

# DINÁMICA DE UN QUIMIOSTATO NO AUTÓNOMO CON RETARDO

Trabajo fin de máster presentado por:

**Javier López de la Cruz**

bajo la dirección de:

**D. Tomás Caraballo Garrido**

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

VºBº del director

Fdo.: Tomás Caraballo Garrido.

**MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICA AVANZADA**

**FACULTAD DE MATEMÁTICAS**

**UNIVERSIDAD DE SEVILLA**



*A mis padres y a mi hermana,  
porque gracias a ellos soy quien soy,  
por todo el ánimo y apoyo recibido,  
por toda la confianza que ponen en mí,  
por ser el pilar base de mi vida.*

*A Tomás, mi director,  
porque gracias a él esto ha sido posible,  
por todo lo que, día a día, me enseña,  
por todas las oportunidades que me brinda,  
por abrirme hueco en este apasionante mundo.*

*A Julia Clara, mi gran amiga,  
por todos los ratos compartidos,  
por ser mi compañera en este viaje,  
por entrar a formar parte de mi vida,  
porque sin ella nada habría sido igual.*



# Agradecimientos

Quiero aprovechar estas primeras páginas que dan comienzo a este trabajo para hacer partícipes de él a algunas de las personas que, junto a mí, han sido testigos y me han ayudado, tanto en el terreno académico como en el personal, a que todo este proyecto, que he hecho con una gran ilusión, pueda llegar a ver la luz por fin.

Merecen mención especial mis padres, Toñi y Longi, por haberme dado la vida y con ello la oportunidad de disfrutar haciendo cada día lo que hago, lo que me apasiona, aquello que deseo seguir realizando el resto de mi vida. Ellos siempre están ahí, a pesar de los trescientos kilómetros de distancia que nos separan cada vez que vuelvo a Sevilla “a formarme para intentar ayudar al mundo con, al menos, pequeños granitos de arena”, tal y como les digo tantas veces cuando me despiden en la estación. Siempre me han apoyado, me han animado a hacer lo que me gusta, aunque eso supusiera no tenerme en casa como hasta el momento y poder estar conmigo cada día, y siempre han sabido proporcionarme la fuerza necesaria, tanto en los momentos felices como en aquéllos que no lo eran tanto. Y lo más importante de todo: si hoy día soy yo, es sin duda gracias a ellos.

También merece mención especial mi hermana pequeña, Ana Belén, o *mi Anita*, como yo le digo, que aguanta mis frases hablando con términos matemáticos, se ríe y las repite, sacándome algunas de las sonrisas más sinceras. Porque su fortaleza me sorprende cada día, porque siempre me apoya en todo lo que decido hacer y porque siempre habla con mucho orgullo de su hermano matemático que estudia en Sevilla. Sin duda, mis padres y ella, quienes más tiempo tienen que *soportar* todas mis explicaciones sobre lo que voy aprendiendo en la facultad, son mis referentes y juntos forman el pilar base de mi vida.

Otra persona muy especial para mí es Tomás, mi director, quien me enseña cada día y me transmite todo lo que sabe de una forma que admiro; todos los que me conocen saben que es para mí un modelo a seguir, no sólo por la brillantez y el entusiasmo en sus explicaciones, sino también en lo que respecta a la vida cotidiana. No tendré nunca tiempo ni palabras suficientes para agradecerle como se merece todo lo que ha hecho y hace por mí, pues todas las oportu-

nidades que se me brindan en este campo que me fascina son gracias a él. Espero poder llegar algún día a hacer lo que él hace y a tener alumnos que me admiren tanto como yo a él. Pero no sólo eso, y es que no puedo acabar sin agradecerle su disponibilidad cada vez que necesito su ayuda ¡y eso que algunas veces puedo llegar a resultar algo pesado!

Ahora me gustaría hacer un *breve* recorrido por todas las personas que han estado junto a mi en los últimos seis años de mi estancia en Sevilla, a todos mis amigos y trabajadores de la Residencia Universitaria Armendáriz, donde nací como universitario; allí me acogieron como a un hijo tras haber salido del *casarón* por primer vez. No puedo pasar sin mencionar a uno de los trabajadores, a un gran amigo que siempre ha estado ahí para ayudar a todo el que lo necesitaba porque estaba pasando por un mal período de su vida, a *nuestro* Ramón. Allí pasé los tres primeros años de mi vida universitaria; sin embargo, los tres últimos los he pasado en la Residencia Universitaria Rector Estanislao del Campo, donde he conocido a muchísimos amigos también, personas estupendas y trabajadores extraordinarios. Tengo que agradecer a todas las personas con las que he vivido estos seis años el hecho de haber creado un clima universitario, lleno de experiencias inolvidables, que siempre permanecerá en nuestros corazones. Especialmente quiero mencionar a Julia Clara, con quien he compartido muy de cerca estos dos últimos años, con quien he pasado tantos ratos de estudio; ella ha sido una de las personas que ha vivido más de cerca mis horas de dedicación y ha estado dispuesta a ayudarme en mis ratos menos alegres. Además, es una de las personas que más se ha interesado por saber qué era lo que estaba haciendo, junto con mis padres y mi hermana, así como conocer el transcurso de los progresos. Estas líneas son para ella, para agradecerle todos los ratos que hemos pasado juntos y todos los abrazos que me ha dado, en definitiva, un agradecimiento a mi mejor amiga.

Finalmente, quiero dar mi agradecimiento a mis abuelos, por el ánimo que siempre me dan y a todos los profesores que he tenido a lo largo de estos años, especialmente a los profesores del Departamenteo de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, por su amabilidad y simpatía cada vez que me ven.

Javier López de la Cruz.

# Prólogo

Un quimiostato es un mecanismo de laboratorio que consiste en tres recipientes interconectados y es usado para el crecimiento de microorganismos en un ambiente de cultivo. En su forma más básica, el excedente del primer recipiente pasa al segundo y el excedente del segundo pasa al tercero. El primer recipiente se denomina botella de alimentación y contiene todos los nutrientes requeridos para el crecimiento de los microorganismos. Suponemos que todos los nutrientes se aportan de forma abundante excepto uno de ellos, que denominaremos *nutriente limitante*. El contenido de la botella de alimentación es bombeado al segundo recipiente, al que denominamos recipiente de cultivo, con un ratio constante. Los microorganismos se alimentan de los nutrientes provenientes de la botella de alimentación y crecen en el recipiente de cultivo. El recipiente de cultivo se remueve de forma continua para que todos los microorganismos tengan la misma probabilidad de acceder a los nutrientes. El contenido del recipiente de cultivo es bombeado entonces al tercer recipiente, al que denominamos recipiente colector. Naturalmente tal recipiente contiene nutrientes, microorganismos y los productos generados por tales microorganismos [1].

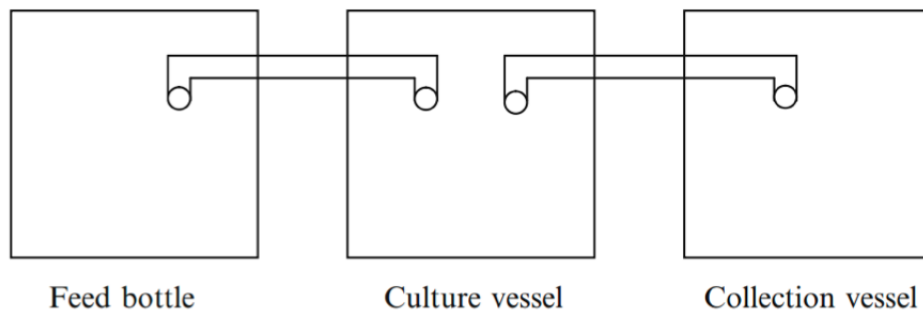


Figura 1: Representación gráfica de un quimiostato.

El quimiostato juega un papel importante en estudios ecológicos [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. Con algunas modificaciones, también es usado como modelo para procesos de tratamiento de aguas residuales [15, 16]. El modelo del quimiostato puede considerarse como el punto de partida para muchas variantes que cedan el paso a modelos biológicos más realistas, por ejemplo, problemas de microorganismos genéticamente alterados [17, 18] y modelos de antibióticos [37]. Más literaturas en cuanto a variantes y análisis de modelos del tipo del quimiostato pueden encontrarse en [19, 20, 21] y sus referencias.

En el modelo más simple de quimiostato, la disponibilidad de nutriente y su ratio de administración se suponen fijados. Sin embargo, la disponibilidad de un nutriente en un sistema natural normalmente depende del ratio de consumo del nutriente y de la concentración del mismo, lo que conduce a un sistema dinámico no autónomo. Otro supuesto básico en el modelo más simple de quimiostato es que el ratio de flujo sea suficientemente rápido como para no permitir el crecimiento en las paredes del recipiente. Sin embargo el crecimiento en la pared tiene lugar cuando el ratio de limpieza no es suficientemente rápido, lo que da lugar a los problemas de bioreactores. Los estudios de modelos de quimiostato tratados como sistemas dinámicos no autónomos están mucho más limitados hasta la fecha, por ejemplo, Smith y Thieme introdujeron persistencia práctica para sistemas dinámicos no autónomos con el modelo más simple de quimiostato, ejemplo en [22] cuando el ratio de limpieza depende del tiempo.



Antes de dar un breve resumen sobre lo que trataremos en este trabajo, hablaremos sobre la analogía entre un quimiostato y un lago, de hecho una forma sencilla de entenderlos para los biólogos es mirarlos como si de un simple lago se tratasen. De esta forma, los modelos de quimiostatos son usados extensamente para representar el crecimiento de especies en un lago donde los organismos, como por ejemplo algas, se alimentan de nutrientes con crecimiento limitado, como pueden ser el nitrógeno y el fósforo. La analogía entre un lago y un quimiostato puede verse de forma clara en la tabla que aparece más adelante.

La disponibilidad de un nutriente en un sistema natural como es un lago depende de la afluencia de nutriente. Las comunidades de algas, por ejemplo, sobreviven incluso con niveles muy bajos (casi indetectables) de nutrientes, en contra de la opinión de que perecen debido a insuficiencias. Pero hay un crecimiento oscilatorio y bajo. Para representar este fenómeno de crecimiento oscilatorio en las ecuaciones, los investigadores han intentado varios caminos.



Propiedad	Lago	Quimiostato
<b>Nutriente</b>	Las especies en un lago reciben los nutrientes a través de las corrientes que fluyen en o por la regeneración durante la primavera o el otoño.	El nutriente se suministra a través de una entrada.
<b>Muerte</b>	Las especies se extinguen, ya que continuamente caen fuera de las capas luminosas a las capas inferiores de la columna de agua.	El nutriente y la especie se lavan fuera del sistema a través de una salida.
<b>Escasez de nutriente</b>	Durante el verano no hay suficiente aportación de nutriente y debido a la sequía del lago, algunos nutrientes tales como fósforo, nitrógeno o vitamina B <sub>12</sub> están menos disponibles.	La aportación de uno o más nutrientes (esencial) está controlada por el experimentador.

Cuadro 1: Tabla de comparación entre lago y quimiostato.

En el primero de todos, se introducen una cantidad de nutriente y un ratio de limpieza [23, 24, 25, 26] variables en el modelo, los cuales se asumen fijos en un principio, debido a que la disponibilidad de los nutrientes ( $I$ ) y también su ratio de aportación ( $D$ ) en un lago dependen de la estación del año en la que nos encontremos.

Para hacernos una idea, los investigadores han hecho variar  $D$  e  $I$  de forma periódica de acuerdo con el tiempo. Esto puede explicar el crecimiento oscilatorio (coexistencia en caso de competiciones). Pero asumir periodicidad es muy sencillo, ya que la influencia puede variar continuamente durante una estación en particular o puede permanecer regulada. En otras palabras, los parámetros  $I$  y  $D$  pueden variar sobre un ciclo o pueden estar fijados (constantes) o con variaciones marginales durante una parte específica del ciclo. Por tanto, su influencia en el sistema debe entenderse para estaciones específicas o algunos períodos de tiempo.

Otra posibilidad que los matemáticos manejan consiste en intentar introducir otros niveles tróficos. Así, el modelo se modifica para incluir un nutriente, un microorganismo que se alimenta de tal nutriente, y dos competidores que se alimentan del microorganismo [27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34]. También se demuestra que hay coexistencia de todas las especies siempre y cuando se establezca la presencia de unos ciclos límite bajo condiciones apropiadas sobre los parámetros, pero no es posible introducir un depredador (u otro nivel trófico) en un sistema cerrado tal como un quimiostato cuando estábamos estudiando el crecimiento de un nutriente - un microorganismo (o competidor) sólo.

En este trabajo se pueden distinguir tres partes bien diferenciadas, a saber, la primera parte, que trata sobre modelos de quimiostato autónomos; una segunda, donde trabajamos con modelos de quimiostatos, pero ahora desde el punto de vista no autónomo; y, finalmente, una tercera parte donde los modelos considerados en las partes anteriores contienen retardos variables. El interés de estudiar esta parte reside en que, en la vida real, la historia de la dinámica de un sistema influye en el futuro, no sólo lo hace el tiempo presente.

La primera parte está estructurada en tres capítulos; el primero explica algunas nociones biológicas sobre los quimiostatos y construye un modelo sencillo que revela la dinámica del mismo. En un segundo capítulo introducimos al modelo estudiado anteriormente un microorganismo más; y, por último, presentamos en el tercer capítulo un modelo de quimiostato en el que tiene lugar el crecimiento de microorganismos en la pared del recipiente donde se lleva a cabo la dinámica del mismo. En todos los capítulos estudiamos los puntos críticos o de equilibrio del modelo en cuestión, así como la estabilidad de los mismos y la existencia de atractor global del sistema. En esta parte introducimos una demostración alternativa (Teorema 3.3.2) a uno de los teoremas que se tratan (parte (ii) del Teorema 3.3.1) utilizando técnicas más sofisticadas, como son los funcionales de Lyapunov, que las que se utilizan en el libro [1] que nos sirve de guía en este estudio, logrando así reducir las hipótesis que aparecían en tal referencia. Para completar todo el estudio, introducimos un apéndice (Apéndice A) donde presentamos los resultados correspondientes a la teoría de sistemas autónomos.

La segunda parte del trabajo se divide a su vez en dos capítulos: el primero de ellos permite al ratio de consumo de nutriente,  $D$ , depender del tiempo; así, estudiamos el caso del modelo sin pared y del modelo con pared, tratados en la primera parte, estudiando puntos críticos, estabilidad de los mismos y existencia de atractor global del sistema; análogamente hacemos con el segundo capítulo, donde ahora permitimos, en el modelo sin pared y en el modelo con pared estudiados previamente, que el parámetro  $I$ , el ratio de concentración de nutriente, sea el que dependa del tiempo. Para completar todo el estudio, introducimos un apéndice (Apéndice B) donde presentamos los resultados correspondientes a la teoría de sistemas no autónomos, motivando el uso de la teoría *pullback* que aquí se utiliza.

La tercera y última parte consta de dos capítulos: en el primero tomamos el modelo más sencillo, el modelo sin pared, de los que ya hemos estudiado y consideramos un retardo variable para observar el comportamiento del mismo. En el segundo capítulo introducimos retardos variables en el modelo con pared ya estudiado y observamos cuál es el comportamiento del quimiostato en este caso. En ambos capítulos estudiamos los puntos críticos y la estabilidad de los mismos. En esta parte de trabajo logramos mejorar uno de los resultados de las referencias que nos sirven de guía logrando obtener el mismo resultado sin ningún tipo de condición sobre la amplitud del retardo (Teorema 6.4.1), pues en tal referencia se exige una condición fuerte sobre dicha amplitud. En esta parte del trabajo, donde introducimos retardos a algunos de los modelos estudiados en las partes anteriores, tenemos la posibilidad de introducir tres tipos de retardos, a saber, constante, variable o distribuido, si bien elegimos el retardo variable ya que

engloba al constante y no oscurece la visión que se pretende mostrar debido a la dificultad con la que cuentan los retardos de tipo distribuido, donde toda la historia del sistema influye en el mismo. Para completar todo el estudio, introducimos un apéndice (Apéndice C) donde presentamos los resultados correspondientes a la teoría de ecuaciones diferenciales con retardo.

Así, logramos con este trabajo, estudiar con todo detalle una aplicación concreta a la parte de la asignatura impartida por el profesor D. Tomás Caraballo Garrido, denominada *Complementos de Ecuaciones Diferenciales*, dentro del *Máster Universitario en Matemática Avanzada*, dejando a su vez abierta una puerta a una futura vía de estudio: la dinámica de los modelos que contienen retardos o propiedades hereditarias, en el que se está investigando en la actualidad y que promete ser un tema interesante e importante para estudios futuros que puedan conducir a la realización de mi tesis doctoral.



# Índice general

Agradecimientos	I
Prólogo	III
<b>I Modelo autónomo sin retardo.</b>	<b>3</b>
<b>1. Modelo con un microorganismo.</b>	<b>5</b>
1.1. Introducción.	5
1.2. Principios biológicos.	6
1.3. Formulación del modelo matemático.	8
1.4. Propiedades de las soluciones.	9
1.5. Puntos estacionarios o de equilibrio.	12
1.6. Análisis de estabilidad.	14
1.7. Existencia de atractor global.	29
<b>2. Modelo con dos microorganismos.</b>	<b>33</b>
2.1. Formulación del modelo matemático.	33
2.2. Puntos estacionarios o de equilibrio.	34
2.3. Análisis de estabilidad.	35
2.4. Existencia de atractor global.	48
<b>3. Modelo con crecimiento en pared.</b>	<b>51</b>
3.1. Formulación del modelo matemático.	51
3.2. Puntos estacionarios o de equilibrio.	52
3.3. Análisis de estabilidad.	59
3.4. Existencia de atractor global.	66

<b>II</b>	<b>Modelo no autónomo sin retardo.</b>	<b>71</b>
<b>4.</b>	<b>Ratio de consumo de nutriente variable.</b>	<b>73</b>
4.1.	Introducción. . . . .	73
4.2.	Modelo sin pared. . . . .	73
4.3.	Modelo con pared. . . . .	87
4.3.1.	Dinámica global de $\alpha(t)$ . . . . .	92
4.3.2.	Dinámica global de $x(t)$ y $z(t)$ . . . . .	95
<b>5.</b>	<b>Ratio de concentración de nutriente variable.</b>	<b>103</b>
5.1.	Introducción. . . . .	103
5.2.	Modelo sin pared. . . . .	103
5.3.	Modelo con pared. . . . .	108
<b>III</b>	<b>Modelo con retardo.</b>	<b>115</b>
<b>6.</b>	<b>Modelo sin crecimiento en pared.</b>	<b>117</b>
6.1.	Introducción. . . . .	117
6.2.	Algunas consideraciones previas. . . . .	118
6.3.	Signo y acotación de soluciones. . . . .	119
6.4.	Análisis de la estabilidad. . . . .	121
<b>7.</b>	<b>Modelo con crecimiento en pared.</b>	<b>127</b>
7.1.	Introducción. . . . .	127
7.2.	Algunas consideraciones previas. . . . .	128
7.3.	Signo y acotación de soluciones. . . . .	129
7.4.	Análisis de la estabilidad. . . . .	132
<b>A.</b>	<b>Sistemas dinámicos autónomos.</b>	<b>145</b>
A.1.	Estructura y propiedades del atractor. . . . .	149
A.2.	Otras propiedades del atractor global. . . . .	152
A.2.1.	Propiedad de seguimiento sobre el atractor. . . . .	152
<b>B.</b>	<b>Sistemas dinámicos no autónomos.</b>	<b>155</b>
<b>C.</b>	<b>Sistemas dinámicos con retardo.</b>	<b>167</b>
	<b>Índice de figuras</b>	<b>169</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>169</b>

# Parte I

Modelo autónomo sin retardo.





# Capítulo 1

## Modelo con un microorganismo.

### 1.1. Introducción.

Iniciamos este trabajo recalcando la relación clásica que tiene lugar entre las matemáticas y la biología, antes de comenzar con la explicación, el estudio y el análisis detallado del modelo que nos ocupa. Ponemos de manifiesto por tanto que la aplicación de las matemáticas a los problemas cuyo origen reside en la biología no son nuevos, recordemos los modelos Malthusianos y de Lotka-Volterra, entre otros. El modelo,

$$x'(t) = rx(t),$$

donde  $' = d/dt$  y  $r$  es un coeficiente que refleja el ratio de crecimiento, describe el crecimiento exponencial de una población  $x$  de individuos en cualquier instante de tiempo  $t$ .

La introducción de una constante de capacidad de carga del medio, como bien pueden ser la comida, la luz, el espacio, etcétera, que toman control sobre el crecimiento de las especies, modifica el modelo anteriormente citado logrando llegar a un modelo más realista de la forma

$$x' = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right),$$

donde  $k$  es dicha constante de capacidad de carga del medio. Un modelo del tipo Lotka-Volterra que describe la competición entre dos especies  $x$  e  $y$  (depredadores) por la misma comida (presa) viene dado por

$$\begin{aligned}x' &= rx \left(1 - \frac{x}{k_1}\right), \\y' &= ry \left(1 - \frac{y}{k_2}\right).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Nótese que este modelo es un modelo *sin interferencia*. Podemos también considerar un modelo *con interferencia*, como el que sigue

$$\begin{aligned}x' &= rx \left( 1 - \frac{x}{k_1} - \lambda_1 y \right), \\y' &= ry \left( 1 - \frac{y}{k_2} - \lambda_2 x \right).\end{aligned}\tag{1.2}$$

En los modelos (1.1) y (1.2),  $k_1$ ,  $k_2$  son constantes de capacidad de carga y  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  son constantes de interferencia, todas ellas constantes positivas.

Es posible medir los coeficientes de interferencia  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  que deciden el resultado de la competición sólo cuando los organismos crecen juntos, es decir, mientras el experimento está siendo realizado. De esta forma se descarta la posibilidad de predecir el resultado del experimento antes de su realización. Este es un inconveniente del modelo de Lotka-Volterra. Además, no hay representación para el crecimiento de la comida (fuente) gracias a la cual la población crece, debido a que se alimenta de ella. La inclusión de la ecuación que describe el crecimiento de la fuente (presa) nos permite predecir los cambios correspondientes en el crecimiento de la población consumidora (depredador). La importancia de los modelos de quimiostatos reside en la inclusión de la ecuación que describe el crecimiento de la fuente junto con las ecuaciones que describen la competición entre los organismos que intervienen en la misma. Esta observación ha incitado a los investigadores a estudiar las ecuaciones de los modelos de quimiostatos de forma intensiva. De esta forma, analizando las ecuaciones del modelo, el resultado de la competición que tiene lugar en un quimiostato se puede predecir y dichas predicciones pueden ser confirmadas por el experimento.

Llegados a este punto, comenzaremos nuestro camino hacia la construcción del modelo matemático. Para ello, explicaremos a continuación los principios biológicos bajo los que el modelo será formulado.

## 1.2. Principios biológicos.

El modelo con el que trabajaremos a lo largo de toda esta memoria consiste en un microorganismo que se alimenta de un único nutriente cuyo crecimiento es limitado. Denotaremos por  $x$  al nutriente cuyo crecimiento es limitado y por  $y$ , al microorganismo que se alimenta del nutriente  $x$ .

A continuación enunciaremos algunos supuestos que nos serán de ayuda a la hora de formular nuestro modelo.

- ★ Todos los nutrientes, excepto  $x$ , se encuentran en total disponibilidad, pero no suplen la posible ausencia de  $x$ .

- ★ Contamos con una fuente externa desde la que el microorganismo recibe el nutriente  $x$  junto con otros nutrientes.
- ★ El nutriente es administrado con un ratio y el nutriente aportado tiene una concentración en el medio de crecimiento.
- ★ El nutriente es uniformemente distribuído en el medio de crecimiento, de tal forma que todos los microorganismos tienen igual acceso al nutriente disponible, esto es, no hay disparidad en la distribución.
- ★ Hay un excedente en el sistema donde el material que se encuentra en exceso, ya sean nutrientes, o bien microorganismos, y algunos otros productos, es eliminado continuamente.

Si paramos a pensar un poco, el último supuesto citado es razonable ya que en cualquier sistema tal como un dispositivo de laboratorio, el volumen es fijado. De esta forma, debemos contar con un excedente al permitir disponibilidad de material de forma continua. Además, para preservar el volumen del medio de crecimiento (fijado), debemos asumir que el ratio de aporte y el ratio de eliminación de los contenidos del medio de crecimiento son el mismo.

A continuación enumeramos una serie de aspectos a tener en cuenta.

1. Los microorganismos consumen nutriente continuamente y el ratio de dicho consumo es una constante.
2. El consumo posee una saturación, en otras palabras, la suplencia ilimitada de nutrientes no implica el consumo ilimitado de nutriente por las especies.
3. El crecimiento de los microorganismos es proporcional a su consumo.
4. Todos los factores externos tales como temperatura, presión, etc. son apropiados para el crecimiento y no afectan al sistema.

De esta forma, tenemos algunos parámetros reales y relaciones funcionales en el sistema. Veamos una enumeración de los mismos.

- ★  $I$ , cantidad de nutriente disponible en el sistema en cualquier instante de tiempo que es una constante positiva.
- ★  $D$ , ratio según el que el nutriente es aportado y también ratio según el que los contenidos del medio de crecimiento son eliminados. También es una constante positiva.
- ★  $a$ , ratio de consumo máximo de nutrientes y, por tanto, ratio de crecimiento de los microorganismos, constante positiva.

- ★  $U$ , respuesta funcional de los microorganismos que describe cómo se produce el consumo de nutrientes.

Ya estamos en condiciones de introducir nuestro modelo matemático que describe la dinámica de un sistema con consumo de nutriente limitado.

### 1.3. Formulación del modelo matemático.

Denotamos por  $x(t)$ ,  $y(t)$  a las concentraciones de nutriente y microorganismos en un instante de tiempo  $t$  cualquiera, respectivamente.

De esta forma, contamos en un principio con un *término de ganancia*: partiendo de  $I$ , se suministra al sistema, en cada instante de tiempo, un ratio  $D$  de nutriente, por tanto, el ratio de incremento de la concentración de nutrientes en el instante  $t$  es  $DI$ .

Además, tenemos los siguientes *términos de pérdida*:

- Una cantidad  $x(t)$  es eliminada del sistema con un ratio  $D$ . Además, el sistema pierde  $Dx(t)$  nutrientes cada instante de tiempo.
- Cada microorganismo  $y$  consume  $U(x(t))$  nutrientes. Además,  $U(x(t))y(t)$  es la concentración de nutrientes consumida por  $y$  con un ratio  $a$ . De esta forma, la concentración de nutrientes viene dada por  $aU(x(t))y(t)$ .

Así, tenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \text{ratio de cambio de la concentración de nutrientes en el medio de crecimiento} = \\ & = \text{ratio de aportación de nutrientes} - \text{ratio de eliminación} - \text{ratio de consumo.} \end{aligned}$$

Matemáticamente,

$$\frac{dx(t)}{dt} = DI - Dx(t) - aU(x(t))y(t). \quad (1.3)$$

Para el crecimiento de los microorganismos  $y$  asumimos que el consumo de nutrientes implica el crecimiento de  $y$ . Además, el ratio con el que tal nutriente es consumido, es decir,  $aU(x(t))y(t)$  es también el ratio con el que crece el microorganismo  $y$ . Por otro lado, el microorganismo es eliminado del sistema con un ratio constante  $D$ , con lo que  $Dy(t)$  denota la cantidad de microorganismos eliminados del sistema. Ahora tenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \text{ratio de cambio del microorganismo en cualquier instante de tiempo} = \\ & = \text{ratio de crecimiento del microorganismo} - \text{ratio de eliminación del microorganismo.} \end{aligned}$$

Matemáticamente,

$$\frac{dy(t)}{dt} = aU(x(t))y(t) - Dy(t). \quad (1.4)$$

Las ecuaciones (1.3) y (1.4) describen, en su conjunto, el sistema dinámico de consumo con fuente limitada que intentamos conseguir en el quimiostato. Obtenemos entonces el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= DI - Dx(t) - aU(x(t))y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= aU(x(t))y(t) - Dy(t). \end{aligned} \quad (1.5)$$

## 1.4. Propiedades de las soluciones.

Debemos comenzar esta sección notando que las características del sistema (1.5) son esencialmente decididas por el término no lineal del miembro derecho, esto es,  $U(x)$ .  $U$  se conoce en la literatura como la respuesta funcional o función de consumo. Hay algunos supuestos básicos sobre la función de consumo  $U : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , que son los siguientes:

1.  $U(0) = 0$ ,  $U(x) > 0$  para  $x > 0$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = L$ , con  $0 < L < \infty$ .
3.  $U$  es continuamente diferenciable.
4.  $U$  es monótona creciente.

Los dos primeros supuestos son esenciales para cualquier función de consumo. El tercer supuesto proporciona una condición local de Lipschitz, lo que garantiza la existencia local de solución del sistema (1.5). El cuarto supuesto lo tendremos en cuenta, a pesar de no ser estrictamente necesario, ya que nos ayudará a concluir algunos de los resultados que se demuestran.

Las siguientes funciones prototipo, que satisfacen los cuatro supuestos citados anteriormente, pueden tomarse como funciones de consumo a la hora de estudiar modelos biológicos tales como (1.5). Estas funciones son las que presentamos a continuación.

- $U(x) = x$ : función de consumo **Lotka-Volterra** o **Holling tipo-I**.
- $U(x) = \frac{x}{m+x}$ ,  $m > 0$ : función de consumo **Michaelis-Menten** o **Holling tipo-II**.
- $U(x) = \frac{x^2}{(p+x)(q+x)}$ ,  $p, q > 0$ : función de consumo **senoidal** o **Holling tipo-III**.

La función de consumo  $U(x) = x$  no satisface el segundo supuesto, sin embargo, es usada con frecuencia en modelos del tipo Lotka-Volterra.

Claramente los dos primeros supuestos garantizan la existencia de una constante positiva  $L > 0$  tal que

$$U(x) < L, \quad \text{para todo } x \in [0, \infty). \quad (1.6)$$

Además, el tercer supuesto junto con (1.6) garantizan la unicidad de solución del sistema (1.5); dichas soluciones son extensibles en su intervalo maximal de existencia para cualquier conjunto de condiciones iniciales.

En lo que sigue, vamos a usar normalmente la función de consumo  $U(x) = \frac{x}{m+x}$ , por lo que comprobaremos a continuación que, efectivamente, verifica los cuatro supuestos que ya hemos tratado.

**1. Primer supuesto:**

$$U(0) = \frac{0}{m} = 0. \quad \checkmark$$

**2. Segundo supuesto:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{m+x} = 1 =: L \in (0, \infty). \quad \checkmark$$

**3. Tercer supuesto:**

Debemos notar que puede parecer que la función de consumo posee un problema de discontinuidad en  $x = -m$ , sin embargo conviene recordar que  $m$  es una constante positiva, lo que indicaría una cantidad negativa de nutrientes, lo cual no es posible. Además, cualquier derivada de la función de consumo posee en el denominador una potencia de  $m+x$ , siendo  $x > 0$  y  $m > 0$ , con lo que se verifica este supuesto.  $\checkmark$

**4. Cuarto supuesto:**

$$U'(x) = \frac{m}{(m+x)^2} > 0,$$

de donde se deduce que  $U$  es monótona creciente.  $\checkmark$

A continuación, vamos a demostrar que las soluciones del sistema (1.5) que comienzan con condiciones iniciales no negativas, se mantienen no negativas a lo largo del tiempo. Realmente este hecho es un requisito que deben verificar  $x$  e  $y$ , ya que están representando poblaciones,

con lo que no pueden ser negativas en ningún caso.

**Teorema 1.4.1** *Todas las soluciones del sistema (1.5), con condiciones iniciales no negativas, son no negativas para todo  $t \geq 0$ .*

**Demostración.-** Veamos que cualquier solución que entra en el cuadrante  $\Omega$ ,

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\},$$

permanece en él para siempre. Por la continuidad de las soluciones del sistema (1.5), cada solución debe tomar el valor cero antes que alcanzar cualquier valor negativo. Ahora bien, si tenemos  $y = 0$  para algún instante de tiempo  $t = t_1 > 0$ , en virtud de la segunda ecuación de (1.5), obtenemos

$$y'(t_1) = aU(x(t_1))y(t_1) - Dy(t_1) = 0,$$

con lo que  $y$  es no decreciente en el instante de tiempo  $t = t_1$ ; es por esto que  $y$  nunca tomará valores negativos.

De forma análoga, si  $x = 0$  para algún instante de tiempo  $t = t_2 > 0$ , gracias a la primera ecuación de (1.5), obtenemos

$$x'(t_2) = DI - Dx(t_2) - aU(x(t_2))y(t_2) > 0,$$

debido a que  $U(0) = 0$ ,  $y \geq 0$ . De esta forma hemos demostrado que las soluciones no atravesarán las semirrectas positivas de los ejes de ordenadas ni abscisas; veamos ahora qué ocurre en el origen. Para ello, supongamos que existe un instante de tiempo  $t = t_3 > 0$  tal que  $x(t_3) = y(t_3) = 0$ ; entonces, utilizando las ecuaciones de (1.5) se llega a

$$\begin{aligned} x'(t_3) &= DI - Dx(t_3) - aU(x(t_3))y(t_3), \\ y'(t_3) &= aU(x(t_3))y(t_3) - Dy(t_3), \end{aligned}$$

de donde se deduce  $x'(t_3) > 0$ ,  $y'(t_3) = 0$ . Así, podemos concluir que las soluciones del sistema (1.5) son no negativas para todo instante de tiempo  $t > 0$ .

■

A continuación, podemos preguntarnos el motivo por el que pueden las poblaciones de microorganismos crecer bajo un aporte limitado de nutriente, así como si el crecimiento que pueden experimentar estos microorganismos puede ser alarmante. Para responder a estas cuestiones presentamos el siguiente Teorema.

**Teorema 1.4.2** *Cualquier solución positiva de (1.5) está acotada para condiciones iniciales no negativas que sean no nulas.*

**Demostración.-** Consideramos la función  $V$  dada por

$$V(t) \equiv V(x(t), y(t)) = x(t) + y(t).$$

Es claro que  $V(0, 0) = 0$  y  $V(x(t), y(t)) \geq 0$ , para todo instante de tiempo  $t \geq 0$ . Además,  $V(t) \rightarrow \infty$  cuando  $x(t), y(t) \rightarrow \infty$ .

Derivando  $V$  a lo largo de soluciones del sistema (1.5), obtenemos

$$\begin{aligned} V'(t) &= DI - Dx(t) - aU(x(t))y(t) + aU(x(t))y(t) - Dy(t) = \\ &= DI - D(x(t) + y(t)) \\ &= DI - DV(t). \end{aligned}$$

De esta manera, obtenemos

$$V'(t) + DV(t) = DI.$$

Para resolver esta ecuación diferencial lineal de primer orden, multiplamos por un término exponencial conveniente obteniendo

$$e^{Dt}V'(t) + De^{Dt}V(t) = DIe^{Dt}.$$

Así, llegamos a que

$$V(t) = (V(0) - I)e^{-Dt} + I, \quad \forall t \geq 0.$$

Observar que si  $V(0) < I$ , entonces  $V(t) \leq I, \forall t \geq 0$ . Por otro lado, si  $V(0) > I$ , entonces  $V(t) \leq V(0), \forall t \geq 0$ . Así, vemos que en cualquier caso la función  $V$  está acotada, con lo que, por definición de  $V$ ,  $x$  e  $y$  también lo están.

Fuera de la región acotada por los ejes de coordenadas positivas y la recta  $Dx + Dy = DI$ , o equivalentemente  $x + y = I$ , tenemos que  $V'$  es definida negativa, debido a que en dicha zona se verifica  $V = x + y > I$ , con lo que tenemos además que  $V$  es una función de Lyapunov. ■

## 1.5. Puntos estacionarios o de equilibrio.

El estudio de los puntos estacionarios, también llamados puntos de equilibrio, de un sistema tiene una gran importancia, que reside en que dichos puntos representan estados de energía



mínima del sistema que se esté estudiando.

Los equilibrios del sistema (1.5) vienen dados por los puntos del plano  $xy$  tales que satisfacen

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

De esta manera, los equilibrios del sistema (1.5) vienen dados por las soluciones del siguiente sistema algebraico:

$$\begin{aligned} DI - Dx - aU(x)y &= 0, \\ aU(x)y - Dy &= 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Una solución inmediata del sistema es  $(I, 0)$ , que es un equilibrio axial. Sin embargo, si buscamos equilibrios positivos  $(x^*, y^*)$  de (1.7) deberíamos resolver el sistema

$$\begin{aligned} DI - Dx^* - aU(x^*)y^* &= 0, \\ aU(x^*)y^* - Dy^* &= 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

De la segunda ecuación se deduce fácilmente

$$U(x^*) = \frac{D}{a},$$

y sustituyendo en la primera ecuación de (1.8), tenemos

$$D(I - x^*) - Dy^* = 0,$$

de donde se obtiene

$$I - x^* - y^* = 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$x^* + y^* = I.$$

En resumen, las condiciones que hemos obtenido son las siguientes:

$$U(x^*) = \frac{D}{a} \quad \text{y} \quad I = x^* + y^*. \tag{1.9}$$

Pues bien, de (1.9) podemos deducir que para obtener un equilibrio positivo, el nivel de consumo debe alcanzar, al menos una vez, el valor  $D/a$ . Esto es, debe existir un valor  $x^* \in (0, \infty)$  tal que  $U(x^*) = D/a$ .

Como además sabemos que  $U(x) \leq L$ , para todo  $x \in [0, \infty)$ . Por tanto, (1.9) implica que

$$\frac{D}{a} \leq L \quad (1.10)$$

es una condición necesaria para la existencia de equilibrio positivo para (1.8). Si además suponemos

$$I > x^* \quad (1.11)$$

entonces, gracias a que  $I = x^* + y^*$ , tenemos

$$x^* + y^* > x^*,$$

de donde se deduce  $y^* > 0$  y  $x^* > 0$ , con lo que (1.5) posee un equilibrio positivo que es la denotada por  $(x^*, y^*)$ .

## 1.6. Análisis de estabilidad.

En la sección anterior obtuvimos los equilibrios del sistema (1.5). Nos disponemos ahora a estudiar la estabilidad de cada uno de ellos. Antes de comenzar, debemos darnos cuenta de que tenemos que trabajar dos situaciones, que enumeramos a continuación.

1. El equilibrio axial  $(I, 0)$  es estable, lo que significa que los microorganismos  $y$  tienden a extinguirse.
2. Si buscamos conseguir la supervivencia de ambas especies  $x$  e  $y$  debemos establecer condiciones bajo las cuales el equilibrio  $(x^*, y^*)$  sea estable.

Notamos que el equilibrio  $(x^*, y^*)$  del sistema (1.5) es globalmente asintóticamente estable si toda solución  $(x(t), y(t))$  de (1.5), correspondiente a condiciones iniciales arbitrarias, satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^* \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^*.$$

El siguiente Teorema establece condiciones bajo las que el equilibrio axial  $(I, 0)$  es globalmente asintóticamente estable.

**Teorema 1.6.1** *El equilibrio axial  $(I, 0)$  es globalmente asintóticamente estable si se verifica la condición  $aL < D$ .*

**Demostración.-** De la segunda ecuación del sistema (1.5) se tiene

$$\frac{dy(t)}{dt} = aU(x(t))y(t) - Dy(t).$$

Ahora bien, sabemos que  $U(x(t)) \leq L$ , con lo que

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq aLy(t) - Dy(t) = (aL - D)y(t) < 0,$$

debido a que  $aL - D < 0$ , por hipótesis. De esta forma,

$$0 \leq y(t) \leq y(0)e^{(aL-D)t},$$

por tanto, en virtud de que  $aL - D < 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Veamos ahora que se verifica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = I.$$

Para ello consideramos la función  $V$  dada por

$$V(t) \equiv V(x(t), y(t)) = x(t) + y(t).$$

Es claro que  $V(0, 0) = 0$  y  $V(x(t), y(t)) > 0$ , para todos  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

Derivando a lo largo de soluciones del sistema tenemos

$$\begin{aligned} V'(t) &= x'(t) + y'(t) = \\ &= DI - Dx(t) - \cancel{aU(x(t))y(t)} + \cancel{aU(x(t))y(t)} - Dy(t) = \\ &= DI - Dx(t) - Dy(t) = DI - D(x(t) + y(t)) = DI - DV(t). \end{aligned}$$

De esta forma, hemos llegado a la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$V'(t) = DI - DV(t).$$

cuya solución es, tal y como ya vimos anterioremente,

$$V(t) = (V(0) - I)e^{-Dt} + I.$$

Así,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) + y(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \overset{0}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t).$$

Pero, por otro lado,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [V(0)e^{-Dt} + I] = \lim_{t \rightarrow \infty} [V(0)e^{-Dt}] + \lim_{t \rightarrow \infty} I = I.$$

En conclusión,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = I,$$

con lo que queda demostrado el Teorema. ■

Nos centramos ahora en estudiar la estabilidad del equilibrio  $(x^*, y^*)$ , donde es natural esperar que la condición  $aL > D$  sea necesaria para el carácter positivo de dicho equilibrio y, además, para convertir al equilibrio axial estudiado anteriormente en un equilibrio inestable. El siguiente resultado establece que dicha condición es suficiente.

Para el siguiente resultado necesitaremos una restricción sobre  $U'$ , en concreto suponemos que

$$\beta \leq \frac{U(x) - U(x^*)}{x - x^*} \leq \tilde{\beta}.$$

**Teorema 1.6.2** *El equilibrio positivo  $(x^*, y^*)$  de (1.5) es globalmente asintóticamente estable, siempre que se verifique  $aL > D$ .*

**Demostración.-** Una vez establecido el supuesto indicado antes del enunciado de este resultado, consideramos la función de Lyapunov  $V$ , dada por

$$V(t) \equiv V(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}(I - x - y)^2 + \alpha \left( y - y^* - y^* \log \frac{y}{y^*} \right),$$

siendo  $\alpha$  un parámetro no negativo que elegiremos a posteriori<sup>1</sup>. Derivando  $V$  a lo largo de soluciones de (1.5) llegamos a

---

<sup>1</sup>Conviene notar que este tipo de argumentos se volverán a repetir en sucesivas demostraciones

$$\begin{aligned}
V' &= (I - x - y)(-x' - y') + \alpha \left( y' + y^* \frac{1}{y} y' \right) \\
&= -(I - x - y) \{ DI - Dx - \cancel{aU(x)y} + \cancel{aU(x)y} - Dy \} + \alpha (aU(x)y - Dy - y^*(aU(x) - D)) \\
&= -(I - x - y)DI - Dx - Dy + \alpha(y - y^*)(aU(x) - D) \\
&= -D(I - x - y)^2 + \alpha(y - y^*)(aU(x) - D) \\
&\quad [(U(x^*) = D/a \implies D = aU(x^*))] \\
&= -D(I - x - y)^2 + \alpha(y - y^*)(aU(x) - aU(x^*)) \\
&= -D(I - x - y)^2 + a\alpha(y - y^*)(U(x) - U(x^*)) \\
&= -D(x - x^* + y - y^*)^2 + a\alpha \left( \frac{U(x) - U(x^*)}{x - x^*} \right) (x - x^*)(y - y^*) \\
&= -D \left\{ -D(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 + 2(x - x^*)(y - y^*) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a}{D} \alpha \left( \frac{U(x) - U(x^*)}{x - x^*} \right) (x - x^*)(y - y^*) \right\} \\
&= -D \left\{ (x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 + \left( 2 - \frac{a}{D} \alpha \left( \frac{U(x) - U(x^*)}{x - x^*} \right) \right) (x - x^*)(y - y^*) \right\}.
\end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned}
V_1 &= D \left[ (x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 + \left( 2 - \frac{a}{D} \alpha \beta \right) (x - x^*)(y - y^*) \right], \\
V_2 &= D \left[ (x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 + \left( 2 - \frac{a}{D} \alpha \tilde{\beta} \right) (x - x^*)(y - y^*) \right].
\end{aligned}$$

Ahora bien, gracias a la hipótesis

$$\beta \leq \frac{U(x) - U(x^*)}{x - x^*} \leq \tilde{\beta},$$

tenemos

$$\beta \leq \frac{U(x) - U(x^*)}{x - x^*}.$$

De aquí se deduce que

$$-\beta \geq -\frac{U(x) - U(x^*)}{x - x^*}.$$

Por tanto, multiplicando por  $\frac{a}{D}\alpha$  y sumando 2, tenemos

$$2 - \frac{a}{D} \alpha \beta \geq 2 - \frac{a}{D} \alpha \left( \frac{U(x) - U(x^*)}{x - x^*} \right).$$

Por otro lado, gracias a la hipótesis mencionada, también se tiene

$$\frac{U(x) - U(x^*)}{x - x^*} \leq \tilde{\beta},$$

de donde se deduce

$$-\tilde{\beta} \leq -\frac{U(x) - U(x^*)}{x - x^*}.$$

Al igual que anteriormente, multiplicando por  $\frac{a}{D}\alpha$  y sumando 2, llegamos a

$$2 - \frac{a}{D}\alpha\tilde{\beta} \leq 2 - \frac{a}{D}\alpha \left( \frac{U(x) - U(x^*)}{x - x^*} \right).$$

De esta forma, ensamblando ambas conclusiones obtenemos

$$2 - \frac{a}{D}\alpha\tilde{\beta} \leq 2 - \frac{a}{D}\alpha \left( \frac{U(x) - U(x^*)}{x - x^*} \right) \leq 2 - \frac{a}{D}\alpha\beta. \quad (1.12)$$

Si  $(x - x^*)(y - y^*)$  es positivo, multiplicamos (1.12) por dicho producto y obtenemos

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{a}{D}\alpha\tilde{\beta}\right) (x - x^*)(y - y^*) &\leq \left(2 - \frac{a}{D}\alpha \left( \frac{U(x) - U(x^*)}{x - x^*} \right)\right) (x - x^*)(y - y^*) \\ &\leq \left(2 - \frac{a}{D}\alpha\beta\right) (x - x^*)(y - y^*). \end{aligned}$$

Sumando ahora  $(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2$  y multiplicando cada uno de los miembros por  $D$ , resulta

$$V_2 \leq -V' \leq V_1,$$

con lo que, multiplicando por  $-1$ ,

$$-V_2 \geq V' \geq -V_1.$$

Análogamente, cuando el producto  $(x - x^*)(y - y^*)$  sea negativo, multiplicamos (1.12) por dicho producto y obtenemos

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{a}{D}\alpha\tilde{\beta}\right) (x - x^*)(y - y^*) &\geq \left(2 - \frac{a}{D}\alpha \left( \frac{U(x) - U(x^*)}{x - x^*} \right)\right) (x - x^*)(y - y^*) \\ &\geq \left(2 - \frac{a}{D}\alpha\beta\right) (x - x^*)(y - y^*). \end{aligned}$$

Sumando ahora  $(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2$  y multiplicando cada uno de los miembros por  $D$ , resulta

$$V_2 \geq -V' \geq V_1,$$

con lo que, multiplicando por  $-1$ ,

$$-V_2 \leq V' \leq -V_1.$$

De esta forma, o bien  $-V_1 \leq V' \leq -V_2$ , o bien  $-V_1 \geq V' \geq -V_2$ .

