

# Trabajo de Fin de Grado

DOBLE GRADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

# FORMACIÓN DE ESTRUCTURA EN DISTINTOS MODELOS COSMOLÓGICOS

Autora: Beatriz González González

Tutor: José Oñorbe Bernis



UNIVERSIDAD DE SEVILLA

2 de julio de 2021



*A mi madre,  
a mi padre,  
a mi hermana.*



*La astronomía obliga al alma a mirar hacia  
arriba y nos lleva de este mundo a otro.*

*Platón (427-347 a. C.)*

*The history of astronomy is a history of receding horizons.*

*Edwin P. Hubble (1889-1953)*



# Resumen

En el paradigma actual de formación de estructuras cosmológicas a gran escala, la interacción gravitatoria hace que las partículas de materia oscura se agrupen y colapsen en objetos virializados, conocidos como halos. Estos crean los pozos de potencial donde se forman las galaxias. En este trabajo se estudia la función de masa de halo como propiedad fundamental del modelo cosmológico. Esta función da la densidad numérica de halos por intervalo de masa. Para ello, se ha desarrollado un código numérico para calcular las predicciones de la función de masa de halo de los modelos analíticos y semianalíticos más relevantes en el área. Además, se analizan catálogos de halos utilizando los resultados de un conjunto de simulaciones de  $N$  cuerpos a redshift 0. Se muestra que los modelos analíticos, que asumen una evolución lineal de las perturbaciones, tienen una precisión limitada. Se estudia la formación de halos en regiones del universo con distinta densidad, encontrando una dependencia entre este parámetro y la función de masa de halo, especialmente para los halos más masivos. Finalmente, en base a estos resultados, se discute la posible parametrización de la dependencia de la función de masa de halo respecto a la densidad como una simple dependencia temporal de una región con densidad media.





# Índice general

<b>I</b>	<b>Introducción: Fundamento teórico</b>	<b>1</b>
1.	<b>De la armonía de las esferas al universo en expansión</b>	<b>3</b>
2.	<b>El modelo cosmológico</b>	<b>6</b>
2.1.	Materia y energía del universo . . . . .	6
2.2.	Parámetros fundamentales del modelo . . . . .	9
2.3.	Modelo $\Lambda$ CDM . . . . .	11
3.	<b>Teoría de formación de estructura</b>	<b>12</b>
3.1.	Fluctuaciones lineales . . . . .	12
3.2.	La relación entre la función de correlación y el espectro de potencias . . . . .	15
3.3.	Colapso esférico . . . . .	19
4.	<b>La función de masa de halo</b>	<b>21</b>
4.1.	Formalismo de Press-Schechter . . . . .	21
4.2.	Más allá del formalismo de Press-Schechter: modelos semianalíticos . . . . .	24
<b>II</b>	<b>Simulaciones</b>	<b>27</b>
5.	<b>Simulaciones y resultados</b>	<b>29</b>
5.1.	Simulaciones cosmológicas . . . . .	29
5.2.	Simulaciones Legacy . . . . .	31
5.3.	Resultados . . . . .	33
5.3.1.	Filtrado de subhalos . . . . .	34
5.3.2.	Errores: límites de resolución e incertidumbres . . . . .	34
5.3.3.	Simulaciones estándar . . . . .	38
5.3.4.	Simulaciones Zoom . . . . .	40

<b>III Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>6. Discusión y conclusiones</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>57</b>

# I

---

## **Introducción: Fundamento teórico**

---



# 1 | De la armonía de las esferas al universo en expansión

Desde el principio de los tiempos, el cielo y los astros han constituido un misterio para el ser humano. Ya en la Antigua Grecia, Pitágoras desarrolló la teoría de la armonía de las esferas, donde concebía al universo como un conjunto de esferas concéntricas centradas en la Tierra que albergaban a la Luna, los planetas, el Sol y las estrellas. Unos dos mil años después, durante el Renacimiento, la llegada del modelo heliocéntrico de la mano de Copérnico revolucionó la concepción de nuestro lugar en el universo. Más tarde, célebres físicos como Galileo, Kepler y Newton constarían este modelo con sus observaciones y desarrollos teóricos. El siglo XX supuso un auge de la astrofísica gracias a los avances de la tecnología. Uno de los hitos más relevantes fue el descubrimiento de la expansión de universo por el astrónomo estadounidense Edwin P. Hubble. El espacio crece a medida que el universo envejece: vivimos en un universo en expansión.

Una de las ramas de la astrofísica más ambiciosa e intrigante es la cosmología, esto es, el estudio del universo en su totalidad, desde su origen hasta su evolución futura. La cosmología trata de analizar y describir tanto la estructura a gran escala como la dinámica del universo. A día de hoy, se estima que hace unos 13.8 miles de millones de años tuvo lugar una gran explosión, conocida como Big Bang, punto inicial del universo. La teoría del Big Bang conforma la base de la cosmología. Los cuatro pilares sobre los que se fundamenta son: el marco teórico de la relatividad general, presentada por Albert Einstein [1] y estudiada por Friedmann [2]; la ya mencionada expansión del universo, descubierta por Edwin P. Hubble [3]; la abundancia relativa de los elementos, propuesta por George Gamow [4], y, por último, el fondo cósmico

de microondas, descubierto por Arno A. Penzias y Robert W. Wilson en 1965 [5].

Las observaciones de la radiación del fondo cósmico de microondas indican que el universo primigenio era un plasma caliente, denso y prácticamente isótropo. Sin embargo, actualmente nuestro universo no es homogéneo. Se observan estructuras donde se agrupa la materia: desde las escalas más pequeñas, como los planetas y las estrellas; hasta grandes escalas, como las galaxias, los cúmulos de galaxias e, incluso, los supercúmulos de galaxias.

A raíz de esto, surge uno de los campos más importantes de la cosmología: el estudio de la formación de estructura a gran escala en un contexto cosmológico. Estas estructuras se formaron a partir de pequeñas perturbaciones en el campo de densidad de materia del plasma primigenio. Dichas perturbaciones dieron lugar a inhomogeneidades que fueron creciendo por inestabilidad gravitacional hasta alcanzar una densidad crítica, tras lo que la expansión se detuvo y se formaron objetos colapsados conocidos como halos de materia oscura. Estos halos pueden caer uno sobre otro, bien fusionándose en uno solo o bien quedar unidos por la gravedad convirtiéndose en subhalos de un halo mayor.

Los halos constituyen la unidad básica de la estructura cosmológica pues crearon los pozos de potencial donde se formaron las galaxias. Este hecho es la principal motivación para estudiar la distribución de halos en función de su masa, es decir el número de halos existentes de cada masa. En concreto, esta distribución se modela mediante la conocida como función de masa de halo, que da la densidad numérica de halos por unidad de volumen e intervalo de masa. En el marco de la formación de estructura cosmológica, la función de masa de halo es una propiedad fundamental de los distintos modelos cosmológicos.

El principal objetivo de este trabajo es, por tanto, el estudio de la función de halo de masa. Para ello, se analizan catálogos de halo de materia oscura utilizando el resultado de un conjunto de simulaciones de  $N$  cuerpos con distintos parámetros cosmológicos.

Este trabajo se divide en tres partes fundamentales: Introducción, Simulaciones y Conclusiones. En la primera parte del trabajo, se profundiza en la teoría que sustenta el modelo de formación de estructura. Concretamente, en el Capítulo 2 se expone los fundamentos del modelo cosmológico, que proporciona una descripción del universo y su dinámica. Esto permite el estudio de la formación de estructura, expuesta en el Capítulo 3. Seguidamente, el Capítulo 4 se

adentra en el formalismo de Press-Schechter, que predice la función de masa de halo, principal objeto de estudio en la segunda parte del trabajo. Aquí, se analizan una serie de simulaciones cosmológicas de  $N$  cuerpos con el fin de comprobar la concordancia entre los resultados numéricos y las predicciones analíticas. El Capítulo 5 presenta una introducción a las simulaciones cosmológicas y su importancia en el estudio actual de la cosmología. Seguidamente, se estudia la densidad numérica de halos por intervalo de masa que se forman en las simulaciones de  $N$  cuerpos mencionadas arriba. Finalmente, la tercera parte del trabajo expone en el Capítulo 6 la discusión de los resultados y las conclusiones finales. Además, se plantean posibles vías para continuar la investigación realizada en este trabajo.

## 2 | El modelo cosmológico

La cosmología moderna se construye a partir del principio cosmológico, según el cual no existe ninguna localización privilegiada en el universo. A grandes escalas, del orden de cientos de megapársecs<sup>1</sup>, el universo es homogéneo e isótropo, esto es, presenta las mismas propiedades en todas las localizaciones y hacia todas las direcciones.

### 2.1. Materia y energía del universo

La métrica más general que satisface la homogeneidad y la isotropía requeridas por el principio cosmológico es la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), caracterizada por el elemento de línea en unidades en las que  $c = 1$  [6]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad [1]$$

El factor de escala  $a(t)$  y la curvatura espacial  $K$  son las propiedades fundamentales de la métrica FLRW. En concreto, la curvatura indica si el universo tiene una geometría abierta, plana o cerrada, correspondientes a valores de  $K = -1, 0$  ó  $1$  respectivamente. Por su parte,  $a(t)$  describe la expansión o contracción del universo. El factor de escala indica la proporción de la distancia propia entre dos objetos en un tiempo  $t$  respecto a dicha distancia en un tiempo

---

<sup>1</sup>El pársec es una unidad de longitud utilizada en astronomía:  $1 \text{ pc} = 3.2616 \text{ años luz} = 3.0857 \cdot 10^{16} \text{ m}$



de referencia  $t_0$ :

$$a(t) = \frac{d(t)}{d(t_0)} \quad [2]$$

Este tiempo de referencia  $t_0$  se fija en el presente, de manera que  $a(t_0) = 1$ . La distancia  $d(t_0)$  recibe el nombre de distancia comóvil. Esta permanece constante con el tiempo si los dos objetos se mueven al ritmo de la expansión del universo, a diferencia de la distancia propia  $d(t)$ .

En cosmología se suele emplear lo que se conoce como corrimiento al rojo o, usando su término inglés, 'redshift'. En un universo en expansión, la longitud de onda de radiación electromagnética recibida  $\lambda_o$  incrementa respecto a la emitida  $\lambda(t)$  en tiempo un  $t$ , esto es, se desplaza hacia el rojo en el espectro electromagnético. El redshift cósmico se mide con el parámetro  $z$ . Si  $a_0$  se corresponde con el factor de escala en el presente, se tiene que:

$$1 + z = \frac{\lambda}{\lambda(t)} = \frac{a_0}{a(t)} \quad [3]$$

Llegado este punto, es importante hacer una aclaración en torno al redshift, el factor de escala y el tiempo. El redshift  $z$  se mide directamente de las galaxias y los cuásares lejanos. Asumida la teoría del Big Bang, el factor de escala representa una interpretación del redshift como expansión del universo, que es válida para cualquier modelo cosmológico, en el contexto de la relatividad general y de un universo homogéneo e isótropo. Por último, para relacionar el factor de escala con un tiempo  $t$  en años concretos, es necesario especificar el modelo cosmológico de manera exacta. Por ello, uno de los principales objetivos de la astrofísica teórica es determinar el modelo cosmológico que explique las observaciones del universo y permita fijar la escala de tiempo.

La base teórica sobre la que se estudian los posibles modelos cosmológicos no es otra que la Teoría de la Relatividad General de Einstein. Esta conduce a que la geometría del espacio-tiempo y, en consecuencia, la interacción gravitatoria de la materia dependen del contenido de materia-energía del universo. En concreto, las ecuaciones de campo de Einstein vienen dadas por [7], [8]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad [4]$$

Donde  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de curvatura de Ricci;  $R$ , el escalar de curvatura de Ricci;  $\Lambda$ , la constante cosmológica;  $g_{\mu\nu}$ , el tensor métrico;  $G$ , la constante de gravitación universal y  $T_{\mu\nu}$  el tensor momento-energía. De manera resumida, la ecuación anterior relaciona la geometría del espacio-tiempo, caracterizada por el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , con la densidad y flujo de energía y momento del espacio-tiempo dada por  $T_{\mu\nu}$ .

En base al principio cosmológico, resulta adecuado describir el universo como un fluido ideal de densidad de energía  $\rho(t)$  y presión  $p(t)$ , donde un observador que se mueva conjuntamente con dicho fluido (es decir, un fluido comóvil) verá el universo perfectamente isótropo. Con esto y a partir de la ecuación 4 de Einstein se llega a las ecuaciones de Friedmann [2]:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2} \quad [5]$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad [6]$$

Al igual que la ecuación 4, estas ecuaciones describen la expansión del universo y muestran que la evolución del universo está gobernada por su contenido de materia-energía [6].

