t)$ como función que multiplica a la restricción podemos calcular la segunda variación simplemente considerando el control perturbado $u = u^* + \chi\epsilon$ y la trayectoria perturbada $x = x^* + \eta\epsilon + \zeta\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$, donde $\zeta = x_{\epsilon\epsilon}$. Desarrollando pues, a orden de ϵ^2 , de forma análoga a lo anterior, obtenemos la expresión para la segunda variación

$$\delta^2 J_{u^*}(\chi) = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\eta^T \quad \chi^T) \begin{pmatrix} H_{xx}^* & H_{xu}^* \\ H_{ux}^* & H_{uu}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \chi \end{pmatrix} dt + \frac{1}{2} \eta^T K_{xx}(x^*(t_f)) \eta. \quad (2.27)$$

Al igual que hicimos en la deducción de la condición necesaria de segundo orden en el problema básico del calculo variacional (**condición de Legendre**), nuestro objetivo será buscar el término dominante en el integrando, pues será el que imponga su signo sobre el resto. Dado que la condición necesaria general de segundo orden nos decía que $\delta^2 J_{u^*}(\eta) \geq 0$, dicho término dominante deberá ser menor o igual que 0 (pues tenemos un signo menos delante de la integral).

No vamos a construir una demostración rigurosa de cual es el término dominante (que se puede encontrar en [2]), sino que vamos a dar algunas breves pinceladas que nos permitan formarnos una idea intuitiva al respecto. Es claro que el carácter dominante de los 4 sumandos que hay en la integral $(\eta^T H_{xx}^* \eta, \chi^T H_{xu}^* \eta, \eta^T H_{ux}^* \chi, \chi^T H_{uu}^* \chi)$ vendrá marcado por las perturbaciones que los multiplican. Tendremos pues, que estudiar cómo son de “grandes” las perturbaciones del control y la trayectoria relativamente. Recordemos que χ es en principio una función continua a trozos completamente arbitraria mientras que, sin embargo, η es una función derivada de χ a través de la ecuación diferencial: $\eta' = A^*(t)\eta + B^*(t)\chi$. Podemos pensar intuitivamente que lo que varía realmente de forma arbitraria es χ y la derivada de η . De este modo, aunque η' sea grande, a consecuencia de que χ lo es, no tiene porque serlo η : por tanto, en base a este argumento, el término que se impondrá al resto será $H_{uu}^* \chi^2$ (de manera análoga a como ocurría en la deducción de la condición de Legendre). Consecuentemente H_{uu}^* debe ser semidefinido negativo,

$$H_{uu}(t, x^*(t), u^*(t), p^*(t)) \leq 0. \quad (2.28)$$

Si recordamos la condición anteriormente deducida ($H_u^* = 0$) todo *parece indicar* que $u^*(t)$ va a ser un máximo del hamiltoniano, visto este como una función de u al fijar previamente $(t, x^*(t), p^*(t))$. Sin embargo, hay que tener en cuenta que no hemos probado en ningún momento que $u^*(t)$ sea un punto extremo de $H(t, x^*(t), u, p^*(t))$, solo hemos indicado que se cumple una condición necesaria (de primer orden) para que, efectivamente lo sea (y en caso de ser así, gracias a esta segunda variación, podríamos concluir que es un máximo).

Tras los desarrollos anteriores podemos formarnos una idea de cuales pueden ser las **condiciones necesarias de optimalidad** en el marco de teoría del control: *Si $u^*(t)$ es un control óptimo del problema planteado al inicio del punto y $x^*(t)$ es la correspondiente trayectoria generada por él, entonces debe existir una función $p^*(t)$ cumpliendo:*

- x^* y p^* satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x^{*'} = H_x^*, \quad p^{*'} = -H_p^*, \quad \text{con condiciones de contorno } x^*(t_0) = x_0, \quad p^*(t_f) = -K_x(x^*(t_f)). \quad (2.29)$$

- Para cada t fijo la función $u \rightarrow H(t, x^*(t), u, p^*(t))$ tiene un máximo (local) en $u = u^*(t)$,

$$H(t, x^*(t), u^*(t), p^*(t)) \geq H(t, x^*(t), u, p^*(t)), \quad (2.30)$$

para todo u cerca de $u^*(t)$ y para todo $t \in [t_0, t_f]$.

2.3 El principio del máximo

En este apartado vamos a enunciar el principio del máximo, aunque no lo demostraremos, ya que su prueba es, aunque interesante, muy extensa [2, 4].

2.3.1 Enunciado del principio del máximo

Para enunciar el teorema (una de sus múltiples variantes), trataremos **el problema básico de control de estado final fijo y tiempo final libre** que se corresponde con el problema expuesto en la sección anterior con las siguientes modificaciones: ni el sistema de control f , ni el lagrangiano L , dependen explícitamente de t , las funciones f , f_x , L y L_x son continuas. Es decir, tanto f como L verifican el conjunto de hipótesis que impusimos en el apartado de **sistema de control** para garantizar la existencia de solución del mismo, hipótesis que, sabemos, son más restrictivas que las realmente necesarias para garantizar esto último. El conjunto objetivo, como el propio nombre del problema sugiere, es de la forma $S = [t_0, \infty) \times \{x_f\}$ y el coste final es idénticamente nulo, es decir, $K \equiv 0$. De este modo, el principio del máximo, adaptado al problema planteado en esta sección, sería:

Teorema 2.1 (Principio del máximo). *Sea $u^* : [t_0, t_f] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ el control óptimo (en sentido global) y sea $x^* : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la correspondiente trayectoria óptima que el control genera para el funcional $J(u) = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t))dt$, con $n \geq 1$ y $m \geq 1$. Entonces existe una función $p^* : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y una constante $p_0^* \leq 0$ tales que $(p_0^*, p^*(t)) \neq (0, 0)$ para todo $t \in [t_0, t_f]$ y cumplen:*

1. x^* y p^* satisfacen las ecuaciones canónicas:

$$x^{*'} = H_p(x^*, u^*, p^*, p_0^*), \quad p^{*'} = -H_x(x^*, u^*, p^*, p_0^*), \quad (2.31)$$

sujetas a las condiciones de contorno $x^(t_0) = x_0$ y $x^*(t_f) = x_f$, donde el hamiltoniano $H : \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ se define como*

$$H(x, u, p, p_0) := \langle p, f(x, u) \rangle + p_0 L(x, u). \quad (2.32)$$

2. Para cada tiempo t fijado, la función $u \rightarrow H(x^*(t), u, p^*(t), p_0^*)$ presenta un máximo en $u = u^*(t)$, es decir, se cumple que $\forall t \in [t_0, t_f]$ y $\forall u \in U$,

$$H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), p_0^*) \geq H(x^*(t), u, p^*(t), p_0^*). \quad (2.33)$$

3. $H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), p_0^*) = 0$ para todo $t \in [t_0, t_f]$.

La elección de este problema “básico” está enfocada a facilitar su reformulación de cara a otros problemas. Por ejemplo, podemos pensar que el hecho de que el problema sea autónomo (no dependencia con t) puede suponer una gran restricción. Pero, en realidad, esto puede subsanarse de forma relativamente fácil: si f o L dependen explícitamente de t basta definir una nueva variable, la $n + 1$, cumpliendo que $x_{n+1} = t$. Se verifica por tanto que la recién definida componente $n + 1$ de la función f es idénticamente igual a 1 pues, $x_{n+1}' = f_{n+1}(x, x_{n+1}, u) \equiv 1$ mientras que L puede reescribirse simplemente como $L(x_{n+1}, x, u)$. Evidentemente no todas estas manipulaciones

son gratuitas, en este caso el precio a pagar es el aumento necesario de regularidad que hemos de exigir en f y L . Al plantear el problema de control óptimo, impusimos el conjunto de hipótesis: f , f_x, L, L_x fuesen continuas. Al incorporar t como una variable más de estado obligamos a que f_t y L_t sean continuas. Si recordamos el conjunto de hipótesis de regularidad que impusimos sobre f (y, en estos problemas, también sobre L) en la descripción del sistema de control, la que al tiempo respecta se limitaba a exigir continuidad, pero no diferenciabilidad. Por otra parte, la presencia o no de un coste final también puede subsanarse pasando de un funcional con coste de Lagrange L y coste final (que supondremos, para mayor generalidad, dependiente también de t) K a un lagrangiano de la forma $\tilde{L} := L + K_t + K_x f$.³

Por último, y de cara a la aplicación futura que realizaremos de esta teoría, enunciaremos un teorema aplicado a sistemas lineales, en el marco del principio del máximo. El problema que abordaremos en este último teorema presenta el siguiente perfil:

Definición 2.2 (Problema de control lineal). Consideremos el sistema de control lineal en las variables y los parámetros,

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad (2.34)$$

con $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u : \mathbb{R} \rightarrow U$, siendo U un paralelepípedo m -dimensional y A y B son dos matrices de dimensiones adecuadas. Consideremos el problema de llevar el sistema de un valor x_0 a un valor x_f en el menor tiempo posible (problema de optimización temporal). Supongamos que se verifica la siguiente hipótesis de **controlabilidad**,

$$b_i, Ab_i, A^2b_i, \dots, A^{n-1}b_i, \quad (2.35)$$

donde b_i conforman las columnas de B , constituyen, para cada $i = 1, \dots, m$, una base de \mathbb{R}^n . Esta hipótesis garantizará que $p^*(t)$ este bien definido salvo $n-1$ puntos.

Bajo estas hipótesis podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 2.2 (Principio del máximo en sistemas lineales). Si todos los autovalores de A son reales entonces los controles óptimos serán de la forma **bang-bang**, esto es, tomarán los valores más extremos de su dominio de definición y presentarán, a lo sumo, $n-1$ cambios de valor.

2.3.2 El principio del máximo en acción: aparcando un coche con aceleración acotada

Para ilustrar la potencia del principio del máximo planteemos un ejemplo muy sencillo que logra capturar las carencias que presenta el cálculo en variaciones ante restricciones que aparecen de manera natural en numerosos problemas. Supongamos un coche que se encuentra en un

³Con la notación habitual en física, $K_t + K_x f$ se escribiría como dK/dt , donde d/dt representa la derivada temporal sobre la trayectoria $x(t)$.

tiempo $t_0 = 0$ en una posición x_{10} y con una velocidad x_{20} . Supongamos también que deseamos aparcar este coche en el origen en el menor tiempo posible, teniendo en cuenta que la capacidad de aceleración de nuestro coche no es infinita y que se encuentra acotada en el intervalo $U = [-1, 1]$.

Si deseásemos abordar el problema empleando las herramientas del cálculo variacional nos encontramos ante distintas dificultades. Notemos por $x_1(t)$ y $x_2(t)$ la posición y velocidad del coche en el instante de tiempo t , respectivamente. Para minimizar el tiempo, podríamos definir el funcional como $J(x_1, x_2, u) = \int_{t_0}^{t^*} 1 dt$, pero no aplicar ninguna de las dos condiciones (Euler-Lagrange y Legendre) obtenidas anteriormente, pues δJ y δJ^2 son nulos. Esta dificultad es salvable introduciendo las ecuaciones del movimiento como “restricciones holónomas” con una extensión del método de los multiplicadores de Lagrange.⁴ Pero tenemos otra dificultad que no es salvable: no podemos incluir las restricciones de desigualdad, “no holónomas”, para la aceleración, $-1 \leq x'' \leq 1$.

En el marco de la teoría del control óptimo podemos plantear el problema anterior de manera natural. *La posición y velocidad del coche en el instante de tiempo t evolucionan en el tiempo de acuerdo con el sistema*

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = u, \quad (2.36)$$

donde el control presenta un rango $u \in [-1, 1]$. Se desea llevar al sistema desde un punto $(x_1(t_0), x_2(t_0))$ hasta el punto $(x_1(t^*) = 0, x_2(t^*) = 0)$ en el menor tiempo posible (donde t^* se define, como ya se comentó en la sección 3.1, como el menor de los tiempos en los que la trayectoria interseca el punto $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ del espacio de las fases).

En vista del sistema de control, nos encontramos ante un problema lineal de la forma

$$x' = Ax + bu, \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

que verifica las condiciones para la aplicación del teorema 2.2 puesto que el autovalor de A es 0, el conjunto $\{b, Ab\}$ conforma una base de \mathbb{R}^2 y el rango del control es un intervalo de \mathbb{R} . Por tanto, sabemos que todos los controles óptimos, en caso de existir, adoptarán los valores 1 y -1 con, a lo sumo, un cambio entre estos dos valores. Aunque no nos extenderemos en la discusión de aspectos sobre existencia y unicidad (para más información consultar [4]), sí que nos gustaría indicar que la existencia de un control cualquiera que conecte los estados inicial y final garantiza la existencia del control u^* óptimo. En este caso concreto la existencia de este control queda asegurada por el teorema de Filippov [2]. De este modo, la forma más genérica de estos controles será, dependiendo de las condiciones iniciales (y pudiendo t_j ser nulo)

⁴La idea intuitiva es que el tiempo se hace mínimo sobre el conjunto de soluciones de las ecuaciones del movimiento. Una discusión general del uso de multiplicadores de Lagrange en el contexto del cálculo variacional se puede encontrar en la Ref. [1], y una aplicación a un problema físico para la minimización del tiempo de conexión en la Ref. [5].

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } t \leq t_j, \\ 1, & \text{si } t > t_j, \end{cases} \quad (2.38) \quad u^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \leq t_j, \\ -1, & \text{si } t > t_j, \end{cases} \quad (2.39)$$

anulándose ambos en t^* para que el coche quede inmóvil en el origen.

Establecido lo anterior, el único parámetro que debemos determinar para poder definir de manera unívoca el control óptimo es el tiempo de cambio t_j . Para ello podemos aplicar la condición de máximo sobre el hamiltoniano, que en este problema adopta la forma $H(x_0, x_1, x_2, p_0, p_1, p_2, u) = p_0 + p_1 x_2 + p_2 u$. Claramente el máximo de la función $u \rightarrow H(u)$ se alcanza en los extremos del intervalo U , dependiendo del signo de p_2 . Por tanto la expresión de u será

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \text{sgn}(p_2^*(t)) > 0, \\ -1, & \text{si } \text{sgn}(p_2^*(t)) < 0, \end{cases} \quad (2.40)$$

Podemos hallar la expresión de $p_2(t)$ empleando las ecuaciones canónicas

$$p_1^* = -H_{x_1} = 0, \quad p_2^* = -H_{x_2} = p_1^*. \quad (2.41)$$

Por tanto, $p_1^*(t) = c_1$ y $p_2^*(t) = c_1 t + c_2$ y el tiempo de cambio será $t_j = -\frac{c_2}{c_1}$. Del mismo modo podemos hallar las trayectorias $(x_1(t), x_2(t))$, teniéndose $x_2(t) = x_{20} + ut$ y $x_1(t) = x_{10} + x_{20}t + \frac{1}{2}ut^2$. Por otro lado, sabemos que $H^* \equiv 0$ para todo tiempo, particularmente para t_j

$$H^* \left(t_j = -\frac{c_2}{c_1} \right) = -1 + c_1 \left(x_{10} + x_{20}t_j + \frac{1}{2}ut_j^2 \right) = 0, \quad (2.42)$$

donde hemos tomado $p_0 = -1$ pues H está indeterminado en una constante multiplicativa⁵ y donde $u = \pm 1$ dependiendo de las condiciones iniciales.

Llegados a este punto podemos hacer uso de la intuición física para saber qué valor comenzará adoptando u durante la primera ventana temporal: para $x_{10} < 0$ se tiene que $u = +1$ durante el primer intervalo de tiempo y para $x_{10} > 0$ se tendrá que $u = -1$. Por tanto tenemos dos ecuaciones a resolver según la condición inicial para x_1 , una en la que se fija $u = 1$ en (2.42) y otra en la que se fija $u = -1$. Sin embargo, en cada caso tenemos dos incógnitas, c_1 y c_2 , por lo que necesitaremos una segunda ecuación para poder despejar la cual puede obtenerse imponiendo la condición $H^* \equiv 0$ en el tiempo inicial $t_0 = 0$,

$$H^*(t = 0) = -1 + c_1 x_{20} + c_2 u = 0, \quad (2.43)$$

donde u adquiere nuevamente los valores discutidos en el párrafo anterior. De este modo los sistemas a resolver son, según las condiciones iniciales:

⁵Basta comprobar que, si multiplicamos H y p por la misma constante, las ecuaciones canónicas quedan invariantes, por lo que existe libertad para fijar la componente p_0 del vector de momentos.

Para $x_{10} < 0$

$$\begin{aligned} -1 + c_1 \left[x_{10} + x_{20} \left(-\frac{c_2}{c_1} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \right] &= 0, \\ -1 + c_1 x_{20} + c_2 &= 0, \end{aligned}$$

(2.44)

Para $x_{10} > 0$

$$\begin{aligned} -1 + c_1 \left[x_{10} + x_{20} \left(-\frac{c_2}{c_1} \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \right] &= 0, \\ -1 + c_1 x_{20} - c_2 &= 0. \end{aligned}$$

(2.45)

Podemos despejar c_1 y c_2 y el tiempo t_j en función de las condiciones iniciales:

- Para $x_{10} < 0$.

Si se cumple que $3x_{20}^2 + 2x_{10} \neq 0$, entonces se tiene

$$c_1 = \frac{\left(1 + 2x_{20} \pm \sqrt{1 - 4x_{20} + x_{20}^2 + 2x_{10}} \right)}{3x_{20}^2 - 2x_{10}}, \quad c_2 = 1 - c_1 x_{20}. \quad (2.46)$$

y por tanto t_j puede escribirse como el menor positivo del siguiente conjunto de dos elementos,

$$t_j = \min_{t_j > 0} \left\{ x_{20} - \frac{3x_{20}^2 - 2x_{10}}{\left(1 + 2x_{20} \pm \sqrt{1 - 4x_{20} + x_{20}^2 + 2x_{10}} \right)} \right\}. \quad (2.47)$$

Si, por lo contrario, se verifica la relación $3x_{20}^2 + 2x_{10} = 0$, se tiene que no hay solución. En consecuencia, la curva descrita por $3x_{20}^2 + 2x_{10} = 0$ en el espacio de las fases conforma la curva de cambio para $x_{10} < 0$.

- Para $x_{10} > 0$.

