

Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla



Trabajo Fin de Grado
Doble grado en Física y Matemáticas

Algunos aspectos matemáticos de la Teoría Cuántica de Campos

Presentado por Luis Miguel Motilla Martínez

Dirigido por el Dr. Renato Álvarez Nodarse.

Sevilla, junio de 2021

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Introducción Histórica	2
2. Física Clásica Relativista	7
2.1. Relatividad Especial	7
2.1.1. Notación covariante-contravariante	9
2.1.2. Grupo de Lorentz	11
2.1.3. Grupos de Lie de Matrices y álgebras de Lie	15
2.1.4. Representación del grupo de Lorentz $\mathfrak{so}(1,3)$	18
2.2. Campos clásicos. El campo electromagnético	23
3. Teoría Cuántica de Campos	28
3.1. Mecánica Cuántica Relativista	28
3.1.1. Ecuación de Klein-Gordon y sus problemas	28
3.1.2. Ecuación de Dirac	31
3.1.3. Invarianza de las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac	34
3.1.4. Resolución de la ecuación de K-G	36
3.1.5. Resolución de la ecuación de Dirac	39
3.1.6. Límite no relativista	42
3.2. Campos cuánticos	45
3.2.1. Sistemas de varias partículas	46
3.2.2. El oscilador cuántico	48
3.2.3. Campo escalar, solución de la ecuación libre de Klein-Gordon	50
3.2.4. Solución de la ecuación de Dirac. Campo espinorial	59
Conclusiones	61
Bibliografía	66

Agradecimientos

Gracias a mis padres y amigos por estar ahí cuando lo necesitaba, gracias a Renato por ayudarme en la tarea de hacer este trabajo, y gracias a todos los profesores que me han hecho descubrir y entender la belleza de la ciencia.

Resumen

El objetivo de este trabajo es dar rigor matemático a algunos de los conceptos y técnicas usadas en la Teoría Cuántica de Campos. En particular se discutirá como construir una teoría cuántica que sea compatible con la teoría de la relatividad, algo que no ocurre con la Mecánica Cuántica “clásica” basada en la ecuación de Schrödinger. También se discutirán varios aspectos relevantes relacionados con la ecuación de Klein-Gordon y con la ecuación de Dirac en el marco de la Mecánica Cuántica Relativista, así como en la Teoría Cuántica de Campos. Entre las técnicas usadas están la teoría de representación de grupos, la teoría de distribuciones, el análisis funcional y el análisis de Fourier.

Abstract

The objective of this work is to provide mathematical rigor to some of the concepts and techniques used in Quantum Field Theory. In particular, it will be discussed how to build a quantum theory which is compatible with the theory of relativity, something that does not happen with the “classical” Quantum Mechanics based on the Schrödinger equation. Some relevant aspects related to the Klein-Gordon equation and the Dirac equation will also be discussed within the framework of Relativistic Quantum Mechanics, as well as Quantum Field Theory. Among the techniques used are group representation theory, distribution theory, functional analysis, and Fourier analysis.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

A physical law must possess
mathematical beauty

Paul Dirac

La física es una ciencia experimental que, partiendo de observaciones de diversos fenómenos, construye un modelo matemático capaz de explicar dichos fenómenos, así como predecir nuevos fenómenos. En el camino de formalizar un nuevo modelo se pueden crear concepciones nuevas del universo, como sucedió con la relatividad general y especial de Einstein o con la mecánica cuántica en tiempos de Planck. En numerosas ocasiones, este nuevo modelo requiere de nuevas técnicas matemáticas para poder trabajar con él. La física Newtoniana necesitó del concepto de derivada, junto a la relatividad se desarrolló la geometría no euclidiana y con la mecánica cuántica se usó (entre otras cosas) el análisis funcional, y propició el desarrollo de diversas teorías matemáticas.



Figura 1.1: Paul Dirac.

Aún así, en primera instancia, el físico no se suele preocupar por su rigor matemático: si el modelo explica y predice fenómenos entonces el modelo es correcto, y los procedimientos hechos lo son. Citando a Max Born (una de las mayores eminencias durante el nacimiento de la mecánica cuántica) sobre la teoría matemática para matrices de dimensión infinita (o como él dice, formas de infinitas variables):

Hasta ahora, la teoría de formas cuadráticas (o hermíticas) de infinitas variables ha sido desarrollada principalmente en el caso especial de “formas acotadas” [...], pero nuestro interés se centra en formas no acotadas. Sin embargo, podemos asumir que las reglas principales funcionan de la misma manera.

Gracias a los trabajos de von Neumann (*Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, 1932), se consiguió construir un análisis funcional para aquellas matrices (que pasarían a llamarse operadores) y así formalizar algunos de los aspectos matemáticos de la mecánica cuántica.

Otro ejemplo conocido es el de la **delta de Dirac**. En física se utiliza como una “función” generalizada $\delta(x)$, la cual vale 0 en cualquier punto menos cuando $x = 0$, donde (supuestamente) “vale” infinito. La definición que se le suele dar es que su integral en todo el espacio vale 1, $\int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 1$, aun siendo nula en casi todo¹. La delta de Dirac nace de la necesidad en la física de trabajar con abstracciones, como puede ser una carga o una masa puntual. De esta manera queremos que una carga q no tenga dimensiones, por lo que si tratásemos de calcular una densidad de carga ρ (como se puede hacer con un objeto real) nos encontraríamos con un problema grave. Por ello, se buscó una “función” $\rho(x) = q\delta(x)$ de tal manera que al integrarla en todo el espacio obtuviéramos nuestra carga q . Con esto nació la delta de Dirac, que al hacer la integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} q\delta(x) dx = q \int_{\mathbb{R}^3} \delta(x) dx = q,$$

obtuviésemos la carga q , pero que $\delta(x)$ fuese nula en casi todo. Una manera en la que podemos entender la delta de Dirac en una primera aproximación es definiendo una función de la forma

$$h_{\Delta}(x) = \begin{cases} \frac{\Delta}{2}, & |x| \leq \frac{1}{\Delta}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{\Delta}. \end{cases}$$

donde mantenemos un área constante a 1 (es decir su integral en todo el espacio vale 1) pero cada vez concentra más su peso alrededor de $x = 0$ al hacer tender Δ a 0, es decir, $\lim_{\Delta \rightarrow 0} h_{\Delta}(x) = \delta(x)$, por lo que

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) h_{\Delta}(x) dx = f(0), \quad \forall f \text{ continua en } \mathbb{R}.$$

La teoría de distribuciones de Schwartz permitió formalizar la delta de Dirac como una **distribución**, con la que tendría pleno sentido matemático.

El objetivo del trabajo será pues dar un soporte matemático riguroso a algunos aspectos de la TCC.

1.2. Introducción Histórica

La mecánica cuántica nació a principios del siglo XX, en un intento de explicar fenómenos como el efecto fotoeléctrico o la radiación del cuerpo negro. Explicaremos brevemente el primero de ellos.

¹Sabemos que la integral de Lebesgue (o de Riemann) de una función nula en casi todo es nula siempre, por lo que es imposible que exista una función que cumpla con esas condiciones.

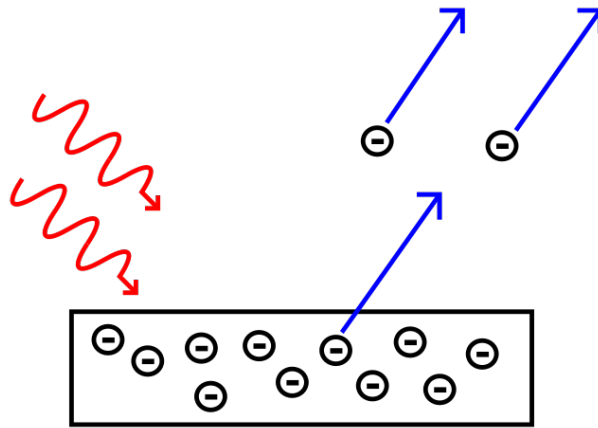


Figura 1.2: Visualización del efecto fotoeléctrico.

El efecto fotoeléctrico ocurre cuando iluminamos un metal (las líneas rojas de la figura 1.2 simbolizan la luz incidente), el cual puede llegar a emitir electrones, dependiendo de que tipo de luz le apliquemos. La particularidad de esto y su mayor dificultad para explicarlo era que no dependía de la intensidad de la luz, sino de su frecuencia (o longitud de onda). Es más, había una barrera de longitud de onda que había que superar para poder comenzar a “arrancar” electrones, y conforme menor longitud de onda poseía la luz, mayor energía cinética poseían los electrones, y conforme más intensidad, más cantidad eran emitidos.

En 1905 Einstein propuso una solución al problema, similar a la solución que propuso Planck en 1900 para el problema de la radiación del cuerpo negro: que la luz estaba formada por pequeños corpúsculos de energía llamados fotones. Los fotones llevarían una energía directamente proporcional a su frecuencia, y con la experimentación se comprobó que dicha constante de proporcionalidad era justamente la misma constante que Planck introdujo en sus trabajos sobre la radiación del cuerpo negro h . Con esto y mediante la experimentación, Einstein propuso la siguiente ley, donde la energía cinética (máxima) de los electrones sería $K = h\nu - W_0$ donde W_0 es una constante que dependería del material y ν la frecuencia de la luz. Además, el hecho de que la intensidad conlleva un mayor número de fotones incidentes es consecuente con el hecho de que a mayor intensidad sean desprendidos más electrones.

Este hecho y muchos otros (el cuerpo negro, la dualidad onda-corpúsculo, la cuantización de la energía, la estructura atómica...) llevaron finalmente al nacimiento de la mecánica cuántica, pero para ello se necesitaba una ecuación de evolución, como la que tenemos en la mecánica clásica (Ley de Newton). Schrödinger propuso una ecuación de este tipo. No fue la primera de ellas pues Heisenberg introdujo también ecuaciones de evolución mediante un formalismo matricial, pero la que se suele usar en mecánica cuántica no relativista (debido a su sencillez) es la ecuación de Schrödinger.

La ecuación de Schrödinger se postuló en 1925, siendo de la forma

$$\hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (1.2.1)$$

donde $\hat{H} = -\hbar^2\Delta + V$ es el operador asociado al Hamiltoniano del sistema, donde Δ denota el laplaciano y V es un potencial que puede depender de la posición y del tiempo. Gracias a esta ecuación se pudieron explicar una gran cantidad de fenómenos, como por ejemplo el efecto túnel, el átomo de hidrógeno, los orbitales atómicos o las bandas de energía entre otras cosas. La ecuación y sus soluciones dieron pie a la creación de unos postulados².

Los postulados fueron introducidos por Paul Dirac entre 1925 y 1927 y más tarde entre 1927 y 1931 fueron tratados con un mayor rigor matemático por John von Neumann³. Ambos se basaron en los trabajos de Schrödinger y Heisenberg, así como en los fenómenos observados en los laboratorios para construirlos. Haremos una breve introducción y discusión de ellos:

1. A un sistema físico se le puede asociar un espacio de Hilbert⁴ adecuado, donde cada estado⁵ queda totalmente determinado por un vector del espacio (función de onda) ψ normalizada, que puede ser función de \vec{r} o \vec{p} y t , que son respectivamente la posición, el momento lineal y el tiempo. En el marco de esta discusión, cuando hablemos de una función de onda, supondremos que nuestro espacio de Hilbert es $L^2(V)$ con V una región arbitraria, a menos que se especifique lo contrario.
2. Cualquier magnitud física A lleva asociada un operador hermítico del espacio de Hilbert anteriormente descrito, \hat{A} . Este operador se llama observable. Al aplicar el operador sobre un estado ψ arbitrario, siempre obtenemos como resultado uno de los autovalores α del observable. Para construir el observable, las variables \vec{r} y \vec{p} pasan a ser operadores \vec{R} y \vec{P} , los cuales discutiremos más tarde cómo actúan sobre una función. Esto conlleva a que cualquier magnitud $A(\vec{r}, \vec{p}, t)$ clásica pase a ser un operador $\hat{A}(\vec{R}, \vec{P}, t)$ (regla de cuantización). Los observables deberán ser operadores hermíticos, y si al usar la regla de cuantización no lo son, habrá que modificarlos para que lo sean.
3. El sistema obedece una ley de evolución, dada por la ecuación de Schrödinger: $\hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$. Donde el operador Hamiltoniano sigue la ley de cuantización dada en el postulado 2, $H = T(\vec{r}, \vec{p}, t) + U(\vec{r}, \vec{p}, t) \rightarrow \hat{H} = \hat{T}(\vec{R}, \vec{P}, t) + \hat{U}(\vec{R}, \vec{P}, t)$.

²Los postulados son, al fin y al cabo, hipótesis que tomamos como ciertas a partir de la observación experimental de los sucesos, tomados de la misma manera que por ejemplo los axiomas de los números reales. Si bien hay un sinnúmero de cosas que se pueden formalizar matemáticamente, los postulados nacen de la experiencia. Estos tienen validez hasta que se observe lo contrario, pero al igual que con el resto de fenómenos, las inconsistencias físicas añaden conocimiento pero no lo quitan, tal y como la Relatividad General no invalida por completo los resultados de la Ley de Gravitación Universal de Newton.

³Para más información sobre los postulados y su nacimiento, ver *The Principles of Quantum Mechanics*, P. Dirac 1930 y *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, von Neumann 1932 y las referencias citadas allí.

⁴Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial V dotado de un producto escalar (\cdot, \cdot) el cual es completo con la norma inducida por el producto escalar. Para profundizar en los espacios de Hilbert y sus propiedades, ver [4].

⁵En física entendemos estado como un conjunto de magnitudes medibles (en mecánica clásica es la posición y la velocidad en un instante) que nos permite obtener toda la información sobre el sistema (e.g. una partícula) en cualquier instante de tiempo.

El primero de los postulados implica que el sistema viene totalmente determinado por un vector de un espacio de Hilbert. Es común referirse a este, en vez de como función de onda, como un “ket”. Un “ket” viene escrito como $|\psi\rangle$. También podemos definir el “bra” $\langle\psi|$, el cual es un covector del espacio dual del espacio de Hilbert que al actuar sobre $|\phi\rangle$ le asocia el producto escalar⁶ (ψ, ϕ) . De esta manera podemos reescribir el producto escalar (ϕ, ψ) como $\langle\phi|\psi\rangle$. Bajo esta notación, el adjunto de un ket $|\psi\rangle$ es el bra correspondiente $|\psi\rangle^\dagger = \langle\psi|$.

El tercer postulado junto al primero implica que, al ser la derivada un operador lineal, si dos funciones de onda son solución de la ec. de Schrödinger, su suma también lo será, y que la combinación de dos funciones de onda (debidamente normalizada) forma parte del espacio de Hilbert. A esto se le llama principio de superposición. Por otra parte, el segundo postulado implica que, si un operador \hat{A} tiene un conjunto completo de autofunciones $|\phi_\alpha\rangle$ con autovalores α , tenemos que cualquier elemento del espacio de Hilbert se puede escribir como $|\psi\rangle = \sum_\alpha c_\alpha |\phi_\alpha\rangle$.

La discusión de los postulados y sus consecuencias son un tema de gran interés, pero no son el objetivo de este trabajo. Para profundizar ver [3, §5].

Una ecuación con la que trabajaremos bastante es la de continuidad. Para obtenerla partiremos de nuestra ecuación de evolución (en este caso la ec. de Schrödinger (1.2.1)) y la multiplicaremos por el bra $\langle\psi|$ por la izquierda

$$\langle\psi| i\hbar\hat{H} |\psi\rangle = \langle\psi| \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t}, \quad (1.2.2)$$

luego, conjugaremos la ecuación (1.2.1) (recordemos que H es autoadjunto)

$$-\langle\psi| i\hbar\hat{H} = \frac{\partial \langle\psi|}{\partial t} \quad (1.2.3)$$

y multiplicaremos a la derecha por el ket $|\psi\rangle$

$$-\langle\psi| i\hbar\hat{H} |\psi\rangle = \frac{\partial \langle\psi|}{\partial t} |\psi\rangle. \quad (1.2.4)$$

Si sumamos ambas ecuaciones llegamos a

$$\langle\psi| \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle\psi|}{\partial t} |\psi\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle\psi|\psi\rangle = 0 = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x |\psi|^2 = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x \rho. \quad (1.2.5)$$

La ecuación (1.2.5) implica que la norma de la función de onda ψ se conserva a lo largo del tiempo. Definiendo $\rho := |\psi|^2$, le podemos dar la interpretación física de la **densidad de probabilidad** de que la partícula esté en una posición \vec{r} en un instante t , para lo cual se impone la normalización del estado.

⁶El teorema de Riesz ([14, Teorema 3.8.1]) da una correspondencia entre las funciones del espacio de Hilbert (es decir, su dual) y el producto escalar por algún elemento del espacio de Hilbert.

A pesar de los éxitos de la ec. de Schrödinger, había numerosos problemas que esta formulación del mundo cuántico era incapaz de explicar, o incluso era contradictoria. Por ejemplo, esta descripción es incapaz de explicar la creación o aniquilación de partículas, fenómeno observado en la naturaleza. Tampoco es una ecuación relativista, lo cual crea un grave problema, pues la velocidad de un electrón orbitando rondará los $2,18 \cdot 10^6$ m/s, velocidad que se acerca al límite relativista ($v/c \approx 0,073$, con lo que no se cumple que $v \ll c$).

Capítulo 2

Física Clásica Relativista

2.1. Relatividad Especial

Claramente, antes de poder hablar de la mecánica cuántica relativista hace falta hablar de la mecánica cuántica no relativista (como ya hemos hecho) y de la relatividad especial. La relatividad especial fue una teoría desarrollada por Einstein en 1905 (junto a otros de sus trabajos), la cual explicaba los fenómenos observados en el electromagnetismo, donde la velocidad de la luz era una constante universal, la cual no depende del sistema de referencia en la que se mide.

Primero definamos qué es un sistema de referencia, pues es una noción física muy importante. Un sistema de referencia no es ni más ni menos que un sistema de coordenadas donde en física tomamos medida de las posiciones y velocidades del sistema. Como sucede en matemáticas, la resolución de diversos problemas se puede simplificar drásticamente en la elección de un buen sistema de coordenadas, pero si tenemos alguna ley de evolución (como la ley de Newton o la ec. de Schrödinger) necesitamos que esta no cambie al cambiar de sistema de referencia. Al hecho de cambiar de un sistema de referencia a otro se le llama transformación. La primera reglas de transformación de coordenadas y velocidades las propuso Galileo Galilei, y poco a poco se formalizaron matemáticamente.

Si tomásemos un sistema de referencia en el que el espacio es inhomogéneo¹ y anisótropo, tendríamos un problema grave, pues en tal sistema podríamos ver como las posiciones de un objeto sin interacción no son equivalentes bajo la ley de evolución, o peor, si tomamos uno en el que el tiempo sea inhomogéneo, podríamos ver como un objeto sin interacciones pasa del reposo al movimiento sin motivo alguno. Por suerte, podemos siempre tomar un sistema de referencia donde el tiempo y el espacio sean homogéneos y, este último, isótropo. A un sistema de referencia con esas condiciones se le llama **sistema de referencia inercial**.

La consecuencia de la existencia de un sistema de referencia inercial es que, en él, un cuerpo sin interacción ninguna moviéndose a una velocidad \vec{v} seguirá moviéndose con

¹Recordemos que homogéneo significa que es equivalente en todas las posiciones (o instantes) e isótropo que todas las direcciones son equivalentes (como en el espacio que no hay arriba o abajo).

la misma velocidad siempre. Esto es conocido como el principio de inercia de Newton (ya formulado en su tiempo por Galileo). Por otra parte, si tomamos nuestro sistema de coordenadas moviéndose con velocidad \vec{v} , veríamos al cuerpo en reposo. Por tanto, si tenemos unas coordenadas en el primer sistema (x, y, z, t) y pasamos al otro, estas deberán de transformarse de tal manera que la posición del cuerpo no varíe. Para esto necesitamos que:

$$x \rightarrow x - v_x t, \quad y \rightarrow y - v_y t, \quad z \rightarrow z - v_z t, \quad t \rightarrow t,$$

donde $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. A las transformaciones de este tipo se les llama **transformaciones Galileanas**, y forman un grupo de transformaciones sobre el cual se estructura toda la mecánica clásica (que no trataremos aquí). A pesar de los grandes éxitos de estas transformaciones, en el siglo XIX se empezó a desarrollar el electromagnetismo, y en él se vio como la velocidad de la luz era en efecto una constante universal, cuyo valor no dependía del sistema de referencia usado, con un valor aproximado de $c = 3 \cdot 10^8 \text{m/s}$. Hasta este momento no había grandes problemas con las transformaciones Galileanas, pero esto último lleva a una gran contradicción. Según Galileo, si tomásemos un nuevo sistema de referencia moviéndose a una velocidad v en la misma dirección que la luz, constante respecto al sistema en el que se midió la velocidad de la luz (supongamos que la luz y el nuevo sistema se mueven ambos en dirección x), la velocidad de la luz cambiaría como $c' = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx - v dt}{dt} = c - v$, por lo que al cambiar de sistema de referencia cambiaríamos la velocidad de la luz. Una discusión de este problema se puede encontrar en [1, §6].

Por tanto, Einstein propuso en 1905 una nueva ley de transformación, basada en dos postulados. El primero de ellos es salvar el antiguo, todo sistema inercial debe ser físicamente equivalente, pero el segundo traía algo nuevo consigo: la velocidad de la luz es una constante universal que no depende del sistema de referencia.

Solo con esto es posible deducir las ecuaciones de las nuevas transformaciones (llamadas **transformaciones de Lorentz**). Una deducción rigurosa de ellas se puede encontrar en [9, §12], nosotros simplemente nos quedaremos con el resultado. La transformación general de Lorentz es muy compleja para trabajar con ella, por lo que nos restringiremos al caso de un sistema S' moviéndose a una velocidad v respecto a otro S en la dirección x . En este caso, las transformaciones de Lorentz tienen la forma:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt), & y' &= y, & z' &= z, \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t - \frac{v}{c^2} x \right), \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

y sus transformaciones inversas:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x' + vt'), & y &= y', & z &= z', \\t &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right).\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

Por acortar notación, al término $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ se le suele denotar γ . La mayor diferencia respecto a las transformaciones galileanas es clara: **el tiempo y el espacio son relativos** (dependen de la velocidad). Otra consecuencia de esto es que las velocidades se miden de manera distinta. Sea un cuerpo moviéndose a velocidad u en dirección x desde el sistema de referencia S , esto quiere decir que $\frac{dx}{dt} = u$, pero también nos podemos preguntar acerca de la distancia que el cuerpo ve que recorre por unidad de **tiempo propio**. El tiempo propio se define como el tiempo que observa un cuerpo en un sistema de referencia que se mueve junto a él (moviéndose con su misma velocidad y dirección). Por tanto, $\frac{dx}{dt'} = \eta$, donde η es la velocidad propia. Por otra parte, se puede demostrar que el tiempo se dilata, con $t' = \frac{1}{\gamma}t$ (basta poner $x' = 0$ en (2.1.2)). De aquí sacamos que $\eta = \gamma \frac{dx}{dt} = \gamma u$.

Ahora introduciremos lo que en física se conoce como la **notación covariante**, de gran utilidad a la hora de tratar con problemas relativistas, ya que acortan la escritura.

2.1.1. Notación covariante-contravariante

En física se llama **cuadrivector posición** a un vector de cuatro componentes de la forma $\mathbf{X} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Hay diversas convenciones, pero por seguir una definiremos la primera componente como la temporal, y los índices $i = 1, 2, 3$ como las componentes espaciales, esto es, una partícula en una posición (x, y, z) en el instante t tendrá un cuadrivector posición (en relatividad especial) definido como $\mathbf{X} = (ct, x, y, z)$ donde c es la velocidad de la luz.

