



UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Trabajo de Fin de Grado

Doble Grado en Física y Matemáticas

Aplicaciones geométricas del Principio del Máximo para EDPs elípticas

Presentado por:

Alberto Cerezo Cid

Dirigido por:

Isabel Fernández Delgado

Ramón Jesús Flores Díaz

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

JULIO DE 2021

Abstract

The aim of this work is to give a detailed proof of two results from the theory of constant mean curvature surfaces: Alexandrov theorem [Ale58] and the halfspace theorem [HofMee90]. In order to do so, we need to develop some mathematical tools from the fields of differential geometry of surfaces and the theory of absolutely elliptic partial differential equations.

In the following chapter, we will start by introducing basic concepts associated with the theory of surfaces, such as tangent plane, first and second fundamental forms and the definitions of gaussian curvature and mean curvature.

In the second chapter, we will start by making use of the maximum principle for linear, elliptic and homogeneous PDEs in order to develop analogous results for absolutely elliptic PDEs. By the end of the chapter, we will be able to formulate a geometric maximum principle.

In the third chapter, we will prove Alexandrov's theorem, which states that the only sufficiently regular, simple and compact surface with constant mean curvature is the sphere.

Finally, we will give a proof of the halfspace theorem, as well as some generalizations. This result states that the only sufficiently regular, proper and minimal surface that can be contained in a halfspace is a plane.

Both these theorems rely strongly on two elements: the geometric maximum principle and certain geometrical constructions. One of our main goals in this work will be to make these constructions as visually clear and intuitive as possible. Additionally, Bernstein theorem [Ber04] will be used to lower the restrictions on the regularity of the surfaces.

Agradecimientos

Me gustaría aprovechar este espacio para tomar cierta perspectiva y agradecer a varias personas que han hecho posible la realización de mis estudios.

En primer lugar, quería agradecer a mis padres todo su cariño, apoyo y en particular su esmero desde el primer momento por desarrollar mi curiosidad por aprender. También gracias a ellos he disfrutado del privilegio que supone poder estudiar sin tener ninguna otra preocupación.

En segundo lugar, quiero agradecer a Elías, Manu y Laura los momentos compartidos, las *discusiones filosóficas* y el apoyo mutuo. Sin lugar a dudas, son el mejor regalo que me puedo llevar tras estos años.

Finalmente, quería agradecer a mis tutores su dedicación, amabilidad y paciencia, entre otras muchas virtudes. Y por supuesto, por guiarme en el desarrollo de mi vocación por la Geometría. Espero que este trabajo sea solo el primer paso de un extenso camino junto a ellos en mi formación académica.

Índice general

Introducción	4
1. Preliminares: superficies y curvatura	5
2. Ecuaciones en derivadas parciales y principio del máximo	16
2.1. Ecuaciones diferenciales absolutamente elípticas	16
2.2. Principio del máximo para EDPs elípticas	21
2.3. Principio del máximo geométrico	24
3. Teorema de Alexandrov	30
3.1. Resultados y construcciones previas al teorema	30
3.2. Resultado principal	44
4. Teorema del semiespacio	48
4.1. Resultado principal	48
4.2. Generalización en términos de envolventes convexas	52

Introducción

La teoría de superficies de curvatura media constante (CMC) se originó en el siglo XVIII, gracias a los trabajos de la matemática francesa Sophie Germain sobre teoría de elasticidad. Años más tarde, en el siglo XIX, el físico y matemático belga Joseph Plateau formuló el problema homónimo de determinar la forma de una pompa de jabón limitada por un alambre. Puesto que las pompas de jabón tienden a minimizar su área por la tensión superficial, este problema admite la siguiente reformulación en un lenguaje matemático:

Dada una curva de Jordan cerrada $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, determinar la superficie S tal que $\partial S = \Gamma$ con área mínima.

Las superficies de curvatura media constante (más específicamente, aquellas con curvatura media nula, llamadas superficies mínimas) vuelven a surgir en esta situación de forma natural, pues resultan ser puntos críticos del problema de Plateau. Por su parte, las superficies de curvatura media constante no nula aparecen como puntos críticos para un problema similar: el de minimizar el área encerrando un volumen fijo.

A pesar de la inicial motivación física de la teoría de superficies de curvatura media constante, esta acabó convirtiéndose en una materia de naturaleza puramente matemática en la que aparecen contribuciones de otros campos, como el análisis complejo o la teoría de ecuaciones en derivadas parciales elípticas.

Nuestro objetivo en este trabajo consistirá en dar una demostración de dos teoremas fundamentales en la teoría de CMC: el teorema de Alexandrov [Ale58] y el teorema del semiespacio [HofMee90].

El matemático ruso Alexander Danilovich Alexandrov demostró en los años 50 que la única superficie de clase C^3 simple, compacta y de curvatura media constante era la esfera. Este resultado responde parcialmente a la siguiente conjetura formulada por Heinz Hopf:

La única superficie compacta y de curvatura media constante es la esfera.

Años más tarde, en 1986, el matemático estadounidense Henry C. Wente encontró un contraejemplo a la conjetura, evidenciando que la hipótesis de que la superficie fuese simple (es decir, sin autointersecciones) resultaba imprescindible.

Por otra parte, teorema del semiespacio fue publicado en 1990 por los matemáticos estadounidenses David A. Hoffmann y William Meeks. Este teorema afirma que la única superficie de clase C^3 mínima y propia (ver definición 4.1) que se puede contener en un semiespacio es un plano. Este resultado, por su parte, se enmarca dentro de la siguiente conjetura formulada por E. Calabi:

¿Existe alguna superficie mínima y completa contenida en un semiespacio?

Aunque la conjetura fue confirmada en 1980 por los matemáticos brasileños Luquesio P. Jorge y Frederico Xavier [JorXav80], el teorema del semiespacio demuestra que no se cumple si admitimos que la superficie es propia, una condición más restrictiva que la de completitud.

La demostración de ambos teoremas se basa en dos elementos: el llamado principio del máximo geométrico (ver teorema 2.16) y una serie de construcciones geométricas que detallaremos con el objetivo de desarrollar una intuición clara y precisa sobre los argumentos expuestos.

El principio del máximo geométrico se deduce de dos resultados procedentes del campo de las ecuaciones en derivadas parciales elípticas, lineales y homogéneas, conocidos como principios del máximo (ver teoremas 2.8 y 2.11). La utilidad del principio del máximo para nuestros propósitos reside en el hecho de que la ecuación de curvatura media constante es en particular una EDP absolutamente elíptica (ver definición 2.1 y observación 2.3). Intuitivamente, el principio del máximo geométrico nos dice que, bajo ciertas condiciones, dos superficies de CMC con la misma curvatura que se *tocan* en un punto (ver definición 2.14 y 2.16) han de ser localmente iguales.

Las construcciones geométricas planteadas en ambos teoremas se basan en buscar, para una superficie S con ciertas hipótesis, otra superficie S' y forzar un contacto entre ellas. En el teorema de Alexandrov, S' será la reflexión de S por un cierto plano. Por su parte, para el teorema del semiespacio, se hará uso del catenoide, que es una superficie mínima.

Capítulo 1

Preliminares: superficies y curvatura

En este primer capítulo, repasaremos algunos conceptos fundamentales en teoría de superficies que usaremos a lo largo de este documento. Para esta sección, hemos seguido principalmente los capítulos 2 y 3 de *Differential geometry of curves and surfaces*, de Manfredo P. do Carmo [Car76].

Comenzaremos definiendo el concepto de superficie y plano tangente a un punto de la superficie:

Definición 1.1. Decimos que un conjunto conexo $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie** de clase C^k , $k \geq 2$, si para cada $p \in S$ existen abiertos $V \subset \mathbb{R}^3$ con $p \in V$, $U \subset \mathbb{R}^2$ y una aplicación $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$ tal que

1. $\mathbf{x} \in C^k(U)$. Si además podemos encontrar \mathbf{x} analítica, decimos que la superficie es **analítica**.
2. \mathbf{x} es un homeomorfismo.
3. \mathbf{x} es una inmersión, esto es, la aplicación diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ en q es inyectiva para todo $q \in U$.

Observación 1.2. A la aplicación \mathbf{x} la llamamos parametrización local o simplemente parametrización. En lo que sigue, no haremos referencia al abierto V , sino que admitiremos que la parametrización $\mathbf{x} : U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ es un homeomorfismo sobre su imagen y verifica $\mathbf{x}(U) = V \cap S$ con V un abierto de \mathbb{R}^3 . La condición 2 implica que S no puede tener autointersecciones. A veces se suele modificar esta condición para incluir superficies que presenten este comportamiento, llamando a las superficies sin autointersecciones **superficies simples**. Para nuestros propósitos, siempre trabajaremos con superficies simples.

Definición 1.3. Decimos que un vector ω es tangente a una superficie S en $p \in S$ si existe una parametrización $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ y una curva parametrizada $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ tales que $p = \mathbf{x}(\alpha(t_0))$ para un cierto $t_0 \in I$ y $\omega = \left. \frac{d(\mathbf{x} \circ \alpha)(t)}{dt} \right|_{t=t_0}$.

Definición 1.4. Dada una superficie S y un punto $p \in S$, definimos el **plano tangente** a S en p , $T_p(S) \subset \mathbb{R}^3$, como el conjunto de vectores tangentes a S en p .

La siguiente proposición afirma que el plano tangente es independiente de la parametrización local escogida:

Proposición 1.5. Dada una parametrización $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de S tal que $p = \mathbf{x}(q)$ para algún $q \in U$, se tiene que $T_p(S) = d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$, siendo $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación diferencial de \mathbf{x} en q y $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$ la imagen de $d\mathbf{x}_q$.

Observación 1.6. La proposición anterior asegura que $T_p(S)$ es un plano al serlo la imagen de $d\mathbf{x}_q$. Efectivamente, dada una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ y $q = (u_0, v_0) \in U$, la aplicación diferencial $d\mathbf{x}_q$ se puede representar mediante una matriz cuyas columnas son las derivadas parciales \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v evaluadas en (u_0, v_0) . La imagen de la diferencial será entonces el espacio vectorial generado por los vectores $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ y $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$.

Dado $p \in S$, la proposición y observación anteriores identifican el plano tangente $T_p(S)$ como un subespacio vectorial de dimensión 2 de \mathbb{R}^3 . Es más, $T_p(S)$ hereda de \mathbb{R}^3 un producto escalar, lo que nos permite definir el concepto de primera forma fundamental:

Definición 1.7. Se define la **primera forma fundamental** $I_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$ como la forma cuadrática $I_p(\omega) = |\omega|^2 = \langle \omega, \omega \rangle$, siendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar estándar en \mathbb{R}^3 .

Consideremos una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ de S en un entorno de un punto $p = \mathbf{x}(q)$. Trabajando en la base del plano tangente asociada a \mathbf{x} , esto es, $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$, podemos expresar el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mediante una matriz $\mathbf{G} = (g_{ij})$. Definimos entonces

$$g_{11} = E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle,$$

$$g_{12} = F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle,$$

$$g_{21} = F = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle,$$

$$g_{22} = G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle,$$

donde E , F y G son los llamados coeficientes de la primera forma fundamental. De esta forma, para un vector $\omega = a\mathbf{x}_u(q) + b\mathbf{x}_v(q) \in T_p(S)$ se tiene $I_p(\omega) = v^t \cdot \mathbf{G} \cdot v$ con $v = (a, b)^t$

Usando el producto escalar de $T_p(S)$, es posible definir también la segunda forma fundamental (ver definición 1.13). Para ello, necesitamos introducir el concepto de orientabilidad de una superficie y vector normal, así como la siguiente proposición:

Proposición 1.8. *Consideremos una superficie S , un punto $p \in S$ y un par de parametrizaciones locales $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, $\mathbf{y} : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ con $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W$. Entonces, la aplicación de cambio de coordenadas, definida como $h : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$, $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$, es un difeomorfismo.*

Definición 1.9. Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ se dice **orientable** si existe un conjunto de parametrizaciones locales $\mathbf{x}_i : U_i \rightarrow S$ que recubren S y tales que para todo i, j se tiene que o bien $U_i \cap U_j = \emptyset$ o bien los cambios de coordenadas $\mathbf{x}_j^{-1} \circ \mathbf{x}_i$ tienen jacobiano positivo.

La siguiente proposición dota de un sentido geométrico a la noción de orientabilidad: que una superficie sea orientable equivale a que podamos definir en ella un vector normal, que denotaremos por N .

Proposición 1.10. *Una superficie S es orientable si y solo si existe una aplicación diferenciable $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $N(p)$ es un vector unitario y perpendicular a $T_p(S)$ para todo $p \in S$.*

Definición 1.11. Dada una superficie orientable, escogemos una aplicación $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ verificando las propiedades de la proposición anterior. Por ser $N(p)$ unitario para todo $p \in S$, podemos tomar como conjunto de llegada la esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, que es una superficie. Definimos así la **aplicación de Gauss** como $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, que es una aplicación entre superficies.

Gracias a las propiedades de N , se tiene que $T_{N(p)}(\mathbb{S}^2) = T_p(S)$ para todo $p \in S$, pues ambos espacios tangentes son planos perpendiculares a $N(p)$. Por tanto, podemos entender la diferencial de N en p , $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_{N(p)}(\mathbb{S}^2) = T_p(S)$ como un endomorfismo de $T_p(S)$ en sí mismo.

Proposición 1.12. *La diferencial dN_p es autoadjunta, esto es, si consideramos el producto escalar estándar en $T_p(S)$ se tiene $\langle \omega_1, dN_p(\omega_2) \rangle = \langle dN_p(\omega_1), \omega_2 \rangle$.*

Definición 1.13. Definimos la **segunda forma fundamental** en el punto p , $II_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$ como la forma cuadrática $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$.

Observación 1.14. Estudiemos el significado geométrico de la segunda forma fundamental. Dado un vector $v \in T_p(S)$ unitario, consideremos una curva parametrizada naturalmente $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p \in S$ y $v = \dot{\alpha}(0)$. Por estar parametrizada naturalmente, la segunda derivada $\ddot{\alpha}(s)$ se corresponde con $k(s)n(s)$, siendo $n(s)$ el vector normal a la curva según el triedro de Frénet y $k(s)$ la curvatura. No obstante, $n(0)$ no es el único vector normal a la curva en p : como $\dot{\alpha}(0) = v \in T_p(S)$, el vector $N(p)$ también lo es. Es más, esto se verifica para todo s , es decir, $\langle N(\alpha(s)), \dot{\alpha}(s) \rangle = 0$. Si derivamos esta igualdad en $s = 0$, obtenemos

$$-\langle dN_p(\dot{\alpha}(0)), \dot{\alpha}(0) \rangle = \langle N(p), \ddot{\alpha}(0) \rangle \implies II_p(v) = \langle N(p), k(0)n(0) \rangle.$$

En otras palabras, la segunda forma fundamental nos da la componente de la proyección del vector $k(0)n(0)$ sobre la dirección de $N(p)$. Este resultado es llamativo: afirma que para toda curva $\alpha(s) \subset S$ pasando por p con vector tangente v , la proyección del vector kn sobre $N(p)$ tiene el mismo valor: la segunda forma fundamental evaluada en v . Este hecho se conoce como teorema de Meusnier (consultar [Car76], capítulo 3-2, proposición 2). Intuitivamente, podemos interpretar el resultado como que la segunda forma fundamental nos dice *cuánto se curvan* respecto a la dirección del vector $N(p)$ las curvas que pasan por p con un cierto vector tangente. En el ejemplo 1.22 repasaremos esta intuición.

Observación 1.15. Al igual que en la definición 1.7, podemos considerar los coeficientes de la matriz $\mathbf{B} = (b_{ij})$ asociada a la forma bilineal $(u, v) \mapsto -\langle dN_p(u), v \rangle$ expresados en la base del plano tangente dada por las derivadas parciales de \mathbf{x} en el punto $p = \mathbf{x}(q)$:

$$b_{11} = e = -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle,$$

$$b_{12} = f = -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle,$$

$$b_{21} = f = -\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle,$$

$$b_{22} = g = -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle,$$

donde e , f y g son los llamados coeficientes de la segunda forma fundamental. Nuevamente, para un vector $\omega = a\mathbf{x}_u(q) + b\mathbf{x}_v(q) \in T_p(S)$ se tiene $II_p(\omega) = v^t \cdot \mathbf{B} \cdot v$ con $v = (a, b)^t$.

Para estudiar la segunda forma fundamental, resulta conveniente definir el concepto de dirección. También haremos uso de esta definición a lo largo del capítulo 3.

Definición 1.16. Dado un vector unitario $v \in \mathbb{S}^2$, definimos su **dirección** asociada $d(v)$ como el conjunto $\{v, -v\} \subset \mathbb{S}^2$. En general, definimos una dirección d como un conjunto formado por dos vectores unitarios $v, -v \in \mathbb{S}^2$ de signo opuesto, $d = \{v, -v\}$.

La motivación de esta definición es que, dado $v \in \mathbb{R}^3$, $II_p(v) = II_p(-v)$ al ser la segunda forma fundamental una forma cuadrática. Esto nos permitirá definir los conceptos de direcciones asintóticas y principales:

Definición 1.17. Dada una superficie S y $p \in S$, se definen las **direcciones asintóticas** en p como las direcciones $d = \{v, -v\}$ tales que $II_p(v) = 0$ ¹.

Observación 1.18. Como la diferencial dN_p es autoadjunta (ver proposición 1.12), sabemos que existe una base ortonormal $\{e_1(p), e_2(p)\} \subset T_p(S)$ de autovectores de dN_p . Si denotamos por $-k_1(p), -k_2(p)$ sus autovalores, entonces se tiene además que $k_1(p)$ y $k_2(p)$ son el máximo y el mínimo de la segunda forma fundamental evaluada sobre el conjunto de vectores unitarios de $T_p(S)$. Llamamos entonces a las direcciones asociadas a $e_1(p)$ y $e_2(p)$ **direcciones principales** en p y a $k_1(p), k_2(p)$ **curvaturas principales** en p .

Definición 1.19. Definimos la **curvatura de Gauss** $K : S \rightarrow \mathbb{R}$ como $K(p) = \det(dN_p)$. De acuerdo con la observación 1.18, $K(p) = k_1(p) \cdot k_2(p)$.

Definición 1.20. Definimos la **curvatura media** $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ como la traza de $-dN_p/2$. De acuerdo con la observación 1.18, $H(p) = \frac{k_1(p)+k_2(p)}{2}$. Decimos que una superficie tiene **curvatura media constante (CMC)** si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $H(p) = c$ para todo $p \in S$, y que es **mínima** si $c = 0$.