Si se cumple que $3x_{20}^2 - 2x_{10} \neq 0$, entonces se tiene

$$c_1 = \frac{\pm \left(1 - 2x_{20} + \sqrt{1 - 4x_{20} + x_{20}^2 + 2x_{10}} \right)}{3x_{20}^2 - 2x_{10}}, \quad c_2 = -1 + c_1 x_{20}. \quad (2.48)$$

Por tanto, t_j puede escribirse como el menor positivo del siguiente conjunto de dos elementos,

$$t_j = \min_{t_j > 0} \left\{ -x_{20} \pm \frac{3x_{20}^2 - 2x_{10}}{\left(1 - 2x_{20} + \sqrt{1 - 4x_{20} + x_{20}^2 + 2x_{10}} \right)} \right\}. \quad (2.49)$$

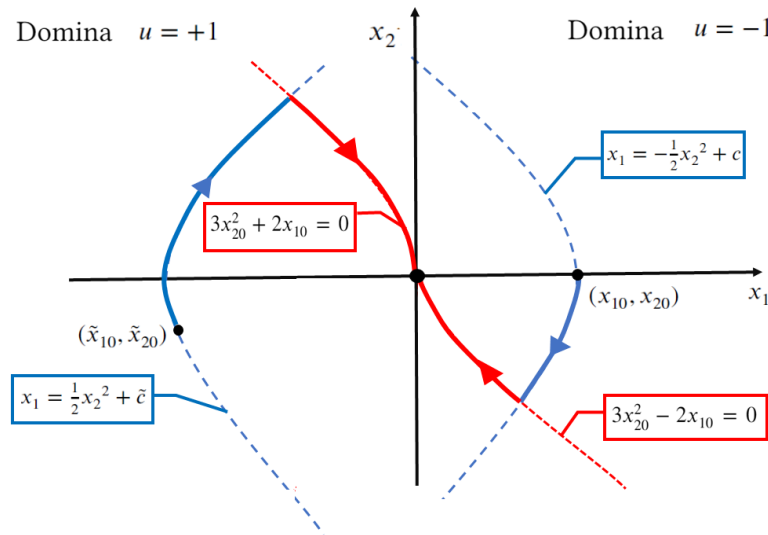


Figura 2.1: Trayectorias en el espacio de las fases. Curva de cambio (línea roja punteada) y trayectorias (línea sólida azul y roja) para dos condiciones iniciales diferentes, $(\tilde{x}_{10}, \tilde{x}_{20})$ y (x_{10}, x_{20}) . Las flechas indican el sentido en que se recorren las curvas.

Si, por lo contrario, se verifica la relación $3x_{20}^2 - 2x_{10} = 0$ se tiene que no hay solución: la curva descrita por $3x_{20}^2 - 2x_{10} = 0$ en el espacio de las fases conforma la curva de cambio para $x_{10} > 0$.

Podemos entender de manera más gráfica lo que ocurre con las trayectorias pasando al espacio de las fases (x_1, x_2) , donde se verifica la relación $x_1 = \pm \frac{1}{2}x_2^2 + c$ para $u = \pm 1$ respectivamente y c es una constante función de las condiciones de contorno. Sabemos que bajo la acción, o bien de $u = +1$ o de $u = -1$, el sistema debe llegar al punto $(0, 0)$. Bastará por tanto ajustar la constante c para obtener las curvas en el espacio de las fases que para ambos valores del control intersequen el $(0, 0)$. La unión de estas dos curvas (esto es, $3x_{20}^2 + 2x_{10} = 0$ si $x_{10} < 0$ y $3x_{20}^2 - 2x_{10} = 0$ si $x_{10} > 0$) conforma la curva de cambio. Además sabemos que cuando $x_{10} > 0$ debe actuar primero $u = -1$, por ende la trayectoria física será en este caso $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + c$ para la c correspondiente hasta alcanzar la curva de cambio, donde se invierte el valor del control a $u = +1$ y el sistema se mueve bajo la acción del nuevo control hasta el origen. Análogamente, si $x_{10} < 0$ el sistema comienza moviéndose bajo el efecto de $u = +1$ describiendo la parábola $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + c$ hasta intersecar la curva de cambio, a partir de ese momento $u = -1$ y con este valor del control alcanza el origen, tal y como se muestra en la figura 2.1.

Nos gustaría destacar que una vez alcanzado el punto $(0, 0)$ el control deberá cambiar instantáneamente al valor $u(t) = 0$ para $t \geq t^*$, a fin de mantener el coche en el origen (velocidad nula) para tiempos superiores a t^* . Este salto del control no afecta al carácter óptimo del mismo.

Parte II

Aplicación a sistemas lejos del equilibrio

3 | Minimización del tiempo de conexión

3.1 Medios granulares

El estudio de medios granulares, más allá del propio interés teórico que suscita, es de vital importancia en el ámbito de la industria y en la mejora del transporte y almacenamiento de multitud de productos, desde agrícolas hasta farmacéuticos. Los materiales granulares son conglomerados discretos de partículas macroscópicas que exhiben dos características fundamentales:

- **La temperatura ordinaria no desempeña ningún papel relevante:** a diferencia de los gases ordinarios, donde el término $k_B T$ establece una escala energética, en los medios granulares esta cantidad resulta irrelevante frente a, por ejemplo, la energía potencial gravitatoria, que es típicamente 10^{12} veces superior en magnitud a la térmica. En vista de este hecho es posible definir una **temperatura granular** que mide de las fluctuaciones de la velocidad respecto de su media, permitiendo así recuperar ciertas herramientas “termodinámicas” para abordar el estudio de estos medios.
- **La interacción entre los granos es disipativa:** a causa de las colisiones inelásticas y la fricción estática. La no conservación de la energía tiene importantes consecuencias conceptuales, ya que su conservación en los sistemas moleculares permite la separación de escalas de tiempo necesaria para, por ejemplo, establecer una descripción hidrodinámica.

Dependiendo del estado de movimiento de los granos vamos a poder diferenciar entre estado sólido, líquido o gaseoso de un medio granular. Examinemos a continuación algunas de sus características más peculiares, que hacen de los medios granulares un interesante campo de estudio.

Sólidos granulares.- Consideremos un medio granular en reposo (por ejemplo, arena) contenido en un cilindro. Puede comprobarse como en ese estado la presión en la base del cilindro se vuelve, a partir de una cierta altura, independiente de esta (a diferencia de lo que ocurre con los líquidos convencionales) [6]. Este comportamiento particular implica que el exceso de presión que no recae en la base sea soportado por las paredes del recipiente. Otras características propias de los sólidos granulares son, por una parte, la gran sensibilidad que presentan las redes de fuerzas generadas en el medio a la disposición de los granos del mismo, cuando este es sometido a alguna

tensión. Por otra parte, estos medios presentan una gran aleatoriedad en el empaquetamiento: cambia dependiendo del procedimiento seguido a la hora de verter los granos en el cilindro. Se ha comprobado que la fracción de empaquetamiento, η , varía entre dos valores extremos: $\eta = 0.55$ y $\eta = 0.64$, pudiendo pasar de una fracción a otra a través de vibraciones externas que permitan al sistema explorar el “espacio de las fases” [7].

Líquidos granulares.- Los medios granulares pueden fluir, lo que abre una puerta a la creación de modelos continuos en el seno de lo que se conoce como hidrodinámica granular. Estas teorías deben enfrentar el problema de la escala espacial y temporal adecuada para el tratamiento de los flujos granulares, que no se haya tan bien diferenciada de la escala macroscópica y microscópica, como sí ocurre con los fluidos “ordinarios” o moleculares. Del mismo modo, debe lidiar con el hecho de que los flujos lentos y densos son no ergódicos y los flujos rápidos experimentan fenómenos de aglutinamiento, que deben tener cabida en esta teoría [6]. Así mismo, debe ser capaz de explicar la transición entre ambos estados (flujos rápidos y lentos), pues en sistemas reales, debido a la disipación de energía, ambos pueden convivir de manera simultánea. Los fluidos granulares muestran comportamientos de difícil explicación y que son objeto de debate e investigación: la causa de los procesos convectivos y de aglutinamiento inducidos por vibraciones externas y el papel que juega en estos procesos el gas intersticial, así como la causa de la separación por tamaño de grano, lo que se conoce como fenómeno de segregación o “Brazil nut problem” [8, 9].

Gases granulares.- La principal diferencia entre gases granulares y gases convencionales reside en el carácter no conservativo de las interacciones grano-grano. En las colisiones grano-grano parte de la energía se “pierde”, almacenándose en grados internos de libertad o disipándose al entorno. Esto impide, en principio, aplicar teorías fuertemente asentadas en los gases convencionales, como por ejemplo la teoría de gases ideales. Hay grandes interrogantes abiertos en el campo de los gases granulares, como por ejemplo el papel de los grados de libertad de rotación durante una colisión o la dependencia respecto a la velocidad de los granos de las fuerzas de fricción.

El modelo que emplearemos para describir el gas granular con el que vamos a tratar en las siguientes secciones está basado en un parámetro, α , conocido como coeficiente de restitución. Los granos se modelan como esferas duras lisas: en una colisión binaria, la velocidad relativa tangencial permanece inalterada mientras que el signo de la velocidad relativa normal se invierte y su módulo se reduce por un factor α .¹ La pérdida de energía en una colisión es entonces proporcional a $1 - \alpha^2$, $\alpha = 1$ corresponde al límite elástico y $\alpha = 0$ al límite completamente inelástico. Dicho coeficiente será considerado como una constante propia del gas en nuestro modelo, aunque esta simplificación resulta en ocasiones insuficiente para explicar ciertos fenómenos que presentan estos gases [10].

¹Aquí tangencial (normal) se refiere a perpendicular (paralelo) a la recta que une los centros de las dos esferas en la colisión.

3.2 Descripción del sistema

Consideremos un gas granular de densidad n , coeficiente de restitución α , bi o tridimensional, conformado por discos o esferas duras respectivamente, de masa m y diámetro σ . Para un gas de este tipo la función de distribución de velocidades de una partícula no se corresponde con la de Maxwell, debido a la acción de las colisiones inelásticas. Sin embargo, es posible presentar una solución aproximada en términos de los denominados polinomios de Sonine, como veremos a continuación [10].

A la hora de estudiar el gas granular consideraremos dos situaciones. Una primera, a modo ilustrativo, donde el sistema estará libre de fuerza alguna y la evolución de la función de distribución de velocidades monoparticular $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ vendrá descrita por la ecuación de Enskog-Boltzmann inelástica. Como segundo caso, sobre el que trabajaremos con más profundidad, abordaremos la situación en la que se inyecta energía al sistema mediante la aplicación de una fuerza de tipo “ruido blanco” (lo que se conoce en la bibliografía como “termostato estocástico” [11]). Esto introducirá en la ecuación de evolución de la distribución de velocidades un término de difusión de Fokker-Planck, pero cuya solución puede desarrollarse de manera análoga al caso sin termostato.

Estado de enfriamiento homogéneo (HCS).- Consideremos un gas granular homogéneo de densidad n y coeficiente de restitución $\alpha=1$ sobre el cual no se aplica ninguna fuerza y que se deja evolucionar libremente (estado de enfriamiento homogéneo, HCS por sus siglas en inglés). Tras un transitorio, el sistema llega a un estado en que toda la dependencia temporal en la función de distribución de velocidades se produce a través de la temperatura (granular) [10]. En este régimen, podemos reescribir dicha función como

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{n}{(v_0(t))^d} \tilde{f}\left(\frac{\vec{v}}{v_0(t)}\right), \quad (3.1)$$

donde $d = 2, 3$ es la dimensión donde estamos tratando el problema y $T(t) = \frac{1}{2}mv_0(t)^2$. La temperatura granular se relaciona con el momento de segundo orden de la distribución de velocidades a través de la expresión

$$\frac{d}{2}nT(t) = \int d\vec{v} \frac{1}{2}mv^2 f(\vec{v}, t). \quad (3.2)$$

Es esperable que, bajo la hipótesis de baja inelasticidad, la solución dada por (3.1) sea próxima a la distribución de Maxwell. Para ello resulta muy conveniente desarrollar la función escalada $\tilde{f}(\vec{c})$, siendo $\vec{c} = \vec{v}/v_0(t)$, en términos de los polinomios de Sonine S_p [11],

$$\tilde{f}(\vec{c}) = \phi(c) \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p S_p(c^2) \right). \quad (3.3)$$

Los polinomios de Sonine conforman un conjunto completo de funciones ortogonales con peso la distribución de Maxwell $\phi(c) = \pi^{-\frac{d}{2}} e^{-c^2}$. Puede obtenerse una relación entre los momentos de orden $2k$ de la función de distribución, $\langle c^{2k} \rangle$, y los coeficientes a_p que acompañan a los polinomio de Sonine en el desarrollo (3.2) [10]. Esta relación, junto a la definición de temperatura, permite concluir que $\langle c^2 \rangle = d/2$ y $a_1 = 0$. A fin de determinar el resto de coeficientes a_p , se escriben las ecuaciones de evolución de los momentos $\langle c^{2k} \rangle$, lo que involucra los denominados “momentos colisionales” μ_{2k} . Esto conduce a una jerarquía infinita de ecuaciones, que se cierra introduciendo hipótesis adecuadas. La más habitual es la denominada primera aproximación de Sonine, en la cual todos los coeficientes a_p con $p > 2$ se desprecian, así como los términos no lineales en a_2 . Dentro de esta aproximación, se obtiene el coeficiente a_2 en el HCS [11, 12],

$$a_2^{HCS} = \frac{16(1-\alpha)(1-2\alpha^2)}{73 + 56d - 54d\alpha - 105\alpha + 30(1-\alpha)\alpha^2}. \quad (3.4)$$

Podríamos tratar de hallar el resto de coeficientes para $p > 2$ realizando aproximaciones de orden superior. Sin embargo, se ha comprobado que dichos coeficientes presentan valores muy bajos en comparación con el coeficiente a_2 . Esto es así incluso para valores de α correspondientes al límite completamente inelástico, $\alpha \rightarrow 0$; las correcciones que estos introducen a la función de distribución pueden despreciarse una vez incorporado el término $a_2 S_2(c^2)$ al desarrollo. Por otra parte, en lo que respecta a la temperatura, esta relajará desde el valor inicial T_0 hasta anularse siguiendo la conocida como ley de Haff, que muestra un decaimiento algebraico, básicamente $T \sim t^{-\frac{1}{2}}$ [10].

Sistema uniformemente calentado.- Consideremos ahora el sistema que será sujeto de nuestro estudio: un gas granular sometido a un termostato estocástico [11, 12]. Este presenta la forma de un ruido blanco gaussiano, descorrelacionado, sobre cada partícula, de varianza $m^2 \xi^2$. Esta fuerza compensará las pérdidas de energía por disipación² y permitirá al sistema alcanzar un estado estacionario (de no equilibrio). A partir de la ecuación de Enskog-Boltzmann con un término de difusión de tipo Fokker-Planck, introducido por el termostato, se puede deducir las ecuaciones de evolución de T y a_2 [11],

$$T' = \zeta_0 \left[\chi \left(1 + \frac{3}{16} a_2^s \right) - T^{3/2} \left(1 + \frac{3}{16} a_2 \right) \right], \quad A'_2 = \frac{2\zeta_0}{T} \left[(T^{3/2} - \chi) a_2 + B T^{3/2} (a_2^s - a_2) \right], \quad (3.5)$$

donde tenemos varios parámetros: ζ_0 , B , T_s y a_2^s (los dos últimos son los valores estacionarios de T y a_2 que alcanza el sistema gracias al balance energético entre el termostato y la disipación). Estos parámetros vienen dados por

$$T_s^{3/2} = \frac{m\xi^2}{\zeta_0 \left(1 + \frac{3}{16} a_2^s \right)} \equiv \chi, \quad \zeta_0 = \frac{2nd\sigma^{d-1}(1-\alpha^2)\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\sqrt{md}\Gamma(d/2)}, \quad (3.6a)$$

²Esto es, es previsible que el coeficiente a_2^s (valor de a_2 en estado estacionario) disminuya en valor absoluto respecto a su valor en el HCS.

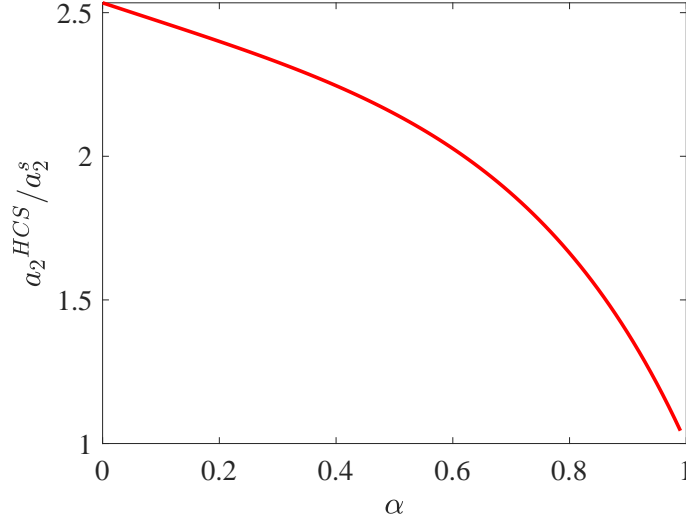


Figura 3.1: Cociente a_2^{HCS}/a_2^s frente a α . El cociente es mayor que la unidad, lo que se entiende teniendo en cuenta el efecto “gaussianizador” del termostato: el valor absoluto de la kurtosis, que mide la desviación respecto de la distribución de Maxwell, es siempre mayor en el HCS.

$$a_2^s = \frac{16(1-\alpha)(1-2\alpha^2)}{73+56d-24d\alpha-105\alpha+30(1-\alpha)\alpha^2}, \quad B = \frac{a_2^{HCS}}{a_2^{HCS}-a_2^s}. \quad (3.6b)$$

El valor de B asegura que a_2 tiende a a_2^{HCS} en el límite $\chi \rightarrow 0^+$ [13]. Nótese que a_2^s es independiente de la intensidad del termostato, χ , y solamente depende de (d, α) .

Como ya comentamos antes, la acción del termostato disminuye las desviaciones respecto al estado gaussiano debidas a las colisiones inelásticas, por lo que es de esperar que $a_2^{HCS}/a_2^s > 1$ para cualquier valor de α y que crezca conforme lo haga el efecto de la inelasticidad, medida por $1 - \alpha$. Efectivamente, esto es lo que sucede, como se muestra en la figura 3.1. Supongamos ahora que deseamos conducir al sistema de un estado estacionario inicial (T_i, a_{2i}) a un estado final (T_f, a_{2f}) , también estacionario. Para tratar el problema resulta conveniente adimensionalizar las variables T , χ y t empleando la variable T_f

$$T^* = \frac{T}{T_f}, \quad \chi^* = \frac{\chi}{T_f^{3/2}}, \quad t^* = \zeta_0 T_f^{1/2} t. \quad (3.7)$$

Por otra parte, para facilitar la comprensión de la dinámica del sistema, definiremos la variable

$$A_2 = a_2/a_2^s, \quad (3.8)$$

que jugará el papel de a_2 , pero es igual a la unidad en el estado estacionario y permanece siempre

positiva.³ De este modo el sistema equivalente a (3.5) con las nuevas variables sería

$$T' = \chi(1 + \frac{3}{16}a_2^s) - T^{3/2}(1 + \frac{3}{16}a_2^s A_2), \quad (3.9)$$

$$A_2' = \frac{2}{T} [(T^{3/2} - \chi)A_2 + BT^{3/2}(1 - A_2)]. \quad (3.10)$$

Hemos omitido el superíndice * en las variables adimensionales a fin de no complicar la notación pues, de ahora en adelante mientras no se indique lo contrario, estas serán las variables empleadas. El término $\chi(1 + \frac{3}{16}a_2^s)$ del miembro derecho de (3.9) recoge la inyección de energía debido a la acción del termostato, mientras que el término $-T^{3/2}(1 + \frac{3}{16}a_2^s A_2)$ representa las pérdidas debido a las colisiones inelásticas.

