Trabajo Fin de Grado 2020/21
Facultad de Matemáticas
Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico
Universidad de Sevilla

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES ESTOCÁSTICAS CON RUIDO FRACCIONARIO

Escrito por: **José Carlos Castro Gómez**

Dirigido por: **Pedro Marín Rubio**

Índice

Resumen

En este trabajo intentamos dar un primer paso hacia la resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas mediante la construcción de integrales estocásticas.

Estas surgen cuando queremos integrar algo respecto de un término que presenta cierta aleatoriedad y que vendrá representado por un proceso estocástico.

Además, vamos a estudiar las características principales de los procesos que vamos a tratar, que son el movimiento Browniano estándar y el movimiento Browniano fraccionario, siendo el primero un caso particular del segundo. A pesar de ello, la construcción de la integral con respecto a cada uno de estos procesos es bastante diferente.

Para ambos casos obtendremos una *Fórmula de Itô*, que simplifique sustancialmente el cálculo de la integral en cuestión.

La construcción que hacemos tiene un sentido probabilístico y no trayectorial, lo que puede presentar ciertas limitaciones a la hora de resolver distintas ecuaciones, como ahora comentaremos.

Finalmente, daremos para ambos casos teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales en las que intervienen dichos procesos.

Abstract

This work is a first approach attempt at the resolution of stochastic differential equations. This is achieved through the construction of a stochastic integral.

Stochastic integrals arise naturally when an integration against a random element is needed.

In particular, two stochastic processes will be studied: Brownian motion and fractional Brownian motion. Although the latter is a particular case of the former, the construction of the integral for each one is quite different.

Moreover, the Itô Formula is introduced to ease the computation of stochastic integrals for both processes.

The integrals in this work are defined following a probability approach rather than in a pathwise manner. This brings some limitations when solving certain integrals. We will discuss this issue.

Finally, uniqueness and existence theorems will be given for stochastic differential equations where any of these processes take part.

1. Introducción a las ecuaciones diferenciales estocásticas

Un problema básico en el cálculo estocástico es dar sentido a ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{Y}_t = f(Y_t)\,\dot{X}_t; \;\; Y_0 = \xi \in W, \tag{1.1}$$

con Y tomando valores en un espacio de Banach W, $X : [0,T] \to V$ alguna señal aleatoria tomando valores en un espacio de Banach V y f tomando valores en el espacio de funcionales lineales de V a W.

Además, es natural en muchos casos asumir que $\dot{X}$ denota algún termino asociado a algún *ruido* que se escribe formalmente como el diferencial de un movimiento Browniano o el movimiento Browniano fraccionario, como veremos posteriormente.

Este hecho complica nuestro objetivo de dar un significado a la ecuación anterior, ya que las trayectorias de estos procesos, $t \to X(\omega,t)$, son no diferenciables en casi ningún punto. En consecuencia, intentamos abordar la resolución del problema anterior mediante una ecuación integral

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f(Y_s)dX_s. \tag{1.2}$$

¿Cómo podríamos definir la integral $\int_0^t f(Y_s)dX_s$ donde X e Y son procesos estocásticos tomando valores respectivamente en V y W? Vamos a intentar darle una respuesta a este problema en un sentido probabilístico para distintas señales aleatorias.

Trasladamos así el problema a definir una integral estocástica, cuya construcción, para determinados integradores, constituye la base de este trabajo.

Esta forma de intentar resolver este tipo de ecuaciones diferenciales lleva consigo limitaciones sobre la función $f(\cdot)$ que queremos integrar y que ahora veremos.

Así, la solución a una ecuación diferencial estocástica no va a ser determinista, sino que también va a tener cierto *ruido*.

Este tipo de ecuaciones aparece en muchos campos de la ciencia en los que para modelizar de la forma más fiel posible un determinado fenómeno se tiene en cuenta el ruido intrínseco de los sistemas a estudiar, como por ejemplo en la electrónica, la biología o en las finanzas.

Mostramos dos ejemplos de contextos en los que pueden surgir estas ecuaciones.

Ejemplo 1.1. *Consideremos el modelo simple de crecimiento de una población*

$$\frac{dN}{dt} = a(t)\,N(t), \quad N(t) = N_0 \;\; (constante), \tag{1.3}$$

donde $N(t)$ es el tamaño de la población en un instante t y $a(t)$ la tasa relativa de crecimiento. Podría pasar que no conociéramos totalmente $a(t)$ y que dependiera de ciertas condiciones del ambiente en que se desarrolla dicha población, de manera que

$$a(t) = r(t) + \text{“}ruido\text{”}, \tag{1.4}$$

donde el término $r(t)$ es determinista pero no conocemos el comportamiento exacto de este término de ruido, solo su distribución en probabilidad.

Ejemplo 1.2. *Supongamos que estudiamos un circuito electrónico alimentado por una fuente de potencial variable en el tiempo, $V(t)$, y con capacitancia, resistencia y autoinducción de valores C, R y L respectivamente.*

En ese caso, la expresión de la carga en el circuito en un instante t viene dada por la solución de la ecuación

$$L\,Q''(t) + R\,Q'(t) + \frac{1}{C}\,Q(t) = V(t),\; Q(0) = Q_0,\; Q'(0) = I_0. \tag{1.5}$$

Sin embargo, en la realidad las fuentes de potencial constante tienen sus limitaciones y aunque el valor de potencial que ofrecen permanece dentro de un rango de valores muy próximos al deseado, este no es totalmente constante.

La forma de tener esto en cuenta en la ecuación (1.5) *es admitiendo que nuestro potencial es realmente $V(t) = G(t) + \text{“}ruido\text{”}$, donde de nuevo el término $G(t)$ es determinista pero del ruido solo podemos saber su distribución de probabilidad.*

Como hemos comentado, nuestro objetivo ahora es poder integrar con respecto a términos que modelen el ruido que podemos encontrar en nuestros sistemas.

Vamos a realizar, en primer lugar, una construcción de integral estocástica respecto al movimiento Browniano estándar y ver cómo se puede usar esto para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas con este tipo de ruido.

Posteriormente haremos lo propio con el movimiento Browniano fraccionario.

2. Integración con respecto al movimiento Browniano estándar

Nos centramos en esta sección en construir una primera integral con respecto al movimiento Browniano, que ahora definiremos, basada fuertemente en conceptos probabilísticos y que constituye el punto de partida de este trabajo.

Comenzamos exponiendo una serie de conceptos que nos permitan dar lugar a esta construcción.

2.1. Conceptos iniciales

Si queremos modelar una cantidad aleatoria necesitaremos una variable aleatoria, y por ende, necesitaremos conceptos generales de la teoría de la probabilidad.

Definición 2.1. *Si Ω es un conjunto decimos que una familia de subconjuntos de Ω, $\mathcal{F}$, es una σ-álgebra si se verifican las siguientes propiedades:*

- $\emptyset \in \mathcal{F}$.
- $F \in \mathcal{F} \implies F^C \in \mathcal{F}$.
- *Si* $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F} \implies \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Así, decimos que $(\Omega, \mathcal{F})$ es un **espacio medible**, donde los elementos de $\mathcal{F}$ reciben el nombre de conjuntos medibles.

Decimos que una función P, $P : (\Omega, \mathcal{F}) \to [0, 1]$ es una probabilidad si verifica que:

- $P(\emptyset) = 0,\ P(\Omega) = 1$.
- Sean $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ disjuntos dos a dos. Entonces, se verifica que $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

En este caso, la terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ recibe el nombre de **espacio de probabilidad**. Además, por razones técnicas vamos a suponer que el espacio de probabilidad es completo, esto es, $\mathcal{F} = \bar{\mathcal{F}}$, donde, denotando por $\mathcal{P}(\Omega)$ a las partes de Ω,

$$\bar{\mathcal{F}} = \{G \in \mathcal{P}(\Omega); \exists F_1, F_2 \in \mathcal{F} \text{ tales que } F_1 \subset G \subset F_2,\ \text{y } P(F_1) = P(F_2)\}.$$

A partir de una familia de subconjuntos, $\mathcal{U}$, de cualquier conjunto Ω definimos $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ como la menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{U}$. Esta se puede obtener como

$$\mathcal{H}_{\mathcal{U}} = \cap\{\mathcal{H};\ \mathcal{H}\ \sigma\text{-álgebra de } \Omega,\ \mathcal{U} \subset \mathcal{H}\}. \tag{2.1}$$

Como caso particular, y que también será importante, a la σ-álgebra generada por todos los abiertos en $\mathbb{R}^n$ se le conoce somo σ-álgebra de Borel, $\mathcal{B}$, y sus medibles son los borelianos.