Cuando queramos referirnos a la componente μ -ésima de un cuadrivector la denotaremos \mathbf{X}^μ en forma contravariante. En este espacio definimos la métrica pseudoeuclídea² g_{ij} como:

$$g_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j, \quad g_{11} = 1, \quad g_{ii} = -1 \text{ para } i \neq 1, \quad i, j = 0, 1, 2, 3.\tag{2.1.3}$$

De esta manera, el producto escalar de dos vectores está definido³ como

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^T (g_{ij}) \mathbf{Y} = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} \mathbf{X}^\mu \mathbf{Y}^\nu := g_{\mu\nu} \mathbf{X}^\mu \mathbf{Y}^\nu\tag{2.1.4}$$

²Una métrica pseudoeuclídea $g(p, q)$ es una forma bilineal indefinida (que toma valores positivos y negativos) la cual puede ser representada por una matriz invertible que en un sistema de coordenadas que la diagonaliza tiene p elementos positivos y q elementos negativos. Más detalles sobre las herramientas de geometría que usaremos en el trabajo se pueden encontrar en *Geometría Moderna. Métodos y Aplicaciones*, B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, 2000.

³Formalmente no es un producto escalar, pues (\mathbf{X}, \mathbf{X}) puede ser negativo al estar en un espacio pseudoeuclídeo, pero abusaremos de notación y lo llamaremos producto escalar por conveniencia.

donde $\mathbf{g} = (g_{ij})$ denota la matriz formada por los elementos (2.1.3), y en la última igualdad hemos usado la notación de Einstein, en la que sumamos los índices que se repiten arriba y abajo. A menos que indiquemos lo contrario, estaremos usando la notación de Einstein desde este momento. Esta métrica se denomina **métrica de Minkowski**. Por conveniencia y para no usar la notación métrica (más larga) denotaremos al producto escalar como la **contracción** de cuadvectores. $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^\mu \mathbf{Y}_\mu$ donde el cuadvector covariante \mathbf{X}_μ se define como $\mathbf{X} = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$, o lo que es lo mismo, $\mathbf{X}^\mu = g_{\mu\nu} \mathbf{X}_\nu$ (donde estamos usando la notación de Einstein).

Debido a las reglas de transformación de los vectores del espacio y de la métrica, se puede demostrar que la contracción de dos cuadvectores es invariante ante transformaciones del espacio.

A continuación construiremos el cuadvector velocidad \mathbf{U} . Esta velocidad se debe referir al tiempo propio del sistema, debido a dos razones. La primera se debe a la alta complejidad de las reglas de transformación de la velocidad usual \vec{u} de un objeto, que complica de sobremanera la descripción. Por otra, al ser un cuadvector, sigue las leyes de transformación de Lorentz (como veremos más adelante) y por ende, ante una transformación, su módulo es invariante. Por tanto,

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{X}}{d\tau} = \frac{(dt, dx, dy, dz)}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right) = (\gamma c, \vec{\eta}), \quad (2.1.5)$$

donde τ es el tiempo propio. Podemos comprobar fácilmente que la contracción $\mathbf{U}^\mu \mathbf{U}_\mu = \mathbf{U}^2 = c^2$, la cual claramente es invariante. A partir de la velocidad podemos definir el cuadvector momento lineal (o momento). Lo haremos de la manera usual, que es multiplicar la velocidad por la masa.

$$\mathbf{P} = m\mathbf{U} = (\gamma mc, m\vec{\eta}). \quad (2.1.6)$$

Se puede probar que la primera componente es $\gamma mc = E/c$. Por tanto tenemos un nuevo cuadvector $\mathbf{P} = (E/c, \vec{p})$, donde $\vec{p} = m\vec{\eta}$. Nótese que

$$\mathbf{P}^\mu \mathbf{P}_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 \mathbf{U}^\mu \mathbf{U}_\mu = m^2 c^2 \rightarrow E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4,$$

la cual es expresión relativista de la energía, que en reposo ($p = 0$) se reduce a la famosa ecuación $E = mc^2$. También se puede demostrar que en el límite no relativista ($v \ll c$), recuperamos la expresión clásica de la energía cinética.

Ahora mostraremos que las transformaciones de Lorentz forman un grupo: El grupo de Lorentz. Las transformaciones vistas en (2.1.1) y (2.1.2) se pueden escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (2.1.7)$$

donde hemos usado que $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x, y, z)$.

Como vemos, la transformación se puede escribir como una matriz 4×4 . A esta matriz la denotaremos por Λ , y para referirnos a sus componentes, Λ^μ_ν , donde el índice μ hace referencia a las filas y el índice ν a las columnas. Analicemos algunas de sus propiedades.

Definimos el grupo ortogonal generalizado $O(p, q)$ como el grupo de Lie⁴ de matrices de las transformaciones lineales de un espacio vectorial real n -dimensional que deja invariante a una forma bilineal no degenerada y simétrica $g(p, q)$. $SO(p, q)$ es el subgrupo de $O(p, q)$ formado aquellos elementos con determinante 1. La invarianza de $g(p, q)$ se traduce en que dado un elemento $A \in O(p, q)$, $A^T g(p, q) A = g(p, q)$. Veamos que las matrices de las transformaciones Lorentz y la métrica de Minkowski satisfacen esta definición.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \gamma^2 - \frac{v^2}{c^2}\gamma^2 & \gamma^2(\frac{v}{c} - \frac{v}{c}) & 0 & 0 \\ \gamma^2(\frac{v}{c} - \frac{v}{c}) & \frac{v^2}{c^2}\gamma^2 - \gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Ahora bien, no es complicado demostrar que, sustituyendo $v = 0$ en (2.1.7), tenemos la transformación identidad (o lo que es lo mismo, la matriz identidad). De la ecuación (2.1.8) es sencillo demostrar que $\det(\Lambda^T)\det(g)\det(\Lambda) = \det(g) = 1 \rightarrow \det(\Lambda)^2 = 1 \rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1 \neq 0$, donde hemos usado que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes, que la matriz traspuesta comparte determinante con la matriz original y que el determinante de la métrica es -1. Con esto queda demostrado que Λ es invertible. Finalmente se puede demostrar que dadas dos transformaciones su producto también es una transformación de Lorentz, o lo que es lo mismo, que forman un grupo bajo la multiplicación. Basta operar de la misma manera vista en (2.1.8) con dos elementos Λ_1 y Λ_2 del grupo: $\Lambda_2^T \Lambda_1^T g \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^T g \Lambda_2 = g$, luego $\Lambda_1 \Lambda_2$ es una matriz que pertenece al grupo. Por tanto, tenemos que todas las transformaciones de Lorentz (también con los ejes y y z y en direcciones arbitrarias), forman el grupo $O(1, 3)$.

2.1.2. Grupo de Lorentz

Llamaremos a $O(1, 3)$ **grupo de Lorentz**

Observación 2.1.1. *Podemos descomponer el grupo de Lorentz en dos subgrupos, el $SO(1, 3)$ y su complementario, formados por aquellas matrices con determinante 1 o -1 respectivamente. En física se les da el nombre de transformaciones **propias** o **impropias**, pues las propias mantienen la orientación del sistema mientras las impropias lo*

⁴La definición de grupo de Lie de matrices la daremos más adelante. Por ahora solo nos interesa la estructura de grupo. Esto es, que exista una operación (en este caso la multiplicación), que exista un elemento identidad, que exista el elemento inverso y que la operación sea cerrada.

invierten (como una reflexión). Además se le llama transformación ortócrona a aquellas que tienen el elemento $(1,1)$ no positivo, y no ortócrona a los que lo tienen negativo, pues las ortócronas mantienen el sentido del tiempo, mientras que las no ortócronas lo invierten. Hemos de recordar que en física, bajo ciertas condiciones, ver a un objeto moverse en sentido positivo del tiempo es indistinguible de verlo en sentido opuesto

Se puede demostrar, con las propiedades de los determinantes usadas antes, que las transformaciones propias y ortócronas forman un subgrupo. A este grupo se le suele denotar $SO^+(1, 3)$, aunque por abuso de notación también se denota $SO(1, 3)$. Este grupo se conoce como el grupo propio de Lorentz. Antes de continuar haremos un breve comentario sobre el desarrollo en potencias de una función.

Una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice analítica si se puede desarrollar en serie de potencias en torno a cualquier punto x_0 , es decir:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k, \quad \forall x \in \mathbb{C}.$$

Entonces definiremos una función de matrices⁵ $f : GL(n; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ como:

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k, \quad (2.1.9)$$

donde se puede demostrar que la serie converge en la norma⁶ $\|(a_{ij})\|_M := \max_{i,j} |a_{ij}|$ si la función f es analítica.

Estudiemos los generadores del grupo $SO(1, 3)$.

Comencemos con el caso de un giro tridimensional $R(\varphi)$ respecto a un eje arbitrario que denotaremos por z . Sea $R(\varphi)$:

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si $\varphi \ll 1$ podemos tomar un desarrollo en serie de potencias de $R(\varphi)$:

$$R(\varphi) = \mathbb{I} - iX_3\varphi + o(\varphi^2), \quad -iX_3 = \left. \frac{dR(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=0}, \quad (2.1.10)$$

donde $\frac{dR(\varphi)}{d\varphi} = \left(\frac{dR_{ij}(\varphi)}{d\varphi} \right)_{ij}$. Haciendo un cálculo directo, vemos que

$$-iX_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⁵Recordemos que $GL(n; \mathbb{C})$ es el grupo de matrices invertibles $n \times n$ con entradas complejas.

⁶Hay muchas normas matriciales distintas, pero las más usadas suelen ser equivalentes entre ellas.

De la expresión es directo deducir que la matriz X_3 es hermítica y de traza⁷ nula. Definimos la exponencial mediante la serie de potencias (2.1.9):

$$\exp(-i\varphi X_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\varphi X_3)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\varphi)^n X_3^n}{n!}. \quad (2.1.11)$$

Por otra parte, usando que $X_3^2 = \mathbb{I}$, podemos ver como la serie (2.1.11) se divide en dos series convergentes conocidas, la del coseno y la del seno:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\varphi)^{2n}}{2n!} \mathbb{I} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!} X_3 = \cos(\varphi)\mathbb{I} - iX_3 \sin(\varphi) = R(\varphi). \quad (2.1.12)$$

Procediendo de manera análoga para los giros alrededor de los ejes x e y obtenemos:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.13)$$

Estas tres matrices forman los generadores de las rotaciones del espacio tridimensional, con las que podemos comenzar a construir los generadores de las transformaciones del espacio-tiempo dadas por las transformaciones de Lorentz. Primeramente construiremos las rotaciones (puras) del espacio. Por construcción, las rotaciones puras dejan invariante el tiempo, por lo que las construiremos añadiendo una fila y columna de ceros en las matrices (2.1.13). Usaremos el mismo nombre para referirnos a estos

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.14)$$

A continuación tendremos que construir el generador de las transformaciones de Lorentz. Para ello primero haremos un cambio de variable. Introduciremos una variable ξ tal que⁸ $\gamma = \cosh \xi$, o equivalentemente, $\frac{v}{c} = \tanh \xi$. Con esto, la expresión (2.1.7) se puede reescribir como:

$$\Lambda(\xi) = \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi & 0 & 0 \\ -\sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1.15)$$

Procediendo como en el caso de los giros pero con la transformación $\Lambda(\xi)$, obtenemos:

$$\Lambda(\xi) = \mathbb{I} - iY_1\xi + o(\xi^2) \rightarrow -iY_1 = \left. \frac{d\Lambda(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1.16)$$

⁷Recordemos que la traza de una matriz es la suma de los elementos en su diagonal.

⁸Recordemos que γ es el factor de Lorentz introducido al inicio de §2.1

donde Y_1 es el generador buscado para la transformación de Lorentz en el eje x . Repitiendo el proceso para el resto de las transformaciones en los ejes y y z , podemos obtener el resto de generadores:

$$\begin{aligned}
K_1 = Y_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & J_1 = X_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\
K_2 = Y_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & J_2 = X_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
K_3 = Y_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & J_3 = X_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

Por tanto, cualquier cambio de coordenadas que sea un giro o una transformación de Lorentz podremos escribirla como

$$\Lambda = \exp \left(-i \sum_{i=1}^3 (\xi_i K_i + \varphi_i J_i) \right). \tag{2.1.18}$$

El cálculo de como una transformación de Lorentz arbitraria se pueden escribir como una exponencial $\exp(-i\xi K)$ es análogo al caso del giro visto en (2.1.11).

Un cálculo directo muestra que se tienen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned}
[X_i, X_j] &= i\epsilon_{ijk} X_k, \\
[X_i, Y_j] &= i\epsilon_{ijk} Y_k, \\
[Y_i, Y_j] &= -i\epsilon_{ijk} X_k, \\
X_i Y_i &= 0,
\end{aligned} \tag{2.1.19}$$

donde el operador conmutador (o conmutador) $[\cdot, \cdot]$ está definido como:

$$[A, B] = AB - BA, \tag{2.1.20}$$

para dos matrices⁹ A, B , y el término ϵ_{ijk} se conoce como el símbolo de Levi-Civita, el cual vale 1 para una permutación par de los elementos i, j, k , -1 para una permutación impar de estos, y 0 en el caso de que algún índice se repita¹⁰.

⁹Nuestra definición de conmutador se ha hecho para matrices, pero la podemos extender a dos operadores A, B de una manera sencilla: $[A, B](x) = A(B(x)) - B(A(x))$.

¹⁰Algunos ejemplos de esto son: $\epsilon_{112} = 0$, $\epsilon_{123} = 1$, $\epsilon_{132} = -1$. Este símbolo es muy usado dentro de la física por su facilidad para escribir las relaciones de conmutación, así como su estrecho lazo con el producto vectorial.

2.1.3. Grupos de Lie de Matrices y álgebras de Lie

Un álgebra de Lie es por definición un espacio vectorial \mathfrak{g} sobre un cuerpo \mathbb{K} con una operación $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, la cual satisface la identidad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$. El conmutador (2.1.20) la satisface:

$$\begin{aligned} & [X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = \\ & = [X, YZ] - [X, ZY] + [Z, XY] - [Z, YX] + [Y, ZX] - [Y, XZ] = \\ & = XYZ - YZX - XZY + ZYX + AXY - XYZ - ZYX + \\ & \quad + YXZ + YZX - ZXY - YXZ + XZY = 0. \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

Bajo esta definición, el conjunto de las matrices $\{X_i, Y_i\}$ definidas en (2.1.17) junto al conmutador forman un álgebra de Lie. Por definición, el álgebra de Lie \mathfrak{g} asociada a un grupo de Lie de matrices G es el conjunto de elementos $X \in G$ tales que $e^{tX} \in G$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Un grupo de Lie de matrices es un subgrupo G de $GL(n; \mathbb{C})$ tal que si existe una sucesión A_m de matrices en G y A_m converge a cierto A en el sentido de las matrices¹¹, entonces o bien $A \in G$ o bien A no es invertible, o lo que es lo mismo, que G sea un subgrupo cerrado de $GL(n; \mathbb{C})$. A continuación probaremos una serie de propiedades de las álgebras de Lie. Los siguientes teoremas, proposiciones y lemas están tomados de [11].

Teorema 2.1.2. *Sea G un grupo de Lie de matrices y \mathfrak{g} su álgebra de Lie asociada. Si X e Y pertenecen a \mathfrak{g} entonces:*

1. $AXA^{-1} \in \mathfrak{g} \forall A \in G$.
2. $sX \in \mathfrak{g} \forall s \in \mathbb{R}$.
3. $X + Y \in \mathfrak{g}$.
4. $XY - YX \in \mathfrak{g}$.

Demostración. La propiedad 1 es directa conociendo que dadas matrices A, C con C invertible, la exponencial $e^{CAC^{-1}} = Ce^AC^{-1}$. Se puede demostrar esto usando series de potencias, pues $(CAC^{-1})^n = CA^nC^{-1}$. Con esto y la definición (2.1.9), nos queda que $e^{tAXA^{-1}} = Ae^{tX}A^{-1} \in G$. (Recordemos que G es un grupo de Lie de matrices).

La propiedad 2 es directa de la propia definición, pues el producto de dos números reales es real y por tanto $e^{tsX} = e^{rX} \in G$ pues $r = st \in \mathbb{R}$.

La propiedad 3 hace uso del siguiente teorema cuya demostración se puede encontrar en [11, Teorema 2.11]:

Teorema 2.1.3. *Para cualquiera dos matrices X e Y $n \times n$ de entradas complejas, tenemos que*

$$e^{X+Y} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{X}{m}} e^{\frac{Y}{m}} \right)^m. \tag{2.1.22}$$

¹¹Es decir, con la norma $\|\cdot\|_M$.

Con esto tenemos que

$$e^{t(X+Y)} = \lim_{m \rightarrow \infty} (e^{tX/m} e^{tY/m})^m.$$

Por las propiedades de la matriz exponencial en un grupo de matrices de Lie, la matriz $(e^{tX/m} e^{tY/m})^m$ pertenece a G para cualquier m . Como $e^{tX/m} e^{tY/m}$ es invertible (producto de matrices invertibles), y el límite también es invertible, pues e^{xA} es invertible para todo $x \in \mathbb{C}$ y para toda matriz $A \in \text{GL}(n; \mathbb{C})$, por definición de grupo de Lie tenemos que $e^{t(X+Y)} \in G$.

Finalmente nos queda probar la propiedad 4. Esta hace uso del siguiente lema:

Lema 2.1.4. *Sea X una matriz $n \times n$ compleja. Entonces e^{tX} es una curva suave en el espacio de matrices $n \times n$ complejas y:*

$$\frac{d}{dt} e^{tX} = X e^{tX} = e^{tX} X,$$

y además

$$\left. \frac{d}{dt} e^{tX} \right|_{t=0} = X.$$

Esquema de la prueba. Esta se basa en que una serie de potencias de números reales puede ser diferenciada en su intervalo de convergencia (teorema conocido del análisis real), por lo que teniendo en cuenta que elemento a elemento de la matriz tenemos una serie de potencias en t , (tX_{ij}) , podemos diferenciar componente a componente, con lo que obtendríamos el resultado. La escritura formal de la prueba es compleja y no aporta nada al desarrollo. Una demostración se puede encontrar en [11, Proposición 2.4].

Con el lema en mente basta tomar:

$$\left. \frac{d}{dt} (e^{tX} Y e^{-tX}) \right|_{t=0} = (XY)e^0 + (e^0 Y)(-X) = XY - YX,$$

donde hemos hecho uso de la regla del producto de diferenciación de matrices $(AB)' = A'B + AB'$. Finalmente queda remarcar que $e^{tX} Y e^{-tX} \in \mathfrak{g}$ por el punto 1. Luego, teniendo en cuenta la definición de la derivada¹²:

$$XY - YX = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hX} Y e^{-hX} - Y}{h},$$

que, por las propiedades 2 y 3, tenemos que \mathfrak{g} es un subespacio real de las matrices $n \times n$ de entradas reales, y por ende cerrado, y por tanto $XY - YX$ pertenece a \mathfrak{g} . \square

¹²Al igual que en el análisis real, definimos la derivada de una función matricial $X(x)$ como $X'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(x+h) - X(x)}{h}$.

De las relaciones de conmutación (2.1.19) podemos sacar varias conclusiones. La primera es que la operación de giros X_i con el conmutador es cerrada, por lo tanto, forman un subálgebra de Lie. Una subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}$ se define como un álgebra de Lie tal que dados dos elementos $A_1, A_2 \in \mathfrak{h}$, $[A_1, A_2] \in \mathfrak{h}$. Otra conclusión directa es que las transformaciones de Lorentz **no** forman una subálgebra respecto a la conmutación (como vemos en la penúltima ecuación de las relaciones (2.1.19)). Finalmente, si definimos $X^\pm = \frac{1}{2}(X \pm iY)$ obtenemos unas nuevas relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [X_i^+, X_j^+] &= i\epsilon_{ijk}X_k^+, \\ [X_i^-, X_j^-] &= i\epsilon_{ijk}X_k^-, \\ [X_i^+, X_j^-] &= 0, \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

que no son ni más ni menos que las relaciones de conmutación que definen el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ correspondiente al grupo $SU(2)$, grupo de las matrices unitarias de dimensión 2×2 y con determinante 1. Los generadores de $\mathfrak{su}(2)$ son

$$E_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad E_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

los cuales satisfacen las relaciones de conmutación (2.1.23). Por tanto, podemos construir un homomorfismo entre el conjunto de las matrices X_i^+ (X_j^-) y los generadores de $\mathfrak{su}(2)$. Como identificamos una base (generadores) con otra, tenemos un isomorfismo de álgebras de Lie, y por tanto $\mathfrak{so}(1, 3) \cong \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$. Se puede demostrar que $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ es isomorfo al álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$, que es el álgebra de Lie de matrices 2×2 de entradas complejas con traza nula y el conmutador (2.1.20). Entonces, $\mathfrak{so}(1, 3) \cong \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$. Por lo tanto, el álgebra de Lie de las transformaciones de Lorentz y los giros del espacio es el álgebra de Lie de $SL(2; \mathbb{C}) \oplus SL(2; \mathbb{C})$, es decir, el de las matrices 2×2 con entrada compleja y determinante 1.

Cabe destacar que $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ es la complejificación del álgebra $\mathfrak{su}(2)$, donde la complejificación consiste en introducir combinaciones lineales de la forma $X + iY$ con X e Y elementos de $\mathfrak{su}(2)$ y extender la operación $[\ , \]$. Una discusión en profundidad de la complejificación y sus propiedades se puede encontrar en [11, §3.6]. Otro teorema interesante es el siguiente:

Teorema 2.1.5. *Sean G y H grupos de Lie de matrices, cuyas álgebras de Lie son respectivamente \mathfrak{g} y \mathfrak{h} . Sea $\Phi : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos de Lie. Entonces, existe una única aplicación real y lineal $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ tal que:*

$$\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}, \tag{2.1.24}$$

para cualquier $X \in \mathfrak{g}$. La aplicación ϕ cumple con las siguientes propiedades:

1. $\phi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\phi(X)\Phi(A^{-1})$ para $X \in \mathfrak{g}$ y $A \in G$.
2. $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$.
3. $\phi(X) = \frac{d}{dt}\Phi(e^{tX})|_{t=0}$ $\forall X \in \mathfrak{g}$.

El recíproco también es cierto, pero bastante más complejo de demostrar. La demostración puede verse en [11, §5.7].

Para demostrar el teorema 2.1.5, deberemos de hacer uso del teorema siguiente, cuya demostración se puede encontrar en [11, Teorema 2.14]:

Teorema 2.1.6 (Subgrupos uniparamétricos). *Sea $A(t)$ un subgrupo uniparamétrico de parámetro t de $GL(n; \mathbb{C})$, entonces existe una única matriz $n \times n$ de componentes complejas X tal que*

$$A(t) = e^{tX}.$$

Demostración teorema 2.1.5. La prueba es muy similar a la realizada para el teorema 2.1.2. Para ello, debemos de tener en cuenta que, por definición, Φ es un homomorfismo continuo de grupos, y como por estar X en \mathfrak{g} , tenemos que e^{tX} está en G para cualquier t real, entonces tX forma un subgrupo uniparamétrico de H . Con esto y usando el teorema 2.1.6, tenemos que, para cada $X \in G$ existe una única $Z \in H$ tal que

$$\Phi(e^{tX}) = e^{tZ}.$$

Por lo tanto, basta definir $\phi(X) = Z$. Tomando $t = 1$ vemos que recuperamos la ecuación (2.1.24). Para demostrar que es lineal volvemos a hacer uso del teorema 2.1.22. Con esto, usando (2.1.24) y la continuidad del homomorfismo de grupos, tenemos que

$$\begin{aligned} e^{t\phi(X+Y)} &= \Phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{tX/n} e^{tY/n})^n\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi(e^{tX/n}) \Phi(e^{tY/n}))^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{t\phi(X)/n} e^{t\phi(Y)/n})^n \\ &= e^{t(\phi(X)+\phi(Y))}, \end{aligned}$$

y, finalmente, haciendo uso del Lema 2.1.4 y diferenciando para $t = 0$, obtenemos la linealidad. La demostración de la unicidad es directa haciendo uso del Lema 2.1.4.