¹Por lo discutido anteriormente, $II_p(-v) = II_p(v) = 0$, así que podemos tomar indiferentemente v o $-v$ en la definición.

Las nociones de curvatura aquí introducidas son naturales: al ser dN_p un endomorfismo, tiene dos invariantes (esto es, valores que no dependen de la base de $T_p(S)$ escogida): su determinante y su traza, que sirven para definir $K(p)$ y $H(p)$. Se pueden deducir varios resultados fundamentales a partir de estas definiciones: la curvatura de Gauss aparece en el *Theorema egregium* y el teorema de Gauss-Bonnet. Por otra parte, la curvatura media aparece de forma natural al estudiar problemas de elasticidad y problemas variacionales relacionados con el área, como el problema de Plateau. Además, cuenta con una intuición geométrica importante: por la definición de las direcciones principales, $H(p)$ se corresponde con la media de $II_p(e_1(p))$ y $II_p(e_2(p))$, los valores mínimo y máximo de la segunda forma fundamental. En principio, podría parecernos algo arbitrario usar estos dos valores y promediarlos. Sin embargo, si tratamos de obtener alternativamente el valor medio de II_p integrando en todas las posibles direcciones (esto es, integrando II_p en el conjunto de vectores unitarios $\{v \in T_p(S) : \|v\| = 1\}$), el resultado de dicha integral es igual a $\pi \cdot H(p)$. De acuerdo con la observación 1.13, podemos interpretar este resultado como que $H(p)$ nos da un valor promedio sobre *cuánto se curvan* respecto al vector normal $N(p)$ las curvas contenidas en S que pasan por p .

Observación 1.21. Para trabajar con las curvaturas definidas anteriormente, podemos calcular la matriz \mathbf{A} de dN_p en la base del plano tangente asociada a \mathbf{x} en un punto $p = \mathbf{x}(q)$. Esto es, dado un vector $\omega = a\mathbf{x}_u(q) + b\mathbf{x}_v(q) \in T_p(S)$ tal que $dN_p(\omega) = a'\mathbf{x}_u(q) + b'\mathbf{x}_v(q) \in T_p(S)$, se tiene que $(a', b')^t = \mathbf{A} \cdot v$, con $v = (a, b)^t$. Por tanto, bajo esta representación podemos escribir la segunda forma fundamental como $-(\mathbf{A}v)^t \cdot \mathbf{G} \cdot v$, donde \mathbf{G} es la matriz del producto escalar definida en 1.7. De acuerdo con 1.15, se ha de cumplir la igualdad $v^t \cdot \mathbf{B} \cdot v = -(\mathbf{A} \cdot v)^t \cdot \mathbf{G} \cdot v$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$. De aquí deducimos que $\mathbf{B} = -\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{G}$. Esto nos permite calcular los coeficientes de la matriz \mathbf{A} y deducir las llamadas *ecuaciones de Weingarten*:

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad (1.1)$$

$$a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \quad (1.2)$$

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad (1.3)$$

$$a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}, \quad (1.4)$$

Mediante el cálculo del determinante y la traza de \mathbf{A} , podemos expresar K y H en función de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad (1.5)$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \quad (1.6)$$

Ejemplo 1.22. Gracias a la observación 1.21, es posible calcular las direcciones principales y asíntóticas así como las curvaturas principales de cualquier punto de una superficie. Veámoslo, a modo de ejemplo, para un paraboloides hiperbólico.

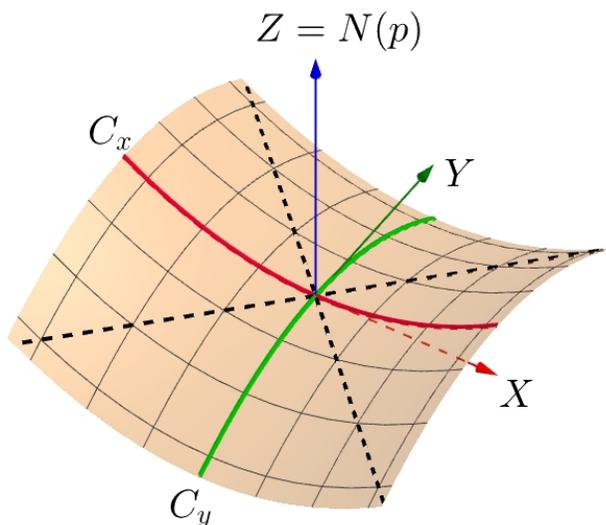


Figura 1.1: Paraboloides hiperbólico de la forma $z(x, y) = x^2 - y^2$.

Calcularemos las direcciones y curvaturas principales del origen, al que denotamos por p . Esta superficie es el grafo de la función diferenciable $z(x, y) = x^2 - y^2$. Así, podemos considerar la

parametrización $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, z(x, y)) = (x, y, x^2 - y^2)$, de forma que $\mathbf{x}(0, 0) = p$. Evaluemos las derivadas parciales de $\mathbf{x}(x, y)$ en el origen:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_x(0, 0) &= (1, 0, 0) \\ \mathbf{x}_y(0, 0) &= (0, 1, 0) \\ \mathbf{x}_{xx}(0, 0) &= (0, 0, 2) \\ \mathbf{x}_{xy}(0, 0) &= (0, 0, 0) \\ \mathbf{x}_{yy}(0, 0) &= (0, 0, -2)\end{aligned}$$

Además, escogemos como vector normal en p el vector unitario del eje Z, esto es, $N(p) = (0, 0, 1)$. Usando las relaciones de Weingarten, es posible calcular la matriz \mathbf{A} asociada a dN_p : obtenemos que A es una matriz diagonal con $a_{11} = -a_{22} = -2$. Deducimos que las direcciones principales en el punto p son las dadas por los vectores unitarios de los ejes X e Y, esto es, $\hat{x} = (1, 0, 0)$ y $\hat{y} = (0, 1, 0)$. Las curvaturas principales asociadas son, respectivamente, $II_p(\hat{x}) = 2$ y $II_p(\hat{y}) = -2$.

Geoméricamente, podemos interpretar este resultado como que las curvas que pasan por p con vector tangente \hat{x} son las que *más se curvan* en el sentido positivo del eje Z, como se puede ver para el caso de la curva C_x . Por el contrario, las curvas con vector tangente \hat{y} son las que *más se curvan* en el sentido negativo del eje Z, como es el caso de C_y . Esto es consistente con la interpretación geométrica de la observación 1.14

Por otra parte, haciendo uso de la matriz \mathbf{B} asociada a la segunda forma fundamental, se pueden calcular las direcciones asintóticas. Estas son las dadas por los vectores unitarios $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$. Geométricamente, podemos interpretar que las curvas que pasan por p con estos vectores tangentes son aquellas que *no se curvan* en la dirección del eje Z. Ejemplos de estas curvas son las líneas discontinuas de la figura 1.1.

En el ejemplo anterior, pudimos parametrizar la superficie mediante una parametrización del tipo $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, z(x, y))$, es decir, como el grafo de una función de dos variables. Esto es un hecho general, del que haremos uso en capítulos posteriores:

Proposición 1.23. Consideremos una superficie S y un punto $p \in S$. Mediante una traslación, podemos suponer que p se encuentra en el origen de coordenadas. Mediante un giro, podemos además suponer que $T_p(S)$ sea el plano XY . Entonces, existe una parametrización local $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de la forma $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, z(x, y))$ definida en un entorno de p .

Ejemplo 1.24. En consonancia con lo visto en la proposición anterior, vamos a calcular la curvatura media y la curvatura gaussiana de una superficie definida como el grafo de una función diferenciable, esto es $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, z(x, y))$. Usando las relaciones de Weingarten y las ecuaciones (1.5), (1.6), llegamos a las expresiones

$$K = \frac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^2}, \quad (1.7)$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{(1 + z_x^2)z_{yy} - 2z_xz_yz_{xy} + (1 + z_y^2)z_{xx}}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^{3/2}}. \quad (1.8)$$

Ejemplo 1.25. Otro caso de interés es el de las superficies de revolución, como es el caso del catenoide, resultado de rotar $(\cosh(z), 0, z)$ a lo largo del eje z . Dada una curva $(\varphi(s), 0, \psi(s))$ parametrizada naturalmente, la curvatura media viene dada por:

$$H = \frac{1 - \psi' + \varphi(\psi''\varphi'' - \psi''\varphi')}{2\varphi}. \quad (1.9)$$

Para el caso del catenoide, $\psi = z$, $\psi' = 1/\cosh(z)$, $\psi'' = -\sinh(z)/\cosh^3(z)$, $\varphi = \cosh(z)$, $\varphi' = \sinh(z)/\cosh(z)$, $\varphi'' = 1/\cosh^3(z)$. Notemos que, al no ser z el parámetro natural, hemos reescalado las derivadas apropiadamente. Sustituyendo estos valores en (1.8), concluimos que el catenoide es una superficie mínima.

Lema 1.26. Dado $p \in S$,

1. Si $K(p) > 0$, entonces no hay direcciones asintóticas en p .
2. Si $K(p) = 0$, entonces o bien hay una única dirección asintótica (si una de las curvaturas principales es nula) o bien todas las direcciones son asintóticas (si ambas curvaturas principales se anulan). En el primer caso, decimos que la dirección es una **dirección doblemente asintótica**.

3. Si $K(p) < 0$, entonces hay exactamente dos direcciones asintóticas en p .

Demostración. La matriz \mathbf{B} asociada a la segunda forma fundamental definida en 1.15 se puede diagonalizar haciendo uso de la base ortonormal $\{e_1(p), e_2(p)\}$, siendo los coeficientes de la diagonal $k_1(p)$ y $k_2(p)$. Sea entonces \mathbf{B}' la matriz \mathbf{B} expresada en dicha base. Así, dado $\omega = ae_1(p) + be_2(p)$ y $v = (a, b)^t$, se tiene $II_p(\omega) = v^t \cdot \mathbf{B}' \cdot v = a^2k_1(p) + b^2k_2(p)$.

Si $K(p)$ fuese positivo, entonces $k_1(p)$ y $k_2(p)$ son distintos de 0 y tienen el mismo signo. Por tanto, $II_p(\omega) \neq 0$ salvo que $a = b = 0$.

Si $K(p) = 0$, tenemos dos posibilidades: o bien solo una de las curvaturas principales es nula (por simplicidad, sea $k_1(p) = 0$) o bien $k_1(p) = k_2(p) = 0$. En el primer caso, $II_p(\omega) = b^2k_2(p)$, que solo se anula cuando $b = 0$, es decir $\omega = ae_1(p)$. En el segundo caso, $II_p(\omega) = 0$ y todas las direcciones son asintóticas.

Finalmente, si $K(p) < 0$, entonces $k_1(p)$ y $k_2(p)$ son no nulas pero con signos opuestos. Si suponemos sin pérdida de generalidad que $k_1(p)$ es positiva y $k_2(p)$ negativa, entonces $II_p(\omega) = a^2k_1(p) + b^2k_2(p) = a^2k_1(p) - b^2|k_2(p)|$. Las únicas dos soluciones (salvo constante multiplicativa) de $II_p(\omega) = 0$ son las dadas por $(a, b)^t = \left(\sqrt{|k_2(p)|}, \pm\sqrt{k_1(p)}\right)^t$, $\lambda \in \mathbb{R}$. \square

Definición 1.27. Dado $p \in S$, decimos que

1. p es un punto **elíptico** si $K(p) > 0$.
2. p es un punto **hiperbólico** si $K(p) < 0$.
3. p es un punto **parabólico** si $K(p) = 0$ pero solo una de las curvaturas principales es nula.
4. p es un punto **planar** si ambas curvaturas principales son nulas (en particular, $K(p) = 0$).

Proposición 1.28. Dada una superficie S y $0 < t < \infty$, consideremos la superficie $t \cdot S$, definida como $t \cdot S := \{tp \mid p \in S\}$. La curvatura de Gauss de $t \cdot S$ en el punto tp es $\frac{1}{t^2}K(p)$ y la curvatura media, $\frac{1}{t}H(p)$.

Demostración. Dada una parametrización $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ de S en un entorno de $p \in S$, podemos parametrizar la superficie $t \cdot S$ en un entorno de tp mediante la aplicación $t \cdot \mathbf{x} : U \rightarrow t \cdot S$.

Realizando las derivadas parciales correspondientes, observamos que los coeficientes de la primera forma fundamental pasarán a estar multiplicados por t^2 al depender cuadráticamente de \mathbf{x} . De la misma manera, los de la segunda forma fundamental se verán modificados en un factor t , ya que el vector normal no depende de t . Atendiendo a las ecuaciones 1.5 y 1.6, vemos que K pasa a estar multiplicado por $\frac{t^2}{t^4} = \frac{1}{t^2}$ mientras que en H aparece un factor $\frac{t^3}{t^4} = \frac{1}{t}$. \square

Capítulo 2

Ecuaciones en derivadas parciales y principio del máximo

Este capítulo está estructurado en tres secciones: primero, vamos a estudiar algunos conceptos básicos asociados a las ecuaciones en derivadas parciales, centrándonos en las propiedades de elipticidad y linealidad. A continuación, enunciaremos dos teoremas conocidos como principios del máximo para EDPs, con los que trabajaremos para obtener resultados útiles para la tercera sección. Será en esta última sección donde traduciremos los resultados procedentes del mundo de las EDPs al lenguaje propio de teoría de superficies. Así, podremos enunciar y demostrar el principio del máximo geométrico para superficies de curvatura media constante, el resultado principal de este capítulo.

2.1. Ecuaciones diferenciales absolutamente elípticas

Definición 2.1. Dada una aplicación $\varphi : U \subset \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi = \varphi(r, s, t, p, q, z, x, y)$, donde U es un abierto simplemente conexo de \mathbb{R}^8 , podemos plantear la **ecuación en derivadas parciales (EDP)** de segundo orden asociada a φ como la expresión

$$\varphi(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y) = 0 \quad (2.1)$$

definida para aquellas funciones $z : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $z = z(x, y) \in C^2(D)$ que además verifican $(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y) \in U$ para todo $(x, y) \in D$, siendo z_i, z_{ij} las derivadas de primer y segundo orden de z . A partir de ahora, denotaremos $[z(x, y)] := (z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y)$ y $\varphi[z(x, y)] := \varphi(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y)$.

Supongamos adicionalmente que existen las derivadas parciales de φ respecto a r, s y t , que denotaremos por φ_r, φ_s y φ_t . Para cada $\omega \in U$, podemos definir la siguiente forma cuadrática:

$$\Lambda_\omega(\lambda, \mu) = \varphi_r(\omega)\lambda^2 + \varphi_s(\omega)\lambda\mu + \varphi_t(\omega)\mu^2. \quad (2.2)$$

- Decimos que $z(x, y)$ es una **solución elíptica** de (2.1) si la forma cuadrática $\Lambda_{[z(x,y)]}$ es definida positiva para todo $(x, y) \in D$.
- Decimos que (2.1) es una **ecuación elíptica** si todas las soluciones $z(x, y)$ de la EDP son elípticas.
- Decimos que (2.1) es una **ecuación absolutamente elíptica** en un abierto simplemente conexo $V \subset U \subset \mathbb{R}^8$ si Λ_ω es definida positiva para todo $\omega \in V$.

Definición 2.2. Si podemos escribir $\varphi(r, s, t, p, q, z, x, y)$ como $\varphi = A_1r + A_2s + A_3t + A_4$ con $A_i = A_i(p, q, z, x, y)$, decimos que (2.1) es una **ecuación quasilineal**. La EDP asociada será

$$\varphi[z(x, y)] = A_1z_{xx} + A_2z_{xy} + A_3z_{yy} + A_4, \text{ con } A_i = A_i(z_x, z_y, z, x, y).$$

Si además se tiene $\varphi = A_1r + A_2s + \dots + A_6z + A_7$ con $A_i = A_i(x, y)$, decimos que (2.1) es una **ecuación lineal**. En este caso, la EDP adquiere la forma

$$\varphi[z(x, y)] = A_1z_{xx} + A_2z_{xy} + A_3z_{yy} + A_4z_x + A_5z_y + A_6z + A_7. \quad (2.3)$$

En el caso particular en el que $A_7 = 0$, se dice que la ecuación lineal es **homogénea**.

Observación 2.3. De acuerdo con la expresión (1.8), podemos reescribir la ecuación de curvatura media constante $H = c$ para la superficie dada por el grafo de una función $z = z(x, y)$ como

$$(1 + z_x^2)z_{yy} - 2z_xz_yz_{xy} + (1 + z_y^2)z_{xx} - 2c(1 + z_x^2 + z_y^2)^{3/2} = 0.$$

Esto es, $\varphi[z(x, y)] = 0$ para la función $\varphi : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\varphi(r, s, t, p, q, z, x, y) := (1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r - 2c(1 + p^2 + q^2)^{3/2}.$$

Observamos que la EDP es quasilineal e independiente de la variable z . Identificando $\omega = (r, s, t, p, q, z, x, y)$, la forma cuadrática Λ_ω definida en (2.2) se puede expresar como

$$\Lambda_\omega(\lambda, \mu) = (1 + q^2)\lambda^2 - 2pq\lambda\mu + (1 + p^2)\mu^2 = \lambda^2 + \mu^2 + (q\lambda - p\mu)^2 > \lambda^2 + \mu^2,$$

que es definida positiva para todo $\omega \in \mathbb{R}^8$. Así, la ecuación (1.8) es una ecuación en derivadas parciales absolutamente elíptica.

El lema y la proposición siguientes tienen como objetivo demostrar que la diferencia de dos funciones que satisfacen la misma EDP absolutamente elíptica es a su vez solución de una EDP lineal, elíptica y homogénea. Este resultado será fundamental a lo largo de la siguiente sección, donde podremos aplicar teoremas válidos a priori solo para EDPs lineales a casos no lineales. En particular, nos servirá para trabajar con la ecuación de curvatura media constante (1.8), que acabamos de ver que es absolutamente elíptica y no lineal.

Lema 2.4. *Sea $\psi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, donde U es un abierto convexo. Entonces, dados $u, v \in U$, se tiene*

$$\psi(v) - \psi(u) = \sum_{i=1}^n A_i(u, v)(v_i - u_i), \quad (2.4)$$

donde u_i, v_i son las coordenadas de u, v y $A_i(u, v) = \int_0^1 \psi_i(\tau v + (1 - \tau)u) d\tau$, siendo $\psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$.