En general, la presión y la densidad de un fluido están relacionadas por una ecuación de estado  $p = p(\rho)$ . Para los fluidos estudiados en cosmología, se puede asumir que la presión es linealmente proporcional a la densidad:  $p = \alpha\rho$ . En el caso de los tres fluidos fundamentales que se estudian en este trabajo (materia, radiación y energía de vacío), la constante  $\alpha$  toma los siguientes valores [6]. Para la materia, una buena aproximación a escalas grandes es considerarla acolisional, lo que significa que su presión es nula y  $\alpha = 0$ . Para la radiación, que sigue un régimen relativista, se tiene que  $\alpha = 1/3$ . Por último, para la energía de vacío, asociada a fluctuaciones cuánticas de vacío, la constante de proporcionalidad resulta  $\alpha = -1$ .

Una de las claves para entender la evolución del universo es que la densidad de cada fluido depende de su ecuación de estado. La conservación de la energía y la expansión adiabática del universo en la métrica FLRW conduce a la siguiente ecuación [9]:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(p + \rho) = 0 \quad [7]$$

De aquí, se puede deducir que la densidad de energía de materia decae como  $\rho_M \sim a^{-3}$ , mientras que la densidad de energía de radiación lo hace como  $\rho_R \sim a^{-4}$ . En el caso de la energía de vacío, su densidad de energía permanece constante:  $\rho_{vac} \sim \text{const}$ . La física cuántica predice una energía de vacío de unos 100 órdenes de magnitud menor que la observada [10]. Esto es uno de los grandes problemas de la física moderna y lleva a considerar un tipo de energía más abundante en el universo: la energía oscura, ligada a la ya mencionada constante cosmológica  $\Lambda$ . Esta conexión entre la energía de vacío y la constante cosmológica se remonta a mediados del siglo pasado [11]. Aún a día de hoy, la energía oscura entraña uno de los grandes misterios de la ciencia.

## 2.2. Parámetros fundamentales del modelo

Uno de los parámetros más importantes de la cosmología es el parámetro de Hubble  $H(t)$ , que describe el ritmo de expansión del universo para cierto tiempo y se define como:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad [8]$$

Se denota  $H_0$  al valor correspondiente al tiempo presente y recibe el nombre de constante de Hubble, constante de proporcionalidad en la ley de Hubble, que establece una relación entre la distancia entre galaxias y la velocidad a la que se alejan. Históricamente [12], el valor de  $H_0$  se suele expresar en función de otro parámetro  $h$ :

$$H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad [9]$$

En los últimos años, se ha medido a partir de diversos métodos que el parámetro  $h$  se encuentra alrededor de un valor de 0.7. Concretamente, los resultados obtenidos a partir de los datos recogidos por las sondas WMAP9 [13] y Planck [14] determinaron un valor de  $h = 0.6950$ .

Por otro lado, se define la densidad crítica como la densidad media necesaria para que el universo frene su expansión (debido a la atracción gravitatoria) y permanezca estable:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad [10]$$

Usando el valor de la constante de Hubble que dan las observaciones (ver más arriba), esta densidad crítica es equivalente a unos 6 protones por metro cúbico, una cantidad a priori muy baja pero considerablemente superior a la densidad actual de materia que dan las observaciones, cercana 0.25 protones por metro cúbico [15]. ¿Cómo se explica esta diferencia? Primero, es conveniente definir el parámetro de densidad  $\Omega_0$ , igual al cociente entre la densidad actual y la densidad crítica  $\rho_c$ :

$$\Omega_0 = \frac{\rho(t_0)}{\rho_c} \quad [11]$$

Este parámetro sirve para determinar la geometría del universo: si  $\Omega_0 > 1$ , el universo será cerrado; si  $\Omega_0 = 1$ , plano; y si  $\Omega_0 < 1$ , abierto. De particular interés para los desarrollos siguientes resultan los parámetros de densidad relativos a día de hoy de la materia  $\Omega_M$ , radiación  $\Omega_R$ , energía oscura  $\Omega_\Lambda$  y curvatura  $\Omega_K$ , calculados como  $\Omega_i = \rho_i/\rho_0$ .

$$\Omega_M = \frac{8\pi G\rho_M}{3H_0^2} \quad \Omega_R = \frac{8\pi G\rho_R}{3H_0^2} \quad [12]$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad \Omega_K = -\frac{K}{a_0^2 H_0^2} \quad [13]$$

A partir de estas densidades relativas y de la primera ecuación de Friedmann, se puede expresar el parámetro de Hubble en función su valor actual. Así, se llega a la siguiente expresión general en función del redshift  $z$ :

$$H(z) = H_0 [\Omega_R(1+z)^4 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_K(1+z)^2 + \Omega_\Lambda]^{1/2} \quad [14]$$

En definitiva, la idea principal a la hora de construir un modelo cosmológico es que el universo está caracterizado por su curvatura y formado principalmente por radiación, materia y energía oscura. Sus proporciones determinan el destino del universo: podría expandirse eternamente, colapsar o incluso tender asintóticamente a un estado límite entre estos dos casos.

## 2.3. Modelo $\Lambda$ CDM

En el marco general de modelo cosmológico, el conocido como Modelo Estándar o Modelo  $\Lambda$ CDM es el que presenta mejor concordancia con los datos observacionales [16]. Basado en tan solo seis parámetros fundamentales, se trata de un modelo sencillo, capaz de explicar de manera satisfactoria un gran número de observaciones a muchas escalas y distintos tiempo. Múltiples estudios e investigaciones, como por ejemplo los realizados a partir de los datos recogidos por las sondas WMAP9 [13] y Planck [14], indican que nuestro universo actual tiene una geometría plana ( $\Omega_K = 0$ ) y está compuesto esencialmente de energía oscura ( $\Omega_\Lambda \approx 0.7$ ) y materia ( $\Omega_M \approx 0.3$ ), pues el término de radiación es despreciable. En el caso de la materia, cabe destacar que tan solo el 16 %, aproximadamente, es materia bariónica, esto es, materia formada por protones, neutrones y electrones. La gran mayoría es materia oscura, un tipo de materia acolisional (solo interactúa gravitacionalmente de forma significativa) que no emite radiación electromagnética y no se puede observar. Según el modelo  $\Lambda$ CDM, la materia oscura es fría, o dicho de otro modo, no relativista. Por todo ello, se suelen emplear los parámetros de densidad relativos a la materia bariónica y a la materia oscura, que toman valores de  $\Omega_b \approx 0.05$   $\Omega_m \approx 0.25$ , respectivamente.

Esto explica la diferencia presentada más arriba entre la densidad crítica y la densidad de materia bariónica del universo. Esta última representa menos del 5 % del contenido del universo. En definitiva, la materia que se puede observar directamente constiye una parte muy pequeña del contenido de nuestro universo a día de hoy. Este está dominado por la expansión acelerada producida por una forma de energía desconocida: la energía oscura.

## 3 | Teoría de formación de estructura

La teoría de formación de estructura trata de explicar la transformación del universo homogéneo inicial, que muestra el fondo cósmico de microondas, en nuestro universo presente, donde la materia se reúne en galaxias y cúmulos de galaxias. Este proceso tiene su origen en pequeñas fluctuaciones primordiales de la densidad. Los principales modelos teóricos apuntan a que estas fluctuaciones derivan de pequeñas inhomogeneidades en el plasma primigenio, originadas por fluctuaciones cuánticas ([17] y [6]), lo que parece concordar con las fluctuaciones observadas en el Fondo Cósmico de Microondas [18]. Con el tiempo, estas perturbaciones iniciales crecieron gracias a la inestabilidad gravitacional, dando lugar a objetos colapsados conocidos como halos de materia, que crearon los pozos de potencial donde se formaron las galaxias.

### 3.1. Fluctuaciones lineales

Considerando que estas perturbaciones iniciales son pequeñas, se puede trabajar en el régimen lineal y obtener una visión general de la formación de estructura.

Para ello, se define el contraste de densidad, una función adimensional que describe la sobredensidad en una región del espacio y en una época determinados.

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)} \quad [15]$$

En esta ecuación,  $\rho(\mathbf{x}, t)$  es el campo de densidad de materia en la posición  $\mathbf{x}$  y el tiempo  $t$  y  $\bar{\rho}(t)$  es la densidad media del universo de fondo, dependiente del modelo cosmológico.

Gracias a la simplificación del régimen lineal, se puede emplear un tratamiento newtoniano para resolver la evolución de las perturbaciones iniciales en un universo en expansión bajo las siguientes condiciones. La materia del universo debe encontrarse en la forma de un fluido predominantemente autogravitante y acolisional, que, además, sea no relativista. Este es el caso de la materia oscura fría y la materia bariónica a grandes escalas, donde la hidrodinámica pierde importancia. En este contexto, las ecuaciones que gobiernan la densidad  $\rho$  y la velocidad  $\mathbf{u}$  de dicho fluido ideal son:

$$\text{Ecuación de continuidad: } \frac{\partial \delta}{\partial t} + \nabla \cdot [(1 + \delta)\mathbf{u}] = 0 \quad [16]$$

$$\text{Ecuación de Euler: } \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2H(t)\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{\nabla \Phi}{a^2} \quad [17]$$

$$\text{Ecuación de Poisson: } \nabla^2 \Phi = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta \quad [18]$$

Cabe destacar que estas ecuaciones están expresadas en función de coordenadas comóviles  $\mathbf{x}$ , esto es, coordenadas que se expanden al mismo ritmo que el universo. Así, si  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{v}$  son, respectivamente, la posición propia y la velocidad del fluido, se tiene que  $\mathbf{x} = \mathbf{r}/a$  y  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - (\dot{a}/a)\mathbf{r} = a\dot{\mathbf{x}}$ , donde  $a = a(t)$  es el factor de escala. Por otra parte,  $\Phi(\mathbf{x})$  es el potencial gravitatorio y  $H(t)$ , el parámetro de Hubble, introducido en el Capítulo 2.

Particularizando las ecuaciones anteriores para el caso de fluctuaciones de densidad pequeñas,  $\delta \ll 1$ , se obtiene la aproximación lineal. Considerando únicamente los términos de primer orden de  $\delta$  y  $\mathbf{u}$ , se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2H(t)\frac{\partial \delta}{\partial t} = 4\pi G \bar{\rho} \delta \quad [19]$$

Se trata de una ecuación diferencial homogénea y lineal de segundo orden en el tiempo, lo que tiene dos consecuencias [19]. En primer lugar, la solución puede expresarse como la suma de dos funciones:  $\delta(\mathbf{x}, t) = \delta_+(\mathbf{x}, t) + \delta_-(\mathbf{x}, t)$ . En segundo lugar, dado que la ecuación solo tiene derivadas respecto al tiempo, la evolución temporal será independiente de la posición  $\mathbf{x}$

y cada término se puede separar en una parte espacial y otra temporal:

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \Delta_+(\mathbf{x})D_+(t) + \Delta_-(\mathbf{x})D_-(t) \quad [20]$$

Aquí,  $D_+(t)$  y  $D_-(t)$  son los denominados modos de crecimiento y decaimiento y  $\Delta_+(\mathbf{x})$  y  $\Delta_-(\mathbf{x})$  representan la distribución espacial del campo de materia inicial.

La expresión para los modos de crecimiento y decaimiento dependerá de los parámetros del modelo cosmológico (Capítulo 2). Las estructuras crecerán de distinta manera en cada universo FLRW: el contenido de materia-energía del universo será clave en su evolución. Por ejemplo, para un universo Einstein-de-Sitter (EdS) donde  $\Omega_M = 1$  y la curvatura es plana, se tiene que  $D_+ \propto t^{2/3} \propto a(t)$  y  $D_- \propto t^{-1}$ . En este caso, el contraste de densidad crece en armonía con la expansión del universo.

Teniendo en cuenta que las fluctuaciones primordiales de densidad sucedieron hace millones de años, para estudiar la formación de estructuras en el momento presente solo se considera el modo de crecimiento, que pasa a denominarse simplemente  $D(t)$ . En consecuencia, si  $t_i$  es el tiempo en el origen del Big Bang, la expresión para el contraste de densidad queda como:

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}, t_i) \frac{D(t)}{D(t_i)} \quad [21]$$

Para un universo plano con constante cosmológica, es decir, donde  $\Omega_\Lambda \neq 0$  y  $\Omega_M < 1$ , el modo de crecimiento puede expresarse mediante la siguiente integral [20]:

$$D(z) = \frac{H(z)}{H_0} \int_z^\infty \frac{dz'(1+z')}{H^3(z')} \left[ \int_0^\infty \frac{dz'(1+z')}{H^3(z')} \right]^{-1} \quad [22]$$

donde el factor entre corchetes representa la normalización para que  $D = 1$  en  $z = 0$ .

En definitiva, si se consiguen medir las fluctuaciones de densidad hoy en día y estas se comparan con las obtenidas a partir del Fondo Cósmico de Microondas, se deberían poder constreñir los parámetros cosmológicos del modelo cosmológico que rige nuestro universo.