Demostrado esto, basta con usar el teorema 2.1.2 para las matrices $\phi(X)$ y $\phi(Y)$ para probar las propiedades 1 y 2, y para la tercera hacer uso de lema 2.1.4. \square

2.1.4. Representación del grupo de Lorentz $\mathfrak{so}(1, 3)$

Para acabar, estudiaremos las representaciones de $\mathfrak{so}(1, 3)$, y para ello veremos las de $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$, pues como ya comentamos, ambas álgebras son isomorfas. Primero definamos qué es una representación de álgebras de Lie.

Dados un grupo de Lie de matrices G y un espacio vectorial V complejo, definimos una **representación compleja finita** al homomorfismo de grupos de Lie Π :

$$\Pi : G \rightarrow GL(V),$$

donde $GL(V)$ es el grupo de las matrices $n \times n$ de entradas en V , siendo $n = \dim(V)$.

De la misma manera, definimos la representación de un álgebra de Lie \mathfrak{g} como un homomorfismo π entre \mathfrak{g} y $\mathfrak{gl}(V)$, siendo este último el espacio de todos los endomorfismos de V , que con el operador conmutador forman un álgebra de Lie.

Una representación de un grupo la podemos entender como una aplicación que a cada $g \in G$ le asigna una aplicación $\Pi(g) \in GL(V)$. Por tanto la **representación actúa sobre el espacio vectorial** como $\Pi(g)(v), v \in V$, aunque se suele escribir $\Pi(g)v$. Un ejemplo de representación es asignarle a cada $g \in G$ el operador identidad definido en $GL(V)$.

Otro ejemplo de representación menos trivial sería el siguiente: sea $g \in G$ y $X \in \mathfrak{g}$, definimos la aplicación $Ad_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ como

$$Ad_g(X) = gXg^{-1} \quad (2.1.25)$$

con la que definimos la representación $\Pi : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ como $g \mapsto Ad_g$.

Una proposición importante es la siguiente.

Proposición 2.1.7. *Sea G un grupo de Lie de matrices y su álgebra de Lie \mathfrak{g} y sea Π una representación de G sobre V . Entonces existe una única representación π de \mathfrak{g} sobre V definida como*

$$\Pi(e^X) = e^{\pi(X)},$$

para cualquier $X \in \mathfrak{g}$. También se puede escribir como

$$\pi(X) = \left. \frac{d}{dt} \Pi(e^{tX}) \right|_{t=0},$$

y cumple con que $\pi(AXA^{-1}) = \Pi(A)\pi(X)\Pi(A)^{-1}$.

Demostración. La demostración de esta proposición es una consecuencia del teorema 2.1.5 y también se puede probar que π es una representación a partir de la definición. \square

Un subespacio W se dice invariante para una representación π si la representación actúa sobre él como $\pi(X)w \in w, \forall w \in W$. Una representación se dice irreducible si los únicos subespacios invariantes son los triviales $\{0\}$ y V .

Proposición 2.1.8. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie y $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ su complejificación. Entonces cualquier representación compleja finito dimensional π de \mathfrak{g} tiene una única extensión a $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, denotada del mismo modo. Además, π será irreducible en $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ si y solo si lo es para \mathfrak{g} .*

La extensión viene dada como $\pi(X + iY) = \pi(X) + i\pi(Y)$ para X e Y en \mathfrak{g} .

Una demostración de la proposición se puede encontrar en [11, Proposición 4.6]. Gracias la proposición 2.1.8, dada una representación de $\mathfrak{su}(2)$ podremos realizar una extensión a $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$, pues hemos discutido ya que $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$. En el siguiente teorema veremos que todas las posibles representaciones de la misma dimensión de $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ son isomorfas entre ellas, y construiremos una representación de $\mathfrak{su}(2)$, con lo que habremos construido todas las representaciones de $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$.

Teorema 2.1.9. Para cada entero $m \geq 0$, existe una representación irreducible de $sl(2; \mathbb{C})$ de dimensión $m+1$. Cualesquiera dos representaciones de $sl(2; \mathbb{C})$ de la misma dimensión son isomorfas. Si π es una representación irreducible de $sl(2; \mathbb{C})$ de dimensión $m+1$, entonces es isomorfa a la representación π_m , donde π_m está definida como

$$(\pi_m(X)f)(z) = \left. \frac{d}{dt} f(e^{-tX}z) \right|_{z=0}, \quad \forall X \in \mathfrak{su}(2), \quad (2.1.26)$$

la cual es una posible representación de $\mathfrak{su}(2)$. En (2.1.26), f es un polinomio de grado m de dos componentes $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

Este teorema además demuestra que las representaciones de $\mathfrak{su}(2)$ y $sl(2; \mathbb{C})$ son isomorfas. Los generadores de $sl(2; \mathbb{C})$ vienen dados por las matrices:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.1.27)$$

que satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [H, X] &= 2X, \\ [H, Y] &= -2Y, \\ [X, Y] &= H. \end{aligned}$$

Proposición 2.1.10. Sea V un espacio vectorial finito dimensional complejo, A, B, C tres operadores de V , los cuales satisfacen las relaciones de conmutación $[A, B] = 2B$, $[A, C] = -2C$ y $[B, C] = A$, entonces la aplicación π definida como $\pi(H) = A$, $\pi(X) = B$, $\pi(Y) = C$, con X, Y, H definidos en (2.1.27) es una representación de $sl(2; \mathbb{C})$ sobre V .

Para demostrar el teorema 2.1.9, haremos uso del siguiente lema.

Lema 2.1.11. Sean H, X, Y definidos en (2.1.27) y u una autofunción de $\pi(H)$, con autovalor $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\begin{aligned} \pi(H)\pi(X)u &= (\alpha + 2)\pi(X)u, \\ \pi(H)\pi(Y)u &= (\alpha - 2)\pi(Y)u, \end{aligned}$$

y o bien $\pi(X)u$ ($\pi(Y)u$) es 0, o bien $\pi(X)u$ ($\pi(Y)u$) es un autovector de $\pi(H)$ de autovalor $\alpha + 2$ ($\alpha - 2$).

Demostración. Sabemos por la linealidad de la representación que $[\pi(H), \pi(X)] = \pi([H, X]) = 2\pi(X)$. Por ende,

$$\begin{aligned} \pi(H)\pi(X)u &= \pi(X)\pi(H)u + 2\pi(X)u \\ &= \alpha\pi(X)u + 2\pi(X)u \\ &= (\alpha + 2)\pi(X)u. \end{aligned}$$

La prueba para $\pi(Y)$ es totalmente análoga. □

Demostración teorema 2.1.9. Sea π una representación irreducible de $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ en V espacio vectorial complejo de dimensión finita. Al estar en \mathbb{C} , sabemos que $\pi(H)$ posee por lo menos un autovector. Sea u dicho autovector y su correspondiente autovalor α . Usando el lema 2.1.11 sucesivas veces obtenemos:

$$\pi(H)\pi(X)^k u = (\alpha + 2k)\pi(X)^k u,$$

pero como en un espacio de dimensión finita, un operador no puede tener infinitos autovectores, necesitamos que exista cierto $N \in \mathbb{N}$ tal que $\pi(X)^N u \neq 0$ y que $\pi(X)^{N+1} u = 0$. Por lo tanto, escribiendo $u_0 = \pi(X)^N u$ y $\lambda = \alpha + 2N$, entonces $\pi(H)u_0 = \lambda u_0$ y $\pi(X)u_0 = 0$.

Ahora bien, si definimos $u_k = \pi(Y)^k u_0$, para $k \geq 0$, por el lema 2.1.11, tenemos que

$$\pi(H)u_k = (\lambda - 2k)u_k.$$

Con esto último se puede deducir que

$$\pi(X)u_k = k(\lambda - (k - 1))u_{k-1} \quad (k \geq 1), \quad (2.1.28)$$

y por la misma razón de antes, debe de existir un m tal que $u_k \neq 0$ para $k \leq m$ y que $u_{m+1} = 0$. Por esto y por la ecuación (2.1.28), tenemos que

$$0 = \pi(X)u_{m+1} = (m + 1)(\lambda - m)u_m.$$

Como u_m y $m + 1$ son distintos de 0, tenemos que $\lambda = m$. Por lo tanto, para cualquier representación que tengamos, existirá un entero m no negativo tal que existirán $u_0, \dots, u_m \neq 0$ que cumplen:

$$\begin{aligned} \pi(H)u_k &= (m - 2k)u_k, \\ \pi(Y)u_k &= \begin{cases} u_{k+1} & \text{si } k < m, \\ 0 & \text{si } k = m, \end{cases} \\ \pi(X)u_k &= \begin{cases} k(m - (k - 1))u_{k-1} & \text{si } k > 0, \\ 0 & \text{si } k = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

De (2.1.29) se deduce que existen $m + 1$ u_k autovectores de $\pi(H)$ correspondientes a autovalores distintos, que al ser linealmente independientes forman una base del espacio $(m + 1)$ -dimensional formado por las combinaciones lineales de los $\{u_k\}$, el cual es invariante ante las acciones de $\pi(X)$, $\pi(Y)$ y $\pi(H)$, y, por tanto, bajo cualquier acción $\pi(Z)$ con $Z \in \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$. Como hemos supuesto que π es irreducible, y existen elementos no nulos en el espacio invariante, el espacio creado por los $\{u_k\}$ tiene que ser todo V .

Es más, si definimos una representación π como (2.1.29), con los $\{u_k\}$ la base del espacio vectorial V , se puede probar por cálculo directo que $\pi(X)$, $\pi(Y)$, $\pi(H)$ satisfacen las relaciones de conmutación de $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$, y por ende son una representación.

Por el desarrollo que hemos hecho, hemos visto que cualquier representación irreducible de $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ es de la forma (2.1.29), luego si tienen la misma dimensión, serán

isomorfas. Finalmente, veremos que una posible representación de $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ es la que satisface la ecuación (2.1.26). Basta con ver que la aplicación Π de $SU(2)$ sobre \mathbb{C}^2 definida como $\Pi(U)f = f(U^{-1}z)$, $z \in \mathbb{C}^2$ es en efecto una representación de $SU(2)$, y por tanto, la representación de $\mathfrak{su}(2)$ se puede escribir como (2.1.26) gracias a la proposición 2.1.7. Un desarrollo más completo de las representaciones Π y π_m se puede encontrar en [11, p. 82]. Como $\mathfrak{su}_{\mathbb{C}}(2) \cong \mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$, y podemos extender a la complejificación de $\mathfrak{su}(2)$ la representación π_m , vemos que una posible representación de $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ es la misma definida por (2.1.26) pero definida en $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$.

Si aplicamos la definición (2.1.26) a los generadores de $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\pi_m(H) &= -z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}, \\ \pi_m(X) &= -z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}, \\ \pi_m(Y) &= -z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}.\end{aligned}\tag{2.1.30}$$

Finalmente probaremos la irreducibilidad. Para hacerlo, probaremos que dado cualquier subespacio invariante no trivial W bajo (2.1.30), este coincide con V . Sea w un elemento de W , este es de la forma $w = a_0 z_1^m + a_1 z_1^{m-1} z_2 + \dots + a_m z_2^m$, con al menos un a_k no nulo. Sea k_0 el primero no nulo, podemos tomar un elemento $\pi_m(X)^{m-k_0} w$. Como cada actuación de $\pi(X)$ aumenta en 1 el grado del polinomio en z_2 , eliminaremos cualquier elemento de w excepto $a_{k_0} z_1^{m-k_0} z_2^{k_0}$. Al ser W invariante, todos los múltiplos de z_2^m y por tanto el propio z_2^m deberán pertenecer a W , pues $\pi_m(X)^{m-k_0} w$ está en W . De la misma manera, aplicando $\pi(Y)$ a w , vemos que $\pi(Y)^k z_2^m$, es un elemento de W de la forma $z_1^k z_2^{m-k}$ para $0 \leq k \leq m$, y como los elementos $z_1^k z_2^{m-k}$ con $0 \leq k \leq m$ junto a z_2^m forman una base de V tenemos que $W = V$. Con esto habremos acabado la demostración de 2.1.9. □

Observación 2.1.12. *En física cambiamos m por j , donde $j = k/2$ para $k \in \mathbb{N}$, y la dimensión de la representación la cambiamos por $2j + 1$. No es de extrañar que se use la misma letra que para el momento angular, pues la representación de las transformaciones que se usen estarán estrechamente relacionadas para el espín de la partícula. Por tanto, los fermiones como el electrón se podrán describir con una representación para $j = 1/2$, y al trabajar con la ecuación Dirac haremos uso de una representación $\mathfrak{so}(3, 1) \cong \mathfrak{su}(2; \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{su}(2; \mathbb{C})$ de dimensión $2 + 2$, lo que se traducirá en que tendremos que trabajar en un espacio de dimensión 4, frente al de Klein-Gordon, donde tratamos las partículas de espín 0, como el pión y otros mesones, y por tanto bastará con un espacio de dimensión $1 + 1$.*

Hemos construido el grupo de Lorentz y la representación de su álgebra de Lie, con lo que quedan bien formalizadas (matemáticamente hablando) las transformaciones de Lorentz. Gracias a esto, en física podemos trabajar en el sistema inercial que más nos convenga, o construir una transformación compleja a partir de los generadores, así como

cambiar de una representación del álgebra a otra, también según sea más conveniente. A continuación veremos el primer campo relativista, el **campo electromagnético**, desde un punto de vista clásico.

2.2. Campos clásicos. El campo electromagnético

La interacción electromagnética es una de las 4 interacciones que conocemos actualmente, junto a la nuclear fuerte/débil y la gravitatoria. Sus fenómenos se conocen desde la antigüedad, pues los imanes y los rayos son fenómenos electromagnéticos. El electromagnetismo como estudio de las propiedades eléctricas y magnéticas de los materiales nació alrededor del siglo XVII, y poco a poco, con grandes avances de científicos como Faraday, Henry o Ampère, se comenzó a entender como un fenómeno del espacio. El campo eléctrico (magnético) es creado por un objeto, pero este será una propiedad del espacio, que podrá interactuar con otros campos o con la propia materia.

Sea \mathbb{R}^4 el espacio-tiempo (t, \vec{r}) . Un campo (vectorial) se define como una aplicación $E : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ($\vec{E} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$), la cual es lineal para la suma y cumple que la multiplicación por escalares de la forma $(f\vec{E})(x) = f(x)\vec{E}(x)$. El campo es una propiedad del espacio, y este interactúa con la materia y consigo mismo.

Daremos conocidas las nociones básicas del electromagnetismo¹³. Comencemos escribiendo las ecuaciones de Maxwell para el campo eléctrico (\vec{E}) y el campo magnético (\vec{B}):

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

,en su forma integral,

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q}{\varepsilon_0}, \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0, \\ \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

Por comodidad, omitiremos la dependencia espacio-temporal de los campos \vec{E} y \vec{B} y sus magnitudes asociadas, suponiendo que por contexto se entiende qué magnitudes

¹³Para saber más sobre la teoría del electromagnetismo ver [9]

tienen dependencia y cuales son constantes. Este conjunto de 4 ecuaciones (pues la forma integral se puede deducir de la diferencial y viceversa) se conocen como las ecuaciones de Maxwell (en el vacío) para el campo eléctrico y el campo magnético, donde ρ es la densidad de carga eléctrica en función de la posición y el tiempo, q es la carga encerrada en la superficie S , C es el contorno delimitado por la misma superficie, \vec{j} es la densidad de corriente eléctrica en función de la posición y del tiempo, y tanto ε_0 (permitividad eléctrica del vacío) como μ_0 (permeabilidad magnética del vacío) son unas constantes, que cumplen que $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

Es conocido que los campos \vec{E} y \vec{B} se pueden escribir en base a unos potenciales \vec{A} y Φ , conocidos como potencial vectorial y escalar, respectivamente.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \Phi. \quad (2.2.3)$$

Los potenciales no son únicos, pues los mismos campos surgen cambiando los potenciales de tal manera que

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial \Theta}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Theta, \quad (2.2.4)$$

donde Θ es una función escalar cualquiera. A esto se le conoce en física como **libertad gauge**.

Se puede demostrar (más detalles se puede encontrar en [9, §12.3.2]) que ante una transformación de Lorentz de la forma (2.1.7), los campos se transforman como

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & B'_x &= B_x, \\ E'_y &= \gamma(E_y - vB_z), & B'_y &= \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z), \\ E'_z &= \gamma(E_z + vB_y), & B'_z &= \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y), \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

mientras que las magnitudes ρ y \vec{j} lo hacen como

$$\begin{aligned} j'_x &= \gamma(j_x - v\rho), \\ j'_y &= j_y, & j'_z &= j_z, \\ \rho' &= \gamma(\rho - \frac{v}{c^2}j_x). \end{aligned}$$

Como podemos ver, las transformaciones son laboriosas para trabajar, al igual que sucede con las velocidades. Por lo tanto, trataremos de construir una magnitud (que será un tensor) en el espacio de Minkowski para facilitar la escritura de las transformaciones, tal y como hicimos para la velocidad con la cuadvivector velocidad.

Con la relatividad nace el **tensor de campo electromagnético**. Hasta ahora habíamos tenido un campo eléctrico y uno magnético, estrechamente ligados, pero resolviendo las ecuaciones de Maxwell (2.2.1), obtendríamos un vector para uno y un vector para el otro. En relatividad, tendremos una única magnitud (el tensor de campo) que nos dará toda la

información del sistema. Comencemos definiendo qué es un tensor.

Un tensor n -dimensional, de tipo (p, q) y rango $p + q$ es un objeto definido en un sistema de coordenadas, representado por unos números $T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$ y que depende de las coordenadas elegidas de la siguiente manera.

Si $x_i = x_i(z_1, \dots, z_n)$ y $z_j = z_j(x_1, \dots, x_n)$ $i, j = 1, \dots, n$ entonces:

$$T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} = \sum_{k, l=1}^n {}'T_{l_1, \dots, l_q}^{k_1, \dots, k_p} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial z_{k_1}} \dots \frac{\partial x_{i_p}}{\partial z_{k_p}} \frac{\partial z_{l_1}}{\partial x_{j_1}} \dots \frac{\partial z_{l_q}}{\partial x_{j_q}}, \quad (2.2.6)$$

donde ${}'T_{l_1, \dots, l_q}^{k_1, \dots, k_p}$ es el tensor en coordenadas z_j y $T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$ en coordenadas x_i .

Con esta definición es fácil ver que la métrica de Minkowski es un tensor de tipo $(0, 2)$ en 4 dimensiones. Con las leyes de transformación del espacio de Minkowski, se puede ver que un tensor de rango 2 $\mathbf{F}^{\mu\nu}$ con las 4 dimensiones vistas en §2.1 se transformará con la siguiente ley¹⁴:

$$\bar{\mathbf{F}}^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\lambda \Lambda^\nu_\sigma \mathbf{F}^{\lambda\sigma}. \quad (2.2.7)$$

Ahora bien, podemos comprobar con un pequeño cálculo, que el siguiente tensor, llamado tensor de campo electromagnético, junto a la ley de transformación (2.2.7), cumple con las leyes de transformación (2.2.5):

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.8)$$

Este tensor es un elemento del espacio de Minkowski escrito en forma contravariante, y como tal, podemos “contraerlo” con su forma covariante:

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} = \sum_{\mu, \nu, \alpha, \beta=0}^3 \mathbf{F}^{\mu\nu} g^{\alpha\mu} \mathbf{F}^{\alpha\beta} g^{\beta\nu} = 2(B^2 - \frac{E^2}{c^2}), \quad (2.2.9)$$

que nos da un nuevo invariante.¹⁵

Definiendo el cuadvivector corriente $\mathbf{J}^\mu = (\rho, \vec{j})$, y el operador derivada $\partial^\mu = (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla})$, tenemos que

$$\partial_\nu \mathbf{F}^{\mu\nu} = \mathbf{J}^\mu, \quad \partial^\mu \mathbf{J}_\mu = \partial_\mu \mathbf{J}^\mu = \partial_\mu \partial_\nu \mathbf{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.2.10)$$

de donde concluimos que $\partial^\mu \mathbf{J}_\mu = 0$ es un invariante, y como $\partial^\mu \mathbf{J}_\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$, obtenemos la ecuación de continuidad. Este tipo de ecuación apareció ya en la primera sección,

¹⁴Recordemos que estamos usando la notación de Einstein para la suma, y Λ^μ_ν son los elementos de las matrices Λ asociadas a las transformaciones de Lorentz vistas en (2.1.7).

¹⁵La invarianza de la contracción de dos tensores no es compleja de demostrar, pues se obtiene directamente de la definición de la transformación (2.2.6), pero es laboriosa así que la omitiremos.

(ver la ecuación (1.2.5)). Aparece en muchos lugares de la física, y el poder asegurar que exista una ecuación $\frac{\partial \eta}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 0$ para ciertas magnitudes η y \vec{f} es algo que iremos buscando a lo largo del trabajo, siempre tratando de dar alguna interpretación física a η .

Con esto también podemos definir un cuadrivector potencial $\mathbf{A}^\mu = (\Phi, \vec{A})$, con el que tenemos las ecuaciones

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathbf{A}^\nu - \partial^\nu \mathbf{A}^\mu,$$

que no son ni más ni menos que las ecuaciones de Maxwell (2.2.1) en forma cuadrivectorial. La libertad gauge que mencionamos anteriormente se convierte en la **invarianza gauge**, la cual nos dice que el potencial \mathbf{A}^μ dará lugar al mismo tensor de campo si lo cambiamos por otro de la siguiente manera:

$$\mathbf{A}'^\mu = \mathbf{A}^\mu - \partial^\mu \Theta. \quad (2.2.11)$$

Observación 2.2.1. *La invarianza gauge es algo muy importante, porque aunque aquí lo hemos visto para el caso del potencial electromagnético, también existirá una invarianza gauge para los operadores dentro de las ecuaciones de Schrödinger, Klein-Gordon o Dirac. Esto lo veremos algo más adelante.*

Como bien explicamos en §1.2, a cualquier magnitud medible le corresponde un operador, siguiendo las reglas de cuantización. A esto se le conoce en la literatura como principio de correspondencia de Bohr¹⁶, que son los siguientes:

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{P} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (2.2.12)$$

Ahora bien, como vimos en §2.1, el cuadrivector momento se define como $\mathbf{P}^\mu = (E/c, \vec{p})$, por lo que se puede escribir como un operador de la forma

$$\mathbf{P}^\mu = \left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \vec{\nabla} \right) = i\hbar \partial^\mu,$$

el cual al contraerlo consigo mismo nos da un invariante

$$\mathbf{P}^\mu \mathbf{P}_\mu = -\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2 \nabla^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) = -\hbar^2 \square, \quad (2.2.13)$$

donde hemos definido $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$.