Demostración. Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow U$, $\alpha(\tau) = \tau v + (1 - \tau)u$, y consideremos la composición $\gamma(\tau) = \psi(\alpha(\tau))$. Debido a la convexidad de U y a que $u, v \in U$, entonces $\alpha(\tau) \in U$ para $\tau \in [0, 1]$. Así, $\psi(v) - \psi(u) = \gamma(1) - \gamma(0) = \int_0^1 \gamma'(\tau) d\tau$. Aplicando la regla de la cadena,

$$\gamma'(\tau) = \nabla \psi(\alpha(\tau)) \alpha'(\tau) = \sum_{i=1}^n \psi_i(\tau v + (1 - \tau)u)(v_i - u_i).$$

Y sustituyendo $\gamma'(\tau)$ en la integral obtenemos el resultado deseado. \square

Proposición 2.5. *Sea (2.1) una EDP absolutamente elíptica en un abierto convexo $U \subseteq \mathbb{R}^8$ y $z_1, z_2 : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dos soluciones. Entonces la aplicación $z := z_2 - z_1$ satisface una EDP elíptica, lineal y homogénea definida en el conjunto $\mathbb{R}^6 \times D$.*

Demostración. Aplicamos la fórmula (2.4) para los valores $u = [z_1(x, y)]$ y $v = [z_2(x, y)]$ con $(x, y) \in D$. Como $\varphi[z_2(x, y)] = \varphi[z_1(x, y)] = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi[z_2(x, y)] - \varphi[z_1(x, y)] = \\ &= A_1((z_2)_{xx} - (z_1)_{xx}) + A_2((z_2)_{xy} - (z_1)_{xy}) + A_3((z_2)_{yy} - (z_1)_{yy}) + A_4((z_2)_x - (z_1)_x) \\ &\quad + A_5((z_2)_y - (z_1)_y) + A_6(z_2 - z_1) = \\ &= A_1 z_{xx} + A_2 z_{xy} + A_3 z_{yy} + A_4 z_x + A_5 z_y + A_6 z. \end{aligned}$$

La expresión anterior constituye una ecuación en derivadas parciales lineal para $z(x, y)$: efectivamente, $A_i = A_i(u, v) = A_i([z_1(x, y)], [z_2(x, y)])$ es función de $z_1(x, y)$ y $z_2(x, y)$. Conocidas estas funciones y sus derivadas, podemos afirmar que A_i solo depende de (x, y) y por tanto la ecuación obtenida es lineal y homogénea. Siguiendo la notación de la definición 2.2, definimos la función $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^6 \times D \rightarrow \mathbb{R}$ como $\tilde{\varphi} = A_1r + A_2s + \dots + A_6z$, siendo entonces $z(x, y)$ solución de $\tilde{\varphi}[z(x, y)] = 0$.

Probemos a continuación que la ecuación $\tilde{\varphi} = 0$ es además elíptica. Al ser $\varphi = 0$ absolutamente elíptica, entonces la forma cuadrática Λ_ω dada por (2.2) es definida positiva en todo $\omega \in U$. En particular, lo es para el segmento $\omega(\tau) = \tau v + (1 - \tau)u = \tau[z_2(x, y)] + (1 - \tau)[z_1(x, y)]$, contenido en U por ser convexo. Si integramos $\Lambda_{\omega(\tau)}(\lambda, \mu)$ en $\tau \in [0, 1]$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Lambda_{\omega(\tau)}(\lambda, \mu) d\tau &= \int_0^1 (\varphi_r(\omega(\tau))\lambda^2 + \varphi_s(\omega(\tau))\lambda\mu + \varphi_t(\omega(\tau))\mu^2) d\tau = \\ &= A_1(x, y)\lambda^2 + A_2(x, y)\lambda\mu + A_3(x, y)\mu^2 = \\ &= \tilde{\varphi}_r\lambda^2 + \tilde{\varphi}_s\lambda\mu + \tilde{\varphi}_t\mu^2 \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se tiene por definición de los coeficientes A_i en (2.4) y la tercera se deduce de derivar $\tilde{\varphi}$. Al ser el integrando definido positivo para todo $\omega(\tau)$, la forma cuadrática resultante también es definida positiva. Pero justamente esta es la forma cuadrática asociada a la ecuación lineal dada por $\tilde{\varphi}$.

Este argumento demuestra la elipticidad de la ecuación para todo punto $(x, y) \in D$. Debido a que los coeficientes A_i solo dependen de (x, y) (esto es, no dependen de la incógnita z ni de sus derivadas), queda probado que $\tilde{\varphi}[z(x, y)] = 0$ es una ecuación elíptica en el conjunto $\mathbb{R}^6 \times D$. \square

Por último, enunciaremos sin demostrar el teorema de Bernstein. Este permite demostrar que toda solución de la EDP absolutamente elíptica (2.1) de clase al menos C^3 es analítica si la función φ lo es. Aunque este resultado no es necesario para la demostración del principio del máximo geométrico, sí será esencial para debilitar las hipótesis de los teoremas de Alexandrov y del semi-espacio en capítulos posteriores.

Teorema 2.6 (Teorema de Bernstein, [Ber04]). *Consideremos la EDP (2.1), y sea $z(x, y) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una solución tal que $z \in C^3(D)$. Supongamos que φ es analítica en su dominio de*

definición U y verifica la desigualdad

$$4\varphi_r(\omega)\varphi_t(\omega) - \varphi_s(\omega)^2 > 0 \quad (2.5)$$

para todo $\omega \in U$. Entonces $z(x, y)$ es analítica.

Corolario 2.7. *Supongamos que la ecuación (2.1) es absolutamente elíptica en su dominio de definición U , y que φ es analítica. Sea $z : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una solución tal que $z \in C^3(D)$. Entonces $z(x, y)$ es analítica.*

Demostración. Tan solo tenemos que probar que se cumple la desigualdad (2.5). Para ello, haremos uso de que la forma cuadrática Λ_ω definida en (2.2) es definida positiva para todo $\omega \in U$:

$$\Lambda_\omega(\lambda, \mu) = \varphi_r(\omega)\lambda^2 + \varphi_s(\omega)\lambda\mu + \varphi_t(\omega)\mu^2 > 0.$$

De esta desigualdad deducimos que las derivadas parciales $\varphi_r(\omega)$ y $\varphi_t(\omega)$ son positivas ya que $\varphi_r(\omega) = \Lambda_\omega(1, 0) > 0$ y $\varphi_t(\omega) = \Lambda_\omega(0, 1) > 0$.

Esto nos permite escoger un par de valores λ, μ tales que $|\lambda| = \sqrt{\varphi_t(\omega)}$, $|\mu| = \sqrt{\varphi_r(\omega)}$ y $\varphi_s(\omega)\lambda\mu \leq 0$. Así,

$$\Lambda_\omega(\lambda, \omega) = \varphi_r(\omega)\varphi_t(\omega) + \varphi_s(\omega)\lambda\mu + \varphi_t(\omega)\varphi_r(\omega) = 2\varphi_r(\omega)\varphi_t(\omega) + \varphi_s(\omega)\lambda\mu > 0,$$

esto es,

$$2\varphi_r(\omega)\varphi_t(\omega) > -\varphi_s(\omega)\lambda\mu \geq 0.$$

Elevamos la desigualdad al cuadrado,

$$4\varphi_r(\omega)^2\varphi_t(\omega)^2 > \varphi_s(\omega)^2\lambda^2\mu^2 = \varphi_s(\omega)^2\varphi_r(\omega)\varphi_t(\omega),$$

y dividimos entre $\varphi_r(\omega)\varphi_t(\omega) > 0$,

$$4\varphi_r(\omega)\varphi_t(\omega) > \varphi_s(\omega)^2,$$

llegamos así a (2.5). Esto finaliza la prueba. □

2.2. Principio del máximo para EDPs elípticas

En esta sección, enunciaremos dos teoremas conocidos como principios del máximo. Estos solo son aplicables en principio a EDPs elípticas, lineales y homogéneas. Sin embargo, gracias a la proposición 2.5 podremos obtener como corolario versiones análogas para EDPs absolutamente elípticas y no lineales.

Teorema 2.8 (Principio del máximo fuerte para EDPs elípticas, lineales y homogéneas, [GilTru98]). *Consideremos una EDP elíptica, lineal y homogénea de la forma*

$$\varphi[z(x, y)] = A_1 z_{xx} + A_2 z_{xy} + A_3 z_{yy} + A_4 z_x + A_5 z_y, \quad (2.6)$$

definida un abierto $\mathbb{R}^6 \times D$ con $D \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, simplemente conexo y acotado y sea $z : D \rightarrow \mathbb{R}$ una solución verificando $z \in C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$. Entonces los valores mínimo y máximo de $z(x, y)$ se alcanzan en la frontera ∂D , es decir,

$$\min_{\bar{D}} z(x, y) = \min_{\partial D} z(x, y), \quad \max_{\bar{D}} z(x, y) = \max_{\partial D} z(x, y).$$

Más aún, si alguno de estos valores extremos se alcanza en D , entonces $z(x, y)$ es constante.

Observación 2.9. Es importante señalar que en la ecuación (2.6) se ha prescindido del término A_6 , de manera que $\varphi[z(x, y)]$ no depende explícitamente de z . Sin esta condición, el resultado no sería cierto en general: dado $D = [0, 1] \times [0, 1]$, consideremos el problema de autovalores de la ecuación de Laplace, dado por

$$z_{xx} + z_{yy} + \lambda z = 0 \quad (2.7)$$

con $\lambda > 0$ una constante. Imponiendo que la solución cumpla $z|_{\partial D} = 0$ (condición de contorno Dirichlet), sabemos que existen infinitos valores de λ para los cuales podemos encontrar soluciones no nulas de (2.7). Esto entraría en contradicción con el principio del máximo, que afirmaría que la única solución posible sería $z(x, y) = 0$ debido a la condición de contorno Dirichlet sobre ∂D .

Corolario 2.10. (Principio del máximo para EDPs absolutamente elípticas) *Supongamos que la ecuación (2.1) es una EDP absolutamente elíptica definida en un abierto convexo $U \in \mathbb{R}^8$*

y sean $z_1, z_2 : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ soluciones tales que $z_1, z_2 \in C^2(D) \cap C^0(\overline{D})$, con D un abierto simplemente conexo (no necesariamente acotado). Supongamos adicionalmente que $\varphi_z = 0$, es decir, φ no depende explícitamente de la coordenada z . Si $z_2 \geq z_1$ en D y existe un punto $p \in D$ tal que $z_1(p) = z_2(p)$, entonces $z_1(x, y) = z_2(x, y)$ en D .

Demostración. Al ser U un abierto convexo y φ absolutamente elíptica, la proposición 2.5 asegura que la diferencia $z(x, y) := z_2(x, y) - z_1(x, y)$ satisface una EDP elíptica, lineal y homogénea $\tilde{\varphi}[z(x, y)] = 0$ en el abierto $\mathbb{R}^6 \times D$. Revisando la demostración de dicha proposición, basada en la expresión (2.4), deducimos que el coeficiente A_6 procede de integrar φ_z en un cierto camino contenido en U . Como $\varphi_z = 0$ por hipótesis, entonces $A_6 = 0$.

Consideremos un entorno simplemente conexo y acotado $\Omega_p \subseteq D$ del punto p . Como $\tilde{\varphi}$ también es elíptica en $\mathbb{R}^6 \times \Omega_p$, nos encontramos en las condiciones del teorema 2.8. Del hecho de que $z_2 \geq z_1$ en Ω_p , deducimos $z \geq 0$ en Ω_p . Además, $z(p) = 0$, es decir, se alcanza un mínimo en el interior de Ω_p . Esto implica que $z(x, y) = 0$ en Ω_p .

Para demostrar que $z(x, y) = 0$ en D , vamos a probar que el conjunto $C := \{(x, y) \in D \mid z(x, y) = 0\} \subseteq D$ es abierto y cerrado, y por tanto, al ser D (simplemente) conexo y C no vacío (pues $\Omega_p \subseteq C$), entonces $C = D$. Por un lado, es cerrado ya que $C = z^{-1}(\{0\})$. Por otro, es abierto ya que para cada $q \in C$ existe un entorno de dicho punto Ω_q contenido en C , tal y como vimos antes. Concluimos así el resultado. \square

Teorema 2.11 (Principio del máximo en la frontera para EDPs elípticas, lineales y homogéneas [GilTru98]). *Supongamos que la ecuación (2.6) es una EDP elíptica, lineal y homogénea definida en un abierto $\mathbb{R}^6 \times D$ con $D \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, simplemente conexo y acotado y sea $z : D \rightarrow \mathbb{R}$ una solución verificando $z \in C^2(D) \cap C^0(\overline{D})$. Supongamos adicionalmente que $A_6 = 0$ y que el conjunto ∂D es de clase C^2 . Si existe $p_0 \in \partial D$ tal que $z(p_0) < z(p)$ (análogamente, $z(p_0) > z(p)$) para todo $p \in D$, entonces la derivada normal exterior de z en p_0 , $\frac{\partial z}{\partial \nu}(p_0)$, es estrictamente negativa (resp. estrictamente positiva).*

Observación 2.12. Es posible debilitar la regularidad del conjunto ∂D , permitiendo que este sea tan solo de clase C^1 . No obstante, en dicho caso es necesario incluir la llamada *condición de esfera interior*, consistente en que exista una bola abierta $B \subseteq D$ tal que $p_0 \in \partial B$.

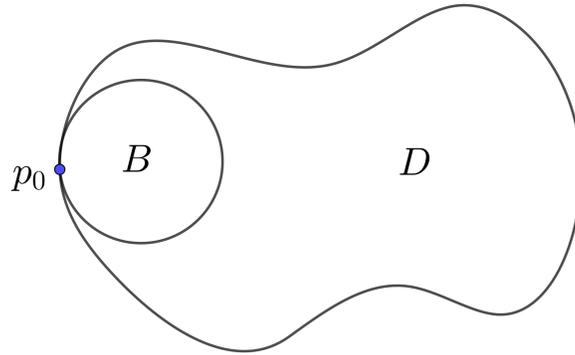


Figura 2.1: Condición de esfera interior en un punto $p_0 \in \partial D$.

Corolario 2.13. (*Principio del máximo en la frontera para EDPs absolutamente elípticas*) Supongamos que la ecuación (2.1) es una EDP absolutamente elíptica definida en un abierto convexo $U \in \mathbb{R}^8$ y sean $z_1, z_2 : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ soluciones tales que $z_1, z_2 \in C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$, con D un abierto simplemente conexo y acotado con frontera ∂D de clase C^2 . Supongamos adicionalmente que $\varphi_z = 0$ y que $z_2 \geq z_1$ en D . Si existe un punto $p_0 \in \partial D$ tal que $z_1(p_0) = z_2(p_0)$, entonces o bien $z_1 = z_2$ en D o bien $\frac{\partial z_1}{\partial \nu}(p_0) > \frac{\partial z_2}{\partial \nu}(p_0)$.

Demostración. Procedemos de forma similar a la discusión realizada en el corolario 2.10: gracias a la proposición 2.5 y al lema 2.4, se puede demostrar que $z = z_2 - z_1$ es solución de una EDP lineal y homogénea $\tilde{\varphi} = 0$ en el abierto $\mathbb{R}^6 \times D$, que además verifica $A_6 = 0$.

Por hipótesis, se tiene que $z \geq 0$ en D . Tenemos, por tanto, dos posibilidades:

1. $z > 0$ en D : debido a la hipótesis de que D es acotado y su frontera es C^2 , podemos aplicar el teorema 2.11 a la EDP $\tilde{\varphi} = 0$ y a la solución z . Como $z(p_0) = 0$, entonces $0 > \frac{\partial z}{\partial \nu}(p_0)$, con lo cual $\frac{\partial z_1}{\partial \nu}(p_0) > \frac{\partial z_2}{\partial \nu}(p_0)$.
2. Existe $p \in D$ tal que $z(p) = 0$. Aplicamos entonces el corolario 2.10, de donde concluimos $z(x, y) = 0$ en D , es decir $z_2(x, y) = z_1(x, y)$ en D . □

2.3. Principio del máximo geométrico

En esta sección, vamos a traducir a un lenguaje geométrico el corolario 2.13. Para ello, será necesario definir el concepto de contacto entre superficies.

Definición 2.14. Sean S_1 y S_2 dos superficies orientadas no disjuntas y sea $p \in S_1 \cap S_2$.

- Si S_1 y S_2 tienen el mismo plano tangente en p , decimos que las superficies tienen un **contacto** en p . Si además sus vectores normales tienen el mismo sentido, el contacto es **positivo**.
- Supongamos que S_1 y S_2 tienen un contacto en p . Eligiendo un sistema de referencia adecuado con origen en p , podemos suponer que $T_p(S_1) = T_p(S_2)$ se corresponde con el plano XY de \mathbb{R}^3 , que identificaremos con \mathbb{R}^2 . Tomamos parametrizaciones locales $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S_1 y S_2 alrededor de p de la forma $\mathbf{x}_i = (x, y, z_i(x, y))$ tales que $\mathbf{x}(0, 0) = p$, $i = 1, 2$. Si la función $z_2 - z_1$ no cambia de signo en un entorno suficientemente pequeño del origen (es decir, una de las superficies se queda *por encima* de la otra localmente alrededor de p), diremos que ambas superficies tienen un contacto **propio** en p .
- Supongamos que S_1 y S_2 tienen un contacto en p , y consideremos parametrizaciones $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ como arriba. Supongamos que existe una curva $\Gamma \subset D$ de clase C^2 pasando por el origen de forma que a uno de los lados de Γ el signo de $z_2 - z_1$ no varía en un entorno suficientemente pequeño del origen. En ese caso diremos que S_1 y S_2 tienen un contacto **semipropio** en p .

Observación 2.15. Todo contacto propio entre dos superficies es en particular semipropio, pues para cualquier curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ pasando por el origen se tendría que el signo de $z_2(x, y) - z_1(x, y)$ es constante a uno de los lados de Γ .

Mostremos a continuación algunos ejemplos de contacto entre superficies. Vamos a asumir por simplicidad que la superficie S_1 es el plano XY , que identificamos con \mathbb{R}^2 , y que parametrizamos como $\mathbf{x}_1 = (x, y, 0)$. Por otra parte, la superficie S_2 la parametrizamos como $\mathbf{x}_2 = (x, y, z(x, y))$.

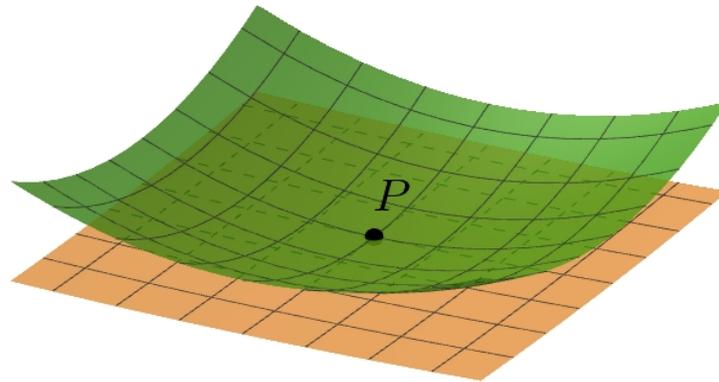


Figura 2.2: Contacto propio entre un paraboloides elíptico y un plano.