Una vez que tenemos definido el concepto de espacio de probabilidad veamos cómo se pueden relacionar entre ellos. Con esto, si tenemos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e Y una función $Y : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (\Omega', \mathcal{F}')$, con $(\Omega', \mathcal{F}')$ otro espacio de probabilidad, que verifica que

$$Y^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega;\ Y(\omega) \in U\} \in \mathcal{F} \tag{2.2}$$

para todo U medible en $\mathcal{F}'$ decimos que Y es $\mathcal{F}$-medible. Además, si tenemos que el espacio de llegada es $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ decimos que Y es una variable aleatoria.

Si $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es una función, la σ-álgebra $\mathcal{H}_X$ es la mínima σ-álgebra conteniendo a todos los conjuntos $X^{-1}(U)$ con U abierto de $\mathbb{R}^n$. Tenemos que

$$\mathcal{H}_X = \{X^{-1}(B);\ B \in \mathcal{B}\}. \tag{2.3}$$

Claramente X es $\mathcal{H}_X$ medible y $\mathcal{H}_X$ es la menor σ-álgebra con esta propiedad.

Si tenemos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y X una variable aleatoria, esta induce una probabilidad en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$, de forma que si llamamos μ a esta medida, tenemos que para cualquier $B \in \mathcal{B}$,

$$\mu(B) = P(X^{-1}(B)). \tag{2.4}$$

Si $f : \mathbb{R}^n \to R$ es medible Borel y tenemos que $\int_\Omega |f(X(\omega))| dP(\omega) < \infty$, definimos

$$E[f(X)] := \int_\Omega f(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\mu(x) \tag{2.5}$$

Otra propiedad importante es la independencia. En un espacio de probabilidad, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, decimos que dos conjuntos medibles A y B son **independientes** si se verifica

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{2.6}$$

Del mismo modo, una colección $\mathcal{A} = \{\mathcal{H}_i;\ i \in I\}$ de familias $\mathcal{H}_i$ de conjuntos medibles es independiente si para cualquier conjunto de índices $i_1, ..., i_k$ y conjuntos medibles $H_{i_1} \in \mathcal{H}_{i_1}, ..., H_{i_k} \in \mathcal{H}_{i_k}$ se verifica que $P(H_{i_1} \cap ... \cap H_{i_k}) = P(H_{i_1})...P(H_{i_k})$.

Finalmente, decimos que una colección de variables aleatorias $\{X_i;\ i \in I\}$ es independiente si la colección de σ-álgebras generadas, $\mathcal{H}_{X_i}$ es independiente.

Con esto, es posible definir el concepto de esperanza condicionada de una variable aleatoria, X, en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Así, si $E[|X|] < \infty$ y $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ es una σ-álgebra, definimos la **esperanza condicionada** $E[X|\mathcal{H}]$ como la única función (*e.c.t.*) de Ω a $\mathbb{R}^n$ que cumple que

- $E[X|\mathcal{H}]$ es $\mathcal{H}$-medible.
- $\int_H E[X|\mathcal{H}] dP = \int_H X dP$, para cada $H \in \mathcal{H}$.

La existencia y unicidad viene dada por el teorema de Radon-Nikodym, al considerar la medida en $\mathcal{H}$ dada para cada elemento H por

$$\mu(H) = \int_H X dP.$$

Esta es absolutamente continua con respecto a la restricción de P a $\mathcal{H}$ y así es aplicado dicho teorema de Radon-Nikodym.

Dos propiedades básicas de esta esperanza condicionada son:

- Si X es $\mathcal{H}$-medible, entonces $E[X|\mathcal{H}] = X$.
- Si X y $\mathcal{H}$ son independientes, $E[X|\mathcal{H}] = E[X]$.

Continuamos introduciendo uno de los conceptos más importantes de este trabajo, que no es otro que el de proceso estocástico.

Definición 2.2. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Llamamos proceso estocástico a una familia parametrizada de variables aleatorias, $\{X_t\}_{t\in T}$, tomando valores en $\mathbb{R}^n$. En general tomaremos $T = [0, \infty)$.*

Notemos que si fijamos $t \in T$, tenemos una variable aleatoria, $\omega \to X_t(\omega)$, con $\omega \in \Omega$. Por otro lado, también podemos fijar $\omega \in \Omega$, para obtener la función $t \to X_t(\omega)$, con $t \in T$, y recibe el nombre de trayectoria de X_t.

Intuitivamente, si pensamos que t es un instante de tiempo y ω es un experimento, podemos pensar $X_t(\omega)$ como el resultado de un experimento en un instante concreto.

Si tenemos un proceso estocástico $\{X_t\}$, llamamos distribuciones finito dimensionales (*fidis*) a las medidas $\mu_{t_1,...,t_k}$ en $\mathbb{R}^{nk}$, con $k = 1, 2, ...$, definidas como

$$\mu_{t_1,...,t_k}(F_1 \times ... \times F_k) = P[X_{t_1} \in F_1, ..., X_{t_k} \in F_k]. \tag{2.7}$$

Estas familias de *fidis* ayudan a obtener una gran cantidad de propiedades de nuestro proceso estocástico, pero no a caracterizarlo de forma completa.

Recíprocamente, si tenemos una familia $\{\nu_{t_1,...,t_k};\ k \in \mathbb{N},\ t_i \in T\}$ de medidas en $\mathbb{R}^{nk}$ surge la duda de si podríamos construir un proceso estocástico $\{Y_t\}$ que tenga a esta familia de medidas como *fidis*, lo cual está asegurado por el teorema de extensión de Kolmogorov, cuya demostración podemos encontrar en [14].

Teorema 2.3 (Teorema de extensión de Kolmogorov)**.** *Supongamos que para todo conjunto de índices $t_1, ..., t_k \in T$, $k \in \mathbb{N}$ tenemos una probabilidad $\nu_{t_1,...,t_k}$ en $\mathbb{R}^{nk}$ cumpliendo que*

$$\nu_{t_{\sigma(1)},...,t_{\sigma(k)}}(F_1 \times ... \times F_k) = \nu_{t_1,...,t_k}(F_{\sigma^{-1}(1)} \times ... \times F_{\sigma^{-1}(k)}) \tag{2.8}$$

para toda permutación $\sigma \in S_N$, el conjunto de permutaciones de N elementos, y que

$$\nu_{t_1,...,t_k}(F_1 \times ... \times F_k) = \nu_{t_1,...,t_k,t_{k+1},...,t_{k+m}}(F_1 \times ... \times F_k \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n) \tag{2.9}$$

para cualquier $m \in \mathbb{N}$*, donde en el paréntesis de la derecha tenemos un total de* $k+m$ *factores.*

Entonces, existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *y un proceso estocástico* $\{X_t\}$ *en* Ω*,* $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$\nu_{t_1,...,t_k}(F_1 \times ... \times F_k) = P[X_{t_1} \in F_1, ..., X_{t_k} \in F_k],$$

para todo $t_i \in T$*,* $k \in \mathbb{N}$ *y borelianos* F_i*.*

Con este pretexto construimos el movimiento Browniano estándar o movimiento Browniano por simplicidad. Para ello fijado $x \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$p(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} \quad \text{para } y \in \mathbb{R}^n,\ t > 0.$$

Sean, entonces, $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_k$. Definimos la medida en $\mathbb{R}^{nk}$, $\nu_{t_1,...,t_k}$, como

$$\begin{aligned} &\nu_{t_1,...,t_k}(F_1 \times ... \times F_k) = \\ &\int_{F_1\times ... \times F_k} p(t_1,x,x_1)p(t_2-t_1,x_1,x_2)...p(t_k-t_{k-1},x_{k-1},x_k)dx_1...dx_k. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Usamos la convención de que $p(0,x,y)dy = \delta_x(y)$, donde esto denota la delta de Dirac centrada en y. Extendemos esta expresión que hemos dado en (2.10) a cualquier conjunto finito de índices t_i's usando (2.8). Por otro lado, es claro que como $\int_{\mathbb{R}^n} p(t,x,y)dy = 1$ para todo $t \geq 0$, también se cumple la condición (2.9).

Como consecuencia de este Teorema 2.3 se tiene el siguiente.