Observación 2.2.2. *La conclusión a la que llegamos, es que si escribimos una ecuación del tipo $\square\psi = 0$, y ψ no cambia de forma ante una transformación de Lorentz, la ecuación quedará invariante ante una transformación de Lorentz, lo que es lógico al pasar de un sistema de referencia inercial a otro (las leyes de la física deben ser las mismas). Un estudio en profundidad de las invarianzas ante transformaciones de Lorentz se realizará en la siguiente sección.*

¹⁶Diversos libros introducen los operadores momento y energía de manera distinta. Ejemplo de esto lo podemos ver en [3] y [16]. Nosotros seguiremos el formalismo de [3]

El estudio del campo electromagnético nos ha servido para introducir la idea de campo en la física, hablar de la invarianza del gauge y de la importancia de los invariantes. Esto es algo que nos servirá de apoyo durante el resto del trabajo, donde iremos construyendo las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac de modo que cumplan con ciertas exigencias (como la invarianza ante transformaciones) y se puedan reducir a la ecuación de Schrödinger en el límite no relativista (velocidades v con $v \ll c$).

Capítulo 3

Teoría Cuántica de Campos

3.1. Mecánica Cuántica Relativista

En esta sección daremos por conocidas las propiedades y resolución de la ecuación de Schrödinger. Denotaremos a la ecuación de Klein-Gordon como K-G.

3.1.1. Ecuación de Klein-Gordon y sus problemas

Introduciremos primeramente la ecuación de K-G, usando el principio de correspondencia de Bohr. Partamos del problema de una partícula libre en una región $V \subset \mathbb{R}^3$: $\hat{H}\psi = \hat{E}\psi = \frac{\hat{P}^2}{2M}\psi$ donde \hat{H} es el operador asociado al Hamiltoniano del sistema, \hat{E} el operador asociado a la energía, M la masa de la partícula en cuestión y \hat{P} es el operador asociado al momento del sistema. Estamos tratando ψ como un autoestado del Hamiltoniano, cuyos autovalores son la energía del sistema. Estamos tomando una partícula libre (sin potencial interaccionante) y con una expresión de la energía no relativista.

Usando el principio de correspondencia, tomamos $\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ y $\hat{P} = -i\hbar\nabla$, con lo que obtenemos la ecuación $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi$, que no es ni más ni menos que la ecuación de Schrödinger para una partícula libre. Ahora bien, sabemos que la energía de un sistema relativista se puede escribir como $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. Por tanto, tomando esta expresión de la energía y aplicando el principio de correspondencia llegamos a la ecuación

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = (-\hbar^2c^2\nabla^2 + M^2c^4)\psi. \quad (3.1.1)$$

Por comodidad, debido a que no cambia nada del estudio más que las unidades tomaremos las llamadas **unidades naturales**¹ como se suele hacer en cuántica relativista, con lo que tomamos² $c = \hbar = 1$. Con estos cambios y reordenando los términos, obtenemos la forma

¹La elección de un sistema de unidades no cambia la física del sistema, solo la expresión matemática de las cosas.

²Con esta imposición hacemos que las unidades de longitud y tiempo sean las mismas, que la masa tenga unidades del inverso del tiempo y la energía tenga unidades de masa.

más sencilla de la **ecuación K-G para una partícula libre**:

$$(\square + M^2)\psi = 0, \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (3.1.2)$$

Por ahora no le hemos exigido nada a la función de onda ψ . Para poder trabajar adecuadamente, supondremos que es “suficientemente buena”, es decir, no especificaremos de que clase son, sino que haremos exigencias según lo necesitemos. Más adelante definiremos adecuadamente un espacio donde trabajar con estas funciones.

Propondremos una solución para la ecuación de K-G, análoga a la onda plana, solución de la ecuación de Schrödinger. Tomaremos $\psi(\vec{r}, t) = Ne^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}$, donde N es una constante de normalización. Es sencillo comprobar que es solución de la ecuación (3.1.2).

$$(\square + M^2)Ne^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})} = -E^2\psi + p^2\psi + M^2\psi = (M^2 + p^2 - E^2)\psi = 0. \quad (3.1.3)$$

Ahora bien, de la expresión de la energía obtenemos que $E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$. Naturalmente obviaríamos los valores negativos de la energía, pues una partícula libre tiene energía no negativa, pero no podemos obviarlos en la función de onda.

Observación 3.1.1. *Hagamos un pequeño inciso recordando cómo funcionaban las ondas planas en la ecuación de Schrödinger. A pesar de que la función $\phi = \phi_0 e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)/\hbar}$ es solución de la ecuación de Schrödinger, esta no puede representar un estado, pues no es normalizable. Para ello se hace una construcción en forma de los llamados **paquetes de onda**, los cuales consisten en desarrollar la función de onda del estado de la partícula como una transformada inversa de Fourier:*

$$\psi(x, t) = \int \varphi(p) e^{i(p\cdot x - Et)/\hbar} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}}, \quad (3.1.4)$$

siendo $\psi(x, t)$ el estado de una partícula libre. En este caso vemos que la transformada de Fourier de $\psi(x, 0)$ es $\varphi(p)$. Si recordamos las propiedades de una base ortonormal de un espacio de Hilbert (ver [14, §3]), dada una base ortonormal $\{e_k\}$ completa podemos escribir cualquier elemento del espacio de Hilbert como $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$, donde (\cdot, \cdot) denota el producto escalar del espacio de Hilbert. Como vemos de (3.1.4), ψ se puede escribir como el producto escalar

$$\psi(x, t) = (e^{-i(p\cdot x - Et/\hbar)}, \varphi(p)) \quad (3.1.5)$$

donde (\cdot, \cdot) denota el producto escalar de $L^2(\mathbb{R}^3)$ con la medida $\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$. Por esta razón, en física se le suele dar el (incorrecto) nombre de base al conjunto de ondas planas $\phi = \phi_0 e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)/\hbar}$. Haremos uso del nombre, pues es el que se da en física, pero lo entenderemos correctamente como una expansión en forma de paquetes de onda como en (3.1.4).

Para valores negativos de la energía, nuestra función de onda sigue siendo solución de la ecuación, y es más, el conjunto de todas las funciones $\psi_E(\vec{r}, t) = Ne^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{r})}$ para distintos valores de la energía forman una “base” del espacio en $L^2(V)$ (como paquetes de onda, al igual que la onda plana de Schrödinger (3.1.4)), pero tenemos que tener en

cuenta los valores positivos y negativos de la energía, pues si no ya no estaríamos tomando en cuenta todas las soluciones y por tanto la “base” estaría incompleta. Este es el problema de la **energía negativa**, una de las principales razones por la cual esta ecuación fue descartada en un inicio.

Otro problema que trae consigo la ecuación de K-G es la densidad de probabilidad. Operando de la misma manera que hicimos para obtener la ecuación (1.2.5), podemos obtener:

$$\begin{aligned} \psi^\dagger(\square + M^2)\psi &= 0 \\ \psi(\square + M^2)\psi^\dagger &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \psi^\dagger(\square + M^2)\psi - \psi(\square + M^2)\psi^\dagger &= \psi^\dagger\square\psi - \psi\square\psi^\dagger. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Ahora bien, con la expresión del momento (2.2.13) podemos reescribir (3.1.6) como:

$$\begin{aligned} \psi^\dagger\square\psi - \psi\square\psi^\dagger &= \psi^\dagger\partial^\mu\partial_\mu\psi - \psi\partial^\mu\partial_\mu\psi^\dagger = 0 \\ \partial_\mu(\psi^\dagger\partial^\mu\psi - \psi\partial_\mu\psi^\dagger) &= 0 \Rightarrow \partial_\mu J^\mu = 0. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

donde hemos definido $\frac{i}{2M}(\psi^\dagger\partial^\mu\psi - \psi\partial_\mu\psi^\dagger) = J^\mu$. Definiendo $J^0 = \frac{i}{2M}(\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}) = \rho$ y a $\vec{j} = \frac{i}{2M}(\psi^\dagger\nabla\psi - \psi\nabla\psi^\dagger)$, obtenemos la ecuación:

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\vec{j} = 0. \quad (3.1.8)$$

Si integramos la ecuación en una región V arbitraria que contenga al sistema, utilizamos unas condiciones de contorno adecuadas, y aplicamos el teorema de la divergencia:

$$\int_V d^3x \frac{\partial\rho}{\partial t} + \int_S dS \vec{j} \cdot \vec{n} = 0,$$

que, suponiendo que se cumplen las condiciones para sacar la derivada respecto al tiempo de la primera integral y que el volumen sea arbitrariamente grande, tenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x \rho = 0, \quad (3.1.9)$$

pues asumimos que \vec{j} tiende a 0 cuando $|\vec{r}|$ es muy grande (volumen grande). Esto es un argumento muy usado en física (la corriente tiene que hacerse 0 en el infinito), y se basa en el carácter localizado de la física.

De aquí llegamos a la misma conclusión que en la ecuación (1.2.5), que existe una magnitud ρ cuya integral se conserva en el tiempo. Pero aquí tenemos un problema: no es una función de densidad de probabilidad. La magnitud ρ tal y como está definida puede ser negativa o nula, y por lo tanto su integral también (por ejemplo, tomando la solución ψ para la energía negativa obtenemos una densidad negativa), y por lo tanto, perdemos la interpretación probabilística de la función de onda.

Ahora bien, si redefinimos la magnitud J^μ como $\frac{ie}{2M}(\psi^\dagger \partial^\mu \psi - \psi \partial_\mu \psi^\dagger)$, donde e es una unidad de carga, podemos tomar ρ como una densidad de **carga**. Esta nueva interpretación sí tiene sentido, pues la carga se conserva, y puede ser positiva, negativa o nula. Por otra parte, \vec{j} pasa a ser una densidad de corriente. En el contexto de la teoría de campos, veremos que esto es consecuente con las creación y destrucción de partículas. Es decir, si partimos de una partícula con carga nula (como un fotón) y esta se desintegra, deberá hacerlo en un número de partículas tal que se neutralice la carga total del sistema (como un electrón y un positrón).

Finalmente, otra de los fallos de la ecuación de K-G es que es una derivada de segundo orden en el tiempo. Esto hace que, no baste con conocer su estado en un instante (como sí sucede con la ecuación de Schrödinger) para estudiar su evolución, sino que necesitamos de conocer el estado en dos instantes o conocer el estado y su derivada en un instante. Esto hace de la ecuación algo indeseable, pues experimentalmente se observaba que solo con el estado en un instante se podía conocer la evolución del sistema.

3.1.2. Ecuación de Dirac

La ecuación de Schrödinger no trata de la misma manera al espacio y al tiempo, mientras que la relatividad especial nos dice que sí lo son. Esto se debe a que temporalmente tenemos una derivada de primer orden, mientras que respecto a la posición tenemos una derivada de segundo orden. Como ya hemos comentado, la ecuación de K-G crea un problema adicional al introducir las derivadas de segundo orden en el tiempo.

Por ello, para estudiar la partícula libre en una región $V \subset \mathbb{R}^3$, Dirac buscó una ecuación del tipo $i\partial_t \psi = \hat{H}\psi$, donde apareciesen solo derivadas en primer orden respecto al tiempo y la posición. Comenzó planteando una ecuación general, con unas magnitudes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ cualesquiera:

$$i\partial_t \psi = -i \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \psi + M\beta\psi = \hat{H}\psi = E\psi, \quad (3.1.10)$$

donde la energía será la energía relativista. De esta manera, tenemos que $\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta M = E = \sqrt{p^2 + M^2}$.

Se puede demostrar que, si suponemos que los α_i y β son números y aplicamos una rotación espacial, la ecuación no es invariante. Por tanto, no nos queda más remedio que tratar a α_i y β como matrices y ψ como un vector N -dimensional.

Tendremos por tanto un vector

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_N \end{pmatrix} \quad (3.1.11)$$

y tendremos N ecuaciones acopladas de la forma

$$i\partial_t\psi_k = -i\sum_{j=1}^N\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_{kj}\psi_j + \sum_{j=1}^N\beta_{kj}M\psi_j = \sum_{j=1}^N\hat{H}_{kj}\psi_j. \quad (3.1.12)$$

Hemos visto ya que $N \neq 1$, a continuación comprobaremos que la dimensión más pequeña en la que podemos trabajar con la ecuación de Dirac es 4.

Veamos primero que, para que se satisfaga la igualdad $E^2 = p^2 + m^2$, necesitamos que la solución Ψ también sea solución de la ecuación K-G,

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\Psi}{\partial t} &= -i\sum_{j=1}^3\alpha_j\frac{\partial\Psi}{\partial x_j} + M\beta\Psi \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^3(\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_j\partial x_k} - iM\sum_{j=1}^3(\alpha_j\beta + \beta\alpha_j)\frac{\partial\Psi}{\partial x_j} + M^2\beta^2\Psi. \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Si comparamos la ecuación (3.1.13) con la ecuación (3.1.2), obtenemos las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j &= 2\delta_{jk}\mathbb{I}, \\ \alpha_j\beta + \beta\alpha_j &= 0, \\ \alpha_j^2 &= \beta^2 = \mathbb{I}. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Por otra parte, también le exigiremos al hamiltoniano que sea hermítico. La no hermiticidad del hamiltoniano³ de K-G (bajo el producto escalar de $L^2(V)$) es la causa de que perdamos la noción probabilística de la densidad ρ . Como \hat{P} es un operador hermítico en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3)$, exigiremos que tanto α_i como β sean matrices hermíticas. Por tanto los autovalores de estas matrices serán reales, y por las relaciones (3.1.14), tendremos que son ± 1 .

De (3.1.14) se deduce que:⁴

$$\text{Tr}(\alpha_i) = -\text{Tr}(\beta\alpha_i\beta) = -\text{Tr}(\beta^2\alpha_i) = -\text{Tr}(\alpha_i) \Rightarrow \text{Tr}(\alpha_i) = 0,$$

y de la misma manera que $\text{Tr}(\beta) = 0$. De este modo, tenemos que las matrices tienen traza nula. Por tanto, concluimos que la dimensión en la que trabajaremos deberá ser par, pues la cantidad de autovalores positivos y negativos debe ser la misma (para la traza nula).

Pero en dimensión 2, no podemos tener 4 matrices linealmente independientes, pues el espacio de matrices 2×2 tiene 3 generadores (descartando a la identidad), por ejemplo, las matrices de Pauli σ_i .

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.1.15)$$

³En §3.1.1 no hemos definido un hamiltoniano de K-G, pero en §3.1.4 sí veremos una formulación hamiltoniana de la ecuación de K-G, siendo dicho hamiltoniano el que no es hermítico.

⁴ $\text{Tr}(A)$ denota la traza de la matriz A .

Por ello, aunque las matrices (3.1.15) cumplan con las relaciones (3.1.14), no podemos construir una cuarta matriz que no sea una combinación lineal de estas que siga cumpliendo (3.1.14).

Como la dimensión debe ser par y no puede ser 2, la más pequeña en la que podemos trabajar es dimensión 4.

La elección de dichas matrices no es única, al igual que la representación⁵ de un grupo no lo es. En la literatura se suele usar la llamada **representación de Dirac**,⁶ de uso extendido pues facilita el cálculo a la hora de resolver las ecuaciones del electrón. En esta representación las matrices vienen definidas como:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix}. \quad (3.1.16)$$

De aquí en adelante omitiremos el 2×2 y lo supondremos por contexto.

Para acabar la sección realizaremos el mismo análisis de la densidad de corriente que hicimos en §1.2 para la ec. de Schrödinger y en (3.1.6) para la ec. de K-G pero con la ec. de Dirac. Sea Ψ una solución de la ec. de Dirac

$$\begin{aligned} i\Psi^\dagger \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -i \sum_{j=1}^3 \Psi^\dagger \alpha_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} + M\Psi^\dagger \beta \Psi, \\ -i \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} \Psi &= i \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial x_j} \alpha_j^\dagger \Psi + M\Psi^\dagger \beta^\dagger \Psi, \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

donde en el primer caso hemos multiplicado por la izquierda en la ec. de Dirac (3.1.10) por el adjunto de la función Ψ en la primera ecuación de (3.1.17) y en el segundo hemos hecho el conjugado de (3.1.10) y multiplicado por la derecha por la función Ψ . Ahora, restando ambas ecuaciones obtenemos

$$i \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^\dagger \Psi) = -i \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\Psi^\dagger \alpha_j \Psi), \quad (3.1.18)$$

donde hemos hecho uso de las propiedades (3.1.14) de α_i y β . Por lo tanto, hemos llegado a una ecuación del tipo $\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$, con $\rho = \Psi^\dagger \Psi$ y $\vec{j} = \Psi^\dagger \vec{\alpha} \Psi$.

Por lo tanto, si integramos en un volumen lo suficientemente grande como para aplicar un argumento similar al de la ecuación (3.1.9), obtenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x \Psi^\dagger \Psi = 0, \quad (3.1.19)$$

⁵Cuando hablamos de representación lo hacemos en el mismo sentido que en §2.1.4.

⁶Otra posible representación (es decir, elección de matrices) es la llamada representación de Weyl. La elección de una representación de grupo u otra, como dijimos en §2.1.4 dependerá del problema que estemos tratando de resolver. El estudio de dichas representaciones es complejo y lo omitiremos.

o lo que es lo mismo,

$$\int_V d^3x \Psi^\dagger \Psi = \text{cte.}$$

Con esto, podemos normalizar los estados. Esto es, exigirles que $\int_V d^3x \Psi^\dagger \Psi = 1$. Por tanto, la norma inducida por el producto escalar definido sobre los vectores de 4 componentes en $L^2(V)$ definido como

$$(F, G) = \int_V d^3x \begin{pmatrix} f_1^* & f_2^* & f_3^* & f_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^4 \int_V d^3x f_j^* g_j \quad (3.1.20)$$

es positiva, al contrario de lo que sucedía en la ecuación de K-G, con lo que podemos recuperar el carácter probabilístico de ρ . No es difícil comprobar, que el espacio que hemos definido, con el producto escalar anterior, es un espacio de Hilbert (de dimensión infinita).

Claramente, no todas las funciones de onda estarán en $L^2(V)$. Para empezar estas funciones no son en general diferenciables. Este problema lo abordaremos con más detenimiento en §3.2.

3.1.3. Invarianza de las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac

Veremos qué condiciones deben de cumplir las funciones de onda y los operadores para que las soluciones sean invariantes ante una transformación de Lorentz.

Veamos primero el caso de la ecuación de K-G. Como ya vimos en §2.2, el operador \square se define como una contracción de cuadvectores, por lo tanto es un invariante ante transformaciones de Lorentz, al igual que la masa.⁷ Así que, si la función de onda fuese un escalar de Lorentz (es decir, que al aplicarle una transformación de Lorentz queda multiplicada por un escalar) tendríamos que:

$$\begin{aligned} (\square + M^2)\psi'(\mathbf{X}'^\mu) &= (\square + M^2)\psi'(\Lambda^\mu{}_\nu \mathbf{X}^\nu) \\ &= (\square + M^2)\hat{\mathcal{S}}(\Lambda^\mu{}_\nu)\psi(\mathbf{X}^\mu) = (\square + M^2)\lambda\psi(\mathbf{X}^\mu) = 0, \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

donde $\hat{\mathcal{S}}(\Lambda^\mu{}_\nu)$ es el operador que aplica la transformación de Lorentz sobre la función de onda. Es sencillo comprobar, aplicando 2 veces la misma transformación, que ese λ debe de ser ± 1 . Por lo tanto, la función de onda deberá de no cambiar al aplicarle una transformación y mantener la estructura o cambiar en un signo global ($\psi' \mapsto -\psi$). Por ejemplo, esto querrá decir que si tenemos una función del tipo $\psi(\mathbf{X}^\mu) = e^{i\mathbf{P}^\mu \mathbf{X}_\mu}$, la función transformada será $\psi'(\mathbf{X}'^\mu) = \pm e^{i\mathbf{P}'^\mu \mathbf{X}'_\mu} = \pm \psi$ pues la contracción $\mathbf{P}^\mu \mathbf{X}_\mu$ es invariante Lorentz.

⁷Algunos libros, sobretodo los más antiguos, hablan de “masa en reposo” y de “masa inercial”. Estos términos están desactualizados, y hoy día la masa se define como un invariante.

Pasemos a analizar ahora la ecuación de Dirac. Pero para ello primero la escribiremos en forma covariante, pues nos facilitará el cálculo. Introduzcamos las matrices γ de Dirac.

$$\gamma^0 := \beta \quad \gamma^i := \beta\alpha_i. \quad (3.1.22)$$

Si tomamos la ecuación de Dirac (3.1.10) y la multiplicamos por β a la izquierda, obtenemos la ecuación

$$i \left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \gamma^j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \Psi - M\Psi = (i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\Psi = 0. \quad (3.1.23)$$

Como vimos en §2.1, la representación de las transformaciones de Lorentz lo podemos estudiar con una representación $(\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2})$, de matrices 4×4 . Por lo tanto, dada una transformación de Lorentz, la función de onda de Dirac se transformará como

$$\Psi'(\mathbf{X}'^\mu) = \hat{\mathcal{S}}(\Lambda^\mu_\nu) \Psi(\mathbf{X}^\mu), \quad (3.1.24)$$

donde $\hat{\mathcal{S}} := \hat{\mathcal{S}}(\Lambda^\mu_\nu)$ es una matriz 4×4 . Como ya vimos en §2.1, estas transformaciones tienen inversa, por lo que también podemos escribir

$$\Psi(\mathbf{X}^\mu) = \hat{\mathcal{S}}^{-1} \Psi'(\mathbf{X}'^\mu). \quad (3.1.25)$$

Si sustituimos la Ψ de la ecuación (3.1.25) en la ecuación (3.1.23) y multiplicamos por $\hat{\mathcal{S}}$ por la izquierda obtenemos la ecuación

$$\hat{\mathcal{S}}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M) \hat{\mathcal{S}}^{-1} \Psi'(\mathbf{X}'^\mu) = \left(i\hat{\mathcal{S}}\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^\mu} \hat{\mathcal{S}}^{-1} - M \right) \Psi'(\mathbf{X}'^\mu) = 0, \quad (3.1.26)$$

escribiendo las derivadas ∂_μ en las coordenadas \mathbf{X}'^μ , tenemos

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}^\mu} = \Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}'^\nu}. \quad (3.1.27)$$

Si ahora sustituimos la ecuación (3.1.27) en (3.1.26) obtenemos la ecuación

$$\left(i\hat{\mathcal{S}}\gamma^\mu \hat{\mathcal{S}}^{-1} \Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}'^\nu} - M \right) \Psi'(\mathbf{X}'^\mu) = 0, \quad (3.1.28)$$

donde hemos podido reordenar los términos pues Λ^ν_μ es un número y $\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}'^\nu}$ un operador lineal (las matrices no actúan sobre $\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}'^\nu}$). Por lo tanto, si imponemos la invarianza de la ecuación de Dirac ante transformaciones de Lorentz (es decir, que (3.1.28) tenga la misma forma que (3.1.23)), obtenemos la siguiente condición a cumplir:

$$\hat{\mathcal{S}}\gamma^\mu \hat{\mathcal{S}}^{-1} \Lambda^\nu_\mu = \gamma^\nu, \quad (3.1.29)$$

la cual es una condición que obligaremos a $\hat{\mathcal{S}}$ cumplir, y que nos permite, entre otras cosas, obtener las matrices de transformación para una rotación pura, una transformación pura de Lorentz o una transformación de paridad.

Finalmente, analizaremos las soluciones de las ecuaciones de K-G y de Dirac. En esta sección las resolveremos de manera formal, para estudiar algunas de sus propiedades (como el espín), pero la resolución rigurosa de las ecuaciones la llevaremos a cabo en §3.2.

3.1.4. Resolución de la ecuación de K-G

La ecuación que vamos a estudiar es la siguiente

$$(\square + M^2) \psi = 0, \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2,$$

conocida como la ecuación libre de K-G.