A continuación, establecemos una condición sobre el parámetro  $\alpha$  de tal forma que tanto  $V_1$  como  $V_2$  sean definidas positivas.

Las expresiones de  $V_1$  y  $V_2$  son de la forma

$$AX_1^2 + BX_1Y_1 + CY_1^2 =: H(X_1, Y_1),$$

con lo que tenemos que  $H(X_1, Y_1)$  será definida positiva si, y sólo si,  $A > 0$  y  $B^2 < 4AC$ . Por tanto, debe ocurrir

$$\left(2 - \frac{a}{D}\alpha\beta\right)^2 < 4.$$

Desarrollando el cuadrado y haciendo las simplificaciones pertinentes

$$4 - \frac{4a}{D}\alpha\beta + \frac{a^2\alpha^2}{D^2}\beta^2 < 4,$$

o lo que es lo mismo,

$$-\frac{4a}{D}\alpha\beta + \frac{a^2\alpha^2}{D^2}\beta^2 < 0,$$

es decir,

$$\frac{a^2\alpha^2}{D^2}\beta^2 < \frac{4a}{D}\alpha\beta,$$

de donde se deduce

$$\frac{a}{D}\beta < 4 \quad \text{si, y sólo si} \quad \alpha < 4\frac{D}{a\beta}.$$

De esta forma,  $V_1$  será definida positiva si elegimos  $\alpha \in \left[0, 4\frac{D}{a\beta}\right)$ .

De igual forma, trabajamos con  $V_2$  y obtenemos que para que sea definida positiva debemos elegir  $\alpha \in \left[0, 4\frac{D}{a\tilde{\beta}}\right)$ .

Por tanto, para que tanto  $V_1$  como  $V_2$  sean positivas, debe cumplirse

$$\alpha \in \left[0, 4\frac{D}{a\beta}\right) \quad \text{y} \quad \alpha \in \left[0, 4\frac{D}{a\tilde{\beta}}\right).$$

Pero nosotros sabemos que  $\beta \leq \tilde{\beta}$ , por tanto, tomando inversos y multiplicando por 4, se tiene

$$4\frac{D}{a\beta} \geq 4\frac{D}{a\tilde{\beta}}.$$

En conclusión, tenemos la siguiente inclusión

$$\left[0, 4\frac{D}{a\tilde{\beta}}\right) \subset \left[0, 4\frac{D}{a\beta}\right),$$

por lo que debe cumplirse

$$\left[0, 4\frac{D}{a\tilde{\beta}}\right).$$

De esta forma, como o bien  $-V_1 \leq V' \leq -V_2$ , o bien  $-V_2 \leq V' \leq -V_1$ , y además hemos visto que tanto  $V_1$  como  $V_2$  son definidas positivas con el parámetro  $\alpha$  adecuado, se tiene que  $V_1 > 0$  y  $V_2 > 0$ , o equivalentemente  $-V_1 < 0$  y  $-V_2 < 0$ .

Por tanto, o bien  $-V_1 \leq V' \leq -V_2 < 0$ , o bien  $-V_2 \leq V' \leq -V_1 < 0$ , es decir,  $V' < 0$ , con lo que  $V$  es definida negativa y deducimos que  $(x^*, y^*)$  es un equilibrio globalmente asintóticamente estable.

■

Debido a que se observa, en algunos experimentos llevados a cabo en laboratorios, que el consumo sigue claramente una respuesta funcional específica dada por

$$U(x) = \frac{x}{m+x},$$

siendo  $m > 0$  la constante de saturación del medio, usaremos de aquí en adelante, salvo mención explícita que indique lo contrario, tal respuesta funcional.

Haciendo uso directo de dicha función de consumo, podemos escribir el sistema (1.5) como sigue

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= DI - Dx - a\frac{x}{m+x}y, \\ \frac{dy}{dt} &= a\frac{x}{m+x}y - Dy. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Un equilibrio positivo de (1.13) viene dado por<sup>2</sup>

$$U(x^*) = \frac{x^*}{m+x^*} = \frac{D}{a},$$

---

<sup>2</sup>Esto se debe al estudio hecho previamente para una función de consumo genérica. En este punto realmente lo único que se hace es particularizar lo anterior a la función de consumo que estamos tratando.



es decir,

$$\frac{x^*}{m + x^*} = \frac{D}{a},$$

con lo que

$$ax^* = Dm + Dx^*,$$

es decir,

$$ax^* - Dx^* = Dm,$$

por tanto,

$$(a - D)x^* = Dm,$$

obteniendo

$$x^* = \frac{Dm}{a - D}.$$

De esta forma, usando  $x^* + y^* = I$ , llegamos a

$$\frac{Dm}{a - D} + y^* = I,$$

de donde

$$y^* = I - \frac{Dm}{a - D}.$$

En resumen, el equilibrio que obtenemos es

$$(x^*, y^*) = \left( \frac{Dm}{a - D}, I - \frac{Dm}{a - D} \right).$$

Por tanto, un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para la existencia de equilibrio positivo para (1.13) es

$$a \stackrel{(*)}{>} D \quad \text{y} \quad I \stackrel{(**)}{>} x^*.$$

Ahora bien, de (\*\*\*) se tiene

$$I > \frac{mD}{a - D},$$

de donde se deduce que

$$\frac{mD}{I} < a - D,$$

es decir,

$$\frac{mD}{I} + D < a,$$

con lo que

$$\frac{mD + ID}{I} < a,$$

es decir

$$\frac{D(m + I)}{I} < a,$$

y tomando inversos

$$\frac{I}{D(m + I)} > \frac{1}{a},$$

llegando a

$$a \frac{I}{m + I} \stackrel{(\star\star\star)}{>} D.$$

Hemos obtenido una tercera condición, sin embargo, debemos notar que dicha condición implica  $(\star)$ , debido a que

$$\frac{I}{m + I} < 1,$$

con lo que

$$D < a \frac{I}{m + I} < a.$$

En resumen, contábamos con dos condiciones,  $(\star)$  y  $(\star\star)$ ; demostramos una condición equivalente a  $(\star\star)$ , que denominamos  $(\star\star\star)$  y, de ésta última, deducíamos  $(\star)$ . Por tanto, realmente la condición necesaria y suficiente para la existencia de equilibrios positivos del sistema (1.13) viene dada por

$$D \stackrel{(\star\star\star)}{<} a \frac{I}{m + I}.$$

De esta forma, los Teoremas 1.6.1 y 1.6.2 adquieren la forma siguiente.

**Teorema 1.6.3** *Si  $a \leq D$  o bien  $a > D$  y  $\frac{mD}{a-D} \geq I$ , entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = I \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

**Demostración.-** Consideramos  $V(x, y) = x + y$  y denotamos

$$V(t) \equiv V(x(t), y(t)) = x(t) + y(t).$$

Claramente,  $V(0, 0) = 0$  y  $V(x, y) > 0$  para todos  $x > 0$ ,  $y > 0$ . Derivando a lo largo de soluciones del sistema tenemos

$$\begin{aligned} V'(t) &= x'(t) + y'(t) = \\ &= DI - Dx - a \frac{x}{m+x} y + a \frac{x}{m+x} y - Dy = \\ &= DI - Dx - Dy = DI - D(x + y) = DI - DV(t). \end{aligned}$$

Así hemos llegado a obtener la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden

$$V'(t) = -DV(t) + DI,$$

con lo que la solución viene dada por

$$V(t) = (V(0) - I)e^{-Dt} + I,$$

tal y como demostramos en el Teorema 1.6.1.

Así,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) + y(t)] = I.$$

Como veremos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0,$$

se tendrá

$$I = \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t),$$

con lo que habremos concluido la demostración.

Ahora procedemos distinguiendo dos casos. En primer lugar, supongamos que se verifica  $a \leq D$ . En tal caso,

$$\frac{dy}{dt} = a \frac{x}{m+x} y - Dy = \left( a \frac{x}{m+x} - D \right) y \leq (a - D)y \leq 0,$$

ya que, por hipótesis,  $a \leq D$ . Ahora bien, de la última expresión se obtiene

$$y(t) \leq Ce^{(a-D)t},$$

con  $C$  constante, debido a que tenemos una sencilla inecuación diferencial ordinaria. De esta forma, se tiene

$$0 \leq y(t) \leq Ce^{(a-D)t} \longrightarrow 0,$$

cuando  $t \longrightarrow \infty$ , pues  $a - D \leq 0$ , con lo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0,$$

quedando demostrado este caso.

Sin embargo, en el caso  $a > D$  y  $I \leq \frac{mD}{a-D}$  el razonamiento que debemos llevar a cabo es diferente. Sabemos que existen equilibrios si, y sólo si, se verifica la condición

$$D < a \frac{I}{m + I},$$

o equivalentemente,

$$D < \frac{aI}{m + I},$$

de donde

$$D(m + I) < aI \quad \text{si, y sólo si} \quad Dm + DI < aI,$$

es decir,

$$Dm < aI - DI \quad \text{si, y sólo si} \quad Dm < I \underbrace{(a - D)}_{>0},$$

en otras palabras,

$$I > \frac{Dm}{a - D}. \tag{1.14}$$

También sabemos que

$$x(t) + y(t) = V(t) = (V(0) - I)e^{-Dt} + I,$$

con lo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) + y(t)] = I.$$

Demostramos

$$V'(t) = D(I - V(t)),$$

con lo que debemos considerar dos zonas de estudio en este caso, tal y como se muestra en la siguiente figura.

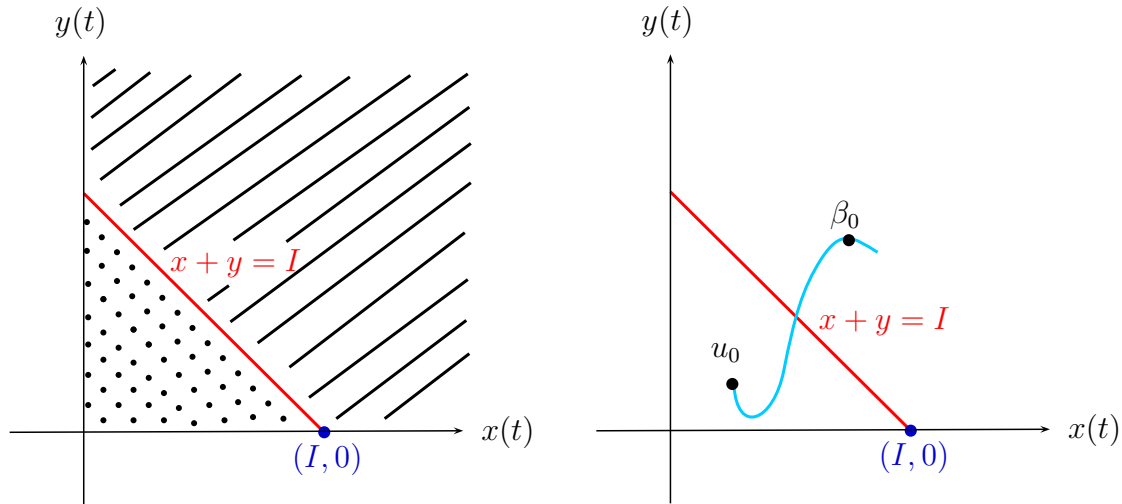


Figura 1.1: Distinción de zonas.

En la zona rayada, se verifica

$$V(t) = x(t) + y(t) > I,$$

con lo que  $V' < 0$ , por tanto  $V$  es definida negativa en tal zona. Gracias a que, además, no se verifica (1.14), no existirán equilibrios positivos, por lo que, como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) + y(t)] = I,$$

obligatoriamente las soluciones que comienzan con un dato inicial en la zona rayada, convergen al equilibrio axial  $(I, 0)$ .

Por otra parte, en la zona punteada partimos de datos iniciales  $(x_0, y_0)$  verificando  $x_0 + y_0 < I$ , de donde deducimos que  $x_0 < I$ ; pero sabemos que

$$I \leq \frac{mD}{a - D},$$

con lo que se tiene

$$x_0 < I \leq \frac{mD}{a - D};$$

ahora bien,

$$y'(0) = a \frac{x_0}{m + x_0} y_0 - D y_0 = y_0 \left[ a \frac{x_0}{m + x_0} - D \right].$$

Por otro lado,

$$a \frac{x_0}{m + x_0} - D < 0 \quad \text{si, y sólo si} \quad a x_0 < D(m + x_0),$$

es decir,

$$a x_0 < D m + D x_0, \quad \text{si, y sólo si} \quad (a - D) x_0 < D m,$$

lo que es equivalente a

$$x_0 < \frac{D m}{a - D},$$

y ésto se verifica.

Así, llegamos a  $y'(0) < 0$ , con lo que  $y$  comienza decreciendo; en conclusión, si el dato inicial se encuentra en la zona punteada, la solución converge al equilibrio axial  $(I, 0)$ , pues en caso de crecer y atravesar la zona rayada, nos reduciríamos al caso previamente estudiado. Nótese que este argumento está basado sólidamente en la unicidad de solución del sistema. En efecto, si comienzo con un dato inicial  $u_0$  en la zona punteada y la solución atraviesa la zona rayada, la solución que comenzó en  $u_0$  se encuentra ahora, tras un tiempo  $t$ , en lo que puede tomarse como dato inicial para la zona rayada  $\beta_0 = u(t = t_0; 0, u_0)$  y entonces la solución que obtenemos tomando este dato inicial debe ser la misma que la que teníamos tomando el dato inicial  $u_0$ .

Por tanto, el equilibrio axial  $(I, 0)$  es un equilibrio asintóticamente estable; de esta forma,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = I \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

■

Nótese que las condiciones del Teorema 1.6.3 implican la no existencia de equilibrios positivos.

**Teorema 1.6.4** *Si  $a > D$  y  $\frac{mD}{a-D} < I$ , entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^* = \frac{mD}{a - D} \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^* = I - x^*.$$

**Demostración.-** Consideramos la función  $V$  dada por

$$V(t) \equiv V(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}(I - x - y)^2 + \alpha \left( y - y^* - y^* \log \frac{y}{y^*} \right).$$

Claramente

$$V(x^*, y^*) = \frac{1}{2}(I - x^* - y^*)^2 + \alpha \left( y^* - y^* - y^* \log \frac{y^*}{y^*} \right) = 0$$

y  $V(x, y) > 0$  para todos  $x > x^*$ ,  $y > y^*$ , con lo que  $V$  es una función de Lyapunov. Así, derivando  $V$  a lo largo de las soluciones de (1.13)

$$\begin{aligned} V' &= (I - x - y)(-x' - y') + \alpha \left( y' - y^* \frac{1}{y} y' \right) \\ &= -(I - x - y) \left\{ DI - Dx - a \frac{x}{m+x} y + a \frac{x}{m+x} y - Dy \right\} \\ &\quad + \alpha \left\{ \frac{axy}{m+x} - Dy - \frac{y^* ax}{m+x} + Dy^* \right\} \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} &= -(I - x - y) \left\{ DI - Dx - \cancel{a \frac{x}{m+x} y} + \cancel{a \frac{x}{m+x} y} - Dy \right\} \\ &\quad + \alpha(y - y^*) \left( a \frac{x}{m+x} - D \right) \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} &= -D(I - x - y)^2 + \alpha(y - y^*) \left( a \frac{x}{m+x} - D \right) \\ &= -D(x^* + y^* - x - y)^2 + \alpha(y - y^*) \left( a \frac{x}{m+x} - D \right) \\ &= -D([x - x^*] + [y - y^*])^2 + \alpha(y - y^*) \left( a \frac{x}{m+x} - D \right) = (\star) \end{aligned}$$

Ahora bien, sabemos que

$$x^* = \frac{mD}{a - D},$$

con lo que

$$(a - D)x^* = mD \quad \text{entonces} \quad ax^* - Dx^* = mD,$$

de donde

$$ax^* = D(m + x^*) \quad \text{por tanto} \quad D = a \frac{x^*}{m + x^*}.$$

De esta forma, continuamos la cadena de igualdades que dejamos en (\*) como

$$\begin{aligned} V' &= -D([x - x^*] + [y - y^*])^2 + \alpha(y - y^*) \left( \frac{axm + \cancel{axx^*} - amx^* - \cancel{axx^*}}{(m+x)(m+x^*)} \right) \\ &= -D([x - x^*] + [y - y^*])^2 + \alpha \frac{am}{(m+x)(m+x^*)} (y - y^*)(x - x^*) \end{aligned}$$

Ahora bien, sabemos que

$$D = a \frac{x^*}{m+x^*} \quad \text{entonces} \quad \frac{D}{x^*} = \frac{a}{m+x^*}.$$

Continuando la cadena de igualdades

$$\begin{aligned} V' &= -D([x - x^*] + [y - y^*])^2 + \alpha \frac{D}{x^*} \frac{m}{m+x} (x - x^*)(y - y^*) \\ &= -D \left\{ (x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 + 2(x - x^*)(y - y^*) - \alpha \frac{D}{x^*} \frac{m}{m+x} (x - x^*)(y - y^*) \right\} \\ &= -D \left\{ (x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 + \left( 2 - \frac{\alpha}{x^*} \frac{m}{m+x} \right) (x - x^*)(y - y^*) \right\}. \end{aligned}$$

La última expresión es de la forma

$$AX_1^2 + BX_1Y_1 + CY_1^2 =: H(X_1, Y_1),$$

con lo que  $H(X_1, Y_1)$  será definida positiva si, y sólo si,  $A > 0$  y  $B^2 < 4AC$ . De esta forma, para que  $V$  sea definida negativa debe ocurrir

$$\left( 2 - \frac{\alpha}{x^*} \frac{m}{m+x} \right)^2 < 4 \quad \text{si y sólo si} \quad \left( 2 - \frac{\alpha}{x^*} \frac{m}{m+x} \right)^2 < 4.$$

Pues bien, desarrollando el cuadrado tenemos

$$4 + \frac{\alpha^2}{x^{*2}} \frac{m^2}{(m+x)^2} - 4 \frac{\alpha}{x^*} \frac{m}{m+x} < 4,$$

lo que es equivalente a

$$4 + \frac{\alpha^2 m^2 - 4\alpha m x^*(m+x)}{x^{*2}(m+x)^2} < 4 \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{\alpha^2 m^2 - 4\alpha m x^*(m+x)}{x^{*2}(m+x)^2} < 0,$$

es decir,

$$\alpha^2 m^2 - 4\alpha m x^*(m+x) < 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \alpha^2 m^2 < 4\alpha m x^*(m+x),$$



en otras palabras,

$$\alpha m < 4x^*(m+x) \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{\alpha m}{x^*(m+x)},$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{\alpha}{x^*} \frac{m}{m+x} < 4.$$

De esta forma,  $V'$  será definida negativa y el resultado está demostrado. ■

## 1.7. Existencia de atractor global.

Consideramos el sistema (1.5) dado por

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= DI - Dx(t) - aU(x(t))y(t). \\ \frac{dy(t)}{dt} &= aU(x(t))y(t) - Dy(t). \end{aligned}$$

En el resto de la sección denotaremos por  $u(t=0) = u_0$  a un dato inicial del sistema (1.5). Por otro lado, denotaremos por  $u(t; u_0) = (x(t; t_0), y(t; t_0))$  a una solución del sistema (1.5) y por  $S(t)$  al sistema dinámico (o semigrupo de operadores) definido por

$$S(t)u_0 = S(t)(x_0, y_0) = (x(t), y(t)) \equiv u(t; u_0).$$

Pues bien, consideramos  $B \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto acotado. De esta forma, existe  $M > 0$  tal que  $B \subset B(0; M)$ , donde  $B(0; M)$  denota la bola de centro el origen y radio  $M$  en  $\mathbb{R}^2$ . Así, para todo dato inicial  $u_0 = (x_0, y_0) \in B$ , se tiene que  $|u_0|^2 \leq M^2$ .

Definimos entonces

$$w(t) := x(t) + y(t);$$

por tanto,

$$w'(t) = x'(t) + y'(t).$$

Sustituyendo en (1.5) llegamos a

$$\begin{aligned} w'(t) &= DI - Dx - a \frac{x}{m+x} y + a \frac{x}{m+x} y - Dy \\ &= DI - Dx - Dy \\ &= DI - Dw. \end{aligned}$$

Además, sabemos que

$$w(0) = x(0) + y(0) = x_0 + y_0.$$

Resolviendo el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= -Dw + DI, \\ w(0) &= w_0 = x_0 + y_0, \end{aligned}$$

tal y como se hizo en la demostración del Teorema 1.6.1, obtenemos como solución del mismo

$$w(t) = Ce^{-Dt} + I, \quad C = x_0 + y_0 - I.$$

De esta manera, como  $x(t), y(t) \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} |S(t)u_0|^2 &= x^2(t) + y^2(t) \\ &\leq |x(t) + y(t)|^2 \\ &= |w(t)|^2 \\ &\leq (Ce^{-Dt} + I)^2 \\ &= [(x_0 + y_0)e^{-Dt} + I - Ie^{-Dt}]^2 \\ &= [(x_0 + y_0)e^{-Dt} + I(1 - e^{-Dt})]^2 \leq (\star) \end{aligned}$$

Ahora bien, usando la conocida desigualdad de Young

$$2ab \leq a^2 + b^2 \tag{1.17}$$

deducimos que

$$(a + b)^2 \leq a^2 + [a^2 + b^2] + b^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Por tanto, de  $(\star)$  sigue

$$\begin{aligned} |S(t)u_0|^2 &\leq 2(x_0 + y_0)^2 e^{-2Dt} + 2I^2 \underbrace{(1 - e^{-Dt})^2}_{\leq 1} \\ &\leq 2(x_0^2 + y_0^2) e^{-2Dt} + 2I^2 \\ &\leq 4M^2 e^{-2Dt} + 2I^2. \end{aligned}$$

Denotemos

$$\rho^2 := 1 + 2I^2.$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 4M^2 e^{-2Dt} = 0,$$

entonces, existe  $T_B \geq 0$  tal que para todo  $t \geq T_B$ , se tiene  $4M^2 e^{-2Dt} \leq 1$ ; en efecto,

$$4M^2 e^{-2Dt} \leq 1 \Leftrightarrow 4M^2 \leq e^{2Dt} \Leftrightarrow \log(4M^2) \leq 2Dt \Leftrightarrow \frac{1}{2D} \log(4M^2) \leq t,$$

por tanto, definimos

$$T_B := \frac{1}{2D} \log(4M^2).$$

En resumen, hemos demostrado que existe un compacto,  $B(0, \rho)$ , de tal forma que existe  $T_B \geq 0$  tal que para todo  $t \geq T_B$ , se tiene  $|S(t)u_0| \leq \rho$ ; por tanto, existe un compacto absorbente, con lo que existe un atractor global que denotaremos por  $\mathcal{A}$ , en virtud de los resultados presentados en el Apéndice A.



## Capítulo 2

### Modelo con dos microorganismos.

#### 2.1. Formulación del modelo matemático.

Trabajaremos en este capítulo con un modelo algo más sofisticado, un modelo en el que ahora son dos microorganismos,  $y_1$ ,  $y_2$ , los que compiten por el nutriente, que continua denotándose por  $x$ .

Teniendo en cuenta dichos cambios, el modelo adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= DI - Dx - a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 - a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2, \\ \frac{dy_1}{dt} &= a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 - Dy_1, \\ \frac{dy_2}{dt} &= a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2 - Dy_2,\end{aligned}\tag{2.1}$$

con sus correspondientes condiciones iniciales.

Como en el sistema (1.13), las cantidades  $a_1$ ,  $a_2$  representan los ratios máximos específicos de crecimiento de ambos microorganismos  $y_1$ ,  $y_2$ , así como los ratios de consumo de los mismos, y  $m_1$ ,  $m_2$  son las correspondientes constantes de saturación de consumo del medio.

## 2.2. Puntos estacionarios o de equilibrio.

En este caso, los equilibrios del sistema (2.1) vienen dados como las soluciones de

$$\begin{aligned} DI - Dx - a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 - a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2 &= 0, \\ a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 - Dy_1 &= 0, \\ a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2 - Dy_2 &= 0. \end{aligned}$$

Claramente  $(I, 0, 0)$  es solución inmediata del anterior sistema; otras soluciones no triviales son  $(x^*, y_1^*, 0)$  y  $(x^*, 0, y_2^*)$ . Ahora bien, cada una de dichas soluciones corresponde al caso en que sólo hay un microorganismos, bien  $y_1 \equiv y$ , o bien  $y_2 \equiv y$ , caso ya estudiado en el capítulo anterior. Para encontrar equilibrios positivos  $(x^*, y_1^*, y_2^*)$  debemos resolver

$$\begin{aligned} DI - Dx - a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 - a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2 &= 0, \\ a_1 \frac{x}{m_1 + x} - D &= 0, \\ a_2 \frac{x}{m_2 + x} - D &= 0. \end{aligned}$$

De la segunda y tercera ecuación se tiene

$$a_1 \frac{x}{m_1 + x} = D = a_2 \frac{x}{m_2 + x},$$

con lo que la primera ecuación queda

$$DI - Dx - Dy_1 - Dy_2 = 0, \quad \text{es decir,} \quad I - x - y_1 - y_2 = 0.$$

De esta forma, los equilibrios positivos se obtienen como solución del siguiente sistema

$$\begin{aligned} I - x^* - y_1^* - y_2^* &= 0, \\ a_1 \frac{x^*}{m_1 + x^*} - D &= 0, \\ a_2 \frac{x^*}{m_2 + x^*} - D &= 0. \end{aligned}$$

De ahí obtenemos

$$x^* = \frac{Dm_1}{a_1 - D} = \frac{Dm_2}{a_2 - D}, \quad y_1^* + y_2^* = I - x^*.$$

Por tanto, existe equilibrio positivo si, y sólo si

$$a_1 > D, \quad a_2 > D, \quad I > x^*.$$

En este caso, no es posible escribir una expresión explícita para  $y_1^*, y_2^*$ , sino que la tenemos para la suma.

Definimos ahora las cantidades

$$\lambda_1 = \frac{m_1 D}{a_1 - D}, \quad \lambda_2 = \frac{m_2 D}{a_2 - D}.$$

## 2.3. Análisis de estabilidad.

En esta sección nos encargaremos de establecer resultados análogos a los Teoremas 1.6.3 y 1.6.4, pero para el modelo (2.1).

**Teorema 2.3.1** *Se verifican los siguientes resultados:*

- (i) *Si  $a_i \leq D$  para  $i = 1, 2$  o  $a_i > D$ ,  $i = 1, 2$  y  $I < \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ , entonces cualquier solución de (2.1) satisface*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = I, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0.$$

- (ii) *Si  $a_i > D$ ,  $i = 1, 2$  y  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < I$  o  $0 < \lambda_1 < I < \lambda_2$ , entonces cualquier solución de (2.1) con datos iniciales positivos satisface*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{m_1 D}{a_1 - D} \equiv \lambda_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = I - \lambda_1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0.$$

*En el caso  $0 < \lambda_2 < \lambda_1 < I$  o  $0 < \lambda_2 < I < \lambda_1$ , entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lambda_2, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = I - \lambda_2.$$

- (iii) *Si  $a_i > D$ ,  $i = 1, 2$  y  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{m_1 D}{a_1 - D}$ , entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lambda_1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (y_1(t) + y_2(t)) = I - \lambda_1.$$

**Demostración.-**

(i) Consideramos la función  $V$ , dada por  $V(x, y_1, y_2) = x + y_1 + y_2$  y denotamos

$$V(t) \equiv V(x(t), y_1(t), y_2(t)) = x(t) + y_1(t) + y_2(t);$$

Claramente,  $V(0, 0, 0) = 0$  y  $V(x, y_1, y_2) > 0$  para  $x > 0, y_1 > 0, y_2 > 0$ . Derivando  $V$  a lo largo de soluciones del sistema, tenemos

$$\begin{aligned} V'(t) &= x'(t) + y_1'(t) + y_2'(t) \\ &= DI - Dx - a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 - a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2 + a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 - Dy_1 + a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2 - Dy_2 \\ &= DI - Dx - Dy_1 - Dy_2 \\ &= DI - D(x + y_1 + y_2) \\ &= DI - DV(t). \end{aligned}$$

Así, llegamos a

$$V'(t) = -DV(t) + DI,$$

con lo que

$$V(t) = (V(0) - I)e^{-Dt} + I,$$

tal y como vimos en la demostración del Teorema 1.6.1. De esta forma,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) + y_1(t) + y_2(t)] = I.$$

Como posteriormente veremos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t),$$

se tiene

$$I = \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) \overset{0}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) \overset{0}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t),$$

con lo que habremos acabado.



Ahora tenemos que distinguir dos situaciones. La primera situación es la que tiene como hipótesis  $a_i \leq D$ ,  $i = 1, 2$ . En este caso, para  $i = 1, 2$ , se tiene

$$\frac{dy_i}{dt} = a_i \frac{x}{m_i + x} y_i - D y_i = y_i \left( \frac{a_i x}{m_i + x} - D \right) \leq y_i (a_i - D) \leq 0,$$

gracias a la hipótesis y a que  $\frac{x}{m_i + x} \leq 1$ ,  $i = 1, 2$ . De esta forma

$$y_i(t) \leq C e^{(a_i - D)t},$$

con lo que

$$0 \leq y_i(t) \leq C e^{(a_i - D)t} \longrightarrow 0,$$

cuando  $t \rightarrow \infty$ , por lo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_i(t) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Una segunda situación es aquella en que las hipótesis son  $a_i > D$  y  $I < \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ . En este caso sabemos que existen equilibrios positivos si, y sólo si, se verifican

$$a_i > D \quad \text{y} \quad I > \min\{\lambda_1, \lambda_2\} \quad (2.2)$$

y sabemos que

$$x(t) + y_1(t) + y_2(t) = V(t) = (V(0) - I)e^{-Dt} + I,$$

con lo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) + y_1(t) + y_2(t)] = I.$$

Como ya demostramos que

$$V'(t) = D(I - V(t)),$$

debemos considerar dos zonas de estudio en este caso, tal y como se muestra en la siguiente figura.

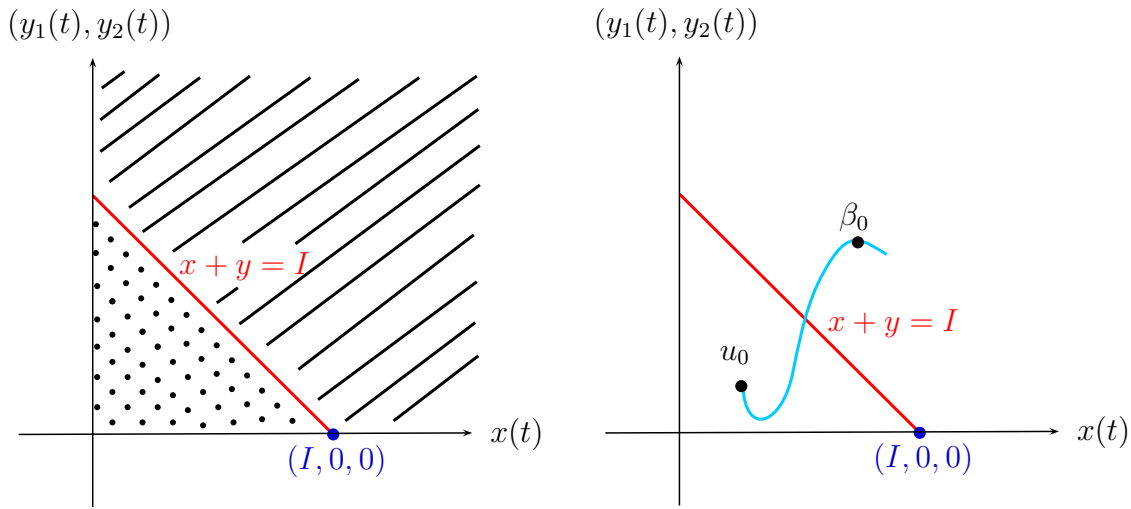


Figura 2.1: Distinción de zonas.

En la zona rayada, se verifica

$$V(t) = x(t) + y_1(t) + y_2(t) > I,$$

con lo que  $V' < 0$ , por tanto  $V$  es definida negativa en tal zona. Gracias a que, además, no se verifica (2.2), no existirán equilibrios positivos, por lo que, como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) + y_1(t) + y_2(t)] = I,$$

obligatoriamente las soluciones que comienzan con un dato inicial en la zona rayada, convergen al equilibrio axial  $(I, 0, 0)$ .

Por otra parte, en la zona punteada partimos de datos iniciales  $(x_0, y_{10}, y_{20})$  verificando  $x_0 + y_{10} + y_{20} < I$ , de donde deducimos que  $x_0 < I$ ; pero sabemos que

$$I \leq \frac{m_i D}{a_i - D}, \quad i = 1, 2,$$

con lo que se tiene

$$x_0 < I \leq \frac{m_i D}{a_i - D}, \quad i = 1, 2;$$

ahora bien, para  $i = 1, 2$ , se tiene

$$y_i'(0) = a_i \frac{x_0}{m_i + x_0} y_{0i} - D y_{0i} = y_{0i} \left[ a_i \frac{x_0}{m_i + x_0} - D \right].$$

Por otro lado, para  $i = 1, 2$ , tenemos

$$a_i \frac{x_0}{m_i + x_0} - D < 0 \quad \text{si y sólo si} \quad a_i x_0 < D(m_i + x_0),$$

es decir,

$$a_i x_0 < D m_i + D x_0, \quad \text{si y sólo si} \quad (a_i - D) x_0 < D m_i,$$

lo que es equivalente a

$$x_0 < \frac{D m_i}{a_i - D},$$

y ésto se verifica.

Así, llegamos a  $y_i'(0) < 0$ ,  $i = 1, 2$ , con lo que  $y_i$ ,  $i = 1, 2$ , comienza decreciendo, luego la suma  $y_1 + y_2$  también decrece; en conclusión, si el dato inicial se encuentra en la zona punteada, la solución converge al equilibrio axial  $(I, 0, 0)$ , pues en caso de crecer y atravesar la zona rayada, nos reduciríamos al caso previamente estudiado. Conviene notar que este argumento está basado sólidamente en la unicidad de solución del sistema. En efecto, si comienzo con un dato inicial  $u_0$  en la zona punteada y la solución atraviesa la zona rayada, la solución que comenzó en  $u_0$  se encuentra ahora, tras un tiempo  $t$ , en lo que puede tomarse como dato inicial para la zona rayada  $\beta_0 = u(t = t_0; 0, u_0)$  y entonces la solución que obtenemos tomando este dato inicial debe ser la misma que la que teníamos tomando el dato inicial  $u_0$ .

Por tanto, el equilibrio axial  $(I, 0, 0)$  es un equilibrio asintóticamente estable y de esta forma,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = I \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t).$$

(ii) En este caso, para  $i = 1, 2$ , se tiene

$$a_i \frac{x}{m_i + x} y_i - D y_i = a_i \frac{x}{m_i + x} y_i - D \frac{m_i + x}{m_i + x} y_i = (a_i - D) \frac{x}{m_i + x} y_i - \frac{m_i D}{m_i + x} y_i =$$

$$\begin{aligned}
&= (a_i - D) \frac{x}{m_i + x} y_i - (a_i - D) \lambda_i \frac{y_i}{m_i + x} = (a_i - D) \frac{x}{m_i + x} y_i - m_i D \frac{y_i}{m_i + x} = \\
&= (a_i - D) \left\{ \frac{x}{m_i + x} y_i - \lambda_i \frac{y_i}{m_i + x} \right\} = (a_i - D) \frac{x - \lambda_i}{m_i + x} y_i.
\end{aligned}$$

Así, (2.1) queda

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= DI - Dx - a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 - a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2, \\
\frac{dy_1}{dt} &= (a_1 - D) \frac{x - \lambda_1}{m_1 + x} y_1, \\
\frac{dy_2}{dt} &= (a_2 - D) \frac{x - \lambda_2}{m_2 + x} y_2.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Consideramos la función de Lyapunov  $V$ , dada por

$$V(t) \equiv V(x(t), y_1(t), y_2(t)) = x - \lambda_1 - \lambda_1 \log \frac{x}{\lambda_1} + c_1 \left( y_1 - y_1^* - y_1^* \log \frac{y_1}{y_1^*} \right) + c_2 y_2,$$

con  $c_i = \frac{a_i}{a_i - D}$ ,  $i = 1, 2$ , constantes positivas.

Por tanto,

$$\begin{aligned}
V'(t) &= x' - \lambda_1 \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} x' + c_1 \left( y_1' - y_1^* \frac{1}{y_1} y_1' \right) + c_2 y_2' \\
&= \frac{x - \lambda_1}{x} \left\{ DI - Dx - a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 - a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2 \right\} \\
&\quad + c_1 \left( 1 - \frac{y_1^*}{y_1} \right) (a_1 - D) \frac{x - \lambda_1}{m_1 + x} y_1 + c_2 y_2 (a_2 - D) \frac{x - \lambda_2}{m_2 + x} \\
&= \frac{x - \lambda_1}{x} \left\{ DI - Dx - a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 - a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2 \right\} \\
&\quad + c_1 \frac{y_1 - y_1^*}{y_1} (a_1 - D) \frac{x - \lambda_1}{m_1 + x} y_1 + c_2 y_2 (a_2 - D) \frac{x - \lambda_2}{m_2 + x} \\
&= \frac{x - \lambda_1}{x} (DI - Dx) - a_1 \frac{x - \lambda_1}{m_1 + x} y_1 - a_2 \frac{x - \lambda_2}{m_2 + x} y_2 \\
&\quad + a_1 y_1 \frac{x - \lambda_1}{m_1 + x} - a_1 y_1^* \frac{x - \lambda_1}{m_1 + x} + a_2 \frac{x - \lambda_2}{m_2 + x} y_2 \\
&= \frac{x - \lambda_1}{x} (DI - Dx) - a_1 y_1^* \frac{x - \lambda_1}{m_1 + x} + a_2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{m_2 + x} y_2 \\
&= (x - \lambda_1) \left\{ \frac{D(I - x)}{x} - a_1 \frac{y_1^*}{m_1 + x} \right\} + a_2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{m_2 + x} y_2.
\end{aligned}$$

Consideramos ahora el equilibrio  $(x^* = \lambda_1, y_1^*, 0)$ . Por (2.3), entonces

$$\frac{dx}{dt} = DI - Dx - a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 - a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2,$$

y evaluando en el equilibrio,

$$\frac{dx^*}{dt} = DI - Dx^* - a_1 \frac{x^*}{m_1 + x^*} y_1^* - a_2 \frac{x^*}{m_2 + x^*} \cdot 0,$$

es decir,

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = DI - D\lambda_1 - a_1 \frac{\lambda_1}{m_1 + \lambda_1} y_1^* \Leftrightarrow 0 = D(I - \lambda_1) - a_1 \frac{\lambda_1}{m_1 + \lambda_1} y_1^*,$$

de donde

$$a_1 \frac{\lambda_1}{m_1 + \lambda_1} y_1^* = D(I - \lambda_1),$$

o equivalentemente,

$$y_1^* = D(I - \lambda_1) \frac{m_1 + \lambda_1}{a_1 \lambda_1}.$$

Con esto, el término

$$\begin{aligned} \frac{D(I - x)}{x} - a_1 \frac{y_1^*}{m_1 + x} &= \frac{D(I - x)}{x} - \frac{D(I - \lambda_1)(m_1 + \lambda_1)}{\lambda_1(m_1 + x)} \\ &= \frac{D(I - x)\lambda_1(m_1 + x) - Dx(I - \lambda_1)(m_1 + \lambda_1)}{\lambda_1 x(m_1 + x)} \\ &= \frac{D}{\lambda_1 x(m_1 + x)} \{(I - x)\lambda_1(m_1 + x) - x(I - \lambda_1)(m_1 + \lambda_1)\} \\ &= \frac{D}{\lambda_1 x(m_1 + x)} \{\lambda_1 I m_1 + \cancel{\lambda_1 I x} - \cancel{\lambda_1 x m_1} - \lambda_1 x x - x I m_1 \\ &\quad - \cancel{x I \lambda_1} + \cancel{x \lambda_1 m_1} + x \lambda_1 \lambda_1\} \\ &= \frac{D}{\lambda_1 x(m_1 + x)} \{-m_1 I(x - \lambda_1) - \lambda_1 x(x - \lambda_1)\} \\ &= -\frac{D(x - \lambda_1)}{\lambda_1 m(m_1 + x)} \{m_1 I - \lambda_1 x\}. \end{aligned}$$

Así,

$$V'(t) = -\frac{D(x - \lambda_1)^2}{\lambda_1 x(m_1 + x)} \{m_1 I + \lambda_1 x\} + a_2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{m_2 + x} y_2 \leq 0,$$

pues  $\lambda_1 < \lambda_2$ . De esta forma,  $V'$  es semidefinida negativa. A continuación vamos a demostrar que

$$M := \{(x^* = \lambda_1, y_1^*, 0)\}$$

es el mayor conjunto invariante de

$$E := \{(x^* = \lambda_1, y_1, 0), y_1 \geq 0\}.$$

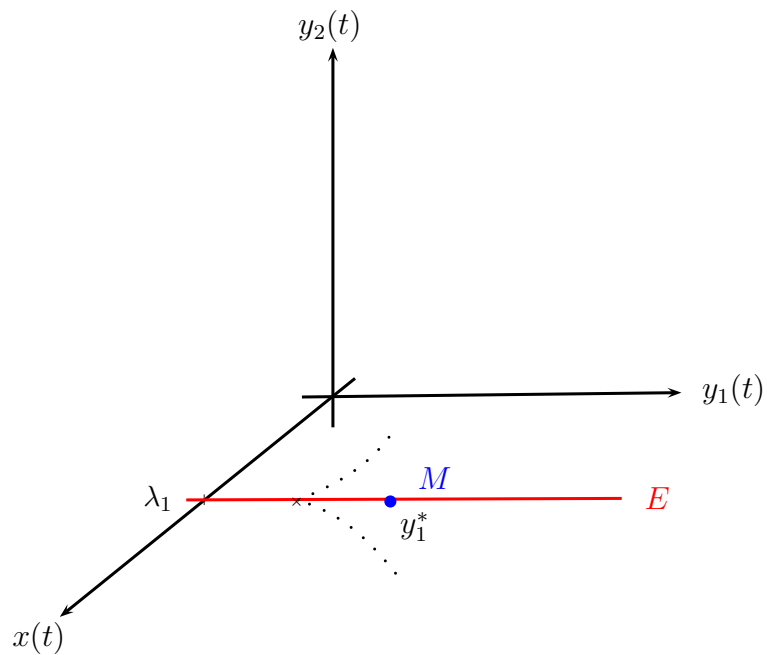


Figura 2.2: Conjuntos  $M$  y  $E$ .