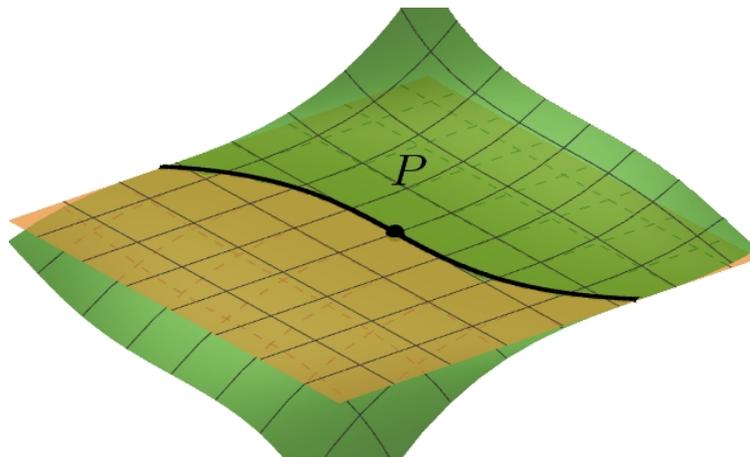


Figura 2.3: Contacto semipropio entre dos superficies. Por la elección de S_2 , la intersección de las superficies es una curva del tipo $\alpha(t) = (t, t^3, 0)$, que es regular.

El contacto propio es intuitivamente sencillo: como podemos ver en la figura 2.2, las dos superficies se “tocan” en el punto P , quedando una de las superficies por encima de la otra.

En la figura 2.3 observamos un ejemplo de contacto semipropio en P . Debemos encontrar una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ tal que $z(x, y)$ no cambie de signo en uno de los lados de Γ . En este caso, resulta sencillo: como una de las superficies es el plano XY , entonces la intersección entre ambas superficies es una curva (que en este caso es además regular) contenida en el plano XY , que hemos identificado como \mathbb{R}^2 . Escogemos dicha intersección como curva Γ .

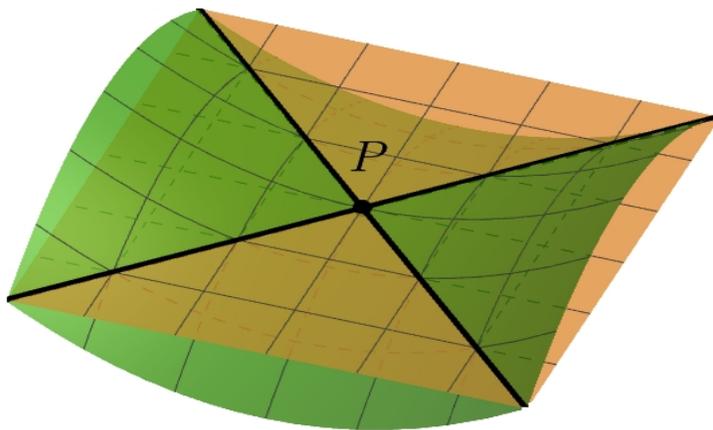


Figura 2.4: Ejemplo de contacto ni propio ni semipropio entre un paraboloides hiperbólico y un plano.

En la figura 2.4, observamos un caso de contacto que no es ni propio ni semipropio. Efectivamente, el contacto no puede ser propio ya que existen puntos donde el plano está por encima del paraboloides y viceversa. Tampoco puede ser semipropio: si lo fuese, debería existir una curva regular Γ pasando por P , contenida en el plano XY y tal que z no cambiase de signo a uno de los lados de Γ . Para ver que esto no es posible, haremos uso de la figura 2.5.

Supongamos que la curva Γ existe, y veamos a qué restricciones debe estar sometida. Como el signo de z tiene que ser constante a uno de los lados de Γ , la curva debería estar contenida en una de las cuatro regiones señaladas. Sin pérdida de generalidad, escogemos la región coloreada

de la derecha, que denotaremos por A . Sin embargo, como P es un vértice de A , ninguna curva Γ contenida en A que pase por P puede ser regular, que es una de las condiciones que debe verificar Γ . Llegamos así a una contradicción.

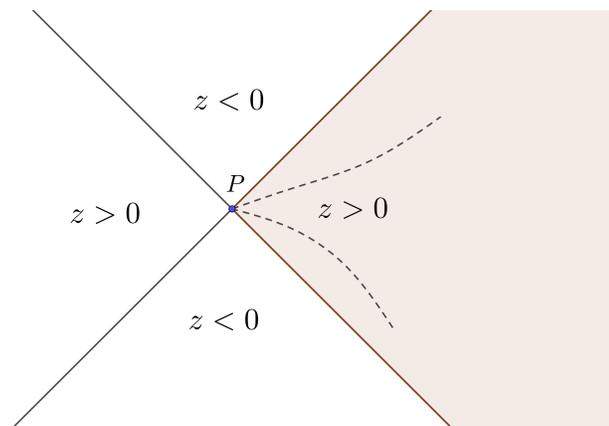


Figura 2.5: Signo de z en un entorno de P . La candidata a curva Γ se corresponde con el trazo discontinuo, mientras que las líneas de trazo continuo son los puntos donde $z = 0$.

A continuación, vamos a demostrar la versión geométrica del principio del máximo para superficies de CMC. Hemos de escribir en términos geométricos el principio del máximo del corolario 2.13.

Teorema 2.16. (*Principio del máximo geométrico para superficies de CMC*) Sean S_1, S_2 dos superficies orientadas de curvatura media constante con la misma curvatura. Supongamos que S_1 y S_2 tienen un contacto positivo en un punto $p \in S_1 \cap S_2$. Si el contacto es, además, semipropio, entonces $S_1 \cap S_2$ contiene un abierto común a ambas superficies.

Demostración. Tomemos un sistema de coordenadas con origen en p y tal que $T_p(S_1) = T_p(S_2)$ sea el plano XY . Consideremos las parametrizaciones locales $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S_1 y S_2 definidas en un entorno de p de la forma $\mathbf{x}_i = (x, y, z_i(x, y))$ tales que $\mathbf{x}(0, 0) = p$, $i = 1, 2$. Con esta parametrización, la condición de curvatura media constante equivale a que z_1 y z_2 verifican la EDP (1.8). Sabemos por la observación 2.3 que esta ecuación es absolutamente elíptica y que

además no depende explícitamente de la variable z .

Supongamos que el contacto entre S_1 y S_2 es semipropio. Entonces existe una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ pasando por el origen tal que la función $z_2(x, y) - z_1(x, y)$ no cambia de signo a uno de los lados de Γ para un entorno Ω' del origen. Escogemos Ω' de manera que su frontera sea de clase C^2 . Definimos D como la intersección de Ω' y uno de los lados que define Γ .

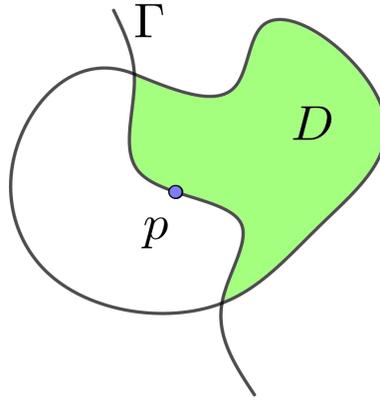


Figura 2.6: En verde, conjunto abierto D , contenido en Ω' .

Sabemos que Γ y $\partial\Omega'$ son de clase C^2 . Es más, podemos “suavizar” los puntos de corte de Γ y $\partial\Omega'$ escogiendo un abierto Ω' apropiado. Construimos así un abierto D tal que ∂D es de clase C^2 . Supongamos sin pérdida de generalidad que $z_2(x, y) \geq z_1(x, y)$ en D . Podemos aplicar entonces el principio del máximo en la frontera (corolario 2.13) al punto p y al abierto D . Dado que el plano tangente $T_p(S_1) = T_p(S_2)$ es el plano XY , deducimos que $\frac{\partial z_i}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial z_i}{\partial y}(0, 0) = 0$ para $i = 1, 2$. Esto quiere decir que las derivadas normales exteriores $\frac{\partial z_i}{\partial \nu}(0, 0)$ son nulas (en particular, coinciden), así que forzosamente $z_1(x, y) = z_2(x, y)$ en D . Así, S_1 y S_2 coinciden en un abierto común a ambas superficies. \square

Observación 2.17. En el caso particular en el que el contacto entre S_1 y S_2 sea propio, tendríamos $z_2(x, y) \geq z_1(x, y)$ en un entorno Ω' del origen y $z_1(0, 0) = z_2(0, 0)$. En tal caso, podríamos aplicar directamente el principio del máximo del corolario 2.10 y deducir que S_1 y S_2 coinciden en un

entorno de p .

Observación 2.18. En el enunciado del teorema anterior, se impone la hipótesis de que el contacto entre S_1 y S_2 sea positivo. Sin embargo, es una condición que parece no utilizarse. En realidad, la estamos usando de manera implícita: a diferencia de la curvatura gaussiana, el signo de la curvatura media depende del vector normal que elijamos. Por ejemplo, para una esfera de radio R , la curvatura media será $\frac{1}{R}$ o $-\frac{1}{R}$ en función de si tomamos el vector normal interior a la esfera o el exterior. Por tanto, la condición de contacto positivo impone que, intuitivamente, ambas superficies *se curven en la misma dirección*.

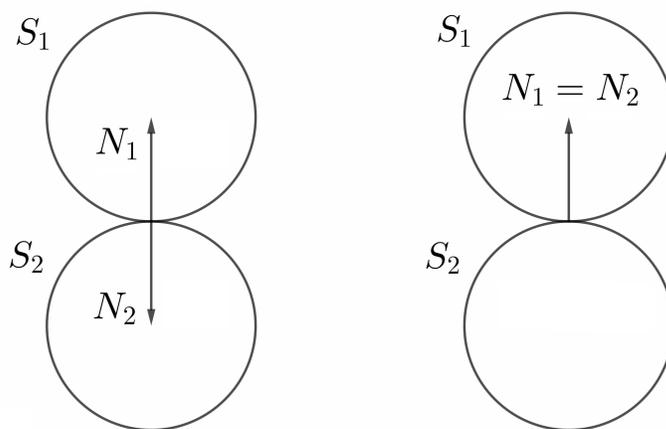


Figura 2.7: Secciones de dos esferas S_1, S_2 con un contacto. A la izquierda, el teorema 2.16 no se puede aplicar ya que el contacto no es positivo. A la derecha, el contacto sí es positivo, pero la curvatura media de S_1 es positiva mientras que la de S_2 es negativa, así que las superficies satisfacen EDPs distintas. Solo podrá aplicarse el teorema cuando los vectores normales y las curvaturas medias coincidan. Para el caso de las esferas, eso implica que $S_1 = S_2$, en consonancia con la conclusión del principio del máximo geométrico.

Capítulo 3

Teorema de Alexandrov

En este capítulo probaremos el teorema de Alexandrov. Este afirma que una superficie simple (es decir, sin autointersecciones) de curvatura media constante suficientemente regular y compacta ha de ser una esfera. La prueba hará uso tanto del principio del máximo geométrico (ver teorema 2.16) como de algunas propiedades de simetría de la esfera, que estudiaremos a continuación. También haremos uso del teorema de Bernstein [Ber04], de cara a reducir las hipótesis sobre regularidad de la superficie.

3.1. Resultados y construcciones previas al teorema

Definición 3.1. Decimos que un plano P en \mathbb{R}^3 es un **plano de simetría** de un conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ si la reflexión de S respecto de P tiene como imagen al mismo conjunto S . Definimos la **dirección** de un plano como la dirección de su vector normal (las direcciones están definidas salvo signo, como vimos en la definición 1.17), que podemos identificar con un único par de puntos antipodales en la esfera unidad \mathbb{S}^2 . El **diagrama de direcciones** Σ es el subconjunto de \mathbb{S}^2 formado por las direcciones de todos los planos de simetría de S .

Lema 3.2. *Si una superficie simple y compacta S es tal que el diagrama de direcciones Σ tiene un punto interior en \mathbb{S}^2 , entonces S es una esfera.*

Demostración. Supongamos que el punto interior de Σ es el polo norte. En consecuencia, para todo meridiano que pase por el polo norte existe un arco de planos de simetría contenido en Σ . Consideremos uno de estos arcos, y llamémoslo C .

Sean P_1, P_2 dos planos de simetría cualesquiera de C y α el ángulo entre ellos. La reflexión de S respecto de P_1 y después respecto de P_2 debe dejar S invariante, pero la composición de dos reflexiones es una rotación de ángulo 2α cuyo eje es la intersección de los planos, $d_C := P_1 \cap P_2$. En particular, tomamos como P_1 el plano asociado al polo norte y como P_2 un plano perteneciente al

arco C tal que el ángulo entre P_1 y P_2 sea $\alpha = 2\pi k$, con k irracional. Si repetimos una y otra vez la rotación asociada a los planos P_1 y P_2 , conseguimos un conjunto de rotaciones de S respecto al eje d_C cuyos ángulos son densos en $[0, 2\pi)$. Sea este conjunto Γ .

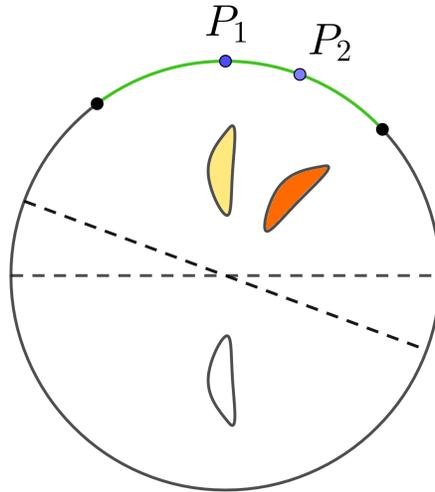


Figura 3.1: Representación del arco C del diagrama de reflexiones (arco verde) en \mathbb{S}^2 . Los puntos $P_1, P_2 \in C$ representan reflexiones respecto a dos planos. La composición de la reflexión respecto de estos dos planos provoca que la figura amarilla rote hacia la posición naranja. El eje de rotación, d_C , es *perpendicular* al arco C en el sentido de que el arco está contenido en el plano del papel mientras que d_C lo atraviesa.

Sea $p \in S$. Rotamos p respecto a d_C para todos los ángulos de Γ . Esto da lugar a un conjunto D_p que es denso en una circunferencia. Por ser S invariante y $p \in S$, entonces $D_p \subset S$. Además, por ser S cerrado, se tiene $\overline{D_p} \subset S$. Pero $\overline{D_p}$ no es más que una circunferencia que pasa por p y cuyo eje es d_C . Repitiendo estas rotaciones para todo $q \in S$, llegamos a que $\bigcup_{q \in S} \overline{D_q} \subseteq S$. De hecho, ambos conjuntos son iguales porque $S = \bigcup_{q \in S} \{q\} \subset \bigcup_{q \in S} \overline{D_q}$. Esto es, S es una unión de circunferencias $\overline{D_q}$ cuyo eje común es d_C . Dicho de otra manera, S es una superficie de revolución con respecto al eje d_C . Esto implica que S es invariante ante *todas* las rotaciones de eje d_C .

Podemos repetir el argumento anterior para un arco C' que pase por P_1 y que sea *perpendicular* a C en el sentido de que C y C' estén contenidos en planos perpendiculares. Deducimos que S es una superficie de revolución respecto a otro eje $d_{C'}$. A continuación, veremos que $d_C \cap d_{C'}$ se cortan en un punto y que son perpendiculares:

La perpendicularidad se deduce del hecho de que los arcos C y C' escogidos son perpendiculares, ya que las direcciones $d_C, d_{C'}$ son *perpendiculares* a C, C' (ver figura 3.1). Además, d_C y $d_{C'}$ se cortan en un punto: por construcción, los ejes están contenidos en ambos casos en el plano P_1 , y dos rectas en un plano siempre se cortan.

Pasemos a probar que la superficie es una esfera. Vamos a escoger un sistema de referencia centrado en el punto de corte de d_C y $d_{C'}$ tal que d_C sea el eje X y $d_{C'}$ el eje Z.

Primero, probaremos que existe un punto $p \in S$ perteneciente al plano XY: tomamos $q \in S$. Si q está en el plano XY, hemos acabado. Si no, rotamos q respecto al eje X. La rotación da lugar a una circunferencia que pasa por q y cuyo eje es el eje X. Esta circunferencia tiene dos puntos de corte p_1, p_2 con el plano XY. Como la superficie es invariante por esta rotación, estos puntos pertenecen a la superficie, por lo que tomamos por ejemplo $p = p_1$ y hemos acabado.

Sea $p \in S$ contenido en el plano XY. Rotando respecto al eje Z, p genera una circunferencia contenida en el plano XY. Si rotamos esta circunferencia respecto al eje X, obtenemos una esfera contenida en S , por lo que debe coincidir con esta, concluyendo el resultado. \square

Definición 3.3. Sea S una superficie simple y compacta en \mathbb{R}^3 de clase C^2 . Sea d una dirección y $N(p)$ la normal interior a S en $p \in S$ (al ser la superficie simple y compacta, es orientable). Denotando por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar, definimos los conjuntos

$$A = \{p \in S : \langle d, N(p) \rangle > 0\}$$

$$B = \{p \in S : \langle d, N(p) \rangle < 0\}$$

$$C = \{p \in S : \langle d, N(p) \rangle = 0\}$$

Escogiendo un sistema de coordenadas donde d sea el eje X, A se corresponde con los puntos cuyo vector normal interior tiene componente x positiva, B con los puntos cuya normal tiene componente x negativa y C con los puntos con normales perpendiculares al eje X (ver figura 3.3).