## 3.2. La relación entre la función de correlación y el espectro de potencias

Suponiendo que las fluctuaciones iniciales tienen un origen cuántico, el modelo actual más simple predice que, desde un punto de vista matemático, el contraste de densidad  $\delta(\mathbf{x}, t_i)$  era un campo aleatorio gaussiano homogéneo e isótropo en el origen del Big Bang. En consecuencia, se define la función de correlación de dos puntos como  $\xi(r) = \langle \delta(\mathbf{x}_1)\delta(\mathbf{x}_2) \rangle$ , que, debido a la homogeneidad y la isotropía impuestas por el principio cosmológico, solo depende de la distancia entre dichos puntos  $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ . El significado físico de la función de correlación es el siguiente: si  $\xi(r) < 0$ , el campo de densidad estará menos concentrado que la media; mientras que si  $\xi(r) > 0$ , estará más concentrado.

A menudo, resulta adecuado considerar  $\delta(\mathbf{x}, t)$  como una superposición lineal de ondas simples, lo que, en un universo plano como el nuestro, se consigue mediante el análisis de Fourier. Así, la transformada de Fourier del contraste de densidad viene dada por:

$$\tilde{\delta}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{x} \delta(\mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad [23]$$

A partir de aquí, se puede calcular la función de correlación del campo que representa la transformada de Fourier:

$$\langle \tilde{\delta}(\mathbf{k}) \tilde{\delta}^*(\mathbf{k}') \rangle = \left\langle \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \delta(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} d\mathbf{y} \right\rangle \quad [24]$$

Intercambiando el orden entre las integrales y el promedio, se tiene que:

$$\langle \tilde{\delta}(\mathbf{k}) \tilde{\delta}^*(\mathbf{k}') \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{y}) \rangle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} d\mathbf{y} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \xi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} d\mathbf{y} \quad [25]$$

Haciendo un cambio de variable para pasar de  $\mathbf{y}$  a  $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ , se obtiene que:

$$\langle \tilde{\delta}(\mathbf{k}) \tilde{\delta}^*(\mathbf{k}') \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \int \xi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \int \xi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad [26]$$

Con esto, tomando  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ , se define el espectro de potencias como:

$$P(\mathbf{k}) = \int \xi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad [27]$$

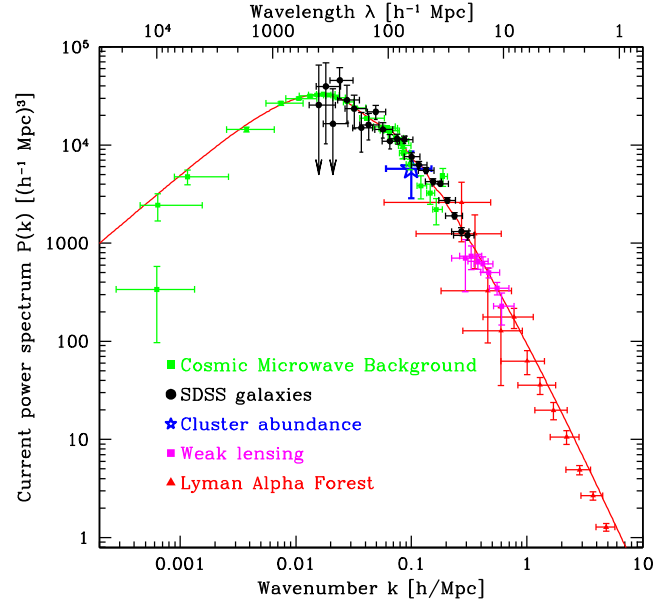
Se obtiene el Teorema de Wiener-Khintchine: la transformada de Fourier de la función de correlación  $\xi(r)$  se corresponde con el espectro de potencias  $P(\mathbf{k})$  de las fluctuaciones de densidad. Además, la homogeneidad espacial y la isotropía implican que el espectro de potencias debe ser una función de  $|\mathbf{k}| = k$ , llegando a la siguiente expresión:

$$P(k) = 4\pi \int_0^\infty r^2 \xi(r) \frac{\sin(kr)}{kr} dr \quad [28]$$

El espectro de potencias  $P(k)$  constituye una cantidad esencial para determinar las propiedades estadísticas de las fluctuaciones de densidad  $\delta(\mathbf{x})$ . Las características principales de este campo aleatorio tridimensional se establecen durante la era inflacionaria, periodo de evolución del universo temprano en el que este sufrió una expansión ultrarrápida. De manera generalizada, los modelos infieren que el espectro de potencias sigue una ley potencial del tipo de  $P_i(k) = Ak^n$  [21], donde  $A$  es la constante de normalización y  $n$  el índice espectral. Tras la inflación, tuvo lugar un proceso de recombinación en el que se empezaron a formar los átomos. Esto hizo que se produjeran complejos procesos físicos que alteran este espectro de potencias. Para modelar tanto estos procesos como otros posteriores, se emplea la función de transferencia  $T(k)$ , de manera que el espectro de potencias toma la forma de  $P(k) = Ak^n T^2(k)$ .

Las observaciones ([14] y [13]) estiman un valor del índice espectral de  $n = 0.9632$ . Este valor es compatible con las predicciones de los actuales modelos inflacionarios estándar, donde

$n \sim 1$ . Es más, en los últimos años, las medidas del espectro de potencias obtenidas a partir de distintas observaciones [22] coinciden con estas predicciones teóricas, tal y como se aprecia en la Figura 1. Esto es uno de los pilares sobre el que se sustenta el modelo cosmológico estándar, presentado en el Capítulo 2.



**Figura 1:** Espectro de potencias obtenido a partir de distintas observaciones. Imagen obtenida de [22]. Se representa  $P(k)$  expresado en  $(h^{-1} \cdot \text{Mpc})^3$  en función del número de ondas  $k$  en  $h/\text{Mpc}$  (eje inferior) y la longitud de onda  $\lambda$  en  $h^{-1} \cdot \text{Mpc}$  (eje superior). Se representan los resultados obtenidos a partir de diferentes estudios observacionales. Todos parecen coincidir con el espectro que predice la teoría (línea roja)

Volviendo a la definición de la función de correlación, en el límite de  $r \rightarrow 0$ , esta se reduce a la varianza:  $\sigma^2 = \langle \delta^2(\mathbf{x}) \rangle$ . A raíz de esto, resulta conveniente utilizar la transformada inversa, que proporciona la función de correlación para un espectro de potencias dado:

$$\xi(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 P(k) \frac{\sin(kr)}{kr} dk \quad [29]$$

Debido a que  $\lim_{r \rightarrow 0} \sin(kr)/kr = 1$ , se tiene que:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 P(k) dk \quad [30]$$

Tanto las observaciones astronómicas como las simulaciones, en las que se profundiza en la segunda parte de este trabajo, trabajan con cantidades discretas, tales como partículas o galaxias. Por ello, es común el uso de funciones filtro para definir escalas espaciales con el fin de analizar el campo de densidad. De este modo, en el estudio de la formación de estructura, resulta de utilidad definir una función  $W_R(r)$  que filtre los modos de  $\delta(\mathbf{x})$  a pequeñas escalas. Esto servirá para analizar el colapso de las fluctuaciones iniciales a escalas de  $R \propto (M/\bar{\rho})$ , que dan lugar a objetos de masa  $M$ . Así, se define el correspondiente campo de densidad ‘suavizado’:

$$\delta_M(\mathbf{x}) = \delta_R(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{y} \delta(\mathbf{y}) W_R(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \quad [31]$$

Si  $\tilde{W}_R$  es la transformada de Fourier de la función filtro, generalmente llamada función ventana, la varianza del campo de perturbaciones suavizado viene dada por la siguiente expresión.

$$\sigma_M^2 = \sigma_R^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 P(k) \tilde{W}_R^2 dk \quad [32]$$

Una de las funciones ventana más comunes es la conocida como ‘filtro de sombrero de copa’ (Top-hat filter). Esta se corresponde con una relación entre la masa y la escala suavizada tal que  $M = (4\pi/3)R^3\bar{\rho}$ , de manera que la función filtro y su transformada de Fourier vienen dadas por:

$$W_R(r) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases} \quad [33]$$

$$\tilde{W}_R(k) = \frac{3 [\sin(kR) - kR \cos(kR)]}{(kR)^3} \quad [34]$$

Llegado este punto, cabe destacar que la constante  $A$  de normalización del espectro de potencias solo se puede determinar a partir de observaciones cosmológicas. Para ello, se emplea el parámetro  $\sigma_8$ , raíz cuadrada de la varianza (también llamada media cuadrática de las fluctuaciones de densidad), a una escala de  $R = 8 h^{-1}$  Mpc. Según la ecuación 32, se tiene que:

$$\sigma_8^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 P(k) \widetilde{W}_{R=8}^2 dk \quad [35]$$

### 3.3. Colapso esférico

La aproximación lineal describe satisfactoriamente la evolución de las fluctuaciones primordiales de la densidad y, por tanto, la formación de estructura en el universo temprano. Sin embargo, deja de ser válida para el estudio del crecimiento de estructuras en un régimen fuertemente no lineal, es decir, estructuras donde se pueden dar sobredensidades con  $\delta \gg 1$ , como, por ejemplo, los cúmulos de galaxias, que alcanzan  $\delta \gtrsim 100$ . En este caso, el modelo de colapso esférico constituye un modelo sencillo donde se puede determinar la evolución no lineal ([23] y [24]). Por simplicidad, se considera un universo cerrado Einstein-de Sitter (plano y dominado por materia), donde hay una perturbación esférica de densidad tal que su sobredensidad es constante y su velocidad en la frontera es cero, pues se expande con el propio universo. Con este modelo, el modo de crecimiento gobernará la evolución temporal de la perturbación. Concretamente, crecerá hasta alcanzar cierto máximo en un tiempo  $t_a$ . Pasado este tiempo, la perturbación se desacopla de la expansión del universo y recolapsa hasta alcanzar un estado estable en un tiempo  $t_{vir}$  donde se da el equilibrio virial, esto es, se cumple que  $U = -2K$ , donde  $U$  y  $K$  son las correspondientes energías potencial y cinética de la perturbación.

El modelo no lineal de colapso esférico predice una sobredensidad para que se forme una estructura colapsada de  $\Delta_{vir} \approx 178 \rho_c$ . A pesar de las simplificaciones realizadas, concuerda a primer orden con los resultados de simulaciones de N cuerpos, introducidas en el Capítulo 5. Por el contrario, si se realiza un cálculo similar para determinar cuándo alcanza una es-

estructura el equilibrio virial en el contexto de la teoría lineal descrita más arriba, el valor de la sobredensidad para el colapso es menor [25], con un valor de  $\delta_c \approx 1.69$ .

En conclusión, en el régimen lineal, las regiones en el campo de densidad con  $\delta > \delta_c$  colapsan para producir halos virializados de materia, pues las fuerzas gravitatorias vencen la expansión del universo. Estos halos son cruciales en el proceso de formación de estructura tal y como se explica en el capítulo siguiente.

## 4 | La función de masa de halo

En este capítulo se estudia la formación de estructura a gran escala a partir de la creación de los halos de materia oscura, estructuras colapsadas por gravedad que se desacoplan de la expansión del universo. A partir de la estadística del campo de densidades proporcionada por el espectro de potencias (Capítulo 3) se puede calcular el número de halos de materia oscura existentes en función de su masa. En concreto, se estudia la función de masa de halo, que proporciona la densidad numérica de halos por intervalo de masa.

### 4.1. Formalismo de Press-Schechter

El formalismo de Press-Schechter [26] supone el primer modelo analítico que deriva la función de masa de halos a partir de las propiedades estadísticas del campo de densidades. Su premisa fundamental se sustenta sobre el modelo de colapso esférico y consiste en que cualquier objeto colapsado con masa  $\geq M$  a redshift  $z$  surge de una región donde  $\delta_M \geq \delta_c$ , es decir, donde el campo de densidad suavizado a una escala de masa  $M$  es superior a la sobredensidad crítica para que se dé el colapso. Bajo esta hipótesis, la probabilidad de que una partícula en cierta posición  $\mathbf{x}$  sea parte de un objeto colapsado de masa  $> M$  coincidirá con la probabilidad de que  $\delta_M \geq \delta_c$  en ese mismo punto:

$$P(> M) = P(\delta_M \geq \delta_c) \quad [36]$$

En el capítulo anterior, se estudió que, en general, los modelos actuales conducen a que el contraste de densidades suavizado (ecuación 31) tiene una distribución gaussiana. A partir de las propiedades estadísticas estudiadas de las fluctuaciones de densidad, la relación entre la función de correlación y el espectro de potencias (ecuaciones 28 y 29) permite obtener su varianza  $\sigma_M$ , dada por la ecuación [32]. Así, sin más que usar la definición de la función de distribución gaussiana, se obtiene la siguiente expresión para la probabilidad:

$$P(\delta_M \geq \delta_c) = \frac{1}{\sigma_M \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\delta_c} d\delta' \exp\left(-\frac{\delta'^2}{2\sigma_M^2}\right) \quad [37]$$

Llegado este punto, el formalismo de Press-Schechter se encuentra con un problema: la probabilidad  $P(> M)$  es menor a la esperada. Al tomar el límite  $M \rightarrow 0$ , se obtiene que  $P(> M) = 0.5$ , lo que significa que solo la mitad de la materia del universo se encuentra en halos colapsados. Esto se debe al hecho de que, al ser el contraste de densidad una distribución gaussiana, la probabilidad de que la densidad sea menor a la de la media es  $P(\delta < 0) = 0.5$ . Como solo las regiones inicialmente ‘sobredensas’ acaban en objetos colapsados, no se tienen en cuenta las zona ‘subdensas’. Sin embargo, la evolución muestra que las regiones vacías se hacen más vacías y las densas, más densas, lo que implica que la materia de las regiones ‘subdensas’ acaba cayendo en objetos masivos. Para salvar este obstáculo, se multiplica por un factor de 2 (conocido como factor compensatorio o, en inglés como ‘fudge factor’ [27]).