Una vez expuesto el sistema sobre el que trabajaremos, nuestro objetivo reside en diseñar un protocolo temporal $\chi(t)$ para el termostato, que desempeñará el papel del control en el marco del principio del máximo, que nos permita conducir al sistema desde el estado inicial correspondiente a una temperatura (granular) T_i ,

$$T(0) = T_i, \quad A_2(0) = 1, \quad (3.11)$$

hasta otro estado estacionario correspondiente a una temperatura distinta T_f ,

$$T_f \equiv T(t_f) = 1, \quad A_{2f} \equiv A_2(t_f) = 1, \quad (3.12)$$

en el menor tiempo posible. Nótese que nuestra elección de variables adimensionales implica que $T_f = 1$, esto es, tomamos como unidad de temperatura (granular) la temperatura final.

La forma cualitativa de la solución de las ecuaciones (3.9) y (3.10) cuando se mantiene constante el control, $\chi(t) = \chi_f = 1$, aparece recogida en la figura 3.2. En ese caso, la temperatura relaja monótonamente en un tiempo formalmente infinito al valor estacionario $T_f = 1$, mientras que A_2 presenta un comportamiento no monótono. En primer lugar, A_2 se separa de su valor estacionario, la unidad, para pasar por un extremo antes de volver, de nuevo tras un tiempo formalmente infinito, a la unidad cuando llega al estado estacionario final. Como hemos explicado en el párrafo anterior, queremos construir un “atajo” para conectar los estados estacionarios inicial y final en un tiempo finito t_f , introduciendo un protocolo temporal adecuado $\chi(t)$ para la intensidad del termostato.

El caso límite en que la intensidad mínima del termostato χ_{\min} es nula y la máxima χ_{\max} es infinita ha sido abordado en la Ref. [14]. Nuestro objetivo aquí será analizar el régimen lineal, para poder estudiar con más rigor matemático el problema y entender las posibles diferencias entre los dos casos. Para ello, nos ceñiremos a temperaturas iniciales próximas a las temperaturas finales (esto es, $|T_i - 1| \lesssim 0$) y a rangos para la intensidad del termostato próximos a la unidad

³Tanto a_2^{HCS} como a_2^s cambian de signo para $\alpha = 1/\sqrt{2}$.

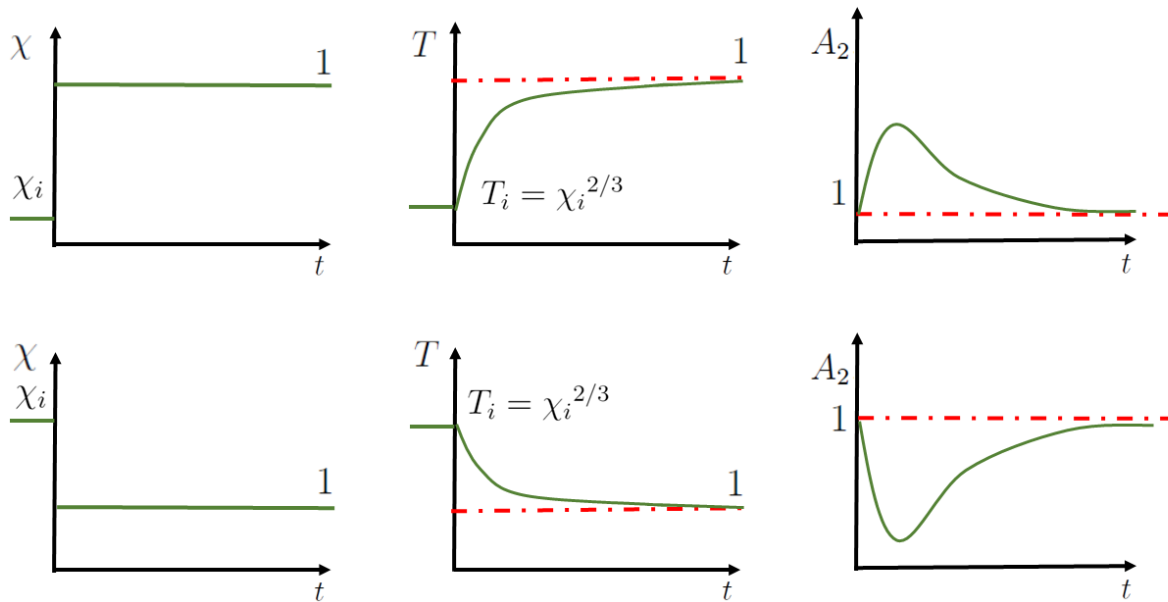


Figura 3.2: Representación cualitativa de las evoluciones temporales del control, la temperatura y el coeficiente A_2 (derecha) en un protocolo tipo escalón. Concretamente, el control χ cambia bruscamente de valor en el instante inicial, $\chi = \chi_i$ para $t < 0$ y $\chi = 1$ para $t > 0$. Los paneles superiores (inferiores) corresponden al caso de calentamiento (enfriamiento). La temperatura evoluciona de modo monótono desde su valor inicial a su valor final, que solamente alcanza en el límite $t \rightarrow \infty$. Por otra parte, el coeficiente A_2 presenta un comportamiento no monótono, ya que su valor inicial y final es el mismo.

(esto es, $\chi_{\max} \gtrsim 1$ y $\chi_{\min} \lesssim 1$). Estas aproximaciones, como veremos en la siguiente secciones, nos permiten restringirnos al régimen lineal y aplicar el teorema (2.2) para construir rigurosamente un control de tipo bang-bang que minimice el tiempo de conexión entre los estados estacionarios de no equilibrio inicial y final.

3.3 Tratamiento matemático del sistema

Si fijamos los valores T_i , χ_{\max} y χ_{\min} próximos a la unidad las trayectorias $T(t)$ y $A_2(t)$ permanecerán también próximas a 1, legitimando así un desarrollo en serie de la forma

$$T = 1 + \delta T + \dots, \quad A_2 = 1 + \delta A_2 + \dots, \quad \chi = 1 + \delta \chi + \dots, \quad (3.13)$$

con $\delta T \ll 1$, $\delta A_2 \ll 1$ y $\delta \chi_{\min}, \delta \chi_{\max} \ll 1$. Introducimos este desarrollo en el sistema de control (3.9) y (3.10) y retenemos hasta primer orden en δT , δA_2 y $\delta \chi$ para escribir un sistema linealizado, que nos permitirá aplicar los teoremas lineales de teoría del control óptimo. Realizando estas sustituciones obtenemos, a primer orden, el sistema

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta T \\ \delta A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ -2 \end{pmatrix} \delta \chi + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\beta & 1 - \beta \\ \frac{2}{3} & -2B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta T \\ \delta A_2 \end{pmatrix}, \quad \beta \equiv 1 + \frac{3}{16} a_2^s. \quad (3.14)$$

3.3.1 Aplicación del principio del máximo a sistemas lineales: comprobación de hipótesis

El siguiente paso a realizar es verificar que se satisfacen las hipótesis del problema lineal para aplicar el teorema (2.2). Dado que nuestro sistema tiene la forma $x' = bu + Ax$ bastará verificar, por un lado, la hipótesis de controlabilidad, y por otro, que los autovalores de la matriz A son reales. Comenzamos estudiando la hipótesis de controlabilidad, es decir, que $\{b, Ab\}$ conforma una base de \mathbb{R}^2 o lo que es equivalente, que el rango de la matriz cuyas columnas son b y Ab es 2. Si calculamos el determinante de dicha matriz obtenemos $4\beta(B + 1) - 4$, teniendo en cuenta que $B, \beta > 1$ para todo valor de α entre $[0, 1]$ podemos concluir que se verifica la hipótesis de controlabilidad, al ser el determinante siempre no nulo. Por último debemos verificar que los autovalores de la matriz A son reales. La expresión para los autovalores es

$$-\lambda_1 = \frac{-\sqrt{\Delta} - 4B - 3\beta}{4}, \quad -\lambda_2 = \frac{\sqrt{\Delta} - 4B - 3\beta}{4}, \quad (3.15)$$

con $\sqrt{\Delta} = \sqrt{16B^2 - 24B\beta + 9\beta^2 - 48\beta + 48}$. Para comprobar que son reales, nos limitaremos a estudiar el signo del discriminante $\Delta = 16B^2 - 24B\beta + 9\beta^2 - 48\beta + 48$. Introduciendo la expresión en Matlab podemos comprobar que el discriminante es positivo (para $d = 2, d = 3$ y $\alpha \in [0, 1]$)

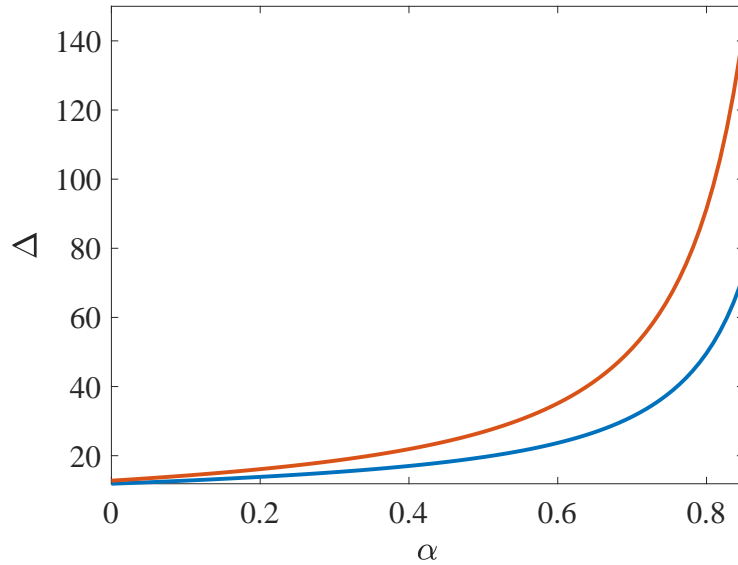


Figura 3.3: Discriminante Δ frente a α para $d = 3$ (rojo) y $d = 2$ (azul). Observamos que el discriminante permanece no negativo para todo α , lo que garantiza el teorema (2.2) es aplicable y, por tanto, el control óptimo es del tipo bang-bang.

como puede comprobarse en la figura 3.3. Por tanto, nos encontramos en las condiciones idóneas para la aplicación del teorema (2.2).

Finalmente, es interesante señalar que los autovalores $-\lambda_1$ y $-\lambda_2$ son ambos negativos, lo que asegura la estabilidad del estado estacionario en la aproximación lineal para un protocolo tipo escalón como el considerado en la figura 3.2. Esto explica la introducción de los signos negativos en los autovalores, así λ_1 y λ_2 son ambos positivos, lo que facilita la discusión posteriormente.

3.3.2 Aplicación del principio del máximo a sistemas lineales: resolución del sistema y cálculo de trayectorias

Antes de aplicar el teorema 2.2 se hace necesario realizar un comentario previo, para dar fundamento a los cálculos que desarrollaremos en esta sección. El teorema 2.2 nos garantiza que, si existe el control óptimo, entonces adopta la forma bang-bang con un único cambio de valor. Sin embargo, no sabemos nada sobre la existencia o unicidad de este control óptimo. Aunque no nos extenderemos en la discusión de estos aspectos (para más información puede consultarse [4]) sí que nos gustaría indicar que la existencia de un control cualquiera que conecte los estados x_0 y x_1 garantiza la existencia del control χ^* óptimo.⁴ Por otra parte, dado que la forma del control solo

⁴La existencia de controles que conectan los estados inicial y final se ha demostrado en [14].

puede ser $\chi_{\max} - \chi_{\min}$ o $\chi_{\min} - \chi_{\max}$ (entendiendo el orden de aparición como el orden en el que toma los valores el control) puede intuirse, a nivel físico, la unicidad de dicho control óptimo una vez han sido fijadas unas condiciones iniciales (para un argumento matemático más riguroso, el cual garantiza la unicidad del control, consultar el capítulo 3 de la Ref. [4]). La forma particular que adopte el control entre esas dos variantes dependerá de las condiciones iniciales que presente el sistema, de modo análogo a lo que vimos en nuestra discusión del problema de aparcamiento con aceleración acotada de la sección 2.3.2.

Puntualizado este aspecto nos disponemos a calcular el tiempo t_j de cambio de los controles, que es el parámetro que falta para poder definir de manera unívoca $\chi(t)$. Dependiendo de las condiciones iniciales se presentan dos protocolos distintos:⁵

■ Para $T_i > 1$:

■ Para $T_i < 1$:

$$\chi(t) = \begin{cases} T_i^{3/2}, & \text{si } t < 0, \\ \chi_{\min}, & \text{si } 0 \leq t < t_j, \\ \chi_{\max}, & \text{si } t_j \leq t < t_f, \\ 1, & \text{si } t \leq t_f, \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\chi(t) = \begin{cases} T_i^{3/2}, & \text{si } t < 0, \\ \chi_{\max}, & \text{si } 0 \leq t < t_j, \\ \chi_{\min}, & \text{si } t_j \leq t < t_f, \\ 1, & \text{si } t \leq t_f. \end{cases} \quad (3.17)$$

Los valores para $t < 0$ o $t \geq t_f$ garantizarán que el sistema parta de un estado estacionario T_i y, tras la aplicación del bang-bang, alcance otro estado estacionario con $T_f = 1$. Para los cálculos que siguen expresaremos todos los resultados finales en términos de las variables que, a nivel práctico, podemos fijar: $\delta T_i = (1 - T_i)$, χ_{\min} (o $\delta \chi_{\min} = \chi_{\min} - 1$) y χ_{\max} (o $\delta \chi_{\max} = \chi_{\max} - 1$).

$T_i > 1$. Procesos de enfriamiento C-H (“cooling-heating”)

En este apartado vamos a integrar la solución en dos ventanas de tiempo: una primera ventana temporal $[0, t_j)$, en la cual actúa χ_{\min} , y una segunda ventana $[t_j, t_f)$, donde actúa χ_{\max} . Determinaremos el tiempo t_j de cambio así como el valor de las variables δT_j y δA_{2j} en ese instante de tiempo, valores que conformarán el conjunto de condiciones iniciales para la resolución del sistema en la segunda ventana.

Comencemos homogeneizando el sistema y hallando sus autovalores y autovectores. Para ello redefinimos las variables de forma que el sistema diferencial sea homogéneo. Este proceso de homogeneizado de las variables puede entenderse de manera gráfica a partir de la figura 3.4, donde se presenta el valor del control y de la variable temperatura a lo largo del tiempo. Las nuevas variables serán

$$\delta T^* = \delta T - \delta T_0, \quad \delta A_2^* = \delta A_2 - \delta A_{20}, \quad (3.18)$$

⁵Hemos tomado como convenio que los controles sean continuos por la derecha.

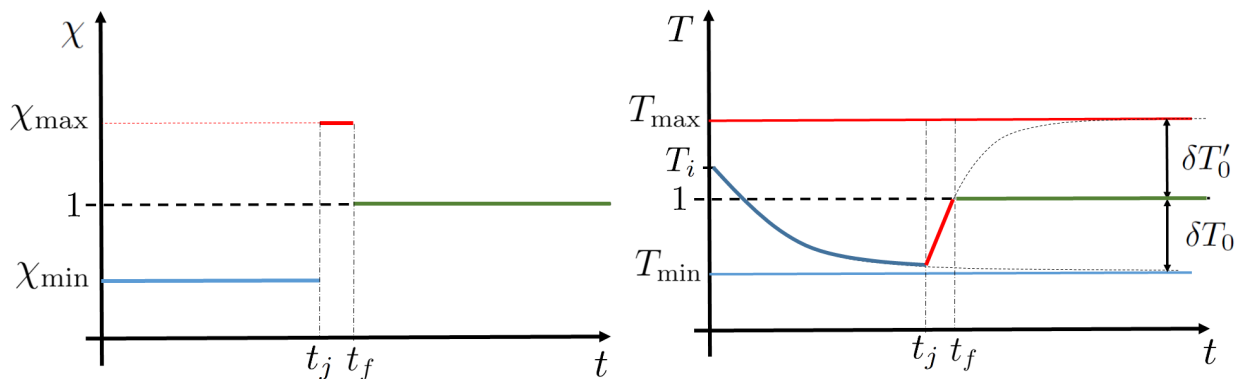


Figura 3.4: Control bang-bang y temperatura en función del tiempo para $T_i > 1$ (enfriamiento). En el panel izquierdo se presenta un control de tipo bang-bang, que pasa de un valor mínimo, $\chi_{\min} = 1 + \delta\chi_{\min}$ (línea azul) para $0 \leq t < t_j$ a uno máximo $\chi_{\max} = 1 + \delta\chi_{\max}$ (línea roja) para $t_j \leq 0 < t_f$. Posteriormente, pasa a ser igual a la unidad (línea verde) una vez alcanzado el estado objetivo ($T_f = 1$ y $A_{2f} = 1$), a fin de mantener el sistema en el estado estacionario. En el panel derecho se recoge la evolución de la temperatura del sistema al ser sometida al control bang-bang. En primer lugar, relaja hacia la temperatura $T_{\min} = \chi_{\min}^{2/3}$ correspondiente a χ_{\min} (línea azul), relajación se ve interrumpida en $t = t_j$. A continuación, comienza a relajar hacia la temperatura $T_{\max} = \chi_{\max}^{2/3}$ correspondiente a χ_{\max} (línea roja). Esta relajación también se ve interrumpida cuando $T = T_f = 1$ (simultáneamente $A_2 = A_{2f} = 1$), lo que determina el tiempo de conexión t_f . El sistema permanece estacionario para $t > t_f$ (línea verde).

donde δT_0 y δA_{20} se obtienen desarrollando a primer orden,

$$\delta T_0 = 1 - (\chi_{extremo})^{2/3} = \frac{2}{3} \delta \chi_{extremo}, \quad \delta A_{20} = 0. \quad (3.19)$$