Teorema 2.4. *Existe un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P^x)$ *y un proceso estocástico* $\{B_t\}_{t\geq 0}$ *en* Ω *cumpliendo que las distribuciones finito dimensionales de* B_t *vienen dadas por*

$$\begin{aligned} &P^x(B_{t_1} \in F_1, ..., B_{t_k} \in F_l) = \\ &\int_{F_1\times ... \times F_k} p(t_1,x,x_1)...p(t_k-t_{k-1},x_{k-1},x_k)dx_1...dx_k. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Este es el ***movimiento Browniano (Bm)****.*

Este movimiento Browniano se puede clasificar dentro de los procesos Gaussianos, aquellos procesos en los que para cada conjunto de índices $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_k$ el vector aleatorio $Z = (B_{t_1}, ..., B_{t_n})$ tiene distribución multinormal.

Esto significa que existe un vector $M \in \mathbb{R}^{nk}$ y $C \in \mathbb{R}^{nk\times nk}$ tal que

$$E^x[\exp(i\sum_{j=1}^{nk} u_j Z_j)] = \exp(-\frac{1}{2}\sum_{j,m} u_j c_{jm} u_m + i\sum_j u_j M_j),$$

para todo $u = (u_1, ..., u_{nk}) \in \mathbb{R}^{nk}$. Además, $M = E^x[Z]$ es la esperanza de Z y $c_{jm} = E^x[(Z_j - M_j)(Z_m - M_m)]$.

Realizando el cálculo explícito de $E^x[\exp(i \sum_{j=1}^{nk} u_j Z_j)]$ con (2.10) obtenemos que efectivamente se cumple lo que esperábamos con

$$M = E^x[Z] = (x, x, ..., x) \in \mathbb{R}^{nk} \tag{2.12}$$

y

$$C = \begin{pmatrix} t_1 I_n & t_1 I_n & \dots & t_1 I_n \\ t_1 I_n & t_2 I_n & \dots & t_2 I_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1 I_n & t_2 I_n & \dots & t_k I_n \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

En este caso, decimos que tenemos un movimiento Browniano centrado en x. Además, de la forma de C podemos obtener algunas propiedades del mismo.

En primer lugar, vemos que

$$E^x[(B_t - x)^2] = nt, \quad E^x[(B_t - x)(B_s - x)] = n \text{ mín}(s, t). \tag{2.14}$$

Más aún, podemos afirmar que $E^x[(B_t - B_s)^2] = n(t - s)$ si $t \geq s$, pues

$$\begin{aligned} E^x[(B_t - B_s)^2] &= E^x[(B_t - x)^2 - 2(B_t - x)(B_s - x) + (B_s - s)^2] \\ &= n(t - 2s + s) = n(t - s), \quad \text{si } t \geq s. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Nos restringimos ahora a la versión unidimensional de este proceso, $n = 1$, con el objetivo de poder seguir obteniendo propiedades de este proceso estocástico de forma más clara. Además, vamos a considerar el movimiento Browniano centrado en 0, es decir, tomando $x = 0$. Estudiamos dos lemas previos.

Lema 2.5. *Sean $Y_0, Y_1, ..., Y_n$ variables aleatorias reales en un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F})$. Supongamos que $X = (Y_0, Y_1, ..., Y_n)$ es normal y que Y_0 e Y_j son incorreladas para $1 \leq j \leq n$. Entonces Y_0 es independiente de $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$.*

Demostración. Sabemos que en la primera fila (y primera columna) de la matriz de covarianza $c_{jk} = E[(Y_j - E[Y_j])(Y_k - E[Y_k])]$ solo la primera entrada, $c_{00} = \text{var}[Y_0]$ es no nula.

Recordemos que para un vector aleatorio $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, definimos la función característica $\phi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ como

$$\phi_X(u_1, ..., u_n) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle u, x \rangle} P[X \in dx],$$

donde $\langle u, x \rangle = u_1 x_1 + ... + u_n x_n$.

Esta función característica determina de forma única la distribución de X y en el caso en el que este siga una distribución normal multivariante de vector de medias m y matriz de covarianza C,

$$\phi_X(u_1, ..., u_n) = \exp(-\frac{1}{2}\sum_{j,k} u_j c_{jk} u_k + i\sum_j u_j m_j).$$

Entonces, es claro que al ser $c_{m0} \neq 0$ solo si $m = 0$ que

$$\phi_X(u_0, u_1, ...u_n) = \phi_{Y_0}(u_0) \cdot \phi_{(Y_1,...,Y_n)}(u_1, ..., u_n).$$

Esto es equivalente a la independencia de la que hablábamos y obtenemos el resultado que buscamos.

□

Lema 2.6. *Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible, y $X_j : \Omega \to \mathbb{R}$ variables aleatorias, con $1 \leq j \leq n$. Entonces, $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ es normal si y solo si $Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_n X_n$ es normal para cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Veamos en primer lugar la implicación a la derecha. Esto es fácil de ver, pues si X es normal, entonces

$$\begin{aligned} E[\exp(iu(\lambda_1 X_1 + ...\lambda_n X_n))] &= \exp(-\frac{1}{2}\sum_{j,k} u\lambda_j c_{jk} u\lambda_k + i\sum_j u\lambda_j m_j) \\ &= \exp(-\frac{1}{2}u^2\sum_{j,k}\lambda_j c_{jk}\lambda_k + iu\sum_j \lambda_j m_j). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Por tanto, como la función característica caracteriza a la distribución, Y es normal con $E[Y] = \sum_j \lambda_j m_j$ y $\text{var}[Y] = \sum \lambda_j c_{jk} \lambda_k$.

Por otro lado, si $Y = \lambda_1 X_1 + ... + \lambda_n X_n$ es normal con $E[Y] = m$ y $\text{var}[Y] = \sigma^2$, entonces

$$E[\exp(iu(\lambda_1 X_1 + ...\lambda_n X_n))] = \exp(-\frac{1}{2}u^2\sigma^2 + ium),$$

donde $m = \sum_j \lambda_j E[X_j]$ y

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[(\sum_j \lambda_j X_j - \sum_j \lambda_j E[X_j])^2] = E[(\sum_j \lambda_j (X_j - m_j))^2] \\ &= \sum_{j,k} \lambda_j \lambda_k E[(X_j - m_j)(X_k - m_k)], \end{aligned}$$

con $m_j = E[X_j]$. Por tanto, X es normal.

□

Pasamos a exponer distintas propiedades del movimiento Browniano.

Definición 2.7. *Sea $\{X_t\}_{t \in T}$ un proceso estocástico en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Decimos que este tiene **incrementos independientes** si se verifica que para todo conjunto de índices ordenado de forma creciente, $\{t_1, t_2, ..., t_k\} \in T$, $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ son independientes.*

Teorema 2.8. *El movimiento Browniano tiene incrementos independientes.*

Demostración. Queremos ver que para todo $0 \leq t_1 < t_2 ... < t_k$, se tiene que $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ son independientes.

Con el Lema 2.6 en mente es fácil ver que el vector aleatorio $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_k} - B_{t_{k-1}})$ es normal.

Además, vamos a ver que son incorreladas y por el Lema 2.5 tendremos la independencia. Para comprobar esto, vemos que si $t_j > t_i$

$$\begin{aligned} &E^x[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})] \\ &= E^x[B_{t_i}B_{t_j} - B_{t_{i-1}}B_{t_j} - B_{t_i}B_{t_{j-1}} - B_{t_{i-1}}B_{t_{j-1}}] \\ &= (t_i - t_{i-1} - t_i + t_{i-1}) = 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Con esto el resultado es inmediato.

□

En este caso y con lo ya comentado es directo que $B_t - B_s$ seguirá la misma distribución que B_{t-s}, pues se tiene que $B_t - B_s$ sigue una distribución normal de esperanza nula y varianza $t - s$, sin más que mirar (2.15).

Finalmente, damos el concepto de versión o modificación de un proceso estocástico y veamos que con esto es posible afirmar de alguna forma que cada trayectoria de un movimiento Browniano es continua.

Definición 2.9. *Sean $\{X_t\}$ e $\{Y_t\}$ procesos estocásticos en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Decimos que $\{X_t\}$ es una versión o modificación de $\{Y_t\}$ si*

$$P(\{\omega; X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}) = 1, \ \ \forall t.$$

Si tenemos dos procesos estocásticos y uno es una modificación del otro, estos tendrán las mismas distribuciones finito dimensionales, sin embargo sus trayectorias pueden ser diferentes.

Demostramos, para acabar con esta introducción, un teorema para la última propiedad que estudiaremos de este movimiento Browniano.