A continuación, se muestra la deducción de la función de masa de halo en el formalismo de Press-Scheter. Para ello, se toman dos vías para definir la densidad numérica de halos cuyas masas se encuentran en un rango de  $[M, M + dM]$ . El objetivo es llegar a una igualdad que permita encontrar una expresión para la función de masa de halo.

Por un lado, bajo la hipótesis de ergodicidad, la probabilidad  $P(> M)$  también puede verse como la fracción de materia del universo que se encuentra en un objeto colapsado de masa  $> M$ . Haciendo uso de esta definición,  $\frac{\partial P}{\partial M} dM$  representa la fracción de masa encerrada en halos con una masa entre  $M$  y  $M + dM$ . Al multiplicar por la densidad media  $\bar{\rho}$ , se calcula la



masa total por unidad de volumen que se encuentra en dichos halos. Sin más que dividir por la masa, se obtiene el número de halos con masas en un rango de  $[M, M + dM]$  por unidad de volumen.

Por otro lado, se denomina  $n(M, z)$  a la densidad numérica de halos con masa  $> M$ , es decir, la cantidad acumulada de halos con masa mayor que  $M$  por unidad de volumen. De este modo, la densidad numérica de halos con masa en un intervalo  $[M, M + dM]$  se puede expresar como  $\frac{dn}{dM}dM$ . Recordando el primer razonamiento y añadiendo el factor 2, se tiene la siguiente igualdad.

$$\frac{dn}{dM}dM = 2\frac{\bar{\rho}}{M}\frac{\partial P}{\partial M}dM \quad [38]$$

La función de masa de halo de Press-Schechter, que calcula el número de halos por unidad de volumen e intervalo de masa, viene dada por  $\frac{dn}{dM}$ . Despejando y derivando en la ecuación 37, se deduce que, si  $\nu = \frac{\delta_c}{\sigma_M}$ :

$$\frac{dn}{dM} = -\frac{\bar{\rho}}{M}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\right)\frac{\nu}{\sigma_M}\frac{\partial\sigma_M}{\partial M} \quad [39]$$

En este punto, es importante remarcar que esta fórmula permite relacionar la función de masa de halo con la varianza del campo de perturbaciones (dada por la ecuación 32) y, en consecuencia, con el espectro de potencias  $P(k)$ . Tal y como se explica en el Capítulo 3, el espectro de potencias es una de las bases del modelo cosmológico actual. De aquí se deduce, que la función de masa de halo es también una característica esencial del modelo cosmológico. Más adelante, se verá en detalle cómo de precisa es esta fórmula.

## 4.2. Más allá del formalismo de Press-Schechter: modelos semianalíticos

A partir de ciertas suposiciones sencillas, el formalismo de Press-Schechter consigue dar una expresión analítica para la función de masa de halo. Sin embargo, este modelo está limitado por las aproximaciones lineales y, a lo largo de los años, se ha comprobado que sus predicciones pierden precisión al compararlas con las obtenidas a partir de simulaciones cosmológicas. En vistas a mejorar dicha precisión de la función de masa de halo, se han ido desarrollando nuevos modelos semianalíticos donde se utilizan los resultados de simulaciones para calibrar la función de masa de halo. En el Capítulo 5 se hablará más en profundidad de las simulaciones cosmológicas y su uso para confrontar los resultados teóricos. A raíz de esto, se clarificará el porqué del desarrollo de modelos semianalíticos.

Esta sección se limita a dar una pequeña introducción a dos de los primeros modelos semianalíticos y a las nuevas expresiones de la función de masa de halo. En este contexto, se suele utilizar la denominada función de masa o de multiplicidad  $f(\sigma)$  para expresar la función de masa de halo. Concretamente, esta función representa la fracción de masa que ha colapsado para formar halos por unidad de intervalo en  $\ln \sigma^{-1}$  [28]:

$$f(\sigma) = \frac{M}{\bar{\rho}} \frac{dn}{d \ln \sigma^{-1}} \quad [40]$$

Con esto, se puede reescribir la función de masa de halo de manera general, dependiente de la función de masas:

$$\frac{dn}{dM} = \frac{\bar{\rho}}{M^2} f(\sigma) \frac{d \ln \sigma^{-1}}{d \ln M} \quad [41]$$

En el caso de la función de masa de halo obtenida en el formalismo de Press-Schechter, la función de multiplicidad tiene la siguiente forma. Recordando que  $\nu = \frac{\delta_c}{\sigma_M}$ :

$$f_{PS}(\nu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \nu \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\right) \quad [42]$$

Por otro lado, en las últimas décadas, se han dado múltiples definiciones de esta función de masas motivadas por resultados numéricos. En 1999, Sheth y Tormen presentaron la siguiente función de multiplicidad [29]:

$$f_{ST}(\sigma) = A \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \left[1 + \left(\frac{\sigma^2}{a\delta_c^2}\right)^p\right] \frac{\delta_c}{\sigma} \exp\left(-\frac{a\delta_c^2}{2\sigma^2}\right) \quad [43]$$

Donde  $A = 0.3222$ ,  $a = 0.707$  y  $p = 0.3$ .

Unos años más tardes, Jenkins [28], que trabajó con diferentes simulaciones cosmológicas con materia oscura fría a redshifts entre  $z = 5$  y  $z = 0$ , encontró que la siguiente fórmula proporcionaba un buen ajuste, independientemente de la cosmología:

$$f_J(\sigma) = 0.315 \exp(-|\ln \sigma^{-1} + 0.61|^3 \cdot 8) \quad [44]$$



# **II**

---

## **Simulaciones**

---



## 5 | Simulaciones y resultados

Desde el origen de la astrofísica, las observaciones astronómicas han sido, junto con las predicciones teóricas, la base fundamental de nuestro conocimiento sobre el cosmos. La comprensión de estas observaciones requiere teorías analíticas precisas. No obstante, las grandes escalas de tiempo y espacio que implica el estudio de la formación de estructuras suponen un problema para la comparación entre los modelos teóricos y los datos observacionales. En las últimas décadas, gracias al desarrollo de la tecnología computacional, las simulaciones cosmológicas se han convertido en una herramienta indispensable para comprender la evolución del universo en general y la formación de estructura en particular. Estas sirven para mejorar las predicciones analíticas de los modelos y, por tanto, extraer información más precisas de los datos observacionales.

### 5.1. Simulaciones cosmológicas

Para simular la evolución de la materia [30], clave en la formación de estructura, uno de los métodos más utilizados es el de N cuerpos. Este método transforma en discreta la descripción continua del comportamiento de las partículas de materia, dado por la ecuación acolisional de Boltzmann, que describe la evolución en el espacio de fases de la función de densidad de la materia bajo la influencia de un potencial gravitatorio  $\Phi$ . Para ello, se colocan N partículas de masa  $m_i$  distribuidas en determinadas posiciones  $\mathbf{r}_i$  en un volumen prefijado (en general, un cubo con condiciones periódicas de contorno) y con velocidades iniciales  $\mathbf{v}_i$ . Esto puede interpretarse como un muestreo Monte Carlo del espacio de fases. A partir de aquí, el problema se

reduce a resolver la ecuación de Poisson para el potencial gravitatorio, que modela la interacción gravitatoria mutua entre las  $N$  partículas. Este punto es uno de los grandes desafíos a la hora de realizar simulaciones eficientemente. Para calcular las fuerzas gravitatorias se pueden emplear dos métodos. Por un lado, los métodos basados en resolver la forma integral de la ecuación de Poisson,  $\Phi(\mathbf{r}) = -G \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') / |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ , utilizan aproximaciones para acelerar la suma de interacciones entre partículas, como por ejemplo, el método de la aproximación de árbol [31]. Por otro lado, los métodos basados en resolver la forma diferencial de la ecuación de Poisson,  $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho(\mathbf{r})$ , utilizan la transformada de Fourier para trabajar en un retículo en el espacio de Fourier. Cabe destacar, que las simulaciones más modernas emplean métodos híbridos con el fin de alcanzar una eficiencia alta.

Las simulaciones cosmológicas se realizan en el marco del modelo cosmológico, explicado en el Capítulo 2, a partir de ciertas condiciones iniciales. Para que haya concordancia con las observaciones, se impone un universo de fondo con una curvatura plana [32] y con una determinada composición de materia oscura, materia bariónica, energía oscura y radiación.

Además, se deben especificar las perturbaciones primordiales sobre este universo de fondo. Para ello, dado que las predicciones de la teoría de inflación conducen a una distribución gaussiana para las fluctuaciones de densidad, basta establecer el espectro de potencias  $P(k)$ , tal y como se detalla en el Capítulo 3, donde se muestra que este toma la forma de  $P(k) = Ak^n T^2(k)$ .

El último ingrediente para completar las simulaciones cosmológicas son las condiciones iniciales de las posiciones y velocidades de las partículas. Habitualmente, se pueden emplear dos tipos distintos. Por un lado, se estudian simulaciones donde se han impuesto grandes volúmenes periódicos con partículas distribuidas de manera uniformemente aleatoria. Por otro lado, se examinan diversas simulaciones zoom, donde la región de interés muestra una alta resolución frente al resto del volumen simulado.

Una vez ejecutada la simulación, el siguiente paso consiste en identificar los halos de materia, objetos virializados de alta densidad. Formalmente, habría que recorrer cada punto comprobando si se cumple el Teorema del Virial, pero esto supondría un alto coste computacional. En lugar de esto, se emplean algoritmos que buscan los picos de densidad. A partir de estos, se definen los centros de los halos. Suponiendo que tienen simetría esférica, se va aumen-



tando su radio hasta que la densidad es unas 200 veces la densidad crítica  $\rho_c$  (ecuación 10), correspondiente al valor que predice el modelo de colapso esférico para que se forme un halo (Sección 3.3). Con ello, se asigna a cada halo un radio y una masa, denominados comúnmente como radio virial  $R_{vir}$  y masa virial  $M_{vir}$  del halo. El algoritmo generalmente utilizado se llama ‘Friends-Of-Friends’ (amigos de amigos en inglés), abreviado como FoF. Este define una ‘longitud de amistad’  $l$  a partir de la que impone dos reglas. La primera de ellas consiste en que las partículas a una distancia  $\leq l$  son partículas amigas y pertenecen al mismo halo. La segunda exige que las partículas también sean amigas de sus amigas. Así, de cada simulación se obtiene catálogo a distintos redshifts que registra las diferentes propiedades de los halos, tales como su masa, su radio, sus coordenadas o si se trata de un halo o un subhalo.

## 5.2. Simulaciones Legacy

Las simulaciones analizadas en este trabajo, denominadas a partir de ahora simulaciones Legacy, han sido ejecutadas con el código Gadget-4 [33]. El modelo cosmológico utilizado en las simulaciones Legacy es consistente con los últimos resultados obtenidos a partir de los datos recogidos por las sondas WMAP9 [13] y Planck [14]. En la Tabla 1, se muestran los valores utilizados para los parámetros cosmológicos fundamentales, presentados en los Capítulos 2 y 3.

$\Omega_\Lambda$	$\Omega_m$	$\Omega_b$	$h$	$\sigma_8$	$n$
0.7150	0.2850	0.0450	0.6950	0.828	0.9632

**Tabla 1:** Parámetros cosmológicos usados en las simulaciones

La función de transferencia empleada en las simulaciones Legacy fue generada usando CAMB [34], mientras que las condiciones iniciales se han creado mediante el código MUSIC [35].

El conjunto de simulaciones Legacy consta de dos tipos distintos de simulaciones. Por un lado, se han realizado simulaciones de  $2048^3$  partículas en dos volúmenes diferentes, consis-

tentes en cajas con lados de 1600 Mpc/h y 100 Mpc/h. En lo que sigue, estas simulaciones se denominan como L1600 y L100 respectivamente.