Consideramos el conjunto  $E$  definido previamente. Ahora bien, dicho conjunto es realmente

$$E = \{(x^* = \lambda_1, y_1, 0), y_1 \geq 0\}.$$

Por otro lado

$$x'|_E = DI - D\lambda_1 - a_1 \frac{\lambda_1}{m_1 + \lambda_1} y_{10}.$$

Por tanto,

$$x'|_E = 0 \text{ si y sólo si } DI - D\lambda_1 - a_1 \frac{\lambda_1}{m_1 + \lambda_1} y_{10} = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$D(I - \lambda_1) = a_1 \frac{\lambda_1}{m_1 + \lambda_1} y_{10} \text{ si y sólo si } \frac{D(m_1 + \lambda_1)(I - \lambda_1)}{a_1 \lambda_1},$$

y esto ocurre si y sólo si  $y_{10} = y_1^*$ . Esto quiere decir (obsérvese Figura 2.2) que si empiezo con un dato inicial distinto de  $y_1^*$ , me salgo del conjunto  $E$  (este caso es el que reflejan las trayectorias punteadas en la Figura 2.2), con lo que el conjunto  $M$  anteriormente definido es el mayor subconjunto invariante de  $E$ .

En conclusión,  $(x^*, y_1^*, 0)$  es asintóticamente estable, gracias a una consecuencia del Teorema de La Salle (véase ??).

Notar que la demostración de la segunda parte es exactamente la misma, intercambiando los papeles de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

(iii) Extendiendo la función de Lyapunov usada en el Teorema 1.6.4, consideramos

$$V(t) \equiv V(x(t), y_1(t), y_2(t)) = \frac{1}{2}(I - x - y_1 - y_2)^2 + \alpha \sum_{i=1}^2 \left( y_i - y_i^* - y_i^* \log \frac{y_i}{y_i^*} \right).$$

Además,

$$\begin{aligned} V(x^*, y_1^*, y_2^*) &= \frac{1}{2}(I - x^* - y_1^* - y_2^*)^2 + \alpha \sum_{i=1}^2 \left( y_i^* - y_i^* - y_i^* \log \frac{y_i^*}{y_i^*} \right) \\ &= \frac{1}{2}(I - x^* - y_1^* - y_2^*)^2 = \frac{1}{2}(y_1^* + y_2^* - y_1^* - y_2^*)^2 = 0. \end{aligned}$$

Además,  $V(x, y_1, y_2) > 0$  para  $x > x^*$ ,  $y_1 > y_1^*$ ,  $y_2 > y_2^*$ . Así, derivando  $V$  a lo largo de soluciones de (2.1) y procediendo como en el Teorema 1.6.4, tenemos

$$\begin{aligned}
V'(t) &= (I - x - y_1 - y_2)(-x' - y_1' - y_2') + \alpha \sum_{i=1}^2 \left( y_i' - y_i^* \frac{y_i'}{y_i} \right) \\
&= (I - x - y_1 - y_2)(-x' - y_1' - y_2') + \alpha \sum_{i=1}^2 \left( y_i' - y_i^* \frac{y_i'}{y_i} \right) \\
&= (I - x - y_1 - y_2) \left( -DI + Dx + a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 + a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2 \right. \\
&\quad \left. + (D - a_1) \frac{x - \lambda_1}{m_1 + x} y_1 + (D - a_2) \frac{x - \lambda_2}{m_2 + x} y_2 \right) \\
&\quad + \alpha \sum_{i=1}^2 \left( (a_i - D) \frac{x - \lambda_i}{m_i + x} y_i - y_i^* (a_i - D) \frac{x - \lambda_i}{m_i + x} \frac{y_i'}{y_i} \right) \\
&= (I - x - y_1 - y_2) \left( -DI + Dx + a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 + a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2 + D \frac{x - \lambda_1}{m_1 + x} y_1 \right. \\
&\quad \left. - a_1 \frac{x - \lambda_1}{m_1 + x} + D \frac{x - \lambda_2}{m_2 + x} y_2 - a_2 \frac{x - \lambda_2}{m_2 + x} y_2 \right) \\
&\quad + \alpha \sum_{i=1}^2 \left( (a_i - D) \frac{x - \lambda_i}{m_i + x} y_i - y_i^* (a_i - D) \frac{x - \lambda_i}{m_i + x} \right) \\
&= (I - x - y_1 - y_2) \left( -DI + Dx + a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 + a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2 + D \frac{x - \lambda_1}{m_1 + x} y_1 \right. \\
&\quad \left. + D \frac{x - \lambda_2}{m_2 + x} y_2 + a_1 \frac{\lambda_1}{m_1 + x} y_1 + a_2 \frac{\lambda_2}{m_2 + x} y_2 - a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 - a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2 \right) \\
&\quad + \alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*) (a_i - D) \frac{x - \lambda_i}{m_i + x} \right\} = (*).
\end{aligned}$$

Ahora bien, sabemos que  $\lambda_i = \frac{m_i D}{a_i - D}$ ,  $i = 1, 2$ , por tanto

$$\begin{aligned}
&D \frac{x}{m_1 + x} y_1 + D \frac{x}{m_2 + x} y_2 - D \frac{\lambda_1}{m_1 + x} y_1 - D \frac{\lambda_2}{m_2 + x} y_2 + a_1 \frac{\lambda_1}{m_1 + x} y_1 + a_2 \frac{\lambda_2}{m_2 + x} y_2 \\
&= D \frac{x}{m_1 + x} y_1 + D \frac{x}{m_2 + x} y_2 + (a_1 - D) \frac{\lambda_1}{m_1 + x} y_1 + (a_2 - D) \frac{\lambda_2}{m_2 + x} y_2 \\
&= \sum_{i=1}^2 \left\{ D \frac{x}{m_i + x} y_i + (a_i - D) \frac{m_i D}{(m_i + x)(a_i - D)} y_i \right\}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^2 \left\{ D \frac{x}{m_i + x} y_i + D \frac{m_i}{m_i + x} y_i \right\} \\
&= D \sum_{i=1}^2 \left\{ y_i \left[ \frac{x + m_i}{x + m_i} \right] \right\} \\
&= D[y_1 + y_2].
\end{aligned}$$

Entonces

$$V' = (I - x - y_1 - y_2)(-DI + Dx + D[y_1 + y_2]) + \alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*)(a_i - D) \frac{x - \lambda_i}{m_i + x} \right\}.$$

Nos centramos en la expresión

$$\begin{aligned}
&\alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*)(a_i - D) \frac{x - \lambda_i}{m_i + x} \right\} \\
&= \alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*)(a_i - D) \frac{x}{m_i + x} - (y_i - y_i^*)(a_i - D) \frac{\lambda_i}{m_i + x} \right\} \\
&= \alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*)(a_i - D) \frac{x}{m_i + x} - (y_i - y_i^*)(a_i - D) \frac{\frac{Dm_i}{a_i - D}}{m_i + x} \right\} \\
&= \alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*)(a_i - D) \frac{x}{m_i + x} - (y_i - y_i^*) \frac{Dm_i}{(a_i - D)(m_i + x)} \right\} \\
&= \alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*) \frac{a_i x - Dx - Dm_i}{m_i + x} \right\} \\
&= \alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*) \left[ \frac{a_i x}{m_i + x} - \frac{Dx}{m_i + x} - \frac{Dm_i}{m_i + x} \frac{a_i - D}{a_i - D} \right] \right\} \\
&= \alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*) \left[ \frac{a_i x}{m_i + x} - \frac{Dx}{m_i + x} - \frac{(a_i - D)x^*}{m_i + x} \right] \right\} \\
&= \alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*)(x - x^*) \frac{a_i - D}{m_i + x} \right\} = (\star).
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
 a_i - D &= \frac{a_i m_i}{m_i + x^*} \Leftrightarrow a_i - D = \frac{a_i m_i}{m_i + \frac{m_i D}{a_i - D}} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow a_i - D &= \frac{a_i m_i}{\frac{m_i(a_i - D) + m_i D}{a_i - D}} \Leftrightarrow a_i - D = \frac{a_i m_i}{\frac{m_i a_i - D m_i + D m_i}{a_i - D}} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow a_i - D &= \frac{a_i m_i}{\frac{a_i m_i}{a_i - D}} \Leftrightarrow a_i - D = a_i - D \checkmark
 \end{aligned}$$

por tanto se tiene

$$a_i - D = \frac{a_i m_i}{m_i + x^*},$$

con lo que enlazando con la cadena de igualdades (\*)

$$(*) = \alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*)(x - x^*) \frac{a_i m_i}{(m_i + x)(m_i + x^*)} \right\}.$$

Por lo tanto, (\*) quedará

$$(*) = -D(I - x - y_1 - y_2)^2 + \alpha \sum_{i=1}^2 \left\{ (y_i - y_i^*)(x - x^*) \frac{a_i m_i}{(m_i + x)(m_i + x^*)} \right\}.$$

Sin embargo, sabemos que

$$x^* = \frac{m_i D}{a_i - D} \quad \text{y} \quad a_i - D = \frac{a_i m_i}{m_i + x^*}.$$

De esta forma

$$\begin{aligned}
 x^* &= \frac{m_i D}{\frac{a_i m_i}{m_i + x^*}} \Leftrightarrow x^* = \frac{(m_i + x^*) m_i D}{a_i m_i} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{m_i + x^*}{a_i} &= \frac{x^*}{D} \Leftrightarrow \frac{a_i}{m_i + x^*} = \frac{D}{x^*};
 \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{a_1}{m_1 + x^*} = \frac{D}{x^*} = \frac{a_2}{m_2 + x^*}.$$

Así

$$\begin{aligned}
&= -D(I - x - y_1 - y_2)^2 + \alpha \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{m_i + x} \frac{D}{x^*} (x - x^*)(y_i - y_i^*) \\
&= -D(I - x - y_1 - y_2)^2 + \frac{\alpha D}{x^*} \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{m_i + x} (x - x^*)(y_i - y_i^*) \\
&= -D(-I + x + y_1 + y_2)^2 + \frac{\alpha D}{x^*} \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{m_i + x} (x - x^*)(y_i - y_i^*) \\
&= -D(-x^* - y_1^* - y_2^* + x + y_1 + y_2)^2 + \frac{\alpha D}{x^*} \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{m_i + x} (x - x^*)(y_i - y_i^*) \\
&= -D \{ (x - x^*) + (y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*) \}^2 + \frac{\alpha D}{x^*} \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{m_i + x} (x - x^*)(y_i - y_i^*).
\end{aligned}$$

Como  $\frac{m_i}{m_i+x}$  es monótona creciente como función de  $m_i$  y es decreciente como función de  $x$ , siendo

$$0 \leq \frac{m_i}{m_i + x} \leq 1, \quad \forall m_i \geq 0, x \geq 0,$$

entonces se obtiene

$$\begin{aligned}
-D[(x - x^*) + (y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*)]^2 \leq V' &\leq -D[(x - x^*) + (y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*)]^2 \\
&\quad + \frac{\alpha D}{x^*} (x - x^*)(y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*).
\end{aligned}$$

Nos preguntamos ahora si la expresión

$$-D[(x - x^*) + (y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*)]^2 + \frac{\alpha D}{x^*} (x - x^*)(y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*)$$

es definida negativa, con lo que se tendría  $V' < 0$ ; ahora bien,

$$\begin{aligned}
&-D[(x - x^*) + (y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*)]^2 + \frac{\alpha D}{x^*} (x - x^*)(y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*) \\
&= -D \left[ (x - x^*)^2 + (y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha}{x^*} (y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*) + 2(x - x^*)(y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*) \right] \\
&= -D \left[ (x - x^*)^2 + (y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*)^2 + \left( 2 - \frac{\alpha}{x^*} \right) (x - x^*)(y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*) \right].
\end{aligned}$$

Si demostramos que  $(\Delta)$  es definido positivo, con

$$(\Delta) = \left[ (x - x^*)^2 + (y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*)^2 + \left( 2 - \frac{\alpha}{x^*} \right) (x - x^*)(y_1 + y_2 - y_1^* - y_2^*) \right],$$

ya habremos acabado; pero gracias a la demostración del Teorema 1.6.4, sabemos que si  $\alpha \in \left[ 0, \frac{4m_1 D}{a_1 - D} \right)$ ,  $(\Delta)$  es definido positivo. Por tanto,  $V'$  es definida negativa a lo largo de soluciones de (2.1) y concluimos la demostración. ■

## 2.4. Existencia de atractor global.

Consideramos el sistema (2.1) dado por

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= DI - Dx - a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 - a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2, \\ \frac{dy_1}{dt} &= a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 - Dy_1, \\ \frac{dy_2}{dt} &= a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2 - Dy_2. \end{aligned}$$

En el resto de la sección denotaremos por  $u_0 = (x_0, y_{10}, y_{20})$  a un dato inicial del sistema (2.1). Por otro lado, denotaremos por  $u(t) = (x(t), y_1(t), y_2(t))$  a una solución del sistema (2.1) y por  $S(t)$  al sistema dinámico (o semigrupo de operadores) definido por

$$S(t)u_0 = S(t)(x_0, y_{10}, y_{20}) = (x(t), y_1(t), y_2(t)) \equiv u(t; u_0).$$

Pues bien, consideramos  $B \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto acotado. De esta forma, existe  $M > 0$  tal que  $B \subset B(0; M)$ , donde  $B(0; M)$  denota la bola de centro el origen y radio  $M$  en  $\mathbb{R}^3$ . Así, para todo dato inicial  $u_0 = (x_0, y_{10}, y_{20}) \in B$ , se tiene que  $|u_0|^2 \leq M^2$ .

Definimos entonces

$$w(t) := x(t) + y_1(t) + y_2(t);$$

por tanto,

$$w'(t) = x'(t) + y_1'(t) + y_2'(t).$$

Sustituyendo lo que tenemos en (2.1) llegamos a

$$\begin{aligned} w'(t) &= DI - Dx - a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 - a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2 + a_1 \frac{x}{m_1 + x} y_1 - Dy_1 + a_2 \frac{x}{m_2 + x} y_2 - Dy_2 \\ &= DI - Dx - Dy_1 - Dy_2 = DI - Dw. \end{aligned}$$

Además, sabemos que

$$w(0) = x(0) + y_1(0) + y_2(0) = x_0 + y_{10} + y_{20}.$$

Resolviendo el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= -Dw + DI, \\ w(0) &= w_0 = x_0 + y_{10} + y_{20}, \end{aligned}$$

tal y como se hizo en la demostración de Teorema 1.6.1, obtenemos como solución del mismo

$$w(t) = Ce^{-Dt} + I, \quad C = x_0 + y_{10} + y_{20} - I.$$

De esta manera, como  $x(t), y_1(t), y_2(t) \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} |S(t)u_0|^2 &= x^2(t) + y_1^2(t) + y_2^2(t) \\ &\leq |x(t) + y_1(t) + y_2(t)|^2 \\ &= |w(t)|^2 \\ &\leq (Ce^{-Dt} + I)^2 \\ &= [(x_0 + y_{10} + y_{20})e^{-Dt} + I - Ie^{-Dt}]^2 \\ &= [(x_0 + y_{10} + y_{20})e^{-Dt} + I(1 - e^{-Dt})]^2 \\ &\leq 2(x_0 + y_{10} + y_{20})^2 e^{-2Dt} + \underbrace{2I^2(1 - e^{-Dt})^2}_{\leq 1} \leq . \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (x_0 + y_{10} + y_{20})^2 &= x_0^2 + y_{10}^2 + y_{20}^2 + 2y_{10}y_{20} + 2x_0y_{10} + 2x_0y_{20} \\ &\leq (2ab \leq a^2 + b^2) \leq x_0^2 + y_{10}^2 + y_{20}^2 + y_{10}^2 + y_{20}^2 + x_0^2 + y_{10}^2 + x_0^2 + y_{20}^2 \\ &= 3(x_0^2 + y_{10}^2 + y_{20}^2) = 3|(x_0, y_{10}, y_{20})|^2. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |S(t)u_0|^2 &\leq 6|(x_0, y_{10}, y_{20})|^2 e^{-2Dt} + 2I^2 \\ &\leq 6M^2 e^{-2Dt} + 2I^2. \end{aligned}$$

Denotando

$$\rho^2 := 1 + 2I^2,$$

como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 6M^2 e^{-2Dt} = 0,$$

entonces, existe  $T_B \geq 0$  tal que para todo  $t \geq T_B$ , se tiene  $6M^2 e^{-2Dt} \leq 1$ . En efecto,

$$6M^2 e^{-2Dt} \leq 1 \Leftrightarrow 6M^2 \leq e^{2Dt} \Leftrightarrow \log(6M^2) \leq 2Dt \Leftrightarrow \frac{1}{2D} \log(6M^2) \leq t,$$

por tanto, definimos

$$T_B := \frac{1}{2D} \log(6M^2).$$

En resumen, hemos demostrado que existe un compacto,  $B(0, \rho)$ , de tal forma que existe  $T_B \geq 0$  tal que para todo  $t \geq T_B$ , se tiene  $|S(t)u_0| \leq \rho$ ; por tanto, existe un compacto absorbente, con lo que existe un atractor global que denotaremos por  $\mathcal{A}$ .

# Capítulo 3

## Modelo con crecimiento en pared.

### 3.1. Formulación del modelo matemático.

Hasta ahora hemos estudiado modelos que sólo tenían en cuenta el crecimiento de un microorganismo, o bien la competición de dos de ellos, pero todo ello teniendo lugar en el medio de cultivo o medio de crecimiento. Sin embargo, es frecuente que los microorganismos no sólo crezcan en el medio de crecimiento, sino que también lo hagan en las paredes del recipiente que los contiene. Esto es debido bien a la habilidad de los microorganismos para adherirse a las paredes del recipiente, o bien a que el ratio de flujo no es suficientemente rápido para limpiar y eliminar estos microorganismos del sistema. Naturalmente, podemos considerar la población consumidora  $y(t)$  como un conjunto de dos categorías de poblaciones, una en el medio de crecimiento, denotada por  $y_1(t)$ , y la otra sobre las paredes del recipiente, denotada por  $y_2(t)$ . Estos individuos pueden cambiar de categoría en cualquier momento, es decir, los microorganismos sobre la pared pueden elegir pasar al medio de crecimiento o la biomasa del medio puede preferir adherirse a las paredes.

Sean  $r_1$  y  $r_2$  los ratios con los que las especies se adhieren o se despegan de las paredes, respectivamente, entonces  $r_1 y_1(t)$  y  $r_2 y_2(t)$  representan los correspondientes términos de especies que cambian su categoría. Asumimos que el nutriente está distribuido de manera equitativa a ambas categorías, además se asume también que ambas categorías consumen la misma cantidad de nutriente y con el mismo ratio.

Cuando el ratio de flujo es bajo, los organismos pueden morir de forma natural antes de ser eliminados del sistema, con lo que la limpieza del sistema no es el principal factor de mortalidad. Denotamos por  $\nu(> 0)$  al coeficiente de mortalidad colectiva de  $y(t)$ , que representa todos los factores anteriormente mencionados, tales como enfermedades, edades, etc. Por otro lado,

cuando el ratio de flujo es bajo, la biomasa muerta no se elimina del sistema inmediatamente y está sujeta a descomposición bacteriana, lo que a su vez conduce a la regeneración del nutriente. No se espera que el 100 % de la biomasa sea reciclada, sino sólo una fracción que denotaremos por  $b \in (0, 1)$ .

Cuando  $I$  y  $D$  son ambas constantes y no hay retardos en el sistema, como es el caso, el modelo que se presenta a continuación describe la dinámica de quimiostatos con crecimiento en pared. Observemos que sólo  $y_1(t)$  contribuye al material reciclado de la biomasa muerta en el medio. Además, como los microorganismos adheridos a la pared no se limpian del sistema, el término  $-Dy_2(t)$  no se incluye en la ecuación que representa el crecimiento de  $y_2(t)$ . Todos los parámetros son los mismos que aparecen en (1.5), es decir, el modelo con un microorganismo que estudiamos en el Capítulo 1, a diferencia de que  $0 < c \leq a$  reemplaza a  $a$  como el ratio de crecimiento de las especies consumidoras<sup>1</sup>. De esta forma, obtenemos el siguiente modelo

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= DI - Dx - a\frac{x}{m+x}y_1 - a\frac{x}{m+x}y_2 + b\nu y_1, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -(\nu + D)y_1 + c\frac{x}{m+x}y_1 - r_1y_1 + r_2y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\nu y_2 + c\frac{x}{m+x}y_2 + r_1y_1 - r_2y_2.\end{aligned}\tag{3.1}$$

## 3.2. Puntos estacionarios o de equilibrio.

En este caso, los equilibrios del sistema (3.1) vienen dados por las soluciones de

$$\begin{aligned}DI - Dx - a\frac{x}{m+x}y_1 - a\frac{x}{m+x}y_2 + b\nu y_1 &= 0, \\ -(\nu + D)y_1 + c\frac{x}{m+x}y_1 - r_1y_1 + r_2y_2 &= 0, \\ -\nu y_2 + c\frac{x}{m+x}y_2 + r_1y_1 - r_2y_2 &= 0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Claramente  $(I, 0, 0)$  es solución inmediata del sistema. Sin embargo, si intentamos seguir los pasos que llevamos a cabo a la hora de estudiar los puntos de equilibrio de (3.1), el modelo con dos microorganismos del Capítulo 2, y buscamos equilibrios de la forma  $(x^*, y_1^*, 0)$  o  $(x^*, 0, y_2^*)$ , nos damos cuenta de que, en este caso, tales equilibrios no son posibles. Veamos una explicación de este hecho.

Supongamos que, por ejemplo,  $y_2 = 0$ , entonces de la tercera ecuación del sistema (3.2) tenemos  $r_1y_1 = 0$ , siendo  $r_1 > 0$ , con lo que se deduce que  $y_1 = 0$  y, por tanto,  $x = I$ ; en resumen,

---

<sup>1</sup>Notemos que hemos unificado las constantes respecto al modelo estudiado en el Capítulo 2, modelo con dos microorganismos, para hacer más sencillo el estudio del mismo de aquí en adelante.



obtenemos el equilibrio  $(I, 0, 0)$ .

Si, por el contrario, tenemos  $y_1 = 0$ , de la segunda ecuación del sistema (3.2) tenemos  $r_2 y_2 = 0$ , siendo  $r_2 > 0$ , con lo que se deduce que  $y_2 = 0$  y, por tanto,  $x = I$ ; en resument, volvemos a obtener el equilibrio  $(I, 0, 0)$ .

Por tanto, además del equilibrio trivial  $(I, 0, 0)$  lo que debemos buscar ahora son equilibrios positivos. Sin embargo, antes de continuar, vamos a realizar un cambio de variables en el sistema (3.1), que viene dado por

$$\alpha(t) = \frac{y_1(t)}{y_1(t) + y_2(t)}, \quad z(t) = y_1(t) + y_2(t).$$

Así, el sistema resultante es el siguiente

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= DI - Dx - a \frac{x}{m+x} z + b\nu\alpha z, \\ \frac{dz}{dt} &= -\nu z - D\alpha z + c \frac{x}{m+x} z, \\ \frac{d\alpha}{dt} &= -D\alpha(1-\alpha) - r_2\alpha + r_2(1-\alpha). \end{aligned} \tag{3.3}$$

En efecto, es trivial la primera ecuación que se obtiene tras el cambio. En cuanto a la segunda

$$\begin{aligned} z' &= y_1' + y_2' \\ &= -\nu y_1 - D y_1 + c \frac{x}{m+x} y_1 - r_1 y_1 + r_2 y_2 - \nu y_2 + c \frac{x}{m+x} y_2 + r_1 y_1 - r_2 y_2 \\ &= -\nu(y_1 + y_2) - D y_1 + c \frac{x}{m+x} (y_1 + y_2) \\ &= -\nu z - D y_1 + c \frac{x}{m+x} z. \end{aligned}$$

Ahora bien, por definición de  $\alpha$ , se tiene

$$y_1 = \alpha(y_1 + y_2) = \alpha z,$$

por tanto, se deduce que

$$z' = -\nu z + c \frac{x}{m+x} z - D\alpha z.$$

Finalmente, para la tercera ecuación

$$\begin{aligned}\alpha' &= \left( \frac{y_1}{y_1 + y_2} \right)' \\ &= \frac{y_1'(y_1 + y_2) - y_1(y_1' + y_2')}{(y_1 + y_2)^2} \\ &= \frac{\cancel{y_1'y_1} + y_1'y_2 - \cancel{y_1y_1'} - y_1y_2'}{(y_1 + y_2)^2} \\ &= \frac{y_1'y_2 - y_1y_2'}{(y_1 + y_2)^2}.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}y_1'y_2 &= -(\nu + D)y_1y_2 + c\frac{x}{m+x}y_1y_2 - r_1y_1y_2 + r_2y_2^2, \\ -y_1y_2' &= \nu y_2y_1 - c\frac{x}{m+x}y_2y_1 - r_1y_1^2 + r_2y_2y_1.\end{aligned}$$

De aquí, como

$$\alpha' = \frac{y_1'y_2 - y_1y_2'}{(y_1 + y_2)^2},$$

se tiene

$$y_1'y_2 - y_1y_2' = (y_1 + y_2)^2\alpha',$$

con lo que

$$(y_1 + y_2)^2\alpha' = -Dy_1y_2 - r_1(y_1y_2 + y_1^2) + r_2(y_2^2 + y_2y_1).$$

En conclusión

$$\alpha' = -D\frac{y_1y_2}{(y_1 + y_2)^2} - r_1\frac{y_1y_2 + y_1^2}{(y_1 + y_2)^2} + r_2\frac{y_2^2 + y_2y_1}{(y_1 + y_2)^2}.$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}\alpha(1 - \alpha) &= \frac{y_1}{y_1 + y_2} \left( 1 - \frac{y_1}{y_1 + y_2} \right) = \frac{y_1}{y_1 + y_2} \frac{y_2}{y_1 + y_2} = \frac{y_1y_2}{(y_1 + y_2)^2}; \\ \frac{y_1y_2 + y_1^2}{(y_1 + y_2)^2} &= \frac{\cancel{y_1(y_2 + y_1)}}{(y_1 + y_2)^2} = \frac{y_1}{y_1 + y_2} = \alpha; \\ \frac{y_2^2 + y_2y_1}{(y_1 + y_2)^2} &= \frac{\cancel{y_2(y_2 + y_1)}}{(y_1 + y_2)^2} = \frac{y_2}{y_1 + y_2} = 1 - \alpha.\end{aligned}$$

Con todos los cálculos realizados previamente llegamos a la ecuación diferencial para  $\alpha$

$$\alpha' = -D\alpha(1 - \alpha) - r_1\alpha + r_2(1 - \alpha),$$

tal y como nosotros queríamos, quedando así justificadas cada una de las ecuaciones que forman el sistema (3.3).

Para cualesquiera soluciones positivas  $y_1, y_2$  de (3.3) se tiene  $0 < \alpha(t) < 1$ , por la propia definición de  $\alpha$ , para todo  $t$ . Además

$$\begin{aligned}\alpha' \Big|_{\alpha=0} &= [-D\alpha(1 - \alpha) - r_1\alpha + r_2(1 - \alpha)] \Big|_{\alpha=0} = r_2 > 0, \\ \alpha' \Big|_{\alpha=1} &= [-D\alpha(1 - \alpha) - r_1\alpha + r_2(1 - \alpha)] \Big|_{\alpha=1} = -r_1 < 0.\end{aligned}$$

En consecuencia, el intervalo  $(0, 1)$  es una región positivamente invariante para  $\alpha(t)$ .

Por otro lado, la ecuación que verifica  $\alpha$  es independiente de  $x$  y de  $z$  y sus puntos de equilibrio son las soluciones de la siguiente ecuación de segundo grado

$$-D\alpha(1 - \alpha) - r_1\alpha + r_2(1 - \alpha) = 0,$$

es decir,

$$D\alpha^2 + (-r_2 - D - r_1)\alpha + r_2 = 0,$$

y que resulta ser

$$\alpha_{\pm}^* = \frac{D + r_1 + r_2 \pm \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2}}{2D},$$

donde  $\alpha_+^*$  denota la elección de signo positivo en el numerador y  $\alpha_-^*$  la elección de signo negativo. Antes de continuar veamos que  $\alpha_-^*$  es la única de las dos raíces que pertenece al intervalo  $(0, 1)$  y que  $\alpha_+^*$  es mayor que 1. En efecto,

$$\begin{aligned}(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2 &= D^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 + 2Dr_1 + 2Dr_2 - 4Dr_2 \\ &= D^2 + r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 + 2Dr_1 - 2Dr_2 > D^2 + r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 - 2Dr_1 - 2Dr_2 \\ &= (D - (r_1 + r_2))^2 = (D - r_1 - r_2)^2,\end{aligned}$$

con lo que

$$\sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2} > \sqrt{(D - r_1 - r_2)^2} = \sqrt{(r_1 + r_2 - D)^2},$$

de donde se deduce

$$\sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2} > \sqrt{(r_1 + r_2 - D)^2} = r_1 + r_2 - D,$$

obteniendo

$$-\sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2} < -(r_1 + r_2 - D) = D - r_1 - r_2,$$

es decir

$$D + r_1 + r_2 - \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2} < D + r_1 + r_2 + D - r_1 - r_2 = 2D.$$

En consecuencia

$$\alpha_-^* = \frac{D + r_1 + r_2 - \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2}}{2D} < \frac{2D}{2D} = 1.$$

Ahora demostraremos que  $\alpha_+^*$  es mayor que 1. En efecto,

$$\sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2} < \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2} = D + r_1 + r_2,$$

de donde se deduce

$$-\sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2} > -D - r_1 - r_2,$$

llegando a

$$D + r_1 + r_2 - \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2} > D + r_1 + r_2 - D - r_1 - r_2 = 0.$$

En consecuencia,

$$\alpha_-^* > \frac{0}{2D} = 0.$$

Que  $\alpha_+^* > 1$  se deduce inmediatamente pues

$$\frac{D + r_1 + r_2 + \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2}}{2D} > 1 \text{ si y sólo si } \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2} > D - r_1 - r_2,$$

lo que es equivalente a

$$(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2 > (D - r_1 - r_2)^2$$

y esto es cierto.

De aquí en adelante notaremos  $\alpha^*$  a la elección negativa, es decir, denotaremos así a  $\alpha_-^*$ . A continuación veamos que  $\alpha(t) \rightarrow \alpha^*$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  y, por tanto,  $\alpha^*$  es asintóticamente estable.

En efecto,  $\alpha(t)$  verifica la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= -D\alpha(1 - \alpha) - r_1\alpha + r_2(1 - \alpha) \\ &= -D\alpha + D\alpha^2 - r_1\alpha + r_2 - r_2\alpha \\ &= D\alpha^2 - (D + r_1 + r_2)\alpha + r_2.\end{aligned}$$

A continuación, utilizando el cambio  $\alpha(t) = \alpha^* + 1/z(t)$ , ya que  $\alpha^*$  es solución, obtenemos

$$z'(t) = (D + r_1 + r_2 - 2D\alpha^*)z - D,$$

que tiene como solución

$$z = e^{(D+r_1+r_2-2D\alpha^*)t}C + \frac{D}{D + r_1 + r_2 - 2D\alpha^*}.$$

Deshaciendo el cambio inicial obtenemos

$$\alpha(t) = \alpha^* + \frac{D + r_1 + r_2 - 2D\alpha^*}{(D + r_1 + r_2 - 2D\alpha^*)Ce^{(D+r_1+r_2-2D\alpha^*)t} + D}$$

y tomando  $\alpha(t) = \alpha^*$  se deduce que

$$\frac{\gamma}{\gamma Ce^{\gamma t^*} + D} = 0, \quad \text{donde } \gamma = D + r_1 + r_2 - 2D\alpha^*,$$

por tanto, como  $\gamma \neq 0$ , es claro que  $t^* = +\infty$ , donde  $t^*$  denota el instante de tiempo para el que se alcanza  $\alpha^*$ .

Sustituyendo  $\alpha$  por  $\alpha^*$  en el sistema (3.3) tras eliminar la tercera ecuación del mismo tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= DI - Dx - a\frac{x}{m+x}z + b\nu\alpha^*z, \\ \frac{dz}{dt} &= -\nu z - D\alpha^*z + c\frac{x}{m+x}z.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Los equilibrios del sistema (3.4) vienen dados por la solución de

$$\begin{aligned} DI - Dx^* - a\frac{x^*}{m+x^*}z^* + b\nu\alpha^*z^* &= 0, \\ -\nu z^* - D\alpha^*z^* + c\frac{x^*}{m+x^*}z^* &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

De la segunda ecuación de (3.5) obtenemos

$$\left(-\nu - D\alpha^* + c\frac{x^*}{m+x^*}\right)z^* = 0.$$

Ahora bien, por definición de  $\alpha(t)$  y  $z(t)$ ,  $z^* = 0$  no puede ser solución del sistema (3.5), con lo que

$$-\nu - D\alpha^* + c\frac{x^*}{m+x^*} = 0,$$

o, en otras palabras,

$$\frac{x^*}{m+x^*} = \frac{\nu + D\alpha^*}{c}$$

De aquí podemos obtener la expresión explícita de  $x^*$

$$\begin{aligned} \frac{x^*}{m+x^*} = \frac{\nu + D\alpha^*}{c} &\Leftrightarrow cx^* = m\nu + mD\alpha^* + \nu x^* + D\alpha^*x^* \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (D\alpha^* + \nu - c)x^* + m\nu + mD\alpha^* &= 0 \Leftrightarrow (c - \nu - D\alpha^*)x^* = m(\nu + D\alpha^*), \end{aligned}$$

es decir

$$x^* = \frac{m(\nu + D\alpha^*)}{c - \nu - D\alpha^*}. \quad (3.6)$$

Por otro lado

$$DI - Dx^* + z^* \left(-a\frac{x^*}{m+x^*} + b\nu\alpha^*\right) = 0,$$

o, lo que es lo mismo,

$$z^* = \frac{DI - Dx^*}{a\frac{x^*}{m+x^*} - b\nu\alpha^*}. \quad (3.7)$$

De esta forma hemos obtenido el equilibrio del sistema (3.4) y observando las expresiones obtenidas es claro que, para que existan equilibrios positivos, se deben verificar

$$\nu + D\alpha^* < c \quad \text{y} \quad (I - x^*) \left(a\frac{x^*}{m+x^*} - b\nu\alpha^*\right) > 0,$$

o, equivalentemente,

$$\nu + D\alpha^* < c \quad \text{y} \quad (I - x^*) \left( a \frac{x^*}{m + x^*} - b\nu\alpha^* \right) > 0. \quad (3.8)$$

### 3.3. Análisis de estabilidad.

Estudiaremos en esta sección la estabilidad de los puntos de equilibrio obtenidos en la sección previa. Recogemos toda la información en el siguiente Teorema.

**Teorema 3.3.1** *Se verifican los siguientes resultados:*

(i) *Si  $\nu + D\alpha^* > c$ , entonces el equilibrio axial  $(I, 0)$  del sistema (3.4) es globalmente asintóticamente estable, es decir, cualquier solución de (3.4) satisface*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = I, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (y_1(t) + y_2(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.$$

(ii) *Si  $\nu + D\alpha^* < c$ ,  $D - c + az^* > 0$  y  $x^* < I$ , entonces el equilibrio positivo  $(x^*, z^*)$  del sistema (3.4) es globalmente asintóticamente estable, es decir, cualquier solución de (3.4) satisface*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (y_1(t) + y_2(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = z^*.$$

**Demostración.-**

(i) Consideremos la segunda ecuación del sistema (3.4)

$$\frac{dz}{dt} = -\nu z - D\alpha^* z + c \frac{x}{m+x} z = - \left( \nu + D\alpha^* - c \frac{x}{m+x} \right) z.$$

Sabemos que

$$\frac{x}{m+x} \leq 1, \quad \text{entonces} \quad -c \frac{x}{m+x} \geq -c.$$

De esta forma, se tiene

$$\nu + D\alpha^* - c \frac{x}{m+x} \geq \nu - D\alpha^* - c.$$

Así, como  $\nu + D\alpha^* > c$ , se tiene  $\nu + D\alpha^* - c > 0$ , con lo que

$$\nu + D\alpha^* - c \frac{x}{m+x} \geq \nu - D\alpha^* - c > 0.$$

Se obtiene por tanto

$$\frac{dz}{dt} = - \left( \nu + D\alpha^* - c \frac{x}{m+x} \right) < 0,$$

lo que implica que  $z$  es decreciente; además,  $z(t) = y_1(t) + y_2(t) \geq 0$ , por lo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_1(t) + y_2(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.$$

Por otro lado, usando la primera ecuación del sistema (3.4) se tiene

$$\frac{dx}{dt} = DI - Dx - a \frac{x}{m+x} z + b\nu\alpha^* z.$$

Ahora bien, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $T > 0$  tal que  $\forall t \geq T$  se verifica que

$$\left| \left( -a \frac{x(t)}{m+x(t)} + b\nu\alpha^* \right) z(t) \right| \leq \varepsilon.$$

Entonces consideramos

$$\frac{dx}{dt} \leq DI - Dx + \varepsilon, \quad \forall t \geq T,$$

lo que nos da

$$x(t) \leq x(T)e^{-Dt} + \left( I + \frac{\varepsilon}{D} \right)$$

y de

$$\frac{dx}{dt} \geq DI - Dx + \varepsilon$$

se deduce

$$x(t) \leq x(T)e^{-Dt} + \left( I - \frac{\varepsilon}{D} \right).$$



Entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \in \left[ I - \frac{\varepsilon}{D}, I + \frac{\varepsilon}{D} \right]$$

y como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = I.$$

- (ii) Para llevar a cabo el estudio de la estabilidad del equilibrio positivo  $(x^*, z^*)$  vamos a reescribir el sistema (3.4), usando (3.5), como sigue

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -Dx + Dx^* - a \frac{x}{m+x} (z - z^*) - az^* \left( \frac{x}{m+x} - \frac{x^*}{m+x^*} \right) + b\nu\alpha^* (z - z^*), \\ \frac{dz}{dt} &= cz \left( \frac{x}{m+x} - \frac{x^*}{m+x^*} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

En efecto, partimos de (3.5), es decir

$$\begin{aligned} DI - Dx^* - a \frac{x^*}{m+x^*} z^* + b\nu\alpha^* z^* &= 0, \\ -\nu z^* - D\alpha^* z^* + c \frac{x^*}{m+x^*} z^* &= 0. \end{aligned}$$

De la primera ecuación se tiene

$$DI = Dx^* + a \frac{x^*}{m+x^*} z^* - b\nu\alpha^* z^*,$$

con lo que, sustituyendo en la primera de las ecuaciones, se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = Dx^* + a \frac{x^*}{m+x^*} z^* - b\nu\alpha^* z^* - Dx - a \frac{x}{m+x} z + b\nu\alpha^* z.$$

Sumando y restando

$$a \frac{x}{m+x} z^*$$

se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -Dx + Dx^* + a\frac{x^*}{m+x^*}z^* + a\frac{x}{m+x}z^* - a\frac{x}{m+x}z^* - b\nu\alpha^*z^* - a\frac{x}{m+x}z + b\nu\alpha^*z \\ &= -Dx + Dx^* - a\frac{x}{m+x}(z - z^*) - az^*\left(\frac{x}{m+x} - \frac{x^*}{m+x^*}\right) + b\nu\alpha^*(z - z^*).\end{aligned}$$

Por otro lado

$$-\nu - D\alpha^* + c\frac{x^*}{m+x^*} = 0, \quad \text{entonces} \quad -\nu - D\alpha^* = -c\frac{x^*}{m+x^*},$$

con lo que sustituyendo en la segunda ecuación tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= -\nu z - D\alpha^*z + c\frac{x}{m+x}z = z(-\nu - D\alpha^*) + c\frac{x}{m+x}z \\ &= z\left(-c\frac{x^*}{m+x^*}\right) + c\frac{x}{m+x}z = cz\left(\frac{x}{m+x} - \frac{x^*}{m+x^*}\right).\end{aligned}$$

Así, queda justificada la escritura del sistema (3.9) y continuamos con el estudio de la estabilidad del equilibrio positivo  $(x^*, z^*)$ .

Consideramos la función  $V$  dada por

$$V(t) \equiv V(x(t), z(t)) = x - x^* + \log z - \log z^*.$$

Claramente  $V(x^*, z^*) = 0$  y  $V(x, z) > 0$ , para todo  $x > x^*$ ,  $z > z^*$ . Derivando  $V$  a lo largo de las soluciones del sistema (3.9), se tiene

$$\begin{aligned}V'(t) &= (x - x^* + \log z - \log z^*)' = x' + \frac{z'}{z} \\ &= -D(x - x^*) - a\frac{x}{m+x}(z - z^*) - az^*\left(\frac{x}{m+x} - \frac{x^*}{m+x^*}\right) + \\ &\quad + b\nu\alpha^*(z - z^*) + c\left(\frac{x}{m+x} - \frac{x^*}{m+x^*}\right) \\ &= -D(x - x^*) - a\frac{x}{m+x}(z - z^*) - (az^* - c)\left(\frac{x}{m+x} - \frac{x^*}{m+x^*}\right) + b\nu\alpha^*(z - z^*) \\ &= -D(x - x^*) + (c - az^*)\left(\frac{x}{m+x} - \frac{x^*}{m+x^*}\right) - \left(a\frac{x}{m+x} - b\nu\alpha^*\right)(z - z^*) \\ &< -D(x - x^*) + (c - az^*)\left(\frac{x}{m+x} - \frac{x^*}{m+x^*}\right) - \left(a\frac{x^*}{m+x^*} - b\nu\alpha^*\right)(z - z^*),\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se tiene gracias a que la función de consumo es monótona creciente.

Ahora bien, si  $c - az^* \leq 0$ , continuando la cadena anterior se tiene

$$\begin{aligned} V'(t) &< -D(x - x^*) + (c - az^*) \left( \frac{x}{m+x} - \frac{x^*}{m+x^*} \right) - \left( a \frac{x^*}{m+x^*} - b\nu\alpha^* \right) (z - z^*) \\ &< -D(x - x^*) - \left( a \frac{x^*}{m+x^*} - b\nu\alpha^* \right) (z - z^*) < 0, \end{aligned}$$

pues, gracias a la hipótesis  $x^* < I$ , de (3.8) se deduce

$$a \frac{x^*}{m+x^*} - b\nu\alpha^* > 0,$$

con lo que  $V$  es definida negativa.

En caso contrario, es decir, si  $c - az^* > 0$ , como

$$\frac{x}{m+x} - \frac{x^*}{m+x^*} \leq x - x^*.$$

De esta forma, se tiene

$$\begin{aligned} V'(t) &< -D(x - x^*) + (c - az^*) \left( \frac{x}{m+x} - \frac{x^*}{m+x^*} \right) - \left( a \frac{x^*}{m+x^*} - b\nu\alpha^* \right) (z - z^*) \\ &\leq -D(x - x^*) + (c - az^*)(x - x^*) - \left( a \frac{x}{m+x} - b\nu\alpha^* \right) (z - z^*) \\ &= -(D - c + az^*)(x - x^*) - \left( a \frac{x}{m+x} - b\nu\alpha^* \right) (z - z^*) \\ &\leq -(D - c + az^*)(x - x^*) - \left( a \frac{x^*}{m+x^*} - b\nu\alpha^* \right) (z - z^*) < 0, \end{aligned}$$

gracias a las hipótesis. Por tanto, en este caso también se tiene que  $V$  es definida negativa. En conclusión, el equilibrio positivo  $(x^*, z^*)$  es globalmente asintóticamente estable. ■

Vamos a dar a continuación otro resultado equivalente a la parte (ii) del Teorema 3.3.1, donde demostramos que el equilibrio positivo  $(x^*, z^*)$  es asintóticamente estable con técnicas más sofisticadas, basadas en el uso de funcionales de Lyapunov, lo que nos permite reducir el número de hipótesis respecto de la referencia que tenemos como guía [1] en esta parte del estudio.