La resolución de la ecuación libre la realizamos al inicio de la sección en la ecuación (3.1.3). Ahora estudiaremos las propiedades de esta solución y el cómo construir una solución de carga neutra. Comencemos escribiendo la solución para una partícula de momento \vec{p}

$$\psi_{\vec{p}}(\mathbf{X}^\mu) = N e^{-i\mathbf{P}_\mu \mathbf{X}^\mu} = N e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}, \quad (3.1.30)$$

donde E puede ser tanto positivo como negativo. Por conveniencia, definiremos $E > 0$ e introduciremos una variable λ que puede ser ± 1 para reescribirlo como

$$\psi_{\vec{p}}^\lambda(\mathbf{X}^\mu) = N^\lambda e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - \lambda Et)}. \quad (3.1.31)$$

Si ahora introducimos (3.1.31) en la definición de ρ obtenemos

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{ie}{2M} \left(\psi_{\vec{p}}^{\lambda\dagger} \partial^\mu \psi_{\vec{p}}^\lambda - \psi_{\vec{p}}^\lambda \partial_\mu \psi_{\vec{p}}^{\lambda\dagger} \right) \\ &= \frac{ie}{2M} (i\lambda E) \left(\psi_{\vec{p}}^{\lambda\dagger} \psi_{\vec{p}}^\lambda + \psi_{\vec{p}}^\lambda \psi_{\vec{p}}^{\lambda\dagger} \right) \\ &= \lambda \frac{eE}{M} \psi_{\vec{p}}^{\lambda\dagger} \psi_{\vec{p}}^\lambda = \lambda \frac{eE}{M} |N^\lambda|^2. \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

La constante N^λ la podemos hallar si usamos el principio de conservación de carga (3.1.9) e imponemos que la integral valga λe (que sea positiva o negativa vendrá dado por el tipo de solución).

Integrando obtenemos, exigiendo que N^λ sea real,

$$\int_V d^3x \rho^\lambda = \lambda e = \lambda \frac{eE}{M} |N^\lambda|^2 V \Rightarrow N^\lambda = \sqrt{\frac{M}{EV}}. \quad (3.1.33)$$

Por tanto, la ecuación de K-G tiene dos soluciones posibles, para valores positivos y negativos de la energía, lo que se traducirá en una solución para una partícula y otra para otra partícula idéntica con carga opuesta.

Como la ecuación es lineal, una combinación lineal de las soluciones será solución. Por tanto, si hacemos $\psi_{\vec{p}}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{\vec{p}}^+ + \psi_{-\vec{p}}^-)$ obtenemos una nueva solución

$$\psi_{\vec{p}}^0 = \sqrt{\frac{M}{2VE}} (e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)} + e^{i(-\vec{p} \cdot \vec{x} + Et)}) = 2\sqrt{\frac{M}{2VE}} \cos(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et), \quad (3.1.34)$$

donde se puede comprobar fácilmente que su densidad de carga es 0. Por lo tanto, la ecuación de K-G puede describir partículas con carga o de carga nula.

Ahora bien, como comentamos en §2.1, la ecuación de Klein-Gordon tiene un espacio de representación de transformaciones de dimensión 2. Podemos pasar a trabajar en un espacio bidimensional si transformamos la ecuación de segundo orden en 2 ecuaciones acopladas de primer orden. Para ello, haremos un cambio de variable adecuado y transformaremos el operador Hamiltoniano en una matriz. Primeramente construiremos una ecuación del tipo

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \hat{H}\Phi = \frac{1}{2M} \begin{pmatrix} 2M^2 - \nabla^2 & -\nabla^2 \\ \nabla^2 & -(2M^2 - \nabla^2) \end{pmatrix} \Phi, \quad (3.1.35)$$

donde \hat{H} es un nuevo hamiltoniano escrito como una matriz 2×2 y Φ un vector de dos componentes. La escritura de la ecuación de K-G en dos componentes es tremendamente útil para estudiar la aproximación no relativista y estudiar la conservación de la carga.

Sea ψ una solución cualquiera de la ecuación K-G, las componentes de nuestro vector Φ serán las siguientes:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2M} (i\partial_t + M)\psi \\ \frac{1}{2M} (-i\partial_t + M)\psi \end{pmatrix}, \quad \psi = \phi_1 + \phi_2, \quad i\frac{\partial\psi}{\partial t} = M(\phi_1 - \phi_2). \quad (3.1.36)$$

Sustituyendo (3.1.36) en la ecuación (3.1.2) obtenemos la siguiente ecuación matricial para Φ

$$i\partial_t \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \hat{H} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2M} \begin{pmatrix} 2M^2 - \nabla^2 & -\nabla^2 \\ \nabla^2 & -(2M^2 - \nabla^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.1.37)$$

que tiene soluciones no triviales si el determinante es no nulo. Ahora bien, si suponemos que los estados ϕ_1 y ϕ_2 tienen la energía (p_0) y el momento (\vec{p}) bien determinados, o lo que es lo mismo, que ϕ_1 y ϕ_2 son autoestados del operador momento y del hamiltoniano respectivamente, podremos reescribirlos como

$$\begin{pmatrix} \phi_1(\vec{x}, t) \\ \phi_2(\vec{x}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^0 \\ \phi_2^0 \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - p_0 t)},$$

por lo que la ecuación de K-G se reduce a

$$i\partial_t \Phi = p_0 \Phi = \frac{1}{2M} \begin{pmatrix} 2M^2 + p^2 & p^2 \\ -p^2 & -(2M^2 + p^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^0 \\ \phi_2^0 \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - p_0 t)}, \quad (3.1.38)$$

y la condición de solución no trivial es que $p_0^2 - p^2 - M^2 = 0 \rightarrow p_0 = \pm\sqrt{p^2 + M^2} := \pm E$. Si ahora estudiamos la ecuación (3.1.38) tomando E positivo vemos que

$$(E - M)\phi_1^0 = \frac{p^2}{2M}(\phi_1^0 + \phi_2^0) \Rightarrow (E - M)\phi_1^0 = -(E + M)\phi_2^0, \quad (3.1.39)$$

donde si elegimos $\phi_2^0 = M - E$ obtenemos que $\phi_1^0 = M + E$. Por lo tanto nuestra solución para energías positivas es

$$\Phi^{(+)} = N^{(+)} \begin{pmatrix} M + E \\ M - E \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)}. \quad (3.1.40)$$

Por otro parte, si sustituimos ψ en función de ϕ_1 y ϕ_2 en la ecuación de continuidad, obtenemos

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{e}{2M} [M(\phi_1^* + \phi_2^*)i(\phi_1 - \phi_2) - M(\phi_1 + \phi_2)(\phi_2^* - \phi_1^*)] = \\ &= e[\phi_1^*\phi_1 - \phi_2^*\phi_2] = e[|\phi_1|^2 - |\phi_2|^2] = e\Phi^\dagger\sigma_3\Phi,\end{aligned}$$

así que podemos escribir la carga como

$$\int_V d^3x\rho = \pm e = e \int_V d^3x\Phi^\dagger\sigma_3\Phi \Rightarrow \int_V d^3x\Phi^\dagger\sigma_3\Phi = \pm 1. \quad (3.1.41)$$

Podemos ver que tenemos una nueva posible condición de normalización, donde la magnitud conservada será el signo de la carga y no su valor. En matemáticas la integral $\int_V d^3x\Phi^\dagger\sigma_3\Phi$ se conoce como un **producto escalar indefinido de Krein**. Como bien dijimos antes, en la ecuación K-G perdemos la normalización a la unidad de la densidad, y también perdemos el poder escribirlo como un producto escalar de un espacio de Hilbert, debido a que $\int \rho$ no es definida positiva.

Espacio de Krein

Sea un espacio vectorial complejo \mathcal{K} y una forma sesquilinear hermitica $[\cdot, \cdot]$ (que cumple con la definición de producto escalar menos con que $[x, x]$ sea definida positiva), el espacio $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot])$ se denomina **espacio de Krein**.

Discutiremos brevemente las propiedades de este espacio y de cómo construir un producto escalar con el que tener un espacio prehilbertiano en el que poder trabajar, más detalles sobre los espacios de Krein se puede encontrar en [2].

Si tomamos la forma sesquilinear $[\cdot, \cdot]$ y los conjuntos $\mathcal{K}_+ = \{x \in \mathcal{K} : [x, x] > 0\} \cup \{0\}$ y $\mathcal{K}_- = \{x \in \mathcal{K} : [x, x] < 0\} \cup \{0\}$, podemos definir el producto escalar en el espacio \mathcal{K} como

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{K}} = [x_+, y_+] - [x_-, y_-]; \quad x_+, y_+ \in \mathcal{K}_+, \quad x_-, y_- \in \mathcal{K}_-, \quad x = x_+ + x_-, \quad y = y_+ + y_-. \quad (3.1.42)$$

No es difícil comprobar que (3.1.42) es un producto escalar, y con él podemos dotar de estructura de espacio prehilbertiano⁸ a \mathcal{K} . Ahora, definiendo $\mathcal{K} = \{\Phi = (\phi_1, \phi_2) : \phi_1, \phi_2 \in L^2(V)\}$, podemos escribir

$$\pm 1 = \int_V d^3x\Phi^\dagger\sigma_3\Phi = \int_V d^3x (|\phi_1|^2 - |\phi_2|^2) = [\Phi, \Phi], \quad (3.1.43)$$

⁸Muchas de las propiedades que usamos de los espacios de Hilbert se encuentran también en los espacios prehilbertianos, por lo que ya hemos hecho un avance. Para asegurar que este espacio de Krein es de Hilbert requeriría un estudio de la convergencia de sucesiones de Cauchy, pero debido a la similitud de (3.1.42) con el producto escalar de $L^2(V)$, podemos ver que en \mathcal{K}_+ y \mathcal{K}_- convergerán separadamente, por lo que habría convergencia “componente a componente”, asegurando que es en efecto un espacio de Hilbert.

con $[\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}] = \int_V d^3x (\phi_1^{(1)*} \phi_1^{(2)} - \phi_2^{(1)*} \phi_2^{(2)})$. Por lo tanto, aunque no tengamos estructura de espacio de Hilbert, sabemos que es posible construirlo, y con él el análisis funcional que se usa en física (autovalores, valores esperados etc.).

Con la forma sesquilinear definida como (3.1.43) podemos definir el **adjunto de Klein Gordon** como $\bar{\Phi} = \Phi^\dagger \sigma_3$ y escribirlo de una manera similar al producto escalar en L^2 (una función “adjunta” $\bar{\Phi}_1$ multiplicando una función Φ_2). También recuperamos la fórmula para los valores esperados en L^2

$$\langle \Phi_1 | \hat{A} | \Phi_2 \rangle = \int_V d^3x \bar{\Phi}_1 \hat{A} \Phi_2. \quad (3.1.44)$$

Finalmente, le podemos exigir a las soluciones de energías positivas que estén normalizadas como +1, mientras a las soluciones de energía negativa como -1. Esto lo hacemos para que los signos de las cargas sean consistentes con aquellos introducidos en (3.1.33). Por lo tanto

$$\begin{aligned} [\Phi^{(+)}, \Phi^{(+)}] &= |N^{(+)}|^2 \int_V d^3x (|M + E|^2 - |M - E|^2) \\ &= |N^{(+)}|^2 V (|M + E|^2 - |M - E|^2) = 1 \Rightarrow \\ N^{(+)} &= \frac{1}{2\sqrt{MVE}}. \end{aligned} \quad (3.1.45)$$

Procediendo de manera análoga con la solución de energía negativa $\Phi^{(-)}$ obtenemos las soluciones:

$$\Phi^{(+)} = \frac{E + M}{2\sqrt{MVE}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-p^2}{(M+E)^2} \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)}, \quad \Phi^{(-)} = \frac{E + M}{2\sqrt{MVE}} \begin{pmatrix} \frac{-p^2}{(M+E)^2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} + Et)}, \quad (3.1.46)$$

que son las soluciones asociadas a la energía positiva y negativa respectivamente, y consecuentemente, a la carga positiva y negativa del sistema.

3.1.5. Resolución de la ecuación de Dirac

Partamos de la siguiente ecuación, donde usaremos la representación de Dirac (3.1.16)

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi = \varepsilon \Psi = (\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta M) \Psi, \quad (3.1.47)$$

donde $\hat{\vec{p}} = -i\vec{\nabla}$, ε es un autovalor del hamiltoniano asociado a la energía del sistema (recordemos que cuando buscamos soluciones de las ecuaciones de K-G o Dirac, buscamos soluciones estacionarias, o lo que es lo mismo, autoestados del Hamiltoniano, pues forman la “base” del espacio, en el sentido de la observación 3.1.1.). Una posible solución de (3.1.47) por separación de variables es $\Psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x})e^{-i\varepsilon t}$, donde ψ será un vector con cuatro componentes

$$\psi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^u \\ \varphi^d \end{pmatrix}, \quad \varphi^u = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi^d = \begin{pmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}. \quad (3.1.48)$$

A los vectores φ^u, φ^d (up y down) se les suele llamar **espinores**⁹. Cada uno de estos espinores tendrá su propia dependencia espacial.

Al conmutar \hat{p} con \hat{H} (basta ver la expresión del Hamiltoniano), existe una base de autovectores comunes para ambos¹⁰ $|\vec{p}, \varepsilon\rangle$ tal que $\hat{H}|\vec{p}, \varepsilon\rangle = \varepsilon|\vec{p}, \varepsilon\rangle$ y $\hat{p}|\vec{p}, \varepsilon\rangle = \vec{p}|\vec{p}, \varepsilon\rangle$. Si tomamos nuestras funciones Ψ como estos estados $|\varepsilon, \vec{p}\rangle$, entonces podemos elegir la dependencia espacial de los espinores siguiente

$$\varphi^u = \begin{pmatrix} \varphi_1(\vec{x}) \\ \varphi_2(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}, \quad \varphi^d = \begin{pmatrix} \varphi_3(\vec{x}) \\ \varphi_4(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}. \quad (3.1.49)$$

Con todo esto podemos reescribir la ecuación (3.1.47) como

$$\hat{H}\Psi = \varepsilon\Psi = \begin{pmatrix} M & \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\hat{p} & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^u \\ \varphi^d \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-\varepsilon t)}, \quad (3.1.50)$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} \varepsilon\varphi^u = (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\varphi^d + M\varphi^u, \\ \varepsilon\varphi^d = (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\varphi^u - M\varphi^d. \end{cases} \quad (3.1.51)$$

Para que el sistema (3.1.51) tenga solución necesitamos que

$$\begin{vmatrix} \varepsilon - M & -(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) \\ -(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) & \varepsilon + M \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \varepsilon^2 - M^2 - p^2 = 0 \Rightarrow \varepsilon = \pm\sqrt{p^2 + M^2} = \pm E, \quad (3.1.52)$$

donde hemos usado que¹¹ $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = p^2$, con $E > 0$. Por lo tanto, hemos demostrado que los autoestados del hamiltoniano, o lo que es lo mismo, la energía del sistema, puede ser positiva o negativa. Como bien dijimos antes, no podemos simplemente rechazar las (incómodas) soluciones negativas, ya que si no, estos autoestados no formarían una “base” completa del espacio de funciones en el que trabajamos.

De la ecuación (3.1.51) se deduce la siguiente relación entre φ^u y φ^d :

$$\varphi^d = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{M \pm E}\varphi^u, \quad (3.1.53)$$

por lo que reescribiendo Ψ con esta relación e introduciendo un factor de normalización resulta

$$\Psi(\vec{x}, t)^\lambda = N^\lambda \begin{pmatrix} \varphi^u \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{M+\lambda E}\varphi^u \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-\lambda Et)}. \quad (3.1.54)$$

⁹Esto se debe a la analogía que obtendremos de la ecuación de Dirac al formalismo introducido por Pauli para estudiar el espín en la mecánica cuántica no relativista.

¹⁰Este es un teorema conocido del análisis funcional, cuya demostración para operadores acotados, compactos y hermíticos se puede encontrar en [4, Teorema 4.10.8]. La teoría de operadores no acotados (como la mayoría de los que se usan en física) es bastante compleja y se aleja de los objetivos del trabajo. Aún así, podemos encontrar en [14, §10.6] una demostración del teorema espectral para operadores no acotados, y como la demostración [4, Teorema 4.10.8] es prácticamente un corolario del teorema espectral, se puede demostrar que este seguirá siendo cierto para el caso no acotado.

¹¹Esta identidad se puede demostrar por un cálculo directo a partir de la definición de las matrices σ .

Con esta solución, si le exigimos que su norma inducida por el producto escalar (3.1.20) sea 1, obtenemos

$$\int_V d^3x \Psi^\dagger \Psi = 1 = |N^\lambda|^2 \left[\varphi^{u\dagger} \varphi^u + \varphi^{u\dagger} \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{(M + \lambda E)^2} \varphi^u \right] V, \quad (3.1.55)$$

de donde haciendo uso de que $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})$ es una matriz hermítica y de que $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = p^2$, junto a que el espinor up esté normalizado ($\varphi^{u\dagger} \varphi^u = 1$) obtenemos

$$V |N^\lambda|^2 \left[1 + \frac{p^2}{(M + \lambda E)^2} \right] = 1 \Rightarrow N^\lambda = \sqrt{\frac{M + \lambda E}{2\lambda E V}}. \quad (3.1.56)$$

Para acabar, veamos que podemos escribir las soluciones Ψ^λ para las energías positivas y negativas ($\lambda = \pm 1$) de dos maneras distintas, debido a que al igual que escribimos φ^d en función de φ^u (3.1.53) podemos hacer lo contrario (φ^u en función de φ^d) y escribir las soluciones de la ecuación (libre) de Dirac como

$$\Psi_u^\pm = \sqrt{\frac{M \pm E}{\pm 2EV}} \begin{pmatrix} \varphi^u \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{M \pm E} \varphi^u \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} \mp Et)}, \quad \Psi_d^\pm = \sqrt{\frac{\pm E - M}{\pm 2EV}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\pm E - M} \varphi^d \\ \varphi^d \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} \mp Et)}. \quad (3.1.57)$$

Ahora bien, para una partícula en reposo, las soluciones Ψ_u^- y Ψ_d^+ son “malas”, pues en un sistema en reposo ($\vec{p} = 0$), aparecerá un término matemáticamente absurdo en $\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\pm E - M}$. Para solucionar este problema, se suele tomar Ψ_u^+ para energías positivas y Ψ_d^- para energías negativas. Finalmente, tenemos las dos soluciones de la ecuación de Dirac

$$\Psi^+ = \sqrt{\frac{M + E}{2EV}} \begin{pmatrix} \varphi^u \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{M + E} \varphi^u \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)}, \quad \Psi^- = \sqrt{\frac{E + M}{2EV}} \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + M} \varphi^d \\ \varphi^d \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} + Et)}, \quad (3.1.58)$$

o equivalentemente

$$\Psi^+ = \frac{1}{\sqrt{V}} u e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)}, \quad \Psi^- = \frac{1}{\sqrt{V}} w e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} + Et)}, \quad (3.1.59)$$

donde u y w son los espinores de Dirac definidos como

$$u = \sqrt{\frac{M + E}{2EV}} \begin{pmatrix} \varphi^u \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{M + E} \varphi^u \end{pmatrix}, \quad w = \sqrt{\frac{E + M}{2EV}} \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + M} \varphi^d \\ \varphi^d \end{pmatrix},$$

y

$$\varphi^u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi^d = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

los espinores de Pauli, normalizados a la unidad. Como vemos, tanto la solución positiva y negativa de la ecuación de Dirac depende de dos parámetros (u_1, u_2) o (v_1, v_2) respectivamente, los cuales deberán estar normalizados ($|u_1^2 + u_2^2| = 1$, ídem para (v_1, v_2)). Estas no son ni más ni menos que las proyecciones de espín de las partículas y de sus antipartículas. Al estudiar el límite no relativista veremos como la interacción con el espín (descubierto gracias a experimentos como el de Stern-Gerlach¹²) aparece naturalmente gracias a la

¹²Una completa discusión del experimento y sus consecuencias en el contexto de la ecuación de Schrödinger se puede encontrar en [3, §8].

forma de las soluciones de la ecuación de Dirac (3.1.59).

Como hemos dicho, las soluciones de energía positiva se asocian a las partículas, mientras que las de energía negativa a las de la antipartícula correspondiente (como el positrón respecto al electrón).¹³

Por lo tanto, el estado de una (anti)partícula está caracterizado con 3 números cuánticos $|\varepsilon, \vec{p}, s\rangle$, donde¹⁴ s es el espín de la partícula (en un fermión, $s = 1/2$).

Conviene destacar que las soluciones de la partícula y la antipartícula están acopladas (recordemos la relación entre φ^d y φ^u), por lo que no solo existe la antipartícula, sino que esta, de alguna forma, interactúa constantemente con la partícula. En el contexto de campos podremos entender bien cómo funciona este acoplamiento.

Para acabar veremos a qué se reducen las ecuaciones de K-G y Dirac en el límite no relativista.

3.1.6. Límite no relativista

Solución de la ecuación de Klein-Gordon

Empecemos estudiando la ecuación de K-G. Primero definamos qué significa trabajar en un sistema no relativista.

Cuando decimos que estamos en un sistema no relativista, es que la energía $E = T + M$, que se descompone en la energía en reposo (la masa M) y la energía cinética T , tiene una masa mucho más grande que la energía cinética (recordemos que en unidades naturales la masa y la energía tienen las mismas unidades). Esto sucede por ejemplo cuando nos movemos a bajas velocidades, o cuando tenemos cuerpos muy masivos (como el protón al compararse con el electrón).

Comenzaremos escribiendo la ecuación (3.1.38) para las soluciones de energía positiva como

$$\begin{cases} (T + M)\phi_1 = \left(M + \frac{p^2}{2M}\right)\phi_1 + \frac{p^2}{2M}\phi_2, \\ (T + M)\phi_2 = -\frac{p^2}{2M}\phi_1 - \left(M + \frac{p^2}{2M}\right)\phi_2. \end{cases} \quad (3.1.60)$$

Si dividimos por $2M$ la ecuación inferior, y teniendo en cuenta que el sistema es no relativista ($T \ll M$), vemos que $\frac{|p|^2}{M} \ll 1$ y¹⁵ $\|\phi_2\|_\infty \ll \|\phi_1\|_\infty$ (recordemos la forma que tiene la solución general de K-G (3.1.46)) obtenemos, operando con (3.1.60)

$$\phi_2 \approx -\frac{p^2}{4M^2}\phi_1, \quad (3.1.61)$$

¹³Esto fue un desafío al tratar de entender físicamente las soluciones, pero la ecuación de Dirac fue tal éxito que se aceptó, y poco tiempo después, en 1932, Carl Anderson descubrió la existencia de positrones.

¹⁴En el formalismo de Dirac se habla de “helicidad”, que no es más que la proyección de espín sobre la dirección del movimiento, pero para esta primera aproximación a la solución de la ecuación de Dirac nos basta con hablar simplemente de espín.

¹⁵ $\|\cdot\|_\infty$ denota la norma del máximo. Es decir, $\|f\|_\infty = \max |f|$.

y sustituyendo (3.1.61) en (3.1.60) conseguimos

$$T\phi_1 = \left(\frac{p^2}{2M} - \frac{p^4}{8M^3} \right) \phi_1, \quad (3.1.62)$$

la cual no es ni más ni menos que la aproximación no relativista de la energía cinética en segundo orden en p .

Invarianza gauge. Solución de la ecuación de Dirac

El principio de invariancia gauge local¹⁶ es un principio similar al visto en §2.2, donde al modificar los potenciales de cierta manera, teníamos la misma descripción del campo electromagnético. A pesar de llamarse principio, es demostrable que al modificar el operador momento, podemos cambiar la función de onda de tal manera ese cambio sea “absorbido” por la función de onda como un factor de fase. Es un resultado conocido de la mecánica de Schrödinger que al introducir un factor de fase los valores esperados y las probabilidades no cambian.