Por otro lado, se dispone de un grupo de simulaciones zoom, donde el volumen total es de 1600 Mpc/h, igual que en la simulación L1600. La principal diferencia con L1600 es que las simulaciones zoom tienen una caja de 83 Mpc/h inmersa en el volumen total y de muy alta resolución en comparación con el resto del volumen total. El número de partículas simuladas en la caja de 83 Mpc/h es de  $1700^3$ . Para hacerse una idea de la resolución que tiene esta caja de 83 Mpc, el número de partículas necesarias para tener una resolución equivalente en el volumen total ascendería a  $32768^3$ , una cantidad enorme que conllevaría un gran coste computacional. Estas simulaciones muestrean regiones con distintas densidades: desde densidades extremadamente altas hasta densidades muy bajas. Concretamente, si  $\bar{\rho}$  es la densidad media y  $\sigma$  es la dispersión de densidad para cajas de 83 Mpc/h, las densidades estudiadas son de:  $\bar{\rho} + 7\sigma$ ,  $\bar{\rho} + 2\sigma$ ,  $\bar{\rho} + 1\sigma$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{\rho} - 1\sigma$ ,  $\bar{\rho} - 2\sigma$  y  $\bar{\rho} - 6\sigma$ . En lo que sigue, estas simulaciones se denominan como S+7 $\sigma$ , S+2 $\sigma$ , S+1 $\sigma$ , Smedia, S-1 $\sigma$ , S-2 $\sigma$  y S-6 $\sigma$ .

Además de estos dos conjuntos de simulaciones, se emplearán dos simulaciones con poca resolución, esto es, con un número bajo de partículas, para probar los códigos propios realizados en lenguaje Python. En este caso, se ha simulado la evolución de  $256^3$  partículas en volúmenes de 1600 Mpc/h y 100 Mpc/h. En lo que sigue, estas simulaciones reciben los nombres de N256-L1600 y N256-L100 respectivamente.

Como resumen y guía de las distintas simulaciones que se utilizan, se presenta la Tabla 2.

Nombre	Tipo	Lado del cubo (Mpc/h)	Nº partículas	Masa partícula ( $M_{\odot}$ )
L1600	Estándar	1600	$2048^3$	$5.43 \cdot 10^{10}$
L100	Estándar	100	$2048^3$	$1.32 \cdot 10^7$
S+7 $\sigma$	Zoom	83	$1700^3$	$1.32 \cdot 10^7$
S+2 $\sigma$	Zoom	83	$1700^3$	$1.32 \cdot 10^7$
S+1 $\sigma$	Zoom	83	$1700^3$	$1.32 \cdot 10^7$
Smedia	Zoom	83	$1700^3$	$1.32 \cdot 10^7$
S-1 $\sigma$	Zoom	83	$1700^3$	$1.32 \cdot 10^7$
S-2 $\sigma$	Zoom	83	$1700^3$	$1.32 \cdot 10^7$
S-6 $\sigma$	Zoom	83	$1700^3$	$1.32 \cdot 10^7$
N256	Estándar	1600	$256^3$	$2.78 \cdot 10^{13}$
N256	Estándar	100	$256^3$	$6.78 \cdot 10^9$

**Tabla 2:** Resumen de las características principales de las distintas simulaciones

### 5.3. Resultados

El objetivo principal de esta sección es comparar los resultados de las distintas simulaciones con las predicciones analíticas y semianalíticas de la función de masa de halo.

Por un lado, se ha realizado un programa propio en lenguaje Python para la obtención de las funciones analíticas y semianalíticas de Press-Schechter, Sheth-Tormen y Jenkins presentadas en el Capítulo 4. Estas se han calculado mediante la ecuación general 41 sustituyendo las expresiones específicas de la función de multiplicidad dadas por las ecuaciones 42, 43 y 44, respectivamente. El parámetro  $\sigma_M$  se ha obtenido de la ecuación 32 a partir de un espectro de potencias dado y la función ventana descrita en la ecuación 34.

Por otro lado, se ha realizado una serie de códigos propios en lenguaje Python con el fin de obtener el número de halos por unidad de volumen e intervalo de masa que se han formado en cada simulación. Para ello, basta con realizar unos cálculos sencillos a partir de las masas de los halos, información disponible en el catálogo de halos de cada simulación. Primero, se divide el

rango de masas en una serie de intervalos, tomados de tal manera que sean equidistantes en escala logarítmica de base 10, pues en las distintas gráficas se representará el logaritmo en base 10 de la función de masa de halo frente al logaritmo en base 10 de la masa. Una vez hecho esto, se cuentan los halos existentes en cada uno de estos intervalos. Finalmente, basta dividir esta cantidad entre el volumen total y el tamaño del intervalo correspondiente. De esta manera se obtienen los valores de la densidad numérica de halos por intervalo de masa correspondientes a las masas del centro de cada intervalo.

### **5.3.1. Filtrado de subhalos**

Para llevar a cabo este proceso correctamente, es preciso realizar una preparación previa de los datos. Hay que tener en consideración el hecho de que un halo puede contener varios subhalos, que también aparecen en el catálogo de halos que proporciona cada simulación. Dado que el formalismo de Press-Schechter no contempla la existencia de los subhalos, es preciso filtrarlos, tarea sencilla pues los catálogos de halos indican cuáles son los halos principales y cuáles son subhalos.

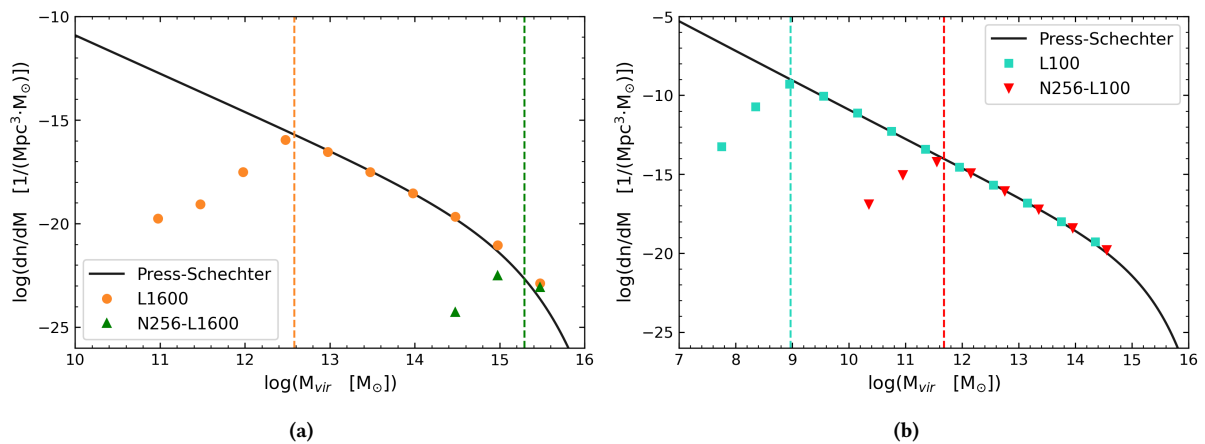
### **5.3.2. Errores: límites de resolución e incertidumbres**

Antes de poder analizar la representación de los datos obtenidos tras el filtrado de los subhalos, cabe preguntarse por sus correspondientes errores y por su validez. En este contexto, se tratarán tres tipos de errores: los límites de resolución de las simulaciones, los errores numéricos y las incertidumbres estadísticas, también conocidas como varianza cósmica.

Idealmente, el universo se podría simular con un volumen infinito con infinitas partículas de masa muy pequeña, algo inalcanzable para los ordenadores de hoy en día. Las simulaciones trabajan con un número restringido de partículas de masa fija, con las que describen el campo de densidad en un volumen limitado. Esta masa fija establece un límite a las masas de los halos que se forman en cada simulación. A masas ligeramente superiores a la masa de una partícula, los halos estarán formados por pocas partículas. Es más, en estos casos, el número de halos que se crean es menor que el esperado pues los errores numéricos empiezan a dominar.

Estos errores son introducidos por los códigos numéricos implementados. Los algoritmos que buscan picos de densidad son más sensibles si el pico es más alto. Así, buscar halos de menos partículas resulta cada vez más difícil. Por ello, los resultados de las simulaciones se desvían notablemente de las predicciones analíticas a partir de una masa concreta en función de la masa de las partículas.

En la Figura 2 se observa que este límite de resolución a baja masa se da tanto en las simulaciones estándar L1600 y L100, como también en las simulaciones de baja resolución N256-L1600 y N256-L100. Para fijar la masa correspondiente al límite de resolución, se comparan los resultados obtenidos en las simulaciones ejecutadas en un mismo volumen (L1600 y N256-L1600; L100 y N256-L100). A raíz de esto, se fija una cantidad de 70 partículas, a partir de cuya masa el error es menor que el  $\sim 5\%$ . Esta masa viene marcada por una línea discontinua. Por debajo de ella, el límite de resolución se hace evidente y los resultados pierden su significado físico.

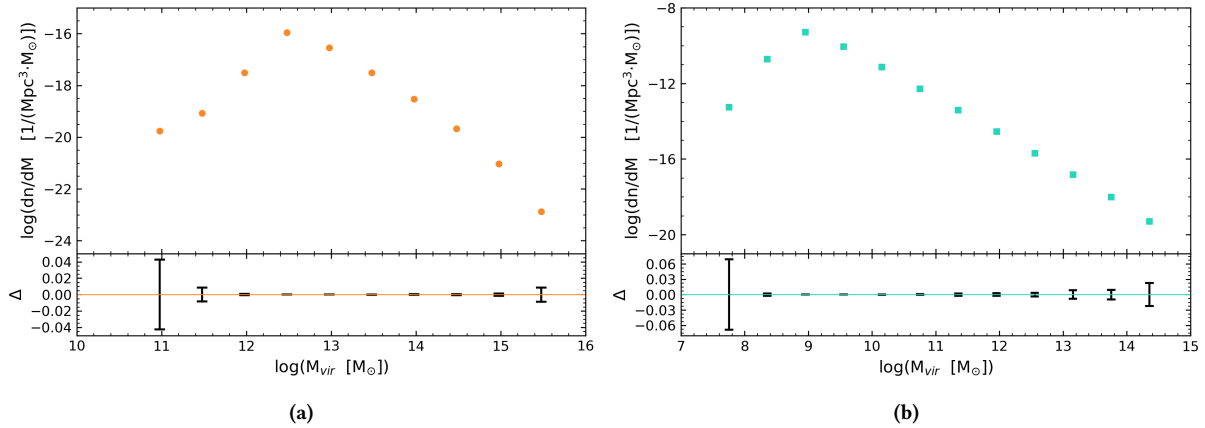


**Figura 2:** Límites de resolución de las simulaciones. Se representa el  $\log_{10}$  de la función de masa de halo frente al  $\log_{10}$  de la masa. En (a), se representan como puntos naranjas los resultados de la simulación L1600 y como triángulos verdes los de N256-L1600. En (b), se representan como cuadrados celestes los resultados de la simulación L100 y como triángulos rojos los de N256-L100. En ambas, la función analítica de Press-Schechter se traza con una línea negra y las líneas discontinuas se corresponde con una masa igual a la de 70 partículas. Por debajo de esta masa, se infravalora el número de halos por los límites de resolución de la simulación.

Por otro lado, hay que tener en cuenta las incertidumbres estadísticas. Estas son conocidas como varianza cósmica: una simulación representa una posible realización de un modelo cosmológico, dependiente del campo de fluctuaciones de densidad inicial, esto es, de las condiciones iniciales de las partículas. Idealmente, para obtener estas incertidumbres, habría que ejecutar miles de realizaciones del mismo modelo cosmológico y obtener en todas ellas el número de halos que se forman por unidad de volumen e intervalo de masa. A partir de estas cantidades, habría que calcular los respectivos valores medios a igual masa y sus desviaciones típicas, que representarían sus errores. Sin embargo, este proceso conllevaría un tiempo y un coste computacional excesivo. Por ello, para aproximar las incertidumbres, se puede utilizar el método de bootstrapping, basado en el remuestreo estadístico. Dada la lista de masas de halos de cada simulación, se generan una serie de muestras nuevas a partir de ella. El procedimiento es sencillo: se van escogiendo aleatoriamente y con repetición valores de la lista de masas de halos hasta generar otra lista de igual longitud. Para cada una de las muestras, se obtienen los valores de la densidad numérica de halos por intervalo de masa, siguiendo el mismo procedimiento que en la muestra original y utilizando la misma partición de intervalos de masa. A continuación, se selecciona de cada muestra el punto correspondiente a una misma masa (centros de intervalos). A partir de estos valores, se calcula la desviación estándar, que constituirá la incertidumbre de los valores de la muestra original de la densidad numérica de halos por intervalo de masa.

En la Figura 3, se exponen los resultados obtenidos para las dos simulaciones estándar L1600 (a) y L100 (b). Mediante un programa propio en lenguaje Python se han generado 50 muestras para el cálculo de las incertidumbres a partir del método de bootstrapping. En los paneles superiores, se representan los distintos valores del número de halos por unidad de volumen e intervalo de masa en función de la masa de cada una de las simulaciones. Puesto que las incertidumbres son bastante pequeños, no se aprecian. Por ello, se ha añadido en ambas gráficas un panel inferior. Aquí, se representan en forma de barras de error las incertidumbres relativas  $\Delta$ , es decir, si  $s_i$  es la desviación de un punto y  $\bar{F}_i$  el valor medio de las densidades numéricas de halos por intervalo de masa calculadas en dicho punto:

$$\Delta = \frac{s_i}{\bar{F}_i} \quad [45]$$



**Figura 3:** Incertidumbres de las simulaciones estándar calculadas por el método de bootstrapping. En los paneles superiores se representa el  $\log_{10}$  de la densidad numérica de halos por intervalo de masa frente al  $\log_{10}$  de la masa. En los paneles inferiores se representan las incertidumbres relativas  $\Delta$  (desviación típica entre valor medio) de cada valor en forma de barras de error. En (a), se representan como puntos naranjas los resultados de la simulación L1600. En (b), se representan como cuadrados celestes los resultados de la simulación L100. Las incertidumbres obtenidas son despreciables de cara a los análisis que se llevan a cabo en este trabajo.