**Teorema 3.3.2** *Supongamos que  $\nu + D\alpha^* < c$  y  $x^* < I$ . Entonces, el equilibrio positivo  $(x^*, z^*)$  es globalmente asintóticamente estable.*

**Demostración.-** Partimos del sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -Dx + Dx^* - a\frac{x}{m+x}(z - z^*) - az^* \left( \frac{x}{m+x} - \frac{x^*}{m+x^*} \right) + b\nu\alpha^*(z - z^*), \\ \frac{dz}{dt} &= cz \left( \frac{x}{m+x} - \frac{x^*}{m+x^*} \right).\end{aligned}\quad (3.10)$$

cuya justificación ya quedó realizada en la demostración del Teorema 3.3.1. A continuación, consideramos el siguiente cambios de variables

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &:= x(t) - x^* \\ \tilde{z}(t) &:= \log \frac{z(t)}{z^*} \\ \tilde{U}(\cdot) &:= U(\cdot + x^*) - U(x^*).\end{aligned}\quad (3.11)$$

De esta manera, el sistema (3.10) quedará reescrito como

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}}{dt} &= -D\tilde{x}(t) - a \left( \tilde{U}(\tilde{x}) + U(x^*) \right) z^* (e^{\tilde{z}} - 1) - az^* \tilde{U}(\tilde{x}) + b\nu\alpha^* z^* (e^{\tilde{z}} - 1), \\ \frac{d\tilde{z}}{dt} &= z^* e^{\tilde{z}} \tilde{U}(\tilde{x}).\end{aligned}\quad (3.12)$$

Ahora definimos un funcional de Lyapunov paso a paso. Comenzamos definiendo el funcional

$$V_1(\tilde{x}(t)) := \int_0^{\tilde{x}(t)} \tilde{U}(s) ds.$$

Ahora bien, si  $x(t) > x^*$ , entonces  $\tilde{x}(t) > 0$ ; de esta forma, como  $s \in (0, \tilde{x}(t))$ , entonces  $s > 0$ . En consecuencia,  $s + x^* > x^*$  y  $U$  es una función creciente respecto de  $x$ , por lo que  $\tilde{U}(s) = U(s + x^*) - U(x^*) > 0$ . En conclusión,

$$V_1(\tilde{x}(t)) = \int_0^{\tilde{x}(t)} \tilde{U}(s) ds > 0,$$

siempre y cuando  $x(t) \neq x^*$ .

Análogamente, si  $x(t) < x^*$ , entonces  $\tilde{x}(t) < 0$ ; por tanto, como  $s \in (\tilde{x}(t), 0)$ , entonces  $s < 0$ . Entonces  $s + x^* < x^*$  y  $U$  es una función creciente respecto de  $x$ , con lo que  $\tilde{U}(s) = U(s + x^*) - U(x^*) < 0$ . En conclusión,

$$V_1(\tilde{x}(t)) = \int_0^{\tilde{x}(t)} \tilde{U}(s) ds = - \int_{\tilde{x}(t)}^0 \tilde{U}(s) ds > 0,$$

siempre y cuando  $x(t) \neq x^*$ .

Resumiendo,  $V_1(\tilde{x}) > 0$  para todo  $x \neq x^*$ .

Derivando  $V_1(\tilde{x}(t))$  respecto de  $t$

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} \tilde{U}(\tilde{x}) \\ &= -D\tilde{x}\tilde{U}(\tilde{x}) - az^* e^{\tilde{z}} \tilde{U}(\tilde{x})^2 - az^* U(x^*) \tilde{U}(\tilde{x}) (e^{\tilde{z}} - 1) + b\nu\alpha^* z^* (e^{\tilde{z}} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}) \\ &= -D\tilde{x}\tilde{U}(\tilde{x}) - az^* e^{\tilde{z}} \tilde{U}(\tilde{x})^2 - (aU(x^*) - b\nu\alpha^*) \tilde{U}(\tilde{x}) (e^{\tilde{z}} - 1) z^*. \end{aligned}$$

En segundo lugar, definimos

$$V_2(\tilde{z}(t)) := \int_0^{\tilde{z}(t)} (e^s - 1) ds.$$

Ahora bien, si  $z(t) > z^*$ , entonces  $\tilde{z}(t) > 0$ ; de esta forma, como  $s \in (0, \tilde{z}(t))$ , entonces  $s > 0$ . En consecuencia,  $e^s - 1 > 1 - 1 = 0$ , por lo que

$$V_2(\tilde{z}(t)) = \int_0^{\tilde{z}(t)} (e^s - 1) ds > 0,$$

siempre y cuando  $z(t) \neq z^*$ .

Análogamente, si  $z(t) < z^*$ , entonces  $\tilde{z}(t) < 0$ ; por tanto, como  $s \in (\tilde{z}(t), 0)$ , entonces  $s < 0$ . Entonces  $e^s - 1 < 1 - 1 = 0$ , con lo que

$$V_2(\tilde{z}(t)) = \int_0^{\tilde{z}(t)} (e^s - 1) ds = - \int_{\tilde{z}(t)}^0 (e^s - 1) ds > 0,$$

siempre y cuando  $z(t) \neq z^*$ .

Resumiendo,  $V_2(\tilde{z}) > 0$  para todo  $z \neq z^*$ .

Derivando ahora  $V_2$  respecto de  $t$  a lo largo de soluciones del sistema (3.12) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dV_2(t)}{dt} &= (e^{\tilde{z}} - 1) \frac{d\tilde{z}(t)}{dt} \\ &= cz^* e^{\tilde{z}} \tilde{U}(\tilde{x}) (e^{\tilde{z}} - 1). \end{aligned}$$

Ahora consideramos el funcional

$$V(t) \equiv V(\tilde{x}(t), \tilde{z}(t)) := V_1(\tilde{x}(t)) + \eta V_2(\tilde{z}(t)),$$

donde

$$\eta := \frac{aU(x^*) - b\nu\alpha^*}{c}.$$

Está claro que  $V(\tilde{x}, \tilde{z}) > 0$  para todo  $(x, z) \neq (x^*, z^*)$ . Notemos que si  $(x, z) = (x^*, z^*)$  me encuentro en el equilibrio, por tanto, por definición de punto estacionario, no me moveré de él.

De esta forma, derivando  $V$  respecto de  $t$  a lo largo de soluciones del sistema (3.12) llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \frac{dV_1(t)}{dt} + \alpha \frac{dV_2(t)}{dt} \\ &= -D\tilde{x}\tilde{U}(\tilde{x}) - az^*e^{\tilde{z}}\tilde{U}(\tilde{x})^2 - (aU(x^*) - b\nu\alpha^*)\tilde{U}(\tilde{x})(e^{\tilde{z}} - 1)z^* \\ &\quad + \frac{aU(x^*) - b\nu\alpha^*}{c}cz^*e^{\tilde{z}}\tilde{U}(\tilde{x})(e^{\tilde{z}} - 1) \\ &= -D\tilde{x}\tilde{U}(\tilde{x}) - az^*e^{\tilde{z}}\tilde{U}(\tilde{x})^2 < 0. \end{aligned}$$

Por tanto, basta aplicar el Teorema de Lyapunov para obtener la estabilidad del equilibrio positivo  $(x^*, z^*)$ . ■

### 3.4. Existencia de atractor global.

Consideramos el sistema (3.1) dado por

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= DI - Dx - a\frac{x}{m+x}y_1 - a\frac{x}{m+x}y_2 + b\nu y_1, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -(\nu + D)y_1 + c\frac{x}{m+x}y_1 - r_1y_1 + r_2y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\nu y_2 + c\frac{x}{m+x}y_2 + r_1y_1 - r_2y_2. \end{aligned}$$

En el resto de la sección denotaremos por  $u_0 = (x_0, y_{10}, y_{20})$  a un dato inicial del sistema (3.1). Por otro lado, denotaremos por  $u(t; u_0) = (x(t; x_0), y_1(t; y_{10}), y_2(t; y_{20}))$  a una solución del sistema (3.1) y por  $S(t)$  al sistema dinámico (o semigrupo de operadores) definido por

$$S(t)u_0 = S(t)(x_0, y_{10}, y_{20}) = (x(t), y_1(t), y_2(t)) \equiv u(t; u_0).$$

Pues bien, consideramos  $B \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto acotado. De esta forma, existe  $M > 0$  tal que  $B \subset B(0; M)$ , donde  $B(0; M)$  denota la bola de centro el origen y radio  $M$  en  $\mathbb{R}^3$ . Así, para todo dato inicial  $u_0 = (x_0, y_{10}, y_{20}) \in B$ , se tiene que  $|u_0|^2 \leq M^2$ .

Definimos entonces

$$w(t) := x(t) + \frac{a}{c}y_1(t) + \frac{a}{c}y_2(t);$$

por tanto,

$$w'(t) = x'(t) + \frac{a}{c}y_1'(t) + \frac{a}{c}y_2'(t).$$

Sustituyendo lo que tenemos en (3.1) llegamos a

$$\begin{aligned} w'(t) &= DI - Dx - a\frac{x}{m+x}y_1 - a\frac{x}{m+x}y_2 + b\nu y_1 - \frac{a(\nu + D)}{c}y_1 + a\frac{x}{m+x}y_1 - \frac{a}{c}r_1y_1 \\ &\quad + \frac{a}{c}r_2y_2 - \frac{a\nu}{c}y_2 + a\frac{x}{m+x}y_2 + \frac{a}{c}r_1y_1 - \frac{a}{c}r_2y_2 \\ &= DI - Dx + \left( b\nu - \frac{a(\nu + D)}{c}y_1 \right) - \frac{a\nu}{c}y_2. \end{aligned}$$

Ahora bien, como  $0 < c \leq a$  entonces  $a/c \geq 1$ , con lo que

$$\begin{aligned} \frac{a}{c}(\nu + D) - b\nu &\geq \nu + D - b\nu \\ &> \nu + D - \nu \\ &= D > 0, \end{aligned}$$

pues como  $b \in (0, 1)$ , entonces  $-b > -1$ .

Así,

$$\frac{a}{c}(\nu + D) - b\nu > 0.$$

Por tanto, definimos  $k$  como

$$k := \min \left\{ \frac{a}{c}(\nu + D) - b\nu, \frac{a\nu}{c} \right\}.$$

Entonces

$$w' \leq DI - Dx - ky_1 - ky_2.$$

Pues bien, definimos ahora  $\widehat{k}$  como

$$\widehat{k} := \min\{D, k\}.$$

De esta forma

$$w' \leq DI - \widehat{k}w.$$

Además, sabemos que

$$w(0) = x(0) + y_1(0) + y_2(0) = x_0 + y_{10} + y_{20}.$$

Resolviendo el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &\leq -\widehat{k}w + DI, \\ w(0) &= w_0 = x_0 + y_{10} + y_{20}, \end{aligned}$$

obtenemos una cota superior para  $w(t)$ ; veámoslo.

Consideramos la EDO

$$\frac{dw}{dt} \leq -\widehat{k}w + DI$$

y la escribiremos equivalentemente como

$$\frac{dw}{dt} + \widehat{k}w \leq DI.$$

Multiplicamos por  $e^{\widehat{k}t}$  y obtenemos

$$e^{\widehat{k}t} \frac{dw}{dt} + \widehat{k}e^{\widehat{k}t}w \leq DIe^{\widehat{k}t},$$

es decir,

$$\frac{d}{dt} [e^{\widehat{k}t}w] \leq DIe^{\widehat{k}t}.$$

Integrando llegamos a que

$$e^{\widehat{k}t}w(t) - w(t_0) \leq \int_{t_0}^t DIe^{\widehat{k}s} ds = \frac{DI}{\widehat{k}} (e^{\widehat{k}t} - e^{\widehat{k}t_0}) \leq \frac{DI}{\widehat{k}} (e^{\widehat{k}t} - 1),$$

pues  $t_0 \geq 0$ , con lo que  $-e^{\widehat{k}t_0} \leq -1$ . También podemos escribir lo anterior, equivalentemente, como



$$\begin{aligned}
w(t) &\leq e^{-\widehat{k}t}w(t_0) + \frac{DI}{\widehat{k}}(1 - e^{-\widehat{k}t}) \\
&= e^{-\widehat{k}t}w(t_0) - \frac{DI}{\widehat{k}}e^{-\widehat{k}t} + \frac{DI}{\widehat{k}} \\
&= \left(w(t_0) - \frac{DI}{\widehat{k}}\right)e^{-\widehat{k}t} + \frac{DI}{\widehat{k}} \\
&= \left(x_0 + y_{10} + y_{20} - \frac{DI}{\widehat{k}}\right)e^{-\widehat{k}t} + \frac{DI}{\widehat{k}}.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$w(t) \leq Ce^{-\widehat{k}t} + \frac{DI}{\widehat{k}}, \quad C = x_0 + y_{10} + y_{20} - \frac{DI}{\widehat{k}}.$$

De esta manera, usando una vez más la conocida desigualdad de Young y que  $x(t), y_1(t), y_2(t) \geq 0$ , llegamos a

$$\begin{aligned}
|S(t)u_0|^2 &= x^2(t) + y_1^2(t) + y_2^2(t) \\
&\leq |x(t) + y_1(t) + y_2(t)|^2 \\
&= |w(t)|^2 \\
&\leq \left(Ce^{-\widehat{k}t} + \frac{DI}{\widehat{k}}\right)^2 \\
&= \left[(x_0 + y_{10} + y_{20})e^{-\widehat{k}t} + \frac{DI}{\widehat{k}} - \frac{DI}{\widehat{k}}e^{-\widehat{k}t}\right]^2 \\
&= \left[(x_0 + y_{10} + y_{20})e^{-\widehat{k}t} + \frac{DI}{\widehat{k}}(1 - e^{-\widehat{k}t})\right]^2 \\
&\leq 2(x_0 + y_{10} + y_{20})^2e^{-2\widehat{k}t} + 2\left(\frac{DI}{\widehat{k}}\right)^2 \underbrace{(1 - e^{-\widehat{k}t})^2}_{\leq 1}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, también sabemos que

$$(x_0 + y_{10} + y_{20})^2 \leq 3|(x_0, y_{10}, y_{20})|^2,$$

tal y como demostramos en la Sección 2.4.

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 |S(t)u_0|^2 &\leq 6|(x_0, y_{10}, y_{20})|^2 e^{-2\widehat{k}t} + 2\left(\frac{DI}{\widehat{k}}\right)^2 \\
 &\leq 6M^2 e^{-2\widehat{k}t} + 2\left(\frac{DI}{\widehat{k}}\right)^2 \\
 &\leq 1 + 2\left(\frac{DI}{\widehat{k}}\right)^2 =: \rho^2,
 \end{aligned}$$

pues

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 6M^2 e^{-2\widehat{k}t} = 0.$$

De esta forma, existe  $T_B \geq 0$  tal que para todo  $t \geq T_B$ , se tiene  $6M^2 e^{-2\widehat{k}t} \leq 1$ ; en efecto,

$$6M^2 e^{-2\widehat{k}t} \leq 1 \Leftrightarrow 6M^2 \leq e^{2\widehat{k}t} \Leftrightarrow \log(6M^2) \leq 2\widehat{k}t \Leftrightarrow \frac{1}{2\widehat{k}} \log(6M^2) \leq t,$$

por tanto, definimos

$$T_B := \frac{1}{2\widehat{k}} \log(6M^2).$$

En resumen, hemos demostrado que existe un compacto,  $B(0, \rho)$ , de tal forma que existe  $T_B \geq 0$  tal que para todo  $t \geq T_B$ , se tiene  $|S(t)u_0| \leq \rho$ ; por tanto, existe un compacto absorbente, con lo que existe un atractor global que denotaremos por  $\mathcal{A}$ .

## Parte II

Modelo no autónomo sin retardo.



# Capítulo 4

## Ratio de consumo de nutriente variable.

### 4.1. Introducción.

En esta parte del trabajo vamos a comenzar estudiando lo que ocurre cuando algunas de las constantes de los modelos que estudiábamos en la primera parte se vuelven dependientes de la variable tiempo. Comenzamos este capítulo estudiando el caso en el que la concentración de nutriente es constante pero el ratio de consumo del mismo es variable. Específicamente vamos a asumir que  $D$  varía de forma continua en tiempo, por ejemplo, de forma periódica o aleatoria, en un intervalo acotado positivo  $D(t) \in (d_m, d_M)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

En el resto del capítulo trataremos en primer lugar el caso del modelo sin pared para, posteriormente, introducir los nuevos cambios al modelo en el que permitimos crecimiento en pared.

### 4.2. Modelo sin pared.

En esta sección estudiamos el caso del modelo sin pared. Cuando  $I$  es una constante positiva y  $D$  varía en tiempo, tenemos el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= D(t)(I - x(t)) - a\frac{x(t)}{m + x(t)}y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -D(t)y(t) + a\frac{x(t)}{m + x(t)}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

**Lema 4.2.1** *Para cualquier tiempo inicial  $t_0 \in \mathbb{R}$  y cualesquiera condiciones iniciales  $x_0, y_0 \geq 0$ , todas las soluciones del sistema (4.1) son no negativas y acotadas para todo  $t \geq t_0$ .*

**Demostración.-** Los coeficientes son continuamente diferenciables para  $x, y \geq 0$ . En particular, el término no lineal

$$a \frac{xy}{m+x} = ay \left( 1 - \frac{m}{m+x} \right)$$

es no negativo y acotado por la función lineal  $ay$  en el cuadrante positivo. En efecto,  $a$  y  $m$  son constantes positivas y  $x, y \geq 0$ , con lo que dicho término no lineal es no negativo; además, sabemos que

$$\frac{x}{m+x} \leq 1,$$

con lo que

$$a \frac{xy}{m+x} \leq ay$$

en el primer cuadrante, ya que  $x, y \geq 0$ . Esto asegura la existencia y unicidad de soluciones para cualquier tiempo para el que permanezcan en el primer cuadrante. En efecto, en virtud de la segunda ecuación del sistema (4.1) y del hecho de que

$$\frac{x(t)}{m+x(t)} \leq 1,$$

tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= -D(t)y(t) + a \frac{x(t)}{m+x(t)}y(t) \\ &\leq -D(t)y(t) + ay(t) = (a - D(t))y(t). \end{aligned}$$

De esta forma, resolviendo la inecuación diferencial que nos resulta tenemos

$$y(t) - y(t_0) \leq \int_{t_0}^t (a - D(s))y(s)ds \leq (a - d_m) \int_{t_0}^t y(s)ds,$$

por tanto

$$y(t) \leq y(t_0) + (a - d_m) \int_{t_0}^t y(s)ds.$$

Aplicando el Lema de Gronwall, se tiene

$$0 \leq y(t) \leq y(t_0)e^{(a-d_m)(t-t_0)},$$

por tanto  $y(t)$  está definida para cualquier instante de tiempo, con lo que efectivamente tenemos existencia de solución. La unicidad se tiene gracias a los resultados de la teoría básica de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Por la continuidad de las soluciones, con condición inicial  $x(t_0) = x_0 > 0$ ,  $x(t)$  tiene que tomar el valor 0 antes de tomar cualquier valor negativo. Pero

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=0} = D(t)I > 0,$$

con lo que  $x(t)$  no puede tomar valores negativos. Con la condición inicial  $y(t_0) = y_0 > 0$ , existe  $t_1 > t_0$  tal que  $y(t) > 0$  en  $[t_0, t_1]$ . Además,

$$y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^t (-D(s) + a \frac{x(s)}{m+x(s)}) ds}$$

para  $t \in [t_0, t_1]$ . Debido a la unicidad de solución, esta expresión se cumple para todo  $t \geq t_0$ , así  $y(t)$  es no negativa.

Sumando las ecuaciones del sistema (4.1) tenemos

$$\frac{d(x(t) + y(t))}{dt} = -D(t)(x(t) + y(t) - I)$$

de donde se deduce inmediatamente que cuando  $x(t) + y(t) \geq I$ , entonces  $I \leq x(t) + y(t) \leq x_0 + y_0$ . De forma análoga, cuando  $x(t) + y(t) \leq I$ , tendremos  $0 \leq x(t) + y(t) \leq I$ . Por tanto,

$$0 \leq x(t) + y(t) \leq \max\{x_0 + y_0, I\},$$

con lo que  $x(t)$  y  $y(t)$  están acotadas. ■

Ahora pasamos a estudiar el comportamiento a largo plazo de las soluciones del sistema (4.1). Más específicamente, estableceremos condiciones bajo las cuales el atractor es una solución completa o un único punto. Notemos que  $(I, 0)$  es el único equilibrio del sistema para todos los valores de los parámetros. Otras soluciones atrayentes no serán puntos de equilibrio.

**Teorema 4.2.1** *Supongamos que  $D : \mathbb{R} \rightarrow [d_m, d_M]$ , donde  $0 < d_m < d_M < \infty$ , es continua. Entonces el sistema (4.1) tiene un atractor pullback  $\mathcal{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$  en el cuadrante positivo  $\mathbb{R}_+^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ . Además,*

(i) *Si  $a < d_m$ , el equilibrio axial  $(I, 0)$  es asintóticamente estable en el cuadrante positivo y el atractor pullback  $\mathcal{A}$  tiene una única componente que es el subconjunto  $A(t) = \{(I, 0)\}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ;*

(ii) *si lo que sucede es que*

$$a > \left(1 + \frac{m}{I}\right) d_M$$

entonces el atractor pullback  $\mathcal{A}$  también contiene puntos estrictamente dentro del cuadrante positivo, además del punto  $\{(I, 0)\}$ ;

(iii) cuando, además de la hipótesis de (ii) se tiene

$$d_m < a < \frac{d_m(md_m + d_M I)^2}{(md_m + d_M I)^2 - mI d_m^2}$$

el atractor pullback  $\mathcal{A}$  está formado por el punto de equilibrio axial  $\{(I, 0)\}$  y una solución completa  $\xi^*$  que está uniformemente acotada fuera de los ejes, así como soluciones completas heteroclínicas entre ellas, es decir, sus componentes son

$$A(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x + y = I; \xi^*(t) \leq x \leq I\}$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Demostración.-** Definiendo  $w(t) = x(t) + y(t)$  y sumando las ecuaciones del sistema (4.1) llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{dw(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} + \frac{dy(t)}{dt} \\ &= D(t)I - D(t)x(t) - a \frac{x(t)}{m+x(t)} y(t) - D(t)y(t) + a \frac{x(t)}{m+x(t)} y(t) \\ &= D(t)I - D(t)[x(t) + y(t)] \\ &= D(t)[I - w(t)]. \end{aligned}$$

Esta ecuación diferencial ordinaria posee un equilibrio  $w^*$  que viene dado por la solución de

$$0 = D(t)[I - w^*],$$

es decir,  $w^* = I$ , incluso cuando  $D(t)$  no es constante.

Se puede demostrar que es atrayente, tanto en el sentido pullback como en el sentido forward, veámoslo. Sea  $w_0 := w(t_0) = x(t_0) + y(t_0)$ , donde  $x(\cdot)$ ,  $y(\cdot)$  denotan la solución de (4.1), con datos iniciales  $(t_0; (x_0(t_0), y_0(t_0)))$ . Entonces, resolviendo la EDO

$$\frac{dw(t)}{dt} = D(t)(I - w(t))$$



obtenemos

$$\begin{aligned}
 w(t) &= w_0 e^{-\int_{t_0}^t D(s) ds} + I e^{-\int_{t_0}^t D(s) ds} \int_{t_0}^t D(s) e^{\int_{t_0}^s D(r) dr} ds \\
 &= w_0 e^{-\int_{t_0}^t D(s) ds} + I e^{-\int_{t_0}^t D(s) ds} \int_{t_0}^t \frac{d}{ds} \left[ e^{\int_{t_0}^s D(r) dr} \right] ds \\
 &= w_0 e^{-\int_{t_0}^t D(s) ds} + I e^{-\int_{t_0}^t D(s) ds} e^{\int_{t_0}^t D(r) dr} \\
 &= w_0 e^{-\int_{t_0}^t D(s) ds} + I,
 \end{aligned}$$

que converge a  $I$  en las dos siguientes situaciones:

(i) cuando  $t_0 \rightarrow -\infty$ , estando  $t$  fijo, y

(ii)  $t \rightarrow \infty$ , estando  $t_0$  fijo,

ya que

$$0 \leq e^{-\int_{t_0}^t D(s) ds} \leq e^{-d_m(t-t_0)} \rightarrow 0$$

en ambos casos.

En virtud del Lema 4.2.1, se tiene que para todo  $\varepsilon > 0$ , el conjunto compacto no vacío

$$B_\varepsilon := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x + y \leq I + \varepsilon\}$$

es positivamente invariante y absorbente en  $\mathbb{R}_+^2$ . Por tanto, el sistema dinámico no autónomo en  $\mathbb{R}_+^2$  generado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (4.1) tiene un atractor pullback

$$\mathcal{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

formado por subconjuntos compactos no vacíos de  $\mathbb{R}_+^2$ .

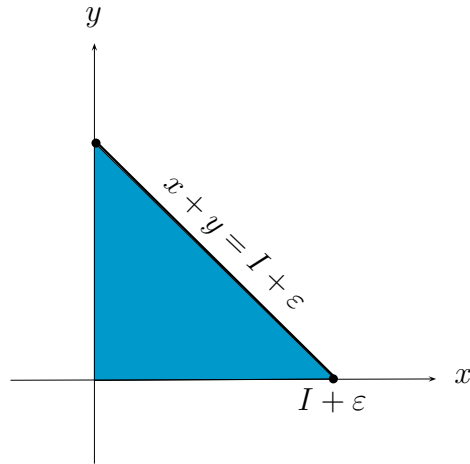


Figura 4.1: Representación gráfica del conjunto  $B_\varepsilon$ .

Los diferentes casos que se distinguen en el teorema que nos ocupa nos proporcionan más información sobre la estructura interna del atractor pullback.

- (i) Debido a que  $w(t) = x(t) + y(t)$  tiende a  $I$  cuando  $t \rightarrow \infty$  en el cuadrante positivo, es suficiente considerar puntos  $(x, y)$  sobre la recta  $x + y = I$  en el cuadrante positivo. Como  $x(t)$  satisface la ecuación correspondiente del sistema (4.1) con  $y(t) = I - x(t) > 0$ , tenemos

$$\frac{dx(t)}{dt} = (I - x(t)) \left( D(t) - a \frac{x(t)}{m + x(t)} \right). \quad (4.2)$$

En efecto, sabemos por (4.1) que  $x(t)$  satisface

$$\frac{dx(t)}{dt} = D(t)(I - x(t)) - a \frac{x(t)}{m + x(t)} y(t),$$

y tenemos  $x(t) + y(t) = I$ , es decir,  $y(t) = I - x(t) > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= D(t)(I - x(t)) - a \frac{x(t)}{m + x(t)} (I - x(t)) \\ &= (I - x(t)) \left( D(t) - a \frac{x(t)}{m + x(t)} \right). \end{aligned}$$

Si  $d_m > a$ , como

$$D \geq d_M \quad \text{y} \quad \frac{x(t)}{m+x(t)} \leq 1,$$

entonces tenemos

$$-\frac{x(t)}{m+x(t)} \geq -1, \quad \text{con lo que} \quad -a\frac{x(t)}{m+x(t)} \geq -a,$$

lo que implica

$$D - a\frac{x(t)}{m+x(t)} \geq D - a \geq d_m - a,$$

por tanto

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= (I - x(t)) \left( D(t) - a\frac{x(t)}{m+x(t)} \right) \\ &\geq (d_m - a)(I - x(t)) > 0, \end{aligned}$$

siempre que  $x(t) \neq I$ . Como  $m > 0$  y

$$a\frac{x(t)}{m+x(t)} \leq a$$

para  $x \geq 0$ , entonces  $x(t)$  crece a  $I$  e  $y(t)$  decrece a 0 a lo largo de esta recta. En efecto, como  $d_m > a$ , entonces  $-d_m < -a$ ; ahora bien,  $D \geq d_m$ , por tanto  $-D \leq -d_m < -a$ , con lo que  $-D < -a$ ; así,

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= -D(t)y(t) + a\frac{x(t)}{m+x(t)}y(t) \\ &< -ay(t) + ay(t) = 0, \end{aligned}$$

es decir,  $y(t)$  es decreciente a 0. Esto significa que todas las soluciones en el cuadrante positivo convergen hacia  $(I, 0)$  asintóticamente.

(ii) Sea  $0 < \varepsilon_1 < I$  suficientemente pequeño; entonces tenemos

$$a\frac{\varepsilon_1}{m+\varepsilon_1} < d_m,$$

y gracias a la primera ecuación del sistema (4.1)

$$\begin{aligned} \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{x=\varepsilon_1} &= \left( D(t) - a \frac{\varepsilon_1}{m + \varepsilon_1} \right) (I - \varepsilon_1) \\ &\geq \left( d_m - a \frac{\varepsilon_1}{m + \varepsilon_1} \right) (I - \varepsilon_1) \\ &> \left( a \frac{\varepsilon_1}{m + \varepsilon_1} - a \frac{\varepsilon_1}{m + \varepsilon_1} \right) (I - \varepsilon_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Además, gracias a la segunda ecuación del sistema (4.1)

$$\frac{dy(t)}{dt} = -D(t)y(t) + a \frac{x(t)}{m + x(t)}y(t),$$

con lo que

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{y=I-\varepsilon_1} &= -D(t)(I - \varepsilon_1) + a \frac{\varepsilon_1}{m + \varepsilon_1}(I - \varepsilon_1) \\ &= - \left( D(t) - a \frac{\varepsilon_1}{m + \varepsilon_1} \right) (I - \varepsilon_1). \end{aligned}$$

Ahora bien,  $I - \varepsilon_1 > 0$  y

$$D(t) - a \frac{\varepsilon_1}{m + \varepsilon_1} > d_m - d_m = 0,$$

con lo que

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{y=I-\varepsilon_1} = - \left( D(t) - a \frac{\varepsilon_1}{m + \varepsilon_1} \right) (I - \varepsilon_1) < 0.$$

En este caso el atractor pullback está formado por subconjuntos  $A(t) = \{(I, 0)\}$  y es también asintóticamente estable en sentido forward, así como atrayente pullback.

Análogamente, por el supuesto de (ii), lo que implica que  $d_M < a$ , se tiene para  $0 < \varepsilon_2 < I - \varepsilon_1$  suficientemente pequeño

$$\frac{a(I - \varepsilon_2)}{m + I - \varepsilon_2} > d_M.$$

De esta forma, de la primera ecuación del sistema (4.1) se tiene, análogamente al caso previamente estudiado,

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{x=I-\varepsilon_2} &= \left( D(t) - a \frac{a(I-\varepsilon_2)}{m+I-\varepsilon_2} \right) \varepsilon_2 \\ &\leq \left( d_M - \frac{a(I-\varepsilon_2)}{m+I-\varepsilon_2} \right) \varepsilon_2 < 0, \end{aligned}$$

y gracias a la segunda ecuación del sistema (4.1), se llega a que

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{y=\varepsilon_2} &= - \left( D(t) - \frac{a(I-\varepsilon_2)}{m+I-\varepsilon_2} \right) \varepsilon_2 \\ &= \left( -D(t) + \frac{a(I-\varepsilon_2)}{m+I-\varepsilon_2} \right) \varepsilon_2 \\ &\geq \left( -d_M + \frac{a(I-\varepsilon_2)}{m+I-\varepsilon_2} \right) \varepsilon_2 > 0. \end{aligned}$$

Combinando estos resultados, podemos ver que el subconjunto compacto

$$\mathcal{B}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} := \{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x + y = I, \varepsilon_1 \leq x \leq I - \varepsilon_2 \}$$

es positivamente invariante y absorbente para el sistema (4.1), restringido a la recta invariante  $x + y = I$  en el cuadrante positivo.

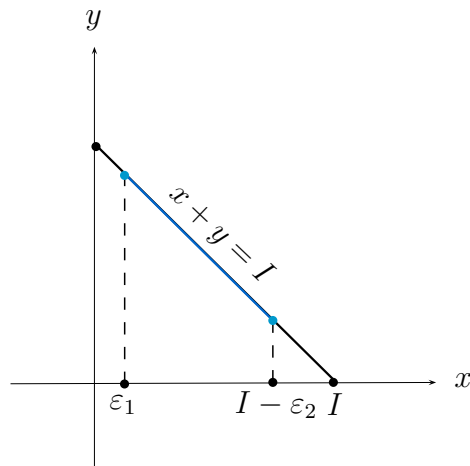


Figura 4.2: Representación gráfica del conjunto  $\mathcal{B}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ .

De esta forma, la teoría de sistemas no autónomos (véase Apeéndice B) asegura que existe un atractor pullback  $\mathcal{A}_{res} = \{A_{res}(t) : t \in \mathbb{R}\}$  en  $\mathcal{B}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ . Como la recta invariante  $x + y = I$  es asintóticamente atrayente para el sistema (4.1) en todo el cuadrante positivo, es decir, es una variedad estable,  $\mathcal{A}$  es el atractor pullback para este sistema sin restringir. Esto incluye la solución de equilibrio axial  $(I, 0)$  y los subconjuntos

$$A(t) = \{(x, y) : x + y = I, \xi^*(t) \leq x \leq I\},$$

$t \in \mathbb{R}$ , en  $\mathbb{R}_+^2$ , donde  $(\xi^*(t), I - \xi^*(t))$  es la solución completa acotada estrictamente positiva con los valores más pequeños de  $x$ . (Alternativamente, podemos expandir  $\mathcal{B}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$  hasta incluir una pequeña banda que cubra la recta invariante y demostrar que éste es un conjunto absorbente para el sistema sin restringir).

(iii) Todas las soluciones de (4.2) con  $0 \leq x \leq I$  satisfacen

$$d_m I - d_M x(t) - aI \leq \frac{dx(t)}{dt} \leq d_M I - d_m x(t). \quad (4.3)$$

En efecto, la primera desigualdad se sigue del hecho de que

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= (I - x(t)) \left( D(t) - a \frac{x(t)}{m + x(t)} \right) \\ &= D(t)(I - x(t)) - a \frac{x(t)}{m + x(t)}(I - x(t)) \\ &= D(t)(I - x(t)) - a \left( 1 - \frac{m}{m + x(t)} \right) (I - x(t)) \\ &= D(t)I - D(t)x(t) - a \underbrace{\left( 1 - \frac{m}{m + x(t)} \right)}_{\leq 1} (I - x(t)) \\ &\geq d_m I - d_M x(t) - a(I - x(t)) \\ &\geq d_m I - d_M x(t) - aI + ax(t) \\ &\geq d_m I - d_M x(t) - aI, \end{aligned}$$

y la segunda de que

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= (I - x(t)) \left( D(t) - a \frac{x(t)}{m + x(t)} \right) \\ &\leq (I - x(t))D(t) = D(t)I - D(t)x(t) \\ &\leq d_M I - d_m x(t). \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\frac{(d_m - a)I}{d_M} \leq x(t) \leq \frac{d_M I}{d_m}. \quad (4.4)$$

En efecto, considerando la inecuación

$$\frac{dx(t)}{dt} \leq d_M I - d_m x(t),$$

que se escribe equivalentemente como

$$\frac{dx(t)}{dt} + d_m x(t) \leq d_M I,$$

basta multiplicar por  $e^{d_m t}$  e integrar para obtener

$$x(t) \leq x(0)e^{-d_m t} + \frac{d_M I}{d_m} (1 - e^{-d_m t}),$$

tal y como hicimos en la demostración de la existencia de atractor global del capítulo tercero de la primera parte. De esta forma,

$$\begin{aligned} x(t) &\leq x(0)e^{-d_m t} + \frac{d_M I}{d_m} (1 - e^{-d_m t}) \\ &\leq Ie^{-d_m t} + \frac{d_M I}{d_m} (1 - e^{-d_m t}) \longrightarrow \frac{d_M I}{d_m}, \end{aligned}$$

para  $t$  suficientemente grande. En consecuencia,

$$x(t) \leq \frac{d_M I}{d_m}.$$

Tratando exactamente igual la inecuación

$$\frac{dx(t)}{dt} \geq d_m I - d_M x(t) - aI,$$

solo que ahora teniendo en cuenta la desigualdad  $x(0) \geq 0$ , obtenemos

$$x(t) \geq \frac{(d_m - a)I}{d_M},$$

tal y como queríamos comprobar.

De esta forma, por una parte, suponiendo  $aI > (I + m)d_M$ , tenemos que

$$\begin{aligned} d_m I - d_M x(t) - aI &< d_m I - d_M x(t) - (I + m)d_M \\ &= -(d_M - d_m)I - d_M x(t) - md_M < 0. \end{aligned}$$

Y, por otra parte,

$$d_M I - d_m x(t) = d_M(I - x(t)) + (d_M - d_m)x(t) > 0.$$

Entonces, para cualesquiera dos soluciones  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  de (4.2),  $\Delta(t) := x_1(t) - x_2(t)$  satisface

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta(t)}{dt} &= \frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt} \\ &= (I - x_1(t)) \left( D(t) - a \frac{x_1(t)}{m + x_1(t)} \right) - (I - x_2(t)) \left( D(t) - a \frac{x_2(t)}{m + x_2(t)} \right) \\ &= \cancel{ID(t)} - x_1(t)D(t) - aI \frac{x_1(t)}{m + x_1(t)} + a \frac{x_1^2(t)}{m + x_1(t)} - \cancel{ID(t)} + x_2(t)D(t) \\ &\quad + aI \frac{x_2(t)}{m + x_2(t)} - a \frac{x_2^2(t)}{m + x_2(t)} \\ &= -D(t)(x_1(t) - x_2(t)) - aI \frac{x_1(t)(m + x_2(t) - x_2(t)(m + x_1(t)))}{(m + x_1(t))(m + x_2(t))} + \\ &\quad + a \frac{x_1^2(t)(m + x_2(t)) - x_2^2(t)(m + x_1(t))}{(m + x_1(t))(m + x_2(t))} \\ &= -D(t)(x_1(t) - x_2(t)) - aI \frac{mx_1(t) + \cancel{x_1(t)x_2(t)} - mx_2(t) - \cancel{x_1(t)x_2(t)}}{(m + x_1(t))(m + x_2(t))} \\ &\quad + a \frac{mx_1^2(t) + x_1^2(t)x_2(t) - mx_2^2(t) - x_1(t)x_2^2(t)}{(m + x_1(t))(m + x_2(t))} \\ &= -D(t)\Delta(t) - \frac{aIm}{(m + x_1(t))(m + x_2(t))}\Delta(t) + a \frac{m(x_1(t) + x_2(t)) + x_1(t)x_2(t)}{(m + x_1(t))(m + x_2(t))}\Delta(t), \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned} (m(x_1(t) + x_2(t)) + x_1(t)x_2(t))\Delta(t) &= (mx_1(t) + mx_2(t) + x_1(t)x_2(t))(x_1(t) - x_2(t)) \\ &= mx_1^2(t) - \cancel{mx_1(t)x_2(t)} + \cancel{mx_1(t)x_2(t)} - mx_2^2(t) + x_1^2(t)x_2(t) - x_1(t)x_2^2(t) \\ &= mx_1^2(t) - mx_2^2(t) + x_1^2(t)x_2(t) - x_1(t)x_2^2(t). \end{aligned}$$



Por (4.4), obtenemos, para  $i = 1, 2$ ,

$$x_i(t) \leq \frac{d_M I}{d_m},$$

entonces

$$m + x_i(t) \leq m + \frac{d_M I}{d_m},$$

por tanto,

$$(m + x_1(t))(m + x_2(t)) \leq \left(m + \frac{d_M I}{d_m}\right)^2$$

y, por ende,

$$-\frac{amI}{(m + x_1(t))(m + x_2(t))} \leq -\frac{amI}{\left(m + \frac{d_M I}{d_m}\right)^2}.$$

Además,

$$\begin{aligned} m(x_1(t) + x_2(t)) + x_1(t)x_2(t) &= mx_1(t) + mx_2(t) + x_1(t)x_2(t) \\ &< m^2 + mx_1(t) + mx_2(t) + x_1(t)x_2(t) \\ &= (m + x_1(t))(m + x_2(t)), \end{aligned}$$

con lo que

$$\frac{m(x_1(t) + x_2(t)) + x_1(t)x_2(t)}{(m + x_1(t))(m + x_2(t))} < 1.$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta(t)}{dt} &= -D(t)\Delta(t) - \frac{amI}{(m + x_1(t))(m + x_2(t))}\Delta(t) \\ &\quad + a\frac{m(x_1(t) + x_2(t)) + x_1(t)x_2(t)}{(m + x_1(t))(m + x_2(t))}\Delta(t) \\ &< -d_m\Delta(t) - \frac{amI}{\left(m + \frac{d_M I}{d_m}\right)^2}\Delta(t) + a\Delta(t), \end{aligned}$$

con lo que  $\Delta(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , siempre y cuando

$$d_m + \frac{amI}{\left(m + \frac{d_M I}{d_m}\right)^2} > a,$$

es decir, cuando

$$a < \frac{d_m(md_m + d_M I)^2}{(md_m + d_M I)^2 - mI d_m^2}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} a &< d_m + \frac{amI}{\left(m + \frac{d_M I}{d_m}\right)^2} = d_m + \frac{amI}{m^2 + \frac{d_M^2 I^2}{d_m^2} + 2m\frac{d_M I}{d_m}} \\ &= d_m + \frac{amI}{\frac{d_m^2 m^2 + d_M^2 I^2 + 2md_M d_m I}{d_m^2}} \\ &= d_m + \frac{amI d_m^2}{d_m^2 m^2 + d_M^2 I^2 + 2md_M d_m I}; \end{aligned}$$

entonces

$$a - \frac{amI d_m^2}{d_m^2 m^2 + d_M^2 I^2 + 2md_M d_m I} < d_m,$$

es decir,

$$a \left(1 - \frac{mI d_m^2}{d_m^2 m^2 + d_M^2 I^2 + 2md_M d_m I}\right) < d_m,$$

con lo que

$$a \frac{d_m^2 m^2 + d_M^2 I^2 + 2md_M d_m I - mI d_m^2}{d_m^2 m^2 + d_M^2 I^2 + 2md_M d_m I} < d_m,$$

por tanto, se concluye que

$$a < \frac{d_m(d_m^2 m^2 + d_M^2 I^2 + 2md_M d_m I)}{d_m^2 m^2 + d_M^2 I^2 + 2md_M d_m I - mI d_m^2},$$

o lo que es lo mismo,

$$a < \frac{d_m(md_m + d_M I)^2}{(md_m + d_M I)^2 - mI d_m^2}.$$

Esto se cumple si  $a < d_m$  como en el caso (1). Sin embargo, puede también cumplirse si  $a$  es ligeramente mayor que  $d_m$ . En este caso el límite pullback para condiciones iniciales estrictamente positivas del sistema escalar (4.2) es uniformemente estrictamente contractivo [38],[39] en  $(0, I)$  y existe una solución completa  $\xi^*(t) \in (0, I)$ , que es también asintóticamente estable en el sentido forward usual. El correspondiente atractor pullback  $\mathcal{A}_1$  de este sistema en  $[0, I]$  incluye el equilibrio  $I$  y los conjuntos  $A_1(t) = [\xi^*(t), I]$ , para cada  $t \in \mathbb{R}$ , es decir, incluye las trayectorias heteroclínicas que unen los *equilibrios*  $\xi^*(t)$  y  $I$ . Para el sistema 2-dimensional (4.1) el atractor pullback  $\mathcal{A}$  está formado por los conjuntos

$$A(t) = \{(x, y) : x + y = I; \xi^*(t) \leq x \leq I\}$$

en  $\mathbb{R}_+^2$ , para  $t \in \mathbb{R}$ .