Supongamos que tenemos la ecuación de Schrödinger para el campo electromagnético de la forma¹⁷

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + e\phi(x) \right) \psi, \quad (3.1.63)$$

si ahora introducimos un factor de fase local α , $\psi' = \psi e^{i\alpha(x,t)}$, nos aparecen dos términos nuevos

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} e^{-i\alpha} + \hbar \psi' e^{-i\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 (\psi') e^{-i\alpha} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 (\alpha) \psi' e^{-i\alpha} + e\phi(x) \psi' e^{-i\alpha} \right), \quad (3.1.64)$$

pero como discutimos en (2.2.4), podemos modificar ϕ como

$$\phi'(x) = \phi(x) - \frac{\hbar}{e} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad (3.1.65)$$

con lo que cancelaríamos la derivada temporal de α al introducirla en el potencial, que sabemos que no afectará al resultado de la ecuación. Por otra parte, dado un potencial vectorial \vec{A} , podemos aplicarle la transformación gauge (§2.2)

$$\vec{A} = \vec{A}' - \frac{\hbar}{e} \vec{\nabla} \alpha \quad (3.1.66)$$

Por lo que si identificamos $-i\psi' \nabla \alpha$ con $-ie/\hbar (\vec{A}' - \vec{A}) \psi'$ tenemos

$$\left(-i\hbar \vec{\nabla} - \vec{A} \right) \psi = \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \vec{A}' \right) \psi' e^{-i\alpha}, \quad (3.1.67)$$

¹⁶El siguiente procedimiento es denso y complejo. Recomendamos ver [13, §11.2]

¹⁷No confundir e como unidad de carga con el número de Euler e .

y aplicando la expresión dos veces vemos que $(\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2\psi$ tiene la misma propiedad. Por tanto, si modificamos la ecuación (3.1.64) como

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} = \left((-i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A})^2 + e\phi(x) \right) \psi', \quad (3.1.68)$$

vemos que la ecuación de Schrödinger (3.1.63) queda con la misma forma, es decir, es invariante ante transformaciones gauge locales.

Por tanto, de aquí en adelante, tomaremos como un principio válido que, al modificar el operador momento \hat{P} por un nuevo operador \hat{P}' como en (3.1.68), esto deja invariante la ecuación de Dirac o de K-G. Por lo tanto, podemos introducir el campo electromagnético en la ecuación de Dirac como

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[\vec{\alpha} \cdot \left(\hat{\vec{p}} - e\vec{A} \right) + eA^0 + \beta M \right] \Psi, \quad (3.1.69)$$

donde $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ es el cuadvivector potencial. Al operador $\left(\hat{\vec{p}} - e\vec{A} \right)$ lo llamaremos $\hat{\Pi}$ momento generalizado. Si introducimos los espinores de Dirac

$$\Psi = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}^u \\ \tilde{\varphi}^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^u \\ \varphi^d \end{pmatrix} e^{-iMt},$$

donde hemos escrito la dependencia temporal con la energía en reposo (la masa de la partícula) de manera análoga a como lo hicimos en (3.1.49) con la dependencia espacial y el momento. Con esto la ecuación (3.1.69) nos queda como

$$i\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi^u \\ \varphi^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{\Pi} \varphi^u \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{\Pi} \varphi^d \end{pmatrix} + eA^0 \begin{pmatrix} \varphi^u \\ \varphi^d \end{pmatrix} - 2M \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^d \end{pmatrix}. \quad (3.1.70)$$

El límite no relativista lo obtenemos al imponer que la energía en reposo sea grande comparada con el término de la energía total $\|i\frac{\partial}{\partial t}\varphi^d\|_\infty \ll \|M\varphi^d\|_\infty$, pero también que la acción del potencial sea pequeña comparada con la energía en reposo, pues podría excitar demasiado el sistema, ocasionando efectos no deseados, como la creación de pares partícula-antipartícula. Por tanto, $\|eA^0\varphi^d\|_\infty \ll \|M\varphi^d\|_\infty$. Entonces, operando con¹⁸ (3.1.70), en el límite tenemos que

$$\varphi^d \approx \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{\Pi}}{2M} \varphi^u, \quad (3.1.71)$$

con lo que vemos que las componentes down serán pequeñas en comparación con las componentes up. Una interpretación de esto es que la antipartícula interaccionará poco en el sistema.

¹⁸Es un cálculo directo pero tedioso. Basta con despejar φ^d de la ecuación inferior de (3.1.70) usando las desigualdades antes mencionadas.

Introduciendo (3.1.71) en (3.1.70) y desarrollando el término $(\vec{\sigma} \cdot \hat{\Pi})(\vec{\sigma} \cdot \hat{\Pi}) = (\hat{p} - e\vec{A})^2 - e\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$, obtenemos la ecuación de Dirac con interacción electromagnética en el límite no relativista

$$i\frac{\partial\varphi^u}{\partial t} = \left[\frac{1}{2M} (\hat{p} - e\vec{A})^2 - \frac{e}{2M} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + eA^0 \right] \varphi^u. \quad (3.1.72)$$

Esta ecuación es la llamada **ecuación de Pauli**. Fue introducida por W. Pauli de manera fenomenológica en el desarrollo de la mecánica cuántica de Schrödinger, para explicar sucesos como la interacción del espín con un campo magnético aplicado en el experimento de Stern-Gerlach. Este fue, sin duda alguna, uno de los primeros logros de la ecuación de Dirac: Ser capaz de explicar la interacción causada por el espín, así como el momento giromagnético del electrón (el 2 en el denominador del término $\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$), inicialmente introducido de manera forzada por Pauli. Desarrollando en órdenes superiores, se puede demostrar¹⁹ que aparecen otros términos, como el acoplamiento espín-órbita, correcciones relativistas de la energía, correcciones de localización (un electrón no puede estar en el interior del núcleo atómico) entre otros, la llamada estructura fina del hidrógeno²⁰.

La mecánica cuántica relativista desarrollada mediante las ecuaciones de K-G y Dirac fue un gran logro en los años 30, capaz de explicar numerosos fenómenos de manera natural, los cuales la formulación de la ecuación de Schrödinger no había sido capaz de hacer. Pero como ya sabemos, la materia no permanece inalterable en un sistema: puede desintegrarse un neutrón en un protón y un electrón, puede crearse en el vacío un par electrón-positrón etc. La herramienta que nos permitirá explicar la creación y aniquilación de materia será la teoría cuántica de campos (TCC).

3.2. Campos cuánticos

Ahora comentaremos en profundidad y con rigor matemático las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac en el contexto de “campos”. El campo será una función que a cada punto del espacio le asigne un **operador**. Esta es la diferencia entre campos clásicos y cuánticos, pues en los campos clásicos cada punto tiene asignado un vector o un escalar, mientras que con los campos cuánticos tendrá asignado un operador. Para ello, primero introduciremos el formalismo necesario para tratar sistemas de varias partículas. Después, introduciremos la segunda cuantización con la ayuda del oscilador armónico cuántico, con la cual pasaremos a un contexto de **operadores**. Esta forma de trabajar fue planteada por Dirac alrededor de 1927, pero fueron V. Fock y P. Jordan (principalmente) quienes la desarrollaron con profundidad. Finalmente, pasaremos a resolver las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac en el caso libre para lo que necesitaremos nociones de la teoría de distribuciones y de Fourier.

¹⁹El desarrollo es simple pero bastante largo. Se puede encontrar en [17, §4.4]

²⁰Más información sobre la estructura fina y la física atómica se puede encontrar en [17, §8].

3.2.1. Sistemas de varias partículas

Una consecuencia de los postulados de la mecánica cuántica es que, cuando trabajamos con varios sistemas (como puedan ser dos partículas), el espacio de Hilbert en el que se trabaja es el espacio producto de ambos. Sea H_1 el espacio de Hilbert asociado a la partícula 1 y H_2 a la partícula 2, el espacio donde trabajaremos será $H = H_1 \otimes H_2$, con un producto escalar $\langle \psi_1 \otimes \psi_2 | \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \phi_1 \rangle \langle \psi_2 | \phi_2 \rangle$.

A continuación pasaremos a trabajar en **espacios de Hilbert proyectivos**, y denotaremos por \mathcal{H} al espacio proyectivo de H . Para ello tomaremos el espacio H y la relación (de equivalencia) $x \sim y$ si y solo si $x = \lambda y$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ un escalar del espacio, y con ella tomamos el espacio cociente $\mathcal{H} := H / \sim$. Esto no es ni más ni menos que traducir la invarianza gauge local vista en la sección anterior en un espacio de Hilbert abstracto.

Observación 3.2.1. *Esta formulación de espacios productos es muy útil en mecánica cuántica no relativista, pues permite introducir a la ecuación de Schrödinger el espín, trabajando en un espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \varepsilon$ donde ε es el espacio de los espinores y matrices de Pauli.*

En la física cuántica nosotros no podemos distinguir entre dos electrones en un mismo estado, ya que están totalmente determinados por el estado (números cuánticos), es decir, no los podemos “etiquetar”. Como consecuencia, si tenemos un sistema de N electrones, el estado se escribirá $|\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_N\rangle$, pero si cambiamos un electrón por otro, el estado no puede cambiar salvo una constante (para ser el mismo estado en \mathcal{H}), pero si volvemos a cambiar los mismos dos electrones deberemos recuperar el estado inicial, por lo que esa constante será ± 1 . Esto nos da pie a definir dos subespacios correspondientes a dos tipos de partículas:

$$\begin{aligned} S^N &= \{ |\Psi\rangle \in \mathcal{H}; \sigma |\Psi\rangle = |\Psi\rangle \}, \\ \Lambda^N &= \{ |\Psi\rangle \in \mathcal{H}; \sigma |\Psi\rangle = \text{sgn}(\sigma) |\Psi\rangle \}, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

siendo S^N el conjunto de N partículas cuyo estado no cambia al realizar una permutación σ de ellas, llamadas bosones, y Λ^N el conjunto de N partículas cuyo estado cambia de signo si la permutación σ es impar o lo mantiene si es par, llamadas fermiones.²¹

Definiremos el proyector P_S (P_Λ) de \mathcal{H} sobre S^N (Λ^N), siendo un proyector una aplicación de un espacio de Hilbert a otro, autoadjunto y idempotente ($P_S^2 = P_S$):

$$\begin{aligned} P_S |\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_N\rangle &= \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S_N} |\psi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \psi_{\sigma(N)}\rangle, \\ P_\Lambda |\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_N\rangle &= \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) |\psi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \psi_{\sigma(N)}\rangle. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

²¹Los fermiones y los bosones se caracterizan por su espín, si es semientero o entero respectivamente. Un teorema (Teorema espín-estadística) relaciona los espines de las partículas con su comportamiento respecto a las permutaciones, pero es de gran complejidad y hace uso de mecánica estadística, por lo que se aleja de los objetivos de este trabajo. Ver [6, p. 121].

Segunda Cuantización

Si tenemos un conjunto de N partículas y k estados accesibles, podemos construir el vector de estados como

$$|n_1, \dots, n_k\rangle, \quad \sum_{j=1}^k n_j = N, \quad (3.2.3)$$

donde el elemento j -ésimo del vector representa el estado j -ésimo accesible²², y n_j representa cuántas partículas están en ese estado. Si tenemos un número infinito de estados podemos escribir el vector $|n_1, n_2, \dots\rangle$ pues tenemos un número arbitrario pero finito de partículas. Con los vectores (3.2.3) podemos escribir el producto escalar

$$\langle n'_1, n'_2, \dots | n_1, n_2, \dots \rangle = \prod_{j=1}^{\infty} \delta_{n_j, n'_j}, \quad (3.2.4)$$

y definimos al estado vacío (sin partículas) $|0\rangle = 1 \in \mathbb{C}$. Finalmente, se definen los operadores destrucción (a_n) y creación (a_n^\dagger) para el estado n -ésimo como

$$\begin{aligned} a_n |n_1, n_2, \dots\rangle &= C_n^- |n_1, n_2, \dots, n_n + 1, \dots\rangle, \\ a_n^\dagger |n_1, n_2, \dots\rangle &= C_n^+ |n_1, n_2, \dots, n_n - 1, \dots\rangle, \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

definiendo²³ $a_1 |0, n_2, \dots\rangle = 0$. Las constantes C_n vendrán dadas por las relaciones de conmutación de los operadores, que dependerán a su vez del sistema que estemos describiendo. Ahora podemos definir el **Espacio de Fock**.

Sean \mathcal{H}_n^\pm el espacio de Hilbert asociado a n partículas idénticas (+ para bosones y - para fermiones), el espacio de Fock se define como

$$\mathcal{F}^\pm(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^\pm, \quad (3.2.6)$$

donde $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$. $\mathcal{F}^\pm(\mathcal{H})$ tendrá una base formada por

$$\{|n_1, n_2, \dots\rangle : n_j \geq 0, \sum n_j < \infty\}, \quad (3.2.7)$$

siendo $|n_1, n_2, \dots\rangle$ el estado definido como

$$|n_1, n_2, \dots\rangle := \sqrt{\frac{k!}{n_1! n_2! \dots}} P_S((\otimes^{n_1} e_1) \otimes (\otimes^{n_2} e_2) \otimes \dots), \quad \sum_{j=1}^{\infty} n_j = k, \quad (3.2.8)$$

para bosones y

$$|n_1, n_2, \dots\rangle := \sqrt{\frac{k!}{n_1! n_2! \dots}} P_\Lambda((\otimes^{n_1} e_1) \otimes (\otimes^{n_2} e_2) \otimes \dots), \quad \sum_{j=1}^{\infty} n_j = k, \quad (3.2.9)$$

²²Recordemos que los estados son autoestados del Hamiltoniano del sistema, y bajo ciertas hipótesis existirá un conjunto numerable y ordenable de estados. Esto es una suposición muy usada en física cuántica.

²³Lo hemos escrito para la primera componente, pero sirve para todas. Si el operador destrucción actúa sobre un estado sin partículas obtendremos siempre 0.

para fermiones, con P_S y P_A definidos en (3.2.2). Los e_j serán elementos de la base del espacio \mathcal{H}_k (o lo que es lo mismo, los autoestados del Hamiltoniano del sistema) y $\otimes^{n_j} e_j$ no es nada más que tener n_j elementos dentro del ket $|\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_k\rangle$ que sean el propio e_j , autoestado j -ésimo del Hamiltoniano.²⁴ El factor $\sqrt{\frac{k!}{n_1!n_2!\dots}}$ se introduce por normalización. Por clarificar veamos el caso de dos partículas idénticas.

Sea $|n_1, n_2, \dots\rangle$ nuestro estado con $k = 2$, y supongamos que están los estados 1 y 2 ocupados, lo escribiremos como

$$|1, 1, 0, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|e_1 \otimes e_2\rangle \pm |e_2 \otimes e_1\rangle], \quad (3.2.10)$$

para el caso bosónico por ejemplo podríamos tener el estado $|2, 0, \dots\rangle = |e_1 \otimes e_1\rangle$, mientras que para los fermiones obtendríamos $|2, 0, \dots\rangle = 0$, el cual es principio de exclusión de Pauli: 2 fermiones no pueden estar en el mismo estado.

3.2.2. El oscilador cuántico

Ahora tenemos todas las herramientas para tratar el oscilador armónico cuántico, con el que Dirac introdujo la segunda cuantización y que nos será de gran utilidad para describir el campo escalar (solución de la ecuación de Klein-Gordon).

Supongamos que tenemos un sistema con K osciladores armónicos independientes²⁵, entonces el espacio de Hilbert en el que trabajaremos será²⁶ $L^2(\mathbb{R}^K)$ y tendremos un hamiltoniano de la forma

$$H = \sum_{j=1}^K \frac{\omega_j}{2} \left(-\frac{1}{\omega_j} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \omega_j x_j^2 \right), \quad (3.2.11)$$

donde ω_j son números positivos, y haciendo el cambio $\sqrt{\omega_j} x_j = y_j$ podemos reescribirlo como

$$\sum_{j=1}^K \frac{\omega_j}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial y_j^2} + y_j^2 \right), \quad (3.2.12)$$

el cual es una suma de K osciladores armónicos monodimensionales cuánticos desacoplados. Tenemos los operadores X_j y P_j (posición y momento) definidos como

$$X_j = x_j, \quad P_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (3.2.13)$$

y sus asociados Y_j y Q_j (posición y momento generalizado)

$$Y_j = \omega_j x_j, \quad Q_j = -i \frac{\partial}{\partial y_j}. \quad (3.2.14)$$

²⁴Por ejemplo, si $n_1 = 2, n_2 = 1$ y $k = 3$, tendríamos el ket $|e_1 \otimes e_1 \otimes e_2\rangle$

²⁵Esta descripción es de gran utilidad, pues en muchos casos, un sistema de varios osciladores armónicos tridimensionales se pueden desacoplar en los llamados modos normales y trabajar con ellos de manera independiente. Véase [8, Capítulo 6]

²⁶No tenemos problemas en los infinitos pues, como veremos, las soluciones son de cuadrado integrable.

Con estos últimos operadores definimos

$$A_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_j + iQ_j), \quad A_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_j - iQ_j), \quad (3.2.15)$$

relacionados con X_j y P_j como

$$X_j = \frac{1}{\sqrt{2\omega_j}} (A_j + A_j^\dagger), \quad P_j = -i\sqrt{\frac{\omega_j}{2}} (A_j - A_j^\dagger). \quad (3.2.16)$$

Estos operadores satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [X_j, P_k] &= i\delta_{jk}\mathbb{I}, & [A_j, A_k^\dagger] &= \delta_{jk}\mathbb{I}, \\ [X_j, X_k] &= [P_j, P_k] = [A_j, A_k] = [A_j^\dagger, A_k^\dagger] &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Con los nuevos operadores A_j y A_j^\dagger podemos reescribir el Hamiltoniano como

$$H = \sum_{j=1}^K \omega_j \left(A_j^\dagger A_j + \frac{1}{2} \right), \quad (3.2.18)$$

cuyas autofunciones vienen dadas por el producto de osciladores armónicos monodimensionales²⁷ de la forma

$$\phi_{n_1 n_2 \dots n_K}(x) = \frac{(A_1^\dagger)^{n_1} \dots (A_K^\dagger)^{n_K}}{\sqrt{n_1! \dots n_K!}} \phi_{0 \dots 0}, \quad (3.2.19)$$

donde $\phi_{0 \dots 0} = \pi^{-1/4} \exp(-1/2 \sum \omega_j^2 x_j^2)$ es el estado fundamental. Se puede comprobar que

$$\begin{aligned} A_j \phi_{n_1 n_2 \dots n_K} &= \sqrt{n_j} \phi_{n_1 n_2 \dots n_j - 1 \dots n_K}, & A_j^\dagger \phi_{n_1 n_2 \dots n_K} &= \sqrt{n_j + 1} \phi_{n_1 n_2 \dots n_j + 1 \dots n_K}, \\ H \phi_{n_1 n_2 \dots n_K} &= \left(n_1 + \dots + n_K + \frac{1}{2} K \right) \phi_{n_1 n_2 \dots n_K}. \end{aligned}$$

Comparando lo anterior con (3.2.5), podemos construir una aplicación entre²⁸ $L^2(\mathbb{R}^K)$ y \mathcal{H}_K^+ :

$$\phi_{n_1 n_2 \dots n_K} \rightarrow |n_1, \dots, n_K\rangle, \quad (3.2.20)$$

y por consiguiente, tomando $K = \infty$ (tomando una colección infinita de osciladores armónicos) podemos construir una aplicación de $L^2(\mathbb{R}^K)$ en $\mathcal{F}^+(\mathcal{H})$.

Un problema que hemos obviado hasta ahora es la convergencia de (3.2.18) cuando K tiende a infinito, pues al tener el término $\sum \omega_j/2$ puede diverger²⁹. Una solución a

²⁷La resolución del oscilador cuántico monodimensional no entra dentro de los objetivos de este trabajo. Un estudio de este se puede encontrar en [3, §4.2.2].

²⁸El porqué de usar el espacio para bosones y no para fermiones viene dado por las relaciones de conmutación de los operadores creación y destrucción. Lo veremos un poco más adelante.

²⁹Las divergencias son un problema bastante usual dentro de la teoría cuántica de campos, algunas veces pudiendo corregirla fácilmente como es el caso aquí o necesitando una gran cantidad de trabajo para hacerlo. Aún así, aunque existan divergencias u otros problemas, como la teoría explica los experimentos se dan por cierto y luego más tarde se tratan de corregir.

esto es tener en cuenta que un Hamiltoniano no cambia si le añadimos o sustraemos una constante³⁰, por lo que podemos extraer todos los términos $\omega_j/2$ sin cambiar la solución del Hamiltoniano.

En otras palabras, consideraremos el nuevo Hamiltoniano

$$H = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j A_j^\dagger A_j, \quad (3.2.21)$$

con sus autoestados $|n_1, n_2, \dots\rangle$ y autovalores $\sum_{j=1}^{\infty} \omega_j n_j$ que convergen porque solo hay un número finito de n_j no nulos. Estas herramientas y soluciones las usaremos a continuación para resolver la ecuación de Klein-Gordon.

3.2.3. Campo escalar, solución de la ecuación libre de Klein-Gordon

Primeramente resolveremos la ecuación de Klein-Gordon de una manera formal e iremos “arreglando” los problemas que surjan. Resolveremos la ecuación de la forma

$$(\square + m^2)\phi(t, \vec{x}) = 0,$$

con $m > 0$ para un campo **neutro**, que vendrá asociado a una solución $\phi(t, \vec{x})$ real, mientras que la carga aparecerá cuando nuestra solución esté definida sobre los complejos. El espacio de Hilbert donde trabajaremos será $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R} \otimes \mathcal{B})$ con $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ una región finita del espacio. En este espacio, el operador $-\nabla^2$ es autoadjunto y acotado, por lo que tendrá un conjunto de autovalores numerable y ordenados $\{\lambda_j\}$ con unos autovectores f_j . Si introducimos unas condiciones de contorno reales en \mathcal{B} , podemos tomar los autovectores f_j reales, que forman una base³¹ ortonormal y real del espacio \mathcal{H} . Con estas autofunciones podemos desarrollar $\phi(t, \vec{x})$ como

$$\phi(t, \vec{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t) f_j(\vec{x}), \quad (3.2.22)$$

con los coeficientes $q_j(t)$ escogidos reales. Bajo estas condiciones, ϕ satisfará la ecuación de Klein-Gordon si y solo si

$$q_j''(t) + \omega_j^2 q_j(t) = 0, \quad \omega_j^2 = \lambda_j^2 + m^2, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (3.2.23)$$

que un conjunto numerable de ecuaciones para osciladores armónicos monodimensionales. Hasta ahora no hemos “cuantizado” nada, esta ecuación y este desarrollo es totalmente válido en el sentido clásico. Para hablar de una solución cuántica (o lo que es lo mismo, un campo cuántico), escribiremos las ecuaciones de los osciladores (3.2.23) como osciladores cuánticos. Para ello basta sustituir la posición X_j y momento P_j , dados por (3.2.16), en

³⁰Esto es un resultado conocido de la mecánica Hamiltoniana.

³¹Como consecuencia del teorema espectral para operadores autoadjuntos, acotados y compactos de un espacio de Hilbert separable.

la ecuación (3.2.23) (pues q_j es lo que actúa como la posición), con lo que obtenemos el campo cuántico

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\omega_j}} f_j(\vec{x}) (A_j + A_j^\dagger). \quad (3.2.24)$$

Por ahora no nos preocuparemos de la convergencia de la serie. Hemos asumido que las condiciones de contorno son tales que los f_j son reales, pero lo podemos extender a autofunciones g_j complejas, pero debemos tener cuidado, no podemos simplemente sustituir f_j por g_j , pues los operadores deben de ser hermíticos (recordemos que cuando trabajamos con campos cuánticos como ϕ en (3.2.24), estos son operadores de cierto espacio de Hilbert \mathcal{H} que actúan sobre sus elementos (que solemos denotar $|n\rangle$ en este contexto), por lo que según los postulados de la mecánica cuántica estos deberán ser hermíticos. Véase 1.2.). Para ello haremos la siguiente construcción.