El panel inferior resulta muy útil para entender la magnitud de estas incertidumbres estadísticas. Se observa que, más allá del límite de resolución, para puntos donde hay a un mayor número de halos por unidad de volumen e intervalo de masa, las incertidumbres relativas  $\Delta$  son menores, es decir, las desviaciones típicas son muy pequeñas respecto a los valores medios. Esto resulta lógico, pues, dado que en el intervalo correspondiente a estos puntos existe un gran número de halos, las muestras generadas de manera uniformemente aleatoria también tendrán un gran número de halos en estos intervalos. Por tanto, el valor de la función de masa de halo calculado no diferirá en gran medida del calculado en la muestra original.

Cuantitativamente, las incertidumbres obtenidas son muy pequeñas. De nuevo, considerando solo los valores más allá del límite de resolución, en el caso de la simulación L1600, la máxima incertidumbre es menor al 2% mientras que en la simulación L100, está en torno al 3%. Por todo ello, de aquí en adelante no se muestran barras de error.

En resumen, tras realizar el filtrado de subhalos, se ha precisado la masa a partir de la que las simulaciones tienen buena resolución y los errores numéricos son despreciables. En lo que sigue, solo se calcula la función de masa de halo a partir de esta masa, correspondiente a la de 70 partículas. Además, se ha comprobado mediante el uso del método de bootstrapping que

las incertidumbres de los valores calculados de la función de masa de halo de las simulaciones L1600 y L100 resultan despreciables para los análisis que se van a realizar a continuación. En la siguiente sección, se compararán los resultados de las simulaciones estándar L1600 y L100 con las predicciones analíticas.

### 5.3.3. Simulaciones estándar

Las dos simulaciones estándar a analizar, L1600 y L100 tienen una diferencia clara: el volumen de la primera es muy superior al de la segunda. Esto va a permitir estudiar la función de masa de halo en un amplio rango de masa. En esta sección, se compararán los resultados de ambas simulaciones entre sí y con la predicción analítica de Press-Schechter. Además, también se incluirán las funciones semianalíticas de masa de halos descritas en el Capítulo 4: las funciones de Sheth-Tormen y Jenkins.

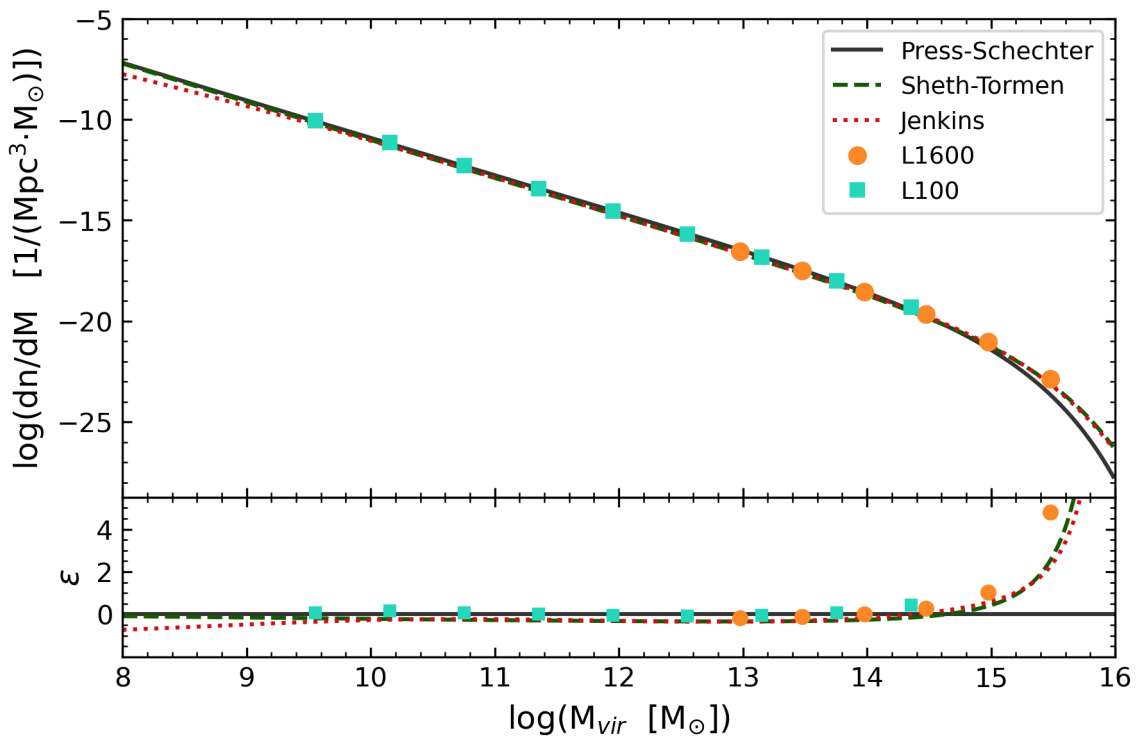
Calculada la densidad numérica de halos por intervalo de masa en cada simulación, se observa en el panel superior de la Figura 4, que los resultados de las simulaciones L1600 (círculos naranjas) y L100 (cuadrados azules) parecen concordar con las predicciones analíticas. Se puede apreciar que las tres funciones de masa de halo representadas, esto es, las líneas de Press-Schechter (negra continua), Sheth-Tormen (verde discontinua) y Jenkins (roja punteada), guardan cierta similitud entre sí. Para estudiar con detalle las diferencias entre estas funciones y las desviaciones de los datos experimentales respecto a ellas, se calcula el error relativo  $\varepsilon$  respecto a la función de Press-Schechter, tanto de los resultados de las simulaciones como de las funciones de Sheth-Tormen y Jenkins. Este error relativo se calcula de la siguiente manera. Si  $F_j$  es un valor de la función de masa de halo a una masa determinada, bien de una de las simulaciones o bien de las funciones propuestas por Sheth-Tormen o Jenkins, y  $F_{PS}$  es el valor que toma la función de Press-Scheter evaluada en la misma masa, el error relativo  $\varepsilon$  viene dado por:

$$\varepsilon = \frac{F_j - F_{PS}}{F_{PS}} \quad [46]$$

Así, en el panel inferior de la Figura 4, se observa este error relativo respecto al 0, que se corresponde con la función de Press-Scheter. Esto evidencia las diferencias existentes entre



los resultados de las simulaciones y las funciones analíticas, cosa difícil de apreciar en el panel superior pues utiliza la escala logarítmica en ambos ejes. Se puede apreciar que los resultados experimentales se ajustan a la función analítica de Press-Schechter con porcentajes de error menores al 20 % hasta masas de  $10^{14} M_{\odot}$ . Más allá, se observa que los resultados de ambas simulaciones tienden alejarse de la predicción de Press-Schechter y toman valores más altos, en especial los resultados de L1600, cuyo último valor tiene un porcentaje de error del 480 %.



**Figura 4:** Comparación entre la función de masa de halo teóricas y los resultados de las simulaciones. En el panel de arriba, se representa el  $\log_{10}$  de la función de masa de halo frente al  $\log_{10}$  de la masa. En el panel de bajo se representa la desviación respecto a la función analítica de Press-Schechter frente al  $\log_{10}$  de la masa. La línea negra representa la función de Press-Schechter; la línea verde discontinua, la función de Sheth-Tormen y la línea roja punteada, la función de Jenkins. Los puntos naranjas se corresponden con los resultados de la simulación L1600. Los cuadrados azules se corresponden con los resultados de la simulación L100.

Una posible explicación para este comportamiento reside en la estadística de las simulaciones. Al estar formados por más partículas, el número de halos de grandes masas ( $M_{vir} > 10^{14} M_{\odot}$ ) resultantes de las simulaciones es pequeño, pues están formados por muchas partículas. Esto hace que pequeñas variaciones en el número de estos halos puedan provocar grandes fluctua-

ciones y, a grandes masas, se observen desviaciones respecto a las funciones analíticas. Por esta misma razón, la región de grandes masas es la más difícil de modelar. Para ello, hace falta un volumen muy grande.

No obstante, diversos estudios en los que también se analizan resultados obtenidos de simulaciones de  $N$  cuerpos, indican que la función de masa de halo del formalismo de Press-Schechter subestima el número de halos más masivos [36]. A raíz de esto, su principal objetivo fue obtener una función de masa de halo semianalítica, esto es, utilizando los resultados de simulaciones cosmológicas, tal y como se introdujo en la Sección 4.2. En este trabajo, se han introducido las funciones de masa semianalíticas de Sheth-Tormen (ecuación 43) y de Jenkins (ecuación 44), las cuales también se representan en la Figura 4. Aquí se aprecia como ambas predicen a alta masa una densidad numérica de halos creciente respecto a la función de Press-Schechter, de modo que los resultados de las simulaciones se aproximan con menor error relativo a estas predicciones semianalíticas, aunque siguen dando un número de halos mayor.

Con este análisis, se pretende ilustrar que los modelos semianalíticos no son infalibles y solo son válidos hasta una precisión concreta. A pesar de los intentos por obtener una función de masa de halo exacta y universal, a día de hoy todavía existen obstáculos para ello. Por un lado, es necesario dar una definición precisa de la masa de halo [37]. Por otro lado, las simulaciones cosmológicas de  $N$  cuerpos trabajan con un volumen finito y un número de partículas restringido debido a los límites de la tecnología computacional. Esto hace que el rango de masas donde las funciones semianalíticas son válidas esté limitado [36]. Es más, tal y como se ha explicado anteriormente, las simulaciones presentan errores. Estos deben ser minimizados en vista a poder igualar la precisión de posibles observaciones [38].

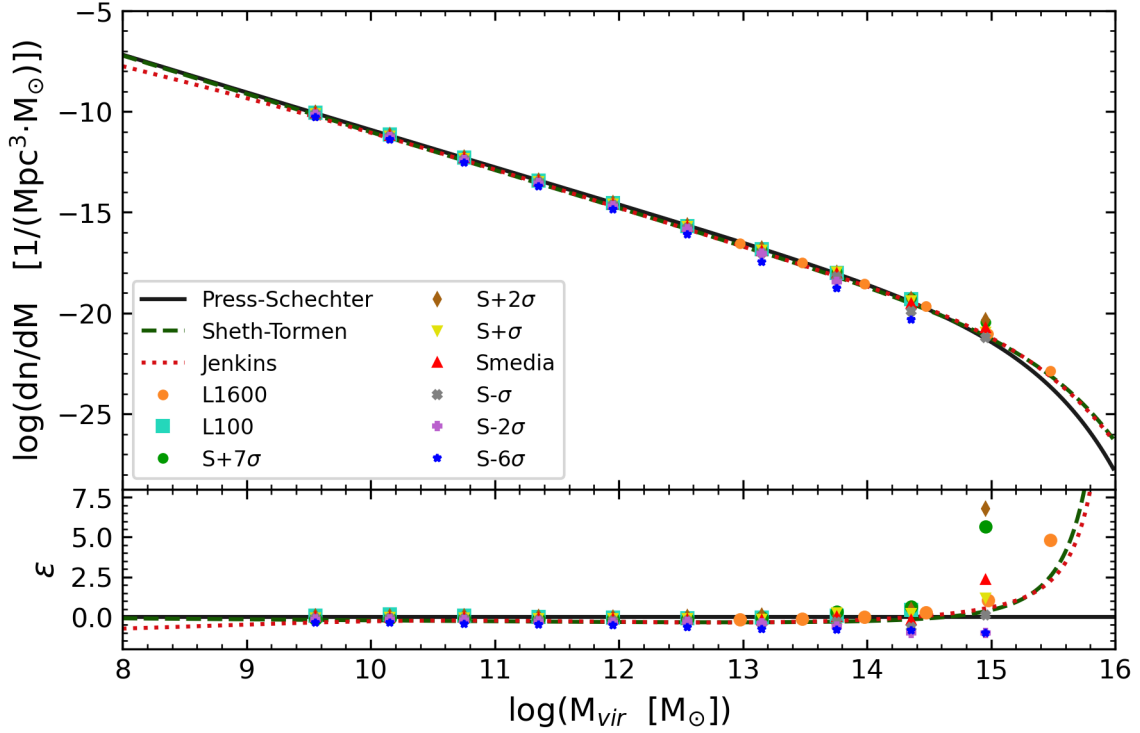
#### **5.3.4. Simulaciones Zoom**

La evolución del universo muestra que las zonas densas tienden a ser más densas y las vacías, más vacías. Bajo esta premisa, cabe preguntarse si el número de halos existentes y sus propiedades se ve afectado por la densidad de la zona donde se formen. En esta sección se pretende estudiar la función de masa de halo en regiones con distinta densidad, desde zonas muy poco densas hasta zonas muy densas en comparación con la densidad media.