■

### 4.3. Modelo con pared.

Estudiaremos en esta sección lo que ocurre cuando hacemos variar el ratio de consumo de nutriente en el modelo con pared. Cuando  $I$  es constante y  $D$  varía en tiempo, el modelo que tenemos es el siguiente

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= D(t)(I - x(t)) - a \frac{x(t)}{m + x(t)}(y_1(t) + y_2(t)) + b\nu y_1(t), \\ \frac{dy_1(t)}{dt} &= -(\nu + D(t))y_1(t) + c \frac{x(t)}{m + x_1(t)}y_1(t) - r_1 y_1(t) + r_2 y_2(t), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} &= -\nu y_2(t) + c \frac{x(t)}{m + x(t)}y_2(t) + r_1 y_1(t) - r_2 y_2(t), \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde recordamos que  $a$  es el ratio máximo de crecimiento específico,  $c$  representa el ratio de crecimiento de las especies consumidoras, con lo que  $a \geq c$ ;  $m$  es la constante de saturación del medio de consumo;  $r_1, r_2$  representan los ratios con los que las especies pasan de estar en el medio a estar en la pared, o viceversa;  $\nu$  denota el ratio de muerte colectiva de  $y$ ; y  $b$  describe la fracción de biomasa muerta que es reciclada.

Como las variables  $x, y_1, y_2$  representan concentraciones, es claro que suponemos condiciones iniciales no negativas:

$$x(t_0) = x_0; \quad y_1(t_0) = y_{10}; \quad y_2(t_0) = y_{20}.$$

**Lema 4.3.1** *Supongamos que  $(x_0, y_{10}, y_{20}) \in \mathbb{R}_+^3 := \{(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}$ . Entonces todas las soluciones del sistema (4.5) correspondientes a datos iniciales en  $\mathbb{R}_+^3$  son*

- (i) *no negativas para todo  $t > t_0$ ;*
- (ii) *uniformemente acotadas en  $\mathbb{R}_+^3$ .*

*Además, el sistema dinámico no autónomo sobre  $\mathbb{R}_+^3$  generado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (4.5) tiene un atráctor pullback  $\mathcal{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$  en  $\mathbb{R}_+^3$ .*

#### **Demostración.-**

- (i) Por continuidad, cada solución tiene que tomar el valor 0 antes de tomar cualquier valor negativo. Con  $x = 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ , la ecuación diferencial ordinaria para  $x(t)$  se reduce a

$$\frac{dx(t)}{dt} = D(t)I + b\nu y_1(t) > 0,$$

con lo que  $x(t)$  es estrictamente creciente en  $x = 0$ . Con  $y_1 = 0, x \geq 0, y_2 \geq 0$ , la EDO reducida para  $y_1(t)$  es

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = r_2 y_2 \geq 0,$$

con lo que  $y_1(t)$  es no decreciente en  $y_1 = 0$ . De forma similar, con  $y_2 = 0, x \geq 0, y_1 \geq 0$ , la EDO reducida para  $y_2(t)$  es

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = r_1 y_1(t) \geq 0,$$

con lo que  $y_2(t)$  también es no decreciente en  $y_2 = 0$ . Además,  $(x(t), y_1(t), y_2(t)) \in \mathbb{R}_+^3$  para cualquier instante de tiempo  $t$ .

- (ii) Definimos, para  $X(t) = (x(t), y_1(t), y_2(t)) \in \mathbb{R}_+^3$ ,

$$\|X(t)\|_1 := x(t) + y_1(t) + y_2(t).$$

Entonces  $\|X(t)\|_1 \leq S(t) \leq \frac{a}{c}\|X(t)\|_1$ , donde

$$S(t) = x(t) + \frac{a}{c}(y_1(t) + y_2(t)).$$

En efecto, sabemos que  $0 < c \leq a$ , con lo que  $a/c \geq 1$ . De esta forma,

$$\begin{aligned} \|X(t)\|_1 &= x(t) + y_1(t) + y_2(t) \leq x(t) + \frac{a}{c}(y_1(t) + y_2(t)) \\ &= S(t) = x(t) + \frac{a}{c}(y_1(t) + y_2(t)) \\ &\leq \frac{a}{c}(x(t) + y_1(t) + y_2(t)) = \frac{a}{c}\|X(t)\|_1. \end{aligned}$$

Derivando  $S(t)$  a lo largo de soluciones del sistema (4.5) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} + \frac{a}{c} \frac{dy_1(t)}{dt} + \frac{a}{c} \frac{dy_2(t)}{dt} \\ &= D(t)I - D(t)x(t) - a \frac{x(t)}{m+x(t)}(y_1(t) + y_2(t)) + b\nu y_1(t) - \frac{a}{c}(\nu + D(t))y_1(t) \\ &\quad + \frac{ax(t)}{m+x(t)}y_1(t) - \frac{r_1 a}{c}y_1(t) + \frac{r_2 a}{c}y_2(t) - \frac{a\nu}{c}y_2(t) \\ &\quad + \frac{ax(t)}{m+x(t)}y_2(t) + \frac{a}{c}r_1 y_1(t) - \frac{a}{c}r_2 y_2(t) \\ &= D(t)[I - x(t)] - \left[ \frac{a}{c}(\nu + D(t)) - b\nu \right] y_1(t) - \frac{a}{c}\nu y_2(t) \\ &\leq d_M I - d_m x(t) - \left[ \frac{a}{c}(\nu + d_m) - b\nu \right] y_1(t) - \frac{a}{c}\nu y_2(t). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Notamos que  $0 < c \leq a$  y  $0 < b < 1$ , entonces

$$\frac{a}{c}(\nu + d_m) - b\nu \geq \nu + d_m - b\nu > \nu + d_m - \nu = d_m.$$

Sea  $\mu := \min\{d_m, \nu\}$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &\leq d_M I - d_m x(t) - \left[ \frac{a}{c}(\nu + d_m) - b\nu \right] y_1(t) - \frac{a}{c}\nu y_2(t) \\ &< d_M I - d_m x(t) - d_m y_1(t) - \nu y_2(t) \\ &\leq d_M I - \mu\{x(t) + y_1(t) + y_2(t)\} \\ &= d_M I - \mu S(t). \end{aligned}$$

De esta forma llegamos a

$$\frac{dS(t)}{dt} < d_M I - \mu S(t). \quad (4.7)$$

Tratando esta inecuación exactamente como hicimos en la demostración de (iii) del Teorema 4.2.1, llegamos a

$$\frac{d}{dt} [e^{\mu t} S(t)] < d_M I e^{\mu t}.$$

Integrando entre  $t_0$  y  $t$  obtenemos

$$\begin{aligned} e^{\mu t} S(t) - S(t_0) &< \frac{d_M I}{\mu} [e^{\mu t} - e^{\mu t_0}] \\ &< \frac{d_M I}{\mu} (e^{\mu t} - 1), \end{aligned}$$

dato que  $t_0 \geq 0$ . Si continuamos realizando cuentas tal como en la demostración de (iii) del Teorema 4.2.1, llegamos a

$$S(t) < S(t_0)e^{-\mu t} + \frac{d_M I}{\mu} \underbrace{(1 - e^{-\mu t})}_{\geq 0}.$$

Así, si  $S(t_0) < \frac{d_M I}{\mu}$ , entonces

$$\begin{aligned} S(t) &< \frac{d_M I}{\mu} e^{-\mu t} + \frac{d_M I}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) \\ &< \cancel{\frac{d_M I}{\mu} e^{-\mu t}} + \frac{d_M I}{\mu} - \cancel{\frac{d_M I}{\mu} e^{-\mu t}} \\ &= \frac{d_M I}{\mu}, \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

Por otra parte, si  $S(t_0) \geq \frac{d_M I}{\mu}$ , entonces

$$\begin{aligned} S(t) &< S(t_0)e^{-\mu t} + S(t_0)(1 - e^{-\mu t}) \\ &= \cancel{S(t_0)e^{-\mu t}} + S(t_0) - \cancel{S(t_0)e^{-\mu t}} \\ &= S(t_0), \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

En resumen, si  $S(t_0) < \frac{d_M I}{\mu}$ , entonces  $S(t) < \frac{d_M I}{\mu}$  para todo  $t \geq t_0$ . Por otro lado, si  $S(t_0) \geq \frac{d_M I}{\mu}$ , entonces  $S(t)$  será no creciente para todo  $t \geq t_0$ , con lo que  $S(t) < S(t_0)$ . Entonces implica que  $\|X(t)\|_1$  está acotada superiormente, es decir,

$$\|X(t)\|_1 \leq \max \left\{ \frac{d_M I}{\mu}, x(t_0) + \frac{a}{c}(y_1(t_0) + y_2(t_0)) \right\},$$

para todo  $t \geq t_0$ .

Se sigue entonces que para todo  $\varepsilon > 0$ , el conjunto compacto no vacío

$$\mathcal{B}_\varepsilon := \left\{ (x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^3 : x + \frac{a}{c}(y_1 + y_2) \leq \frac{d_M I}{\mu} + \varepsilon \right\}$$

es positivamente invariante y absorbente en  $\mathbb{R}_+^3$ . El sistema dinámico no autónomo en  $\mathbb{R}_+^3$  generado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (4.5) tiene por tanto un atractor pullback  $\mathcal{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ , que consiste en subconjuntos compactos no vacíos de  $\mathbb{R}_+^3$  tal que están contenidos en  $\mathcal{B}_\varepsilon$ . ■

Para obtener más información sobre la estructura interna del atractor pullback del sistema no autónomo generado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (4.5), hacemos el cambio de variables

$$\alpha(t) = \frac{y_1(t)}{y_1(t) + y_2(t)}, \quad z(t) = y_1(t) + y_2(t), \quad (4.8)$$

tal y como hicimos en el estudio que realizamos para la primera parte del trabajo. De esta forma, y análogamente a lo que hicimos allí, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= D(t)(I - x(t)) - a \frac{x(t)}{m + x(t)} z(t) + b\nu\alpha(t)z(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= -\nu z(t) - D(t)\alpha(t)z(t) + c \frac{x(t)}{m + x(t)} z(t), \\ \frac{d\alpha(t)}{dt} &= -D(t)\alpha(t)(1 - \alpha(t)) - r_1\alpha(t) + r_2(1 - \alpha(t)). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Observemos que el punto de equilibrio  $(I, 0, 0)$  del sistema (4.5) no cuenta para el sistema (4.9), ya que  $\alpha$  no está definido para él. Por otra parte,  $(I, 0)$  es un equilibrio para las dos primeras ecuaciones del sistema (4.9).

### 4.3.1. Dinámica global de $\alpha(t)$ .

Observamos que la dinámica de  $\alpha(t) = \alpha(t, t_0, \alpha_0)$  está desacoplada de  $x(t)$  y  $z(t)$ , y satisface la ecuación de Ricatti que aparece como tercera ecuación del sistema (4.9). Para cualesquiera  $y_1, y_2$  positivos, tenemos  $0 < \alpha(t) < 1$  para todo  $t$ . Recordemos que

$$\alpha'|_{\alpha=0} = r_2 > 0 \quad \text{y} \quad \alpha'|_{\alpha=1} = -r_1 < 0,$$

con lo que el intervalo  $(0, 1)$  es positivamente invariante, tal y como estudiamos con anterioridad en el trabajo. Ésta es la región biológicamente relevante.

Cuando  $D$  es constante, ya estudiamos que existe un único punto crítico  $\alpha^* \in (0, 1)$ , dado por

$$\alpha^* := \frac{D + r_1 + r_2 - \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2}}{2D} \quad (4.10)$$

Queremos ahora tratar el caso en que  $D$  varía en tiempo, aleatoria o periódicamente, en un intervalo positivo y acotado  $D(t) \in [d_m, d_M]$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . En este caso necesitamos hablar de atractores pullback aleatorios o determinísticos  $\mathcal{A}_\alpha = \{A_\alpha(t) : t \in \mathbb{R}\}$  en el intervalo  $(0, 1)$ . Tal atractor existe, ya que el intervalo unidad es positivamente invariante, con lo que sus componentes están dadas por

$$A_\alpha(t) = \bigcap_{t_0 < t} \alpha(t, t_0, [0, 1]), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Estas componentes son de la forma

$$A_\alpha = [\alpha_l^*(t), \alpha_u^*(t)],$$

donde  $\alpha_l^*(t)$  y  $\alpha_u^*(t)$  son soluciones completas y acotadas para la ecuación de Ricatti. El resto de soluciones completas y acotadas se encuentran entre ellas.

Podemos usar inecuaciones diferenciales para obtener cotas de estas soluciones completas. Para ello, lo primero que hacemos es reescribir la ecuación de Ricatti del sistema (4.9) de la forma

$$\alpha'(t) = D(t)(\alpha^2(t) - \alpha(t)) - (r_1 + r_2)\alpha(t) + r_2, \quad (4.11)$$

tal y como justificamos en estudios de capítulos previos.

Como  $\alpha(t) < 1$  y  $D(t) > 0$ , entonces

$$\alpha'(t) \leq -(r_1 + r_2)\alpha(t) + r_2.$$

Así,  $\alpha(t) \leq \beta(t)$ , con  $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ , donde

$$\beta'(t) = -(r_1 + r_2)\beta(t) + r_2.$$



Esta EDO tiene un punto estacionario asintóticamente estable, dado por

$$\beta^* = \frac{r_2}{r_1 + r_2},$$

con lo que las soluciones completas de la ecuación de Ricatti del sistema (4.9) se encuentran (menos una cantidad infinitesimal) por debajo, es decir,  $\alpha_u^*(t) \leq \beta^*$  para  $t \in \mathbb{R}$ . Esto nos proporciona una cota superior. Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= D(t)\alpha^2(t) - (D(t) + r_1 + r_2)\alpha(t) + r_2 \\ &\geq -(d_M + r_1 + r_2)\alpha(t) + r_2. \end{aligned}$$

Así,  $\alpha(t) \geq \gamma(t)$ , con  $\alpha(t_0) = \gamma(t_0)$ , donde

$$\gamma'(t) = -(d_M + r_1 + r_2)\gamma(t) + r_2.$$

Esta EDO tiene un punto crítico asintóticamente estable, dado por

$$\gamma^* := \frac{r_2}{r_1 + r_2 + d_M}.$$

En este caso obtenemos una cota inferior  $\alpha_l^*(t) \geq \gamma^*$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . En resumen,

$$\mathcal{A}(t) = [\alpha_l^*(t), \alpha_u^*(t)] \subset [\gamma^*, \beta^*].$$

Para investigar el caso en que el atractor pullback se compone de una única solución completa, necesitamos encontrar condiciones bajo las cuales

$$\alpha_l^*(t) \equiv \alpha_u^*(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Supongamos que no son iguales y consideremos su diferencia  $\Delta_\alpha(t) := \alpha_u^*(t) - \alpha_l^*(t)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \Delta'_\alpha(t) &= D(t)(\alpha_u^{*2}(t) - \alpha_l^{*2}(t)) - (r_1 + r_2)\alpha_u^*(t) + r_2 \\ &\quad - D(t)(\alpha_l^{*2}(t) - \alpha_l^*(t)) + (r_1 + r_2)\alpha_l^*(t) - r_2 \\ &= D(t)\alpha_u^{*2}(t) - D(t)\alpha_l^{*2}(t) - (r_1 + r_2)\alpha_u^*(t) \\ &\quad - D(t)\alpha_l^{*2}(t) + D(t)\alpha_l^*(t) + (r_1 + r_2)\alpha_l^*(t) \\ &= D(t)(\alpha_u^{*2}(t) - \alpha_l^{*2}(t)) - (D(t) + r_1 + r_2)(\alpha_u^*(t) - \alpha_l^*(t)) \\ &= D(t)(\alpha_u^*(t) + \alpha_l^*(t))(\alpha_u^*(t) - \alpha_l^*(t)) - (D(t) + r_1 + r_2)(\alpha_u^*(t) - \alpha_l^*(t)) \\ &= D(t)(\alpha_u^*(t) + \alpha_l^*(t))\Delta_\alpha(t) - (D(t) + r_1 + r_2)\Delta_\alpha(t) \\ &\leq 2d_M\alpha_u^*(t)\Delta_\alpha(t) - (d_m + r_1 + r_2)\Delta_\alpha(t) \\ &\leq 2d_M\beta^*\Delta_\alpha(t) - (d_m + r_1 + r_2)\Delta_\alpha(t) \\ &= \frac{2d_M r_2}{r_1 + r_2}\Delta_\alpha(t) - (d_m + r_1 + r_2)\Delta_\alpha(t) \\ &= \left( \frac{2d_M r_2}{r_1 + r_2} - d_m - r_1 - r_2 \right) \Delta_\alpha(t). \end{aligned}$$

Así,

$$0 \leq \Delta_\alpha(t) \leq \exp \left[ \left( \frac{2d_M r_2}{r_1 + r_2} - d_m - r_1 - r_2 \right) (t - t_0) \right] \Delta_\alpha(t_0) \longrightarrow 0,$$

cuando  $t \longrightarrow \infty$ , siempre y cuando

$$\frac{2d_M r_2}{r_1 + r_2} - d_m - r_1 - r_2 < 0,$$

lo que es equivalente a

$$2d_M r_2 < d_m(r_1 + r_2) + (r_1 + r_2)^2.$$

Operando con esta desigualdad tenemos

$$d_M < \frac{d_m}{2r_2}(r_1 + r_2) + \frac{1}{2r_2}(r_1 + r_2)^2,$$

pero como  $d_m < d_M$  y  $r_1 + r_2 > 0$ , entonces

$$d_M < \frac{d_M}{2r_2}(r_1 + r_2) + \frac{1}{2r_2}(r_1 + r_2)^2,$$

o, lo que es lo mismo,

$$2r_2 d_M < d_M(r_1 + r_2) + (r_1 + r_2)^2,$$

es decir,

$$2r_2 d_M - r_1 d_M - r_2 d_M < (r_1 + r_2)^2,$$

pero volviendo a operar

$$r_2 d_M - r_1 d_M < (r_1 + r_2)^2,$$

con lo que

$$d_M(r_2 - r_1) < (r_1 + r_2)^2.$$

De esta forma, esencialmente, tenemos impuesta una restricción en la longitud del intervalo en el que se mueve  $D(t)$ , a no ser que  $r_1 < r_2$ , en cuyo caso  $r_2 - r_1 < 0$ , con lo que

$$d_M > \frac{(r_1 + r_2)^2}{r_2 - r_1} > 0.$$

Si tenemos  $r_1 > r_2$ , entonces  $r_2 - r_1 > 0$  y

$$d_M < \frac{(r_1 + r_2)^2}{r_2 - r_1}.$$

Notar que  $\alpha^*(t)$  es también asintóticamente estable en el sentido forward en este caso.

### 4.3.2. Dinámica global de $x(t)$ y $z(t)$ .

Supongamos que  $\alpha^*(t)$  es la única solución completa del atractor pullback de la EDO de Ricatti que aparece en la tercera ecuación del sistema (4.9). Entonces  $\alpha^*(t) \in [\gamma^*, \beta^*] \subset (0, 1)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Además, para  $t$  suficientemente grande,  $x(t)$  y  $z(t)$  satisfacen

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= D(t)(I - x(t)) - a\frac{x(t)}{m + x(t)}z(t) + b\nu\alpha^*(t)z(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= -\nu z(t) - D(t)\alpha^*(t)z(t) + c\frac{x(t)}{m + x(t)}z(t).\end{aligned}\tag{4.12}$$

El sistema (4.12) tiene un equilibrio  $(I, 0)$ . Por tanto  $(I, 0, \alpha^*(t))$  puede considerarse como un *equilibrio* no autónomo del sistema (4.9).

**Teorema 4.3.1** *Supongamos que  $D : \mathbb{R} \rightarrow [d_m, d_M]$ , con  $0 < d_m < d_M < \infty$ , es continua,  $a \geq c$ ,  $b \in (0, 1)$  y  $\nu > 0$ . Entonces, el sistema (4.12) tiene un atractor pullback  $\mathcal{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$  dentro del cuadrante positivo. Además,*

(i) Cuando

$$\nu + d_m\gamma^* > c,$$

*el equilibrio axial  $(I, 0)$  es asintóticamente estable en el cuadrante positivo y el atractor pullback  $\mathcal{A}$  tiene una única componente  $A(t) = \{(I, 0)\}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

(ii) Cuando

$$\nu + d_M\beta^* < \frac{cd_m I}{m(a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^*) + d_m I}$$

*el atractor pullback  $\mathcal{A}$  también contiene puntos estrictamente dentro del cuadrante positivo, además del punto  $\{(I, 0)\}$ .*

#### Demostración.-

(i) Cuando  $\nu + d_m\gamma^* \geq c$ ,  $z(t)$  satisface

$$\frac{dz(t)}{dt} = -\left(\nu + D(t)\alpha^*(t) - c\frac{x(t)}{m + x(t)}\right)z(t),$$

donde

$$\nu + D(t)\alpha^*(t) - c\frac{x(t)}{m+x(t)} > \nu + d_m\gamma^* - c \geq 0.$$

Así,  $z(t)$  decrece a 0 a medida que  $t$  tiende a infinito. Como consecuencia,  $x(t)$  satisface, para valores grandes de  $t$ ,

$$\frac{dx(t)}{dt} = D(t)(I - x(t)).$$

Entonces

$$x(t) = x(t_0)e^{-\int_{t_0}^t D(s)ds} + I,$$

que converge a  $I$  cuando  $t \rightarrow \infty$  o  $t_0 \rightarrow -\infty$ . Observemos que, en vista de la definición de la transformación  $\alpha$ , no es posible tener  $z = 0$ , al hacer la transformación desde el sistema original (4.12), aunque este sistema tiene un equilibrio análogo  $(I, 0, 0)$  en sus variables  $(x, y_1, y_2)$ .

(ii) Sea  $u(t) := x(t) + z(t)$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} + \frac{dz(t)}{dt} \\ &= D(t)(I - x(t)) - a\frac{x(t)}{m+x(t)}z(t) + b\nu\alpha^*(t)z(t) \\ &\quad - \nu z(t) - D(t)\alpha^*(t)z(t) + c\frac{x(t)}{m+x(t)}z(t) \\ &= D(t)(I - x(t)) + (c - a)\frac{x(t)}{m+x(t)}z(t) + b\nu\alpha^*(t)z(t) \\ &\quad - \nu z(t) - D(t)\alpha^*(t)z(t). \end{aligned}$$

Por un lado, como  $c \leq a$ , entonces  $c - a \leq 0$ , con lo que

$$\frac{du(t)}{dt} \leq D(t)(I - x(t)) - (\nu + D(t)\alpha^*(t) - b\nu\alpha^*(t))z(t)$$

Como  $0 < \alpha^*(t) < 1$  y  $0 < b < 1$ , entonces

$$\nu - b\nu\alpha^*(t) > \nu - b\nu > \nu - \nu = 0.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &< D(t)I - D(t)x(t) - D(t)\alpha^*(t)z(t) \\ &< D(t)I - D(t)\alpha^*(t)u(t) \\ &\leq d_M I - d_m \gamma^* u(t).\end{aligned}$$

Por otro lado, como

$$\frac{x(t)}{m + x(t)} \leq 1 \quad \text{y} \quad c \leq a,$$

entonces  $c - a \leq 0$ , con lo que

$$(c - a) \frac{x(t)}{m + x(t)} \geq c - a.$$

De esta forma, teniendo en cuenta que  $0 < \alpha^*(t) < 1$  y  $\alpha^*(t) \in [\gamma^*, \beta^*]$ , se tiene

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &\geq D(t)(I - x(t)) - (a - c + \nu + D(t)\alpha^*(t) - b\nu\alpha^*(t))z(t) \\ &\geq D(t)I - D(t)x(t) - (a - c + \nu + D(t) - b\nu\beta^*)z(t)\end{aligned}$$

También podemos comprobar que

$$-D(t)x(t) > -ax(t) + cx(t) - \nu x(t) - D(t)x(t) + b\nu\beta^*x(t),$$

pues

$$-ax(t) + cx(t) = (c - a)x(t) \leq 0$$

y, como  $0 < b < 1$  y  $\beta^* < 1$ , entonces

$$-\nu x(t) + b\nu\beta^*x(t) = (-\nu + b\nu\beta^*)x(t) < (-\nu + \nu)x(t) = 0,$$

con lo que

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &> D(t)I - (a - c + \nu + D(t) - b\nu\beta^*)u(t) \\ &\geq d_m I - (a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^*)u(t).\end{aligned}$$

Además, tenemos las siguientes cotas superior e inferior para  $u(t)$

$$q_1 I := \frac{d_m I}{a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^*} < u(t) < \frac{d_M I}{d_m \gamma^*} =: q_2 I. \quad (4.13)$$

Notemos que  $q_1 < 1$  y  $q_2 > 1$ . Para ver la primera de las desigualdades debemos demostrar

$$\frac{d_m}{a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^*} < 1,$$

o lo que es lo mismo

$$a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^* > d_m.$$

Como  $c \leq a$ , entonces  $a - c \geq 0$ ; además, por otro lado, como  $0 < b < 1$  y  $0 < \beta^* < 1$ , entonces

$$\begin{aligned} a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^* &> a - c + \nu + d_M - \nu \\ &= a - c + d_M \geq d_M \geq d_m, \end{aligned}$$

con lo que  $q_1 < 1$ .

Para demostrar que  $q_2 > 1$ , basta tener en cuenta que  $0 < \gamma^* < 1$ ; así,

$$d_m \gamma^* < d_m \leq d_M, \quad \text{entonces} \quad q_2 > \frac{d_M}{d_m} = 1.$$

Ahora, para  $\varepsilon > 0$ , definimos  $T_\varepsilon$  como el trapecoide

$$T_\varepsilon := \{(x, z) \in \mathbb{R}_+^2 : x \geq \varepsilon, z \geq \varepsilon, q_1 I \leq x + z \leq q_2 I\},$$

entonces  $T_\varepsilon$  es absorbente. Demostremos que es invariante.

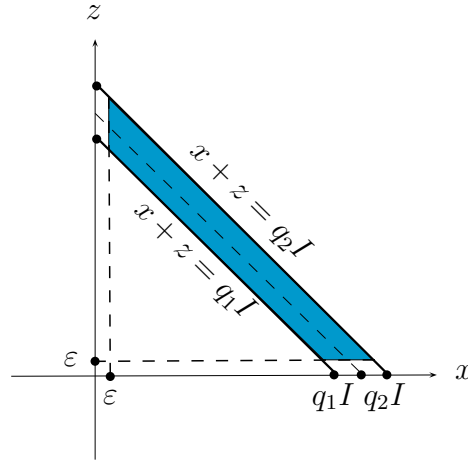


Figura 4.3: Representación gráfica del conjunto  $T_\varepsilon$ .

En primer lugar, notamos que la función

$$f(x) = a \frac{x}{m+x}$$

es creciente en  $[0, +\infty)$ ; para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, tenemos

$$\frac{a\varepsilon}{m+\varepsilon} < b\nu\gamma^*,$$

por tanto

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{x=\varepsilon} = D(t)(I - \varepsilon) + \left( b\nu\alpha^*(t) - \frac{a\varepsilon}{m+\varepsilon} \right) z(t) > 0. \quad (4.14)$$

En segundo lugar, la condición

$$\nu + d_M\beta^* < \frac{cd_m I}{m(a-c+\nu+d_M-b\nu\beta^*)+d_m I}$$

es equivalente a

$$\nu + d_M\beta^* < \frac{cq_1 I}{m+q_1 I}.$$

En efecto,

$$q_1 = \frac{d_m}{a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^*},$$

con lo que

$$\begin{aligned} \frac{cq_1 I}{m + q_1 I} &= \frac{\frac{cId_m}{a-c+\nu+d_M-b\nu\beta^*}}{m + \frac{d_m I}{a-c+d_M-b\nu\beta^*}} \\ &= \frac{\frac{cId_m}{a-c+\nu+d_M-b\nu\beta^*}}{\frac{m(a-c+d_M-b\nu\beta^*)+d_M I}{a-c+\nu+d_M-b\nu\beta^*}} \\ &= \frac{cId_m}{m(a-c+d_M-b\nu\beta^*)+d_M I}. \end{aligned}$$

Así, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño

$$\begin{aligned} \left. \frac{dz(t)}{dt} \right|_{z=\varepsilon} &= \left( -\nu - D(t)\alpha^*(t) + c\frac{x(t)}{m+x(t)} \right) \varepsilon \\ &> \left( -\nu - d_M\beta^* + \frac{c(q_1 I - \varepsilon)}{m + q_2 I - \varepsilon} \right) \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Las desigualdades (4.14), (4.15), junto con

$$\left. \frac{d(x(t) + z(t))}{dt} \right|_{x+z=q_1 I} > 0 \quad \text{y} \quad \left. \frac{d(x(t) + z(t))}{dt} \right|_{x+z=q_2 I} < 0, \quad (4.16)$$

aseguran la invariancia positiva del conjunto compacto  $T_\varepsilon$  y la existencia de un atractor pullback

$$\mathcal{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

en  $T_\varepsilon$ .

Vamos a demostrar, para concluir la demostración de este Teorema, las desigualdades (4.16). Por un lado



$$\begin{aligned}
\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{u=q_1 I} &> d_m I - (a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^*)q_1 I \\
&= I [d_m - (a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^*)q_1] \\
&= \left[ \frac{d_m - (a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^*)q_1}{a - c + \nu + d_M - b\nu\beta^*} \right] \\
&= I[d_m - d_m] = 0.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

De esta forma,

$$\left. \frac{d(x(t) + z(t))}{dt} \right|_{x+z=q_1 I} = \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{u=q_1 I} > 0.$$

Análogamente tenemos la segunda desigualdad.

$$\begin{aligned}
\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{u=q_2 I} &< d_M I - d_m \gamma^* q_2 I = I(d_M - d_m \gamma^* q_2) \\
&= I \left( d_M - d_m \gamma^* \frac{d_M}{d_m \gamma^*} \right) = I(d_M - d_M) = 0,
\end{aligned}$$

con lo que

$$\left. \frac{d(x(t) + z(t))}{dt} \right|_{x+z=q_2 I} = \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{u=q_2 I} < 0.$$

■

Desafortunadamente, en esta ocasión no somos capaces de obtener la existencia de una solución completa estable que atraiga a todas las soluciones completas positivas como se hizo en el caso del modelo sin crecimiento en pared.



# Capítulo 5

## Ratio de concentración de nutriente variable.

### 5.1. Introducción.

Estudiamos en este capítulo el caso en el que el ratio de consumo de nutriente es constante, pero el ratio de concentración del mismo es variable. Aquí vamos a suponer que el ratio de concentración de nutriente  $I$  puede variar de forma continua con el paso del tiempo, por lo que lo denotaremos por  $I(t)$ . De forma similar a como hicimos en el capítulo anterior, suponemos que  $I$  está acotada con valores positivos, en particular,  $I(t) \in [i_m, i_M]$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , donde  $0 < i_m < i_M < \infty$ .

En el resto del capítulo trataremos en primer lugar el caso del modelo sin pared para, posteriormente, introducir los nuevos cambios al modelo en el que permitimos crecimiento en pared.

### 5.2. Modelo sin pared.

Consideramos en esta sección el caso del modelo sin pared, donde el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que estudiaremos es el siguiente

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= D(I(t) - x(t)) - a\frac{x(t)}{m + x(t)}y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -Dy(t) + a\frac{x(t)}{m + x(t)}y(t).\end{aligned}\tag{5.1}$$

Sea  $w(t) := x(t) + y(t)$ . Entonces

$$\frac{dw(t)}{dt} = D(I(t) - w). \quad (5.2)$$

Esta ecuación no tiene equilibrios cuando  $I(t)$  no es constante, pero tiene un *equilibrio* no autónomo no trivial<sup>1</sup> que es tanto atrayente pullback como forward:

$$\begin{aligned} w(t) &= w(t_0)e^{-D(t-t_0)} + De^{-D(t-t_0)} \int_{t_0}^t I(s)e^{D(s-t_0)} ds \\ &= w(t_0)e^{-D(t-t_0)} + De^{-Dt} \int_{t_0}^t I(s)e^{Ds} ds, \end{aligned}$$

que converge a

$$w^*(t) = De^{-Dt} \int_{-\infty}^t I(s)e^{Ds} ds$$

cuando  $t_0 \rightarrow -\infty$  y cuando  $t \rightarrow \infty$ , es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |w(t) - w^*(t)| = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} |w(t) - w^*(t)| = 0.$$

Notar que  $w^*(t) \in [i_m, i_M]$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  debido a las cotas para  $I$ .

**Lema 5.2.1** *Para cualquier tiempo inicial  $t_0 \in \mathbb{R}$  y cualesquiera condiciones iniciales  $x_0, y_0 \geq 0$ , todas las soluciones del sistema (5.1) son no negativas y acotadas para todo  $t \geq t_0$ .*

**Demostración.-** Los coeficientes son continuamente diferenciables para  $x, y \geq 0$ . En particular, el término no lineal

$$a \frac{xy}{m+x} = ay \left( 1 - \frac{m}{m+x} \right)$$

es no negativo y acotado por la función lineal  $ay$  en el cuadrante positivo, tal y como vimos en la demostración del Lema 4.2.1. Esto asegura la existencia y unicidad de soluciones para cualquier tiempo para el que permanezcan en el primer cuadrante.

Por la continuidad de las soluciones, con condición inicial  $x(t_0) = x_0 > 0$ ,  $x(t)$  tiene que tomar el valor 0 antes de tomar cualquier valor negativo. Pero

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{x=0} = DI(t) > 0,$$

con lo que  $x(t)$  no puede tomar valores negativos. Con la condición inicial  $y(t_0) = y_0 > 0$ , existe  $t_1 > t_0$  tal que  $y(t) > 0$  en  $[t_0, t_1]$ .

---

<sup>1</sup>de hecho es una solución especial que se construye usando una técnica pullback.

Además,

$$y(t) = y_0 e^{-D(t-t_0) + \int_{t_0}^t a \frac{x(s)}{m+x(s)} ds}$$

para  $t \in [t_0, t_1]$ . Debido a la unicidad de solución, esta expresión se cumple para todo  $t \geq t_0$ , así  $y(t)$  es no negativa. ■

**Teorema 5.2.1** *El sistema dinámico no autónomo generado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (5.1) tiene un atractor pullback  $\mathcal{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$  en  $\mathbb{R}_+^2$ . Además,*

(i) *cuando  $D > a$ , la solución completa  $(x^*(t), y^*(t)) = (w^*(t), 0)$  es asintóticamente estable en  $\mathbb{R}_+^2$  y el atractor pullback tiene una única componente  $A(t) = \{(w^*(t), 0)\}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ;*

(ii) *cuando, además,*

$$ai_m > D(m + i_M),$$

*el atractor pullback tiene componentes no triviales que incluyen  $(w^*(t), 0)$  y puntos estrictamente positivos;*

(iii) *cuando tenemos la hipótesis de (ii) y, además,*

$$D < a \quad \text{y} \quad a(m^2 + m(2i_M - i_m) + i_M^2) < D(m + i_M)^2,$$

*el atractor pullback contiene una solución completa no trivial que atrae a todas las otras soluciones completas positivas.*

**Demostración<sup>2</sup>.**- En virtud del Lema 5.2.1 y del hecho de que  $w^*(t) \in [i_m, i_M]$ , el conjunto compacto no vacío

$$\mathcal{B} := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : i_m \leq x + y \leq i_M\}$$

es positivamente invariante y absorbente en  $\mathbb{R}_+^2$  para la EDO (5.2).

---

<sup>2</sup>Antes de nada, comentaremos que en la demostración de este Teorema se omitirán algunos detalles por analogía a demostraciones del capítulo anterior.

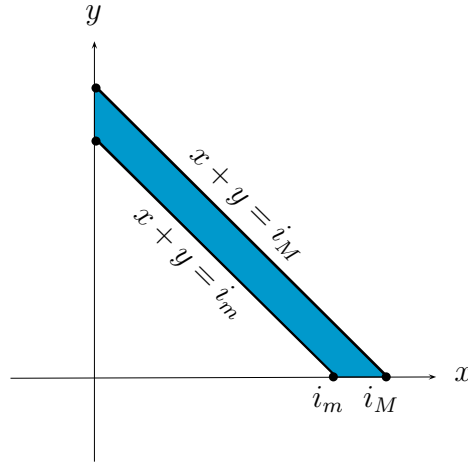


Figura 5.1: Representación gráfica del conjunto  $\mathcal{B}$ .

El sistema dinámico no autónomo en  $\mathbb{R}_+^2$  generado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (5.1) tiene así un atractor pullback  $\mathcal{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$  formado por subconjuntos no vacíos de  $\mathcal{B}$ . Entonces  $(w^*(t), 0) \in A(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , ya que el atractor pullback contiene a todas las soluciones completas acotadas. Para probar (i) notamos que la primera ecuación del sistema (5.1) se puede acotar superiormente como sigue

$$\frac{dy(t)}{dt} = - \left( D - a \frac{x(t)}{m + x(t)} \right) y(t) \leq -(D - a)y(t),$$

con lo que se tiene de forma inmediata que  $y(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , para  $D > a$ .

En cuanto a (ii), del signo positivo de la derivada de la segunda ecuación del sistema (5.1), tenemos que  $x(t)$  es creciente en la zona  $x = 0$  del conjunto absorbente  $\mathcal{B}$ . La zona  $y = 0$  es invariante, pero para  $y = \varepsilon \ll i_m$  y  $i_m \leq x \leq i_M$ , la primera ecuación del sistema (5.1) da

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left( a \frac{x(t)}{m + x(t)} - D \right) y(t) \geq \left( \frac{ai_m}{m + i_M} - D \right) y(t) > 0,$$

cuando  $ai_m > D(m + i_M)$ . Esto significa que el interior positivo del conjunto absorbente también contiene puntos del atractor pullback.

Finalmente, para ver (iii) consideramos la primera EDO del sistema (5.1) restringida a la variedad estable  $x(t) + y(t) = w^*(t)$ , sobre la cual adquiere la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = D(I(t) - x(t)) - a \frac{x(t)}{m + x(t)}(w^*(t) - x(t)). \quad (5.3)$$

Para cualesquiera dos soluciones  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  de (5.3), definimos

$$\Delta_x(t) := x_1(t) - x_2(t).$$

Entonces  $\Delta_x$  satisface

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_x(t)}{dt} &= \frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt} \\ &= \cancel{DI(t)} - Dx_1(t) - a\frac{x_1(t)}{m+x_1(t)}w^*(t) + a\frac{x_1^2(t)}{m+x_1(t)} - \cancel{DI(t)} \\ &\quad + Dx_2(t) + a\frac{x_2(t)}{m+x_2(t)}w^*(t) - a\frac{x_2^2(t)}{m+x_2(t)} \\ &= -Dx_1(t) + Dx_2(t) - a\frac{x_1(t)(m+x_2(t)) - x_2(t)(m+x_1(t))}{(m+x_1(t))(m+x_2(t))}w^*(t) \\ &\quad + a\frac{x_1^2(t)(m+x_2(t)) - x_2^2(t)(m+x_1(t))}{(m+x_1(t))(m+x_2(t))} \\ &= -D\Delta_x(t) - \frac{amw^*(t)}{(m+x_1(t))(m+x_2(t))}\Delta_x(t) + a\frac{m(x_1(t)+x_2(t)) + x_1(t)x_2(t)}{(m+x_1(t))(m+x_2(t))}\Delta_x(t), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene por razonamientos idénticos a los que se realizaron en la demostración de la parte (iii) del Teorema 4.2.1.

Como  $0 \leq x(t) \leq w^*(t) \leq i_M$  y  $w^*(t) \geq i_m$ , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_x(t)}{dt} &= -D\Delta_x(t) - a\frac{amw^*(t)}{(m+x_1(t))(m+x_2(t))}\Delta_x(t) + a\frac{m(x_1(t)+x_2(t)) + x_1(t)x_2(t)}{(m+x_1(t))(m+x_2(t))}\Delta_x(t) \\ &< -D\Delta_x(t) - a\frac{mi_m}{(m+i_M)^2}\Delta_x(t) + a\Delta_x(t), \end{aligned}$$

análogamente a la demostración de la parte (iii) del Teorema 4.2.1.

Así,  $\Delta_x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , siempre y cuando

$$D + a\frac{mi_m}{(m+i_M)^2} > a,$$

o, equivalentemente

$$a(m^2 + m(2i_M - i_m) + i_M^2) < D(m + i_M)^2,$$

ya que

$$a < D + a\frac{mi_m}{(m+i_M)^2},$$

con lo que

$$a \left( 1 - \frac{mi_m}{(m + i_M)^2} \right) < D,$$

es decir,

$$a \frac{m^2 + i_M^2 + 2mi_M - mi_m}{(m + i_M)^2} < D,$$

o lo que es lo mismo,

$$a(m^2 + m(2i_M - i_m) + i_M^2) < D(m + i_M)^2.$$

Esto también se cumple si  $a < D$ , en cuyo caso estamos en la situación (i) del Teorema. Sin embargo, puede también cumplirse si  $a$  es ligeramente mayor que

$$(m^2 + m(2i_M - i_m) + i_M^2) < (m + i_m)^2,$$

en cuyo caso las estimaciones anteriores con  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  igual a  $w^*(t)$ , el sistema es contractivo uniformemente estrictamente [38], [39] en el cuadrante positivo y entonces tiene una única solución completa como su atractor pullback en el cuadrante positivo. ■

### 5.3. Modelo con pared.

Estudiaremos en esta sección lo que ocurre cuando hacemos variar el ratio de concentración de nutriente en el modelo con pared. Cuando  $D$  es constante e  $I$  varía en tiempo, el modelo que tenemos es el siguiente

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= D(I(t) - x(t)) - a \frac{x(t)}{m + x(t)} (y_1(t) + y_2(t)) + b\nu y_1(t), \\ \frac{dy_1(t)}{dt} &= -(\nu + D)y_1(t) + c \frac{x(t)}{m + x_1(t)} y_1(t) - r_1 y_1(t) + r_2 y_2(t), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} &= -\nu y_2(t) + c \frac{x(t)}{m + x(t)} y_2(t) + r_1 y_1(t) - r_2 y_2(t), \end{aligned} \quad (5.4)$$

**Lema 5.3.1** *Supongamos que  $(x_0, y_{10}, y_{20}) \in \mathbb{R}_+^3$ . Entonces, todas las soluciones del sistema (5.4) con datos iniciales  $(x(t_0), y_1(t_0), y_2(t_0)) = (x_0, y_{10}, y_{20})$  son*

(i) *no negativas para todo  $t \geq t_0$ ;*

(ii) *uniformemente acotadas en  $\mathbb{R}_+^3$ .*



Además, el sistema dinámico no autónomo en  $\mathbb{R}_+^3$  generado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (5.4) tiene un atractor pullback  $\mathcal{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$  en  $\mathbb{R}_+^3$ .

**Demostración.-**

- (i) Por continuidad, cada solución tiene que tomar el valor 0 antes de tomar cualquier valor negativo. Con  $x = 0$ ,  $y_1 \geq 0$ ,  $y_2 \geq 0$ , la EDO para  $x(t)$  se reduce a

$$\frac{dx(t)}{dt} = DI(t) + b\nu y_1 > 0,$$

con lo que  $x(t)$  es estrictamente creciente en  $x = 0$ .

Con  $y_1 = 0$ ,  $x \geq 0$ ,  $y_2 \geq 0$ , la EDO reducida para  $y_1(t)$  es

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = r_2 y_2 \geq 0,$$

por tanto,  $y_1(t)$  es no decreciente en  $y_1 = 0$ .

De forma similar, con  $y_2 = 0$ ,  $x \geq 0$ ,  $y_1 \geq 0$ , la EDO reducida para  $y_2(t)$  es

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = r_1 y_1 \geq 0,$$

por lo que  $y_2(t)$  es no decreciente en  $y_2 = 0$ . Además,  $(x(t), y_1(t), y_2(t)) \in \mathbb{R}_+^3$  para cualquier  $t \in \mathbb{R}$ .

- (ii) Definimos, para  $(x(t), y_1(t), y_2(t)) \in \mathbb{R}_+^3$ ,

$$\|X(t)\|_1 := x(t) + y_1(t) + y_2(t).$$

Entonces,  $\|X(t)\|_1 \leq S(t) \leq \frac{a}{c}\|X(t)\|_1$ , donde

$$S(t) = x(t) + \frac{a}{c}(y_1(t) + y_2(t)),$$

análogamente a como se hacía en la demostración de la parte (ii) del Lema 4.3.1.