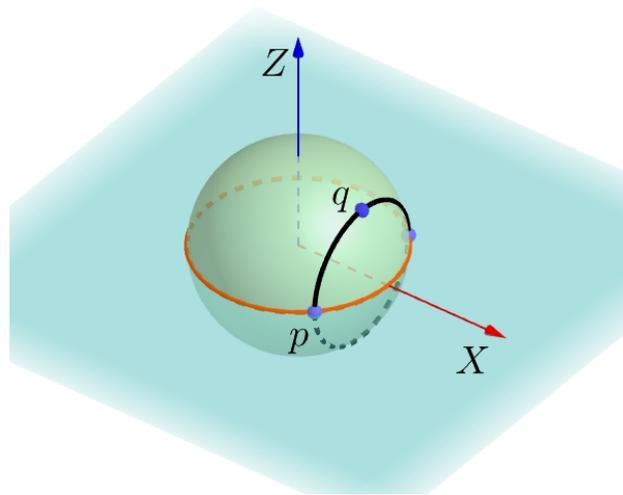


Figura 3.2: Construcción geométrica de la esfera a partir del punto q . La rotación respecto al eje X da lugar a la circunferencia negra. Tomamos p en el plano XY (en color azul) y lo rotamos respecto al eje Z , obteniendo la circunferencia naranja. Rotamos esta última circunferencia respecto al eje X nuevamente y obtenemos una esfera.

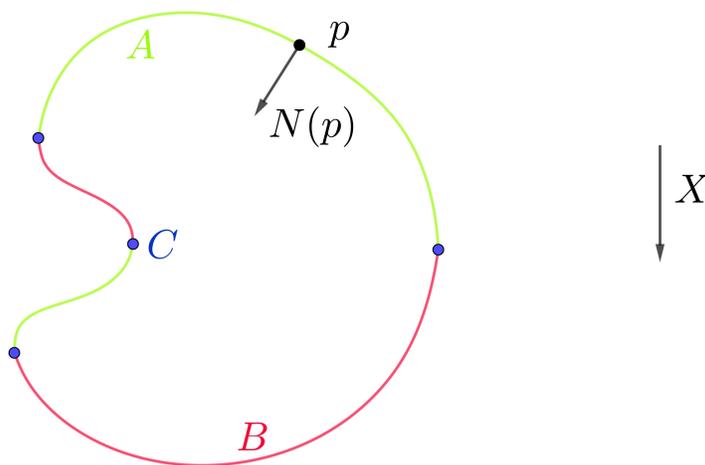


Figura 3.3: Sección de una superficie. En verde, el conjunto A . En rojo, el conjunto B . En azul, conjunto C .

Observación 3.4. Por ser el producto escalar continuo, A y B son conjuntos abiertos en S , mientras que C es cerrado. Como en toda función continua f se verifica $\overline{f^{-1}(X)} \subseteq f^{-1}(\overline{X})$, entonces $\overline{A} \subseteq A \cup C$, $\overline{B} \subseteq B \cup C$.

Observación 3.5. Sea l una línea a la que asociamos una orientación (ver figura 3.4). Si l interseca a S en $a \in A$, entonces l no es tangente a S en a . Es más, a sería un punto *de entrada* al interior de S . De la misma manera, los puntos $b \in B$ son puntos *de salida* del interior de S .

A continuación, introduciremos el concepto de dirección excepcional. Nuestro objetivo en los siguientes lemas y proposiciones es obtener propiedades sobre los conjuntos A , B y C que se cumplan para todas las direcciones no excepcionales. Posteriormente, veremos que el conjunto de direcciones excepcionales sobre \mathbb{S}^2 es de medida nula (lema 3.10). La combinación de estos resultados nos dará como consecuencia casi inmediata el teorema de Alexandrov (teorema 3.12).

Definición 3.6. Decimos que una dirección d es **excepcional** con respecto a S si en algún punto $p \in S$ existe una dirección doblemente asintótica paralela a d (ver lema 1.26).

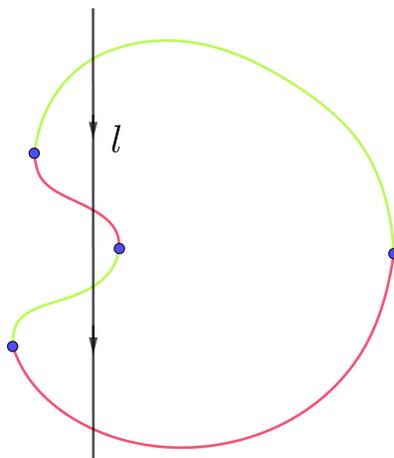


Figura 3.4: Línea orientada l con los conjuntos A, B, C señalados en verde, rojo y azul respectivamente.

En el siguiente lema, exigimos una regularidad de clase C^3 a la superficie porque es necesario que las curvas que conforman el conjunto C sean de clase C^2 . El motivo está relacionado con la condición de que las curvas que aparecen en la definición de contacto semipropio (ver definición 2.14) sean de clase C^2 .

Lema 3.7. *Sea S una superficie simple y compacta de clase C^3 y supongamos que d es una dirección no excepcional con respecto a S . Entonces el conjunto C definido en la definición 3.3 es la unión de un número finito de curvas simples (esto es, sin autointersecciones) de clase C^2 , y además $\bar{A} = A \cup C$, $\bar{B} = B \cup C$.*

Demostración. Nos basaremos en la figura 3.5 para el razonamiento. Sea $p \in C$. Mediante una traslación y un giro, podemos suponer que p es el origen de coordenadas, que d coincide con el eje X y el vector normal interior $N(p)$ con el eje Z , de manera que $N(p)$ apunte en la dirección positiva de este eje (es decir, $N(p) = (0, 0, 1)$). Podemos escoger así una parametrización local de un entorno de p de la forma $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, z(x, y))$, gracias a la proposición 1.23. Bajo esta elección, el plano XY se corresponde con $T_p(S)$. Expresamos la superficie localmente mediante la parametrización $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, z(x, y))$. Si denotamos por $\mathbf{x}_x, \mathbf{x}_y$ las derivadas parciales de $\mathbf{x}(x, y)$ y $N(x, y)$ al

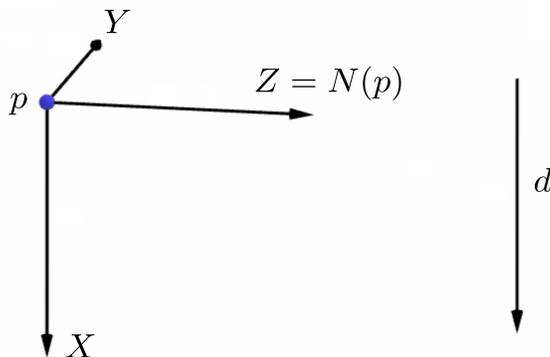


Figura 3.5: Sistema de coordenadas.

vector normal interior, entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_x &= (1, 0, z_x), \\
 \mathbf{x}_y &= (0, 1, z_y), \\
 \mathbf{x}_{xx} &= (1, 0, z_{xx}), \\
 \mathbf{x}_{xy} &= (0, 1, z_{xy}), \\
 N &= \frac{(-z_x, -z_y, 1)}{(z_x^2 + z_y^2 + 1)^{1/2}}.
 \end{aligned}$$

Bajo esta parametrización, A se corresponde con la imagen los puntos $\mathbf{x}(x, y) \in S$ donde $z_x(x, y) < 0$, B con los puntos $\mathbf{x}(x, y)$ donde $z_x(x, y) > 0$ y C con aquellos puntos $\mathbf{x}(x, y)$ donde $z_x(x, y) = 0$, de acuerdo con la expresión de $N(x, y)$ y la definición 3.3.

Por ser z de clase C^3 , podemos hacer un desarrollo de Taylor del tipo $z = ax^2 + bxy + cy^2 + \dots$ (no hay términos de grado 1 debido a que $T_p(S)$ es el plano XY).

Veamos que $(a, b) \neq (0, 0)$. En caso contrario, $z_{xx}(0, 0) = z_{xy}(0, 0) = 0$, lo cual implica que el vector $\hat{x} = (1, 0, 0) \in T_p(S)$ (que está asociado a la dirección d) es dirección doblemente asintótica, algo imposible. Veamos por qué. Para ello, vamos a recurrir a las observaciones 1.15 y 1.21:

Sabemos que \hat{x} estaría asociado a una dirección doblemente asintótica si fuese autovector de dN_p con autovalor 0. Siguiendo la notación de la observación 1.21, esta condición se traduce en que $\mathbf{A} \cdot v = 0$, con $v = (1, 0)^t$, pues $\hat{x} = 1 \cdot \mathbf{x}_x(0, 0) + 0 \cdot \mathbf{x}_y(0, 0)$. El cálculo de la matriz \mathbf{A} es inmediato en este caso: en el punto p , se puede comprobar que $E = G = 1$, $F = 0$, así que \mathbf{G} es la matriz identidad. En consecuencia, $-\mathbf{A} = \mathbf{B}^t = \mathbf{B}$. La matriz \mathbf{B} fue calculada en la observación 1,15, de donde es inmediato deducir que para el punto p

$$(0, 0)^t = (z_{xx}(0, 0), z_{xy}(0, 0)) = \mathbf{B} \cdot (1, 0)^t = -\mathbf{A} \cdot (1, 0)^t,$$

Por tanto, si $z_{xx}(0, 0) = z_{xy}(0, 0) = 0$, \hat{x} sería una dirección doblemente asintótica.

Así, $z_x = 2ax + 2by + \dots$ con $(a, b) \neq (0, 0)$. Por el teorema de la función implícita, al ser $[\nabla_{x,y}(z_x)](0, 0) = 2(a, b) \neq (0, 0)$, el conjunto dado por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : z_x(x, y) = 0\}$ es una curva simple y regular alrededor del $(0, 0)$. Debido a la expresión de $N(x, y)$, la imagen de este conjunto por \mathbf{x} se corresponde con C en un entorno Ω_p de p . Podemos repetir el argumento para todo $q \in C$ y obtener entornos Ω_q en los cuales C siempre es una curva simple y regular¹.

Ahora bien, como $S = A \cup B \cup C = A \cup B \cup_{q \in C} \Omega_q$ (pues $\Omega_q \in S$ para todo $q \in S$), podemos expresar S como un recubrimiento de abiertos. Al ser S una superficie compacta, podemos tomar un subrecubrimiento finito. Como en cada uno de estos abiertos C se corresponde con una curva simple y regular (o ninguna, pues en A y B no hay puntos de C), deducimos que C es una unión de un número finito de curvas simples y regulares.

Pasemos ahora a estudiar los conjuntos \bar{A} y \bar{B} . Para ello, tomemos $p \in C$ y volvamos a la parametrización $\mathbf{x}(x, y)$ con la que trabajamos previamente. Antes afirmamos que el conjunto $\Gamma := \{(x, y) : z_x(x, y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ es una curva simple y regular en un entorno del origen. Es más: el teorema de la función implícita implica que a uno de los lados de Γ , la derivada $z_x(x, y)$ es positiva, y al otro, negativa (ver figura 3.6). Esto quiere decir que en un entorno de p , la curva $C \subset S$ tiene a un lado puntos de A y al otro puntos de B . En consecuencia, $C \subset \bar{A}$, $C \subset \bar{B}$, y por tanto $C \cup A \subset \bar{A}$, $C \cup B \subset \bar{B}$. Junto con la observación 3.4, se tienen las igualdades deseadas. \square

¹De acuerdo con el teorema de la función implícita, la regularidad de la curva se correspondería con la regularidad de la función $z_x(x, y)$, que sería C^2 al ser $z(x, y)$ una función de clase C^3 .

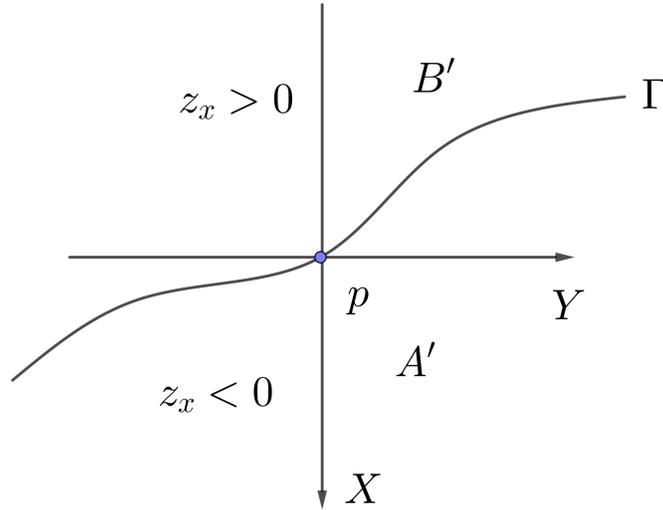


Figura 3.6: Las imagen por \mathbf{x} de Γ está contenida C . Por otra parte, las imágenes por \mathbf{x} de los conjuntos $A', B' \subset \mathbb{R}^2$ están contenidos, respectivamente, en $A, B \subset S$.

Lema 3.8. *Sea S una superficie simple y compacta de clase C^3 . Dado $p \in C$ y una dirección no excepcional d , escogemos un sistema de coordenadas centrado en p , donde el eje X se corresponda con d y el eje Z con el vector normal interior a S en p , $N(p)$, al igual que en la figura 3.5. Supongamos que existe $x_1 > 0$ tal que el conjunto $T = \{(x, 0, 0) : 0 < x < x_1\}$ no contiene puntos de S . Sea \hat{S} la intersección de S con el trozo de semiplano $\{(x, 0, z) \in \Omega_p : x > 0\}$ donde Ω_p es un entorno de p en \mathbb{R}^3 . Entonces o bien T está en el interior de S y $\hat{S} \cap A \neq \emptyset$ o bien T está en el exterior y $\hat{S} \cap B \neq \emptyset$.*

Demostración. En este sistema de referencia, $T_p(S)$ se corresponde con el plano XY , así que podemos tomar la parametrización $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, z(x, y))$ en un entorno de p , de acuerdo con la proposición 1.23. Si T está en el interior de S , entonces los puntos de \hat{S} tienen coordenada z negativa (ver figura 3.7). Como z en el punto p es 0, por el teorema del valor medio debe existir un punto $q := \mathbf{x}(x_0, 0) \in \hat{S}$ tal que $z_x(x_0, 0) < 0$. En consecuencia, $q \in \hat{S} \cap A \neq \emptyset$. De igual manera, si T está en el exterior de S , entonces los puntos de \hat{S} tienen coordenda z positiva, con lo cual existe

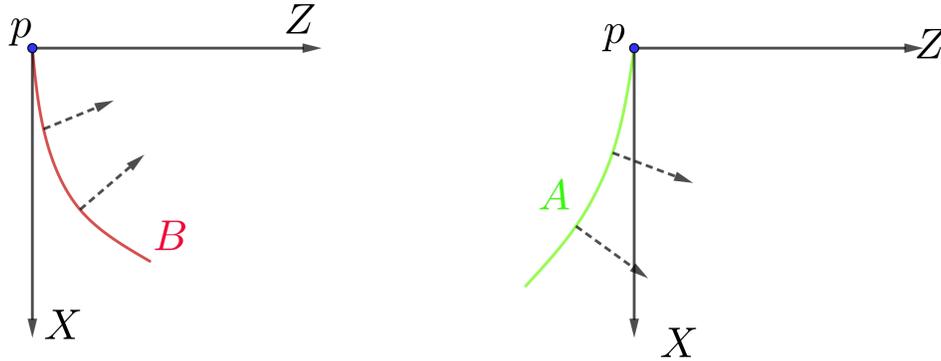


Figura 3.7: Sección de S en el plano XZ . A la izquierda, caso donde T está en el exterior de S . A la derecha, caso donde T está en el interior de S .

un punto $q := \mathbf{x}(x_0, 0) \in \hat{S}$ con $z_x(x_0, 0) > 0$ y $q \in \hat{S} \cap B \neq \emptyset$. \square

Teorema 3.9. *Sea S una superficie simple y compacta de clase C^3 y d una dirección no excepcional con respecto a S . Entonces existe un plano P perpendicular a d tal que la imagen reflejada de S por P , que denotaremos por S' , tiene un contacto positivo propio o semipropio con S .*

Demostración. Comenzamos escogiendo un sistema de referencia en el cual d coincida con el eje X (tal y como en la figura 3.5, con la salvedad de que no tomamos ni un origen ni un eje Z particular). Sea P un plano perpendicular al eje X que se encuentre *por debajo* de S (ver figura 3.8). Sea S' la reflexión de S por P . Definimos en S' los conjuntos A' , B' y C' como las reflexiones de A , B y C , respectivamente. Por estar P *debajo* de S , $S \cap S' = \emptyset$. A continuación, vamos desplazando el plano P hacia arriba (esto es, en el sentido negativo del eje X , según la figura 3.5) hasta llegar a un plano \hat{P} en el que $\overline{B'} = B' \cup C'$ se encuentre por primera vez con $\overline{A} = A \cup C$ (es decir, $\overline{A} \cap \overline{B'} \neq \emptyset$). Cabe señalar que las igualdades $\overline{B'} = B' \cup C'$, $\overline{A} = A \cup C$ son consecuencia de la observación 3.4 y el lema 3.7.

Sea $p \in \overline{A} \cap \overline{B'}$. Por ser el primer momento en el que \overline{A} y $\overline{B'}$ se encuentran, el conjunto \overline{A} se queda *por encima* de $\overline{B'}$. Consideremos la línea l paralela al eje X que pasa por p . Por la construcción realizada, no puede haber puntos de $\overline{A} = A \cup C$ por debajo de p . Sí que puede haber, sin embargo, puntos de B , aunque como máximo uno: de acuerdo con la observación 3.5, los puntos de B son

de salida de S . Si hubiera más de un punto de *de salida* por debajo de p , debería haber otro de entrada, que forzosamente pertenecería a \overline{A} . Esto nos da dos posibilidades:

1. Existe un punto $b \in B$ por debajo de p . En este caso, veremos que $p \in A \cap B'$, y que el contacto entre las superficies es positivo y propio.
2. No existe ningún punto $b \in B$ por debajo de p . En tal caso, $p \in C \cap C'$. Es más, la reflexión por \hat{P} deja a p invariante. El contacto será semipropio.

Comencemos por el caso 1. Nos apoyaremos en la figura 3.8. Hemos visto que $b \in B$ es el único punto que hay *por debajo* de p en S . Esto quiere decir que su reflexión (a la que denotaremos $b' \in B'$) será el punto *a mayor altura* en S' , y en consecuencia será el que se encuentre primero con \overline{A} . Es decir, $b' = p$. De aquí deducimos que $p \in B'$. Por tanto, la línea l no es tangente a $\overline{B'}$ en p .