Con el subíndice extremo pretendemos englobar tanto δT_0 como $\delta T'_0$ que aparecen en el dibujo, esto es, el caso en que el control se hace mínimo y el caso en que se hace máximo. De este modo el sistema diferencial a resolver quedaría como

$$\begin{pmatrix} \delta T^{*'} \\ \delta A_2^{*'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\beta & 1 - \beta \\ 3 & -2B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta T^* \\ \delta A_2^* \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

y sus autovalores y autovectores serían:

$$\blacksquare \text{ Para } -\lambda_1 = \frac{1}{2}(-k - \frac{3}{2}\beta - 2B) < 0 \quad \blacksquare \text{ Para } -\lambda_2 = \frac{1}{2}(k - \frac{3}{2}\beta - 2B) < 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\frac{3}{2}\beta - 2B + k}{6} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.21) \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\frac{3}{2}\beta - 2B - k}{6} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

donde hemos definido

$$k \equiv \lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{\frac{9}{4}\beta^2 - (12 + 6B)\beta + (4B^2 + 12)} > 0. \quad (3.23)$$

Nótese que, en consecuencia, $\lambda_1 > \lambda_2$. La solución general del sistema anterior es

$$\begin{pmatrix} \delta T^* \\ \delta A_2^* \end{pmatrix} = C_1 v_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 v_2 e^{-\lambda_2 t}. \quad (3.24)$$

A la hora de plantear el problema en cada ventana temporal hemos de ser cuidadosos con las variables homogeneizadoras, pues el término homogeneizador (δT_0 y $\delta T'_0$) cambia en cada ventana al ser esta función de $\delta \chi$ y por tanto las variables homogeneizadas cambian en cada intervalo de tiempo. A fin de evitar confusiones rebautizamos las variables definidas en (3.18) en cada ventana, como se detalla en el cuadro 3.1. De este modo, tendremos los sistemas:

$$\blacksquare \text{ En la primera ventana } t \in [0, t_j) \quad \blacksquare \text{ En la segunda ventana } t \in [t_j, t_f)$$

$$\begin{pmatrix} \delta T^- \\ \delta A_2^- \end{pmatrix} = C_1 v_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 v_2 e^{-\lambda_2 t}. \quad (3.25)$$

$$\begin{pmatrix} \delta T^+ \\ \delta A_2^+ \end{pmatrix} = C_3 v_1 e^{-\lambda_1 t} + C_4 v_2 e^{-\lambda_2 t}. \quad (3.26)$$

Primera ventana de tiempo $[0, t_j)$.- Sustituyendo en el sistema (3.25) las condiciones iniciales ($\delta T_i = T_i - 1 > 0$, $\delta A_{2i} = 0$) determinamos C_1 y C_2 ,

$$C_1 = 3 \frac{\delta T_0 - \delta T_i}{k} = -\frac{3T_i - 2\chi_{\min} - 1}{k}, \quad C_2 = \frac{3T_i - 2\chi_{\min} - 1}{k}. \quad (3.27)$$

	Primera ventana	Segunda ventana
Variable de control	$\delta\chi = \delta\chi_{\min} = \chi_{\min} - 1$	$\delta\chi = \delta\chi_{\max} = \chi_{\max} - 1$
Variable homogeneizadora (T)	$\delta T_0 = \frac{2}{3}\delta\chi_{\min}$	$\delta T'_0 = \frac{2}{3}\delta\chi_{\max}$
Variable homogeneizadora (A_2)	$\delta A_{20} = 0$	$\delta A'_{20} = 0$
Variable homogeneizada (T)	$\delta T^- = \delta T - \delta T_0$	$\delta T^+ = \delta T - \delta T'_0$
Variable homogeneizada (A_2)	$\delta A_2^- = \delta A_2$	$\delta A_2^+ = \delta A_2$

Cuadro 3.1: Variables en cada ventana temporal del protocolo C-H. La primera ventana corresponde al intervalo $[0, t_j)$ (cooling) y la segunda ventana al intervalo $[t_j, t_f)$ (heating).

El punto sobre la trayectoria en el instante t_j será

$$\begin{aligned}\delta T_j &= \delta T_j^- + \delta T_0 = C_1 (v_1(1)e^{-\lambda_1 t_j} - v_2(1)e^{-\lambda_2 t_j}) + \delta T_0, \\ \delta A_{2j} &= \delta A_{2j}^- + \delta A_{20} = C_1 (e^{-\lambda_1 t_j} - e^{-\lambda_2 t_j}).\end{aligned}\quad (3.28)$$

Segunda ventana de tiempo $[t_j, t_f)$.- Las condiciones iniciales para el sistema (3.26) vienen suministradas por el apartado anterior $(\delta T_j, \delta A_{2j})$. Teniendo en cuenta que conocemos los valores que deben tomar las variables en el tiempo t_f $(\delta T_f = 0, \delta A_{2f} = 0)$ (o equivalentemente para las variables homogeneizadas $(\delta T_f^+ = -\delta T'_0, \delta A_{2f}^+ = 0)$), podemos plantear un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro variables (C_3, C_4, t_j, t_f) ,

$$\begin{pmatrix} \delta T_j - \delta T'_0 \\ \delta A_{2j} \end{pmatrix} = C_3 v_1 e^{-\lambda_1 t_j} + C_4 v_2 e^{-\lambda_2 t_j}, \quad \begin{pmatrix} -\delta T'_0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_3 v_1 e^{-\lambda_1 t_f} + C_4 v_2 e^{-\lambda_2 t_f}. \quad (3.29)$$

Resolvemos para las variables C_3, C_4 en términos del tiempo de cambio t_j ,

$$C_3 = \frac{2(\chi_{\max} - 1)}{k} \left(\frac{\frac{2(\chi_{\max} - \chi_{\min})e^{\lambda_1 t_j}}{3T_i - 2\chi_{\min} - 1} - 1}{\frac{2(\chi_{\max} - \chi_{\min})e^{\lambda_2 t_j}}{3T_i - 2\chi_{\min} - 1} - 1} \right)^{\frac{\lambda_1}{k}}, \quad C_4 = -C_3 e^{-k t_f}, \quad (3.30)$$

así como para el tiempo final de conexión

$$t_f = \frac{1}{k} \log \left(\frac{\frac{2(\chi_{\max} - \chi_{\min})e^{\lambda_1 t_j}}{3T_i - 2\chi_{\min} - 1} - 1}{\frac{2(\chi_{\max} - \chi_{\min})e^{\lambda_2 t_j}}{3T_i - 2\chi_{\min} - 1} - 1} \right), \quad (3.31)$$

mientras que t_j está determinado de modo implícito por la solución de la ecuación

$$(3T_i - 2\chi_{\min} - 1) \left(\frac{2(\chi_{\max} - \chi_{\min})e^{\lambda_2 t_j}}{3T_i - 2\chi_{\min} - 1} - 1 \right)^{\frac{\lambda_1}{k}} = 2(\chi_{\max} - 1) \left(\frac{2(\chi_{\max} - \chi_{\min})e^{\lambda_1 t_j}}{3T_i - 2\chi_{\min} - 1} - 1 \right)^{\frac{\lambda_2}{k}}. \quad (3.32)$$

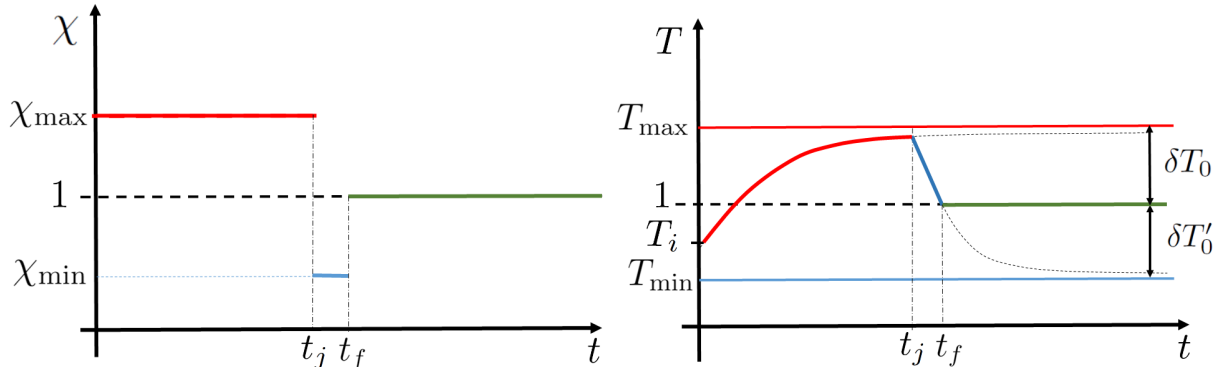


Figura 3.5: Control bang-bang y temperatura en función del tiempo para $T_i < 1$ (calentamiento). En el panel izquierdo se presenta un control de tipo bang-bang, que pasa de un valor máximo, $\chi_{\max} = 1 + \delta\chi_{\max}$ (línea roja) para $0 \leq t < t_j$ a uno mínimo $\chi_{\min} = 1 + \delta\chi_{\min}$ (línea azul) para $t_j \leq t < t_f$. Posteriormente, pasa a ser igual a la unidad (línea verde) una vez alcanzado el estado objetivo ($T_f = 1$ y $A_{2f} = 1$), a fin de mantener el sistema en el estado estacionario. En el panel derecho se recoge la evolución de la temperatura del sistema al ser sometida al control bang-bang. En primer lugar, relaja hacia la temperatura $T_{\max} = \chi_{\max}^{2/3}$ correspondiente a χ_{\max} (línea roja), relajación se ve interrumpida en $t = t_j$. A continuación, comienza a relajar hacia la temperatura $T_{\min} = \chi_{\min}^{2/3}$ correspondiente a χ_{\min} (línea azul). Esta relajación también se ve interrumpida cuando $T = T_f = 1$ (simultáneamente $A_2 = A_{2f} = 1$), lo que determina el tiempo de conexión t_f . El sistema permanece estacionario para $t > t_f$ (línea verde). Nótese la analogía con la Figura 3.4, con la diferencia fundamental de la inversión del orden de los bangs; en ambas figuras, las curvas rojas (azules) corresponden al bang con χ_{\max} (χ_{\min}).

Recordemos que k está definido en la ecuación (3.23). El conjunto de las ecuaciones (3.31) y (3.32) nos proporciona una solución analítica para el tiempo mínimo de conexión t_f en el protocolo C-H, que es válida en la aproximación lineal que estamos considerando en esta memoria.

$T_i < 1$. Procesos de calentamiento H-C (“heating-cooling”)

Partamos ahora de un estado con $T_i < 1$, de modo que el protocolo a seguir será calentar el sistema, sometiéndolo a χ_{\max} , para después enfriarlo a χ_{\min} como se muestra en la figura 3.5. Para estas condiciones iniciales se invierten, respecto del caso anterior, las variables homogeneizadoras y homogeneizadas en cada ventana de tiempo, tal y como se recoge en el cuadro 3.2, teniéndose los sistemas:

- En la primera ventana $t \in [0, t_j)$

$$\begin{pmatrix} \delta T^+ \\ \delta A_2^+ \end{pmatrix} = C_5 v_1 e^{-\lambda_1 t} + C_6 v_2 e^{-\lambda_2 t}. \quad (3.33)$$

- En la segunda ventana $t \in [t_j, t_f)$

$$\begin{pmatrix} \delta T^- \\ \delta A_2^- \end{pmatrix} = C_7 v_1 e^{-\lambda_1 t} + C_8 v_2 e^{-\lambda_2 t}. \quad (3.34)$$

	Primera ventana	Segunda ventana
Variable de control	$\delta\chi = \delta\chi_{\max} = \chi_{\max} - 1$	$\delta\chi = \delta\chi_{\min} = \chi_{\min} - 1$
Variable homogeneizadora (T)	$\delta T'_0 = \frac{2}{3}\delta\chi_{\max}$	$\delta T_0 = \frac{2}{3}\delta\chi_{\min}$
Variable homogeneizadora (A_2)	$\delta A'_{20} = 0$	$\delta A_{20} = 0$
Variable homogeneizada (T)	$\delta T^+ = \delta T - \delta T'_0$	$\delta T^- = \delta T - \delta T_0$
Variable homogeneizada (A_2)	$\delta A_2^+ = \delta A_2$	$\delta A_2^- = \delta A_2$

Cuadro 3.2: Variables en cada ventana temporal para el protocolo H-C. La primera ventana corresponde al intervalo $[0, t_j)$ (heating) y la segunda ventana al intervalo $[t_j, t_f)$ (cooling).

Primera ventana de tiempo $[0, t_j)$. En esta ventana de tiempo actúa χ_{\max} y las condiciones iniciales con las que completar el sistema lineal serán $(T_i, A_{2i} = 1)$, lo que en términos de las variables infinitesimales es $(\delta T_i = T_i - 1 < 0, \delta A_{2i} = 0)$. Sustituyendo la condición inicial en (3.33) despejamos C_5 y C_6 ,

$$C_5 = \frac{2\chi_{\max} + 1 - 3T_i}{k}, \quad C_6 = -\frac{2\chi_{\max} + 1 - 3T_i}{k}. \quad (3.35)$$

Evaluando el sistema en el tiempo t_j (a determinar aún) tendríamos la condición inicial para el siguiente intervalo temporal.

Segunda ventana de tiempo $[t_j, t_f)$. En esta ventana de tiempo actúa χ_{\min} y las condiciones iniciales con las que completar el sistema lineal serán $(\delta T_j, \delta A_{2j})$. Teniendo en cuenta que conocemos los valores que deben tomar las variables en el tiempo t_f ($\delta T_f = 0, \delta A_{2f} = 0$) podemos evaluar el sistema en el tiempo t_j y t_f , de manera análoga a como procedimos para $T_i > 1$, y obtener un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas (C_7, C_8, t_f y t_j),

$$\begin{pmatrix} \delta T_j - \delta T_0 \\ \delta A_{2j} \end{pmatrix} = C_7 v_1 e^{-\lambda_1 t_j} + C_8 v_2 e^{-\lambda_2 t_j}, \quad \begin{pmatrix} -\delta T_0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_7 v_1 e^{-\lambda_1 t_f} + C_8 v_2 e^{-\lambda_2 t_f}. \quad (3.36)$$

Despejando obtenemos las constantes C_7, C_8 ,

$$C_7 = -\frac{2(1 - \chi_{\min})}{k} \left(\frac{\frac{2(\chi_{\max} - \chi_{\min})e^{\lambda_1 t_j}}{2\chi_{\max} - 3T_i + 1} - 1}{\frac{2(\chi_{\max} - \chi_{\min})e^{\lambda_2 t_j}}{2\chi_{\max} - 3T_i + 1} - 1} \right)^{\frac{\lambda_1}{k}}, \quad C_8 = -C_7 e^{-k t_f}, \quad (3.37)$$

así como el tiempo de conexión t_f en términos del tiempo de cambio t_j ,

$$t_f = \frac{1}{k} \log \left(\frac{\frac{2(\chi_{\max} - \chi_{\min})e^{\lambda_1 t_j}}{2\chi_{\max} - 3T_i + 1} - 1}{\frac{2(\chi_{\max} - \chi_{\min})e^{\lambda_2 t_j}}{2\chi_{\max} - 3T_i + 1} - 1} \right), \quad (3.38)$$

para el cual obtenemos de nuevo una expresión implícita de la forma $g(t_j) = 0$,

$$(2\chi_{\max} - 3T_i + 1) \left(\frac{2(\chi_{\max} - \chi_{\min})e^{\lambda_2 t_j}}{2\chi_{\max} - 3T_i + 1} - 1 \right)^{\frac{\lambda_1}{k}} = 2(1 - \chi_{\min}) \left(\frac{2(\chi_{\max} - \chi_{\min})e^{\lambda_1 t_j}}{2\chi_{\max} - 3T_i + 1} - 1 \right)^{\frac{\lambda_2}{k}} \quad (3.39)$$

De nuevo, el conjunto de las ecuaciones (3.38) y (3.39) nos da el tiempo mínimo de conexión, en este caso para el protocolo H-C, dentro de la aproximación lineal.

4 | Análisis de los resultados

Una vez obtenidas predicciones analíticas para las variables físicas de interés (fundamentalmente las trayectorias de la temperatura T y de A_2 , y los tiempos de cambio t_j y final t_f), nos disponemos a inspeccionar el comportamiento de las mismas para entender la respuesta del sistema al control óptimo que hemos diseñado.¹ A nivel intuitivo, esperamos encontrar una tendencia decreciente en el tiempo final conforme aumentamos la capacidad de calentamiento o enfriamiento del termostato. Del mismo modo, esperamos comprobar la necesidad de un protocolo en dos partes al estudiar la evolución temporal de las variables T y A_2 y poder examinar los límites del cálculo anteriormente expuesto, comparándolos con el caso límite $\chi_{\max} \rightarrow \infty$ y $\chi_{\min} = 0$ investigado en la Ref. [14].

4.1 Tiempo de cambio y final como función de la intensidad del termostato

Comenzamos estudiando el comportamiento de los tiempos finales y de cambio frente a la variación de la intensidad del termostato en la figura 4.1 para ambos protocolos, C-H y H-C. Una primera cuestión relevante es el rango de valores de χ_{\min} y χ_{\max} que permiten conectar los estados inicial y final. En el régimen no lineal y en el caso límite ($\chi_{\min} = 0$, $\chi_{\max} = \infty$) siempre se pueden conectar los estados estacionarios correspondientes a dos temperaturas (granulares) T_i y T_f [14]. Sin embargo, no es trivial que esto suceda cuando no se dispone de toda la potencia del termostato, esto es, cuando ($\chi_{\min} > 0$, $\chi_{\max} < \infty$). En consecuencia, nos proponemos estudiar este problema dentro de la aproximación lineal realizada en este trabajo.

En el caso C-H, esperamos físicamente que el tiempo de conexión diverja si $\chi_{\min} \geq 1$. Esto se entiende intuitivamente: si la menor intensidad del termostato es mayor que la correspondiente a la temperatura final, esto es, la unidad, no podremos realizar la conexión. Si la intensidad mínima es exactamente igual a la unidad, podemos llegar al estado estacionario objetivo pero tardaremos un tiempo infinito, esto es, $t_f \rightarrow \infty$ para $\chi_{\min} \rightarrow 1^-$. Demostramos rigurosamente que este es

¹En el Anexo a esta memoria se pueden encontrar algunos ejemplos relevantes de los códigos de Matlab desarrollados y utilizados para realizar este análisis.

efectivamente el caso en el Apéndice, donde además vemos que el tiempo de conexión diverge en esta situación debido a que $t_j \rightarrow \infty$. Es la primera parte del bang-bang, en que el sistema se enfría con χ_{\min} , la responsable de la divergencia del tiempo de conexión. Análogamente, $t_f \rightarrow \infty$ cuando $\chi_{\max} \rightarrow 1^+$, como se demuestra en el Apéndice. Sin embargo, es la segunda parte del bang-bang la que produce la divergencia del tiempo de relajación, ya que el tiempo de cambio t_j tiende en este caso a una constante.