Derivando  $S(t)$  a lo largo de soluciones de (5.4), tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dS(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} + \frac{a}{c} \frac{dy_1(t)}{dt} + \frac{a}{c} \frac{dy_2(t)}{dt} \\
&= DI(t) - Dx(t) - a \frac{x(t)}{m+x(t)} (y_1(t) + y_2(t)) + b\nu y_1(t) - \frac{a}{c} (\nu + D) y_1(t) \\
&\quad + \frac{ax(t)}{m+x(t)} y_1(t) - \frac{r_1 a}{c} y_1(t) + \frac{r_2 a}{c} y_2(t) - \frac{a\nu}{c} y_2(t) + \frac{ax(t)}{m+x(t)} y_2(t) \\
&\quad + \frac{a}{c} r_1 y_1(t) - \frac{a}{c} r_2 y_2(t) \\
&= D[I(t) - x(t)] - \left[ \frac{a}{c} (\nu + D) - b\nu \right] y_1(t) - \frac{a}{c} \nu y_2(t) \\
&\leq Di_M - Dx(t) - \left[ \frac{a}{c} (\nu + D) - b\nu \right] y_1(t) - \frac{a}{c} \nu y_2(t). \tag{5.5}
\end{aligned}$$

Notemos que, como  $a \geq c$  y  $0 < b < 1$ , entonces

$$\frac{a}{c} (\nu + D) - b\nu \geq \nu + D - b\nu > \nu + D - \nu = D.$$

Sea  $\mu := \min\{D, \nu\}$ , entonces

$$\begin{aligned}
\frac{dS(t)}{dt} &\leq Di_M - Dx(t) - \left[ \frac{a}{c} (\nu + D) - b\nu \right] y_1(t) - \frac{a}{c} \nu y_2(t) \\
&< Di_M - Dx(t) - \nu y_1(t) - \nu y_2(t) \\
&\leq Di_M - \mu \{x(t) + y_1(t) + y_2(t)\} \\
&= Di_M - \mu S(t).
\end{aligned}$$

De esta forma llegamos a

$$\frac{dS(t)}{dt} < Di_M - \mu S(t). \tag{5.6}$$

Análogamente a como se razonaba en la demostración de (ii) del Lema 4.3.1, podemos comprobar que si  $S(t_0) < \frac{Di_M}{\mu}$ , entonces  $S(t) \leq \frac{Di_M}{\mu}$  para todo  $t \geq t_0$ . Por otro lado, si  $S(t_0) \geq \frac{Di_M}{\mu}$ , entonces  $S(t)$  será no creciente para todo  $t \geq t_0$ , con lo que  $S(t) \leq S(t_0)$ . Entonces implica que  $\|X(t)\|_1$  está acotada superiormente, es decir,

$$\|X(t)\|_1 \leq \max \left\{ \frac{Di_M}{\mu}, x(t_0) + \frac{a}{c} (y_1(t_0) + y_2(t_0)) \right\},$$

para todo  $t \geq t_0$ .

Se sigue entonces que para todo  $\varepsilon > 0$ , el conjunto compacto no vacío

$$\mathcal{B}_\varepsilon := \left\{ (x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^3 : x + \frac{a}{c}(y_1 + y_2) \leq \frac{Di_M}{\mu} + \varepsilon \right\}$$

es positivamente invariante y absorbente en  $\mathbb{R}_+^3$ . El sistema dinámico no autónomo en  $\mathbb{R}_+^3$  generado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (5.4) tiene por tanto un atractor pullback  $\mathcal{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ , que consiste en subconjuntos compactos no vacíos de  $\mathbb{R}_+^3$  tal que están contenidos en  $\mathcal{B}_\varepsilon$ . ■

Usando de nuevo el cambio de variables  $z(t)$  y  $\alpha(t)$  definidos como en (4.8), el sistema (5.4) se convierte en el siguiente

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= D(I(t) - x(t)) - a \frac{x(t)}{m + x(t)} z(t) + b\nu\alpha(t)z(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= -\nu z(t) - D\alpha(t)z(t) + c \frac{x(t)}{m + x(t)} z(t), \\ \frac{d\alpha(t)}{dt} &= -D\alpha(t)(1 - \alpha(t)) - r_1\alpha(t) + r_2(1 - \alpha(t)). \end{aligned} \tag{5.7}$$

La tercera ecuación del sistema (5.7) tiene un único punto de equilibrio

$$\alpha^* = \frac{D + r_1 + r_2 - \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2}}{2D}$$

que es asintóticamente estable en  $(0, 1)$ , tal y como demostramos en la primera parte del trabajo. Así, cuando  $t \rightarrow \infty$ , sustituyendo  $\alpha(t)$  por  $\alpha^*$  en el sistema (5.7), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= D(I(t) - x(t)) - a \frac{x(t)}{m + x(t)} z(t) + b\nu\alpha^* z(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= -\nu z(t) - D\alpha^* z(t) + c \frac{x(t)}{m + x(t)} z(t). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Para obtener más detalles de la dinámica de las soluciones del sistema (5.8) a largo plazo presentamos el siguiente Teorema.

**Teorema 5.3.1** *Supongamos que  $I : \mathbb{R} \rightarrow [i_m, i_M]$ , con  $0 < i_m < i_M < \infty$ , es continua,  $a \geq c$ ,  $b \in (0, 1)$  y  $\nu > 0$ . El sistema (5.8) tiene un atractor pullback  $\mathcal{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$  contenido en el primer cuadrante. Además,*

(i) cuando  $\nu + D\alpha^* > c$ , la solución completa  $(w^*(t), 0)$  es asintóticamente estable en  $\mathbb{R}_+^2$ , donde

$$w^*(t) = De^{-Dt} \int_{-\infty}^t I(s)e^{Ds} ds,$$

y el atractor pullback  $\mathcal{A}$  tiene una única componente  $A(t) = \{(w^*(t), 0)\}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,

(ii) cuando

$$\nu + D\alpha^* < \frac{cDi_M}{m(a - c + \nu + b\nu\alpha^* + D) + Di_M}$$

el atractor pullback  $\mathcal{A}$  también contiene puntos estrictamente contenidos en el cuadrante positivo, además del conjunto  $\{(w^*(t), 0)\}$ .

### Demostración<sup>3</sup>.-

(i) Cuando  $\nu + D\alpha^* > c$ , tenemos

$$\frac{dz(t)}{dt} = - \left( \nu + D\alpha^* - c \frac{x(t)}{m + x(t)} \right) z(t) \leq 0,$$

lo que implica que  $z(t)$  decrece a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ , para cualquier  $z(t_0) \geq 0$ . En consecuencia,  $x(t)$  satisface

$$\frac{dx(t)}{dt} = D(I(t) - x(t)),$$

es decir,

$$x(t) = x(t_0)e^{-D(t-t_0)} + De^{-Dt} \int_{t_0}^t I(s)e^{Ds} ds,$$

que converge a  $w^*(t)$ , bien cuando  $t \rightarrow \infty$ , o bien cuando  $t_0 \rightarrow -\infty$ .

(ii) Sea  $u(t) := x(t) + z(t)$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} + \frac{dz(t)}{dt} \\ &= D(I(t) - x(t)) + \frac{(c-a)x(t)}{m+x(t)}z(t) + b\nu\alpha^*z(t) - \nu z(t) - D\alpha^*z(t). \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Notamos que omiteremos algunos detalles de cálculo cuando sean similares a demostraciones previamente realizadas.

Por un lado,

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &\leq D(I(t) - x(t)) - (\nu - b\nu\alpha^* + D\alpha^*)z(t) \\ &< DI(t) - Dx(t) - D\alpha^*z(t) \\ &\leq Di_M - D\alpha^*u(t). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &\geq D(I(t) - x(t)) - (a - c + \nu + D\alpha^* - b\nu\alpha^*)z(t) \\ &\geq DI(t) - Dx(t) - (a - c + \nu - b\nu\beta^* + D)z(t) \\ &> Di_m - (a - c + \nu - b\nu\beta^* + D)u(t). \end{aligned}$$

Además, tenemos las siguientes cotas superior e inferior para  $u(t)$ :

$$l := \frac{Di_M}{a - c + \nu - b\nu\alpha^* + D} < u(t) < \frac{i_M}{\alpha^*}. \quad (5.9)$$

Para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, definimos  $T_\varepsilon$  como el trapecoide

$$T_\varepsilon := \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}_+^2 : x \geq \varepsilon, z \geq \varepsilon, \frac{Di_M}{a - c + \nu - b\nu\alpha^* + D} \leq x + z \leq \frac{i_M}{\alpha^*} \right\},$$

con lo que  $T_\varepsilon$  es absorbente.

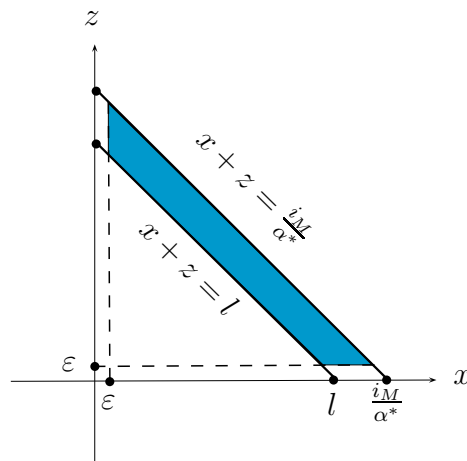


Figura 5.2: Representación gráfica del conjunto  $T_\varepsilon$ .

Demostremos ahora que es invariante. De forma similar a la demostración del Teorema 5.2.1, cuando  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño, se tienen las siguientes desigualdades sobre la acotación de  $T_\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{x=\varepsilon} &= D(I(t) - \varepsilon) + \left( b\nu\alpha^* - \frac{a\varepsilon}{m + \varepsilon} \right) z(t) > 0, \\ \left. \frac{dz(t)}{dt} \right|_{z=\varepsilon} &> \left( -\nu + D\alpha^* + \frac{c(l - \varepsilon)}{m + l - \varepsilon} \right) \varepsilon > 0, \\ \left. \frac{d(x(t) + z(t))}{dt} \right|_{x+z=\frac{i_M}{\alpha^*}} &< 0, \\ \left. \frac{d(x(t) + z(t))}{dt} \right|_{x+z=l} &> 0. \end{aligned}$$

Veamos la demostración de las dos últimas desigualdades. Para ver la primera

$$\begin{aligned} \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{u=\frac{i_M}{\alpha^*}} &< Di_M - D\alpha^* \frac{i_M}{\alpha^*} \\ &= Di_M - Di_M = 0, \end{aligned}$$

por lo que

$$\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{u=\frac{i_M}{\alpha^*}} < 0.$$

Para ver la segunda desigualdad

$$\begin{aligned} \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{u=l} &< Di_M - (a - c + \nu + b\nu\beta^* + D)l \\ &= Di_m - \frac{(a - c + \nu + b\nu\beta^* + D)l}{a - c + \nu + b\nu\alpha^* + D} \\ &= Di_m - Di_m = 0. \end{aligned}$$

por lo que

$$\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{u=l} > 0.$$

Entonces,  $T_\varepsilon$  es invariante. En conclusión, esto implica que existe un atractor pullback  $\mathcal{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$  en  $T_\varepsilon$ .

■

## Parte III

### Modelo con retardo.





# Capítulo 6

## Modelo sin crecimiento en pared.

### 6.1. Introducción.

Otra posibilidad a la hora de estudiar los modelos de quimiostatos es considerar un retardo en tales modelos de tal forma que quede explicado el crecimiento oscilatorio de los microorganismos. Los retardos son naturales en los sistemas biológicos, debido a que permiten la coexistencia de poblaciones en competición como una solución periódica no forzada.

La presencia de términos con retardo en modelos de quimiostatos está completamente justificada, ya que el comportamiento de los sistemas dinámicos no sólo depende en general del presente, sino también de su historia. A veces sólo un corto período de tiempo pasado es el que proporciona información relevante al sistema (es el caso de retardos constantes o variables) y otras veces es toda la historia la que hay que tener en cuenta (retardos distribuidos). Debemos notar que la presencia de retardos no constantes hace que estemos trabajando con modelos de quimiostatos no autónomos.

Los primeros modelos de quimiostatos con retardo fueron estudiados por Caperon en [35] Más tarde, Bush y Cook propusieron un modelo de quimiostato con retardo en el ratio de crecimiento intrínseco de los microorganismos, pero sin retardo en la ecuación del nutriente [36]. Podemos introducir entonces un retardo al modelo más simple de los que hemos estudiado

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= DI - Dx - aU(x(t))y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -Dy(t) + cU(x(t))y(t).\end{aligned}$$

resultando el siguiente modelo

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= DI - Dx - aU(x(t))y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -Dy(t) + cU(x(t - \rho(t)))y(t),\end{aligned}\tag{6.1}$$

siendo  $\rho(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, h]$  ( $h > 0$ ) una función continua.

En este caso consideramos un retardo variable, en lugar de uno constante, aunque también podría tenerse en cuenta un retardo distribuido. La elección del retardo variable es para mostrar el comportamiento de estos modelos a la hora de introducir un retardo, sin entran en terrenos que pueden ser pantanosos en el caso de retardos distribuidos y que pudieran hacer perder la visión de lo que se pretende mostrar.

## 6.2. Algunas consideraciones previas.

Para resolver el sistema (6.1), necesitamos fijar los valores de la solución no sólo en un tiempo inicial  $t_0 \in \mathbb{R}$ , sino en el intervalo  $[t_0 - h, t_0]$ , es decir, necesitamos encontrar las soluciones al sistema (6.1) para  $t \geq t_0$  tal que

$$x(t) = \phi_1(t - t_0), \quad y(t) = \phi_2(t - t_0), \quad \text{para } t \in [t_0 - h, t_0],\tag{6.2}$$

donde  $(\phi_1, \phi_2) \in C_h := C([-h, 0]; \mathbb{R}^2)$ .

Observemos que el sistema (6.1) se puede escribir como la siguiente ecuación diferencial funcional no autónoma

$$\frac{dz(t)}{dt} = f(t, z_t),\tag{6.3}$$

donde  $f(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times C_h \rightarrow \mathbb{R}^2$  está dada por

$$f(t, \phi) = \begin{pmatrix} DI - D\phi_1(0) - aU(\phi_1(0))\phi_2(0) \\ -D\phi_2(0) + cU(\phi_1(-\rho(t))\phi_2(0)) \end{pmatrix}, \quad \text{para } \phi := \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in C_h,$$

y  $z_t \in C_h$  denota la función

$$z_t(\theta) = z(t + \theta), \quad \text{para } \theta \in [-h, 0],$$

para cualquier función continua  $z : [-h, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Para resolver el problema de valores iniciales para (6.3), una posibilidad es considerar una condición inicial  $\phi \in C_h$  en el tiempo inicial  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Esto nos proporcionará, bajo condiciones adecuadas, la única solución  $z(\cdot; t_0, \phi)$  de (6.3) tal que  $z_0(\cdot; t_0, \phi) = \phi$ , lo que significa que

$z_{t_0}(\theta; t_0, \phi) := z(t_0 + \theta; t_0, \phi) = \phi(\theta)$  para  $\theta \in [-h, 0]$ . De esta forma podemos construir un sistema dinámico no autónomo (por ejemplo, un proceso) en el espacio de fases  $C_h$  en el siguiente sentido: para cualquier  $t \geq t_0$ , definimos el operador  $Z(t, t_0) : C_h \rightarrow C_h$  como

$$Z(t, t_0)\phi = z_t(\cdot; t_0, \phi), \quad \text{para } \phi \in C_h. \quad (6.4)$$

### 6.3. Signo y acotación de soluciones.

Al igual que en los capítulos previos, la región biológicamente interesante en nuestro modelo es aquella donde las soluciones sean positivas y finitas. En el próximo teorema demostraremos que las soluciones del sistema (6.1) son no negativas y acotadas.

**Lema 6.3.1** *Dada cualquier condición inicial  $\phi \geq 0$  en  $[t_0 - h, t_0]$ , las soluciones de (6.1) son no negativas.*

**Demostración.-** Lo primero que vamos a demostrar es que si una solución comienza en el cuadrante

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\},$$

permanece allí para siempre.

Por continuidad, cada solución debe tomar el valor 0 antes de alcanzar cualquier valor negativo. De hecho, como

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{y=0} = [-Dy(t) + cU(x(t - \rho(t)))y(t)] \Big|_{y=0} = 0,$$

entonces  $y$  no decrece en  $y = 0$ , con lo que nunca tomará valores negativos.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{x=0} &= [DI - Dx(t) - aU(x(t))y(t)] \Big|_{x=0} \\ &= DI - aU(\overset{0}{\theta})y(t) = DI > 0, \end{aligned}$$

lo que implica que  $x$  es creciente en  $x = 0$ . En conclusión, se tiene que las soluciones del sistema (6.1) son no negativas para cualquier  $t \geq t_0$ .

■

**Teorema 6.3.1** *Supongamos que*

$$\delta := D - c > 0, \quad (6.5)$$

entonces para todo  $t > t_0$ , las soluciones del sistema (6.1) están acotadas para cualquier condición inicial<sup>1</sup>.

**Demostración.-** Definimos el funcional

$$u(t) := u(x(t), y(t)) = x(t) + y(t).$$

Derivando  $u$  a lo largo de soluciones del sistema (6.1)

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} + \frac{dy(t)}{dt} \\ &= DI - Dx(t) - aU(x(t))y(t) - Dy(t) + cU(x(t - \rho(t)))y(t) \\ &\leq DI - Dx(t) - ay(t) - Dy(t) + cy(t) \\ &\leq DI - Dx(t) - Dy(t) + cy(t) \\ &= DI - Dx(t) - (D - c)y(t) \\ &= DI - Dx(t) - \delta y(t), \end{aligned}$$

donde  $0 < \delta < D$  definido como en (6.5).

Definimos

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : Dx + \delta y \leq DI\}.$$

Vamos a estudiar cotas superiores de las soluciones caso por caso.

- (a) Si una trayectoria comienza en  $t = t_0$  en  $\mathbb{R}_+^2 \setminus \Omega$ , entonces el función  $u(x, y)$  a lo largo de las trayectorias que comienzan en este punto deben ser decrecientes para todo  $t \geq t_0$  tal que  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \Omega$ , pues en tal zona,  $Dx + \delta y > DI$ , con lo que

$$\frac{du(t)}{dt} = DI - Dx(t) - \delta y(t) < 0,$$

es decir,  $u$  decrece. De esta forma,

$$u(t) := u(x(t), y(t)) \leq u(x(t_0), y(t_0)) = x(t_0) + y(t_0) \leq |\phi_1| + |\phi_2|.$$

---

<sup>1</sup>Notemos que tal condición inicial siempre está acotada pues  $\phi$  es continua en  $[-h, 0]$ .

Así,

$$\|(x(t), y(t))\| := x(t) + y(t) = u(t) \leq |\phi_1| + |\phi_2|, \quad (6.6)$$

con lo que  $x$  e  $y$  están acotadas.

- (b) Si una trayectoria comienza o entra en la región  $\Omega$  en un tiempo  $t = t_1 \geq t_0$  y está allí para siempre, entonces por la definición de  $\Omega$  tenemos que para  $t \geq t_1$ ,  $Dx(t) + \delta y(t) \leq DI$ , de donde se deduce

$$\frac{D}{\delta}x(t) + y(t) \leq \frac{DI}{\delta}.$$

De esta forma, como  $0 < \delta < D$ , entonces  $D/\delta > 1$ , con lo que

$$\|(x(t), y(t))\| := x(t) + y(t) < \frac{D}{\delta}x(t) + y(t) \leq \frac{DI}{\delta}, \quad (6.7)$$

de donde se tiene que  $x$  e  $y$  están acotadas.

- (c) Si una trayectoria comienza y entra o vuelve a entrar después de haber salido de la región  $\Omega$  en un tiempo  $t = t_{2i-1} \geq t_0$  y sale en el tiempo  $t = t_{2i}$ , ( $i = 1, 2, \dots$ ), entonces (6.6) se verifica para todos los tiempos  $(t_{2i}, t_{2i+1})$  y (6.7) para todos los tiempos  $(t_{2i-1}, t_{2i})$ .

En resumen, para cualquier  $t > t_0$ , las soluciones  $(x(t), y(t))$  están acotadas por

$$\|(x(t), y(t))\| := x(t) + y(t) \leq \max \left\{ |\phi_1| + |\phi_2|, \frac{DI}{\delta} \right\}.$$

■

## 6.4. Análisis de la estabilidad.

Consideramos el modelo del quimiostato con retardo dado por el sistema (6.1) con una función de retardo variable  $\rho(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}; [0, h])$ . Es fácil darse cuenta de que  $(I, 0)$  es un equilibrio factible y es asintóticamente estable cuando  $D \geq c$ . De hecho, cuando  $D \geq c$ , se sigue directamente de la segunda ecuación del sistema (6.1) que  $y'(t) < 0$  para todo  $t$ .

Por tanto,  $y = 0$  es un equilibrio asintóticamente estable de la segunda ecuación de (6.1), y haciendo  $y = 0$  en la primera ecuación del sistema (6.1) tenemos inmediatamente  $x = I$ .

Cualquier otro equilibrio no trivial<sup>2</sup>  $(x^*, y^*)$  debe satisfacer

$$DI - Dx^* - a\frac{x^*}{m+x^*}y^* = 0, \quad (6.8)$$

$$-Dy^* + c\frac{x^*}{m+x^*}y^* = 0. \quad (6.9)$$

De aquí, dividiendo (6.9) por  $y^*$  y despejando  $x^*$ , tenemos

$$\begin{aligned} c\frac{x^*}{m+x^*} = D &\Leftrightarrow cx^* = mD + Dx^* \Leftrightarrow cx^* - Dx^* = mD \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^*(c-D) = mD \Leftrightarrow x^* = \frac{mD}{c-D}. \end{aligned}$$

Por otro lado, de (6.8), obtenemos

$$DI - Dx^* - a\frac{x^*}{m+x^*}y^* = 0,$$

es decir,

$$DI - D\frac{mD}{c-D} - a\frac{\frac{mD}{c-D}}{m+\frac{mD}{c-D}}y^* = 0,$$

de donde

$$DI - \frac{mD^2}{c-D} = a\frac{\frac{mD}{c-D}}{\frac{mc-mD+mD}{c-D}}y^*,$$

o lo que es lo mismo,

$$DI - \frac{mD^2}{c-D} = \frac{aD}{c}y^*,$$

o de otra forma

$$y^* = \frac{DI - \frac{mD^2}{c-D}}{\frac{aD}{c}} = \frac{cDI - \frac{cmD^2}{c-D}}{aD} = \frac{\frac{c^2DI - cD^2I - cmD^2}{c-D}}{aD} = \frac{c^2DI - cD^2I - cmD^2}{(c-D)aD}.$$

En resumen,

$$x^* = \frac{mD}{c-D}, \quad y^* = \frac{c^2DI - cD^2I - cmD^2}{(c-D)aD}. \quad (6.10)$$

---

<sup>2</sup>Ahora sólo estamos interesados en los equilibrios positivos, debido al significado biológico de las soluciones de nuestro problema.

Nos disponemos a analizar las propiedades de estabilidad del equilibrio positivo  $(x^*, y^*)$ . Para ello construiremos un funcional de Lyapunov adecuado y obtendremos condiciones suficientes sobre los parámetros asociados a la función de retardo y sobre el resto de parámetros del modelo, con objeto de asegurar la estabilidad de este punto estacionario.

**Teorema 6.4.1** *Supongamos que  $\rho(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow [0, h]$  tal que  $1 - \rho'(t) \leq M < 1$ . Entonces el equilibrio positivo  $(x^*, y^*)$  definido en (6.10) para el sistema (6.1) es globalmente asintóticamente estable.*

**Nota importante.-** Antes de realizar la demostración de este resultado, queremos hacer notar que, gracias al uso de técnicas más sofisticadas tales como los funcionales de Lyapunov, hemos logrado mejorar el resultado análogo que aparece en [1], libro que estamos siguiendo a la hora estudiar esta parte del trabajo. Esto se debe a que en dicho libro se exige una cota sobre la amplitud del retardo, mientras que nosotros hemos logrado demostrar el mismo resultado sin pedir a cambio condición alguna.

**Demostración.-** Primero, introducimos la siguiente transformación

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &:= x(t) - x^* \\ \tilde{y}(t) &:= \log \frac{y(t)}{y^*} \\ \tilde{U}(\cdot) &:= U(\cdot + x^*) - U(x^*).\end{aligned}\tag{6.11}$$

Entonces, el sistema (6.1) puede escribirse como

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= -D\tilde{x}(t) - ay^* e^{\tilde{y}(t)} \tilde{U}(\tilde{x}(t)) - ay^* U(x^*) (e^{\tilde{y}(t)} - 1), \\ \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} &= c\tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t))).\end{aligned}\tag{6.12}$$

En efecto, como de (6.8) se tiene

$$DI - Dx^* = a \frac{x^*}{m + x^*} y^* = aU(x^*)y^*,$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= DI - D\tilde{x}(t) - Dx^* - a \left( \tilde{U}(\tilde{x}(t)) + U(x^*) \right) y^* e^{\tilde{y}(t)} \\ &= -D\tilde{x}(t) - ay^* e^{\tilde{y}(t)} \tilde{U}(\tilde{x}(t)) - ay^* e^{\tilde{y}(t)} U(x^*) + aU(x^*)y^* \\ &= -D\tilde{x}(t) - ay^* e^{\tilde{y}(t)} \tilde{U}(\tilde{x}(t)) - ay^* U(x^*) (e^{\tilde{y}(t)} - 1).\end{aligned}$$

Por otro lado, de (6.9) se deduce

$$-Dy^* = -c \frac{x^*}{m + x^*} y^* = -cU(x^*)y^*,$$

con lo que

$$\begin{aligned} y^* e^{\tilde{y}(t)} \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} &= -Dy^* e^{\tilde{y}(t)} + c \left( \tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t))) + U(x^*) \right) y^* e^{\tilde{y}(t)} \\ &= -Dy^* e^{\tilde{y}(t)} + c\tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t)))y^* e^{\tilde{y}(t)} + cU(x^*)y^* e^{\tilde{y}(t)} \\ &= \cancel{-cU(x^*)y^* e^{\tilde{y}(t)}} + c\tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t)))y^* e^{\tilde{y}(t)} + \cancel{cU(x^*)y^* e^{\tilde{y}(t)}}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

y por tanto

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = -\tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t))).$$

Ahora construimos un funcional de Lyapunov adecuado paso a paso. Primero definimos

$$V_1(\tilde{x}(t)) := \int_0^{\tilde{x}(t)} \tilde{U}(s) ds.$$

Ahora bien, si  $x(t) > x^*$ , entonces  $\tilde{x}(t) > 0$ ; de esta forma, como  $s \in (0, \tilde{x}(t))$ , entonces  $s > 0$ . En consecuencia,  $s + x^* > x^*$  y  $U$  es una función creciente respecto de  $x$ , por lo que  $\tilde{U}(s) = U(s + x^*) - U(x^*) > 0$ . En conclusión,

$$V_1(\tilde{x}(t)) = \int_0^{\tilde{x}(t)} \tilde{U}(s) ds > 0,$$

siempre y cuando  $x(t) \neq x^*$ .

Análogamente, si  $x(t) < x^*$ , entonces  $\tilde{x}(t) < 0$ ; por tanto, como  $s \in (\tilde{x}(t), 0)$ , entonces  $s < 0$ . Entonces  $s + x^* < x^*$  y  $U$  es una función creciente respecto de  $x$ , con lo que  $\tilde{U}(s) = U(s + x^*) - U(x^*) < 0$ . En conclusión,

$$V_1(\tilde{x}(t)) = \int_0^{\tilde{x}(t)} \tilde{U}(s) ds = - \int_{\tilde{x}(t)}^0 \tilde{U}(s) ds > 0,$$

siempre y cuando  $x(t) \neq x^*$ .

Resumiendo,  $V_1(\tilde{x}) > 0$  para todo  $x \neq x^*$ .



Derivando  $V_1$  respecto de  $t$  a lo largo de soluciones del sistema (6.12) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dV_1(t)}{dt} &= \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} \tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\ &= -D\tilde{x}(t) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) - ay^* e^{\tilde{y}(t)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(t)) - ay^* U(x^*) (e^{\tilde{y}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t)).\end{aligned}$$

Definimos ahora

$$V_2(\tilde{y}(t)) := \int_0^{\tilde{y}(t)} (e^s - 1) ds.$$

Ahora bien, si  $y(t) > y^*$ , entonces  $\tilde{y}(t) > 0$ ; de esta forma, como  $s \in (0, \tilde{y}(t))$ , entonces  $s > 0$ . En consecuencia,  $e^s - 1 > 1 - 1 = 0$ , por lo que

$$V_2(\tilde{y}(t)) = \int_0^{\tilde{y}(t)} (e^s - 1) ds > 0,$$

siempre y cuando  $y(t) \neq y^*$ .

Análogamente, si  $y(t) < y^*$ , entonces  $\tilde{y}(t) < 0$ ; por tanto, como  $s \in (\tilde{y}(t), 0)$ , entonces  $s < 0$ . Entonces  $e^s - 1 < 1 - 1 = 0$ , con lo que

$$V_2(\tilde{y}(t)) = \int_0^{\tilde{y}(t)} (e^s - 1) ds = - \int_{\tilde{y}(t)}^0 (e^s - 1) ds > 0,$$

siempre y cuando  $y(t) \neq y^*$ .

Resumiendo,  $V_2(\tilde{y}) > 0$  para todo  $y \neq y^*$ .

Derivando  $V_2$  respecto de  $t$  a lo largo de soluciones del sistema (6.12) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dV_2(t)}{dt} &= \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} (e^{\tilde{y}(t)} - 1) \\ &= c (e^{\tilde{y}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t))).\end{aligned}$$

Consideramos ahora el funcional

$$V(t) := V(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = V_1(\tilde{x}(t - \rho(t))) + \lambda V_2(\tilde{y}(t)),$$

con  $\lambda := \frac{a}{c}(1 - M)U(x^*)y^*$ .

Está claro que  $V(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) > 0$  para todo  $(x, y) \neq (x^*, y^*)$ . Notemos que si  $(x, y) = (x^*, y^*)$ , me encuentro en el equilibrio, por tanto, por definición de punto estacionario, no me moveré de él.

Derivando  $V$  respecto de  $t$  a lo largo de soluciones del sistema (6.12) tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{dt} &= \frac{dV_1(\tilde{x}(t - \rho(t)))}{dt} + \lambda \frac{dV_2(\tilde{y}(t))}{dt} \\
&= \frac{d\tilde{x}(t - \rho(t))}{dt} \tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t))) + \lambda \frac{dV_2(\tilde{y}(t))}{dt} \\
&= \frac{d\tilde{x}(t)}{ds} \Big|_{s=t-\rho(t)} \frac{d(t - \rho(t))}{dt} \tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t))) + \lambda \frac{dV_2(\tilde{y}(t))}{dt} \\
&= \frac{d\tilde{x}(s)}{ds} \Big|_{s=t-\rho(t)} (1 - \rho'(t)) \tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t))) + \lambda \frac{dV_2(\tilde{y}(t))}{dt} \\
&= \frac{dV_1(\tilde{x}(s))}{ds} \Big|_{s=t-\rho(t)} (1 - M) + \lambda \frac{dV_2(\tilde{y}(t))}{dt} \\
&\leq \frac{dV_1(\tilde{x}(s))}{ds} \Big|_{s=t-\rho(t)} (1 - M) + \lambda \frac{dV_2(\tilde{y}(t))}{dt} \\
&= \left\{ -D\tilde{x}(t - \rho(t)) \tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t))) - ay^* e^{\tilde{y}(t)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \rho(t))) \right. \\
&\quad \left. - ay^* U(x^*) (e^{\tilde{y}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t))) \right\} (1 - M) \\
&\quad + \frac{a}{\phi} (1 - M) U(x^*) y^* \phi (e^{\tilde{y}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t))) \\
&= \left\{ -D\tilde{x}(t - \rho(t)) \tilde{U}(\tilde{x}(t - \rho(t))) - ay^* e^{\tilde{y}(t)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \rho(t))) \right\} (1 - M) < 0,
\end{aligned}$$

con lo que  $V$  es definida negativa, de donde se deduce que el equilibrio positivo  $(x^*, y^*)$  es globalmente asintóticamente estable.

■

# Capítulo 7

## Modelo con crecimiento en pared.

### 7.1. Introducción.

El sistema (6.1) estudiado en el capítulo anterior representa el comportamiento de un quimios-tato con retardo variable, sin embargo no refleja el crecimiento de microorganismos en la pared. Como ya sabemos, es muy frecuente que los microorganismos no sólo crezcan en el medio de crecimiento, sino que también lo hagan en las paredes del recipiente donde están contenidos. De esta forma, el modelo con pared estudiado en capítulos previos, o sea,

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= DI - Dx(t) - aU(x(t))(y_1(t) + y_2(t)) + b\nu y_1(t), \\ \frac{dy_1(t)}{dt} &= -(\nu + D)y_1(t) + cU(x(t))y_1(t) - r_1y_1(t) + r_2y_2(t), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} &= -\nu y_2(t) + cU(x(t))y_2(t) + r_1y_1(t) - r_2y_2(t),\end{aligned}$$

queda, una vez introducido el correspondiente retardo variable, como

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= DI - Dx(t) - aU(x(t))(y_1(t) + y_2(t)) + b\nu y_1(t - \tau_1(t)), \\ \frac{dy_1(t)}{dt} &= -(\nu + D)y_1(t) + cU(x(t - \tau_2(t)))y_1(t) - r_1y_1(t) + r_2y_2(t) \\ \frac{dy_2(t)}{dt} &= -\nu y_2(t) + cU(x(t - \tau_2(t)))y_2(t) + r_1y_1(t) - r_2y_2(t),\end{aligned}\tag{7.1}$$

donde  $\tau_1(\cdot), \tau_2(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, h]$  ( $h > 0$ ) son funciones continuas.

## 7.2. Algunas consideraciones previas.

Como ya hemos explicado, en el sistema (6.1) suponíamos que los microorganismos sólo crecían en el medio de crecimiento, pero no en las paredes del recipiente que los contiene. Sin embargo, cuando el ratio de limpieza del quimiostato no es suficientemente rápido, el crecimiento en la pared se convierte en un factor importante a tener en cuenta. Por ello, en este capítulo vamos a estudiar el modelo de quimiostato con retardos variables y crecimiento en pared. Trabajaremos entonces con el sistema (7.1), que volvemos a escribir.

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= DI - Dx(t) - aU(x(t))(y_1(t) + y_2(t)) + b\nu y_1(t - \tau_1(t)), \\ \frac{dy_1(t)}{dt} &= -(\nu + D)y_1(t) + cU(x(t - \tau_2(t)))y_1(t) - r_1y_1(t) + r_2y_2(t) \\ \frac{dy_2(t)}{dt} &= -\nu y_2(t) + cU(x(t - \tau_2(t)))y_2(t) + r_1y_1(t) - r_2y_2(t),\end{aligned}$$

Suponemos que

$$x(t) = \phi_1(t - t_0), \quad y_1(t) = \phi_{21}(t - t_0), \quad y_2(t) = \phi_{22}(t - t_0) \quad \text{para } t \in [t_0 - h, t_0], \quad (7.2)$$

donde  $(\phi_1, \phi_{21}, \phi_{22}) \in C([-h, 0]; \mathbb{R}^3) =: \tilde{C}_h$ . Denotamos por  $\phi = (\phi_1, \phi_{21}, \phi_{22})$ , con lo que el sistema (7.1) puede escribirse como la siguiente ecuación diferencial funcional no autónoma

$$\frac{dz(t)}{dt} = g(t, z_t), \quad (7.3)$$

donde  $g(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \tilde{C}_h \rightarrow \mathbb{R}^3$  está dada por

$$g(t, \phi) = \begin{pmatrix} DI - D\phi_1(0) - aU(\phi_1(0))(\phi_{21}(t) + \phi_{22}(0)) + b\nu\phi_{21}(-\tau_1(t)) \\ -(\nu + D)\phi_{21}(t) + cU(\phi_1(-\tau_2(0)))\phi_{21}(0) - r_1\phi_{21}(0) + r_2\phi_{22}(0) \\ -\nu\phi_{22}(0) + cU(\phi_1(-\tau_2(t)))\phi_{22}(0) + r_1\phi_{21}(0) - r_2\phi_{22}(0) \end{pmatrix},$$

y  $z_t \in \tilde{C}_h$  es la función  $z_t(\theta) = z(t + \theta)$ ,  $\theta \in [-h, 0]$  para cualquier función continua  $z : [-h, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

La existencia y unicidad de soluciones de (7.3) con condiciones iniciales (7.2) se puede establecer fácilmente bajo los supuestos sobre la función de consumo  $U$ . Entonces tenemos que la única solución  $z(\cdot; t_0, \phi)$  de (7.3) es tal que  $z_{t_0}(\cdot; t_0, \phi)$ , es decir,

$$z_{t_0}(\theta; t_0, \phi) := z(t_0 + \theta; t_0, \phi) = \phi(\theta), \quad \text{para } \theta \in [-h, 0].$$

En consecuencia podemos construir un sistema dinámico no autónomo o proceso en el espacio de fases  $\tilde{C}_h$ ,  $Z(t, t_0) : \tilde{C}_h \rightarrow \tilde{C}_h$ , definida para todo  $t \geq t_0$  como

$$Z(t, t_0)\phi = z_t(\cdot; t_0, \phi), \quad \phi \in \tilde{C}_h.$$

En las siguientes secciones demostraremos que todas las soluciones de (7.3) son no negativas y acotadas para todo  $t \geq t_0$  correspondientes a condiciones iniciales (7.2) no negativas y acotadas.

### 7.3. Signo y acotación de soluciones.

**Lema 7.3.1** *Dada cualesquiera condiciones iniciales (6.1) en  $[t_0 - h, t_0]$ , las soluciones iniciales del sistema (7.1) son no negativas.*

**Demostración.-** De forma similar a la demostración del Lema 6.3.1, vamos a demostrar que una solución que comienza en el octante

$$\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y_1, y_2) : x \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}$$

permanece allí siempre. De hecho, por continuidad cada solución tiene que tomar el valor 0 antes de alcanzar cualquier valor negativo. Además, cuando  $x = 0$ ,  $y_1 \geq 0$ ,  $y_2 \geq 0$ , la primera ecuación del sistema (7.1) se reduce a

$$\frac{dx(t)}{dt} = DI + b\nu y_1(t - \tau_1(t)) > 0,$$

con lo que  $x(t)$  es estrictamente creciente en  $x = 0$ . Cuando  $y_1 = 0$ ,  $x \geq 0$ ,  $y_2 \geq 0$ , la EDO reducida para  $y_1(t)$  queda

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = r_2 y_2 \geq 0,$$

con lo que  $y_1(t)$  es no decreciente en  $y_1 = 0$ . De forma similar,  $y_2$  es no decreciente en  $y_2 = 0$ , ya que la EDO reducida para  $y_2(t)$  queda

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = r_1 y_1(t) \geq 0.$$

Por tanto,  $(x(t), y_1(t), y_2(t)) \in \mathbb{R}_+^3$  para cualquier  $t$ .

■

En el siguiente Teorema presentamos un resultado de acotación de soluciones de (7.1).

**Teorema 7.3.1** *Supongamos que  $\tau_1'(t) \leq M_1 < 1$ , entonces las soluciones de (7.1) están acotadas para todas las condiciones iniciales, siempre y cuando*

$$\mu := \min\{\delta, \nu - c\} > 0, \quad \text{con } \delta := D - \frac{\nu M_1}{1 - M_1} - c. \quad (7.4)$$

**Demostración.-** Definimos el funcional  $v(x, y_1, y_2)$  como

$$v(t) := x(t) + by_1(t) + by_2(t) + \frac{b\nu}{1 - M_1} \int_{t-\tau_1(t)}^t y_1(s) ds.$$

Entonces la derivada en tiempo de  $v(t)$  a lo largo de soluciones del sistema (7.1) es:

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} + b \frac{dy_1(t)}{dt} + b \frac{dy_2(t)}{dt} + \frac{b\nu}{1 - M_1} \frac{d}{dt} \int_{t-\tau_1(t)}^t y_1(s) ds \\ &= DI - Dx(t) - aU(x(t))(y_1(t) + y_2(t)) + b\nu y_1(t - \tau_1(t)) \\ &\quad - b(\nu + D)y_1(t) - b\nu y_2(t) + bcU(x(t - \tau_2(t)))(y_1(t) + y_2(t)) \\ &\quad + \frac{b\nu}{1 - M_1} (y_1(t) - (1 - \tau_1'(t))y_1(t - \tau_1(t))). \end{aligned}$$

Como  $\tau_1'(t) \leq M_1 < 1$  y  $\frac{1}{1-M_1} < 1$ , entonces

$$-\frac{1}{1 - M_1} (1 - \tau_1'(t)) \leq -1.$$

Además, usando que  $U(\cdot) \leq 1$ , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= DI - Dx(t) - aU(x(t))(y_1(t) + y_2(t)) + b\nu y_1(t - \tau_1(t)) \\ &\quad - b(\nu + D)y_1(t) - b\nu y_2(t) + bcU(x(t - \tau_2(t)))(y_1(t) + y_2(t)) \\ &\quad + \frac{b\nu}{1 - M_1} y_1(t) - \frac{b\nu}{1 - M_1} (1 - \tau_1'(t))y_1(t - \tau_1(t)) \\ &\leq DI - Dx(t) - b(\nu + D)y_1(t) - b\nu y_2(t) + bc(y_1(t) + y_2(t)) \\ &\quad + \frac{b\nu}{1 - M_1} y_1(t) + \left(1 - \frac{1}{1 - M_1} (1 - \tau_1'(t))\right) b\nu y_1(t - \tau_1(t)) \\ &\leq DI - Dx(t) - b(\nu + D)y_1(t) - b\nu y_2(t) + bc(y_1(t) + y_2(t)) + \frac{b\nu}{1 - M_1} y_1(t) \\ &= DI - Dx(t) - b \left( \nu + D - c - \frac{\nu}{1 - M_1} \right) y_1(t) - b(\nu - c)y_2(t) \\ &= DI - Dx(t) - b \left( D - c - \nu \left[ \frac{1}{1 - M_1} - 1 \right] \right) y_1(t) - b(\nu - c)y_2(t) \\ &= DI - Dx(t) - b \left( D - c - \nu \frac{M_1}{1 - M_1} \right) y_1(t) - b(\nu - c)y_2(t) \\ &\leq DI - Dx(t) - b\delta y_1(t) - b(\nu - c)y_2(t), \end{aligned}$$

donde  $\delta$  está definido en (7.4). Ahora definimos la región

$$\tilde{\Omega} := \{(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^3 : Dx + b\delta y_1 + b(\nu - c)y_2 \leq DI\}.$$

Si una trayectoria comienza en  $t = t_0$  en  $\mathbb{R}_+^3 \setminus \tilde{\Omega}$ , entonces  $Dx + b\delta y_1 + b(\nu - c)y_2 > DI$ , con lo que el funcional  $v(x, y_1, y_2)$  a lo largo de esa trayectoria comenzando en ese punto será decreciente para todo  $t \geq t_0$  tal que  $(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^3 \setminus \tilde{\Omega}$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} v(x(t), y_1(t), y_2(t)) &\leq v(x(t_0), y_1(t_0), y_2(t_0)) \\ &= x(t_0) + by_1(t_0) + by_2(t_0) + \frac{d\nu}{1 - M_1} \int_{t_0 - \tau_1(t_0)}^{t_0} y_1(s) ds \\ &\leq |\phi_1| + b \left( 1 + \frac{\nu h}{1 - M_1} \right) |\phi_{21}| + b|\phi_{22}|, \end{aligned}$$

lo que implica que, como  $b < 1$ , entonces

$$\begin{aligned} \|(x(t), y_1(t), y_2(t))\| &:= x(t) + y_1(t) + y_2(t) \\ &< \frac{1}{b}x(t) + y_1(t) + y_2(t) \\ &\leq \frac{1}{b}x(t) + y_1(t) + y_2(t) + \frac{\nu}{1 - M_1} \int_{t_0 - \tau_1(t_0)}^{t_0} y_1(s) ds \\ &= \frac{1}{b} \left[ x(t) + by_1(t) + by_2(t) + \frac{b\nu}{1 - M_1} \int_{t_0 - \tau_1(t_0)}^{t_0} y_1(s) ds \right] \\ &= \frac{1}{b}v(x(t), y_1(t), y_2(t)) \\ &\leq \frac{1}{b}|\phi_1| + \left( 1 + \frac{\nu h}{1 - M_1} \right) |\phi_{21}| + |\phi_{22}|. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Si una trayectoria comienza o entra en la región  $\tilde{\Omega}$  en un tiempo  $t = t_1 \geq t_0$  y permanece en  $\tilde{\Omega}$  para siempre, entonces por la definición de  $\tilde{\Omega}$  tenemos que para todo  $t \geq t_0$ ,

$$Dx(t) + b\delta y_1(t) + b(\nu - c)y_2(t) \leq DI,$$

lo que implica que, como  $b < 1$ ,  $\mu \leq \delta = D - \frac{M_1}{1 - M_1} - c \leq D$ ,  $\mu \leq \delta$  y  $\mu \leq \nu - c$ , entonces  $\frac{1}{b} > 1$ ,  $\frac{D}{\mu} \geq 1$  y  $\frac{\nu - c}{\mu} \geq 1$ , con lo que

$$\begin{aligned} \|(x(t), y_1(t), y_2(t))\| &:= x(t) + y_1(t) + y_2(t) \\ &< \frac{D}{\mu b}x(t) + \frac{\delta}{\mu}y_1(t) + \frac{\nu - c}{\mu}y_2(t) \\ &\leq \frac{DI}{b\mu}. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Si una trayectoria comienza o entra o vuelve a entrar después de haber salido de la región  $\tilde{\Omega}$  en tiempos  $t = t_{2i-1} \geq t_0$  y sale en el tiempo  $t_{2i}$ , ( $i = 1, 2, \dots$ ), entonces (7.5) se verifica para

todos los tiempos  $(t_{2i}, t_{2i+1})$  y (7.6) para todos los tiempos  $(t_{2i-1}, t_{2i})$ .