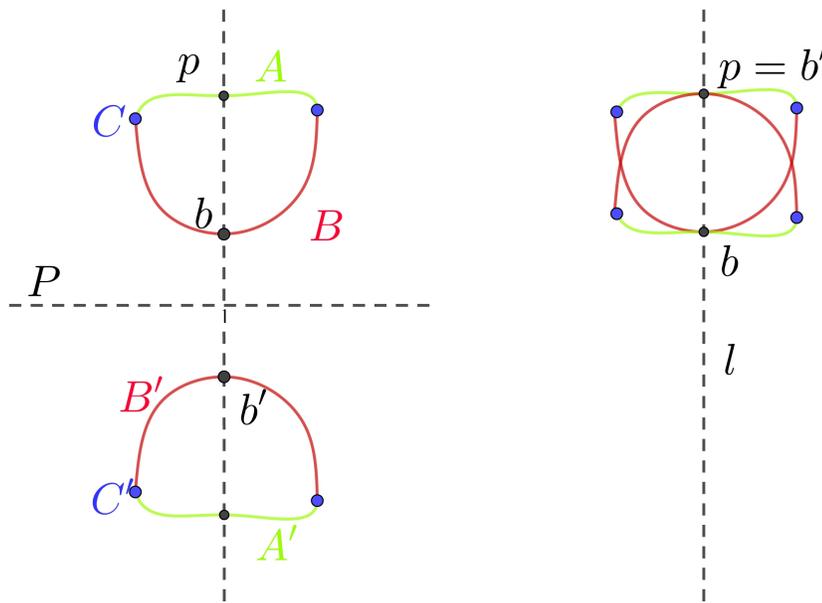


Figura 3.8: Caso 1. Existe $b \in B$ debajo de p . Su reflexión, b' , es el punto *más alto* de S' a lo largo de la línea l .

Por otra parte, $b \in B$ es un punto *de salida*: esto implica que $p \in \overline{A}$, que es el primer punto que hay por encima de b en S , es de entrada. Vamos a demostrar que $p \in A$. supongamos por

reducción al absurdo que $p \in C$. En tal caso, podríamos aplicar el lema 3.8 tomando como conjunto T el segmento que une p y b . Al estar el segmento en el interior de S , deducimos que hay puntos de A en un entorno de p , lo cual es imposible pues en tal caso \bar{A} se encontraría *por debajo* de \bar{B} (consultar figura 3.9). Deducimos que $p \in A$. Así, en p se debe dar un contacto entre A y B' . Este debe ser positivo, pues ambos vectores normales interiores apuntarían *hacia abajo*, y propio, pues A se encontraría *por encima* de B (ver figura 3.8).

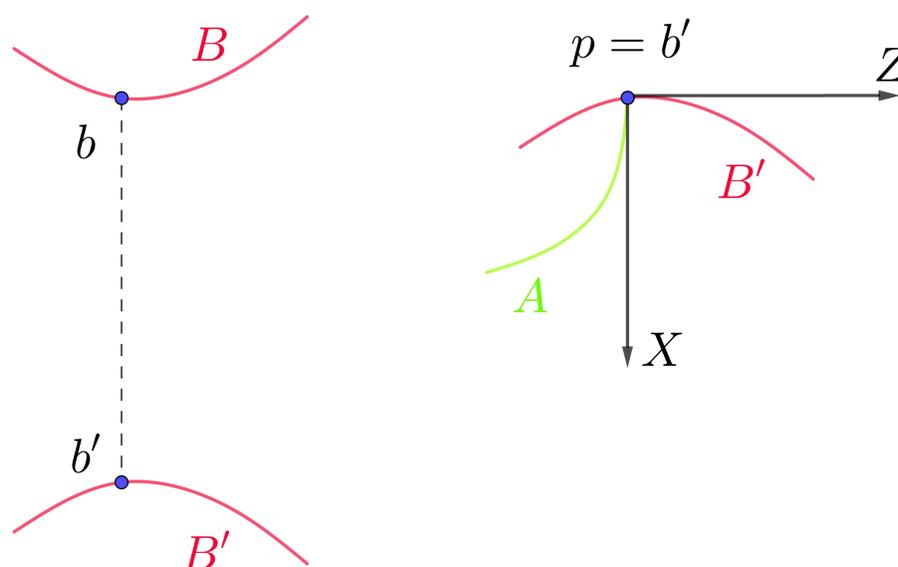


Figura 3.9: Caso 1. Contradicción a la que llegaríamos si $p \in C$. A se queda *por debajo* de B' , algo imposible.

Pasemos al caso 2, que estudiaremos mediante la figura 3.10. Supongamos por reducción al absurdo que $p \in A$. Entonces el eje X entra en S por el punto p y debe salir por un punto de B o C . No puede salir por un punto de B , ya que eso implicaría que existe un punto b por debajo de p , que sale de las hipótesis de nuestro caso. Tampoco puede salir por un punto de C , porque sabemos que no puede haber ningún punto de \bar{A} debajo de p . Por tanto, $p \in C$. Como no hay puntos de S *por debajo* de p en la línea l , entonces el punto de S' que está *a mayor altura* es el reflejado de p en

S' (llamémoslo p'). El contacto será, entonces, entre p y p' . Esto implica que el plano de reflexión \hat{P} pasa por p , pues p y p' acaban coincidiendo.

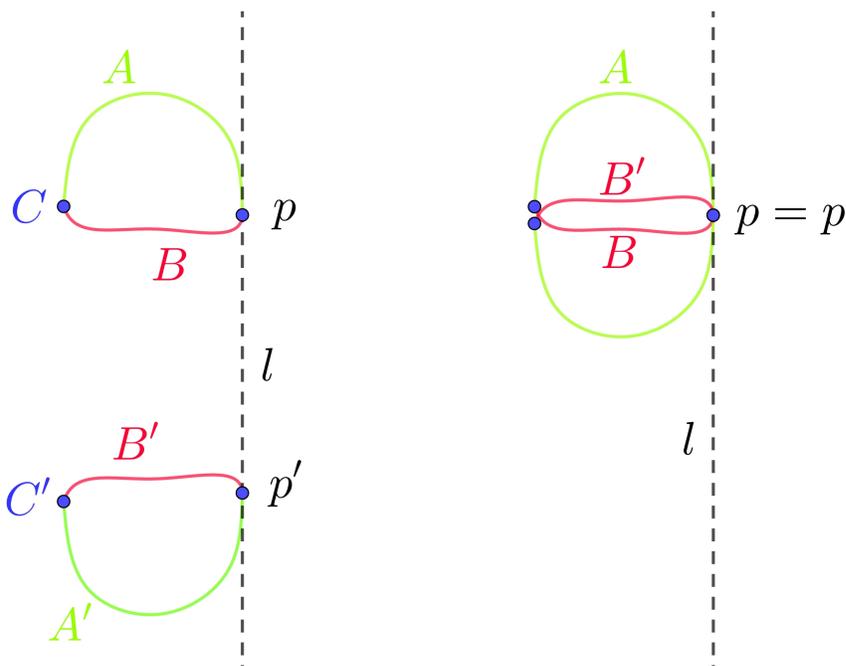


Figura 3.10: Caso 2. No existe $b \in B$ debajo de p . La reflexión de p , p' , es entonces el punto *más alto* de S' a lo largo de la línea l .

Sea γ un entorno de p y γ' su reflexión. γ' contiene puntos de A' , B' y C' , de acuerdo con el lema 3.7. Como $\overline{B'}$ se queda por debajo de \overline{A} , en particular se queda por debajo de A . Si probamos que además $\gamma' \cap A'$ se queda por debajo de A , podremos concluir que todo el conjunto γ' se queda por debajo de A .

Escojamos ahora un sistema de referencia en el cual d siga siendo el eje X y además el vector normal interior a p en S sea el eje Z (tal y como en la figura 3.5) en un entorno de p . Sea \hat{C} la proyección de C en el plano XY (equivalentemente, el plano tangente $T_p(S)$). Por el lema 3.7, \hat{C} debe ser una curva regular si tomamos un entorno γ suficientemente pequeño. Sea $q \in C$ y q' su imagen reflejada. Entonces q' está por debajo o a la misma altura que q , puesto que el primer contacto se

tiene en p . Esto quiere decir que la coordenada x de q , que denotamos $x(q)$, es menor o igual que la coordenada x de q' , $x(q')$. Además, $x(q') = -x(q)$. Deducimos entonces que $x(q) \leq 0 = x(p)$. La curva \hat{C} está, por tanto, por encima del eje Y (ver figura 3.11).

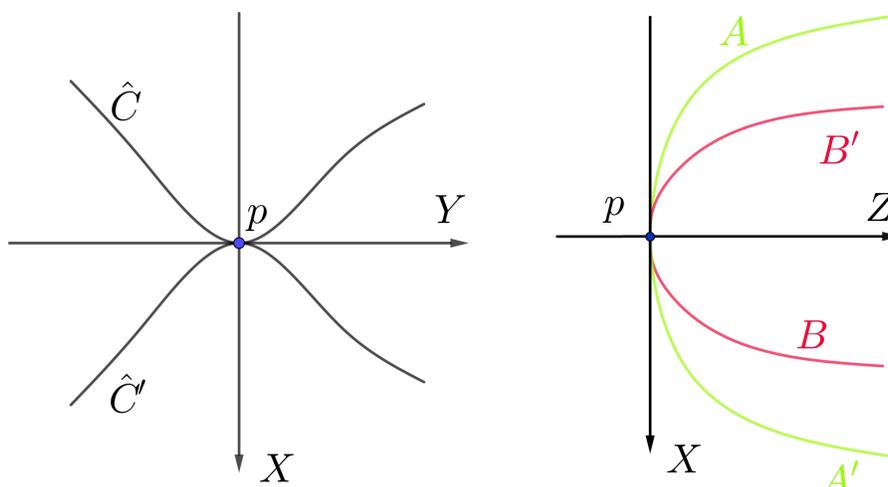


Figura 3.11: Caso 2. A la izquierda, proyección de la superficie sobre el plano XY . A la derecha, sección del plano XZ . El eje X está fuera de la superficie y A por encima de A' , B' .

\hat{C} divide la proyección del entorno de p en \hat{A} y \hat{B} de acuerdo con lo visto en la prueba del lema 3.7. Es más, los puntos de \hat{B} han de estar debajo de \hat{C} (es decir, en el semiplano XY con x positivo). Esto se debe a que debajo de p no existen más puntos de S , así que ha de haber un segmento T contenido en el semieje X positivo fuera de la superficie, lo que nos permite usar el lema 3.8 y afirmar que debajo de p hay puntos de B . En consecuencia, \hat{B} está por debajo de \hat{C} y \hat{A} por encima de \hat{C} . Pero entonces, \hat{A}' y \hat{C}' no tienen puntos en común con \hat{A} , así que $\gamma' \cap A'$ queda *por debajo* de A (ver figura 3.11). Se deduce que S y S' tienen un contacto semipropio en p : tomemos la curva $\hat{C} \subset \mathbb{R}^2$, que por el lema 3.7 es de clase C^2 . Por encima de esta curva, se encuentra \hat{A} . Todos los puntos de A se encuentran *por encima* de γ' , que es un entorno de S' en p . Esto quiere decir, tomando parametrizaciones locales $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, z(x, y))$, $\mathbf{x}'(x, y) = (x, y, z'(x, y))$ de S y S' , que $z(x, y) \leq z'(x, y)$ en todos los puntos (x, y) por encima de \hat{C} . Queda así demostrado el contacto

semipropio entre S y S' . El contacto es además, positivo, ya que ambos vectores normales interiores apuntan en la dirección del eje Z positivo. \square

3.2. Resultado principal

En el enunciado siguiente, volvemos a exigir regularidad C^3 a la superficie. Esto se debe no solo a las proposiciones anteriores, sino a que es la condición que exige el teorema de Bernstein para afirmar que la superficie sea analítica.

Lema 3.10. *Sea S una superficie simple y compacta de clase C^3 con curvatura media constante. Entonces las direcciones no excepcionales tienen un punto interior en \mathbb{S}^2 .*

Demostración. Sabemos por la observación 2.3 que la ecuación de curvatura media constante es uniformemente elíptica. La función φ asociada es además analítica. Por tanto, el teorema de Bernstein [Ber04] afirma que S es analítica. A continuación, vamos a probar que el conjunto de direcciones excepcionales en \mathbb{S}^2 es un conjunto cerrado de medida nula. Esto nos permitirá deducir que el conjunto de direcciones no excepcionales es un abierto con medida positiva, que en particular tiene un punto interior en \mathbb{S}^2 , concluyendo el resultado.

Veamos primero que S no tiene puntos planares (ver definición 1.27). Si los hubiera, la superficie sería forzosamente mínima ($H = 0$), de donde deducimos que $k_1(p) = -k_2(p)$ para todo $p \in S$, así que $K(p) = -k_1(p)^2 \leq 0$. Esto es imposible, pues toda superficie compacta ha de tener un punto con curvatura gaussiana estrictamente positiva. Podemos demostrar esta afirmación tomando una esfera lo suficientemente grande como para que cubra toda la superficie S e ir reduciéndola hasta llegar al primer punto de contacto, al que denotaremos por p_0 , que será propio y positivo. En dicho punto, la curvatura gaussiana de la superficie será mayor o igual que la curvatura de la esfera, que sería positiva.

A continuación, probaremos que el conjunto de puntos parabólicos (ver definición 1.27) es un conjunto cerrado de medida nula en S .

Sea $p \in S$. Consideremos una parametrización local de S en p dada por $\mathbf{x} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que parametriza S en un entorno abierto $\Omega_p \subset S$ de p . Definimos el conjunto $M := \{(x, y) \in D :$

$K(x, y) = 0\}$. Vamos a probar que la medida de M es nula. Para ello, resulta más sencillo demostrar que para todo rectángulo $R = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \subset D$, la medida de $M \cap R$ es nula.

Lo primero que observamos es que, al ser $M = K^{-1}(\{0\})$, el conjunto $C := M \cap R$ es cerrado y medible por ser intersección de conjuntos cerrados y medibles. Además, la medida de C ha de ser finita al estar C contenido en R . Tomamos la función indicatriz $I_C(x, y)$ (que es 0 ó 1 en función de si (x, y) pertenece a C). Dado que

$$\int_R |I_C(x, y)| dx dy = m(C) < \infty,$$

podemos usar el teorema de Fubini,

$$m(C) = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} dx I_C(x, y).$$

Supongamos por reducción al absurdo que $m(C) > 0$. Esto implica que existe al menos un conjunto infinito numerable de puntos $y_n \in [y_1, y_2]$ para los que la integral $\int_{x_1}^{x_2} dx I_C(x, y_n)$ existe y es positiva. Para cada y_n , la integral en x es positiva, así que debe existir también un conjunto infinito numerable de puntos x_m tales que $I_C(x_m, y_n) > 0$. Para todos los pares de puntos (x_m, y_n) , la función indicatriz es positiva, lo que equivale a que $(x_m, y_n) \in C$ y en consecuencia $K(x_m, y_n) = 0$.

Usemos la analiticidad de K (que es analítica por serlo S): tomado un cierto y_{n_0} , los puntos (x_m, y_{n_0}) tienen un punto de acumulación por ser el rectángulo finito. Es decir, los ceros de la función $K(x, y_{n_0})$, que podemos considerar como una función analítica de una variable, tienen un punto de acumulación. Sea este punto (x_*, y_{n_0}) . Es posible demostrar (por ejemplo, haciendo uso del teorema del valor medio) que entonces las derivadas respecto a x , $\frac{\partial^n K}{\partial x^n}(x_*, y_{n_0})$, son todas nulas. Para una función analítica de una variable, esto conlleva que $K(x, y_{n_0}) = 0$ para todo $x \in [x_1, x_2]$. Así, $K(x, y)$ se anula en el segmento dado por $y = y_{n_0}$, y esto se verifica para todo $n_0 \in \mathbb{N}$.

Fijamos ahora $x_0 \in [x_1, x_2]$ cualquiera. Aplicamos el mismo argumento para la función $K(x_0, y)$, que ahora es variable únicamente de y , para demostrar que $K(x_0, y) = 0$ para todo $y \in [y_1, y_2]$. Así, $K(x, y) = 0$ en todo el rectángulo R . Como la superficie es analítica, deducimos $K = 0$ en toda la superficie, algo imposible por ser compacta (antes vimos que debe existir un punto p_0 con curvatura gaussiana positiva). Llegamos a un absurdo, así que necesariamente $m(C) = 0$. Como

esto es cierto para todo rectángulo R , entonces $m(M) = 0$. En consecuencia, la medida del conjunto $\mathbf{x}(M) \subset \Omega_p \subset S$ es nula².

Una vez demostrado que el conjunto M de puntos donde $K = 0$ es de medida nula en S , es posible deducir que el conjunto E de direcciones excepcionales en \mathbb{S}^2 tiene también medida nula. Para ello recordemos que (ver definición 3.6) los vectores $v \in \mathbb{S}^2$ que pertenecen a E son aquellos para los que existe $p \in M$ tales que $dN_p(v) = 0$ (de hecho, para cada $p \in M$ existen únicamente dos vectores de signo opuesto $\{v, -v\}$ en \mathbb{S}^2 cumpliendo esa propiedad, correspondientes con la dirección propia de curvatura principal nula). Del hecho de que M es de medida nula, y por ser diferenciable la diferencial de la aplicación de Gauss, se deduce que el conjunto E de las direcciones excepcionales es de medida nula en \mathbb{S}^2 , lo que termina la demostración del lema. \square

Observación 3.11. Un detalle a tener en cuenta en la demostración anterior es que las direcciones principales de un punto $p \in S$ están asociadas a los autovectores de la diferencial de la aplicación de Gauss en p . La dependencia de estas direcciones con los puntos de la superficie es diferenciable salvo para aquellos $q \in S$ en los que hay degeneración en los autovalores³ (equivalentemente, las curvaturas principales coinciden $k_1(q) = k_2(q) = c$).

No obstante, este detalle no supone un problema para la demostración: podemos restringir la superficie al conjunto abierto $U = \{p \in S : K(p) < \frac{c^2}{2}\} \subset S$. En este conjunto, que es de hecho una superficie, se incluyen todos los puntos parabólicos de S y se excluyen todos los puntos umbílicos (que ni siquiera aparecerían en el compacto \bar{U}). En consecuencia, la dependencia de las direcciones principales con los puntos de la superficie sí sería diferenciable en $U \subseteq S$.

Teorema 3.12 (Teorema de Alexandrov, [Hop47]). *Sea S una superficie simple y compacta de clase C^3 con curvatura media constante. Entonces S es una esfera.*

Demostración. Sea d una dirección no excepcional de S . Por el teorema 3.9, existe un plano

²En este documento, no se ha definido la noción de medida nula en una superficie. Una definición rigurosa procedente de la teoría de variedades diferenciables es que un conjunto $A \subset S$ tiene medida nula en S si para toda parametrización $\mathbf{x} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} V \cap S$ (aquí estamos siguiendo estrictamente las condiciones de la definición 1.1), el conjunto $\mathbf{x}^{-1}(A \cap V \cap S) \subset \mathbb{R}^2$ tiene medida nula. Con el argumento utilizado en esta demostración, es posible demostrar que el conjunto $\mathbf{x}(M) \subset S$ tiene medida nula.