Con este fin, se emplean distintas simulaciones zoom, cuyas principales características se presentan en la Tabla 2. Todas ellas han sido ejecutadas en un volumen de alta resolución formado por una caja de lado 83 Mpc/h inmersa y centrada en una caja mayor de 1600 Mpc/h. Fuera de la caja de 83 Mpc/h hay, gradualmente, menos partículas y de menor resolución, es decir, de mayor masa. Esto significa que, al alejarse de la caja de 83 Mpc/h, hay cada vez menos partículas y estas son más pesadas. Así, cerca de los bordes, las partículas de alta resolución de la caja de 83 Mpc/h interactuarán con otras de menor resolución, lo que puede influir en el número de halos que se formen. Para evitar estos posibles efectos de borde por la diferencia de resolución, se toma como volumen total una caja de 80 Mpc/h centrada en la caja de 83 Mpc/h. El catálogo de halos de cada simulación proporciona la posición de cada halo, dando las coordenadas de su centro  $(x,y,z)$ . De este modo, basta seleccionar los halos que se encuentren en una caja de 80 Mpc/h centrada en el volumen total. De nuevo, esto se realiza mediante un programa propio en lenguaje Python.

A partir de aquí, el procedimiento para calcular el número de halos por unidad de volumen e intervalo de masa de cada una de las simulaciones zoom es similar al realizado para el caso anterior de las simulaciones estándar. Se realiza el filtrado de subhalos, se calcula el número de halos por unidad de volumen e intervalo de masa y se suprimen los datos por debajo del límite de resolución, es decir, por debajo de la masa correspondiente a 70 partículas.

En el panel superior de la Figura 5, se representan los resultados obtenidos para las distintas simulaciones zoom junto con la función analítica de Press-Schechter y las funciones semianalíticas de Sheth Tormen y Jenkins. Además, se añaden tanto los resultados de la simulación L100, que tiene un volumen y una resolución de un orden similar a las simulaciones zoom, como los de la simulación L1600, donde se forman halos más masivos. Ambas servirán para comparar los resultados de las simulaciones zoom y estándar. De nuevo, se agrega un segundo panel en el que se muestran los errores relativos  $\varepsilon$  respecto a la función de Press-Schechter.



**Figura 5:** Comparación entre las funciones de masa de halo analíticas y semianalíticas, la simulaciones L100 y L1600, y las simulaciones zoom. En el panel de arriba, se representa el  $\log_{10}$  de la función de masa de halo frente al  $\log_{10}$  de la masa. En el panel de abajo se representa la desviación respecto a la función analítica de Press-Schechter frente al  $\log_{10}$  de la masa. La línea negra representa la función de Press-Schechter; la línea verde discontinua, la función de Sheth-Tormen y la línea roja punteada, la función de Jenkins. Los puntos naranjas se corresponden con los resultados de la simulación L1600. Los cuadrados azules se corresponden con los resultados de la simulación L100. El resto de marcadores se corresponden con los resultados de las simulaciones zoom: S+7 $\sigma$  (círculos verdes), S+2 $\sigma$  (rombos marrones), S+ $\sigma$  (triángulos hacia abajo amarillos), Smedia (triángulos rojos), S- $\sigma$  (equis grises), S-2 $\sigma$  (cruces lilas) y S-6 $\sigma$  (estrellas azules). Las simulaciones zoom de zonas de distintas densidades presentan una mayor diferencia a alta masa

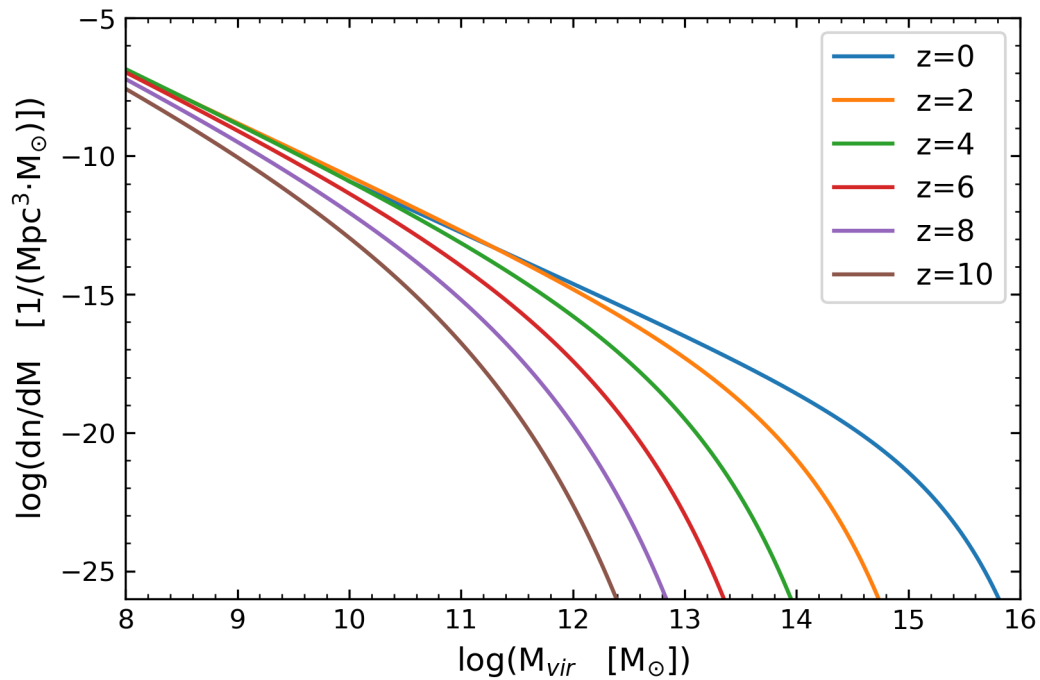
Si se comparan los resultados de la región de densidad media, Smedia, con la función de Press-Schechter, se observa que, al igual que en las simulaciones estándar, la densidad numérica por intervalo de masa de halos difiere de la función analítica entre 20-80 % en un gran rango de masas ( $M_{vir} < 10^{14.5} M_{\odot}$ ). De nuevo, en el caso de los halos más masivos, se tiene un porcentaje de error alto, concretamente, del 233 %. Es más, también existe una diferencia de un orden similar respecto a las funciones semianalíticas de Sheth-Tormen y Jenkins.

Cabe esperar que esta región de densidad media tenga un comportamiento similar a las simulaciones estándar analizadas anteriormente. Al compararla con los resultados de la simulación L100, en un amplio rango de masas ( $M_{vir} < 10^{14} M_{\odot}$ ) difieren menos de un 20 %. Por encima de esta masa, las diferencias se hacen más notables, hasta el punto de que, en el caso de L100, no se forman halos de  $M_{vir} \approx 10^{15} M_{\odot}$ , a diferencia de Smedia.

Si, por consiguiente, se comparan los resultados de Smedia con los de la simulación L1600 para masas  $M_{vir} \approx 10^{15} M_{\odot}$  se observa que Smedia da un número de halos por unidad de volumen e intervalo de masa mayor. Esto puede deberse a las ya mencionadas fluctuaciones estadísticas de varianza cósmica, mayores a grandes masas.

Llegado este punto, resulta de gran interés estudiar las fluctuaciones del número de halos por unidad de volumen e intervalo de masa debidas a la densidad de la zona donde se formen. Para ello, se toma la ya analizada simulación Smedia como referencia. De nuevo, la región de alta masa ( $M_{vir} > 10^{14} M_{\odot}$ ) presenta las diferencias más importantes. En general, la tendencia observada respecto a Smedia es la siguiente. En las regiones menos densas que la media se forma un número menor de halos por unidad de volumen e intervalo de masa; mientras que, en las zonas más densas que la media este número es mayor. En el caso de  $S+\sigma$ , se puede apreciar que al contrario de lo que se podría intuir, se forman menos halos muy masivos ( $M_{vir} \approx 10^{15} M_{\odot}$ ) que en Smedia. Nuevamente, esto puede ser ocasionado por las fluctuaciones estadísticas. Estas fluctuaciones también pueden ser la causa por la que, para las simulaciones  $S-2\sigma$  y  $S-6\sigma$ , no se forman halos para masas en torno a  $M_{vir} \approx 10^{15} M_{\odot}$ .

En cuanto a las simulaciones de regiones más densas,  $S+2\sigma$  y  $S+7\sigma$ , el número de halos más masivos por unidad de volumen e intervalo de masa que se forman tiene una diferencia entre 300-450 % respecto a los resultados de Smedia. En esta línea, resulta interesante estudiar la dependencia de la función de masa de halo con el redshift  $z$ . Para ello, se muestra la Figura 6, donde se representa la función de masa de halo de Press-Schechter a distinto  $z$  para ilustrar esta dependencia.



**Figura 6:** Función de masa de halo de Press-Schechter a distinto redshift. Se representa el  $\log_{10}$  de la función de masa de halo frente al  $\log_{10}$  de la masa. Cada línea se corresponde con:  $z=0$  (azul),  $z=2$  (naranja),  $z=4$  (verde),  $z=6$  (rojo),  $z=8$  (lila),  $z=10$  (marrón).

En vista de cómo evoluciona la función de masa de halo respecto al redshift, se puede dar la siguiente explicación a los comportamientos observados en las regiones de diferente densidad. Se ha estudiado que, a masas grandes, los resultados de las simulaciones de regiones más densas ( $S+7\sigma$  y  $S+2\sigma$ ) dan más halos que media. Esto puede deberse a que estas zonas tienden a hacerse más densas y evolucionan más rápidamente, como si, aparentemente, estuvieran a un redshift menor. En la misma línea, en cuanto a las simulaciones de regiones menos densas, el hecho de que no presenten halos muy masivos encaja con que las regiones menos densas tienden a vaciarse.

# **III**

---

## **Conclusiones**

---





## 6 | **Discusión y conclusiones**

Dentro del paradigma cosmológico del modelo cosmológico en general y del modelo  $\Lambda$ CDM en particular, se ha estudiado el número de halos de materia oscura que se forman por unidad de volumen e intervalo de masa, lo que se conoce como la función de masa de halo. El estudio de la función de masa de halo resulta crucial a la hora de constreñir los parámetros cosmológicos característicos del modelo cosmológico que rige nuestro universo.

Para ello, se ha introducido tanto el formalismo analítico de Press-Schechter, construido a partir de las propiedades estadísticas del campo de densidades, como los modelos semianalíticos de Sheth-Tormen y Jenkins, que utilizan los resultados de simulaciones de N cuerpos para ajustar la función de masa de halo. Mediante un código propio en lenguaje Python, se ha hecho un programa capaz de calcular estas tres funciones de masa de halo para distintos intervalos de masa y modelos cosmológicos. Además, se han analizado los resultados de distintas simulaciones cosmológicas de N cuerpos. De nuevo, mediante un código propio en lenguaje Python, se ha podido calcular el número de halos por unidad de volumen e intervalo de masa que se forma en cada una de las simulaciones.

En primer lugar, se han analizado dos simulaciones estándar ejecutadas en volúmenes distintos con el fin de estudiar el número de halos por unidad de volumen e intervalo de masa en un rango amplio de masas. La comparación entre los resultados obtenidos y la predicción analítica de Press-Schechter refleja la falta de precisión de dicho modelo. En concreto, esto se hace muy evidente a alta masa, donde los resultados divergen notablemente de la función de Press-Schechter dando un número mayor de halos por unidad de volumen e intervalo de masa. En principio, esto puede deberse a posibles fluctuaciones debidas a la estadística de las

simulaciones, conocidas como varianza cósmica.

Esta tendencia sí es descrita por las funciones semianalíticas de Sheth-Tormen y Jenkins. No obstante, las diferencias entre dichas funciones y los resultados de las simulaciones alcanzan porcentajes de error en torno al 20-80 %. Esta precisión está lejos de la requerida hoy en día ( $\sim 1-2\%$ ) para que estos modelos resulten posibles e interesantes. Por ello, en los últimos años, se han ido desarrollando nuevos modelos semianalíticos de la función de masa de halo. Al igual que Sheth-Tormen y Jenkins, estos se basan, esencialmente, en los resultados de distintas simulaciones cosmológicas. Algunos de los estudios más relevantes en este campo son los realizados por Reed [39], Warren [40], Tinker [41], Crocce [42], Bhattacharya [43] y Bocquet [44]. Este último estudio resulta especialmente interesante, pues construye un emulador de la función de masa de halo a alta masa (a partir de  $10^{13}M_{\odot}$ ), región más difícil de modelar debido a las mencionadas fluctuaciones estadísticas y a las restricciones que suponen emplear un volumen finito en las simulaciones.