En conclusión, para cualquier tiempo  $t > 0$ , tenemos que las soluciones de  $(x(t), y_1(t), y_2(t))$  están acotadas por

$$\begin{aligned} \|(x(t), y_1(t), y_2(t))\| &:= x(t) + y_1(t) + y_2(t) \\ &< \max \left\{ \frac{|\phi_1|}{b} + \left( 1 + \frac{\nu h}{1 - M_1} \right) |\phi_{21}| + |\phi_{22}|, \frac{DI}{b\mu} \right\}. \end{aligned}$$

■

## 7.4. Análisis de la estabilidad.

Notemos que cualquier solución de equilibrio  $(x, y_1, y_2)$  del sistema (7.1) debe satisfacer las ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} DI - Dx - aU(x)(y_1 + y_2) + \nu y_1 &= 0, \\ -(\nu + D)y_1 + cU(x)y_1 - r_1 y_1 + r_2 y_2 &= 0, \\ -\nu y_2 + cU(x)y_2 + r_1 y_1 - r_2 y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Claramente  $(x, y_1, y_2) = (I, 0, 0)$  es un equilibrio asintóticamente estable cuando  $\nu \geq c$ ; de hecho, cuando  $\nu \geq c$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d(y_1(t) + y_2(t))}{dt} &= -(\nu + D)y_1(t) - \nu y_2(t) + cU(x(t - \tau_2(t)))(y_1(t) + y_2(t)) \\ &< -(\nu - c)(y_1(t) + y_2(t)) < 0. \end{aligned}$$

Para estudiar la estabilidad de las soluciones de equilibrio no triviales del sistema (7.1), primero llevamos a cabo el siguiente cambio de variables:

$$\eta(t) := y_1(t) + y_2(t); \quad \beta(t) := \frac{y_1(t)}{\eta(t)}.$$

De esta forma, y análogamente a lo estudiado en los primeros capítulos de esta memoria, el sistema (7.1) se reescribe como

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= DI - Dx(t) - aU(x(t))\eta(t) + \nu\beta(t - \tau_1(t))\eta(t - \tau_1(t)), \\ \frac{d\eta(t)}{dt} &= -\nu\eta(t) - D\beta(t)\eta(t) + cU(x(t - \tau_2(t)))\eta(t), \\ \frac{d\beta(t)}{dt} &= -D\beta(t)(1 - \beta(t)) - r_1\beta(t) + r_2(1 - \beta(t)). \end{aligned} \tag{7.7}$$



La ecuación para  $\beta(t)$  está desacoplada de las ecuaciones para  $x(t)$  y  $\eta(t)$ . Resolviendo la ecuación algebraica

$$-D\beta(1 - \beta) - r_1\beta + r_2(1 - \beta) = 0$$

tenemos, como ya sabemos,

$$\beta = \frac{D + r_1 + r_2 \pm \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2}}{2D}.$$

Notemos que  $\beta(t) \in (0, 1)$  para cualesquiera soluciones positivas  $y_1(t) > 0$ ,  $y_2(t) > 0$  del sistema (7.1). Además, como  $\beta'|_{\beta=0} = r_2 > 0$  y  $\beta'|_{\beta=1} = -r_1 < 0$ , entonces  $(0, 1)$  es positivamente invariante para  $\beta(t)$  y es la región biológicamente interesante<sup>1</sup>. Por tanto, el equilibrio de la ecuación desacoplada del sistema (7.6) está dado por

$$\beta^* := \frac{D + r_1 + r_2 - \sqrt{(D + r_1 + r_2)^2 - 4Dr_2}}{2D}. \quad (7.8)$$

**Lema 7.4.1** *El punto crítico  $\beta^*$  tal como está definido en (7.8) es un equilibrio asintóticamente estable de la tercera ecuación del sistema (7.6).*

**Demostración.-** Definimos  $\Delta(t) := \beta(t) - \beta^*$ , entonces  $\Delta(t)$  satisface la siguiente EDO:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta(t)}{dt} &= -D(\Delta(t) + \beta^*)(1 - \Delta(t) - \beta^*) - r_1(\Delta(t) + \beta^*) + r_2(1 - \Delta(t) - \beta^*) \\ &= -D\Delta(t)(1 - \Delta(t) - \beta^*) - D\beta^*(1 - \Delta(t) - \beta^*) - r_1\Delta(t) - r_1\beta^* \\ &\quad + r_2 - r_2\Delta(t) - r_2\beta^* \\ &= -D\Delta(t) + D\Delta^2(t) + D\Delta(t)\beta^* - D\beta^* + D\beta^*\Delta(t) \\ &\quad + D\beta^{*2} - r_1\Delta(t) - r_1\beta^* + r_2 - r_2\Delta(t) - r_2\beta^*. \end{aligned}$$

Ahora bien, por ser  $\beta^*$  equilibrio de la tercera ecuación del sistema (7.6), se tiene

$$-D\beta^*(1 - \beta^*) - r_1\beta^* + r_2(1 - \beta^*) = 0,$$

es decir,

$$-D\beta^* + D\beta^{*2} - r_1\beta^* + r_2 - r_2\beta^* = 0.$$

Continuando

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta(t)}{dt} &= -D\Delta(t) + D\Delta^2(t) + D\Delta(t)\beta^* + D\beta^*\Delta(t) - r_1\Delta(t) - r_2\Delta(t) \\ &= D\Delta(t) \left( \Delta(t) + 2\beta^* - 1 - \frac{r_1 + r_2}{D} \right), \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>En este párrafo no damos más detalles por analogía a estudios anteriores

es decir,

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} = D\Delta(t) \left( \Delta(t) - \frac{\sqrt{(D+r_1+r_2)^2 - 4Dr_2}}{D} \right). \quad (7.9)$$

Resolviendo (7.9) con condición inicial  $\Delta(t_0) = \Delta_0$ , tenemos

$$\Delta(t) = \frac{\Delta_0 \sqrt{(D+r_1+r_2)^2 - 4Dr_2}}{\Delta_0 - (\Delta_0 - \sqrt{(D+r_1+r_2)^2 - 4Dr_2})} e^{\sqrt{(D+r_1+r_2)^2 - 4Dr_2}(t-t_0)} \rightarrow 0, \quad (7.10)$$

cuando  $t \rightarrow 0$ , lo que implica que  $\beta^*$  es asintóticamente estable.

Para finalizar, veamos que se tiene (7.10). En efecto, partimos de (7.9), que podemos reescribir como

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} = D\Delta^2(t) - \sqrt{(D+r_1+r_2)^2 - 4Dr_2}\Delta(t).$$

■

Para un tiempo suficientemente grande, reemplazando  $\beta(t)$  por  $\beta^*$  en las dos primeras ecuaciones del sistema (7.6), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= DI - Dx(t) - aU(x(t))\eta(t) + b\nu\beta^*\eta(t - \tau_1(t)), \\ \frac{d\eta(t)}{dt} &= -\nu\eta(t) - D\beta^*\eta(t) + cU(x(t - \tau_2(t)))\eta(t). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Cualquier solución de equilibrio no trivial del sistema (7.11) debe satisfacer las ecuaciones algebraicas

$$DI - Dx^* - aU(x^*)\eta^* + b\nu\beta^*\eta^* = 0, \quad (7.12)$$

$$-\nu - D\beta^* + cU(x^*) = 0. \quad (7.13)$$

Despejando  $x^*$  en (7.13), tenemos

$$-\nu - D\beta^* + c\frac{x^*}{m+x^*} = 0,$$

es decir,

$$c\frac{x^*}{m+x^*} = \nu + D\beta^*,$$

o lo que es lo mismo,

$$cx^* = m\nu + mD\beta^* + x^*\nu + D\beta^*x^*.$$

Reagrupando los términos con  $x^*$  llegamos a

$$cx^* - \nu x^* - D\beta^*x^* = m\nu + mD\beta^*;$$

es decir,

$$(c - \nu - D\beta^*)x^* = m(\nu + D\beta^*),$$

con lo que

$$x^* = \frac{m(\nu + D\beta^*)}{c - \nu - D\beta^*}.$$

Ahora, como sabemos que

$$-\nu - D\beta^* + cU(x^*) = 0,$$

entonces

$$cU(x^*) = \nu + D\beta^*,$$

con lo que

$$U(x^*) = \frac{\nu + D\beta^*}{c}$$

y sustituyendo esta expresión en (7.12), tenemos

$$DI - Dx^* - a\frac{\nu + D\beta^*}{c}\eta^* + b\nu\beta^*\eta^* = 0,$$

es decir,

$$DI - Dx^* - \left[ \frac{a}{c}(\nu + D\beta^*) - b\nu\beta^* \right] \eta^* = 0,$$

con lo que

$$\begin{aligned} \eta^* &= \frac{DI - Dx^*}{\frac{a}{c}(\nu + D\beta^*) - b\nu\beta^*} = \frac{DI - Dx^*}{\frac{a}{c}(\nu + D\beta^*) - \frac{bc\nu\beta^*}{c}} \\ &= \frac{cDI - cDx^*}{a(\nu + D\beta^*) - bc\nu\beta^*} = \frac{cD(I - x^*)}{a(\nu + D\beta^*) - bc\nu\beta^*}. \end{aligned}$$

Ahora bien, para que sea equilibrio positivo, debe ocurrir que

$$c - \nu - D\beta^* > 0, \quad \text{i.e.,} \quad c > \nu + D\beta^*$$

y también que

$$cD(I - x^*)(a(\nu + D\beta^*) - bc\nu\beta^*) > 0.$$

Ahora bien,

$$I - x^* = I - \frac{m(\nu + D\beta^*)}{c - \nu - D\beta^*} = \frac{I(c - \nu - D\beta^*) - m(\nu + D\beta^*)}{c - \nu - D\beta^*},$$

por tanto, como  $c - \nu - D\beta^* > 0$  (es la primera condición exigida), entonces la segunda condición es equivalente a

$$(I(c - \nu - D\beta^*) - m(\nu + D\beta^*))(a(\nu + D\beta^*) - bc\nu\beta^*) > 0.$$

A continuación establecemos un resultado de estabilidad para el equilibrio  $(x^*, \eta^*)$ .

**Teorema 7.4.1** *Supongamos que  $\tau_1(\cdot), \tau_2(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, h]$ ,  $\tau'_i(t) \leq M_i < 1$ ,  $i = 1, 2$ ; entonces el equilibrio  $(x^*, \eta^*)$  del sistema (7.11) es asintóticamente estable, siempre y cuando*

$$\frac{1}{\nu + D\beta^*} (e^{(\nu + D\beta^*)h} - 1) + \frac{1}{1 - M_1} h < \frac{2a}{bc\nu\beta^*}.$$

**Demostración.-** En primer lugar, consideramos la transformación

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &:= x(t) - x^*, \\ \tilde{\eta}(t) &:= \log \frac{\eta(t)}{\eta^*}, \\ \tilde{U}(\cdot) &:= U(\cdot + x^*) - U(x^*). \end{aligned}$$

De esta manera, el sistema (7.11) queda reescrito como

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= -D\tilde{x}(t) - a\tilde{U}(\tilde{x}(t))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} - aU(x^*)\eta^*(e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) + b\nu\beta^*\eta^*(e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))} - 1), \\ \frac{d\tilde{\eta}(t)}{dt} &= c\tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))). \end{aligned}$$

Veamos que, efectivamente, es cierto. Antes de nada, de (7.12) tenemos

$$DI - Dx^* = aU(x^*)\eta^* - b\nu\beta^*\eta^*.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= DI - D\tilde{x}(t) - Dx^* - a(\tilde{U}(\tilde{x}(t)) + U(x^*))\eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} + b\nu\beta^*\eta^* e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))} \\
&= DI - D\tilde{x}(t) - Dx^* - a\tilde{U}(\tilde{x}(t))\eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} - aU(x^*)\eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} + b\nu\beta^*\eta^* e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))} \\
&= aU(x^*)\eta^* - b\nu\beta^*\eta^* - D\tilde{x}(t) - a\tilde{U}(\tilde{x}(t))\eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} - aU(x^*)\eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} + b\nu\beta^*\eta^* e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))} \\
&= -D\tilde{x}(t) - a\tilde{U}(\tilde{x}(t))\eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} - aU(x^*)\eta^* (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) + b\nu\beta^*\eta^* (e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))} - 1).
\end{aligned}$$

Por otro lado, de (7.13) se tiene

$$-\nu - D\beta^* + cU(x^*) = 0,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} \frac{d\tilde{\eta}(t)}{dt} &= -\nu\eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} - D\beta^*\eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} + c(\tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) + U(x^*))\eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} \\
&= -\nu\eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} - D\beta^*\eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} + c\tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))\eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} + cU(x^*)\eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} \\
&= (-\nu - D\beta^* + cU(x^*))\eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} + c\tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))\eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} \\
&= c\tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))\eta^* e^{\tilde{\eta}(t)}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\frac{d\tilde{\eta}(t)}{dt} = c\tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))).$$

Vamos a definir de nuevo un funcional de Lyapunov adecuado paso a paso. Definimos

$$V_1(\tilde{x}(t)) := \int_0^{\tilde{x}(t)} \tilde{U}(s) ds.$$

Ahora bien, si  $x(t) > x^*$ , entonces  $\tilde{x}(t) > 0$ ; de esta forma, como  $s \in (0, \tilde{x}(t))$ , entonces  $s > 0$ . En consecuencia,  $s + x^* > x^*$  y  $U$  es una función creciente respecto de  $x$ , por lo que  $\tilde{U}(s) = U(s + x^*) - U(x^*) > 0$ . En conclusión,

$$V_1(\tilde{x}(t)) = \int_0^{\tilde{x}(t)} \tilde{U}(s) ds > 0,$$

siempre y cuando  $x(t) \neq x^*$ .

Análogamente, si  $x(t) < x^*$ , entonces  $\tilde{x}(t) < 0$ ; por tanto, como  $s \in (\tilde{x}(t), 0)$ , entonces  $s < 0$ . Entonces  $s + x^* < x^*$  y  $U$  es una función creciente respecto de  $x$ , con lo que  $\tilde{U}(s) = U(s + x^*) - U(x^*) < 0$ . En conclusión,

$$V_1(\tilde{x}(t)) = \int_0^{\tilde{x}(t)} \tilde{U}(s) ds = - \int_{\tilde{x}(t)} \tilde{U}(s) ds > 0,$$

siempre y cuando  $x(t) \neq x^*$ .

Resumiendo,  $V_1(\tilde{x}) > 0$  para todo  $x \neq x^*$ .

Derivando  $V_1$  respecto de  $t$  a lo largo de soluciones del sistema (7.11) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} \tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\ &= -D\tilde{x}(t) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t)) \eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} - aU(x^*) \eta^* (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\ &\quad + b\nu\beta^* \eta^* (e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\ &= -D\tilde{x}(t) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t)) \eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} - aU(x^*) \eta^* (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\ &\quad + b\nu\beta^* \eta^* (e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) \pm b\nu\eta^* \beta^* (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\ &= -D\tilde{x}(t) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t)) \eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} - (aU(x^*) - b\nu\beta^*) \eta^* (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\ &\quad - b\nu\beta^* \eta^* (e^{\tilde{\eta}(t)} - e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))}) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) - \underline{b\nu\beta^* \eta^* \tilde{U}(\tilde{x}(t))} + \underline{b\nu\beta^* \eta^* \tilde{U}(\tilde{x}(t))} \\ &= -D\tilde{x}(t) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t)) \eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} - (aU(x^*) - b\nu\beta^*) \eta^* (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\ &\quad - b\nu\beta^* \eta^* (e^{\tilde{\eta}(t)} - e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))}) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\ &< -D\tilde{x}(t) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t)) \eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} - (aU(x^*) - b\nu\beta^*) \eta^* (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\ &\quad + b\nu\beta^* \eta^* |e^{\tilde{\eta}(t)} - e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))}| \tilde{U}(\tilde{x}(t)). \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} |e^{\tilde{\eta}(t)} - e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))}| &= \left| \int_{t-\tau_1(t)}^t \frac{d}{ds} [e^{\tilde{\eta}(s)}] ds \right| = \left| \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} \frac{d\tilde{\eta}(s)}{ds} ds \right| \\ &= c \left| \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} \tilde{U}(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) ds \right| \leq c \int_{t-\tau_1(t)}^t |e^{\tilde{\eta}(s)}| \left| \tilde{U}(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) \right| ds \\ &= c \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} \left| \tilde{U}(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) \right| ds \end{aligned}$$

y utilizando la desigualdad de Young

$$\begin{aligned}
\frac{dV_1(t)}{dt} &< -D\tilde{x}(t)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} - (aU(x^*) - b\nu\beta^*)\eta^*(e^{\tilde{\eta}(t)} - 1)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\
&\quad + b\nu\beta^*\eta^*|e^{\tilde{\eta}(t)} - e^{\tilde{\eta}(t-\tau_1(t))}|\tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\
&\leq -D\tilde{x}(t)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} - (aU(x^*) - b\nu\beta^*)\eta^*(e^{\tilde{\eta}(t)} - 1)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\
&\quad + bc\nu\beta^*\eta^*\left(\int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)}|\tilde{U}(\tilde{x}(s-\tau_2(s)))|ds\right)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\
&= -D\tilde{x}(t)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} - (aU(x^*) - b\nu\beta^*)\eta^*(e^{\tilde{\eta}(t)} - 1)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\
&\quad + bc\nu\beta^*\eta^*\int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)}|\tilde{U}(\tilde{x}(s-\tau_2(s)))|\tilde{U}(\tilde{x}(t))ds \\
&\leq -D\tilde{x}(t)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} - (aU(x^*) - b\nu\beta^*)\eta^*(e^{\tilde{\eta}(t)} - 1)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\
&\quad + \frac{bc\nu\beta^*\eta^*}{2}\left\{\int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)}ds \cdot \tilde{U}^2(\tilde{x}(t)) + \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)}|\tilde{U}(\tilde{x}(s-\tau_2(s)))|^2ds\right\} \\
&= -D\tilde{x}(t)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t))\eta^*e^{\tilde{\eta}(t)} - (aU(x^*) - b\nu\beta^*)\eta^*(e^{\tilde{\eta}(t)} - 1)\tilde{U}(\tilde{x}(t)) \\
&\quad + \frac{bc\nu\beta^*\eta^*}{2}\left\{\int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)}ds \cdot \tilde{U}^2(\tilde{x}(t)) + \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)}\tilde{U}^2(\tilde{x}(s-\tau_2(s)))ds\right\}
\end{aligned}$$

En segundo lugar definimos

$$V_2(\tilde{\eta}(t)) := \int_0^{\tilde{\eta}(t)} (e^s - 1)ds.$$

Ahora bien, si  $\eta(t) > \eta^*$ , entonces  $\tilde{\eta}(t) > 0$ ; de esta forma, como  $s \in (0, \tilde{\eta}(t))$ , entonces  $s > 0$ . En consecuencia,  $e^s - 1 > 1 - 1 = 0$ , por lo que

$$V_2(\tilde{\eta}(t)) = \int_0^{\tilde{\eta}(t)} (e^s - 1)ds > 0,$$

siempre y cuando  $\eta(t) \neq \eta^*$ .

Análogamente, si  $\eta(t) < \eta^*$ , entonces  $\tilde{\eta}(t) < 0$ ; por tanto, como  $s \in (\tilde{\eta}(t), 0)$ , entonces  $s < 0$ . Entonces  $e^s - 1 < 1 - 1 = 0$ , con lo que

$$V_2(\tilde{\eta}(t)) = \int_0^{\tilde{\eta}(t)} (e^s - 1)ds = -\int_{\tilde{\eta}(t)}^0 (e^s - 1)ds > 0,$$

siempre y cuando  $\eta(t) \neq \eta^*$ .

Resumiendo,  $V_2(\tilde{\eta}) > 0$  para todo  $\eta \neq \eta^*$ .

Derivando  $V_2$  respecto de  $t$  a lo largo de soluciones del sistema (7.11) tenemos

$$\frac{dV_2(t)}{dt} = \frac{d\tilde{\eta}(t)}{dt} (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))).$$

Finalmente, definimos el funcional

$$V_3(\tilde{x}(t), \tilde{\eta}(t)) := \frac{1 - M_2}{2(1 - M_1)} bcv\eta^* \beta^* \int_{t-\tau_1(t)}^t \int_v^t e^{\tilde{\eta}(s)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) ds dv.$$

Claramente  $V_3(\tilde{x}, \tilde{\eta}) > 0$  para todo  $\eta \neq \eta^*$ ,  $x \neq x^*$ , ya que todas las constantes que aparecen, así como el integrando, son estrictamente positivos, teniendo también en cuenta los extremos de integración.

Derivando  $V_3$  respecto de  $t$  a lo largo de soluciones del sistema (7.11) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dV_3(t)}{dt} &= \frac{1 - M_2}{2(1 - M_1)} bcv\eta^* \beta^* \frac{d}{dt} \left[ \int_{t-\tau_1(t)}^t \int_v^t \tilde{U}^2(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) ds dv \right] \\ &= \frac{1 - M_2}{2(1 - M_1)} bcv\eta^* \beta^* \left\{ \int_{t-\tau_1(t)}^t \left[ \frac{d}{dt} \int_v^t e^{\tilde{\eta}(s)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) ds \right] dv \right. \\ &\quad \left. - \left( \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) ds \right) \cdot (1 - \tau_1'(t)) \right\} \\ &= \frac{1 - M_2}{2(1 - M_1)} bcv\eta^* \beta^* \left\{ e^{\tilde{\eta}(t)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) \tau_1(t) \right. \\ &\quad \left. - \left( \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) ds \right) \cdot (1 - \tau_1'(t)) \right\}. \end{aligned}$$

Ahora consideramos el funcional

$$V(t) = V(\tilde{x}(t), \tilde{\eta}(t)) = V_1(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) + \kappa V_2(\tilde{\eta}(t)) + V_3(\tilde{\eta}(t)),$$

$$\text{con } \kappa = \frac{(aU(x^*) - b\nu\beta^*)\eta^*}{c} (1 - M_2).$$

Derivando  $V$  respecto de  $t$  a lo largo de soluciones del sistema (7.11) y usando que  $\tau_i'(t) \leq M_1 < 1$ ,  $i = 1, 2$ , tenemos



$$\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{dt} &= \frac{dV_1(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))}{dt} + \kappa \frac{dV_2(\tilde{\eta}(t))}{dt} + \frac{dV_3(\tilde{\eta}(t))}{dt} \\
&= \frac{d\tilde{x}(t - \tau_2(t))}{dt} \tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) + \kappa \frac{dV_2(\tilde{\eta}(t))}{dt} + \frac{dV_3(\tilde{\eta}(t))}{dt} \\
&= \frac{d\tilde{x}(s)}{ds} \Big|_{s=t-\tau_2(t)} \frac{d(t - \tau_2(t))}{dt} \tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) + \kappa \frac{dV_2(\tilde{\eta}(t))}{dt} + \frac{dV_3(\tilde{\eta}(t))}{dt} \\
&= \frac{d\tilde{x}(s)}{ds} \Big|_{s=t-\tau_2(t)} \cdot (1 - \tau_2'(t)) \tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) + \kappa \frac{dV_2(\tilde{\eta}(t))}{dt} + \frac{dV_3(\tilde{\eta}(t))}{dt} \\
&= \frac{dV_1(\tilde{x}(s))}{ds} \Big|_{s=t-\tau_2(t)} \cdot (1 - \tau_2'(t)) + \kappa \frac{dV_2(\tilde{\eta}(t))}{dt} + \frac{dV_3(\tilde{\eta}(t))}{dt} \\
&\leq \left\{ -D\tilde{x}(t - \tau_2(t)) \tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) \eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} \right. \\
&\quad - (aU(x^*) - b\nu\beta^*) \eta^* (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) \\
&\quad \left. + \frac{bc\nu\beta^*\eta^*}{2} \left[ \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} ds \cdot \tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) + \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(2)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) ds \right] \right\} \cdot \\
&\quad \cdot (1 - \tau_2'(t)) + (1 - M_2) \frac{(aU(x^*) - b\nu\beta^*) \eta^*}{c} (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) \\
&\quad + \frac{1 - M_2}{2(1 - M_1)} bc\nu\eta^*\beta^* \left\{ e^{\tilde{\eta}(t)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) \tau_1(t) \right. \\
&\quad \left. - \left( \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) ds \right) \cdot (1 - \tau_1'(t)) \right\} \\
&\leq \left\{ -D\tilde{x}(t - \tau_2(t)) \tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) \eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} \right. \\
&\quad - (aU(x^*) - b\nu\beta^*) \eta^* (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) \\
&\quad \left. + \frac{bc\nu\beta^*\eta^*}{2} \left\{ \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} ds \cdot \tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) + \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) ds \right\} \right\} \cdot \\
&\quad \cdot (1 - M_2) + (1 - M_2) \frac{(aU(x^*) - b\nu\beta^*) \eta^*}{c} (e^{\tilde{\eta}(t)} - 1) \tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(s))) \\
&\quad + \frac{1 - M_2}{2(1 - M_1)} bc\nu\eta^*\beta^* \left\{ e^{\tilde{\eta}(t)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) h \right. \\
&\quad \left. - (1 - M_1) \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(s - \tau_2(s))) ds \right\} \\
&= -D\tilde{x}(t - \tau_2(t)) \tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) \eta^* e^{\tilde{\eta}(t)} \\
&\quad + \frac{bc\nu\eta^*\beta^*}{2} \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} ds \cdot \tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) \\
&\quad + \frac{1 - M_2}{2(1 - M_1)} bc\nu\eta^*\beta^* e^{\tilde{\eta}(t)} \tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) h. \tag{7.14}
\end{aligned}$$

En virtud de la segunda ecuación de (7.11), sabemos que

$$\begin{aligned}\frac{d\eta(t)}{dt} &= -\nu\eta(t) - D\beta^*\eta(t) + cU(x(t - \tau_2(t)))\eta(t) \\ &\geq -\nu\eta(t) - D\beta^*\eta(t) \\ &= -(\nu + D\beta^*)\eta(t).\end{aligned}$$

De esta forma, como hemos hecho en otras ocasiones a lo largo de esta memoria, llegamos a

$$\eta(s) \leq \eta(t)e^{(\nu+D\beta^*)(t-s)},$$

con lo que

$$\begin{aligned}\eta^* \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{\tilde{\eta}(s)} ds &= \int_{t-\tau_1(t)}^t \eta^* e^{\tilde{\eta}(s)} ds = \int_{t-\tau_1(t)}^t \eta(s) ds \\ &\leq \int_{t-\tau_1(t)}^t \eta(t) e^{(\nu+D\beta^*)(t-s)} ds = \eta(t) \int_{t-\tau_1(t)}^t e^{(\nu+D\beta^*)(t-s)} ds \\ &= \frac{\eta(t)}{\nu + D\beta^*} \int_{t-\tau_1(t)}^t (\nu + D\beta^*) e^{(\nu+D\beta^*)(t-s)} ds = \frac{\eta(t)}{\nu + D\beta^*} (e^{(\nu+D\beta^*)\tau_1(t)} - 1) \\ &\leq \frac{\eta(t)}{\nu + D\beta^*} (e^{(\nu+D\beta^*)h} - 1).\end{aligned}$$

Introduciendo estos nuevos cálculos en (7.14), tenemos inmediatamente que

$$\begin{aligned}\frac{dV(t)}{dt} &\leq \left\{ -D\tilde{x}(t - \tau_2(t))\tilde{U}(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) - a\tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))\eta(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{bc\nu\beta^*}{2} \frac{\eta(t)}{\nu + D\beta^*} (e^{(\nu+D\beta^*)h} - 1) \tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t))) \right\} (1 - M_2) \\ &\quad + \frac{1 - M_2}{2(1 - M_1)} bc\nu\beta^* \eta(t) \tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))h \\ &\leq -a(1 - M_2)\tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))\eta(t) \\ &\quad + \frac{bc\nu\beta^*(1 - M_2)}{2(\nu + D\beta^*)} (e^{(\nu+D\beta^*)h} - 1) \tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))\eta(t) \\ &\quad + \frac{1 - M_2}{2(1 - M_1)} bc\nu\beta^* h \tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))\eta(t) \\ &= - \left\{ a - \frac{bc\nu\beta^*}{2(\nu + D\beta^*)} (e^{(\nu+D\beta^*)h} - 1) - \frac{bc\nu\beta^* h}{2(1 - M_1)} \right\} (1 - M_2) \tilde{U}^2(\tilde{x}(t - \tau_2(t)))\eta(t) \\ &= - \left\{ a - \frac{bc\nu\beta^*}{2} \left[ \frac{1}{\nu + D\beta^*} (e^{(\nu+D\beta^*)h} - 1) - \frac{h}{1 - M_1} \right] \right\} < 0,\end{aligned}$$

con lo que  $V'(t)$  es definida negativa, por tanto, el equilibrio positivo  $(x^*, \eta^*)$  es globalmente asintóticamente estable.



**Nota.-** Faltaría analizar la existencia de atractor pero eso es algo desconocido hasta el momento y será objeto de análisis en el futuro.



# Apéndice A

## Sistemas dinámicos autónomos.

En este apéndice nos encargamos de dar las nociones necesarias para analizar aquellos modelos que están regidos por ecuaciones de evolución del tipo

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= F(u(t)), \\ u(0) &= u_0,\end{aligned}\tag{A.1}$$

donde  $F : X \rightarrow X$ , siendo  $X$  un espacio métrico.

Una vez garantizada la existencia y unicidad de solución de (A.1), para cada dato inicial  $u_0 \in X$ , denotada por  $u(t; u_0)$ , queremos investigar qué le ocurre a  $u(t; u_0)$  cuando hacemos  $t \rightarrow +\infty$ .

Para unificar el estudio vamos a construir una aplicación

$$S_t \equiv S(t) : X \rightarrow X, \quad t \geq 0$$

dada por

$$u_0 \mapsto S_t u_0 = u(t; u_0).$$

Esta aplicación estará bien definida siempre y cuando haya existencia y unicidad de solución para (A.1); en caso de no tener garantizada la unicidad tendríamos que tratar la teoría de sistemas dinámicos multivaluados. Podemos, además, ver que la familia  $\{S(t) : t \geq 0\}$  satisface

1.  $S(0) = Id_X$ ,
2.  $S(t+s) = S(t)S(s)$ , lo que llamamos propiedad de concatenación, donde  $t$  es el tiempo transcurrido.
3.  $S(t) : X \rightarrow X$  es continua para todo  $t \geq 0$ .

**Ejemplo.-** Consideramos

$$\frac{du}{dt} = F(u),$$

donde  $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función lipschitz. Entonces, para cada  $u_0 \in \mathcal{O}$ , existe una única solución maximal del problema

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= F(u), \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

definida para todo  $t \geq 0$ , con lo que  $S(t)u_0 = u(t; u_0)$  define un semigrupo de operadores, o lo que es lo mismo, un sistema dinámico autónomo.

**Nota.-** En dimensión infinita, es decir, para EDP's, no hay resultados generales sobre existencia y unicidad de solución y, por tanto, hace falta un análisis preliminar.

Por tanto, analizar lo que le ocurre a  $u(t; u_0)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , es equivalente a analizar lo que le ocurre a  $S(t)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

En muchos sistemas (disipativos) existen unos entes (atractores) que determinan el comportamiento dinámico del mismo. El carácter disipativo del sistema dinámico garantiza la existencia del atractor global.

**Definición A.0.1** Sea  $B \subset X$  no vacío. Se dice que  $B$  es absorbente para el sistema dinámico  $S(t)$  si, para todo  $D \subset X$  acotado, existe  $T(D) > 0$  tal que  $S(t)D \subset B$  para todo  $t \geq T(D)$ .

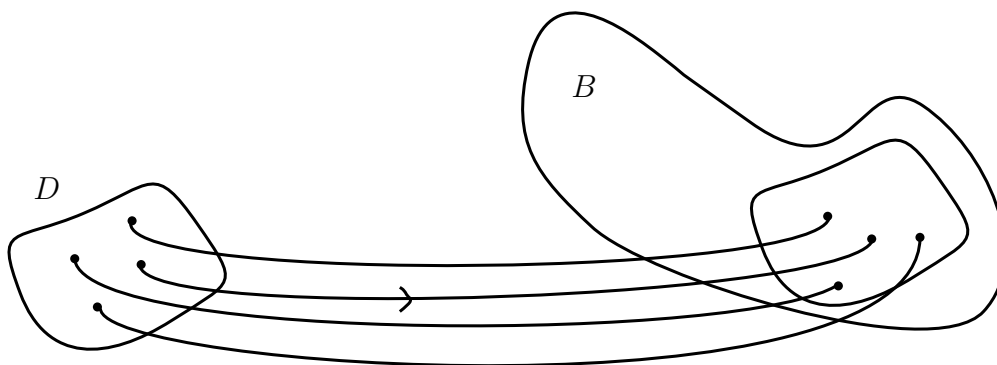


Figura A.1: Representación gráfica de un conjunto absorbente.

Toda la dinámica asintótica del sistema tiene lugar en el conjunto  $B$ . Más aún, dentro de  $B$  hay otro subconjunto que *guía* a todas las trayectorias del sistema dinámico y, por tanto, determina la dinámica del sistema.

**Definición A.0.2** Sea  $\mathcal{A} \subset X$ . Se dice que  $\mathcal{A}$  es *atrayente* si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(S(t)D, \mathcal{A}) = 0, \quad \forall D \subset X \text{ acotado},$$

donde

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b)$$

denota la *semi-distancia de Hausdorff*.

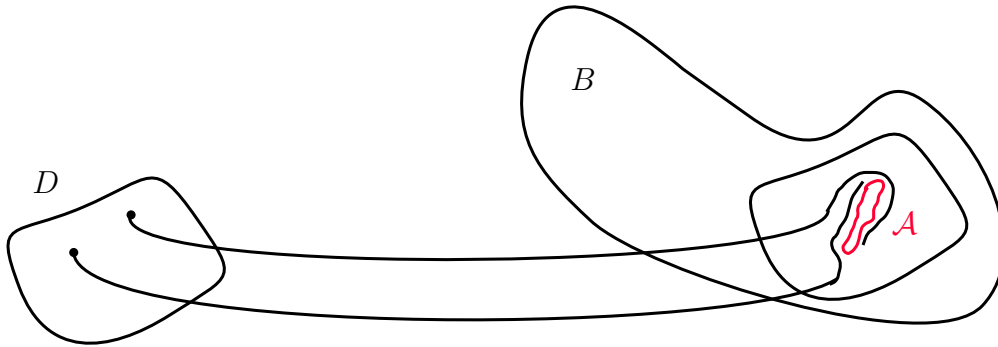


Figura A.2: Representación gráfica de un conjunto atrayente.

**Definición A.0.3** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  un sistema dinámico. Un *atractor global* para  $S(t)$  es un conjunto  $\mathcal{A} \subset X$  tal que

1.  $\mathcal{A}$  es compacto (proviene de que  $\mathcal{A} = X$ ).
2.  $\mathcal{A}$  es invariante, es decir,  $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ , para todo  $t \geq 0$ ; esto viene a significar que la dinámica que empieza en  $\mathcal{A}$ , sigue allí.
3.  $\mathcal{A}$  es atrayente, es decir, para todo  $D \subset X$  acotado,

$$\text{dist}(S(t)D, \mathcal{A}) \rightarrow 0,$$

cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

**Nota.-** El atractor global, si existe, es único.

Veamos ahora alguna condición suficiente, e incluso necesaria y suficiente, que garantiza la existencia del atractor global. Antes necesitaremos un lema previo.

**Lema A.0.1** *Sea  $A \subset X$ ,  $A \neq \emptyset$  tal que  $\exists T > 0$  de modo que  $\gamma_T^+(A) = \bigcup_{t \geq T} S(t)A$  es relativamente compacto, es decir,  $\overline{\gamma_T^+(A)}$  es compacto. Entonces, el conjunto*

$$\omega(A) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} S(\tau)(A)} \left( = \left\{ x \in X : \exists t_n \uparrow +\infty, \exists x_n \in A : x = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(t_n)x_n \right\} \right)$$

*es un compacto, no vacío e invariante.*

**Teorema A.0.1** *Supongamos  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  un sistema dinámico en un espacio métrico  $(X, d)$  completo. Supongamos que es disipativo, es decir, existe  $B_0 \subset X$  absorbente y compacto, entonces existe  $\mathcal{A}$  atractor global del sistema dinámico y viene dado por  $\mathcal{A} = \omega(B_0)$ . Además,  $\mathcal{A}$  es maximal entre los conjuntos invariantes de  $X$  y conexo si  $X$  lo es.*

**Observación.-** Existen otras condiciones suficientes que garantizan la existencia del atractor global:

- (a) Si  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  es compacto, es decir,  $S(t)$  es compacto para todo  $t \geq 0$ , y existe  $B_0$  acotado tal que es absorbente y existe  $T > 0$  de tal forma que  $\gamma_T^+(B_0)$  es acotado, entonces existe  $\mathcal{A} = \omega(B_0)$ .
- (b) Basta con que  $S(t_1)$  sea compacto, para algún  $t_1 > 0$  y que se verifique lo que se dice en (a).
- (c) Hay casos (modelos hiperbólicos) en los que se usa el carácter asintóticamente compacto, en lugar de la compacidad.

**Teorema A.0.2** *Supongamos que  $S(t) = T(t) + U(t)$ , donde  $T(t)$  verifica que para todo  $B \subset X$  acotado, existe  $t_0(B)$  tal que  $\gamma_{t_0(B)}^+(B)$  es compacto, y  $U(t)$  verifica que para todo  $\mathcal{C} \subset X$  acotado*

$$\sup_{c \in \mathcal{C}} |U(t)x|_X \longrightarrow 0,$$

*cuando  $t \longrightarrow +\infty$ . Entonces, si existe  $B_0 \subset X$  acotado y absorbente, existe  $\mathcal{A}$  atractor global.*

**Observación.-** En dimensión finita, demostrar la existencia de un compacto absorbente se reduce a demostrar que existe un acotado absorbente (pues compacto es equivalente a cerrado y acotado). Pero en dimensión infinita (por ejemplo, para EDP's) las cosas son mucho más complicadas, pues compacto no significa cerrado y acotado.



## A.1. Estructura y propiedades del atractor.

Conocer las propiedades y estructura del atractor global es una cuestión fundamental, ya que dicho conjunto es el que, en gran medida, determina todo el comportamiento asintótico del sistema disipativo. Por tanto, cuanto más complicada sea su estructura más caótico puede parecer el comportamiento del sistema dinámico. Son muchos aspectos los que pueden ser analizados, pero nosotros vamos a describir sólo algunos de ellos.

Consideramos  $S(t)$  un sistema dinámico y  $\mathcal{A}$  su atractor global.

**Teorema A.1.1** (a) *Toda órbita acotada y completa está incluida en  $\mathcal{A}$ .*

(b) *Si  $S(t)$  es inyectivo en  $\mathcal{A}$ , es decir, si  $S(t)u_0 = S(t)v_0$  para algún  $t > 0$ , entonces  $u_0 = v_0$ , entonces por cada punto de  $\mathcal{A}$  pasa una única órbita completa, que además es acotada, y en consecuencia  $\mathcal{A}$  está formado por todas las órbitas completas y acotadas.*

**Notación.-** Usaremos  $\Gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$  o simplemente  $u(t)$  para decir que  $\Gamma$  es una órbita completa del sistema dinámico.

**Teorema A.1.2** *Sea  $S(t)$  un sistema dinámico y  $\mathcal{A}$  su atractor global.*

(c)  *$\mathcal{A}$  es el menor compacto que atrae los conjuntos acotados de  $X$ .*

(d)  *$\mathcal{A}$  es el mayor conjunto acotado e invariante de  $X$ .*

No obstante, lo que resulta más sorprendente es que el atractor contiene mucha inestabilidad (de ahí el comportamiento aparentemente caótico de los sistemas disipativos).

Definamos previamente los conjuntos o variedades inestables de un punto crítico o de equilibrio y de un subconjunto invariante.

Si  $u_0 \in X$  es un punto crítico (o de equilibrio, o punto fijo), es decir,  $S(t)u_0 = u_0, \forall t \in \mathbb{R}$ , entonces  $\Gamma(u_0) = \{u_0\}$  y por tanto  $u_0 \in \mathcal{A}$ .

Se definen las variedades estable ( $W^s(u_0)$ ) e inestable ( $W^u(u_0)$ ) de  $u_0$  como

$$W^u(u_0) = \left\{ z \in X : \exists u(t), u(0) = z : u(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} u_0 \right\},$$

$$W^s(u_0) = \left\{ z \in X : \exists u(t), u(0) = z : u(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} u_0 \right\}.$$

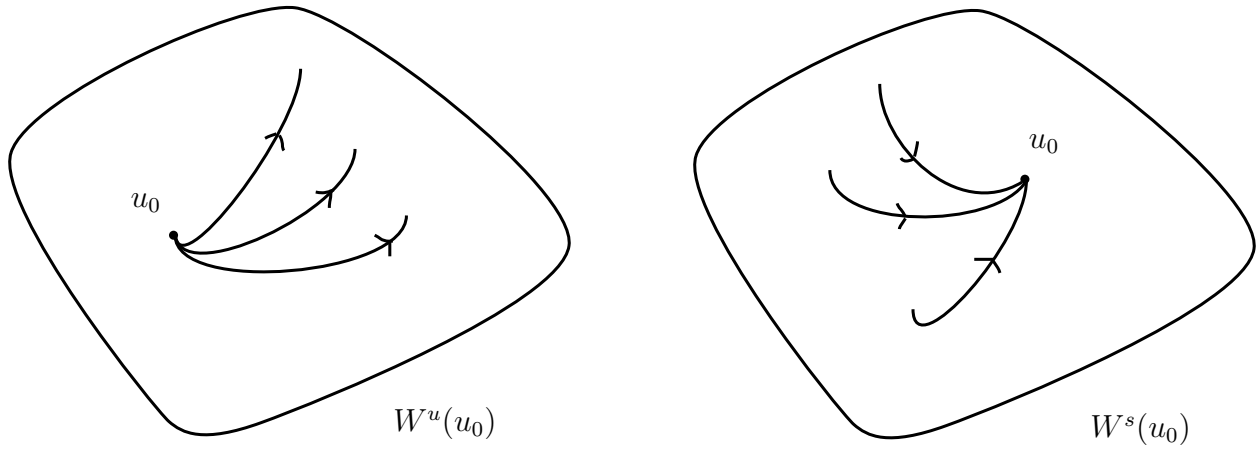


Figura A.3: Representación gráfica de una variedad estable (derecha) y de una variedad inestable (izquierda).

Más generalmente, si  $U$  es un conjunto invariante, se definen  $W^u(U)$  y  $W^s(U)$  como

$$W^u(U) = \left\{ z \in X : \exists u(t), u(0) = z : \text{dist}(u(t), U) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0 \right\},$$

$$W^s(U) = \left\{ z \in X : \exists u(t), u(0) = z : \text{dist}(u(t), U) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \right\}.$$

**Teorema A.1.3** (e) Si  $U \subset X$  es un compacto invariante, entonces  $W^s(U) \subset \mathcal{A}$ .

**Teorema A.1.4** Supongamos que existe  $B_0$  compacto absorbente, con lo que existe  $\mathcal{A} = \omega(B_0)$ . Entonces:

(f)

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B \subset X, \text{ acot.}} \omega(B),$$

(g)

$$\mathcal{A} = \bigcup_{K \subset X, \text{ comp.}} \omega(K).$$

No obstante, a pesar de estas propiedades generales, existe una clase de sistemas dinámicos para los que se puede conocer la estructura de sus atractores con más profundidad. Son los sistemas tipo gradiente, es decir, para los que existe una función de Lyapunov.