De manera análoga, en el protocolo H-C el tiempo de conexión diverge cuando (i) la cota superior $\chi_{\max} \rightarrow 1^+$ o (ii) la cota inferior $\chi_{\min} \rightarrow 1^-$. En el caso (i), la incapacidad del sistema para calentar más allá de $T_f = 1$ en la primera parte del bang-bang es la responsable de la divergencia, y consistentemente $t_j \rightarrow \infty$ también. En el caso (ii), la divergencia está marcada por la segunda parte del bang-bang, ya que la incapacidad del sistema para enfriar implica que esta debe durar un tiempo infinito.

Fijados dichos límites procedemos a estudiar el comportamiento de los tiempos t_j y t_f como función de la intensidad del termostato. A la luz de los paneles a la derecha de la figura 4.1 podemos comprobar como, conforme χ_{\max} tiende a 1^+ , los tiempos t_f divergen en ambos protocolos. Por otro lado, en lo que a los tiempos de cambio t_j respecta, el comportamiento para los procesos de tipo C-H y H-C es distinto. En el caso C-H, para alcanzar el estado estacionario cuando χ_{\max} tiende a 1^+ , el tiempo t_j de aplicación de χ_{\min} debe hacerse mínimo al carecer de capacidad de calentamiento y el tiempo final diverge debido a la segunda parte del bang-bang. En el caso H-C, esta tendencia para t_j se invierte, al cambiar el orden del protocolo, y t_j tiende a t_f : el tiempo de conexión diverge debido a la primera parte del bang-bang. Esto es consistente con la discusión general que hemos realizado anteriormente y con la intuición física: t_f diverge cuando χ_{\max} tiende a 1^+ debido a que la etapa del bang-bang del calentamiento debe durar un tiempo infinito. Por otra parte, podemos comprobar en ambas gráficas como un aumento de χ_{\max} genera una disminución de t_f . Esta tendencia decreciente puede explicarse teniendo en cuenta que, al incrementar el valor máximo del termostato, aumentamos el conjunto de controles sobre el cual optimizamos el tiempo y, por tanto, obtenemos tiempos finales menores que los obtenidos para rangos menores de χ_{\max} . El tiempo de actuación de χ_{\max} debe ser menor, para no sobrepasar $T_f = 1$, lo que explicaría el crecimiento de t_j para el protocolo C-H y el decrecimiento del mismo en el protocolo H-C.

Para los paneles de la izquierda, donde se recoge la evolución de los tiempos respecto a χ_{\min} , el análisis es similar. Para ambos protocolos tenemos que t_f diverge cuando $\chi_{\min} \rightarrow 1^-$. La ausencia de capacidad para enfriar provoca nuevamente que el sistema tarde un tiempo infinito en conectar los estados inicial y final; en el caso H-C el segundo paso del protocolo deberá aplicarse un tiempo infinito y es el responsable de que $t_f \rightarrow \infty$, mientras que en el caso C-H es el primer paso del protocolo el que consume un tiempo $t_j \rightarrow \infty$. En ambos casos es la parte C (“cooling”) del protocolo la responsable de la divergencia. Por otra parte, el tiempo de conexión t_f disminuye conforme χ_{\min} lo hace, ya que estaríamos nuevamente ampliando el conjunto de controles sobre el que minimizamos t_f . Con respecto a los tiempos de cambio podemos verificar como, análoga-

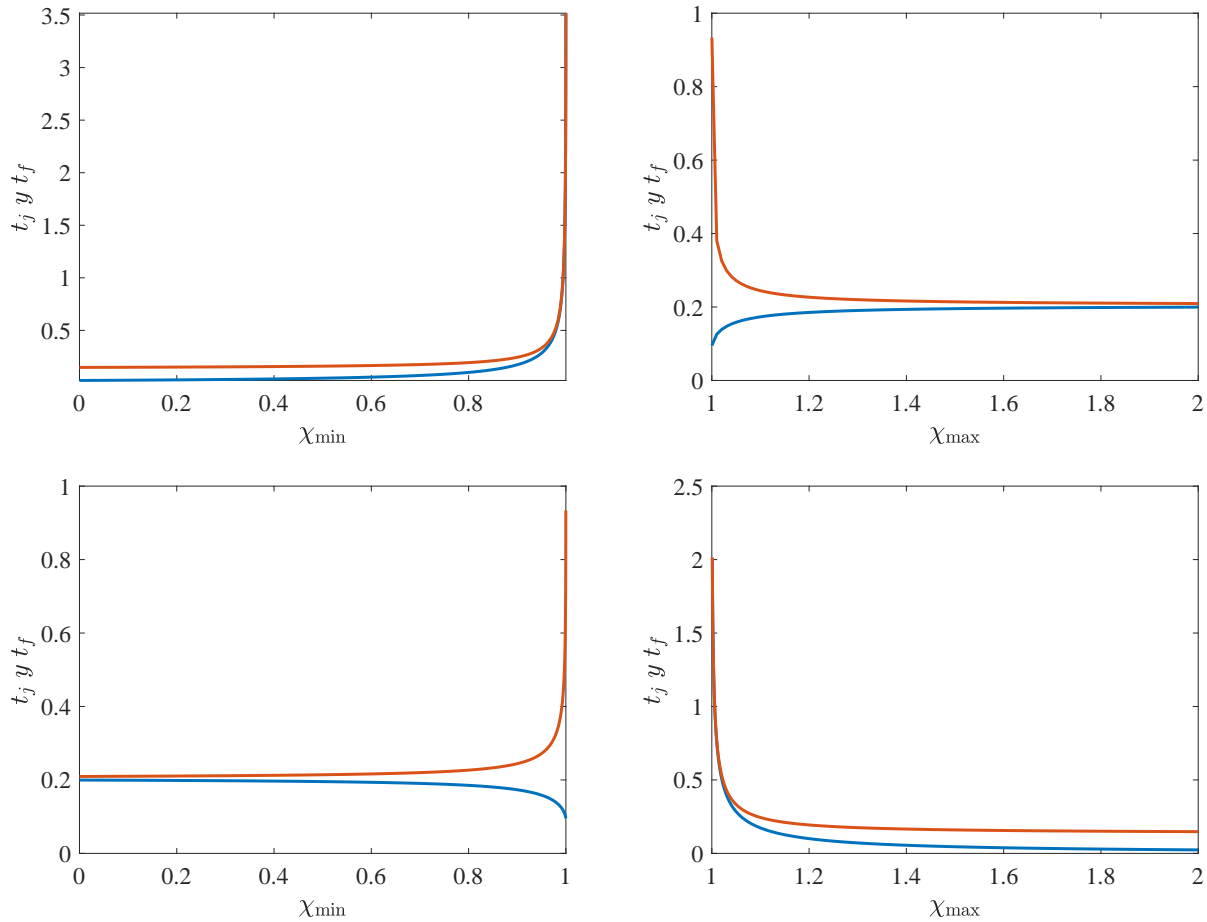


Figura 4.1: Tiempo de cambio t_j (azul) y tiempo de conexión t_f (rojo) como función de los valores límite del termostato. Se representan cuatro paneles: los paneles de la izquierda representan los tiempos como función de χ_{\min} , para un valor fijo de $\chi_{\max} = 1.1$, mientras que los paneles de la derecha muestran los tiempos como función de χ_{\max} , para un valor fijo de $\chi_{\min} = 0.9$; los paneles de arriba corresponden al caso C-H, con $T_i = 1.01$, mientras que los de abajo corresponden al caso H-C, con $T_i = 0.99$. En todos los casos, se ha tomado $\alpha = 0.9$ y $d = 2$. No existe un cambio cualitativo al variar el valor de α , creciendo el tiempo final al disminuir α . El cambio a $d = 3$ apenas modifica las figuras.

mente a nuestra discusión para los paneles de la derecha, aumentar la capacidad de enfriar implica minimizar el tiempo de aplicación de χ_{\min} : para el proceso de tipo C-H t_j se hace mínimo y para el proceso H-C se hace máximo.

4.2 Trayectorias de la temperatura y la kurtosis

También es interesante estudiar la evolución temporal de las variables de T y A_2 , que queda recogida en la figura 4.2. Esto nos permite entender de manera intuitiva la necesidad de un protocolo en dos partes. En el panel izquierdo mostramos el caso C-H, bajo la acción de χ_{\min} la temperatura relaja hacia un valor $\chi_{\min}^{2/3}$ (sin llegar a alcanzarlo, pues invertimos el valor del termostato antes) mientras que el coeficiente A_2 comienza a alejarse del valor estacionario 1, incrementándose (intuitivamente, bajo $\chi > 1$ tendremos que A_2 disminuirá, pues “gaussianizaríamos” el sistema, mientras que para $\chi < 1$ tendremos que A_2 aumentará, tendiendo a A_2^{HCS} para $\chi \rightarrow 0$). Una vez alcanzado $T_f = 1 > \chi_{\min}^{2/3}$ no podríamos interrumpir la acción de χ_{\min} y fijar el termostato a 1 pues la disipación de energía hace que $A_2 \neq 1$ y por tanto el sistema no estaría en estado estacionario. Es por ello por lo que debemos dejar que la temperatura siga descendiendo hasta un valor T_j cumpliendo que $\chi_{\min}^{2/3} < T_j < 1$ y verificando que, una vez el sistema relaje de esa temperatura a $\chi_{\max}^{2/3}$ y A_2 decrezca, ambas variables alcancen simultáneamente, para el tiempo final t_f , el valor 1, momento en el cual cambiamos la intensidad del termostato bruscamente a $\chi = 1$. El caso H-C es análogo y lo mostramos en el panel derecho. Una vez alcanzada mediante la aplicación de χ_{\max} la temperatura final, es necesario continuar aplicando el máximo de intensidad, pues $A_2 \neq 1$ y por ende el sistema no ha alcanzado el estado estacionario. Una vez el sistema se encuentra en el estado (T_j, A_{2j}) se invierte la intensidad del termostato, que pasa a ser un mínimo y permanece así hasta que ambas variables, T y A_2 , alcanzan simultáneamente el valor final 1.

Estudiemos por último el comportamiento de las trayectorias $T(A_2)$ en el espacio de las fases en la figura 4.3, para χ_{\max} y χ_{\min} fijo y distintos valores de T_i . Este análisis es análogo al realizado en la sección 2.3.2 para el problema de aparcamiento del coche con aceleración acotada, y nos servirá de nuevo para ilustrar de manera más intuitiva el proceso bang-bang. Podemos ver cómo, dependiendo de la temperatura inicial fijada, las curvas de enfriamiento parten de puntos diferentes sobre el eje de ordenadas. Para el caso C-H, conforme el gas granular se enfría sometido a la acción de χ_{\min} , el sistema recorre el espacio de las fases aumentando A_2 y disminuyendo T hasta alcanzar la curva de cambio (T_j, A_{2j}) . Cuando se alcanza esta curva el termostato se invierte y la temperatura comienza a ascender mientras A_2 disminuye, conduciendo al sistema al estado estacionario $(T_f = 1, A_{2f} = 1)$. Aunque las curvas de enfriamiento sean diferentes, pues el sistema parte de condiciones iniciales distintas, la curva de calentamiento es común a todos los procesos, pues el conjunto de puntos (T_j, A_{2j}) obtenidos para cada T_i constituyen una trayectoria de calentamiento del sistema (es decir, no es solo el lugar geométrico del espacio de las fases que marca

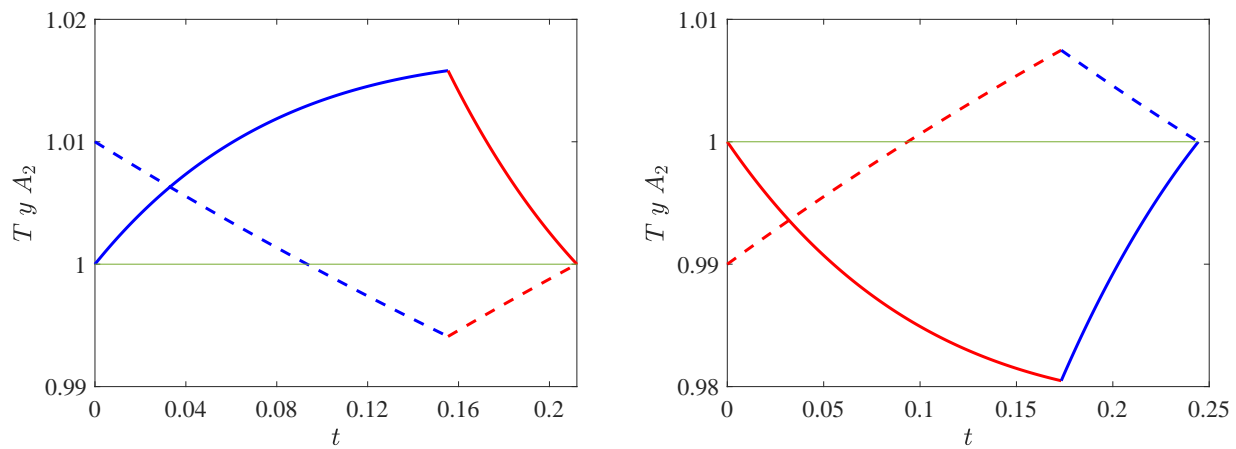


Figura 4.2: Evolución temporal de la temperatura y el coeficiente A_2 . En concreto, representamos T (línea punteada) y A_2 (línea continua) tanto para el caso C-H (izquierda) como para el caso H-C (derecha), para $\chi_{\max} = 1.1$ y $\chi_{\min} = 0.9$. La temperatura inicial es $T_i = 1.01$ para el protocolo C-H y $T_i = 0.99$ para el H-C. Igual que en figuras anteriores, mostramos en azul la evolución bajo la acción de χ_{\min} y en rojo la evolución para χ_{\max} . De nuevo, por concreción se ha representado el caso $\alpha = 0.9$ y $d = 2$. Un aumento de la inelasticidad provoca las trayectorias se prolonguen más en el tiempo: por un lado A_2 incrementa su pendiente al alejarnos del perfil gaussiano y T prolonga su trayectoria, generando tiempos finales mayores conforme disminuye α . El cambio a $d = 3$ apenas modifica la tendencia.

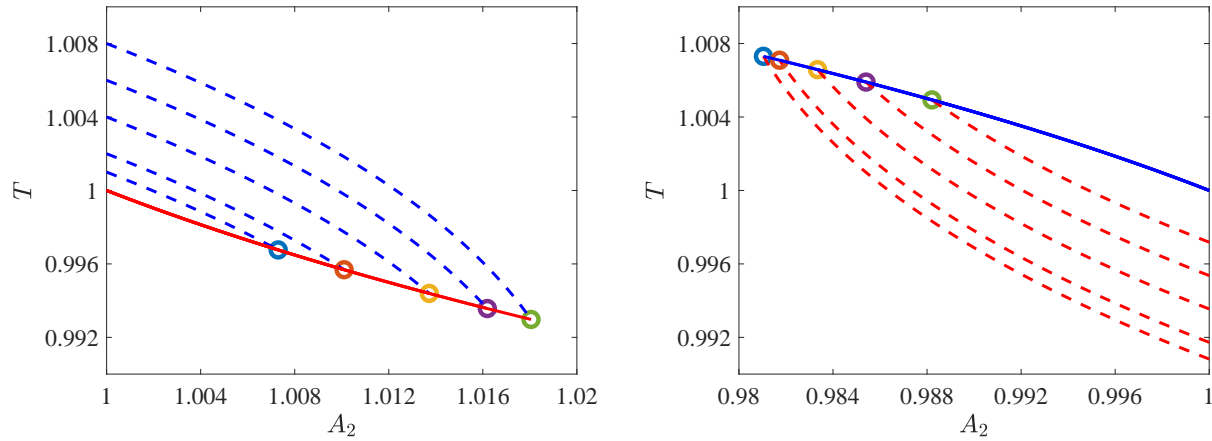


Figura 4.3: Trayectorias $T(A_2)$ en el espacio de las fases. Representamos el caso C-H en el panel izquierdo y el caso H-C en el panel derecho. Se muestran trayectorias para distintos valores de la temperatura inicial T_i , entre 1 y 1.01 para el caso C-H y entre 0.98 y 1 para el caso H-C. Los valores extremos de los controles son $\chi_{\max} = 1.1$ y $\chi_{\min} = 0.9$, y además $\alpha = 0.9$ y $d = 2$ (los mismos valores que en la figura 4.2). La línea discontinua azul (roja) en el panel izquierdo (derecho) representa la trayectoria física cuando el sistema es sometido a χ_{\min} (χ_{\max}) y la línea continua roja (azul) representa la curva de cambio para el valor del control, así como la trayectoria del sistema bajo la acción de χ_{\max} (χ_{\min}). Los puntos marcados sobre la curva de cambio señalan los distintos valores de (A_{2j}, T_j) para las distintas condiciones iniciales marcadas sobre el eje de ordenadas. El resultado sobre las trayectorias al aumentar la inelasticidad es el esperado en vista del efecto ya visto para la evolución temporal de las variables, un aumento de A_{2j} y disminución de T_j para el caso C-H y una disminución de A_{2j} y aumento de T_j para el caso H-C.

el cambio del control, sino que conforma por sí mismo una trayectoria de calentamiento). Para el proceso H-C, podemos ver cómo dependiendo de la temperatura inicial el sistema recorrerá distintas curvas de calentamiento hasta alcanzar la curva de cambio (T_j, A_{2j}) , que conforma la curva común de enfriamiento que recorrerán todos los sistemas hasta alcanzar el punto estacionario $(1, 1)$.