Teorema 2.10 (Criterio de continuidad de Kolmogorov)**.** *Sean $q \geq 1$, $\beta > \frac{1}{q}$ y (X_t), con $t \in [0, T]$, un proceso estocástico. Supongamos que para todo t, s en $[0, T]$ se cumple que*

$$E[|X_{s,t}|^q]^{\frac{1}{q}} \leq C|t - s|^\beta, \tag{2.18}$$

para alguna constante $C < \infty$ y donde $X_{s,t} = X_t - X_s$. Entonces, para todo $\alpha \in [0, \beta - \frac{1}{q})$ existe una modificación de X (que denotamos de igual modo) y una variable aleatoria $K_\alpha \in L^q$ cumpliendo que para cada par s, t en $[0, T]$ se tiene que

$$|X_{s,t}| \leq K_\alpha(\omega)|t - s|^\alpha. \tag{2.19}$$

Demostración. Tomamos, sin pérdida de generalidad, $T = 1$. Además, consideramos el conjunto D_n como el conjunto de los múltiplos de 2^{-n} en $[0,1)$. Basta considerar estos valores y extender al resto del intervalo por continuidad. Este es el motivo por el que acabamos propiamente con una modificación.

Así, la sucesión (X_{0,t_n}) es de Cauchy claramente por la desigualdad de (2.19) y por convergencia podemos extender la definición a todo el intervalo. Además, es claro que el límite no depende de la sucesión.

Nótese que $\#D_n = 2^n$. Llamamos

$$K_n = \sup_{t\in D_n} |X_{t,t+2^{-n}}| \tag{2.20}$$

Teniendo en cuenta (2.18), tenemos que

$$\mathrm{E}(K_n^q) \leq \mathrm{E}\sum_{t\in D_n} |X_{t,t+2^{-n}}|^q \leq \frac{1}{|D_n|}C^q|D_n|^{\beta\, q} = C^q|D_n|^{\beta\, q-1}. \tag{2.21}$$

Si fijamos $s < t$ en $\cup_n D_n$ y escogemos m cumpliendo que $|D_{m+1}| < t-s \leq |D_m|$, tenemos que nuestro intervalo $[s,t)$ puede ser expresado como unión disjunta y finita de intervalos de la forma $[u,v) \in D_n$ con $n \geq m+1$, y donde ningunos de estos tres intervalos pueden tener la misma longitud. En conclusión, tenemos una partición de $[s,t)$ de la forma

$$s = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_N = t, \tag{2.22}$$

donde $(\tau_i, \tau_{i+1}) \in D_n$, con $n \geq m+1$, y donde fijado un cierto $n \geq m+1$ hay a lo máximo dos intervalos de D_n. Tenemos, entonces, que

$$|X_{s,t}| \leq \max_{0\leq i<N} |X_{s,\tau_{i+1}}| \leq \sum_{i=0}^{N-1} |X_{\tau_i,\tau_{i+1}}| \leq 2\sum_{n\geq m+1} K_n. \tag{2.23}$$

Por tanto, tenemos que

$$\frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} \leq \sum_{n\geq m+1} \frac{1}{|D_{m+1}|^\alpha}2K_n \leq \sum_{n\geq m+1} \frac{2K_n}{|D_n|^\alpha} \leq K_\alpha, \tag{2.24}$$

donde hemos definido $K_\alpha := 2\sum_{n\geq 0} \frac{K_n}{|D_n|^\alpha}$. Además, es claro que K_α está en L^q, es decir, que $E[K_\alpha|^q] < \infty$ sin más que usar (2.21). Como $\alpha < \beta - \frac{1}{q}$ y $|D_n|$ elevado a cualquier potencia positiva es sumable, tenemos que

$$||K_\alpha||_{L^q} \leq \sum_{n\geq 0} \frac{2}{|D_n|^\alpha}|\mathrm{E}(K_n^q)|^{\frac{1}{q}} \leq \sum_{n\geq 0} \frac{2C}{|D_n|^\alpha}|D_n|^{\beta-\frac{1}{q}} < \infty. \tag{2.25}$$

□

Con este teorema, usando que $B_t - B_s$ sigue la misma distribución que B_{t-s} y que $E[B_{t-s}^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!}|t-s|^k$ es inmediato no solo que el movimiento Browniano admite una modificación con trayectorias continuas sino que además dichas trayectorias son α-Hölderianas para $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ *e.c.t.* $w \in \Omega$.

Aquí acaba la construcción del movimiento Browniano. En una sección posterior estudiaremos el movimiento Browniano fraccionario, viendo qué propiedades pueden tener en común.

2.2. Construcción de la Integral de Itô

Damos paso en este nuevo punto a la construcción de nuestra primera integral estocástica. Veamos cómo puede surgir esta en primer lugar.

Consideremos, por ejemplo, la ecuación estocástica

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot \dot{W}_t, \tag{2.26}$$

donde b y σ son funciones dadas y W_t representa cierto proceso estocástico. Si discretizamos este problema, tomando $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = t$, (2.26) se transforma en

$$X_{k+1} - X_k = b(t_k, X_k)\Delta t_k + \sigma(t_k, X_k)W_k\Delta t_k, \tag{2.27}$$

donde $X_j = X(t_j)$, $W_k = W_{t_k}$ y $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$. Basándonos en muchas situaciones de la experiencia, lo que uno podría esperar de este proceso estocástico (W_t) es que al menos cumpla que

- Si $t_1 \neq t_2$, entonces W_{t_1} y W_{t_2} sean independientes.
- La distribución de $\{W_{t_1+t}, ..., W_{t_k+t}\}$ no dependa de t.
- $E[W_t] = 0, \ \forall t.$

Sin embargo, resulta que no podemos encontrar ningún proceso *razonable* que cumpla las dos primeras condiciones, como se puede comprobar en la referencia [6].

Como consecuencia, reemplazamos $W_k\Delta t_k$ por $\Delta V_k = V_{t_{k+1}} - V_{t_k}$, y esperamos que $\{V_t\}$ tenga incrementos independientes y media 0. Así, tiene sentido pensar que este proceso será nuestro movimiento Browniano. Con esto, de (2.27) obtenemos que

$$X_k = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, X_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_j)\Delta B_j. \tag{2.28}$$

Si el límite de la parte derecha de (2.28) existiera en cierto modo cuando $\Delta t_j \to 0$, podríamos dar sentido a (2.26). En ese caso, significaría que X_t es un proceso estocástico satisfaciendo

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \text{“} \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s\text{”}. \tag{2.29}$$

Queremos probar la existencia, en cierto sentido, de $\int_0^t f(s,\omega)\, dB_s(\omega)$, donde $B_s(\omega)$ es el movimiento browniano comenzando en el origen, para una amplia clase de funciones $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Supongamos, entonces, $0 \leq S < T$ y $f(t,\omega)$ dada. Tenemos como objetivo definir $\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega)$. Para ello comenzamos dando una definición para un conjunto de funciones simples con el fin de luego extender la definición.

Supongamos que f tiene la forma

$$\phi(t,\omega) = \sum_{j\geq 0} e_j(\omega)\chi_{[j2^{-n},(j+1)2^{-n}]}(t), \tag{2.30}$$

donde χ es la función indicatriz y n es entero. Parece, entonces, razonable definir

$$\int_S^T \phi(t,\omega)dB_t(\omega) = \sum_{j\geq 0} e_j(\omega)[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega), \tag{2.31}$$

donde $t_k = t_k^{(n)} = \begin{Bmatrix} k\,2^{-n} \text{ si } S \leq k\,2^{-n} \leq T \\ T \text{ si } k\,2^{-n} < S \\ T \text{ si } k\,2^{-n} > T \end{Bmatrix}$.

Veamos qué limitaciones puede tener esto. Supongamos que $f(t,\omega) = B_t(\omega)$ es el movimiento Browniano comenzando en 0. Aproximamos $B_t(\omega)$ por $\phi_1(t,\omega)$ y $\phi_2(t,\omega)$ definidos como

$$\phi_1(t,\omega) = \sum_{j\geq 0} B_{j2^{-n}}\chi_{[j2^{-n},(j+1)2^{-n}]}(t). \tag{2.32}$$

$$\phi_1(t,\omega) = \sum_{j\geq 0} B_{(j+1)2^{-n}}\chi_{[j2^{-n},(j+1)2^{-n}]}(t). \tag{2.33}$$

Tenemos entonces que

$$E[\int_0^T \phi_1(t,\omega)dB_t(\omega)] = \sum_{j\geq 0} E[B_{t_j}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] = 0, \tag{2.34}$$

pues recordemos que el movimiento Browniano tiene incrementos independientes. Sin embargo, por otro lado tenemos que

$$E[\int_0^T \phi_2(t,\omega)dB_t(\omega)] = \sum_{j\geq 0} E[B_{t_{j+1}}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] = \sum_{j\geq 0} E[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] = T. \tag{2.35}$$

Aunque ϕ_1 y ϕ_2 parecen aproximaciones razonables de nuestro movimiento Browniano, la integral obtenida a partir de (2.31) da resultados sustancialmente distintos.