³Es habitual llamar a los puntos con esta condición *puntos umbílicos*.

P perpendicular a d tal que la reflexión de S por P (que denotamos S') tiene un contacto positivo propio o semipropio con S . Por ser la ecuación $H = c$ absolutamente elíptica, S y S' han de coincidir en un entorno, de acuerdo con el principio del máximo geométrico (ver teorema 2.16). Pero dos superficies analíticas iguales en un entorno son idénticas. En consecuencia, $S = S'$ y todas las direcciones no excepcionales d se corresponden con planos de simetría. Aplicando el lema 3.10, el conjunto de planos de simetría debe tener un punto interior, de donde deducimos por el lema 3.2 que la superficie es una esfera.

Observación 3.13. A lo largo de este capítulo, se remarcado en todos los enunciados la condición de que S ha de ser una superficie simple (condición que de hecho ya estaba implícita en la definición 1.1, de acuerdo con la observación 1.2). El motivo es que el teorema sería falso si no imponemos que S sea simple: un contraejemplo sería el toro de Wente [Wen86], que fue descubierto en 1986, 30 años después de que el teorema de Alexandrov fuese publicado.

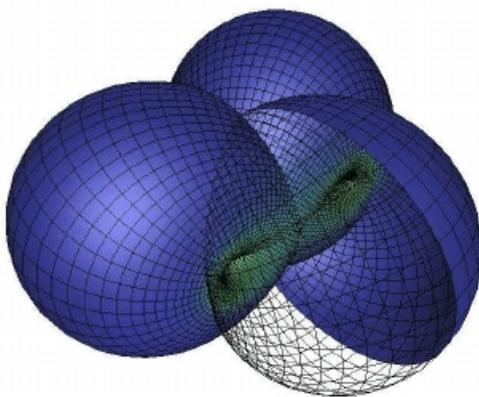


Figura 3.12: Toro de Wente. Fuente: ResearchGate.

Capítulo 4

Teorema del semiespacio

En la prueba del teorema de Alexandrov, se hizo uso de las propiedades de simetría de la esfera y del principio del máximo. El teorema de Bernstein [Ber04] nos permitió además asumir que cualquier superficie de curvatura media constante de clase C^3 era automáticamente analítica. La gran ventaja de las superficies analíticas es que nos basta conocer su forma en un entorno para que estén totalmente determinadas, algo que ya se usó en la demostración del teorema de Alexandrov (teorema 3.12).

En este capítulo, demostraremos el llamado teorema del semiespacio [HofMee90], que demuestra que las únicas superficies mínimas y propias (ver definición 4.1) que pueden contenerse en un semiespacio son los planos. También demostraremos algunas generalizaciones de este resultado.

4.1. Resultado principal

La técnica que usaremos para la demostración del teorema se puede resumir en los siguientes pasos: primero, suponemos que una superficie mínima y propia se puede contener en un semiespacio. Después, usamos una superficie mínima conocida (el catenoide, ver ejemplo 1.25) que nos permita obtener un contacto propio positivo con S . Por el principio del máximo (teorema 2.16), S será localmente un catenoide. Pero S es analítica, así que solo puede ser un catenoide, que no se puede contener en un semiespacio. Este tipo de argumento será utilizado en otros resultados de este capítulo.

Comencemos definiendo qué entendemos por una superficie propia y por semiespacio:

Definición 4.1. Decimos que una superficie S es **propia** si su inclusión en \mathbb{R}^3 , $i : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación propia, es decir, la anti imagen de cualquier compacto K de \mathbb{R}^3 es un compacto de S .

Podemos dar una caracterización sencilla de las superficies propias:

Proposición 4.2. *Una superficie S es propia si y solo si es un conjunto cerrado de \mathbb{R}^3 .*

Demostración. Supongamos que S es propia y sea p punto de acumulación de S . Vamos a ver que $p \in S$. Sea \bar{B} una bola cerrada centrada en p , que en particular es un conjunto compacto. Por tanto, el conjunto $i^{-1}(\bar{B}) = S \cap \bar{B}$ es también compacto. Como p es punto de acumulación de S , existe una subsucesión $p_n \in S$ convergente a p . Por la definición de \bar{B} , a a partir de cierto n_0 esta sucesión también estará contenida en \bar{B} . En consecuencia, p es punto de acumulación de $S \cap \bar{B}$, y por compacidad $p \in S \cap \bar{B}$. En particular, $p \in S$. Queda así probado que S es un conjunto cerrado.

Recíprocamente, supongamos que S es un conjunto cerrado. Dado K compacto, el conjunto $i^{-1}(K) = S \cap K$ es cerrado por serlo S y K y acotado por serlo K . En consecuencia, $i^{-1}(K)$ es compacto, así que la superficie es propia. \square

Definición 4.3. Decimos que un conjunto H es un **semiespacio** si se puede escribir en la forma $H = \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle d, p \rangle \geq \lambda\}$ siendo $d \in \mathbb{R}^3$ un vector unitario y $\lambda \in \mathbb{R}$. En consecuencia, el conjunto H está formado por todos los puntos que se encuentran a un lado del plano dado por $\langle d, p \rangle = \lambda$.

Teorema 4.4. (Teorema del semiespacio) *Sea S una superficie mínima y propia de clase C^3 . Si S está contenida en un semiespacio, entonces es un plano.*

Demostración. Vamos a suponer por reducción al absurdo que la superficie S no es un plano y que está contenida en el subespacio $H = \{(x, y, z) \mid z \geq 0\}$. Supondremos además que H es el menor subespacio que contiene a S , esto es, la superficie $S_\varepsilon := \{(x, y, z - \varepsilon) : (x, y, z) \in S\}$ (traslación de S en el sentido negativo del eje Z) no está contenida en H para ningún $\varepsilon > 0$.

Sea $P := \partial H$, que se corresponde con el plano XY . Observemos primero que S no puede cortar al plano P , es decir $S \cap P = \emptyset$. En efecto, como la coordenada z de todo $p \in S$ es mayor o igual que 0 por la contención $S \subset H$, entonces cualquier punto $p_0 \in S \cap P$ sería forzosamente de contacto entre ambas superficies. El contacto sería además propio (consultar definición 2.14). Por el principio del máximo geométrico (teorema 2.16), S sería localmente un plano. Pero S es analítica: en efecto, el teorema de Bernstein asegura que las superficies mínimas de clase C^3 son automáticamente analíticas, así que S sería un plano. Por tanto, $S \cap P = \emptyset$. Notemos, sin embargo, que deben existir valores positivos de ε arbitrariamente pequeños para los cuales $S_\varepsilon \cap P \neq \emptyset$, condición que se suele expresar como que S y P tienen un contacto propio *en el infinito*.

Consideremos el trozo de catenoide $C_1 := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = \cosh^2(z), z < 0\}$, que como vimos en el ejemplo 1.25 es una superficie mínima. A continuación, vamos a demostrar que existe un $\varepsilon > 0$ tal que $S_\varepsilon \cap C_1 = \emptyset$ y $S_\varepsilon \cap D_1 = \emptyset$, siendo D_1 el disco unidad abierto de P .

Sea d la distancia de S al disco cerrado D_R , con $R = \cosh(1)$. Tenemos entonces que D_R es compacto y que $D_R \cap S \subset P \cap S = \emptyset$.

Veamos que $d > 0$. Si fuese $d = 0$, podríamos tomar una sucesión de puntos $x_n \in D_R$, $y_n \in S$ tales que la distancia euclídea $|x_n - y_n|$ tiende a 0. Por ser D_R compacto, habría una subsucesión $x_{n_k} \rightarrow x_* \in D_R$. x_* sería además punto de acumulación de S , y como es propia, entonces x_* debería pertenecer a S (ver proposición 4.2), de forma que $x_* \in S \cap D_R = \emptyset$.

El borde del disco D_R define un cilindro si lo extendemos a lo largo del eje Z (consultar figura 4.1). Como $R = \cosh(1)$, el catenoide se encuentra por debajo del plano $z = -1$ fuera del cilindro.

Tomamos ε verificando la condición $\varepsilon < \frac{1}{2} \min(1, d)$ y tal que $S_\varepsilon \cap P \neq \emptyset$. Con esta elección de ε , se cumple $S_\varepsilon \cap C_1 = \emptyset$ y $S_\varepsilon \cap D_1 = \emptyset$. La primera condición se tiene porque fuera del cilindro, el catenoide está por debajo de $z = -1$. La superficie S la podríamos bajar hasta una distancia máxima de $\varepsilon = \frac{1}{2}$, así que no se tocaría con el catenoide. Dentro del cilindro, sabemos que la distancia entre S y D_R es mayor que d . Incluso si bajamos S una distancia $\varepsilon = \frac{d}{2}$, la superficie S no llegaría a tocar el disco, sino que se quedaría *por encima*. El catenoide se encuentra en el semiespacio dado por $z \leq 0$, así que S tampoco podría tocarlo en el interior del cilindro. La condición $S_\varepsilon \cap D_1 = \emptyset$ se deduce de $D_1 \subset D_R$, ya que $S_\varepsilon \cap D_1 \subset S_\varepsilon \cap D_R = \emptyset$. Además, debe existir un $\varepsilon < \frac{1}{2} \min(1, d)$ tal que $S_\varepsilon \cap P \neq \emptyset$: si no hubiera ninguno, entonces el semiespacio H no sería el menor que contiene a S .

Definimos a continuación la familia $C_t := t \cdot C_1$, es decir, la homotecia de razón t sobre C_1 , $0 < t \leq 1$. La familia C_t converge a $P \setminus \{0\}$ cuando t tiende a 0. Consideremos $M := \{t \mid C_t \cap S_\varepsilon \neq \emptyset\}$, y sea T el supremo de M . T ha de ser estrictamente menor que 1 de acuerdo con la elección de ε : dentro del cilindro de radio R , vimos que S_ε no *toca* a D_R y por tanto tampoco a ningún C_t . Fuera del cilindro, S_ε está siempre por encima del plano $z = -1/2$ ($\varepsilon < \frac{1}{2}$), mientras que la altura del catenoide C_1 está por debajo de -1 . Por tanto, debe existir un intervalo $U := (1 - \delta, 1]$ con $\delta > 0$ en el cual $C_t \cap S = \emptyset$ para todo $t \in U$. Así, T es estrictamente menor que 1.

Probemos a continuación que $T \in M$. En caso contrario, existiría una sucesión creciente $t_n \in M$ convergiendo a T . Tomamos una subsucesión tal que $t_0 \geq T/2$. Para todo t_n de esta subsucesión, existe $p_n = (x_n, y_n, z_n) \in C_1$ tal que $t_n p_n \in C_{t_n} \cap S_\varepsilon$. En particular, la condición $t_n p_n \in S_\varepsilon$ implica $t_n z_n \geq -\varepsilon$, esto es, $z_n \geq -\varepsilon/t_n \geq -2\varepsilon/T$. Por tanto, $p_n \in \{(x, y, z) \in C_1 : z \geq -2\varepsilon/T\}$, que es un conjunto cerrado y acotado. Existe entonces una subsucesión convergente p_{n_k} a un cierto $p \in C_1$. Así, la sucesión $t_{n_k} p_{n_k}$ tiende a $Tp \in C_T$. Como además $t_{n_k} p_{n_k} \in S_\varepsilon$, entonces el límite Tp también pertenece a S_ε , así que $Tp \in C_T \cap S_\varepsilon$. Es decir, $T \in M$.

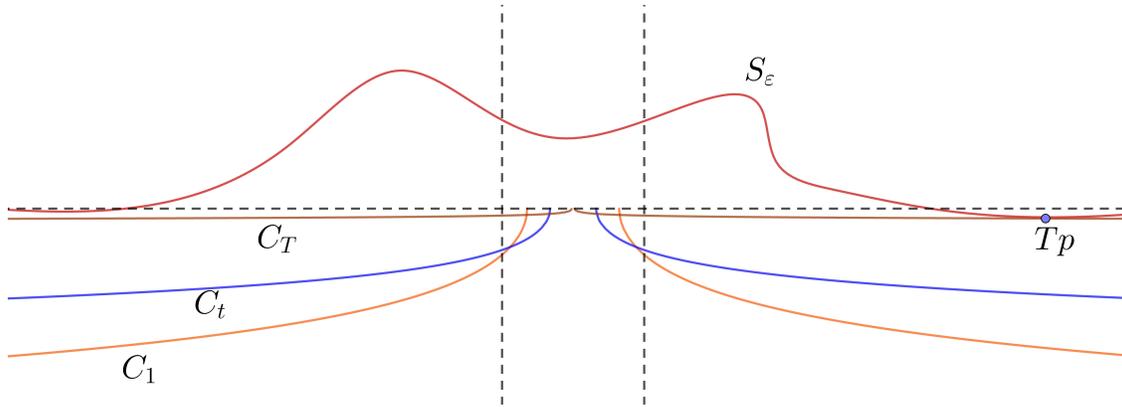


Figura 4.1: Sección de S_ε y la familia de catenoides C_t . La línea horizontal se corresponde con el plano P y las verticales con la sección del cilindro de radio D_R .

Dado que el borde de C_T está contenido en $D_1 \subset D_R$, que por construcción no toca a S_ε , deducimos que Tp es un punto interior de C_T . Por la propiedad de supremo, C_T y S_ε han de tener un punto de contacto propio en Tp , ya que para $t > T$, C_t está *por debajo* de S_ε . Al ser el catenoide una superficie mínima, el principio del máximo geométrico (teorema 2.16) nos dice que $S_\varepsilon = C_T$ en un entorno de Tp . Por ser S_ε analítica, ha de ser un catenoide. Pero el catenoide no está incluido en ningún semiespacio, así que llegamos a una contradicción. \square

Observación 4.5. En el teorema anterior, no es posible prescindir de la condición de que S sea propia: un contraejemplo se puede encontrar en [JorXav80], donde se demuestra la existencia de

una superficie mínima y completa (hipótesis menos restrictiva que propia) que no solo se puede contener en un semiespacio, sino entre dos planos paralelos.

A pesar de que en este trabajo nos hemos restringido solo al caso de superficies simples (es decir, sin autointersecciones) este teorema sigue siendo válido para el caso de superficies inmersas (con autointersecciones).

A continuación, presentaremos un resultado conocido como teorema fuerte del semiespacio [HofMee90]. Su deducción es inmediata a partir del teorema del semiespacio que acabamos de demostrar y el siguiente resultado auxiliar, que se puede consultar en [MeeSimYau82]:

Teorema 4.6. *Sean S_1 y S_2 dos superficies mínimas y propias de clase C^3 que no se intersecan. Entonces o bien una de ellas es un plano o bien están separadas por un plano.*

Teorema 4.7. (Teorema fuerte del semiespacio) *Dos superficies S_1 y S_2 mínimas y propias de clase C^3 deben intersecarse a menos que sean planos paralelos.*

Demostración. Supongamos que S_1 y S_2 no se intersecan. Por el teorema 4.6, o bien S_1 y S_2 están separadas por un plano o bien una de las superficies es un plano. En cualquiera de los casos, las dos superficies están contenidas en un semiespacio, de donde deducimos que ambas han de ser planos paralelos.

4.2. Generalización en términos de envolventes convexas

En esta sección, trataremos de obtener un resultado más general que el teorema del semiespacio. Más específicamente, buscamos un teorema que nos aporte información sobre superficies mínimas no necesariamente compactas pero con borde compacto. Hasta ahora, la definición de superficie con la que hemos trabajado no tenía en consideración aquellos puntos que intuitivamente podrían constituir el *borde* de una superficie. Por ejemplo, se puede comprobar que el disco unidad D_1 abierto verifica las condiciones de la definición 1.1 mientras que en $\overline{D_1}$ (esto es, la superficie *más el borde*) los puntos de ∂D_1 no podrían ser localmente homeomorfos a un abierto de \mathbb{R}^2 , así que $\overline{D_1}$ no sería una superficie. Debemos entonces modificar nuestra definición de superficie (ver definición 1.1):

Definición 4.8. Decimos que un conjunto conexo $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie con borde** (de clase C^k , $k \geq 2$), si para cada $p \in S$ existe un abierto $V \subset \mathbb{R}^3$, con $p \in V$, y una aplicación $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$, siendo $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto o bien $U \subset \mathbb{R}_+^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v \geq 0\}$ abierto para la topología inducida en \mathbb{R}_+^2 por \mathbb{R}^2 tales que:

1. $\mathbf{x} \in C^k(U)$. Si además podemos encontrar \mathbf{x} analítica, decimos que la superficie es **analítica**.
2. \mathbf{x} es un homeomorfismo.
3. \mathbf{x} es una inmersión, esto es, la aplicación diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ en q es inyectiva para todo $q \in U$.

En particular, decimos que un punto $p \in S$ pertenece al borde de la superficie si $p \in \mathbf{x}(U \cap \{v = 0\})$ para alguna aplicación \mathbf{x} de la forma $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$ con $U \subset \mathbb{R}_+^2$ abierto para la topología inducida en \mathbb{R}_+^2 por \mathbb{R}^2 .

Lo primero que haremos será reformular el teorema 4.4 en términos más apropiados para nuestro propósito. Para ello, haremos uso del siguiente lema:

Lema 4.9. *Sea S un conjunto cerrado no vacío y $H(S)$ su envolvente convexa. Si $p \notin H(S)$, entonces existe un plano P pasando por p tal que $H(S)$ está contenido en uno de los semiespacios que define P .*

Demostración. Haremos uso del teorema del vector minimizante [Bre10] (capítulo 5, teorema 5.2. con $f = 0$). Este afirma que en un conjunto convexo K cerrado y no vacío existe un único elemento $x_0 \in K$ de norma mínima, que además viene caracterizado por

$$(x_0, x) \geq \|x_0\|^2 \quad \forall x \in K \quad (4.1)$$

Sea $p \notin H(S)$. Tomamos un sistema de referencia con origen en p . Definimos la familia de conjuntos $S_n := S \cap \overline{B_n}$, $n \in \mathbb{N}$, con $\overline{B_n}$ la bola cerrada de radio n centrada en el origen. Por ser S_n un conjunto cerrado y acotado, es compacto, y en consecuencia también lo será $H(S_n)$. Como $S \neq \emptyset$, ha de existir n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene $S_n \neq \emptyset$ (notemos que $S_n \subseteq S_{n+1}$).