Sea $U = (u_{jk})$ una matriz unitaria tal que $g_j = \sum_k u_{jk} f_k$, con $u_{jk} = 0$ a menos que el autovalor correspondiente a g_j sea el mismo que el correspondiente a f_j . Con esto y usando que $U^\dagger = U^{-1}$ obtenemos

$$\sum_j u_{jk}^* g_j = f_k = f_k^* = \sum_j u_{jk} g_j^*,$$

que si lo sustituimos en (3.2.24) nos da

$$\phi = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\omega_j}} f_j (A_j + A_j^\dagger) = \sum_{j,k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (g_k u_{jk}^* A_j + g_k^* u_{jk} A_j^*),$$

y reescribiendo los operadores como

$$A'_k = \sum_{j=1}^{\infty} u_{jk} A_j,$$

obtenemos la expresión

$$\phi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (g_k A'_k + g_k^* A_k'^\dagger). \quad (3.2.25)$$

Con esto vemos que no importa que base $\{f_j\}$ usemos, siempre tendremos el campo escrito de la misma manera

$$\phi(\vec{x}) = \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\omega_j}} (f_j(\vec{x}) A_j + f_j^*(\vec{x}) A_j^\dagger),$$

es decir, un cambio de base no afecta a la forma del campo, que siempre es la misma. Por otra parte, parece que la dependencia temporal del campo ha desaparecido, pero podemos recuperarla si pasamos de la *representación de Schrödinger* a la *representación de Heisenberg*³²

$$A_j(t) = e^{itH} A_j e^{-itH}, \quad A_j^\dagger(t) = e^{itH} A_j^\dagger e^{-itH}. \quad (3.2.26)$$

³²En mecánica cuántica no relativista, decimos que trabajamos en la representación de Schrödinger si la dependencia temporal la posee explícitamente las funciones de onda, mientras que en la representación de Heisenberg la dependencia temporal la poseen los operadores. Más información se puede encontrar en [16, §7.3].

Durante la prueba del teorema 2.1.2 vimos que la siguiente proposición es cierta:

Proposición 3.2.2. Sean X e Y dos matrices de $GL(n; \mathbb{C})$, entonces

$$\left. \frac{d}{dt} (e^{tX} Y e^{-tX}) \right|_{t=0} = [X, Y]. \quad (3.2.27)$$

Haciendo uso de esta proposición y de las relaciones de conmutación (3.2.17) se puede deducir que

$$[A_j, H] = \omega_j A_j, \quad [A_j^\dagger, H] = -\omega_j A_j^\dagger,$$

y por lo tanto,

$$\frac{d(A_j(t))}{dt} = [iH, A_j] = -i\omega_j A_j, \quad \frac{d(A_j^\dagger(t))}{dt} = [iH, A_j^\dagger] = i\omega_j A_j^\dagger.$$

Estas ecuaciones diferenciales se pueden resolver formalmente como

$$A_j(t) = e^{-i\omega_j t} A_j, \quad A_j^\dagger(t) = e^{i\omega_j t} A_j^\dagger,$$

con la que el campo se puede escribir finalmente como

$$\phi(t, \vec{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\omega_j}} \left(f_j(\vec{x}) e^{-i\omega_j t} A_j + f_j(\vec{x})^* e^{i\omega_j t} A_j^\dagger \right). \quad (3.2.28)$$

A continuación especificaremos la región \mathcal{B} en la que trabajamos, aunque seguiremos sin preocuparnos por las condiciones de contorno, pues extenderemos nuestra solución a todo \mathbb{R}^3 . Para ello tomaremos $\mathcal{B} = [-L/2, L/2]^3$ para cierto $L > 0$. Es conocido que dentro de esta región las autofunciones de³³ $-\nabla^2$ tienen la forma

$$f_j = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i\vec{p}_j \cdot \vec{x}}, \quad (3.2.29)$$

con autovalores $\vec{p}_j = \frac{2\pi}{L} \vec{z}_j$, con $\vec{z}_j = (z_1, z_2, z_3)$ números enteros. Con esto, y escribiendo $\omega_p = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$ podemos escribir el campo (sumando para todos los posibles valores de \vec{p}) como

$$\phi(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p L^3}} \left(e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - \omega_p t)} A_p + e^{i(-\vec{p} \cdot \vec{x} + \omega_p t)} A_p^\dagger \right). \quad (3.2.30)$$

Como mencionamos antes, en la teoría cuántica de campos aparecen infinitos, y esto sucede con este campo. Si hacemos actuar a nuestro campo (3.2.30) sobre el estado vacío $|0\rangle$ tenemos

$$\phi(t, \vec{x}) |0\rangle = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p L^3}} e^{i(-\vec{p} \cdot \vec{x} + \omega_p t)} |0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots\rangle \quad 1 \text{ en el hueco } p\text{-ésimo}. \quad (3.2.31)$$

La norma del vector (3.2.31) es

$$|\phi(t, \vec{x}) |0\rangle|^2 = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{2\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} L^3},$$

que es una serie no convergente. Este problema lo podemos resolver si en vez de tratar al campo como una función lo interpretamos como una **distribución**. Comenzaremos haciendo una introducción a la teoría de distribuciones.

³³Un desarrollo se puede encontrar en [3, §4.4].

Teoría de distribuciones y el campo escalar

Se define el espacio de **funciones de clase k de soporte compacto** $C_c^k(\Omega)$ como aquellas funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ medibles con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto tales que existe cierto K compacto tal que $f \equiv 0$ e.c.t. $\Omega \setminus K$. Se le llama soporte de f al compacto más pequeño que verifica esto denotado por $\text{sop}(f)$:

$$\text{sop}(f) = \cap \{K : K \subset \Omega \text{ compacto, } f = 0 \text{ e.c.t. } \Omega \setminus K\}. \quad (3.2.32)$$

Observación 3.2.3. Si $f \in L^p(\Omega)$ y es de soporte compacto, entonces $f \in L^q(\Omega)$ para todo $q \leq p$.

Se puede demostrar (la demostración no es compleja pero requiere de diversos resultados sobre convoluciones y sucesiones regularizantes. Todo esto se puede encontrar en [7, §21.3]) el siguiente teorema, de enorme importancia en el análisis funcional

Teorema 3.2.4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado y $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, entonces existe una sucesión $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$ que converge a u en $L^p(\Omega)$, o lo que es lo mismo, $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ con la norma de $L^p(\Omega)$.

Gracias a este teorema, en una región acotada del espacio, cualquier función de L^2 o L^1 la podemos aproximar por una sucesión de funciones de clase infinito y de soporte compacto. Esto aclara en gran medida todos los procedimientos formales que hemos estado realizando: aunque la función sea L^2 , podemos aproximarla por una función infinitamente derivable y operar con ella como si lo fuese, con lo que podemos resolver las ecuaciones de evolución (como la de Dirac o la de Schrödinger) aunque no sepamos a priori si nuestra función no sea en un principio derivable.

Definimos $\mathcal{D}(\Omega)$ para cierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ como el espacio de las funciones C_c^∞ con la siguiente convergencia:

Sea una sucesión $\varphi_n \in \mathcal{D}$ se dice que converge en \mathcal{D} hacia una función $\varphi \in \mathcal{D}$ si existe $K \subset \Omega$ compacto tal que $\text{sop}(\varphi_n)$ esté contenido en K para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $\alpha \in \{0, 1, \dots\}^N$ se tiene

$$\partial_\alpha^{|\alpha|} \varphi_n \rightarrow \partial_\alpha^{|\alpha|} \varphi \text{ uniformemente en } \Omega.$$

Como la convergencia uniforme implica convergencia puntual, tenemos que φ también tiene soporte en K . Ahora definiremos el espacio de las distribuciones.

Sea Ω abierto, una distribución³⁴ en Ω es una aplicación $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que si φ_n converge a φ en \mathcal{D} , entonces $T(\varphi_n)$ converge a $T(\varphi)$. El espacio de estas aplicaciones se denota por \mathcal{D}' y lo llamamos **espacio de distribuciones**. También denotaremos³⁵ $T(\varphi) := \langle T, \varphi \rangle$. Diremos que T_n converge a cierta T en el espacio de distribuciones si $\langle T_n, \varphi \rangle$ converge a $\langle T, \varphi \rangle$ para cualquier $\varphi \in \mathcal{D}$ en \mathbb{R} .

³⁴Dependiendo del espacio sobre el que esté definida la distribución, esta recibe distintos nombres (temperadas, ordinarias, evaluadas sobre operadores...) pero en este caso se denominan ordinarias.

³⁵Hay que diferenciar entre la "aplicación" de una distribución, denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y el producto escalar, que denotamos $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Observación 3.2.5. *Se puede dotar a \mathcal{D} de cierta topología tal que la convergencia en \mathcal{D} descrita anteriormente sea la misma que la de la topología y que el espacio de distribuciones coincide con el espacio de las funciones continuas y lineales de \mathcal{D} en \mathbb{R} , pero nos es imposible encontrar una norma adecuada que de la convergencia antes descrita. Una discusión de esto se puede encontrar en [7, §27.3]*

Con estas herramientas, podremos identificar (3.2.30) como una distribución. Para ello escribiremos³⁶ $\langle \phi, \chi_1(t)\chi_2(\vec{x}) \rangle$ la actuación de ϕ , siendo χ_1 una función C_c^∞ en \mathbb{R} y χ_2 una función de C_c^∞ periódica en el espacio de los momentos \vec{p} en \mathbb{R}^3 . De esta manera escribimos $\langle \phi, \chi_1(t)\chi_2(\vec{x}) \rangle$ como:³⁷

$$\int_B \int_{\mathbb{R}} \phi(t, \vec{x}) \chi_1(t) \chi_2(\vec{x}) dt d\vec{x} = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p L^3}} [\hat{\chi}_1(\omega_p) \hat{\chi}_2(-\vec{p}) A_p + \hat{\chi}_1(-\omega_p) \chi_2(\vec{p}) A_p^\dagger], \quad (3.2.33)$$

donde $\hat{\chi}$ denota la transformada de Fourier de χ . Recordemos que la **transformada de Fourier** de una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ se define como

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt \quad (3.2.34)$$

con una extensión a \mathbb{R}^3 como

$$\hat{f}(\vec{\lambda}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{x}) e^{-i\vec{\lambda} \cdot \vec{x}} d\vec{x}. \quad (3.2.35)$$

La transformada de Fourier se puede extender al **espacio de Schwartz** \mathcal{S} como una isometría (teorema de Plancherel 3.2.7), con \mathcal{S} definido como el espacio de las funciones $f \in C^\infty$ tales que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty,$$

para todo k y $l \geq 0$. Claramente, las funciones C_c^∞ pertenecen al espacio de Schwartz. Dos teoremas de gran importancia en el análisis de Fourier que nos asegura la convergencia de (3.2.33) son los siguientes (sus demostraciones se pueden encontrar en [7, Teorema 19.2.3], [7, Teorema 22.1.1] y [7, Teorema 22.1.2]):

Teorema 3.2.6. *La transformada de Fourier de cualquier función de \mathcal{S} pertenece a \mathcal{S} .*

Teorema 3.2.7 (Plancherel). *Si $f \in \mathcal{S}$, entonces $\|f\| = \|\hat{f}\|$.*

Con esto, aseguramos que la suma (3.2.33) converge, con lo que podemos asegurar la convergencia de ϕ al aplicarlo sobre un estado. Aunque matemáticamente sea una distribución, nosotros seguiremos tratando a ϕ como una “función”, en primer lugar por simpleza (es mucho más difícil trabajar con la notación de distribuciones) y en segundo lugar porque en física se abusa de esta notación (al igual que con la delta de Dirac $\delta(x)$). El objetivo de este trabajo es ver que existe unos fundamentos matemáticos que nos permiten trabajar formalmente en física, y eso es lo que hemos hecho con las distribuciones.

³⁶Aquí estamos dando por hecho que a los estados de las partículas les es aplicable la separación de variables y hemos escrito $\chi(x, t) = \chi_1(t)\chi_2(\vec{x})$.

³⁷El cálculo es directo a partir de la definición de transformada de Fourier (3.2.34).

Para acabar la construcción de la solución del campo escalar pasaremos de una suma en el espacio de momentos a una integral, con lo que dejaremos de trabajar en una región \mathcal{B} y pasaremos a \mathbb{R}^3 . Para ello entenderemos la suma (3.2.30) como una suma de Riemann y pasaremos al límite cuando $L \rightarrow \infty$. De (3.2.29) obtenemos que el elemento de volumen es $\Delta V = (2\pi/L)^3$, con lo que reescribimos (3.2.30) como

$$\phi(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} L^{3/2} (e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-\omega_p t)} A_p + e^{i(-\vec{p}\cdot\vec{x}+\omega_p t)} A_p^\dagger) \frac{\Delta V}{(2\pi)^3}. \quad (3.2.36)$$

Cuando $L \rightarrow \infty$, la suma anterior se convierte en una integral en \mathbb{R}^3 y los operadores $L^{3/2} A_p$ y $L^{3/2} A_p^\dagger$ en distribuciones evaluadas en operadores³⁸ en \mathbb{R}^3 denotadas como a y a^\dagger respectivamente, o lo que es lo mismo, son aplicaciones continuas y lineales definidas de C_c^∞ sobre el dual de \mathcal{H} . Si tomamos nuestro espacio de Hilbert como $L^2(\mathbb{R}^3, d^3\vec{p}/(2\pi)^3)$, (recordemos que el segundo elemento del paréntesis hace referencia a la medida que estamos usando), entonces $a(p)$ y $a^\dagger(p)$ actúan sobre $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ como

$$\langle a(p), \chi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\chi(\vec{p})} a(p) \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}, \quad \langle a^\dagger(p), \chi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \chi(p) a^\dagger(p) \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3},$$

por lo que sus relaciones de conmutación serán³⁹, escribiendo las distribuciones como funciones

$$[a(p), a^\dagger(p')] = (2\pi)^3 \delta(p - p') \mathbb{I}, \quad [a(p), a(p')] = [a^\dagger(p), a^\dagger(p')] = 0. \quad (3.2.37)$$

Con todo esto y escribiendo las distribuciones abusando de notación como si fuesen funciones (como se suele hacer en física con la delta de Dirac $\delta(x)$) obtenemos finalmente el campo escalar neutro

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (e^{-i\mathbf{p}\cdot x^\mu} a(\vec{p}) + e^{i\mathbf{p}\cdot x^\mu} a^\dagger(\vec{p})) \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}, \quad (3.2.38)$$

donde $x = (t, \vec{x})$ y $\mathbf{p} = (\omega_p, \vec{p})$. Este campo se puede reescribir de muchas maneras, dependiendo de la definición de los operadores a y a^\dagger .

A pesar de la dificultad matemática que implican las distribuciones evaluadas en operadores, su funcionamiento sigue siendo el mismo: crear o destruir partículas con un momento \vec{p} . El campo (3.2.38) actúa sobre el espacio $\mathcal{F}^+(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^4)$. ϕ actúa sobre el espacio de Fock bosónico debido a las relaciones de conmutación que satisfacen los operadores creación y aniquilación. Debido a la construcción de los estados (3.2.8) y (3.2.9), los operadores satisfacen la relación (3.2.37) para bosones y los operadores para fermiones las mismas relaciones (3.2.37) pero sustituyendo el conmutador por el anticonmutador $\{A, B\} = AB + BA$. Con esto corroboramos que los cuantos del campo escalar (las partículas que crea y destruye) son bosones.

³⁸La teoría sobre distribuciones evaluadas en operadores es tremendamente compleja por lo que descartamos tratarlas en este trabajo. Una discusión más formal de estos operadores y sus problemas se puede encontrar en [18, §36.3]. Nosotros simplemente recogeremos los resultados.

³⁹La discusión y obtención de estas relaciones de conmutación se pueden encontrar en [18, §36.3].

De la misma manera podemos construir el campo complejo de Klein-Gordon, que nos dará los campos que crean partículas y antipartículas cargadas. Para ello partiremos de la solución de (3.2.22) en el caso de autofunciones complejas. Entonces, cada una de sus componentes ϕ_1 y ϕ_2 (real y compleja respectivamente) serán solución, con unos operadores a_1, a_1^\dagger y a_2, a_2^\dagger respectivamente, satisfaciendo las relaciones de conmutación (3.2.37) y conmutando entre ellas (e.g. $[a_1, a_2] = 0$) actuando en el espacio de Fock $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1^+ \otimes \mathcal{F}_2^+$ siendo \mathcal{F}_i^+ el espacio donde actúan a_i y a_i^\dagger , $i = 1, 2$. Con esto podemos construir los campos cuánticos

$$\phi(x)_j = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(e^{-i\mathbf{p}\mu x^\mu} a_j(\vec{p}) + e^{i\mathbf{p}\mu x^\mu} a_j^\dagger(\vec{p}) \right) \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}, \quad j = 1, 2. \quad (3.2.39)$$

Con estos campos podemos construir el campo complejo

$$\phi(x) = \frac{\phi_1(x) + i\phi_2(x)}{\sqrt{2}}, \quad a(\vec{p}) = \frac{a_1(\vec{p}) + ia_2(\vec{p})}{\sqrt{2}}, \quad b(\vec{p}) = \frac{a_1(\vec{p}) - ia_2(\vec{p})}{\sqrt{2}}, \quad (3.2.40)$$

y sus adjuntos

$$\phi^\dagger(x) = \frac{\phi_1(x) - i\phi_2(x)}{\sqrt{2}}, \quad a^\dagger(\vec{p}) = \frac{a_1^\dagger(\vec{p}) - ia_2^\dagger(\vec{p})}{\sqrt{2}}, \quad b^\dagger(\vec{p}) = \frac{a_1^\dagger(\vec{p}) + ia_2^\dagger(\vec{p})}{\sqrt{2}}, \quad (3.2.41)$$

donde los factores $\sqrt{2}$ han sido introducidos para normalizar el campo y las relaciones de conmutación

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] = [b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{p}')] = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \quad \text{siendo los demás conmutadores} = 0. \quad (3.2.42)$$

Con todo esto podemos finalmente escribir el campo y su adjunto como

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(e^{-i\mathbf{p}\mu x^\mu} a(\vec{p}) + e^{i\mathbf{p}\mu x^\mu} b^\dagger(\vec{p}) \right) \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}, \quad (3.2.43)$$

$$\phi^\dagger(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(e^{-i\mathbf{p}\mu x^\mu} b(\vec{p}) + e^{i\mathbf{p}\mu x^\mu} a^\dagger(\vec{p}) \right) \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}. \quad (3.2.44)$$

Finalmente, para daremos una última abstracción que nos permitirá definir correctamente el campo escalar es la siguiente. Sea ϕ una distribución temperada⁴⁰ que satisface la ecuación de Klein-Gordon $(\square^2 + m^2)\phi = 0$, entonces su transformada de Fourier⁴¹ es $(-\mathbf{p}^2 + m^2)\hat{\phi}(\mathbf{p}) = 0$. Las soluciones no triviales (no nulas) serán aquellas en las que $\mathbf{p}^2 = m^2$, por lo que las soluciones estarán definidas en la región (recordemos que $\mathbf{p} = (\omega_p, \vec{p})$):

$$\begin{aligned} \{\mathbf{p} : \mathbf{p}^2 = m^2\} &= X_m^+ \cup X_m^-, \\ X_m^+ &= \{\mathbf{p} : \mathbf{p}^2 = m^2, \mathbf{p}^0 > 0\}, \quad X_m^- = \{\mathbf{p} : \mathbf{p}^2 = m^2, \mathbf{p}^0 < 0\}. \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

⁴⁰Una distribución temperada son aquellas que en vez de usar funciones C_c^∞ como espacio \mathcal{D} usamos el espacio de Schwartz.

⁴¹Se define la transformada de Fourier de una distribución temperada Ψ como $\widehat{\langle \Psi, f \rangle} = \langle \Psi, \hat{f} \rangle$.

Buscaremos ahora las soluciones de la forma $u\lambda$, donde u es una función de $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ y λ es una medida invariante Lorentz definida sobre $X_m^+ \cup X_m^-$, considerada como una distribución en \mathbb{R}^4 . Entonces, por la transformada inversa de Fourier⁴²

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int_{X_m^+ \cup X_m^-} e^{-i\mathbf{p}^\mu x_\mu} u(\mathbf{p}) d\lambda(\mathbf{p}) = \\ &= \int_{X_m^+} e^{-i\mathbf{p}^\mu x_\mu} u(\mathbf{p}) + e^{i\mathbf{p}^\mu x_\mu} u(-\mathbf{p}) d\lambda(\mathbf{p}).\end{aligned}\tag{3.2.46}$$

Si ϕ es real-valuada, $\hat{\phi}(-\mathbf{p}) = \hat{\phi}(\mathbf{p})^*$, luego está totalmente definida en X_m^+ . Por tanto, para construir el campo cuántico bastará sustituir $u(\mathbf{p})$ por el operador aniquilación debidamente normalizado (a) y $u(-\mathbf{p})$ por su adjunto (a^\dagger). Por el contrario, si es complejovaluada, las soluciones en X_m^+ y X_m^- serán independientes, por lo que $u(\mathbf{p})$ lo sustituiremos por un operador aniquilación normalizado (a), pero $u(-\mathbf{p})$ vendrá dado por un operador creación normalizado distinto (b^\dagger).

Observación 3.2.8. *De este desarrollo llegamos a la conclusión de que tanto los operadores a como b (y sus adjuntos) actúan para dos especies de partículas distintas de masa m y espín 0, que son antipartículas una de la otra (idénticas salvo en la carga). Por convenio tomamos los a como los asociados a las partículas y los b asociados a las antipartículas. Por tanto, el campo de Klein-Gordon (3.2.43) crea antipartículas y destruye partículas y viceversa para su adjunto (3.2.44). Esto también da una solución al problema de la energía negativa, pues las soluciones definidas en X_m^- no contribuyen como partículas con energía negativa, sino como antipartículas con energía positiva. El desarrollo del campo mediante (3.2.46) también asegura la invarianza Lorentz del campo.*

Construcción formal del campo escalar

Finalmente, con todas las herramientas y construcciones hechas en la sección anterior pasaremos a realizar una construcción formal del campo escalar, tanto el neutro como el cargado. Empecemos denotando el espacio de Hilbert proyectivo que describe a una única partícula de masa m y espín 0 por

$$\mathcal{H} = L^2(X_m^+, \lambda),\tag{3.2.47}$$

donde X_m^+ está definido en (3.2.45) y λ la medida invariante Lorentz⁴³ definida en él:

$$d\lambda(\mathbf{p}) = d\lambda(\omega_p, \vec{p}) = \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \omega_p}, \quad (\omega_p = \mathbf{p}^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}).\tag{3.2.48}$$

⁴²Ahora estamos cambiando la definición de la transformada y transformada inversa, cambiando $-i$ por i en (3.2.34). El signo no cambia la transformada o su inversa (pues recorreremos todos los números reales) pero la consistencia es importante. La existencia de la inversa está asegurada por el teorema 3.2.7.

⁴³La prueba de que es en efecto un invariante Lorentz es compleja de realizar formalmente, una discusión se puede encontrar en [6, §1.3].