Así, es natural aproximar una función $f(t,\omega)$ por

$$f(t,\omega) = \sum_j f(t_j^*,\omega)\chi_{[t_j,t_{j+1}]}(t), \tag{2.36}$$

donde el punto t_j^* pertenece al intervalo $[t_j, t_{j+1}]$ y definir entonces $\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega)$ consiste en tomar límite en un sentido que ahora explicaremos de $\sum_j f(t_j^*,\omega)[B_{t_{j+1}-t_j}](\omega)$ si $n \to \infty$.

Como hemos visto en el ejemplo anterior, la elección del punto t_j^* en el intervalo $[t_j, t_{j+1}]$ juega un papel fundamental. Las elecciones que resultan ser más últiles son:

- $t_j^* = t_j$, que da lugar a la propia integral de *Itô*, denotada por

$$\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega). \tag{2.37}$$

- $t_j^* = \frac{t_{j+1}+t_j}{2}$, que da lugar a la integral de Stratonovich, denotada por

$$\int_S^T f(t,\omega)\circ dB_t(\omega). \tag{2.38}$$

Veremos las diferencias existentes entre dichas integrales más adelante y nos centramos en desarrollar la integral de Itô. En cualquier caso, hemos de restringirnos a una clase especial de funciones y para ello introducimos nuevos conceptos.

Definición 2.11. *Si $B_t(\omega)$ es un movimiento Browniano n-dimensional, definimos $\mathcal{F}_t$ como la σ-álgebra generada por las variables aleatorias $B_s(\cdot)$, $s \leq t$. En otras palabras, es la menor $\sigma-$álgebra que contiene todos los conjuntos de la forma*

$$\{\omega; B_{t_1}(\omega) \in F_1, ..., B_{t_k} \in F_k\}, \tag{2.39}$$

donde $t_j \leq t$ y $F_j \subset \mathbb{R}^n$ son borelianos.

Una función $h(\omega)$ es $\mathcal{F}-$medible si y solo si h puede ser escrita como el límite puntual en casi todo ω de sumas de funciones de la forma

$$g_1(B_{t_1})...g_k(B_{t_k}), \tag{2.40}$$

donde $g_1, ..., g_k$ son funciones continuas y acotadas.

Definición 2.12. *Sea $\{\mathcal{N}_t\}_{t\geq 0}$ una familia creciente de σ-álgebras de subconjuntos de Ω. Decimos que un proceso $g(t,\omega) : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ es $\mathcal{N}_t$-adaptado si para cada $t \geq 0$ la función $\omega \to g(t,\omega)$ es $\mathcal{N}_t$-medible.*

Definición 2.13. *Definimos $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S,T)$ como la clase de funciones*

$$f(\cdot,\cdot) : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R} \tag{2.41}$$

cumpliendo que:

- *$(t,\omega) \to f(t,\omega)$ es $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$-medible, donde $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel en $[0,\infty)$.*
- *$f(t,\omega)$ es $\mathcal{F}_t$-adaptado.*
- *$E[\int_S^T f(t,\omega)^2 dt] < \infty$.*

Buscamos entonces definir la integral de Itô para funciones $f \in \mathcal{V}$,

$$\mathcal{I}[f](\omega) = \int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega), \tag{2.42}$$

donde B_t es el movimiento Browniano 1-dimensional.

Para ello, como veníamos anunciando, lo que hacemos es definir dicha integral para una clase de funciones simples ϕ. Decimos que una función $\phi \in \mathcal{V}$ es simple si tiene la forma

$$\phi(t,\omega) = \sum_j e_j(\omega)\chi_{[t_j,t_{j+1}]}. \tag{2.43}$$

Del hecho de que $\phi \in \mathcal{V}$ se deduce por la propia Definición 2.13 que cada función e_j debe ser $\mathcal{F}_{t_j}$-medible.

Para esta clase de funciones simples definimos $\mathcal{I}[\phi](\omega)$ como aparece en (2.31).

Lema 2.14. *Si $\phi(t,\omega)$ está acotada y es simple se tiene que*

$$E[(\int_S^T \phi(t,\omega)dB_t(\omega))^2] = E[\int_S^T \phi(t,\omega)^2 dt] \tag{2.44}$$

Esta es la Isometría de Itô para funciones simples y que nos ayuda a extender esta definición de la integral.

Demostración. Sea $\Delta B_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$. Entonces tenemos que

$$E[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ E[e_j^2](t_{j+1}-t_j) & \text{si } i = j \end{cases} \tag{2.45}$$

ya que $e_i e_j \Delta B_i$ y ΔB_j son independientes si $i < j$. Entonces

$$E[(\int_S^T \phi dB)^2] = \sum_{i,j} E[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] = \sum_j E[e_j^2](t_{j+1}-t_j) = E[\int_S^T \phi^2 dt].$$

□

Usando este Lema 2.14 la idea es extender esta definición de integral para funciones simples a todas las funciones de $\mathcal{V}(S,T)$. Para ello, aproximamos de cierto modo cualquier función de este espacio por estas funciones simples para tomar después límite en la definición de integral para dichas funciones elementales. Estas aproximaciones se hacen como sigue.

- Sea $g \in \mathcal{V}$ acotada y $g(\cdot,\omega)$ continua para cada ω. Entonces existe una sucesión de funciones simples $\phi_n \in \mathcal{V}$ cumpliendo que:

$$E[\int_S^T (g-\phi_n)^2 dt] \to 0 \text{ si } n \to \infty.$$

Para esto definimos $\phi_n(t,\omega) = \sum_j g(t_j,\omega)\chi_{[t_j,t_{j+1})}$. Esta es una función simple, claramente, pues al ser $g(t,\omega)$ una función $\mathcal{F}_t$-adaptada, también lo es cada ϕ_n. Además, del hecho de que está acotada se cumple que $E[\int_S^T |\phi_n(t,\omega)|^2 dt] < \infty$.

De la continuidad de $g(\cdot,\omega)$ es claro que para cada ω fijo y t en el dominio se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t,\omega) = g(t,\omega).$$

Usando el hecho de que $g(t,\omega)$ está acotada por una constante, digamos M, es cierto que

$$|\phi_n(t,\omega) - g(t,\omega)|^2 \leq 2|\phi_n(t,\omega)|^2 + 2|g(t,\omega)|^2 \leq 4M^2.$$

Por el teorema de la convergencia dominada tendríamos que, para cada ω

$$\lim_{n\to\infty} \int_S^T |\phi_n(t,\omega) - g(t,\omega)|^2 \, dt = \int_S^T \lim_{n\to\infty} |\phi_n(t,\omega) - g(t,\omega)|^2 \, dt = 0.$$

Por otro lado, del mismo modo también es cierto que para cualquier $\omega \in \Omega$

$$\int_S^T |\phi_n(t,\omega) - g(t,\omega)|^2 dt \leq 4M^2(T-S).$$

Si volvemos a aplicar el teorema de la convergencia dominada llegamos finalmente a que se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} E[\int_S^T (g-\phi_n)^2 dt] = 0.$$

- Sea $h \in \mathcal{V}$ acotada. Entonces existe una sucesión de funciones acotadas $g_n \in \mathcal{V}$ de manera que para cada ω $g_n(\cdot,\omega)$ es continua y

$$E[\int_S^T (h-g_n)^2 dt] \to 0 \text{ si } n \to \infty.$$

Para esto consideramos $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, no negativa, continua, de soporte compacto y verificando que $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)dt = 1$. Para $n \geq 1$ definimos la sucesión $\rho_n(t) = n\rho(nt)$, que cumple las mismas propiedades que ρ pero el soporte cada vez es menor. Definimos

$$g_n(t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(s-t)h(s,\omega)ds,$$

para cada ω y donde extendemos $h(t,\omega)$ por 0 donde no esté definida. Esto es, la definimos como la convolución de la extensión de h y ρ_n para cada ω.

Por las propiedades de la convolución es claro que para cada ω tenemos que $g_n(t,\omega)$ es continua y que al estar acotada $h(t,\omega)$ por una constante C y ser la integral de $\rho_n(t)$ en $\mathbb{R}$ igual a 1, nuestra $g_n(t,\omega)$ también está acotada por dicha C.