4.3 Rango de validez de la aproximación lineal

En este apartado investigamos la posible validez del modelo desarrollado fuera del marco estrictamente lineal, fijando los controles χ_{\max} y χ_{\min} a valores lejanos a la unidad y comparando los resultados obtenidos con el caso límite $\chi_{\max} \rightarrow \infty$ y $\chi_{\min} \rightarrow 0$. En ese caso límite, se ha demostrado que los tiempos de conexión óptimos presentan una dependencia funcional de la forma [14]

$$t_f = \frac{1}{\sqrt{B}} |1 - T_i|^{1/2}, \quad (4.1)$$

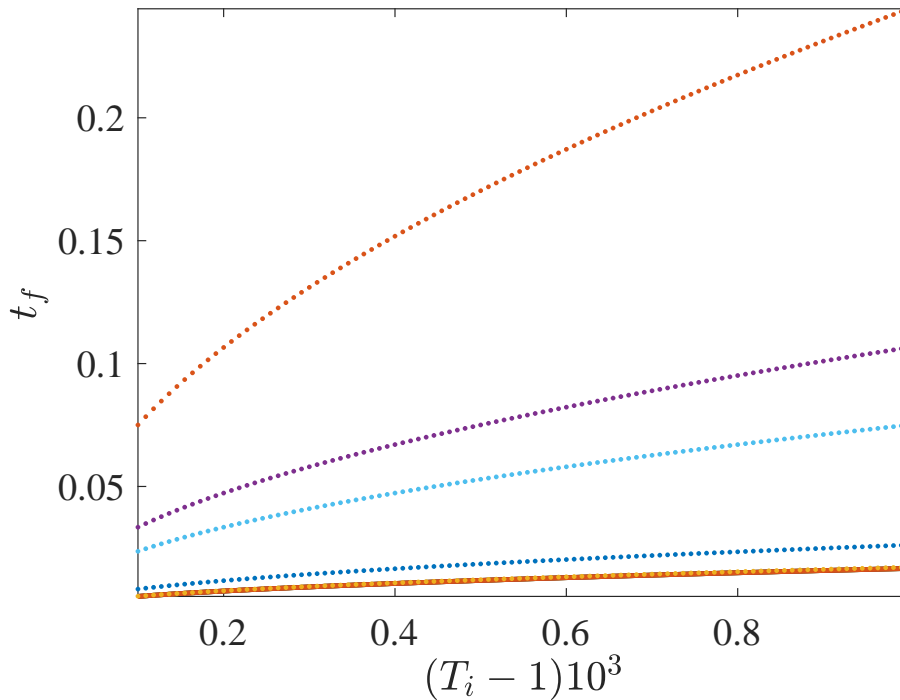


Figura 4.4: Tiempo mínimo de conexión t_f frente a T_i para el caso C-H. De nuevo, las gráficas mostradas corresponden al caso $\alpha = 0.9$ y $d = 2$. En línea punteada representamos t_f calculado en esta memoria, , dado por la ecuación (3.31), para distintos valores de χ_{\max} y χ_{\min} (de arriba a abajo: $\chi_{\max} = 1.01$ y $\chi_{\min} = 0.99$, $\chi_{\max} = 1.05$ y $\chi_{\min} = 0.95$, $\chi_{\max} = 1.1$ y $\chi_{\min} = 0.90$, $\chi_{\max} = 2.00$ y $\chi_{\min} = 0.33$, $\chi_{\max} = 100.00$ y $\chi_{\min} = 0.00$), y en línea continua la ecuación (4.1), que básicamente está superpuesta con el caso $\chi_{\max} = 100.00$ y $\chi_{\min} = 0.00$.

cuando T_i es próximo a la unidad.

Ciertamente la fórmula (4.1) no tendría porque ajustarse en el caso lineal aquí desarrollado, sin embargo, a fin de inspeccionar los límites de validez de nuestro modelo lineal, podría resultar de interés hacer tender los valores extremos de χ a 0 e ∞ y analizar una posible convergencia de los tiempos finales para ambos casos (C-H y H-C) al tiempo dado por (4.1). Con este objetivo representamos t_f para distintos valores de χ_{\max} y χ_{\min} y podemos observar como se produce una rápida convergencia al tiempo dado por (4.1) conforme llevamos al extremo los valores de la intensidad, tal y como se recoge en las figuras 4.4 y 4.5.

A fin de explorar de manera más exhaustiva esta convergencia, ajustamos los tiempos de conexión óptimos en nuestra teoría lineal por la fórmula

$$t_f = p_1 |1 - T_i|^{p_2}, \quad (4.2)$$

y comparamos los parámetros obtenidos con los de la predicción no lineal (4.1) cuando tomamos

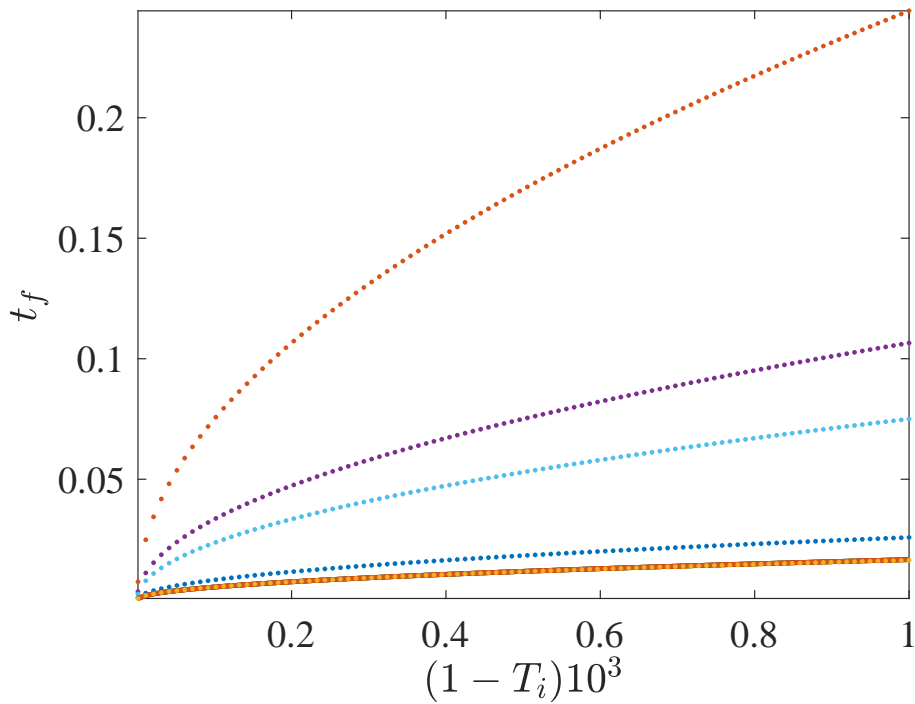


Figura 4.5: Tiempo mínimo de conexión t_f frente a T_i para el caso H-C. De nuevo, las gráficas mostradas corresponden al caso $\alpha = 0.9$ y $d = 2$. En línea punteada representamos t_f calculado en esta memoria, dado por la ecuación (3.38), para distintos valores de χ_{\max} y χ_{\min} (de arriba a abajo: $\chi_{\max} = 1.01$ y $\chi_{\min} = 0.99$, $\chi_{\max} = 1.05$ y $\chi_{\min} = 0.95$, $\chi_{\max} = 1.1$ y $\chi_{\min} = 0.90$, $\chi_{\max} = 2.00$ y $\chi_{\min} = 0.33$, $\chi_{\max} = 100.00$ y $\chi_{\min} = 0.00$), y en línea continua la ecuación (4.1), que de nuevo está básicamente superpuesta sobre la curva correspondiente a $\chi_{\max} = 100.00$ y $\chi_{\min} = 0.00$.

límites 0 e ∞ en los controles para distintos valores de α y de d . Realizamos la comparación descrita anteriormente en las figuras 4.6 y 4.7, llevando $\chi_{\min} \rightarrow 0$ y $\chi_{\max} \rightarrow \infty$ de manera progresiva.

En los paneles superiores representamos los parámetros p_1 y p_2 confrontados a sus respectivos valores, $1/\sqrt{B}$ y $1/2$, obtenidos en el régimen no lineal, frente a α para ambos tipos de procesos, C-H y H-C. Podemos verificar cómo, en el protocolo C-H, se produce una convergencia continua del parámetro p_1 a $1/\sqrt{B}$ conforme los controles tienden a sus valores extremos. Por su parte, el parámetro p_2 presenta un muy buen compromiso para valores de $\alpha < 1$, mientras que para valores próximos a $\alpha = 1$ el valor de p_2 se incrementa en aproximadamente 0.015. Sin embargo, dicha tendencia no mejora conforme los valores de hacen más extremos, sino que el valor medio que presenta p_2 aumenta levemente (del orden de 0.02). En cualquier caso, la desviación de p_2 respecto de su valor de referencia $1/2$ es siempre inferior al 4%.

En los paneles inferiores hemos seleccionado un valor de α , concretamente $\alpha = 0.6$, y representado (4.1), los valores de t_f obtenidos mediante las fórmulas (3.31) y (3.38) (para el caso C-H y H-C respectivamente) y (4.2), como función de la temperatura inicial. Se observa cómo el ajuste de t_f converge a la expresión (4.1) para valores de controles extremos. En la figura 4.6, para el caso C-H, vemos que esta convergencia se produce, como cabría esperar, desde valores superiores para los tiempos finales. Esta convergencia “desde arriba” puede entenderse intuitivamente, pues la ecuación (4.1), obtenida en la Ref. [14], corresponde al caso $\chi_{\max} \rightarrow \infty$ y $\chi_{\min} = 0$. Dicho de otro modo, se dispone de toda la potencia posible del termostato y, como ya pudimos ver en la gráfica 4.1, esto implica un descenso en los tiempos t_f (el conjunto de controles es el más amplio posible, y por lo tanto los tiempos de conexión son los más pequeños posibles). Por otro lado, en la figura 4.7, correspondiente al caso H-C, también apreciamos una convergencia continua de los parámetros y la serie de puntos obtenida a partir de (3.38) a los valores dados por (4.1). Sin embargo, al aumentar progresivamente los controles podemos comprobar como la tendencia natural de convergencia “desde arriba” se invierte para valores menos extremos de los controles que en el caso C-H.

Este hecho indica un primer límite físico para el rango de los controles que pueden emplearse en la aproximación lineal: con un conjunto de controles más restringido no podemos obtener un tiempo de conexión óptimo menor. Para el valor de $\alpha = 0.6$ considerado, en la figura 4.8 se observa que esa inversión ya se ha producido para $\chi_{\max} = 10.1$ y $\chi_{\min} = 0.0$.² La asimetría que aparece entre ambos protocolos proviene del límite físico que presenta χ_{\min} puesto que, mientras χ_{\max} no tiene cota alguna, χ_{\min} debe ser mayor que 0. Esto implica que, al aplicar un protocolo de tipo C-H, la temperatura T se encuentre comprendida entre los valores 0 y 1 para cualquier tiempo, evitando así salidas prominentes del régimen lineal. Sin embargo, al aplicar el protocolo H-C, la temperatura puede aumentar indefinidamente bajo la acción de χ_{\max} , al no hallarse esta intensidad acotada, sacando al sistema del régimen lineal para valores de χ_{\max} menores que los hallados en

²Dado que el comportamiento de t_f depende tanto de χ_{\min} como de χ_{\max} hemos estimado conveniente fijar, a modo ilustrativo, χ_{\min} a su valor mínimo e inspeccionar el comportamiento del tiempo final al incrementar χ_{\max} .

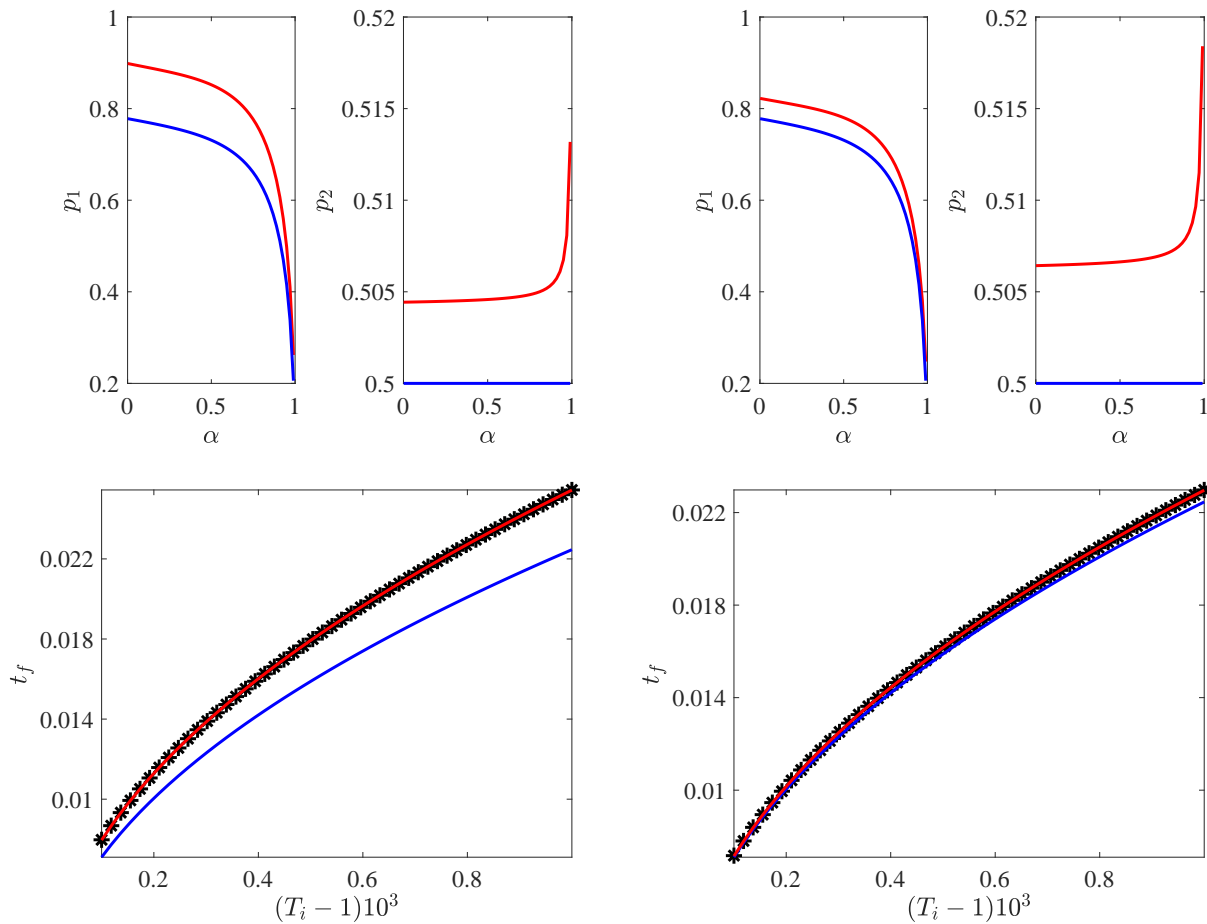


Figura 4.6: Convergencia del ajuste (4.2) para los tiempos finales de conexión hacia la expresión (4.1), para el caso C-H. De izquierda a derecha, consideramos valores crecientes de χ_{\max} y decrecientes de χ_{\min} : $\chi_{\max} = 5$ y $\chi_{\min} = 0.05$ (izquierda) y $\chi_{\max} = 100$ y $\chi_{\min} = 0.00$ (derecha). Arriba: en cada uno de los paneles izquierdos se representa p_1 (rojo) y $\frac{1}{\sqrt{B}}$ (azul) frente a α mientras que en los derechos se representa p_2 (rojo) y $1/2$ (azul) frente a α . Abajo: Tiempo final t_f frente a T_i para $\alpha = 0.6$, según la ecuación (4.1) (línea azul), según (3.31) (estrellas negras), y ajuste según la ecuación (4.2) (línea roja). La convergencia hacia la ecuación (4.1) es “desde arriba”, ya que el tiempo óptimo de conexión debe ser mayor si el conjunto de controles admisibles es más restrictivo. En todos los casos $d = 2$.

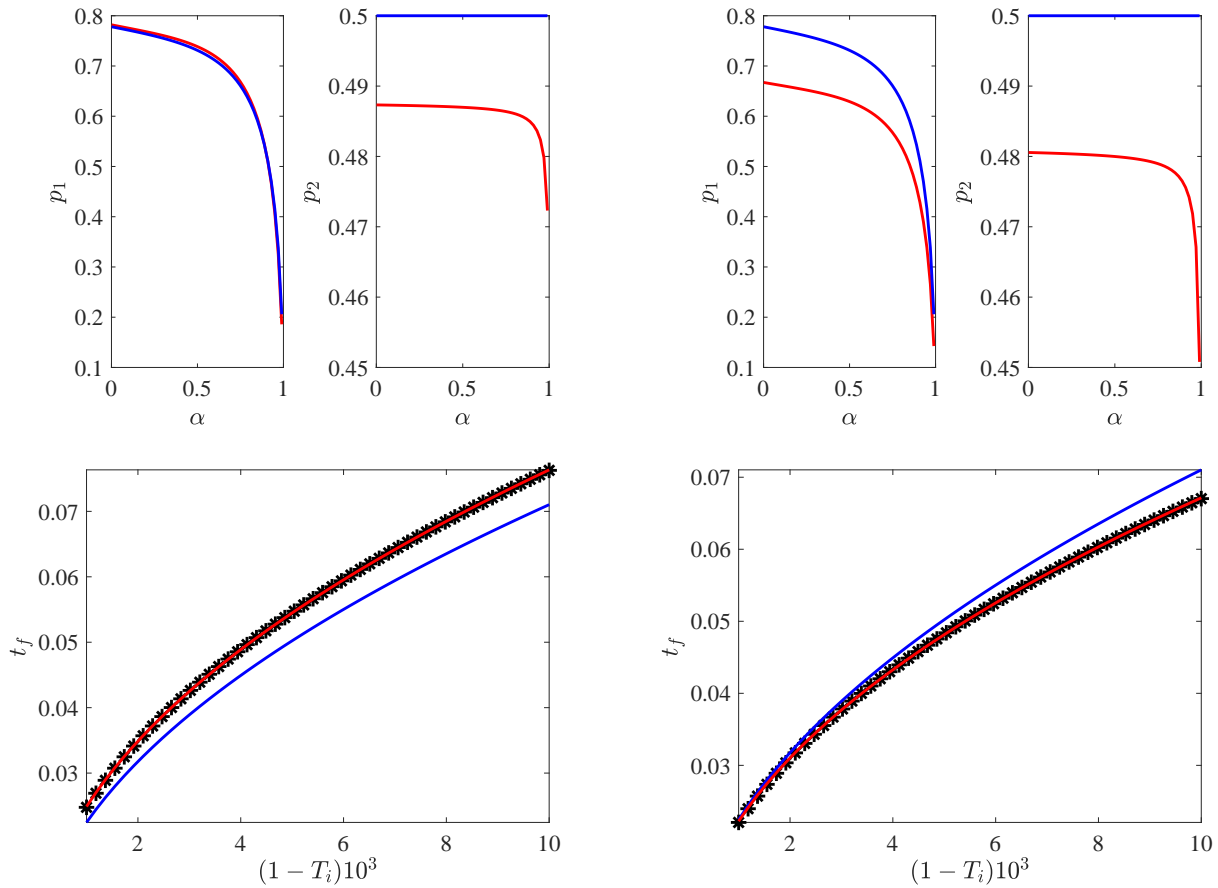


Figura 4.7: Convergencia del ajuste (4.2) para los tiempos finales de conexión hacia la expresión (4.1), para el caso H-C. De izquierda a derecha, consideramos valores crecientes de χ_{\max} y decrecientes de χ_{\min} : $\chi_{\max} = 5$ y $\chi_{\min} = 0.05$ (izquierda) y $\chi_{\max} = 100$ y $\chi_{\min} = 0.00$ (derecha). Arriba: en cada uno de los paneles izquierdos se representa p_1 (rojo) y $\frac{1}{\sqrt{B}}$ (azul) frente a α mientras que en los derechos se representa p_2 (rojo) y $1/2$ (azul) frente a α . Abajo: Tiempo final t_f frente a T_i para $\alpha = 0.6$, según la ecuación (4.1) (línea azul), según (3.38) (estrellas negras), y ajuste según la ecuación (4.2) (línea roja). Observamos cómo la tendencia natural de convergencia se invierte para valores muy altos de χ_{\max} . En todos los casos $d = 2$.

el caso C-H, como se ha mostrado en las figuras 4.6 y 4.7. Si eliminásemos la restricción física impuesta sobre χ_{\min} y estudiásemos a nivel puramente matemático el sistema cuando el valor de la intensidad puede variar entre $-\infty$ y $+\infty$ comprobaríamos cómo desaparece este comportamiento asimétrico del sistema ante ambos protocolos.