Con esto construimos el espacio de Fock donde actuarán nuestros operadores como el espacio de Fock bosónico $\mathcal{F} := \mathcal{F}^+(\mathcal{H})$ y los operadores aniquilación y creación $A(v)$ y $A^\dagger(v)$, con $v \in \mathcal{H}$ definidos como

$$A(v) = \sqrt{N+1}B(v), \quad A^\dagger(v) = P_S \sqrt{N}B^\dagger(v), \quad (3.2.49)$$

donde N es el número de partículas existentes, P_S es el operador definido en (3.2.2) y $B(v)$ se define como⁴⁴

$$B(v)(u_1 \otimes \cdots \otimes u_N) = \langle v|u_1 \rangle u_2 \otimes \cdots \otimes u_N, \quad B^\dagger(v)(u_1 \otimes \cdots \otimes u_N) = v \otimes u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_N. \quad (3.2.50)$$

Observación 3.2.9. *Los operadores A_j y A_j^\dagger que hemos estado utilizando se pueden definir en base a (3.2.49) como $A_j(e_j)$ y $A_j^\dagger(e_j)$ siendo e_j el elemento j -ésimo de la base⁴⁵ de \mathcal{H} . También satisfacen las relaciones de conmutación para bosones*

$$[A(v), A(w)^\dagger] = \langle v|w \rangle \mathbb{I}, \quad [A(v), A(w)] = [A(v)^\dagger, A(w)^\dagger] = 0$$

Finalmente definimos $R : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{H}$ como

$$Rf = \hat{f}|_{X_m^+}, \quad (3.2.51)$$

donde $\hat{f} = \int_{\mathbb{R}^4} e^{i\mathbf{p}^\mu x_\mu} f(x) d^4x$.

Podemos entonces definir el campo escalar neutro Φ (que diferirá de ϕ por un cambio de variable) como una distribución temperada en \mathbb{R}^4 evaluada sobre el espacio de los operadores de $\mathcal{F}^+(\mathcal{H})$ que toma una función de Schwartz real-valuada f en \mathbb{R}^4 sobre los números reales y le asigna un operador

$$\langle \Phi, f \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [A(Rf) + A(Rf)^\dagger]. \quad (3.2.52)$$

Esta es una solución (distribucional) a la ecuación de Klein-Gordon, es decir, para cualquier $f \in \mathcal{S}$ tenemos que $\Phi((\partial^2 + m^2)f) = 0$, pues $(\widehat{\partial^2 + m^2})f = (-p^2 + m^2)f \equiv 0$ en X_m^+ . Finalmente, se puede demostrar (una demostración se puede encontrar en [6, §5.2]) que efectivamente podemos pasar de Φ en (3.2.52) a ϕ en (3.2.43).

Para construir el campo escalar cargado usaremos el espacio de Hilbert \mathcal{H} definido como

$$\mathcal{H} = L^2(X_m^+ \cup X_m^-, \lambda) = \mathcal{H}_+ \otimes \mathcal{H}_-, \quad \mathcal{H}_+ = L^2(X_m^+, \lambda), \quad \mathcal{H}_- = L^2(X_m^-, \lambda), \quad (3.2.53)$$

⁴⁴Un desarrollo completo de estos operadores $A(v)$ y $B(v)$, así como demostraciones de sus propiedades y relaciones de conmutación se puede encontrar en [6, §4.5].

⁴⁵Aquí el término de “base” lo usamos con mucha holgura, nos remontamos al ejemplo que introdujimos en la observación 3.1.1 de las ondas planas que sirven para construir el paquete de ondas, no forman una base en un sentido matemático pero sirven para construir funciones del espacio desarrollando la transformada inversa de Fourier.

y haremos introducción de un operador $C : \mathcal{H}_\pm \rightarrow \mathcal{H}_\mp$ (operador conjugador de carga) definido como

$$Cu(\mathbf{p}) = u(-\mathbf{p})^*. \quad (3.2.54)$$

\mathcal{H}_+ es el espacio definido en (3.2.47) para una partícula de masa m y espín 0, y su espacio de Fock asociado será $\mathcal{F}_+ := \mathcal{F}^+(\mathcal{H}_+)$, con unos operadores aniquilación y creación definidos como (3.2.49). Ahora definiremos $\mathcal{F}_- := \mathcal{F}^+(\mathcal{H}_+)$, con unos operadores aniquilación y creación (no confundir con los operadores (3.2.50)) $B(v), B(v)^\dagger$, con $v \in \mathcal{H}_-$ definidos como

$$B(v) = A(Cv), \quad B(v)^\dagger = A(Cv)^\dagger. \quad (3.2.55)$$

El espacio \mathcal{F}_+ y sus operadores es el espacio de Fock de las partículas, mientras \mathcal{F}_- y sus operadores es el espacio de Fock de las antipartículas. C es el operador que transforma una partícula en una antipartícula y viceversa. El espacio de Fock total es $\mathcal{F} = \mathcal{F}_+ \otimes \mathcal{F}_-$. Finalmente definimos $R_\pm : \mathcal{S}(\mathbb{R}^4; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}_\pm$ como

$$R_\pm f = \hat{f}|_{X_m^\pm}, \quad (3.2.56)$$

y el operador Φ y su adjunto Φ^\dagger que actúan sobre los operadores de \mathcal{F} como

$$\begin{aligned} \langle \Phi, f \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [A(R_+ f) + B(R_- f)^\dagger], \\ \langle \Phi^\dagger, f \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [A(R_+ f)^\dagger + B(R_- f)]. \end{aligned} \quad (3.2.57)$$

De esta manera Φ^\dagger es una distribución en \mathbb{R}^4 con valores en el espacio de operadores de \mathcal{F} . Φ también lo es, con la particularidad de que es antilinear en f . También se puede demostrar que de (3.2.57) podemos obtener los campos (3.2.43) y (3.2.44).

Con esto habríamos acabado de construir el campo escalar, de una manera formal. Hemos visto que sus cuantos son las partículas de espín 0 y masa m , y puede describir tanto partículas neutras (cuyas partículas y antipartículas coinciden) como cargadas (cuyas partículas y antipartículas cambian el signo de la carga), y debido a la construcción que hemos hecho, los campos son invariante lorentz, pues los hemos construido de tal manera que sean análogos a (3.2.46), que es invariante Lorentz (formado por contracciones de cuadvectores y una integral con una medida invariante Lorentz).

Cabe resaltar que no hay ninguna dependencia temporal explícita. Para construir el campo $\Phi(t)$ simplemente tenemos que cambiar a la representación de Heisenberg usando (3.2.26)

3.2.4. Solución de la ecuación de Dirac. Campo espinorial

La construcción del campo espinorial, solución de la ecuación de Dirac, cuyo cuanto son las partículas de espín 1/2 y masa m se construye de una manera similar a la del campo escalar cargado, por lo incluiremos solo las ideas principales. La ecuación a tratar será

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = m\psi. \quad (3.2.58)$$

Definiremos como espacio de Hilbert para una partícula como $\mathcal{H} = L^2(X_m^+ \cup X_m^-, \lambda)$ de la misma manera que en (3.2.53). Tomamos entonces nuestro espacio de Fock de manera similar a como hicimos en la sección anterior para el campo cargado: $\mathcal{F} = \mathcal{F}^-(\mathcal{H}^+) \otimes \mathcal{F}^-(\mathcal{H}^+)$, como dos espacios de fermiones de energía positiva. En el primero de los espacios trabajaremos con las partículas y en el segundo con las antipartículas, tal y como hicimos en la sección anterior.

Definimos ahora los operadores aniquilación y creación para los fermiones como

$$A(v) = \sqrt{N+1}B(v), \quad A(v)^\dagger = P_\Lambda \sqrt{N}B(v)^\dagger, \quad (3.2.59)$$

donde $v \in \mathcal{H}$, P_Λ está definido en (3.2.2) y $B(v)$ está definido en (3.2.50). Se puede demostrar (ver [6, §4.5]) que estos operadores satisfacen las siguientes relaciones de anticonmutación

$$\{A(v), A(w)^\dagger\} = \langle v|w \rangle \mathbb{I}, \quad \{A(v), A(w)\} = \{A(v)^\dagger, A(w)^\dagger\} = 0, \quad (3.2.60)$$

las cuales son las relaciones de anticonmutación de los fermiones, como adelantamos en la sección anterior. Con esto, dada una función $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4; \mathbb{C}^4)$, definimos el operador R_\pm como en (3.2.56) pero definiéndola de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4; \mathbb{C}^4) \rightarrow \mathcal{H}_\pm$ y los operadores de aniquilación de partículas (a) y antipartículas (b) sobre el espacio de Fock \mathcal{F} como

$$a(h) = A(h) \otimes \mathbb{I}, \quad b(h) = (-1)^{\hat{N}} \otimes A(h), \quad (3.2.61)$$

donde \hat{N} es el operador número (cuenta el número de partículas o antipartículas que hay⁴⁶) y se introduce para que satisfagan las relaciones de anticonmutación (3.2.60). Por lo tanto ya podemos definir el campo espinorial (y su adjunto):

$$\begin{aligned} \langle \psi, h \rangle &= a(R_+ h) + b^\dagger(CR_- h), \\ \langle \psi^\dagger, h \rangle &= a^\dagger(R_+ h) + b(CR_- h), \end{aligned} \quad (3.2.62)$$

donde C es el operador conjugación de carga (3.2.54). El campo (3.2.62) también satisface las relaciones de anticonmutación (3.2.60) (por linealidad).

Con esto habríamos acabado la construcción, pues la hemos realizado por analogía a la construcción formal del campo escalar. El campo ψ^\dagger crearía una partícula y destruiría una antipartícula, ambas con energía positiva, y al provenir de la ecuación de Dirac estas deben de tener espín 1/2 y masa m , pues vimos en §3.1.5 que esta función describe partículas de ese tipo. Nótese que hay varias cosas que hemos introducido porque sabemos el tipo de soluciones que esperamos: fermiones descritos por 4 componentes (ver 3.1.2). Esto lo hemos podido hacer gracias a haber estudiado la mecánica cuántica relativista con anterioridad, para saber qué tipo de partículas describen las soluciones de la ecuación de Dirac y cómo lo hacen (en 4 componentes) y así luego construir el campo con rigor matemático, sin cuestionarnos por qué la solución es como es.

⁴⁶Más información sobre el operador número se puede encontrar en [18, §22.2]

Conclusiones

Hemos visto a lo largo de este trabajo los numerosos problemas matemáticos que aparecen al realizar nuevos modelos físicos como las ecuaciones relativistas de Klein-Gordon o Dirac y la teoría cuántica de campos. Hemos mostrado cómo solventar estos problemas o a dar argumentos de por qué, aunque a priori algo pueda parecer “problemático” (matemáticamente hablando), tiene unos fundamentos matemáticos que lo respaldan. Primero, en §2.1, estudiamos la relatividad especial, el marco en el que existe la mecánica cuántica relativista y la teoría cuántica de campos, y como al hacer una transformación de Lorentz (las transformaciones del espacio tiempo que identifican un sistema de referencia inercial con otro) la física debe permanecer invariante. Vimos como las transformaciones de Lorentz poseen una estructura de grupo (de matrices de Lie, §2.1.2) y estudiamos la teoría de grupos de matrices de Lie y álgebras de Lie (§2.1.3), así como las representaciones de álgebras de Lie (§2.1.4). Esto nos permitió estudiar la representación del álgebra de Lie del grupo de Lorentz. Dicha álgebra de Lie es isomorfa al álgebra de $SL(2; \mathbb{C})$, que posee diversas propiedades importantes, pudiendo así tomar la representación más adecuada al problema que estemos tratando.

Después, en §2.2, estudiamos el campo electromagnético, para introducir la invarianza gauge y dar un ejemplo más conocido y sencillo de qué es un campo (clásico), como es el campo electromagnético F^μ_ν . Aunque en este trabajo no hayamos usado la invarianza gauge electromagnética, es de gran importancia a la hora de definir el campo vectorial, es decir, el **campo electromagnético cuántico**.

Luego introdujimos y estudiamos la mecánica cuántica relativista en §3.1, con las ecuaciones de Klein-Gordon (§3.1.1) y Dirac (§3.1.2). Primero estudiamos algunas de sus propiedades (como que la ecuación de Dirac posee 4 componentes o la aparición de una densidad de carga en la ecuación de Klein-Gordon), así como sus problemas (como violar uno de los postulados de la mecánica cuántica, energía negativa, perder el carácter probabilístico del estado, etc.) y las soluciones a estos (introducir una formulación en dos componentes de la ecuación de Klein-Gordon o la propia ecuación de Dirac, introducir la noción de antipartículas, entender la densidad como una densidad de carga y no de probabilidad). Posteriormente, en §3.1.3, estudiamos la invarianza frente a transformaciones de Lorentz de las ecuaciones y las propiedades que debían de cumplir las soluciones para mantener dicha invarianza. Esto, al igual que la representación de álgebras de Lie es algo que hemos estudiado pero no aplicado a un ejemplo concreto. Aún así son conceptos de vital importancia, pues gracias a ellos podemos saber cómo se transformará una solución si aplicamos una transformación de Lorentz, y podemos “elegir” (tomar una representa-

ción) de las matrices adecuada al problema, pues aunque todas las representaciones sean isomorfas, existirán algunas más sencillas y otras más complejas a la hora de trabajar.

Finalmente, estudiamos las propiedades de las soluciones de las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac (§3.1.4 y §3.1.5), así como la formulación en 2 componentes de Klein-Gordon, la cual nos permite introducir el espacio de Krein, un marco matemático donde recuperar el producto escalar (pues el espacio de soluciones de la ecuación de Klein-Gordon no forman un espacio de Hilbert). Con esto vimos cuáles eran los objetos de estudio (partículas masivas, cargadas o neutras y sin espín para la ecuación de Klein-Gordon y partículas masivas, cargadas y de espín 1/2 para la ecuación de Dirac), así como sus propiedades (la conservación de carga o norma y la existencia de antipartículas). Para finalizar mostramos el límite no relativista en §3.1.6.

En §3.1.6 estudiamos el límite no relativista ($v \ll c$ o $T \ll M$) de las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac, en el que no solo recuperamos la mecánica cuántica no relativista (mecánica cuántica con la formulación de Schrödinger), sino que obtenemos, para el caso de la ecuación Klein-Gordon, correcciones relativistas al operador energía cinética (ver ecuación (3.1.62)), o recuperamos la ecuación de Pauli (3.1.72) a partir de la ecuación de Dirac. En este último caso fue necesario introducir la teoría gauge local, de enorme importancia para la teoría cuántica de campos, pues también nos permite introducir el campo electromagnético interaccionante, de la misma manera que hicimos para introducir la interacción en la ecuación de Dirac.



Figura 3.1: Vladimir Fock, uno de los padres de la teoría cuántica de campos.

Finalmente, en §3.2, introdujimos los campos cuánticos. Para ello comenzamos con una introducción a sistemas de varias partículas (§3.2.1) y los espacios de Fock, así como la distinción entre bosones y fermiones. En los espacios de Fock serán los espacios donde estarán definidos los campos, que serán a su vez operadores correctamente definidos, a esto se le denomina **segunda cuantización**. Con la segunda cuantización hecha pasamos a estudiar el oscilador armónico cuántico (§3.2.2) con este formalismo, que no solo nos da una cierta intuición (pues es un problema simple y conocido de la mecánica cuántica de Schrödinger), sino que nos ayuda a construir el campo escalar.

Mediante un procedimiento constructivo partiendo tanto del oscilador cuántico como de los resultados conocidos de la mecánica cuántica relativista, nos dispusimos a construir el campo escalar (§3.2.3), solución de la ecuación libre de Klein-Gordon, que crease y destruyese partículas (o antipartículas) con masa y espín nulo. Durante el proceso nos encontramos con un problema grave: la convergencia. Para solventarlo tuvimos que hacer

uso de dos teorías matemáticas: la teoría de distribuciones y el análisis de Fourier. Al entender los campos como distribuciones que al actuar sobre “funciones test” nos devolvían un operador y apoyándonos en el análisis de Fourier, pudimos solventar el problema de la convergencia. Finalmente definimos el campo escalar y el espinorial (§3.2.4) (por analogía al campo escalar) con total rigor matemático. Por tanto, aunque en física sigamos operando con el campo escalar y espinorial como en la ecuación (3.2.43), sabemos que existe una formulación matemáticamente rigurosa de estos campos que nos asegura el buen funcionamiento de los mismos.

En la actualidad la derivación de los campos escalares o espinoriales (entre otros) se realiza mediante el *lagrangiano* y el *hamiltoniano* del sistema, el proceso que nosotros hemos seguido es algo similar al estudio fenomenológico que pudieron seguir físicos como Fock, Jordan o Wigner entre otros. La construcción lagrangiana de los campos se puede encontrar en muchos libros de teoría cuántica de campos, como en [18].

Gracias a este trabajo hemos podido dar una base matemática sobre la que parte de la física cuántica se sostiene, aunque a la hora de trabajar se ignoren (como por ejemplo, la teoría de distribuciones). Aún así hay diversas nociones físicas que siguen requiriendo trabajo, como los campos interaccionantes. Recordemos que las soluciones (3.2.62) y (3.2.57) son soluciones para el campo **libre**, es decir, las partículas no interaccionan entre ellas o con el medio. Esto es una simplificación excesiva, pues en la naturaleza no existe ninguna partícula libre. Es más, existen fenómenos como la **polarización del vacío**, donde el campo electromagnético en el vacío (sin partículas), genera un electrón y un positrón, que interaccionan electromagnéticamente y se aniquilan, generando dos fotones, por lo que las interacciones son de gran importancia para describir el universo.

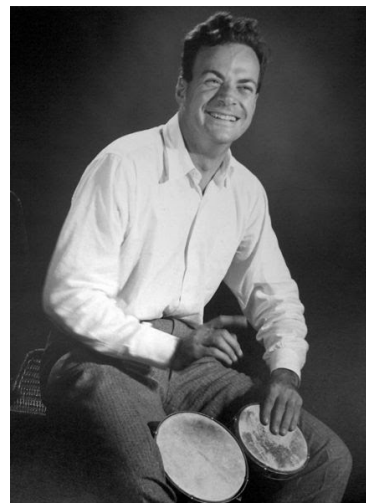


Figura 3.2: Richard Feynman, físico de gran importancia en el desarrollo de la electrodinámica cuántica.

Por otra parte, no solo basta con estudiar la interacción electromagnética (y por consiguiente el campo electromagnético cuántico), sino que habría que introducir un campo fuerte y otro débil, para las interacciones fuertes y débiles, siendo un desarrollo bastante complejo que también conlleva otros problemas matemáticos (la extrema localización del campo débil por ejemplo). Además, todas las interacciones comparten un problema que hemos comentado ligeramente, los “infinitos”.

A la hora de calcular interacciones entre partículas nos ayudamos de métodos perturbativos de la mecánica lagrangiana. El problema de este método es que a la hora de calcular ciertas interacciones (como la del electrón con el vacío, conocido como autoenergía del electrón) aparecen divergencias o integrales infinitas.

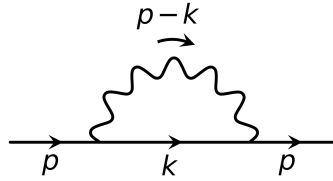


Figura 3.3: Autoenergía del electrón en un diagrama de Feynman.

La **renormalización** es un proceso por el cual se trata de “ocultar” la divergencia. Este proceso es extremadamente complejo (requiere de un gran entendimiento de la teoría sobre diagramas de Feynman y electrodinámica cuántica), pero de una manera burda se puede decir que “tomamos un factor común” infinito, y lo introducimos en una constante, de tal manera que no afecte al desarrollo ni a los cálculos. Un trabajo interesante sería por ejemplo, estudiar la electrodinámica cuántica y la renormalización desde un marco matemático formal.

No por ello debemos desmerecer la teoría sobre campos cuánticos que hemos construido. El campo espinorial por ejemplo resuelve un problema de la mecánica cuántica relativista, el **mar de Dirac**. El mar de Dirac consiste en describir los estados energéticos del electrón como un conjunto de estados accesibles de energía positiva y negativa, simétricos en torno al cero. Cuando decimos que tenemos un estado “vacío” (sin partículas o antipartículas) y por tanto de 0 energía, en la teoría del mar de Dirac decimos que tenemos **todos los niveles negativos ocupados**.

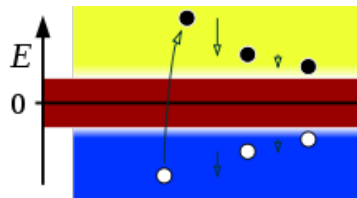


Figura 3.4: Interpretación del mar de Dirac. Las partículas están descritas como energías positivas ocupadas (amarillo) y las antipartículas como huecos en energías negativas (azul).

Esto, que puede parecer disparatado (pues tendríamos una energía infinita), lo “compensamos” diciendo (correctamente) que en física lo medible no es la energía, sino **la diferencia de energía**. Por tanto, tendremos una partícula cuando un nivel de energía positiva sea ocupado, y tendremos una antipartícula cuando un nivel de energía negativa sea desocupado. Esto también explicaría la generación de pares electrón positrón, pues consistiría en promocionar una partícula de energía negativa a un estado de energía positiva, creando un hueco en la energía negativa. Esto se solventa fácilmente con la teoría de campos, pues podemos entender el espacio de partículas y antipartículas como un espacio de Fock sobre el que actúan unos operadores que crean y aniquilan partículas o antipartículas.

Con la construcción de los campos que hemos realizado es posible explicar la creación y aniquilación de partículas, y si desarrollásemos una teoría interaccionante (es decir, unos campos que rijan las interacciones) podríamos explicar, por ejemplo, la desintegración de un neutrón en un protón, un electrón y un antineutrino, las interacciones entre partículas cargadas o la interacción entre quarks.

Bibliografía

- [1] M. Alonso, E. J. Finn. *Física. Volumen I: Mecánica*. Addison-Wesley, 1972.
- [2] T. Ya. Azizov, I. S. Iokhvidov. *Linear operators in spaces with an indefinite metric*. Wiley & Sons, 1989.
- [3] J. L. Basdevant, J. Dalibard. *Quantum Mechanics*. Springer, 2002.
- [4] L. Debnath, P. Mikusinski. *Hilbert Spaces with Applications*. Elsevier, 2005.
- [5] J. Dimock. *Quantum Mechanics and Quantum Field Theory, a Mathematical Primer*. Cambridge University Press, 2011.
- [6] G. B. Folland. *Quantum Field Theory, a Tourist Guide for Mathematicians*. American Mathematical Society, 2008.
- [7] C. Gasquet, P. Witomski. *Fourier Analysis and Applications. Filtering, Numerical Computation, Wavelets*. Springer, 1999.
- [8] H. Goldstein, C. P. Poole, J. L. Safko. *Classical Mechanics, Third Edition*. Pearson, 2001.
- [9] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics 4th Edition*. Pearsons, 2013.
- [10] F. Gross. *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 1999.
- [11] B. C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras and Representations, an Elementary Introduction. Second Edition*. Springer, 2015.
- [12] I. E. Irodov. *Fundamental Laws of Physics*. Mir Publishers Moscow, 1980.
- [13] H. F. Jones. *Groups, Representations and Physics*. Taylor & Francis Group, 1998.
- [14] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley & Sons, 1978
- [15] L. D. Landau. *Mechanics. Volume 1 of Course of Theoretical Physics. Third Edition*. Butterworth-Heinemann, 1976.
- [16] R. Shankar. *Principles of Quantum Mechanics, Second Edition*. Springer, 2014.
- [17] P. Strange. *Relativistic Quantum Mechanics with Applications in Condensed Matter and Atomic Physics*. Cambridge University Press, 1998.

- [18] P. Woit. *Quantum Theory, Groups and Representations, an Introduction*. Springer, 2017.