Que $g_n(t,\omega)$ es $\mathcal{F}_t$-adaptado es un asunto mucho más sutil que encontramos en la referencia [7].

Por otro lado, sí tenemos que $|g_n(t,\omega)|^2 \leq C^2$, y por tanto $E[\int_S^T |g_n|^2 dt] < \infty$. Además, por las propiedades de la convolución, para cada ω, tenemos que $g_n(t,\omega)$ converge a $h(t,\omega)$ en $L^2(dP)$, el espacio de funciones de cuadrado integrable. Además, si $f \in L^2(dP)$, definimos $||f||^2 = \int_\Omega |f|^2 dP$.

Igual que antes, es cierto que $|g_n(t,\omega) - h(t,\omega)|^2 \leq 2C^2$, y que $\int_S^T |g_n(t,\omega) - h(t,\omega)|^2 dt \leq 2C^2(T-S)$. Si volvemos a aplicar el teorema de la convergencia dominada es inmediato que obtenemos el resultado que buscábamos.

- Sea $f \in \mathcal{V}$. Entonces existe una sucesión de elementos $h_n \in \mathcal{V}$ acotados para cada n y cumpliendo que

$$E[\int_S^T (f-h_n)^2 dt] \to 0 \text{ si } n \to \infty.$$

Finalmente, consideramos la función auxiliar para cada $n \geq 1$ definida como

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq n \\ 0 & \text{si } |x| > n. \end{cases}$$

Para cada $n \geq 1$ definimos el proceso estocástico truncado $h_n(t,\omega)$ como

$$h_n(t,\omega) = f(t,\omega)\, p(f(t,\omega)),$$

o lo que es equivalente

$$h_n(x) = \begin{cases} f(t,\omega) & \text{si } |f(t,\omega)| \leq n \\ 0 & \text{si } |f(t,\omega)| > n. \end{cases}$$

De la propia definición, el nuevo proceso $h_n(t,\omega)$ es medible y $\mathcal{F}_t$-adaptado. Además se verifica que $|h_n(t,\omega)| \leq n$. Así, es cierto que

$$E[\int_S^T |h_n(t,\omega)|^2 dt] < \infty.$$

Con esto tenemos que cada $g_n(t,\omega) \in \mathcal{V}(S,T)$.

Por otro lado, del hecho de que $f(t,\omega) \in \mathcal{V}(S,T)$ y que por tanto tengamos que $E[\int_S^T |f(t,\omega)|^2 dt] < \infty$, obtenemos que $\int_S^T |f(t,\omega)|^2 dt < \infty$ *e.c.t.* ω.

Ahora bien, si tenemos en cuenta que $|h_n(t,\omega)| \leq |f_n(t,\omega)|$ y que $|g_n(t,\omega) - f(t,\omega)|^2 \leq 4|f(t,\omega)|^2$, por el teorema de la convergencia dominada es cierto *e.c.t.* ω que

$$\lim_{n\to\infty} \int_S^T |h_n(t,\omega) - f(t,\omega)|^2 dt = \int_S^T \lim_{n\to\infty} |h_n(t,\omega) - f(t,\omega)|^2 dt = 0.$$

Por otro lado, como también tenemos que $\int_S^T |g_n(t,\omega)-f(t,\omega)|^2 dt \le \int_S^T 4|f(t,\omega)|^2 dt$, volviendo a usar el teorema de la convergencia dominada llegamos a que

$$\lim_{n\to\infty} E[\int_S^T |g_n(t,\omega) - f(t,\omega)|^2] = E[\lim_{n\to\infty} \int_S^T |g_n(t,\omega) - f(t,\omega)|^2 dt] = 0.$$

Teniendo esto en cuenta es posible definir dicha integral para cualquier $f \in \mathcal{V}$.

Definición 2.15 (Integral de Itô)**.** *Sea $f \in \mathcal{V}$ y $\{\phi_n\}$ una sucesión de funciones simples de $\mathcal{V}$ verificando que*

$$E[\int_S^T (f(t,\omega) - \phi_n(t,\omega))^2 dt] \to 0 \text{ si } n \to \infty. \tag{2.46}$$

Definimos la integral de Itô de f, $\mathcal{I}[f](\omega)$, como

$$\int_S^T f(t,\omega) dB_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_S^T \phi_n(t,\omega) dB_t(\omega), \tag{2.47}$$

donde este límite se entiende como un límite en $L^2(dP)$.

Es claro que el límite de (2.47) existe, ya que por (2.46) y (2.44), la sucesión

$$\{\int_S^T \phi_n(t,\omega) dB_t(\omega)\}_n$$

es de Cauchy en $L^2(dP)$. Además, este límite no depende de la sucesión de funciones simples que aproximan a f.

Como consecuencia de (2.44) y (2.47) se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.16 (Isometría de Itô)**.** *Para toda $f \in \mathcal{V}(S,T)$*

$$E[(\int_S^T f(t,\omega) dB_t)^2] = E[\int_S^T f^2(t,\omega) dt]. \tag{2.48}$$

Corolario 2.17. *Si $f(t,\omega) \in \mathcal{V}(S,T)$ y $f_n(t,\omega) \in \mathcal{V}(S,T)$ para $n = 1, 2, ...$, verificando que*

$$E[\int_S^T (f(t,\omega) - f_n(t,\omega))^2 dt] \to 0 \text{ si } n \to \infty, \tag{2.49}$$

se tiene que

$$\int_S^T f_n(t,\omega) dB_t(\omega) \to \int_S^T f(t,\omega) dB_t(\omega), \quad \text{en } L^2(dP) \text{ si } n \to \infty. \tag{2.50}$$

Para verificar esto basta usar el la Isometría de Itô para $f \in \mathcal{V}$.

Pongamos en práctica esto con un ejemplo.

Ejemplo 2.18. *Como caso particular vamos a ver qué obtenemos al integrar el movimiento Browniano 1-dimensional centrado en 0 con respecto a él mismo en* $[0,t]$, $\int_0^t B_s dB_s$.

Consideremos la sucesión de funciones $\phi_n(s,\omega) = \sum_j B_j(\omega)\chi_{[t_j,t_{j+1}]}(s)$, *donde* $B_j = B_{t_j}$. *Entonces*

$$\begin{aligned} E[\int_0^t (\phi_n - B_s)^2 ds] &= E[\sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (B_j - B_s)^2 ds] \\ &= \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (s-t_j) ds = \frac{1}{2}\sum_j (t_{j+1}^2 - t_j^2) \to 0 \text{ si } \Delta t_j \to 0. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Usando el Corolario 2.17 tenemos que

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim_{\Delta t_j \to 0} \int_0^t \phi_n dB_s = \lim_{\Delta t_j \to 0} \sum_j B_j \Delta B_j.$$

Manipulando términos es fácil ver que

$$\Delta(B_j^2) = B_{j+1}^2 - B_j^2 = (B_{j+1} - B_j)^2 + 2B_j(B_{j+1} - B_j) = (\Delta B_j)^2 + 2B_j\Delta B_j.$$

Si ahora usamos que $B_0 = 0$, *tenemos que*

$$B_t^2 = \sum_j \Delta(B_j^2) = \sum_j (\Delta B_j)^2 + 2\sum_j B_j \Delta B_j,$$

o lo que es lo mismo

$$\sum_j B_j \Delta B_j = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}\sum_j (\Delta B_j)^2.$$

Veamos, finalmente, que $\sum_j (\Delta B_j)^2 \to t$ *en* $L^2(dP)$ *si* $\Delta t_j \to 0$.

Es claro que, usando (2.45), $E[\sum_j (\Delta B_j)^2] = t$. *Recordemos que si* X *e* Y *son variables aleatorias independientes:*

- $var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$.
- $var(X+Y) = var(X) + var(Y)$.

Por tanto, $var(\sum_j (\Delta B_j)^2) = \sum_j var(\Delta B_j)^2$. *Además,* $var(\Delta B_j)^2 = E[(\Delta B_j)^4 - (\Delta t_j)^2]$. *Al estudiar el movimiento Browniano vimos que* ΔB_j *sigue una distribución* $\mathcal{N}(0,\Delta t_j)$, *o lo que es lo mismo, una distribución igual a* $(\Delta t_j)^{\frac{1}{2}}\mathcal{N}(0,1)$. *Es claro que, entonces*

$$E[(\Delta B_j)^4] = 3\,(\Delta t_j)^2, \tag{2.52}$$

ya que $E[\mathcal{N}(0,1)^4] = 3$.