Aplicamos el teorema del vector minimizante en cada conjunto $H(S_n)$, $n \geq n_0$, obteniendo en cada caso un punto $x_n \in H(S_n)$ de norma mínima. Como $x_n \neq 0$, la ecuación (4.1) aplicada a x_n se puede reescribir como $(y_n, x) \geq \|x_n\| \geq 0$ para todo $x \in H(S_n)$ con $y_n = x_n/\|x_n\|$. Esto nos permite construir una sucesión de puntos $\{y_n\} \subset \mathbb{S}^2$ que ha de contar con una subsucesión convergente a un punto $y \in \mathbb{S}^2$. Veamos que $(y, x) \geq 0$ para todo $x \in H(S)$:

Sea $x \in H(S)$. Por definición de envolvente convexa, ha de existir un conjunto finito de puntos $a_1, \dots, a_j \in S$ tales que x es una combinación convexa de ellos. Por ser el conjunto de puntos finito, existe N tal que $a_1, \dots, a_j \in S_n$ para todo $n \geq N$. En consecuencia, $x \in H(S_n)$. Esto quiere decir que $(y_n, x) \geq 0$ para todo $n \geq N$, y por la continuidad del producto escalar, $(y, x) \geq 0$.

La ecuación $(y, x) = 0$ define un plano que pasa por el origen mientras que $(y, x) \geq 0$ define un semiespacio en el cual $H(S)$ está contenido, de acuerdo con lo visto anteriormente. Queda así probado el resultado. \square

Con este lema, ya podemos expresar el teorema del semiespacio en términos de envolventes convexas de superficies:

Proposición 4.10. *Sea S una superficie mínima y propia de clase C^3 . Entonces o bien S es un plano y $H(S) = S$ o bien $H(S) = \mathbb{R}^3$.*

Demostración. Supongamos que S no es un plano. Entonces, el teorema 4.4) afirma que S no puede contenerse en ningún semiespacio. Supongamos por reducción al absurdo que $H(S) \neq \mathbb{R}^3$. Entonces, $H(S)$ (y por tanto S) estaría contenida en un semiespacio, lo cual es imposible. \square

Además de la formulación alternativa del teorema del semiespacio, necesitaremos el siguiente resultado auxiliar, conocido como el teorema de Douglas (que se puede consultar en [Oss86], teorema 7.2). Este teorema da una respuesta parcial a uno de los llamados problemas de Plateau:

Dada una curva cerrada de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, ¿existe una superficie mínima S tal que $\partial S = \Gamma$?

En particular, lo demuestra cuando la curva Γ se puede proyectar biunívocamente sobre un plano (que identificamos con \mathbb{R}^2) y esta proyección es además la frontera de un abierto simplemente conexo, acotado y convexo en \mathbb{R}^2 .

Teorema 4.11 (Teorema de Douglas, [Oss86]). *Sea D un abierto simplemente conexo, acotado*

y convexo en el plano XY y $C = \partial D$. Sea $g : C \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f|_C = g$ y la parametrización $\mathbf{x} = (x, y, f(x, y))$ define una superficie mínima.

Teorema 4.12. *Sea S una superficie mínima y propia de clase C^3 cuyo borde ∂S es compacto. Entonces, se da uno de los siguientes casos:*

1. $H(S) = \mathbb{R}^3$.
2. $H(S)$ es un semiespacio¹.
3. $H(S)$ es una banda entre dos planos paralelos.
4. $H(S)$ es un plano.
5. $H(S)$ es un conjunto compacto.

Es más, la intersección de ∂S con cada una de las componentes de la frontera de $H(S)$ es no nula.

Demostración. Supongamos que no se dan los casos 1, 4 o 5. Como $H(S) \neq \mathbb{R}^3$, entonces S (y por tanto $H(S)$) está contenida en al menos un semiespacio, de acuerdo con el lema 4.9. Tomemos la familia de semiespacios H_i minimales tales que $H(S) \subseteq H_i$. Si solo existiese un semiespacio H_1 con dicha propiedad, entonces $H(S) = H_1$, ya que en caso contrario existiría $p \in H_1$, $p \notin H(S)$ sobre el que podríamos aplicar nuevamente el lema 4.9. Como $H(S)$ es un semiespacio, estaríamos en las condiciones del caso 2.

Supongamos ahora que existen dos semiespacios H_1 y H_2 que contienen a $H(S)$. Vamos a demostrar que los planos $P_i := \partial H_i$, $i = 1, 2$ han de ser paralelos, y que por tanto estamos en el caso 3, concluyendo la demostración. Procederemos por reducción al absurdo:

Supongamos que los planos no son paralelos. Por un lado, el interior de S no puede cortar a $P_1 \cup P_2$ de acuerdo con el principio del máximo geométrico 2.16 (en caso contrario, S sería un trozo de plano, correspondiente al caso 4 o 5). Sea $C = H_1 \cap H_2$. Podemos tomar unos ejes tales

¹En rigor, $H(S)$ no tiene por qué ser un semiespacio, sino un conjunto de la forma $H = \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle d, p \rangle > \lambda\} \cup V$, con $V \subset \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle d, p \rangle = \lambda\}$, es decir, el interior de un semiespacio con algunos puntos de la frontera.

que C se encuentre en el semiespacio $\{(x, y, z) : z \geq 0\}$, ∂C sea un grafo sobre el plano XY y $P_1 \cap P_2$ sea el eje X (ver figura 4.2). Trasladamos además S de forma que ∂S esté en el semiespacio $\{(x, y, z) : x \leq -1\}$ (esta traslación dejaría a C invariante, así que no nos supone problema alguno). Como consecuencia, el punto del origen no puede estar en la superficie S , y al ser S cerrado, existe una esfera B_s de radio s centrada en $(s, 0, 0)$ tal que $S \cap B_s = \emptyset$. Sea $\Gamma_s = \partial B_s \cap (P_1 \cup P_2)$ (curva anaranjada en la figura 4.2).

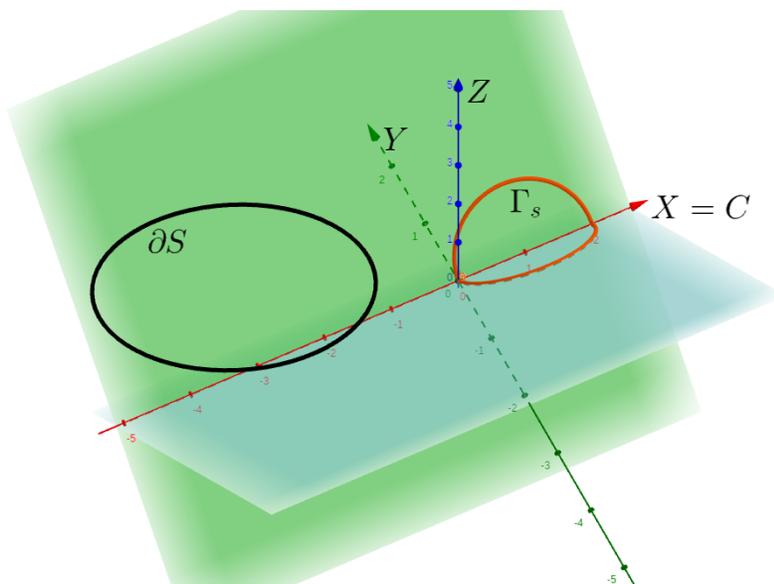


Figura 4.2: Construcción realizada. Los planos verde y azul denotan los planos P_1 y P_2 , que se cortan en el eje X . El borde Γ_s se encuentra en la región $x > 0$.

Podemos aplicar el teorema 4.11 a Γ_s proyectando sobre el plano XY . Como consecuencia, existe una superficie mínima compacta Δ_s que es un grafo sobre el plano XY y tal que su frontera es Γ_s . Adicionalmente, se puede probar que Δ_s está contenida en el interior de B_s . Para ello, basta considerar una esfera E que contenga a Δ_s , e ir reduciendo su tamaño hasta llegar a un punto donde $E \cap \Delta_s \neq \emptyset$. No puede haber puntos de contacto entre E y el interior de Δ_s : en caso contrario, el contacto sería propio y la curvatura gaussiana de la superficie Δ_s sería positiva en el punto de contacto, algo imposible al ser mínima. Solo puede haber puntos de contacto con el borde, Γ_s , lo

cual nos indica que E puede reducirse hasta coincidir con la esfera B_s definida anteriormente.

Resulta, por tanto, que Δ_s se encuentra a una distancia positiva de S . Consideremos la familia de superficies $A_t := t\Delta_s$, $t \in [1, \infty)$.

Las superficies mínimas y compactas A_t son grafos sobre el plano XY que se encuentran *por encima* de C , en el semiespacio $\{(x, y, z) : x \geq 0\}$. En el límite $t \rightarrow \infty$, A_t converge al trozo del plano YZ *por encima* de C . Además, todo punto de $(C \cap \{(x, y, z) : x > 0\}) \setminus B_s$ pertenece a algún A_t . Vamos a ver que $A_t \cap S = \emptyset$ para todo t . Para $t = 1$, el resultado es cierto: la distancia entre Δ_s y S es positiva. Si hubiese $t > 1$ con una intersección no nula con S , entonces debe existir $T \leq t$ para el cual haya un contacto entre S y A_T . Como ∂S está en $x < -1$ y A_T en $x > 0$, dicho contacto ha de ser positivo² y propio. Por el principio del máximo geométrico (ver 2.16), el interior de S debe coincidir con A_T , pero esto es imposible nuevamente porque A_T está contenida en $x > 1$ mientras que ∂S está en $x < -1$. Haciendo tender $t \rightarrow \infty$, podemos concluir que S está también contenida en el semiespacio $H_3 := \{(x, y, z) | x \leq 0\}$.

Repitiendo este argumento de forma similar podemos probar la existencia de otro semiespacio $H_4 = \{(x, y, z) | x \geq -k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Podemos usar ahora los semiespacios H_1 y H_3 por un lado y H_2 y H_3 por otro para generar dos semiespacios H_5 y H_6 tales que P_5 es ortogonal a $P_1 \cap P_3$ y P_6 lo es a $P_2 \cap P_3$. La intersección de los seis semiespacios da lugar a un conjunto compacto en el que está contenida S , algo imposible pues ello implicaría que estamos en el caso 5. Llegamos así a una contradicción, por lo que los planos P_1 y P_2 han de ser paralelos, y nos encontraríamos en el caso 3.

Probemos por último la relación entre ∂S y las componentes de la frontera de $H(S)$. Dichas componentes se corresponden con trozos de los planos P_i asociados a los semiespacios H_i minimales que contienen a S , de forma que $P_i = \partial H_i$. Vamos a adaptar el argumento del teorema 4.4 para cada uno de estos semiespacios H_i , lo que nos permitirá concluir que $\partial S \cap P_i \neq \emptyset$ para todo plano P_i .

Consideremos un semiespacio minimal H_i . Supongamos que el plano $P_i = \partial H_i$ no corta a ∂S ,

²En la observación 2.18, vimos que el signo de la curvatura media dependía del vector normal escogido. En superficies mínimas, podemos escoger el vector normal que queramos en S y A_T , así que podemos considerar que todos los contactos son positivos.

que se encontraría *por encima* de P_i (ver figura 4.3). Tomamos un sistema de referencia tal que P_i sea el plano XY . Proyectamos ∂S sobre dicho plano. Por ser ∂S compacto, su proyección debe estar contenida en alguna circunferencia de radio R' centrada en el origen. Consideremos adicionalmente otra circunferencia concéntrica a la anterior pero de radio $R = \max\{\cosh(1), R'\}$. Sea $d > 0$ la distancia de S al disco D_R ³. La circunferencia de radio R da lugar a un cilindro tal y como pasaba en la prueba del teorema 4.4. De igual manera, colocamos el catenoide C_1 centrado en el origen. Por la definición de R escogida, el catenoide vuelve a estar por debajo del plano $\{z = -1\}$ fuera del cilindro. Tomamos $\varepsilon > 0$ tal que se verifiquen las condiciones $\varepsilon < \frac{1}{2} \min\{1, d\}$ y $S_\varepsilon \cap P_i \neq \emptyset$.

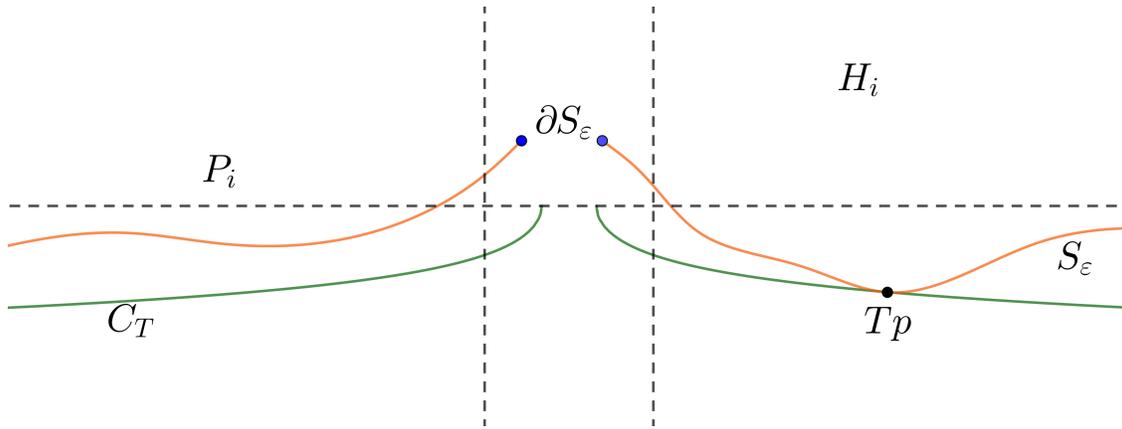


Figura 4.3: Si la superficie S_ε y C_T tuviesen un contacto en Tp , entonces S_ε correspondería al trozo de catenoide C_T , señalado en color verde. Como S_ε está dentro del cilindro, entonces el catenoide S_ε se extendería indefinidamente *por debajo* del plano P_i , algo imposible.

Con esta construcción, seguimos el razonamiento del teorema del semiespacio y llegamos a la conclusión de que existe $0 < T < 1$ tal que C_T tiene un contacto propio con S_ε en un punto Tp . Este contacto ha de ser en un punto interior del catenoide, ya que Tp está en el exterior del cilindro mientras que ∂S está en el interior. Haciendo uso del principio del máximo, deducimos que $C_T = S_\varepsilon$ en un entorno de Tp . Por analiticidad, S ha de ser un catenoide con borde ∂S . Pero esto es imposible: como ∂S se encuentra dentro del cilindro y el contacto Tp está fuera, $S = C_T$ en el

³Esta distancia es positiva por los mismos motivos expuestos en la demostración del teorema 4.4

exterior del cilindro al no haber frontera de S en esta región. Esto implica que S no puede estar contenida en H_i . \square

Observación 4.13. Tenemos ejemplos de superficies mínimas para cada uno de los casos estudiados:

1. Si S es un catenoide, $H(S) = \mathbb{R}^3$.
2. Para el trozo de catenoide mostrado en la figura 4.4, $H(S)$ es un semiespacio.
3. Si S es un plano, $H(S) = S$ también lo es.
4. Considerando S como el disco unidad cerrado, $H(S) = S$ es un conjunto compacto.

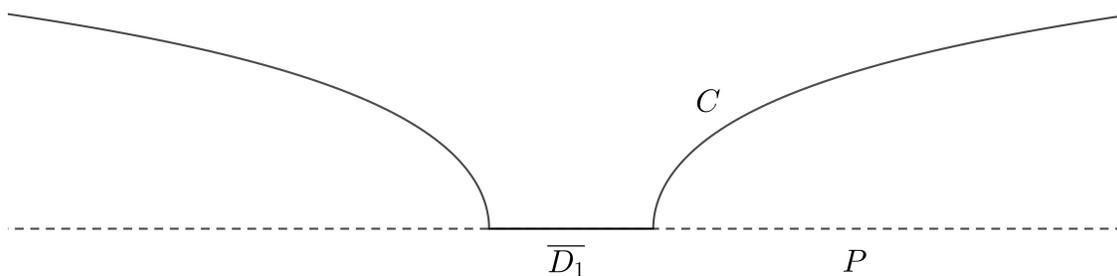


Figura 4.4: Trozo de catenoide C . Su envolvente convexa está formada por todos los puntos *por encima* del plano P más el disco cerrado $\overline{D_1}$.

Por último, para el caso en el que $H(S)$ es una banda entre planos paralelos, podemos considerar un trozo de la **superficie de Costa**:

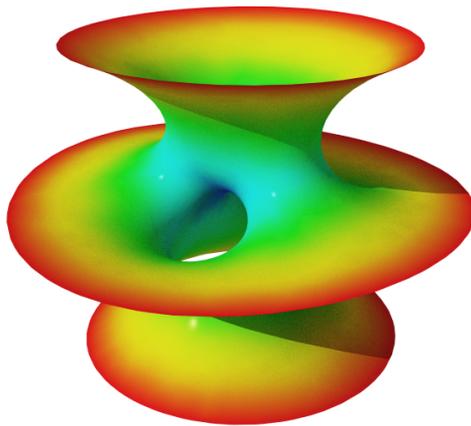


Figura 4.5: Superficie de Costa. Fuente: Wikipedia.

Bibliografía

- [Ale58] Alexandrov, A. D. *Uniqueness theorem for surfaces in the large*, V. Vestnik, Leningrad Univ. 13, 19, 5–8, Amer. Math. Soc. Trans. (Series 2) 21, 412–416 (1958).
- [Car76] do Carmo, Manfredo P. *Differential geometry of curves and surfaces*, Dover Books on Mathematics (1976).
- [GilTru98] Gilbarg, D., Trudinger, Neil S., *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer (1998).
- [Ber04] Bernstein, S. *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre*. Mathematische Annalen 59, 20-76 (1904).
- [Hop47] Hopf, H. *Differential geometry in the large*. Springer-Verlag (1947).
- [HofMee90] Hoffmann, D., Meeks, W.H., III *The strong halfspace theorem for minimal surfaces*. Inventiones mathematicae 101, 373-377 (1990).
- [MeeSimYau82] Meeks, W.H., III., Simon, L., Yau, S.T., *The existence of embedded minimal surfaces, exotic spheres and positive Ricci curvature*. Mathematische Annalen 116, 221-259 (1982).
- [Bre10] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer (2010).
- [Oss86] Osserman, R., *A survey of minimal surfaces*. Dover Publications (1986).
- [Wen86] Wente, Henry C., *Counterexample to a conjecture of H.Hopf*. Pacific J. Math. 121(1), 193-243 (1986).
- [JorXav80] Jorge, L., Xavier, F., *A complete minimal surface in \mathbb{R}^3 between two parallel planes*. Mathematische Annalen 112, 203-206 (1980).