En segundo lugar, se han estudiado una serie de simulaciones zoom de regiones con densidades distintas con el fin de comprobar cómo afecta esta diferencia a la formación de halos. Tomando la región de densidad media como referencia, se ha comprobado que, a  $z = 0$  y a alta masa, se observan diferencias notables con las zonas de distinta densidad. Por un lado, en las regiones menos densas no se forman halos muy masivos. Esto puede deberse a posibles fluctuaciones estadísticas de las propias simulaciones, pero también puede verse como que las regiones vacías tienden a ser más vacías. Por otro lado, las regiones más densas muestran un comportamiento opuesto, dado que se forman más halos masivos que en la zona de densidad media.

En vista a la evolución de la función de masa de halo respecto al redshift, la tendencia que se observa para regiones de distinta densidad apunta a que las zonas más densas evolucionan más rápido, pues dan valores de la función de masa de halo que parecen corresponderse la obtenida para un redshift más alto. A raíz de esto, cabe dar un paso más allá: parece intuirse que si se toma una región con densidad media y se estudia su correspondiente función de masa de halo, se podrían recrear zonas de distinta densidad simplemente ajustando el tiempo de evolución. En este contexto, se abre una vía de investigación futura: el estudio de la función de masa de halo respecto al redshift. En este trabajo, se ha mostrado dicha dependencia para la función

analítica de Press-Schechter. No obstante, diversas investigaciones, tales como los trabajos ya mencionados de Jenkins, parecen indicar que las predicciones de Press-Schechter fallan al aumentar el redshift. Esto se suma a la falta de precisión del modelo de Press-Schechter como razones para intentar ajustar la función de masa de halo de forma semianalítica. Así, uno de los principales objetivos de los diversos estudios, citados más arriba, es encontrar una expresión universal de la función de masa de halo, esto es, una función que prediga correctamente a cualquier redshift el número de halos por unidad de volumen e intervalo de masa. Esto supondría un gran avance en el campo de la cosmología en general y en la formación de estructura en general. Por un lado, permitiría estudiar la distribución de halos a través del tiempo en un determinado modelo cosmológico. Por otro lado, siempre que la premisa mostrada anteriormente sea válida, se podrían modelar las funciones de masa de halo para zonas con distinta densidad, sencillamente a partir la función de masa de halo de una región de densidad media.

Otra posible vía de investigación es la comprobación mediante observaciones de la validez de la función de masa de halo. El principal obstáculo para ello es evidente: la materia oscura es invisible y no se puede observar a día de hoy. En su lugar, sí se pueden observar galaxias, contarlas y estudiar la densidad numérica de galaxias en función de su masa estelar. Cabría esperar que esta densidad numérica de galaxias fuera similar a la de los halos multiplicada por la fracción de materia bariónica. Así, al comparar la distribución que se observan de las galaxias con las que predicen distintos modelos cosmológicos para los halos de materia oscura se podrían constreñir los parámetros cosmológicos.

Sin embargo, los resultados obtenidos difieren drásticamente, sobre todo en los límites de baja y alta masa [45]. El problema radica en que la evolución de las galaxias es un proceso mucho más complejo que abarca todo un campo de estudio. Por un lado, se debe precisar la masa mínima de un halo para que se acumule la cantidad de gas necesaria para que se alcancen densidades altas y de formen estrellas. A partir de aquí, para halos con masas suficientemente grandes para la formación estelar, cabe preguntarse por la eficiencia de este proceso, esto es, por la cantidad de masa bariónica que llega a formar estrellas. En este contexto, toman importancia diversos procesos físicos más complejos, tales como la hidrodinámica o la radiación, que deben ser tenidos en cuenta. Algunos estudios interesantes sobre cómo se relacionan las galaxias y los halos de materia oscura son [46] y [47].

Todo esto evidencia que el estudio de formación de estructura a gran escala se encuentra en continuo desarrollo. En conclusión, en este trabajo se ha dado un primer paso en el estudio de la formación de estructura a nivel cosmológico. Se ha mostrado, además, la importancia de las simulaciones cosmológicas para confrontar las predicciones analíticas, especialmente si estas realizan aproximaciones lineales, pues las simulaciones dan soluciones más precisas ya que pueden modelar problemas no lineales. Para analizar los resultados de las simulaciones, se ha hecho uso del lenguaje Python, empleado comúnmente en el ámbito de la astrofísica en particular y entre la comunidad científica en general.

# Bibliografía

- [1] A. Einstein, “Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie,” *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pp. 142–152, Jan. 1917.
- [2] A. Friedman, “Über die Krümmung des Raumes,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 10, 1922.
- [3] E. Hubble, “A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 15, 1929.
- [4] G. Gamow, “Expanding universe and the origin of elements,” *Physical Review*, 1946.
- [5] A. A. Penzias and R. W. Wilson, “A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s.,” *The Astrophysical Journal*, vol. 142, 1965.
- [6] L. Bergström and A. Goobar, *Cosmology and Particle Astrophysics*. Springer, 2nd Edition, 2004.
- [7] J. Garcia-Bellido, “Cosmology and Astrophysics,” Universidad Autónoma de Madrid, Feb. 2005.
- [8] S. Weinberg and R. H. Dicke, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, 1972.
- [9] O. Elgaroy, “AST4220: Cosmology I,” Universitetet i Oslo.
- [10] S. M. Carroll, “The Cosmological Constant,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 4, Feb 2001.
- [11] H. Kragh, “Preludes to dark energy: Zero-point energy and vacuum speculations,” 2011.

- [12] D. J. Croton, “Damn You, Little  $h$ ! (or, Real-World Applications Of The Hubble Constant Using Observed And Simulated Data),” *Publications of the Astronomical Society of Australia*, vol. 30, 2013.
- [13] G. Hinshaw, D. Larson, E. Komatsu, D. N. Spergel, C. L. Bennett, J. Dunkley, M. R. Nolta, M. Halpern, R. S. Hill, N. Odegard, and et al., “Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results,” *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 208, p. 19, Sep 2013.
- [14] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, and et al., “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 641, p. A6, Sep 2020.
- [15] “Universe 101,” September 2015.
- [16] D. N. Spergel, R. Bean, O. Dore, M. R. Nolta, C. L. Bennett, J. Dunkley, G. Hinshaw, N. Jarosik, E. Komatsu, L. Page, and et al., “Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology,” *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 170, p. 377–408, Jun 2007.
- [17] A. H. Guth and S. Y. Pi, “Fluctuations in the New Inflationary Universe,” *Physical Review*, vol. 49, pp. 1110–1113, Oct. 1982.
- [18] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, and et al., “Planck 2018 results. V. CMB power spectra and likelihoods,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 641, p. A5, Sep 2020.
- [19] D. Farnsworth and M. Braun, *Differential Equations and Their Applications: An Introduction to Applied Mathematics*. Springer, 4th Edition, 1993.
- [20] D. Weinberg, “A873: Cosmology and structure formation. VII. linear fluctuations,” The Ohio State University, Department of Astronomy, 2007.
- [21] C. Baugh, “Correlation Function and Power Spectra in Cosmology,” *Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics*, 2004.

- [22] M. Tegmark, M. R. Blanton, M. A. Strauss, F. Hoyle, D. Schlegel, R. Scoccimarro, M. S. Vogeley, D. H. Weinberg, I. Zehavi, A. Berlind, and et al., “The Three-Dimensional Power Spectrum of Galaxies from the Sloan Digital sky survey,” *The Astrophysical Journal*, vol. 606, p. 702–740, May 2004.
- [23] J. E. Gunn and I. Gott, J. Richard, “On the Infall of Matter Into Clusters of Galaxies and Some Effects on Their Evolution,” *The Astrophysical Journal*, vol. 176, p. 1, Aug. 1972.
- [24] E. Bertschinger, “Self-similar secondary infall and accretion in an Einstein-de Sitter universe,” *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 58, pp. 39–65, May 1985.
- [25] S. Planelles, D. R. Schleicher, and A. M. Bykov, “Large-Scale Structure Formation: From the first non-linear objects to massive galaxy clusters,” 2015.
- [26] W. H. Press and P. Schechter, “Formation of galaxies and clusters of galaxies by self-similar gravitational condensation,” *The Astrophysical Journal*, vol. 187, 1974.
- [27] M. Dijkstra, “AST4320: Lecture 8. The Press-Schechter Formalism.” Universitetet i Oslo.
- [28] A. Jenkins, C. S. Frenk, S. D. White, J. M. Colberg, S. Cole, A. E. Evrard, H. M. Couchman, and N. Yoshida, “The mass function of dark matter haloes,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 321, 2001.
- [29] R. K. Sheth and G. Tormen, “Large-scale bias and the peak background split,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 308, 1999.
- [30] M. Vogelsberger, F. Marinacci, P. Torrey, and E. Puchwein, “Cosmological Simulations of Galaxy Formation,” 2020.
- [31] J. Barnes and P. Hut, “A hierarchical  $O(N \log N)$  force-calculation algorithm,” *Nature*, vol. 324, 1986.
- [32] P. de Bernardis, P. A. R. Ade, J. J. Bock, J. R. Bond, J. Borrill, A. Boscaleri, K. Coble, B. P. Crill, G. De Gasperis, P. C. Farese, and et al., “A Flat Universe from High-Resolution Maps of the Cosmic Microwave Background Radiation,” *Nature*, vol. 404, p. 955–959, Apr 2000.
- [33] V. Springel, R. Pakmor, O. Zier, and M. Reinecke, “Simulating cosmic structure formation with the GADGET-4 code,” 2020.

- [34] A. Lewis and A. Challinor, “CAMB: Code for anisotropies in the microwave background,” Feb. 2011.
- [35] O. Hahn and T. Abel, “Multi-scale initial conditions for cosmological simulations,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 415, p. 2101–2121, Jul 2011.
- [36] Z. Lukić, K. Heitmann, S. Habib, S. Bashinsky, and P. M. Ricker, “The Halo Mass Function: High-Redshift Evolution and Universality,” *The Astrophysical Journal*, vol. 671, p. 1160–1181, Dec 2007.
- [37] M. White, “The mass of a halo,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 367, p. 27–32, Feb 2001.
- [38] K. Heitmann, P. M. Ricker, M. S. Warren, and S. Habib, “Robustness of Cosmological Simulations. I. Large-Scale Structure,” *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 160, p. 28–58, Sep 2005.
- [39] D. Reed, J. Gardner, T. Quinn, J. Stadel, M. Fardal, G. Lake, and F. Governato, “Evolution of the Mass Function of Dark Matter Haloes,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 346, p. 565–572, Nov 2003.
- [40] M. S. Warren, K. Abazajian, D. E. Holz, and L. Teodoro, “Precision Determination of the Mass Function of Dark Matter Halos,” *The Astrophysical Journal*, vol. 646, p. 881–885, Aug 2006.
- [41] J. Tinker, A. V. Kravtsov, A. Klypin, K. Abazajian, M. Warren, G. Yepes, S. Gottlöber, and D. E. Holz, “Toward a halo mass function for precision cosmology: The limits of universality,” *The Astrophysical Journal*, vol. 688, p. 709–728, Dec 2008.
- [42] M. Crocce, P. Fosalba, F. J. Castander, and E. Gaztañaga, “Simulating the Universe with MICE: The abundance of massive clusters,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 403, p. 1353–1367, Apr 2010.
- [43] S. Bhattacharya, K. Heitmann, M. White, Z. Lukić, C. Wagner, and S. Habib, “Mass Function Predictions Beyond  $\Lambda$ CDM,” *The Astrophysical Journal*, vol. 732, p. 122, Apr 2011.
- [44] S. Bocquet, K. Heitmann, S. Habib, E. Lawrence, T. Uram, N. Frontiere, A. Pope, and H. Finkel, “The Mira-Titan Universe. III. Emulation of the Halo Mass Function,” 2020.



- [45] J. S. Bullock and M. Boylan-Kolchin, “Small-Scale Challenges to the  $\Lambda$ CDM paradigm,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 55, p. 343–387, Aug 2017.
- [46] B. P. Moster, R. S. Somerville, C. Maubetsch, F. C. van den Bosch, A. V. Macciò, T. Naab, and L. Oser, “Constraints on the relationship between stellar mass and halo mass at low and high redshift,” *The Astrophysical Journal*, vol. 710, p. 903–923, Jan 2010.
- [47] P. S. Behroozi, R. H. Wechsler, and C. Conroy, “The Average Star Formation Histories of Galaxies in Dark Matter Halos from  $z= 0-8$ ,” *The Astrophysical Journal*, vol. 770, p. 57, May 2013.



# Agradecimientos

Primero de todo, quiero agradecer a mi tutor, José Oñorbe Bernis, por la dedicación y la constante ayuda que me ha brindado para la elaboración de este Trabajo de Fin de Grado. Durante meses me ha guiado por el emocionante mundo de la astrofísica y la cosmología.

También, me gustaría agradecer a los que siempre han estado conmigo. A mis padres, por el incansable apoyo en tiempos difíciles. A mi hermana, por escucharme, por entenderme, por todo.

Por último, quiero agradecer a Puccini, Debussy y Ravel por ser mi particular banda sonora en este viaje de la armonía de las esferas al universo en expansión.