Por tanto, obtenemos que $var(\sum_j (\Delta B_j)^2) = \sum_j 2\,\Delta t_j^2$. *Así,* $var(\sum_j (\Delta B_j)^2) \to 0$ *si* $\Delta t_j \to 0$. *De la propia definición de varianza tenemos que* $\sum_j (\Delta B_j)^2 \to t$ *si* $\Delta t_j \to 0$.

Por tanto, la integral de Itô resulta

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{t}{2}. \tag{2.53}$$

Si $f, g \in \mathcal{V}(0,T)$ y $0 \leq S < U < T$, algunas de las propiedades de esta integral de Itô son las siguientes:

- $\int_S^T f dB_t dt = \int_S^U f dB_t dt + \int_U^T f dB_t dt$, para casi todo ω.
- $\int_S^T (cf + g) dB_t = c\int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t$, para casi todo ω.
- $E[\int_S^T f dB_t] = 0$.
- $\int_S^T f dB_t$ es $\mathcal{F}_t$-medible.

Al haber construido esta integral como un paso al límite de integrales de funciones simples y ser estas propiedades ciertas para dichas funciones elementales estas propiedades son directas.

Definición 2.19. *Una filtración en un espacio medible* $(\Omega, \mathcal{F})$ *es una familia* $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_t\}_{t\geq 0}$ *de* σ*-álgebras* $\mathcal{M}_t \subset \mathcal{F}$ *cumpliendo que*

$$0 \leq s < t \implies \mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_t.$$

Un proceso estocástico n-dimensional, $\{M_t\}_{t\geq 0}$*, en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *recibe el nombre de martingala con respeto a la filtración* $\{\mathcal{M}_t\}_{t\geq 0}$ *si*

- M_t *es* $\mathcal{M}_t$*-medible para todo* t*.*
- $E[|M_t|] < \infty$ *para todo* t*.*
- $E[M_s|\mathcal{M}_t] = M_t$ *para todo* $s \geq t$*.*

Como caso particular tenemos que el movimiento Browniano B_t conforma una martingala con respecto a las filtración $\{\mathcal{F}_t\}$, dada en la Definición 2.11. En efecto:

- $E[|B_t|]^2 \leq E[|B_t|^2] = |B_0|^2 + nt$.
- Si $s \geq t$, tenemos que $E[B_s|\mathcal{F}_t] = E[B_s - B_t + B_t|\mathcal{F}_t] = B_t$.
- Claramente B_t es $\mathcal{F}_t$ medible para cada t.

Con estos conceptos es posible extender la integral de Itô a una serie de integrandos más generales que los de $\mathcal{V}$. Para ello, cambiamos en la Definición 2.13 la segunda condición a que exista una filtración $\{\mathcal{H}_t\}_{t\geq 0}$ cumpliendo que:

- B_t sea una martingala con respecto a $\mathcal{H}_t$.

- f_t es $\mathcal{H}_t$-adaptado.

La idea tras esto es dejar que la función que queremos integrar, f_t, pueda depender en algo *más* que $\mathcal{F}_t$ siempre y cuando el integrador sea una martingala con respecto a ese *algo*. Con esta condición, además, podemos definir integrales de Itô multidimensionales.

Sea $B_t(\omega) = B_k(t,\omega)$ la componente k-ésima de un movimiento Browniano n-dimensional, $(B_1(t,\omega), ..., B_n(t,\omega))$ y $\mathcal{F}_t^{(n)}$ la σ-álgebra generada por $B_1(s_1,\cdot), ..., B_n(s_n,\cdot)$; $s_k \leq t$. Entonces, $B_k(t,\omega)$ es una martingala con respecto a $\mathcal{F}_t^{(n)}$, pues $B_k(s,\cdot) - B_k(t,\cdot)$ es independiente de $\mathcal{F}_t^{(n)}$ si $s > t$. En ese sentido, podemos definir integrales como

$$\int B_2 \, dB_1.$$

Definición 2.20. *Sea $B = (B_1, B_2, ..., B_n)$ el movimiento Browniano n-dimensional. Llamamos $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{m\times n}(S,T)$ al conjunto de matrices $m \times n$, $v = [v_{ij}(t,\omega)]$, donde cada entrada $v_{ij}(t,\omega)$ verifica las condiciones primera y tercera de la Definición 2.13 y la condición que acabamos de exponer con respecto a alguna filtración $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_t\}_{t\geq 0}$.*

Si $v \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_\sqcup}^{m\times n}(S,T)$, usando notación matricial, definimos

$$\int_S^T v dB = \int_S^T \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & \dots & v_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_1 \\ \vdots \\ dB_n \end{pmatrix} \tag{2.54}$$

como el vector columna cuya componente i-ésima es

$$\sum_{j=1}^{n} \int_S^T v_{ij}(s,\omega) dB_j(s,\omega).$$

Veamos qué diferencias encontramos entre las integrales de Itô y de Stratonovich.

Vimos que la interpretación de (2.26) era que el proceso estocástico X_t es solución de (2.29). Sin embargo, la interpretación de la integral estocástica se ha realizado mediante la construcción de Itô. Pero también sabemos que no era la única posible, que la construcción depende del punto del intervalo que usamos en la definición de integral de nuestra función elemental. Una elección distinta, tomando el punto medio, da pie a la integral de Stratonovich. Además, esta integral surge de otra forma.

Consideremos procesos con derivada continua en t, $B_t^{(n)}$, de manera que para casi todo ω,

$$B^{(n)}(t,\omega) \to B(t,\omega), \quad \text{si } n \to \infty,$$

uniformemente en intervalos acotados. Para cada ω sea $X_t^{(n)}(\omega)$ la solución de la ecuación diferencial determinista

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \frac{dB_t^{(n)}}{dt}.$$

De esta forma, $X_t^{(n)}$ converge a cierta función $X_t(\omega)$ en el mismo sentido. En ese caso, se tiene que dicha $X_t(\omega)$ coincide con (2.29) pero donde la integral estocástica se realiza con la interpretación de Stratonovich. Es decir,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) \circ dB_s. \tag{2.55}$$

Esto implica que X_t es solución de la ecuación de Itô modificada

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma'(s, X_s)\sigma(s, X_s)ds, \tag{2.56}$$

donde σ' denota la derivada de $\sigma(t, x)$ con respecto a x.

Vemos que hay un modo de relacionar estas integrales. Además, existe una diferencia fundamental: la integral de Stratonovich admite una regla de la cadena usual, mientras que para el caso de Itô el resultado es distinto. Vamos a estudiar esto.

2.3. Fórmula de Itô para el movimiento Browniano

La construcción de la integral de Itô no es práctica a la hora de evaluar ninguna integral. Necesitamos, por tanto, una herramienta que nos facilite el cálculo. Ya vimos en un ejemplo que esta integral puede no comportarse como se podría esperar.

Definición 2.21. *Sea B_t un movimiento Browniano 1-dimensional en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Un proceso de Itô es un proceso estocástico X_t en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con la forma*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega)ds + \int_0^t v(s, \omega)dB_s, \tag{2.57}$$

donde v es una función que cumple que:

- *$(t, \omega) \to v(t, \omega)$ es $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$-medible, donde $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel en $[0, \infty)$.*
- *Existe una filtración $\{\mathcal{H}_t\}_{t \geq 0}$ cumpliendo que B_t es una martingala con respecto a la misma.*
- *v_t es $\mathcal{H}_t$-adaptado.*
- *$P[\int_0^t v(s, \omega)^2 ds < \infty$ para todo $t \geq 0] = 1$.*

Por otro lado u es $\mathcal{H}_t$-adaptado también y verifica que $P[\int_0^t |u(s, \omega)|ds < \infty$ para todo $t \geq 0] = 1$.

Si X_t es un proceso de Itô, (2.57) se expresa de forma más concisa como $dX_t = udt + vdB_t$.

Teorema 2.22 (Fórmula 1-dimensional de Itô)**.** *Sea X_t un proceso de Itô dado por $dX_t = udt + vdB_t$ y $g(t,x) \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R})$. Entonces $Y_t = g(t, X_t)$ es un proceso de Itô y*

$$\begin{aligned} g(t, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t (\frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) + u_s \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) + \\ \frac{1}{2} v_s^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s))ds + \int_0^t v_s \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) dB_s. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Diferencialmente esto se expresa como

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2, \tag{2.59}$$

donde $(dX_t)^2 = (dX_t) \cdot (dX_t)$ se calcula con las reglas

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, \;\; dB_t \cdot dB_t = dt. \tag{2.60}$$

Para demostrar esto diferenciamos dos etapas. En primer lugar definamos qué es un tiempo de parada.