También hemos analizado la dependencia respecto de α de la tendencia de los tiempos finales, dados por (3.31) y (3.38), hacia a la predicción no lineal (4.1). Se encuentra que, para ambos protocolos, al disminuir α (aumentar la inelasticidad) disminuye el valor de χ_{\max} y aumenta el de χ_{\min} necesarios para invertir el orden natural de convergencia, es decir, la aproximación lineal realizada deja de ser válida para valores más tempranos de intensidad. Sin embargo, también se aprecian diferencias entre ambos protocolos. Si fijamos en ambos casos $\alpha = 0.1$ (que puede considerarse como un régimen de alta inelasticidad) podemos verificar cómo, para el protocolo C-H, los tiempos finales de la aproximación lineal son superiores a los de la fórmula (4.1) hasta valores $\chi_{\max} = 85$ y $\chi_{\min} = 0$.³ Por otra parte, en el caso H-C los tiempos finales de la aproximación lineal exceden los de la fórmula (4.1) hasta valores $\chi_{\max} = 9$ y $\chi_{\min} = 0$, que son menores que los del protocolo C-H.⁴ La asimetría entre ambos protocolos vuelve a ser reflejo de la asimetría existente entre χ_{\min} y χ_{\max} anteriormente expuesta.

Resumiendo, como tendencia general los tiempos finales del caso C-H presentan un mejor ajuste a la fórmula (4.1) para valores más extremos del termostato (en todo el rango de α) mientras que los tiempos finales del protocolo H-C, aunque también presentan un buen ajuste a la predicción (4.1), se alejan del comportamiento marcado por esta para valores menos extremos de los controles, como puede verificarse en los paneles inferiores de la figura 4.7 para $\alpha = 0.6$. Otro rasgo general en ambos protocolos es que los controles a partir de los cuales deja de ser válida la aproximación lineal (esto es, se invierte la convergencia natural “desde arriba”) se vuelven menos extremos al disminuir α . Este comportamiento con α puede entenderse teniendo en cuenta que α_2^s aumenta al disminuir α y, en consecuencia, la importancia del término proporcional a la intensidad χ en la ecuación (3.5) de evolución de la temperatura también aumenta: con un valor más pequeño de χ tenemos el mismo valor de la derivada de la temperatura.

³Para $\alpha = 0.6$ no hemos encontrado valores para los controles que invirtiesen la tendencia “desde arriba”. El primer valor de α para el que encontramos la inversión, al fijar $\chi_{\min} = 0$ y $\chi_{\max} \rightarrow \infty$, es $\alpha = 0.45$.

⁴Por otra parte, también son menores que los encontrados para $\alpha = 0.6$ en el caso H-C.

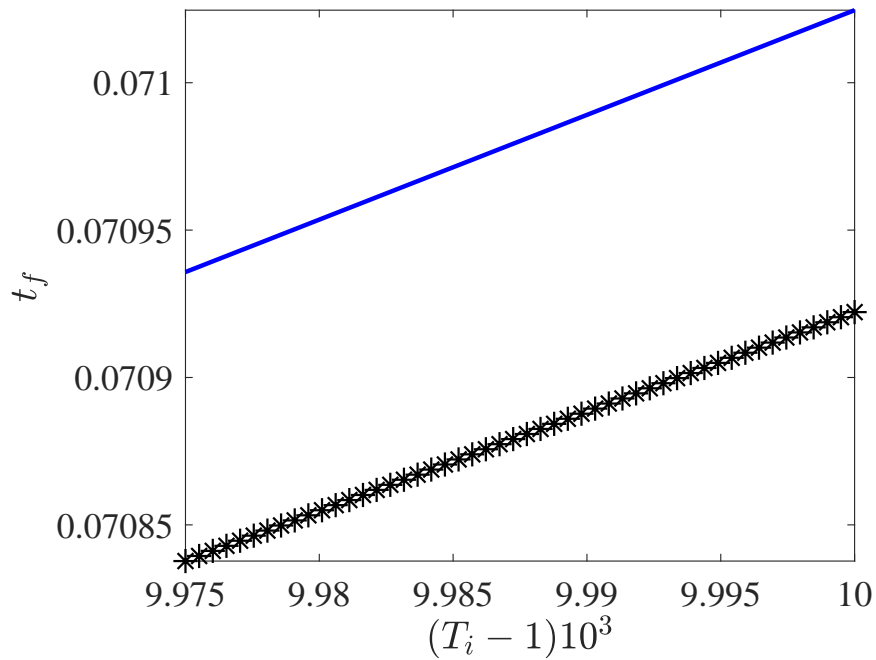


Figura 4.8: Inversión de la convergencia del tiempo óptimo de conexión. Representamos los tiempos finales t_f frente a T_i según las ecuaciones (3.38) (estrellas negras) y según (4.1) (línea azul), para $\alpha = 0.6$ en el caso H-C. Encontramos que para $\chi_{\max} = 10.1$ y $\chi_{\min} = 0.0$ el tiempo final es menor que el proporcionado por la ecuación (4.1), lo que no tiene sentido físico ya que esta corresponde al caso $\chi_{\max} = \infty$ y $\chi_{\min} = 0$. Esto marca un límite de validez para la teoría lineal desarrollada en este trabajo.

5 | Conclusiones

El primer objetivo de este trabajo ha sido introducir la teoría del control óptimo, que culmina en el principio del máximo, desde la óptica que ofrece el cálculo variacional. Esta vía, sin ser la forma más rigurosa de exponer el formalismo matemático, ofrece una perspectiva más intuitiva desde el punto de vista físico. El segundo objetivo de este trabajo ha sido utilizar la potencia del método matemático expuesto para resolver un problema físico relevante: la conexión óptima (en el sentido de minimizar el tiempo de conexión) entre dos estados estacionarios de un sistema fuera del equilibrio. Concretamente, hemos considerado la conexión para un gas granular sometido a un termostato externo cuando los dos estados estacionarios son muy próximos, lo que nos ha permitido introducir una aproximación lineal y obtener soluciones analíticas exactas.

A continuación, presentamos los principales resultados recogidos en este trabajo:

- Hemos deducido las condiciones de primer y segundo orden para que un funcional alcance su valor mínimo, a partir del concepto de primera y segunda variación del mismo. Estas condiciones conforman la columna vertebral del cálculo variacional y dan lugar a las famosas ecuaciones de Euler-Lagrange y a las condiciones de Legendre.
- Hemos empleado las herramientas que nos ofrece el cálculo en variaciones para esbozar un primer esquema del principio del máximo, desarrollar una intuición del mismo a partir de los conocimientos adquiridos y mostrar la conexión entre ambas teorías que pudiera diluirse tras el formalismo matemático.
- Hemos formulado el principio del máximo en dos casos particulares, cuyas condiciones son fácilmente generalizables a otros problemas, y una variante del mismo aplicable a sistemas lineales. Así mismo, hemos mostrado las ventajas que la teoría del control ofrece frente al cálculo variacional para un ejemplo sencillo, como puede ser aparcar un coche en el menor tiempo posible y con una aceleración restringida. Esto es importante porque este tipo de restricciones no holónomas aparecen en muchos problemas físicos relevantes.
- Hemos introducido una descripción de sistemas granulares en el régimen de flujo rápido (gases granulares), exponiendo sus rasgos característicos y las ecuaciones que gobiernan su evolución temporal, tanto en el caso en el que dicho sistema se encuentra aislado (enfriamiento homogéneo) como en el caso en el cual está sometido a un forzamiento externo, debido a la presencia de un termostato.

- Hemos linealizado el sistema de ecuaciones para la temperatura y la kurtosis de un sistema granular sometido a un termostato de intensidad próxima a la unidad, hemos verificado las hipótesis del teorema lineal enunciado anteriormente y lo hemos aplicado para resolver el sistema.
- Hemos resuelto analíticamente el sistema lineal planteado, obteniendo unas soluciones cerradas para el protocolo a seguir y para la evolución completa del sistema. Hemos analizado el comportamiento de dichas soluciones para contrastarlas con la intuición que pudiéramos tener previa a la resolución.
- Hemos explorado los límites de la aproximación lineal, forzando la intensidad del termostato a valores lejos de la unidad y comparando los tiempos finales obtenidos bajo la hipótesis de linealidad con los resultados obtenidos en la Ref. [14], encontrando un muy buen compromiso entre ambos enfoques.

Los resultados obtenidos en este trabajo son aplicables cuando tratamos gases granulares con temperaturas iniciales y finales próximas entre sí y un rango muy estrecho para la intensidad del termostato. Por otra parte, en la Ref. [14] se cubre el caso en el que, siendo las temperaturas final e inicial cualesquiera, se dispone de toda la potencia posible del termostato, lo cual resulta esencialmente diferente del planteamiento considerado en esta memoria. Esto abre, a su vez, nuevas posibilidades de estudio, en particular la posibilidad de resolver el problema de conexión óptima (en el sentido de minimizar el tiempo de conexión) en una situación completamente general. Esto es, encontrar el tiempo mínimo de conexión t_f para temperaturas inicial y final arbitrarias, así como valores máximo y mínimo de la intensidad del termostato arbitrarias, lo que nos permitiría caracterizar de manera completa el comportamiento del sistema. En este contexto, es relevante verificar si la solución del “problema general” converge, y (de hacerlo) cómo lo hace, al régimen de respuesta lineal considerado aquí y al régimen de máxima potencia del termostato estudiado en la Ref. [14].

A | Apéndice. Valores límite de la intensidad del termostato

En este apéndice, estudiamos el rango de valores de la intensidad del termostato en ambos protocolos bang-bang, C-H y H-C, que permiten la conexión entre los dos estados estacionarios de no equilibrio. Esto es, queremos analizar si es posible realizar la conexión para cualquier pareja de valores $(\chi_{\min}, \chi_{\max})$, o si aparecen zonas en el espacio de parámetros que hacen imposible la conexión. Analizamos el caso C-H (enfriamiento, $T_i > 1$) en detalle, ya que el caso H-C es completamente análogo.

Físicamente es claro que para poder alcanzar la temperatura final $T_f = 1$ objetivo, es imprescindible que $\chi_{\min} < 1$. Esto es, necesitamos que el valor mínimo de la intensidad del termostato sea menor que el correspondiente a la temperatura final deseada. Pero, ¿qué sucede con χ_{\max} ? ¿Es posible la conexión siempre que $\chi_{\max} > 1$ o hay una cota inferior, bajo la cual no es posible conectar los dos estados?

Los valores límite $(\chi_{\min}, \chi_{\max})$ son aquellos que conduzcan a la divergencia del tiempo de conexión óptimo t_f . A partir de la ecuación (3.31), que define el tiempo t_f como función de T_i , χ_{\min} y χ_{\max} ,

$$t_f = \frac{1}{k} \log \left(\frac{\frac{2(\chi_{\max} - \chi_{\min})e^{\lambda_1 t_j}}{3T_i - 2\chi_{\min} - 1} - 1}{\frac{2(\chi_{\max} - \chi_{\min})e^{\lambda_2 t_j}}{3T_i - 2\chi_{\min} - 1} - 1} \right), \quad (\text{A.1})$$

hallamos los valores de los controles que hacen que $t_f \rightarrow \infty$. La única manera de conseguir que t_f diverja es hacer que, o bien el numerador de la fracción de logaritmo tienda a ∞ o bien el denominador de la misma tienda a 0. A continuación analizamos ambas posibilidades.

Para que el numerador del logaritmo en (A.1) tienda a ∞ es necesario que, o bien $\chi_{\min} \rightarrow (3T_i - 1)/2 > 1$,¹ o que t_j tienda a ∞ . En este último caso es evidente que t_f divergirá siempre. Físicamente, es claro que el tiempo de conexión no puede ser menor que el tiempo de cambio, $t_f \geq t_j$. Matemáticamente, como $\lambda_1 > \lambda_2$, se cumple que la divergencia del numerador siempre gana, de hecho $t_f \sim t_j$ (el tiempo de la segunda parte del bang-bang se vuelve despreciable frente

¹De acuerdo con la discusión del párrafo anterior, esta solución no tiene sentido físico.

a t_j). La ecuación (3.32) que define t_j , esto es,

$$(3T_i - 2\chi_{\min} - 1) \left(\frac{2(\chi_{\max} - \chi_{\min})e^{\lambda_2 t_j}}{3T_i - 2\chi_{\min} - 1} - 1 \right)^{\frac{\lambda_1}{k}} = 2(\chi_{\max} - 1) \left(\frac{2(\chi_{\max} - \chi_{\min})e^{\lambda_1 t_j}}{3T_i - 2\chi_{\min} - 1} - 1 \right)^{\frac{\lambda_2}{k}}, \quad (\text{A.2})$$

nos dice que cuando $t_j \rightarrow \infty$ tenemos

$$(\chi_{\max} - \chi_{\min}) \sim (\chi_{\max} - 1). \quad (\text{A.3})$$

Por tanto, $t_j \rightarrow \infty$ cuando $\chi_{\min} \rightarrow 1^-$, de acuerdo con la intuición física antes descrita.²

Exploremos la segunda posibilidad, esto es, que el denominador del logaritmo en (A.1) se anule. Vemos que esto ocurre cuando

$$t_j \rightarrow \frac{1}{\lambda_2} \log \left(\frac{3T_i - 2\chi_{\min} - 1}{2(\chi_{\max} - \chi_{\min})} \right), \quad (\text{A.4})$$

lo que mantiene el numerador del logaritmo en (A.1) no nulo. La anulación del denominador implica que el primer miembro de la ecuación (A.2) es nulo y, en consecuencia $2(\chi_{\max} - 1) = 0$, ya que el factor que lo acompaña en el segundo miembro es básicamente el numerador del logaritmo en (A.1). Por tanto, $t_f \rightarrow \infty$ cuando $\chi_{\max} \rightarrow 1^+$.

Nuestro análisis implica que es posible conectar los estados estacionarios de no equilibrio inicial y final, siempre que la cota inferior (superior) de la intensidad del termostato, χ_{\min} (χ_{\max}) esté por debajo (encima) de la correspondiente al estado final (la unidad con nuestra elección de variables adimensionales). Esto es, no aparecen zonas de conexión prohibidas más allá de la imposibilidad de enfriar el sistema a una temperatura final que sea menor (mayor) que la correspondiente a la máxima (mínima) intensidad del termostato disponible.

Recordamos que el caso H-C (calentamiento, $T_i < 1$) se trataría de un modo completamente análogo, y obtendríamos como conclusión también que $\chi_{\min} < 1$ y $\chi_{\max} > 1$, con sus papeles intercambiados respecto al caso C-H.

²Esto hace innecesario, matemáticamente, estudiar la otra posibilidad de divergencia de t_j , $\chi_{\min} \rightarrow (3T_i - 1)/2 > 1$.

Anexo

Adjuntamos a continuación los códigos de Matlab empleados para la resolución de la dinámica del sistema y la generación de las gráficas expuestas a lo largo de esta memoria. Nos ceñiremos al caso C-H, pues el caso H-C es completamente análogo. Hemos de indicar que la notación empleada en los códigos es ligeramente distinta a la utilizada en la memoria, incluyendo un parámetro ϵ que se fija igual a 1 en los desarrollos expuestos con anterioridad (puesto que su valor, realmente, no influye de modo alguno en los resultados).