**Definición A.1.1** Sea  $B \subset X$  positivamente invariante, es decir,  $S(t)B \subset B$ ,  $\forall t \geq 0$ . Una función de Lyapunov sobre  $B$  para el sistema dinámico  $S(t)$  es cualquier  $\Psi \in C^0(B)$  tal que

i) para cada  $x \in B$ , la función

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \Psi(S(t)x)$$

es no creciente.

ii) si  $\Psi(S(t)x) = \Psi(x)$  para algún  $x \in B$  y algún  $t > 0$ , entonces  $x$  es un punto crítico.

Entonces vamos a comprobar cómo, esencialmente, los atractores de los sistemas dinámicos que poseen función de Lyapunov están formados por las variedades inestables de los puntos críticos.

**Teorema A.1.5** *Supongamos que el sistema dinámico  $S(t)$  posee atractor global y existe una función de Lyapunov  $\Psi$  sobre  $B$ , siendo  $B \subset X$  un conjunto compacto absorbente y positivamente invariante entonces*

$$\omega(\{x\}) \subset \mathcal{E}, \quad \forall x \in X,$$

donde  $\mathcal{E}$  es el conjunto de equilibrios del sistema dinámico. En particular, si  $X$  es conexo y  $\mathcal{E}$  es discreto, entonces  $\omega(\{x\})$  consiste en un único punto crítico, para todo  $x \in X$ .

Razonando de forma similar se puede obtener:

**Teorema A.1.6** *Supongamos que el sistema dinámico  $S(t)$  posee atractor global  $\mathcal{A}$  y que para todo  $x \in X$ , la aplicación*

$$t \mapsto S(t)x$$

pertenece a  $C^0([0, +\infty); X)$ . Para cada  $t > 0$ ,  $S(t)|_{\mathcal{A}}$  es inyectiva y existe una función de Lyapunov sobre  $\mathcal{A}$ . Entonces

$$\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E}).$$

Si además  $\mathcal{E}$  es discreto y  $X$  conexo, entonces

$$\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E}) = \bigcup_{z \in \mathcal{E}} W^u(z)$$

y también

$$\mathcal{A} = W^s(\mathcal{E}) = \bigcup_{z \in \mathcal{E}} W^s(z).$$

## A.2. Otras propiedades del atractor global.

### A.2.1. Propiedad de seguimiento sobre el atractor.

Esta propiedad nos viene a decir que toda trayectoria del sistema dinámico es seguida por otra sobre el atractor durante cierto tiempo finito. Es como si sobre el atractor un pudiera observar *la sombra* de la trayectoria del sistema, o dicho de otra forma, las trayectorias del sistema dinámico van siguiendo lo que hacen las trayectorias sobre el atractor, lo que refleja cómo la estructura del atractor es la responsable del eventualmente caótico comportamiento del sistema dinámico.

**Teorema A.2.1** *Sea  $S(t)$  un sistema dinámico y sea  $\mathcal{A}$  su atractor global. Sea  $u_0 \in X$  y sea  $u(t) = S(t)u_0$  una órbita del sistema dinámico. Dados  $\varepsilon > 0$ ,  $T > 0$  fijos, existen  $\tau = \tau(\varepsilon, T) \geq 0$ ,  $v_0 \in \mathcal{A}$  tales que*

$$|u(t + \tau) - S(t)v_0| \leq \varepsilon, \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

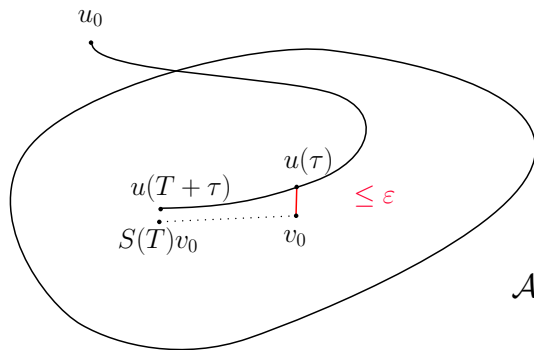


Figura A.4: Representación gráfica de la propiedad de seguimiento.

Si se quiere seguir toda una trayectoria durante un intervalo de tiempo infinito, entonces habrá que usar diferentes órbitas sobre  $\mathcal{A}$ , saltando de unas a otras.

**Corolario A.2.1** *Sea  $\{u(t)\}_{t \geq 0}$  una órbita del sistema dinámico y  $\mathcal{A}$  su atractor global. Entonces, existe  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , existe  $t_n$  creciente tal que  $t_{n+1} - t_n \rightarrow +\infty$  y existe  $v_n \in \mathcal{A}$  tales que*

$$|u(t) - S(t - t_n)v_n| \leq \varepsilon, \quad \text{para } t_n \leq t \leq t_{n+1}.$$

*Más aún, los saltos*

$$|v_{n+1} - S(t_{n+1} - t_n)v_n| \longrightarrow 0.$$



# Apéndice B

## Sistemas dinámicos no autónomos.

En este apéndice damos algunas nociones sobre el análisis del comportamiento de sistemas dinámicos que se modelan por ecuaciones diferenciales no autónomas, es decir,

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= F(t, u(t)), \\ u(t_0) &= u_0.\end{aligned}\tag{B.1}$$

En este caso, no sólo es importante el valor de la solución en el instante presente, como ocurría en el caso de los sistemas modelados por ecuaciones diferenciales autónomas, sino el instante inicial, es decir, la evolución del sistema viene determinada no sólo por el tiempo transcurrido, por ejemplo si consideramos

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -2tu, \\ u(t_0) &= u_0\end{aligned}$$

se obtiene que

$$u(t) = u_0 e^{-(t^2 - t_0^2)},$$

y claramente  $t^2 - t_0^2 = (t - t_0)^2 + 2(t - t_0)t_0$ , por lo que resulta imposible escribir  $t^2 - t_0^2$  en función de  $t - t_0$  sólo, es decir, el tiempo transcurrido.

Así, no es posible definir un semigrupo a partir de (B.1), sino que en este caso lo que se define es un proceso.

Suponiendo que para cada  $(t_0, u_0)$  el problema (B.1) posee una única solución  $u(t; t_0, u_0)$ ,  $t, t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $u_0 \in X$  (espacio métrico), se puede definir una familia biparamétrica

$$U(\cdot, \cdot)(\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$$

de la siguiente forma

$$U(t, s)u_0 = u(t; s, u_0), \quad t \geq s, \quad u_0 \in X,$$

que verifica:

1.  $U(t, t)u_0 = u_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$
2.  $U(t, \tau)U(\tau, s)u_0 = U(t, s)u_0, \quad t \geq \tau \geq s, \quad u_0 \in X,$
3.  $(t, s, u_0) \in \mathbb{R}_d^2 \times X \mapsto U(t, s)u_0$  es continua, donde  $\mathbb{R}_d^2 := \{(t, s) : t \geq s\}.$

Esto motiva la definición de proceso o semigrupo biparamétrico.

**Definición B.0.1** *Un proceso sobre  $X$  es una aplicación  $U(\cdot, \cdot)(\cdot) : \mathbb{R}_d^2 \times X \longrightarrow X$  que verifica 1., 2. y 3. anteriores.*

Ahora bien, dado un proceso  $U$  sobre  $X$  veamos cómo se puede construir un sistema dinámico autónomo a partir de él. Definamos  $\tilde{X} = \mathbb{R} \times X$  y  $\tilde{U} = \mathbb{R}^+ \times \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$  como

$$\tilde{U}(t, (t_0, u_0)) = (t + t_0, U(t + t_0, t_0)u_0).$$

Entonces  $\tilde{U}$  es un sistema dinámico autónomo sobre  $\tilde{X}$ .

En efecto,

$$\begin{aligned} \tilde{U}(0, (t_0, u_0)) &= (t_0, U(t_0, t_0)u_0) = (t_0, u_0) \\ \tilde{U}(t + s, (t_0, u_0)) &= (t_0 + t + s, U(t_0 + t + s, t_0)u_0) \\ &= (t_0 + t + s, U(t_0 + t + s, t_0 + t)U(t_0 + t, t_0)u_0) \\ &= \tilde{U}(s, (t + t_0, U(t_0 + t, t_0)u_0)) \\ &= \tilde{U}(s, \tilde{U}(t, (t_0, u_0))). \end{aligned}$$

Observemos que el sistema dinámico autónomo  $\tilde{U}$  posee algunas propiedades inusuales. En particular, no hay conjuntos compactos de  $\tilde{X}$  que sean invariantes para  $\tilde{U}$ . En efecto, si  $\tilde{\mathcal{A}} \subset \tilde{X}$  es compacto, entonces  $\tilde{\mathcal{A}} \subset [a, t] \times K$ , con  $K \subset X$ , entonces

$$\tilde{U}(t, \tilde{\mathcal{A}}) = \bigcup_{(t_0, u_0) \in \tilde{\mathcal{A}}} \tilde{U}(t, (t_0, u_0)) = \bigcup_{(t_0, u_0) \in \tilde{\mathcal{A}}} (t + t_0, U(t + t_0, t_0)u_0)$$

y para  $t$  suficientemente grande  $t + t_0 \notin [a, b]$ . Esto va a tener repercusiones importantes y significa que muchos conceptos de la teoría de sistemas dinámicos autónomos necesitarán modificaciones apropiadas en el contexto no autónomo. Por ejemplo, notemos que un conjunto invariante de  $\tilde{X}$ , tendrá la forma



$$\tilde{\mathcal{A}} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} (t_0, \mathcal{A}(t_0)), \quad \text{con } \mathcal{A}(t_0) \subset X.$$

Entonces,  $\tilde{U}(t)\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{A}}$  implicará que se verifique

$$\bigcup_{t'_0 \in \mathbb{R}} (t'_0, \mathcal{A}(t'_0)) = \bigcup_{t_0 \in \mathbb{R}} (t_0 + t, U(t_0 + t, t_0)\mathcal{A}(t_0)),$$

lo que es equivalente a

$$t'_0 = t_0 + t \quad \text{y} \quad U(t_0 + t, t_0)\mathcal{A}(t_0) = \mathcal{A}(t_0 + t),$$

lo que va a motivar nuestra definición posterior de invarianza.

**Observación.-** En las explicaciones previas queremos resaltar la idea de transformar un sistema no autónomo en otro autónomo a través de incluir la variable temporal como una nueva variable dependiente del sistema no parece adecuada. En este punto podemos hablar de *cociclos* y *skew-product flows* o flujos hemisimétricos.

**Observación.-** Otro hecho que resulta curioso (o no muy conveniente) es que el concepto de  $\omega$ -límite no resulta un conjunto invariante. En efecto, se define el conjunto  $\omega$ -límite para el proceso  $U$  como

$$\omega(t_0, u_0) = \{y \in X : \exists t_n \uparrow +\infty, U(t_n, t_0)u_0 \rightarrow y\}.$$

Se demuestra fácilmente que  $\omega(t_0, u_0)$  es un compacto no vacío cuando, por ejemplo,  $\bigcup_{t \geq t_0} U(t, t_0)$  no es precompacto. Sin embargo, este conjunto puede no ser invariante (como lo es su versión autónoma). Un ejemplo es el siguiente:

$$\frac{du}{dt} = -u + e^{-t}.$$

La solución de esta ecuación es

$$u(t; t_0, u_0) = e^{-(t-t_0)}u_0 + (t - t_0)e^{-t}.$$

Es obvio que  $u(t; t_0, u_0) \rightarrow 0$ , cuando  $t \rightarrow +\infty$ , para todo  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $u_0 \in \mathbb{R}$ , luego

$$\omega(t_0, u_0) = \{0\}, \quad \forall (t_0, u_0) \in \mathbb{R}^2.$$

Sin embargo  $u(t; t_0, 0) = (t - t_0)e^{-t} \neq 0, \forall t \neq t_0$ , luego  $\omega^+(t_0, u_0)$  no es positivamente invariante.

Con esta serie de preliminares, parece difícil desarrollar una teoría general sobre atractores globales para procesos generados por sistemas dinámicos no autónomos, en el mismo sentido que se ha desarrollado la de sistemas autónomos. No obstante, es posible llevar a cabo este objetivo

haciendo uso de la teoría *pullback* que ahora motivaremos.

Consideramos, por ejemplo,

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -u + t, \\ u(t_0) &= u_0\end{aligned}$$

y calculamos su solución. Operando resulta

$$u(t; t_0, u_0) = (u_0 + 1 - t_0)e^{-(t-t_0)} + t - 1.$$

Luego podemos definir un proceso como

$$U(t, t_0)u_0 = u(t; t_0, u_0).$$

Veamos cómo importa (y mucho) el dato del instante inicial en el comportamiento asintótico del problema. Observemos en primer lugar que todas las soluciones existen globalmente, y que  $u(t; t_0, u_0) \rightarrow \infty$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ .

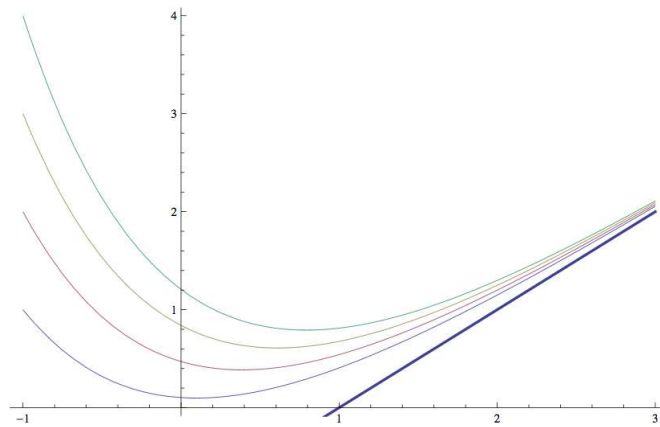


Figura B.1: Convergencia en sentido forward.

Luego, del efecto disipativo introducido por el término  $-u$  no se observa ningún efecto de atracción. Sin embargo, si escogemos dos soluciones cualesquiera  $u, v$  correspondientes a datos iniciales  $u_0, v_0$ , tendremos

$$\frac{d}{dt}(u(t) - v(t)) = -(u(t) - v(t))$$

y, por tanto,  $u(t) - v(t) = (u_0 - v_0)e^{-(t-t_0)}$ .

Luego, aunque cada solución se va a infinito cuando  $t \rightarrow +\infty$ , todas se van *de la misma forma*. Ahora nos preguntamos si hay algún *sitio* especial que describa explícitamente ese comportamiento.

Observemos que

$$u(t; t_0, u_0) - (t - 1) = (u_0 + 1 - t_0)e^{-(t-t_0)} \rightarrow 0,$$

cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Luego todas las soluciones se aproximan a la recta  $u = t - 1$ , que también es solución, cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

Definamos

$$\{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}} = \{t - 1\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

Se tiene que

$$u(t; t_0, \mathcal{A}(t_0)) = \mathcal{A}(t).$$

En efecto,

$$u(t; t_0, \mathcal{A}(t_0)) = (t_0 - 1 + 1 - t_0)e^{-(t-t_0)} + t - 1 = t - 1$$

y si  $B \subset \mathbb{R}$  está acotado, entonces se tiene que

$$\text{dist}(U(t, t_0)B, \mathcal{A}(t)) \rightarrow 0,$$

cuando  $t \rightarrow +\infty$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \text{dist}(U(t, t_0)B, \mathcal{A}(t)) &= \sup_{b \in B} \inf_{a \in \mathcal{A}(t)} |U(t, t_0)b - a| \\ &= \sup_{b \in B} |U(t, t_0)b - (t - 1)| \\ &= \sup_{b \in B} |(b + 1 - t_0)e^{-(t-t_0)}| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

En consecuencia, sería sensato decir que la familia  $\{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  es un atractor para el proceso  $U$ , en sentido *forward*. Notemos que aunque cada componente  $\mathcal{A}(t)$  es acotada, la unión de todas resulta ser no acotada.

Esto llevaría a definir el atractor no autónomo como una familia  $\{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  tal que  $\mathcal{A}(t)$  es compacto para cada  $t \in \mathbb{R}$ , es invariante en el sentido anterior ( $U(t, s)\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(t)$ ) y atrae a cada acotado  $B \subset X$ , es decir, para cada  $s \in \mathbb{R}$  y  $B \subset X$  acotado

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(U(t, s)B, \mathcal{A}(t)) = 0.$$

Desafortunadamente, una definición como ésta es probablemente adecuada para casos muy particulares y restrictivos (por ejemplo, cuando el proceso es uniformemente asintóticamente compacto en el sentido de Chepyzhov & Vishik).

No obstante, es importante observar que la familia  $\{\mathcal{A}(t) = t - 1\}_{t \in \mathbb{R}}$  también aparece como el límite de  $u(t; t_0, u_0)$  cuando  $t_0 \rightarrow -\infty$  (esto es lo que se conoce como límite pullback o desde  $-\infty$ ) y del mismo modo, la diferencia de dos soluciones  $u$  y  $v$  también tienen el mismo límite pullback, es decir,

$$u(t) - v(t) = (u_0 - v_0)e^{-(t-t_0)} \rightarrow 0,$$

cuando  $t_0 \rightarrow -\infty$ .

Más interesante aún es el hecho de que al tomar límite pullback vamos a obtener un objeto con interesantes propiedades dinámicas y bajo condiciones muy poco restrictivas sobre el sistema dinámico.

Observemos en el ejemplo precedente que  $\{\mathcal{A}(t)\} = \{t - 1\}$  es tanto atractor forward como pullback.

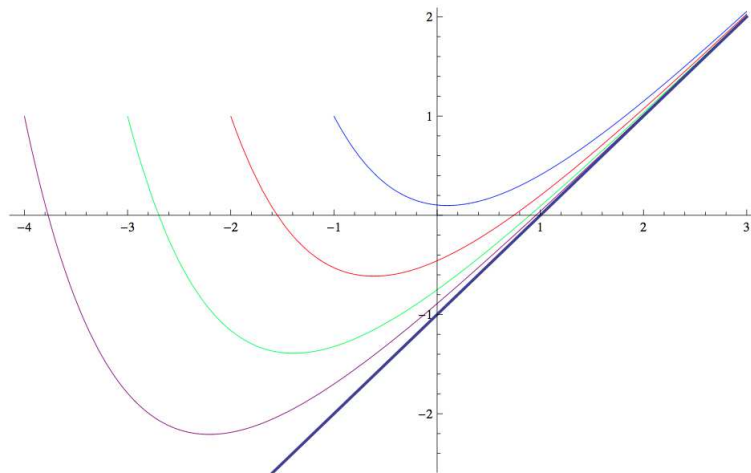


Figura B.2: Convergencia en sentido pullback.

Observemos que en la atracción pullback no miramos lo que ocurre cuando el tiempo final se va a  $-\infty$  (evolución hacia atrás), sino que miramos lo que ocurre en el instante  $t$  cuando el instante inicial se va a  $-\infty$ , es decir, qué ocurre *ahora* si comenzamos el experimento cada vez antes.

**Observación.-** Los conceptos de atracción pullback y forward son independientes, si bien en sistemas autónomos o bajo condiciones de uniformidad son equivalentes.

Consideremos los problemas

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \pm 2tu + 1, \\ u(t_0) &= u_0.\end{aligned}$$

Resolviendo la EDO, obtenemos

$$u_{\pm}(t; t_0, u_0) = u_0 e^{\pm t^2 \mp t_0^2} + e^{\pm t^2} \int_{t_0}^t e^{\mp s^2} ds,$$

con lo que

$$\begin{aligned}u_+(t; t_0, u_0) &= u_0 e^{t^2 - t_0^2} + e^{t^2} \int_{t_0}^t e^{-s^2} ds, \\ u_-(t; t_0, u_0) &= u_0 e^{-(t^2 - t_0^2)} + e^{-t^2} \int_{t_0}^t e^{s^2} ds.\end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}u_+(t) &\longrightarrow +\infty, & \text{si } t &\longrightarrow +\infty, \\ u_+(t) &\longrightarrow e^{t^2} \int_{-\infty}^t e^{-s^2} ds, & \text{si } t_0 &\longrightarrow -\infty.\end{aligned}$$

Luego  $u_+$  posee límite pullback pero no forward. Por otra parte,

$$\begin{aligned}u_-(t) &\longrightarrow 0, & \text{si } t &\longrightarrow +\infty, \\ u_-(t) &\longrightarrow +\infty, & \text{si } t_0 &\longrightarrow -\infty,\end{aligned}$$

luego  $u_-$  converge forward pero no pullback.

Veamos ahora las definiciones básicas de la teoría de atractores pullback.

**Definición B.0.2** Sea  $U(t, s)$  un proceso. Dado  $t \in \mathbb{R}$ , se dice que un conjunto  $K(t) \subset X$  atrae en sentido pullback a los acotados de  $X$  en el instante  $t$  si

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(U(t, s)D, K(t)) = 0, \quad \forall D \subset X \text{ acotado.}$$

La familia  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  se dice que es pullback atrayente para los acotados de  $X$  si  $K(t)$  atrae pullback a todos los acotados de  $X$  en el instante  $t$ .

**Definición B.0.3** Dado  $t \in \mathbb{R}$ , se dice que  $B(t)$  absorbe en sentido pullback los acotados de  $X$  en el instante  $t$ , si para cada acotado  $D \subset X$  existe  $T(t, D) \leq t$  tal que  $U(t, x)D \subset B(t)$ ,  $\forall s \leq T(t, D)$ . Se dice que la familia  $\{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  es absorbente pullback para los acotados de  $X$  si  $B(t)$  absorbe en sentido pullback a los acotados de  $X$  en el instante  $t$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

**Definición B.0.4** Se dice que  $\{U(t, s)\}$  es pullback disipativo para acotados si existe  $\{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  con  $B(t) \subset X$  acotado y absorbente pullback para acotados.

**Definición B.0.5** Sea  $\{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Se dice que  $\{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  es invariante para el proceso  $\{U(t, s)\}$  si

$$U(t, s)B(s) = B(t), \quad \forall t \geq s, (t, s) \in \mathbb{R}_d^2.$$

**Definición B.0.6** Una familia  $\{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  de conjuntos compactos se llama atractor pullback para el proceso  $\{U(t, s)\}$  si es invariante y atrae pullback a los acotados de  $X$ , y es minimal, es decir, si  $\{\mathcal{C}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  es otra familia invariante que atrae pullback a los acotados de  $X$ , entonces  $\mathcal{A}(t) \subseteq \mathcal{C}(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

**Observación.-** La condición de minimalidad garantiza la unicidad del atractor pullback, pero no es necesaria imponerla en situaciones más generales (universos de conjuntos, carácter uniformemente acotado del atractor, etc.).

Veamos la relación que existe entre el atractor pullback y el atractor global. Obviamente, siempre podemos hablar del concepto de atractor global y pullback para un sistema dinámico.

Esta condición no era necesaria en el caso autónomo, pero es crucial en este contexto no autónomo para garantizar la unicidad del atractor pullback.

Como ejemplo trivial podemos considerar  $S(t)u_0 = e^{-t}u_0$  y su procesos asociado  $U(t, s) = S(t - s) = e^{-(t-s)}$  que provienen del problema

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -u, \\ u(t_0) &= u_0. \end{aligned}$$

Es claro que  $\mathcal{A} = \{0\}$ . Sin embargo, la familia  $\{[-e^{-t}, e^{-t}]\}_{t \in \mathbb{R}}$  es invariante para  $U(t, s)$  y atrae pullback a los acotados de  $\mathbb{R}$ , es decir, sería un atractor pullback si no exigiéramos minimalidad. En efecto, sea  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  un sistema dinámico autónomo sobre  $X$ . Definamos  $\{U(t, s)\}_{(t,s) \in \mathbb{R}_d^2}$  como  $U(t, s) = S(t-s)$ . Es inmediato comprobar que  $\{U(t, s)\}$  es un proceso. Entonces, se verifica:

**Teorema B.0.1** *El sistema dinámico  $\{S(t)\}$  posee atractor global  $\mathcal{A}$  si, y sólo si, el proceso  $\{U(t, s) = S(t - s)\}$  posee atractor pullback  $\{\mathcal{A}\}_{t \in \mathbb{R}}$ . Más aún,  $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .*

Establecemos a continuación resultados que garantizan la existencia de atractor pullback, aunque serán necesarias algunas definiciones previamente.

**Definición B.0.7** *Sea  $\{U(t, s)\}$  un proceso y sea  $B \subset X$ . Se define el conjunto pullback omega límite de  $B$  en el instante  $t$  como*

$$\Lambda(B, t) := \bigcap_{\sigma \leq s \leq \sigma} \overline{U(t, s)B}.$$

Se verifica que

$$\Lambda(B, t) := \left\{ y \in X : \exists \{s_n\}_{n \geq 1} \subset (-\infty, t), s_n \rightarrow -\infty, \exists \{x_n\} \subset B, y = \lim_{n \rightarrow \infty} U(t, s_n)x_n \right\}.$$

Obviamente, si  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  es un sistema dinámico y  $U(t, s) = S(t - s)$ ,  $t \geq s$ , entonces

$$\begin{aligned} \Lambda(B, t) &= \bigcap_{\sigma \leq t} \overline{\bigcup_{s \leq \sigma} U(t, s)B} = \bigcap_{\sigma \leq t} \overline{\bigcup_{s \leq \sigma} S(t - s)B} = \bigcap_{0 \leq t - \sigma} \overline{\bigcup_{\sigma - s \geq 0} S(t - s)B} \\ &= \bigcap_{0 \leq t - \sigma} \overline{\bigcup_{r \geq t - \sigma} S(r)B} = \bigcap_{0 \leq s} \overline{\bigcup_{r \geq s} S(r)B} = \omega(B). \end{aligned}$$

Luego, en el caso autónomo ambos conceptos coinciden.

El siguiente resultado será clave para demostrar la existencia de atractor pullback.

**Lema B.0.1** *Sea  $U(t, s)$  un proceso. Si  $B \subset X$  entonces*

$$U(t, s)\Lambda(B, s) \subset \Lambda(B, t),$$

*es decir, el omega límite es positivamente invariante.*

*Si  $B \subset X$  es tal que  $\Lambda(B, s)$  es compacto y atrae a  $B$  en sentido pullback en el instante  $s$ , entonces*

$$U(t, s)\Lambda(B, s) = \Lambda(B, t), \quad \forall t \geq s.$$

*Más aún, si  $\Lambda(B, t)$  atrae en sentido pullback al conjunto  $\mathcal{C}$  en el instante  $t$ , y  $\mathcal{C}$  es conexo y contiene  $\bigcup_{s \leq t} \Lambda(B, s)$ , entonces  $\Lambda(B, t)$  es también conexo.*

**Lema B.0.2** *Sea  $U(t, s)$  un proceso. Si  $B \subset X$  es no vacío y  $\overline{\bigcup_{s \leq s_0} U(t, s)B}$  es compacto para algún  $s_0 \in \mathbb{R}$  con  $s_0 \leq t$ , entonces  $\Lambda(B, t)$  es un compacto, no vacío, invariante y atrae pullback al conjunto  $B$  en el instante  $t$ .*

**Observación.-** Notemos que estos lemas poseen, particularizando para procesos *autónomos*, es decir,  $U(t, s) = S(t - s)$ , versiones autónomas que ya fueron enunciadas en el Apéndice anterior.

Veamos ahora algunos resultados que aseguran la existencia de atractor pullback.

**Teorema B.0.2** *Sea  $\{U(t, s)\}$  un proceso en el espacio métrico  $X$ . Son equivalentes:*

1.  $U(t, s)$  posee un atractor pullback  $\{\mathcal{A}(t), t \in \mathbb{R}\}$ .
2. Existe una familia de conjuntos compactos  $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  que atrae en sentido pullback a los acotados de  $X$ , en cuyo caso  $\mathcal{A}(t)$  viene dado por

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup \{\Lambda(B, t) : B \subset X, \text{ acotado}\}}$$

y  $\{\mathcal{A}(t)\}$  es minimal en el sentido de que, si existe otra familia de conjuntos cerrados y acotados  $\{\tilde{\mathcal{A}}(t) : t \in \mathbb{R}\}$  que atrae en sentido pullback a los acotados de  $X$ , entonces  $\mathcal{A}(t) \subset \tilde{\mathcal{A}}(t), \forall t \in \mathbb{R}$ .

A continuación vamos a considerar otro concepto que será de utilidad en las aplicaciones a la hora de obtener la existencia de atractor pullback sin necesidad de exhibir una familia de compactos que atrae a los acotados de  $X$  en sentido pullback. Ésta además es de gran utilidad en el caso de EDP's en dominios no acotados.

**Definición B.0.8** *Se dice que el proceso  $\{U(t, s)\}$  es pullback asintóticamente compacto si, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , cada sucesión  $\{s_n\} \subset (-\infty, t)$  y cada sucesión acotada  $\{x_n\} \subset X$  tales que  $s_n \rightarrow -\infty$  y  $\{U(t, s_k)x_k\}$  está acotada, se verifica que  $\{U(t, s_k)x_k\}$  posee una subsucesión convergente.*

Se tiene el siguiente resultado:

**Lema B.0.3** *Sea  $\{U(t, s)\}$  pullback asintóticamente compacto y sea  $B \subset X$  acotado tal que  $\overline{\bigcup_{\tau \leq s_0} U(t, s)B}$  está acotado para algún  $s_0 \in (-\infty, t)$ . Entonces  $\Lambda(B, t)$  es un compacto, no vacío, invariante y atrae a  $B$  en el instante  $t$  en sentido pullback.*

Entonces podemos establecer el siguiente resultado:



**Teorema B.0.3** Supongamos que  $U(t, s)$  es pullback asintóticamente compacto y que existe una familia  $\{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  de acotados que absorbe en sentido pullback a los acotados de  $X$ . Entonces, la familia  $\{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  dada por

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup \{\Lambda(B, t) : B \subset X \text{ acotado}\}}$$

es una familia de cerrados, invariante y que atrae pullback a los acotados de  $X$ . Además,  $\{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  es minimal entre las familias  $\{\mathcal{C}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  tales que  $\mathcal{C}(t)$  es cerrado y atrae en sentido pullback a los acotados de  $X$  en el instante  $t$ .

**Nota.-** Observemos que este resultado no garantiza la compacidad de los  $\mathcal{A}(t)$ , lo que es un gran inconveniente en dimensión infinita. Para garantizar dicha compacidad es necesario imponer alguna condición adicional.

**Teorema B.0.4** Supongamos que  $U(t, s)$  es pullback asintóticamente compacto y que existe una familia  $\{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  de acotados que verifican que para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $B(t)$  atrae en sentido pullback a los acotados de  $X$  en el instante  $\tau$  para cada  $\tau \leq t$ , es decir, dado  $D \subset X$  acotado y  $\tau \leq t$ , existe  $s_0(\tau, D)$  tal que  $U(\tau, s)D \subset B(t)$ ,  $\forall s \leq s_0(\tau, D)$ . Entonces  $U(t, s)$  posee un atractor pullback compacto  $\{\mathcal{A}(t)\}$  con la propiedad adicional de que  $\bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(s)$  es acotado  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

**Teorema B.0.5** Supongamos que un proceso  $\phi$  en  $\mathbb{R}^d$  tiene una familia  $\phi$ -positivamente invariante y absorbente pullback

$$\mathcal{B} = \{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

de subconjuntos compactos no vacíos de  $\mathbb{R}^d$ .

Entonces  $\phi$  tiene un único atractor pullback

$$\mathcal{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

cuyas componentes vienen determinadas por

$$A(t) = \bigcap_{t_0 \leq t} \phi(t, t_0, B(t_0)), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Si  $\mathcal{B}$  no es  $\phi$ -positivamente invariante, entonces

$$A(t) = \bigcup_{s \geq 0} \overline{\bigcap_{t_0 \leq t-s} \phi(t, t_0, B(t_0))}, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Un atractor pullback consiste de *soluciones completas*, es decir, funciones  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  tales que  $\xi(t) = \phi(t, t_0, \xi(t_0))$  para todo  $(t, t_0) \in \mathbb{R}_{\geq}^2$ . En casos especiales consiste de una única solución completa.

**Definición B.0.9** *Un sistema dinámico no autónomo  $\phi$  se dice que satisface una propiedad de contractividad estrictamente uniforme si para cada  $R > 0$ , existen constantes positivas  $K$  y  $\alpha$  tal es que*

$$\|\phi(t, t_0, x_0) - \phi(t, t_0, y_0)\|^2 \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)} \cdot \|x_0 - y_0\|^2$$

para todo  $(t, t_0) \in \mathbb{R}_{\geq}^2$  y  $x_0, y_0 \in B_R$ , donde  $B_R$  es la bola cerrada en  $\mathbb{R}^d$  centrada en el origen y de radio  $R > 0$ .

Esta propiedad junto con la existencia de un conjunto absorbente pullback es suficiente para garantizar la existencia de un atractor tanto en sentido forward como pullback, que consiste en una única solución completa. La demostración del siguiente resultado involucra la construcción de una sucesión de Cauchy adecuada que converja a un único límite, ver [38, 39].

**Teorema B.0.6** *Supongamos que un proceso  $\phi$  en  $\mathbb{R}^d$  es uniformemente estrictamente contractivo sobre una familia de conjuntos  $\phi$ -positivamente invariantes y absorbentes pullback*

$$\mathcal{B} = \{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

de subconjuntos compactos no vacíos de  $\mathbb{R}^d$ . Entonces el proceso  $\phi$  tiene un único atractor global forward y pullback

$$\mathcal{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

cuyas componentes son conjuntos unitarios, es decir,  $A(t) = \{\xi^*(t)\}$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ , donde  $\xi^*$  es una solución completa del proceso.

**Observación.-** Una observación interesante es que los resultados que hemos visto se basa en la atracción de conjuntos acotados fijos (o compactos)  $D \subset X$ . Sin embargo, el atractor pullback es una familia (dependiente del tiempo) de compactos. Una consecuencia inmediata de esto es que el atractor no pertenece a la familia o universo de conjuntos que con atraídos, es decir, no podemos decir que el atractor se atraiga a sí mismo, lo que ha impedido obtener un resultado de unicidad sobre el mismo. Además suele ocurrir en las aplicaciones que el atractor pullback atraiga a clases de conjuntos más generales que los acotados, y de esta forma resulta interesante encontrar el atractor pullback dentro del universo de conjuntos que son atraídos.

Todos los resultados previos son casos particulares de los que se pueden demostrar en esta situación más general que no describiremos en este trabajo dada su complejidad.

# Apéndice C

## Sistemas dinámicos con retardo.

Vamos a tomar como ejemplo canónico de ecuación con retardo no autónoma un sistema con un retardo variable,  $\rho(t)$ , donde  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, h]$  es una función continua y  $h > 0$ ,

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(t, x(t), x(t - \rho(t))), \quad x_s = \psi, \quad \psi \in \mathcal{C}. \quad (\text{C.1})$$

La condición inicial  $x_s$  está en  $\mathcal{C}$ , el espacio  $C^0([-h, 0]; \mathbb{R}^n)$  de funciones continuas sobre  $[-h, 0]$  en  $\mathbb{R}^n$ , y, para una función  $x \in C^0([-h, T]; \mathbb{R}^n)$ , la notación  $x_s$ , denota la función de  $\mathcal{C}$  dada por

$$x_s(\theta) = x(s + \theta) \quad \text{para todo } \theta \in [-h, 0]$$

(con lo que tiene sentido para cualquier  $0 \leq s \leq T$ ).

Esta ecuación se puede escribir en un marco más general, que permite considerar un conjunto mayor de problemas de forma unificada. Mejor que tomar el retardo explícito, escribimos

$$f(t, x_t) = F(t, x(t), x(t - \rho(t))),$$

con lo que podemos reescribir (C.1) como

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad x_s = \psi, \quad \psi \in \mathcal{C}. \quad (\text{C.2})$$

En lo que sigue nos centraremos en esta última forma de la ecuación, aumiendo que  $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua y es una aplicación acotada, en el sentido de que transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados.

Notamos ahora que esta formulación incluye inmediatamente ejemplos con retardos que no sean constantes ni variables. Por ejemplo, la ecuación integro-diferencial

$$\dot{x}(t) = \int_{-h}^0 g(t, s, x(t + s)) ds$$

también entra en este marco, aunque no vamos a estudiar tal teoría en este trabajo.

A continuación vamos a presentar un resultado de existencia y unicidad de solución de este tipo de ecuaciones.

**Teorema C.0.1** *Dado  $(s, \psi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}$ , existe una única solución  $x(t; s, \psi)$  de (C.2) definida sobre  $[s - h, \alpha_{s, \psi})$ , con  $\alpha_{s, \psi} > 0$ .*

Asumimos que  $\alpha_{s, \psi} = +\infty$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ , ya que estamos interesados en el comportamiento de las soluciones a largo plazo en tiempo.

Definiremos entonces una solución como el operador  $\phi(t, s)$  tal que da la solución (en  $\mathcal{C}$ ) en el tiempo  $t$  cuando  $x_s = \psi$ , vía

$$\phi(t, s)\psi = x_t(\cdot; s, \psi). \tag{C.3}$$

# Índice de figuras

1.	Representación gráfica de un quimiostato. . . . .	III
1.1.	Distinción de zonas. . . . .	25
2.1.	Distinción de zonas. . . . .	38
2.2.	Conjuntos $M$ y $E$ . . . . .	42
4.1.	Representación gráfica del conjunto $B_\varepsilon$ . . . . .	78
4.2.	Representación gráfica del conjunto $\mathcal{B}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ . . . . .	81
4.3.	Representación gráfica del conjunto $T_\varepsilon$ . . . . .	99
5.1.	Representación gráfica del conjunto $\mathcal{B}$ . . . . .	106
5.2.	Representación gráfica del conjunto $T_\varepsilon$ . . . . .	113
A.1.	Representación gráfica de un conjunto absorbente. . . . .	146
A.2.	Representación gráfica de un conjunto atrayente. . . . .	147
A.3.	Representación gráfica variedades (in)estables. . . . .	150
A.4.	Representación gráfica de la propiedad de seguimiento. . . . .	152
B.1.	Convergencia en sentido forward. . . . .	158
B.2.	Convergencia en sentido pullback. . . . .	160



# Bibliografía

- [1] V. Sree Hari Rao y P. Raja Sekhara Rao, *Dynamic Models and Control of Biological Systems*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2009.
- [2] T. Caraballo, X. Han y P. E. Kloeden, *Chemostats with time-dependent inputs and wall growth* (submitted).
- [3] T. Caraballo, X. Han y P. E. Kloeden, *Non-autonomous Chemostats with Non-constant Delays* (submitted).
- [4] Kloeden, Peter E.; Rasmussen, Martin. Nonautonomous dynamical systems. Mathematical Surveys and Monographs, 176. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 2011.
- [5] J. Hale, "Asymptotic Behavior of Dissipative Systems", Math. Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc., Providence, 1988.
- [6] J. K. Hale y S. M. Verduyn Lunel, "Introduction to Functional Differential Equations", Springer-Verlag, New York, 1993.
- [7] H. R. Bungay y M. L. Bungay, Microbial interactions in continuous culture, *Advances in Applied Microbiology* **10** (1968), 269-290.
- [8] A. Cunningham y R. M. Nisbet, Transients and oscillations in continuous cultures, *Mathematics in Microbiology*, Academic Press, New York (1983), 77-103.
- [9] A. G. Fredrickson y G. Stephanopoulos, Microbial competition, *Science* **213** (1981), 972-979.
- [10] H. W. Jannash y R. T. Mateles, Experimental bacterial ecology studies in continuous culture, *Advances in Microbial Physiology* **11** (1974), 165-212.
- [11] P. A. Taylor y J. L. Williams, Theoretical studies on the coexistence of competing species under continuous flow conditions, *Canadian Journal of Microbiology* **21** (1975), 90-98.

- [12] H. Veldcamp, Ecological studies with the chemostat, *Advances in Microbial Ecology* **1** (1977) 59-95.
- [13] P. Waltman, *Competition Models in Populations Biology*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1983).
- [14] P. Waltman, S. P. Hubbel y S. B. Hsu, Theoretical and experimental investigations of microbial competition in continuous culture, *Modeling and Differential Equations in Biology*, New York (1980) 107-152.
- [15] G. D. 'Ans, P. V. Kokotovic y D. Gottlieb, A nonlinear regulator problem for a model of biological waster treatment, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-16** (1971), 341-347.
- [16] J. W. M. La Riviere, Microbial ecology of liquid waste, *Advances in Microbial Ecology* **1** (1977), 215-259.
- [17] G. Stephanopoulos y G. Lapidus, Chemostat dynamics of plasmid-bearing plasmid-free mixed recombinant cultures, *Chemical Engineering Science* **43** (1988), 49-57.
- [18] F. M. Stewart y B. R. Levin, The population biology of bacterial plasmids: A priori conditions for the existence of conjugationally transmitted factors, *Genetics* **87** (1977) 209-228.
- [19] H. L. Smith, *Monotone Dynamical Systems: an Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems*, American Mathematical Society, Providence, RI (1995).
- [20] H. L. Smith y P. Waltman, *The Theory of the Chemostat: Dynamic of Microbial Competition*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1995).
- [21] P. Waltman, Coexistence in chemostat-like model, *Rocky Mountain Journal of Mathematics* **20** (1990), 777-807.
- [22] H. L. Smith y H. R. Thieme, *Dynamical Systems and Population Persistence*, American Mathematical Society, Providence, RI (2010).
- [23] G. J. Butler, S. B. Hsu y P. Waltman, A mathematical model of the chemostat with periodic washout rate, *SIAM J. Appl. Math.*, 45 (1985), 435-449.
- [24] H. I. Freedman y F. Yang, Competing predators for a prey in a chemostat model with periodic nutrient recycling, *J. Math. Biol.* 29 (1991), 715-732.
- [25] J. K . Hale y A. S. Somolinos, Competition for fluctuating nutrient, *J. Math. Biol.*, 18 (1993).
- [26] H. L. Smith, Competitive coexistence in an oscillating chemostat, *SIAM J. Appl. Math.*, 40 (1981), 498-522.



- [27] G. J. Butler, S. B. Hsu y P. Waltman, Coexistence of competing predators in a chemostat, *J. Math. Biol.*, 17 (1983) 133-151.
- [28] G. J. Butler y P. Waltman, Bifurcation from a limit cycle in a two predator-one prey ecosystem modeled on a chemostat, *J. Math. Biol.*, 12 (1981), 295-310.
- [29] G. J. Butler y G. S. K. Wolkowicz, Predator-mediated competition in the chemostat, *J. Math. Biol.*, 27 (1986), 167-191.
- [30] A. Cunningham y R. M. Nisbet, Transients and oscillations in continuous culture, M. Bazin (Ed.), in *Mathematics in Microbiology*, Academic, London, 1983, pp. 77-103.
- [31] A. Hastings, Multiple limit cycles in predator-prey models, *J. Math. Biol.*, 11 (1981), 51-63.
- [32] J. P. Keener, Oscillatory coexistence in the chemostat: A codimension two unfolding, *SIAM J. Appl. Math.*, 43 (1983), 1005-1018.
- [33] Y. Kuang, Limit cycles in a chemostat-related model, *SIAM J. Appl. Math.*, 49 (1989), 1759-1767.
- [34] G. S. K. Wolkowicz, Successful invasion of a food web in a chemostat, *Math. Biosci.*, 93 (1989), 249-268.
- [35] J. Caperon, Time lag in population response of *isochrysis galbana* to a variable nitrate environment, *Ecology* **24** (1969), 188-192.
- [36] A. W. Bush y A. E. Cook, The effect of time delay and growth rate inhibition in the bacterial decomposition of waste water, *J. Theor. Biol.* **63** (1975), 385-395.
- [37] Mei Lin, Hai-Feng Huo, Yu-Ning Li. A competitive model in a chemostat with nutrient recycling and antibiotic treatment. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* **13** (2012) 2540-2555.
- [38] P. E. Kloeden y T. Lorenz, Mean-square random dynamical systems, *J. Differential Equations* **253** (2012), 1422-1438.
- [39] P. E. Kloeden y T. Lorenz, Pullback incremental Stability, submitted.
- [40] Hassan K. Khalil, Nonlinear systems, Prentice Hall, (2002).