Tiempo t_f y t_j frente a χ_{\max} (el caso de χ_{\min} es completamente análogo):

```
1 %% Valores fijados
2 Tfin=1;
3 Ti=1.01;
4 alfa=0.9;d=2;
5 XIMAX=2;
6 chimin=0.9;
7 %% Parámetros
8 epsilon=abs(1-Ti);
9 deltaTi=(Ti-1)/epsilon; % condición inicial para delta T
10 deltaximin =(chimin-1)/epsilon; % Valor mínimo de delta xi
11 deltaximax=@(chimax) (chimax-1)./epsilon; % Valor maximo de delta xi
12 deltaT0=2/3*deltaximin;
13 deltaT0_p=@(chimax) 2/3*deltaximax(chimax);
14 a_s=(16*(1-alfa)*(1-2*alfa^2))/(73+56*d-24*d*alfa-105*alfa+30*(1-alfa)*
    alfa^2);
15 a_h=(16*(1-alfa)*(1-2*alfa^2))/(25+2*alfa^2*(alfa-1)+24*d+alfa*(8*d-57));
16 B=a_h/(a_h-a_s);
17 beta=1+3/16*a_s;
18 b1=-3/2*beta;
19 b2=-(beta-1);
20 b3=3;
21 b4=-2*B;
22 k=(sqrt(+b1^2-2*b1*b4+4*b2*b3+b4^2));
23 C1=-3/k*((Ti-1)/epsilon-deltaT0);
24 P=@(chimax)(b3*deltaT0_p(chimax))/k;
```

```

25 A=@(chimax) C1./P(chimax);
26 b=1/2*(-k+b1+b4); %Primer autovalor, lambda1
27 c=1/2*(k+b1+b4); %Segundo autovalor, lambda2
28 m=@(chimax) b3*(deltaT0-deltaT0_p(chimax))/k;
29 %% Ecuación a resolver para cada Xmax
30 g =@(t, chimax) A(chimax).*(1-m(chimax)./C1*exp(-b*t)) - ((1-m(chimax)./C1*
    exp(-c*t))/(1-m(chimax)./C1*exp(-b*t))^(b/k));
31 %% tj frente Xmax
32 chimaxv=linspace (1+0.0001, XIMAX, 100);
33 n=length(chimaxv);
34 tj= zeros(1,n);
35 for i=1:n
36     h=@(t) g(t, chimaxv(i));
37     tj(i)=fzero(h, [0.09364, 0.4]);
38 end
39 C3 =P(chimaxv).*((1-m(chimaxv)./C1.*exp(-c.*tj))./(1-m(chimaxv)./C1.*exp(-
    b.*tj))).^(b./k);
40 tf=1/b*log(P(chimaxv)./C3);
41 tt=tf-tj;
42 figure(1)
43 hold on
44 box on
45 plot(chimaxv,tj, chimaxv,tf, 'LineWidth',2)
46 xlabel('$\chi_{\max}$', 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 16)
47 ylabel('$t_j$; $y$; $t_f$ ', 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 16)

```

Trayectorias de T y A_2 en función del tiempo:

```

1 %% Valores fijados
2 Tfin=1;
3 Ti=1.01;
4 chimax=1.1;
5 chimin=0.9;
6 alfa=0.9;d=2;
7 %% Parámetros
8 epsilon=abs(1-Ti);
9 deltaTi=(Ti-1)/epsilon; % condición inicial para delta T
10 deltaximin=(chimin-1)/epsilon; % Valor mínimo de delta xi
11 deltaximax=(chimax-1)/epsilon; % Valor maximo de delta xi
12 deltaT0=2/3*deltaximin;
13 deltaT0_p=2/3*deltaximax;
14 a_s=(16*(1-alfa)*(1-2*alfa^2))/(73+56*d-24*d*alfa-105*alfa+30*(1-alfa)*
    alfa^2);
15 a_h=(16*(1-alfa)*(1-2*alfa^2))/(25+2*alfa^2*(alfa-1)+24*d+alfa*(8*d-57));
16 B=(a_h)/(a_h-a_s);
17 beta=1+3/16*a_s;

```

```

18 b1=-3/2*beta;
19 b2=-(beta-1);
20 b3=3;
21 b4=-2*B;
22 k=(sqrt(+b1^2-2*b1*b4+4*b2*b3+b4^2));
23 C1=-3/k*((Ti-1)/epsilon-deltaT0);
24 P=(b3*deltaT0_p)/k;
25 A=C1./P;
26 b=1/2*(-k+b1+b4); %Primer autovalor, lambda1
27 c=1/2*(k+b1+b4); %Segundo autovalor, lambda2
28 m=b3*(deltaT0-deltaT0_p)/k;
29 v1=-(-b1+b4+k)/(2*b3);
30 v2=-(-b1+b4-k)/(2*b3);
31 %% Hallamos tj, tf C3 y C4
32 g=@(t) A*(1-m/C1*exp(-b*t)) - ((1-m/C1*exp(-c*t))/(1-m/C1*exp(-b*t)))^(b/
    k);
33 tiempos=linspace(0,2);
34 tj=fzero(g,[0,2]);
35 C3=P*((1-m/C1*exp(-c*tj))/(1-m/C1*exp(-b*tj)))^(b/k);
36 tf=1/b*log(P/C3);
37 C4=-C3*exp(-k*tf);
38 %% Primera ventana de tiempo
39 deltaT1=@(t) C1*(v1*exp(b*t)-v2*exp(c*t))+deltaT0;
40 deltaA1=@(t) C1*(exp(b*t)-exp(c*t));
41 T1=@(t) 1+epsilon*deltaT1(t);
42 A1=@(t) 1+epsilon*deltaA1(t);
43 %% Segunda ventana de tiempo
44 deltaT2=@(t) C3*v1*exp(b*t)+C4*v2*exp(c*t)+deltaT0_p;
45 deltaA2=@(t) C3*exp(b*t)+C4*exp(c*t);
46 T2=@(t) 1+epsilon*deltaT2(t);
47 A2=@(t) 1+epsilon*deltaA2(t);
48 %% Representación
49 tiempos1=linspace(0,tj);
50 tiempos2=linspace(tj,tf);
51 tiempos=linspace(0,tf);
52 unos=ones(1,100);
53 hold on
54 box on
55 plot(tiempos1,T1(tiempos1),'b--',tiempos1,A1(tiempos1),'b',tiempos2,T2(
    tiempos2),'r--',tiempos2,A2(tiempos2),'r','LineWidth',2)
56 plot(tiempos, unos)
57 xticks([0 0.04 0.08 0.12 0.16 0.2 0.24])
58 yticks([0.99 1 1.01 1.02])
59 axis([-inf inf 0.99 1.02])
60 xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 16)
61 ylabel('$T\;y\;A_2$', 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 16)

```

Trayectorias de T y A_2 en el espacio de las fases:

```

1 %% Trayectoria de Tj y Aj ESPACIO DE FASES
2 %% Valores fijados
3 Tini=1.01;
4 Tfin=1;
5 alfa=0.9;d=2;
6 TMAX=Tini/Tfin;
7 chimax=1.1;
8 chimin=0.9;
9 %% Parámetros
10 epsilon=@(Ti) abs(1-Ti);
11 deltaTi=@(Ti)(Ti-1)./epsilon(Ti); % condición inicial para delta T
12 deltaximin=@(Ti)(chimin-1)./epsilon(Ti); % Valor mínimo de delta xi
13 deltaximax=@(Ti)(chimax-1)./epsilon(Ti); % Valor maximo de delta xi
14 deltaT0=@(Ti)2/3*deltaximin(Ti);
15 deltaT0_p=@(Ti)2/3*deltaximax(Ti);
16 a_s=(16*(1-alfa)*(1-2*alfa^2))/(73+56*d-24*d*alfa-105*alfa+30*(1-alfa)*
    alfa^2);
17 a_h=(16*(1-alfa)*(1-2*alfa^2))/(25+2*alfa^2*(alfa-1)+24*d+alfa*(8*d-57));
18 B=(a_h)/(a_h-a_s);
19 beta=1+3/16*a_s;
20 b1=-3/2*beta;
21 b2=-(beta-1);
22 b3=3;
23 b4=-2*B;
24 k=sqrt(b1^2-2*b1*b4+4*b2*b3+b4^2);
25 C1=@(Ti)-3/k*((Ti-1)./epsilon(Ti)-deltaT0(Ti));
26 P=@(Ti)(b3*deltaT0_p(Ti))./k;
27 A=@(Ti)C1(Ti)./P(Ti);
28 b=1/2*(-k+b1+b4); %Primer autovalor, lambda1
29 c=1/2*(k+b1+b4); %Segundo autovalor, lambda2
30 m=@(Ti) b3*(deltaT0(Ti)-deltaT0_p(Ti))./k;
31 v1=-(-b1+b4+k)./(2*b3);
32 v2=-(-b1+b4-k)./(2*b3);
33 %% Ecuación a resolver para cada Ti y Xmax
34 g=@(t,Ti) A(Ti).*(1-m(Ti)./C1(Ti).*exp(-b*t)) - ((1-m(Ti)./C1(Ti).*exp(-c
    *t))/(1-m(Ti)./C1(Ti).*exp(-b*t))).^(b/k);
35 %% tj frente Ti para Xmax y Xmin fijos
36 n=100;
37 Ti=linspace(1+0.0001,TMAX,n);
38 tj=zeros(1,n);
39 for i=1:n
40     h=@(t) g(t,Ti(i));
41     tj(i)=fzero(h,[0,2]);
42 end
43 %% Tj y A2j variando Ti en espacio fases

```

```

44 %% Ti variable
45 deltaTj=C1 (Ti) .*(v1*exp(b*tj)-v2*exp(c*tj))+deltaT0(Ti);
46 deltaAj=C1 (Ti) .*(exp(b*tj)-exp(c*tj));
47 Tj=1+epsilon(Ti).*deltaTj;
48 Aj=1+epsilon(Ti).*deltaAj;
49 hold on
50 plot( Aj(10),Tj(10), 'o',Aj(20),Tj(20), 'o',Aj(40),Tj(40), 'o', Aj(60),Tj(60)
      , 'o',Aj(80),Tj(80), 'o', 'MarkerSize',10);
51 sel=[10,20,40,60,80];
52 for i=sel
53 %% Valores fijados
54 Ti=linspace (1+0.0001,TMAX,n);
55 Ti=Ti(i);
56 alfa=0.9;d=2;
57 %% Parametros
58 epsilon=abs(1-Ti);
59 deltaTi=(Ti-1)/epsilon; % condición inicial para delta T
60 deltaximin=(chimin-1)/epsilon; % Valor mínimo de delta xi
61 deltaximax=(chimax-1)/epsilon; % Valor maximo de delta xi
62 deltaT0=2/3*deltaximin;
63 deltaT0_p=2/3*deltaximax;
64 a_s=(16*(1-alfa)*(1-2*alfa^2))/(73+56*d-24*d*alfa-105*alfa+30*(1-alfa)*
      alfa^2);
65 a_h=(16*(1-alfa)*(1-2*alfa^2))/(25+2*alfa^2*(alfa-1)+24*d+alfa*(8*d-57));
66 B=(a_h)/(a_h-a_s);
67 beta=1+3/16*a_s;
68 b1=-3/2*beta;
69 b2=-(beta-1);
70 b3=3;
71 b4=-2*B;
72 k=(sqrt(+b1^2-2*b1*b4+4*b2*b3+b4^2));
73 C1=-3/k*((Ti-1)./epsilon-deltaT0);
74 P=(b3*deltaT0_p)/k;
75 A=C1/P;
76 b=1/2*(-k+b1+b4); %Primer autovalor, lambda1
77 c=1/2*(k+b1+b4); %Segundo autovalor, lambda2
78 m=b3*(deltaT0-deltaT0_p)/k;
79 %% Hallamos tj, tf C3 y C4
80 g=@(t) A*(1-m/C1*exp(-b*t)) - ((1-m/C1*exp(-c*t))/(1-m/C1*exp(-b*t)))^(b/k
      );
81 tj=fzero (g,[0,2]);
82 C3=P*((1-m/C1*exp(-c*tj))./(1-m/C1*exp(-b*tj)))^(b/k);
83 tf=1/b*log(P/C3);
84 C4=-C3*exp(-k*tf);
85 %% Primera ventana de tiempo
86 deltaT1=@(t)C1*(v1*exp(b*t)-v2*exp(c*t))+deltaT0;

```

```

87 deltaA1=@(t)C1*(exp(b*t)-exp(c*t));
88 T1=@(t)1+epsilon*deltaT1(t);
89 A1=@(t)1+epsilon*deltaA1(t);
90 %% Segunda ventana de tiempo
91 deltaT2=@(t)C3*v1*exp(b*t)+C4*v2*exp(c*t)+deltaT0_p;
92 deltaA2=@(t)C3*exp(b*t)+C4*exp(c*t);
93 T2=@(t)1+epsilon*deltaT2(t);
94 A2=@(t)1+epsilon*deltaA2(t);
95 %% Representación
96 tiempos1=linspace(0,tj);
97 tiempos2=linspace(tj,tf);
98 tiempos=linspace(0,tf);
99 hold on
100 box on
101 plot(A1(tiempos1),T1(tiempos1),'b--',A2(tiempos2),T2(tiempos2),'r-', '
    LineWidth',2)
102 xticks([1 1.004 1.008 1.012 1.016 1.02])
103 yticks([0.992 0.996 1 1.004 1.008 ])
104 xlabel('$A_2$', 'interpreter', 'latex', 'FontSize',16)
105 ylabel('$T$', 'interpreter', 'latex', 'FontSize',16)
106 end

```

Ajuste de t_f según fórmula (4.1) y representación de los parámetros del mismo:

```

1 %% Valores fijados
2 d=2;
3 Tfin=1;
4 Ti=1.01;
5 chimax=5;
6 chimin=0.05;
7 %% Parámetros
8 epsilon=abs(1-Ti);
9 deltaTi=@(Ti)(Ti-1)/epsilon; % condición inicial para delta T
10 deltaximin=(chimmin-1)/epsilon; % Valor mínimo de delta xi
11 deltaximax=(chimmax-1)/epsilon; % Valor maximo de delta xi
12 deltaT0=2/3*deltaximin;
13 deltaT0_p=2/3*deltaximax;
14 a_s=@(alfa)(16*(1-alfa).*(1-2*alfa.^2))./(73+56*d-24*d*alfa-105*alfa
    +30*(1-alfa).^2);
15 a_h=@(alfa)(16*(1-alfa).*(1-2*alfa.^2))./(25+2*alfa.^2.*(alfa-1)+24*d+alfa
    *(8*d-57));
16 B=@(alfa)(a_h(alfa))./(a_h(alfa)-a_s(alfa));
17 beta=@(alfa)1+3/16*a_s(alfa);
18 b1=@(alfa)-3/2*beta(alfa);
19 b2=@(alfa)-(beta(alfa)-1);
20 b3=3;

```

```

21 b4=@(alfa)-2*B(alfa);
22 k=@(alfa) sqrt(b1(alfa).^2-2*b1(alfa).*b4(alfa)+4*b2(alfa)*b3+b4(alfa).^2);
23 C1=@(alfa,Ti) -3./k(alfa).*((Ti-1)/epsilon-deltaT0);
24 P=@(alfa)(b3*deltaT0_p)./k(alfa);
25 A=@(alfa,Ti) C1(alfa,Ti)./P(alfa);
26 b=@(alfa)1/2*(-k(alfa)+b1(alfa)+b4(alfa)); %Primer autovalor, lambda1
27 c=@(alfa)1/2*(k(alfa)+b1(alfa)+b4(alfa)); %Segundo autovalor, lambda2
28 m=@(alfa) b3*(deltaT0-deltaT0_p)./k(alfa);
29 %% Ecuación a resolver para cada Ti y Xmax
30 g =@(t,alfa,Ti) A(alfa,Ti).*(1-m(alfa)./C1(alfa,Ti).*exp(-b(alfa).*t)) -
    ((1-m(alfa)./C1(alfa,Ti).*exp(-c(alfa).*t))/(1-m(alfa)./C1(alfa,Ti).*
    exp(-b(alfa).*t))).^(b(alfa)./k(alfa));
31 %% tj frente Ti para cada valor de alfa
32 n=50;
33 alfav=linspace(0.001,0.99,n);
34 Tiv=linspace(1+0.0001,Ti,n);
35 tj= zeros(n);
36 tf=zeros(n);
37 param1=zeros(1,n);
38 param2=zeros(1,n);
39 for i=1:n
40     for j=1:n
41         h=@(t) g(t,alfav(i),Tiv(j));
42         tj(i,j)=fzero(h,[0,5]);
43     end
44 %% tf frente a Ti
45 C3=P(alfav(i)).*((1-m(alfav(i))./C1(alfav(i),Tiv).*exp(-c(alfav(i)).*tj(i
    ,:)))./(1-m(alfav(i))./C1(alfav(i),Tiv).*exp(-b(alfav(i)).*tj(i,:))))
    .^(b(alfav(i))./k(alfav(i))));
46 tf(i,:)=1./b(alfav(i)).*log(P(alfav(i))./C3);
47 %% Detalles del ajuste
48 par=[0 0 ];
49 parmax=[Inf Inf ];
50 parmin=[-Inf -Inf];
51 opts=optimset; % Cargamos las opciones de optimización por defecto
52 opts.TolFun=1e-18; % Modificamos TolFun y TolX para mejorar el ajuste
53 opts.TolX=1e-18;
54 p=lsqnonlin(@(p) funcion_error_CH(Tiv,tf(i,:),p), par, parmin, parmax,
    opts);
55 param1(i)=p(1);
56 param2(i)=p(2);
57 end
58 %% Gráficas comparativas
59 subplot(1,2,1)
60 box on
61 plot(alfav,param1,'r',alfav,(B(alfav)).^(-1/2),'b','LineWidth',2)

```

74 DEL CÁLCULO VARIACIONAL A LA TEORÍA DEL CONTROL ÓPTIMO: APLICACIÓN A SISTEMAS LEJOS DEL EQUILIBRIO

```
62 axis([0 1 0.2 1])
63 xlabel('\alpha$', 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 16)
64 ylabel('$p_1$', 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 16)
65 subplot(1,2,2)
66 box on
67 plot(alfav,param2,'r',alfav,0.5*ones(1,n),'b','LineWidth',2)
68 axis([0 1 0.5 0.52])
69 xlabel('\alpha$', 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 16)
70 ylabel('$p_2$', 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 16)
71 figure(2)
72 nume=23; %nos permite seleccionar el valor de alfa deseado
73 unos=ones(1,length(Tiv));
74 hold on
75 box on
76 plot((Tiv-unos)*10^3,tf(nume,:), 'k*', 'MarkerSize', 10, 'LineWidth', 2)
77 plot((Tiv-unos)*10^3, (B(alfav(nume)))^(-1/2)*(Tiv-1).^(1/2), 'b-', (Tiv-
    unos)*10^3, param1(nume)*(Tiv-1).^(param2(nume)), 'r-', 'LineWidth', 2)
78 axis([-inf inf -inf inf])
79 xlabel('$T_i-1)10^3$', 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 16)
80 ylabel('$t_f$', 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 16)

1 function [f] = funcion_error_CH(Ti,tf,p)
2 p1=p(1);
3 p2=p(2);
4 %% Aproximamos por función teórica
5 tpf=p1.*abs(1-Ti).^p2;
6 %% función a optimizar
7 f=tpf-tf;
8 end
```


Bibliografía

- [1] C. Lanczos, *The variational principles of mechanics* (University of Toronto Press, 1949).
- [2] D. Liberzon *Calculus of variation and optimal control theory* (Princeton University Press, 2012).
- [3] I. M. Gelfand and S. V. Fomin, *Calculus of variations* (Prentice-Hall INC, 1963).
- [4] L. S Pontryagin, *Mathematical theory of optimal processes* (CRC Press, 1987).
- [5] C. A. Plata, D. Guéry-Odelin, E. Trizac and A. Prados, Finite time adiabatic processes: derivation and speed limit, *Physical Review E* **101**, 032129 (2020).
- [6] H. M. Jaeger, Sidney R. Nagel and Robert O. Behringer, Granular solids, liquids and gases, *Reviews of Modern Physics* **68**, 1259 (1996).
- [7] G. Y. Onoda and E. G. Liniger, Random loose packings of uniform spheres and the dilatancy onset, *Physical Review Letters* **64**, 2727 (1990).
- [8] A. Rosatp, K. J. Strandburg, F. Prinz and R. H. Swendsen, Why the Brazil Nut are on the top: size segregation of particulate matter by shaking, *Physical Review Letters* **8**, 1038 (1987).
- [9] Matthias E. Möbius, Benjamin E. Lauderle, Sidney R. Nagel, Heinrich M. Jaeger, Size separation of granular particles, *Nature* **414**, 270 (2001).
- [10] N. V. Brilliantov and T. Pöschel, *Kinetic theory of granular gases* (Oxford University Press, 2004).
- [11] T.P.C Van Noije and M. H. Ernst, Velocity distributions in homogeneous granular fluids: the free and heated case, *Granular Matter* **1**, 57 (1998).
- [12] J. M. Montanero and A. Santos, Computer simulation of uniformly heated granular fluids, *Granular Matter* **2**, 53 (2000).
- [13] E. Trizac and A. Prados, Memory effect in uniformly heated granular gases, *Physical Review Letters* **112**, 198001 (2014).

- [14] A. Prados, Optimizing the relaxation route with optimal control, *Physical Review Research* **3**, 023128 (2021).