Además, si $\tau : \Omega \to [0, +\infty]$ es una variable aleatoria denotamos por $\{\tau \leq t\}$ al conjunto $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\}$.

Definición 2.23. *Un $\{\mathcal{F}_t\}$-tiempo de parada es cualquier variable aleatoria $\tau : \Omega \to [0, +\infty]$ tal que para todo $t \in [0, +\infty)$ se tiene que $\{\tau \leq t\}$ pertenece a $\mathcal{F}_t$.*

Ahora, para cada $n \geq 1$ tenemos

$$\tau_n(\omega) = \text{mín}\,(\inf_{t\in[0,T]} (\text{máx}(|X_t|, \int_0^t |u(s,\omega)|ds, |\int_0^t v(s,\omega)dB_s|, \int_0^t \sigma^2(s,\omega)ds) \geq n), T).$$

Que τ_n es una variable aleatoria es claro por ser máximo, ínfimo y mínimo de variables aleatorias. Para ver que es un tiempo de parada sí tenemos que pararnos a pensarlo. En efecto, sea $t_0 \geq 0$, si además $t_0 \geq T$ es claro que $\{\tau_n \leq t_0\} = \Omega$. Si, por contra $t_0 \in [0, T]$, $\{\tau \leq t_0\}$ es el conjunto de ω que verifican que para todo $t \in [0, t_0]$

$$\text{máx}(|X_t|, \int_0^t |b(s,\omega)|ds, |\int_0^t \sigma(s,\omega)dB_s|, \int_0^t \sigma^2(s,\omega)ds) < n.$$

Todos tienen que ser menores que n y podemos expresar esto como la intersección de conjuntos en $\mathcal{F}_t$. También se tiene que *e.c.t.* ω, la sucesión $\tau_n(\omega)$ es creciente a T. Más aún, *e.c.t.* ω existe un $n = n(\omega)$ tal que si $n \geq n(\omega)$, $\tau_n(\omega) = T$.

Es un hecho que podemos encontrar en las cita [13] que, si tenemos un tiempo de parada τ y $f(t,\omega)$ es integrable en el sentido de Itô, se tiene que

$$\int_0^{t\wedge\tau} f(s,\omega)dB_s = \int_0^t f(s,\omega)\chi_{[0,\tau]}(s)dB_s, \tag{2.61}$$

donde $t \wedge \tau$ denota el mínimo entre ambos.

Denotamos $X_0^n = X_0 \chi_{\{\tau_n > 0\}}$, $u_n(t,\omega) = u(t,\omega)\chi_{[0,\tau_n]}$ y $v_n(t,\omega) = v(t,\omega)\chi_{[0,\tau_n]}$ y

$$X_t^n = X_0^n + \int_0^t u_n(s,\omega)ds + \int_0^t v_n(s,\omega)dB_s, \ \ \forall t \in [0,T].$$

Con (2.61) es cierto que $X_t^n = X_{t\wedge\tau_n}\chi_{\{\tau_n>0\}}$. Si para cada $n \geq 1$ se satisface que

$$\begin{aligned} g(t,X_t^n) = g(0,X_0^n) + \int_0^t (&\frac{\partial g}{\partial s}(s,X_s^n) + u_n \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s^n) + \\ &\frac{1}{2} v_u^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s,X_s^n))ds + \int_0^t v_n \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s^n)dB_s, \end{aligned} \tag{2.62}$$

tenemos el resultado si $t \in [0,\tau_n]$. Sin embargo, si recordamos que *e.c.t.* ω a partir de un cierto n el intervalo $[0,\tau_n] = [0,T]$ tenemos el resultado.

Con esto claro, podemos suponer que existe una constante $K > 0$ tal que *e.c.t.* ω,

$$\text{máx}(|X_t|, \int_0^t |b(s,\omega)|ds, |\int_0^t \sigma(s,\omega)dB_s|, \int_0^t \sigma^2(s,\omega)ds) \leq K, \ \forall t \in [0,T].$$

De la continuidad de g y sus derivadas parciales podemos suponer que *e.c.t.* ω tenemos la misma acotación.

Además, de la fórmula de la integral de Itô multidimensional podemos suponer que tanto u como v son funciones elementales.

Usando el teorema de Taylor tenemos que

$$\begin{aligned} g(t,X_t) &= g(0,X_0) + \sum_j g(t_j,X_j) = g(0,X_0) + \sum_j \frac{\partial g}{\partial t}\Delta t_j + \sum_j \frac{\partial g}{\partial x}\Delta X_j \\ &+ \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(\Delta t_j)^2 + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x}(\Delta t_j)(\Delta X_j) + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\Delta X_j)^2 + \sum_j R_j, \end{aligned} \tag{2.63}$$

donde todas las derivadas parciales están evaluadas en (t,X_t) y además tenemos que

$$\Delta t_j = t_{j+1} - t_j, \ \Delta X_j = X_{j+1} - X_j, \ \Delta g(t_j,X_j) = g(t_{j+1},X_{t_{j+1}}) - g(t_j,X_{t_j}),$$

y $R_j = o(|\Delta t_j|^2 + |\Delta X_j|^2)$, para todo j.

Veamos qué pasa con los términos de (2.63) cuando $\Delta t_j \to 0$. Usando la acotación en las derivadas tenemos que

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial t}\Delta t_j \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s,X_s)ds.$$

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial x}\Delta X_j \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s)dX_s.$$

Por otro lado, considerando que tomamos u y v como elementales, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\Delta X_j)^2 = \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_j^2 (\Delta t_j)^2 + \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} v_j^2 (\Delta B_j)^2 \\ +2\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_j v_j (\Delta t_j)(\Delta B_j), \text{ donde } u_j = u(t_j, \omega),\ v_j = v(t_j, \omega).\end{aligned} \tag{2.64}$$

El primer y tercer término tienden a cero en $L^2(dP)$. Por ejemplo, tenemos que para el tercero

$$E[(\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_j v_j (\Delta t_j)(\Delta B_j))^2] = \sum_j E[(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_j v_j)^2](\Delta t_j)^3 \to 0 \text{ si } \Delta t_j \to 0. \tag{2.65}$$

Para el segundo término vamos a ver que converge a $\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} v^2 ds$ en $L^2(P)$ si $\Delta t_j \to 0$. Llamamos $a(t) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) v^2(t, \omega),\ a_j = a(t_j)$. Entonces

$$E[(\sum_j a_j (\Delta B_j)^2 - \sum_j a_j \Delta t_j)^2] = \sum_{i,j} E[a_i a_j ((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)((\Delta B_j) - \Delta t_j)].$$

Es claro que si $i < j$ entonces $a_i a_j ((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)$ y $(\Delta B_j)^2 - \Delta t_j$ son independientes y el término es nulo. Por simetría nos quedamos con los términos $i = j$, y entonces

$$\begin{aligned}\sum_j E[a_j^2 ((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j)^2] = \sum_j E[a_j^2] E[(\Delta B_t)^4 - 2(\Delta B_j)^2 (\Delta t_j)^2 + (\Delta t_j)^4] \\ = \sum_j E[a_j^2](3(\Delta t_j)^2 - 2(\Delta t_j)^2 + (\Delta t_j)^2) = 2\sum_j E[a_j^2](\Delta t_j)^2 \to 0 \text{ si } \Delta t_j \to 0.\end{aligned}$$

Así, tenemos que $\sum_j a_j (\Delta B_j)^2 \to \int_0^t a(s) ds$ en $L^2(P)$, que se expresa formalmente como $(dB)^2 = dt$.

Con este mismo argumento, es claro que $\sum_j R_j \to 0$ si $\Delta t_j \to 0$ y se concluiría.

Los otros dos términos de orden 2 en (2.63) tienen términos en Δt_j de orden mayor, que se anulan cuando $\Delta t_j \to 0$.

□

Damos la fórmula general, para un proceso de Itô n-dimensional.

Supongamos un movimiento Browniano m-dimensional, $B(t, \omega) = (B_1(t, \omega), ..., B_m(t, \omega))$. Sean $u_{i,j}$ y $v_{i,j}$ con $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ procesos cumpliendo las mismas condiciones que u y v respectivamente en la Definición 2.21, conformamos el proceso de Itô n-dimensional dado por

$$\begin{cases} dX_1 = u_1 dt + v_{11} dB_1 + \cdots + v_{1m} dB_m \\ \quad \vdots \\ dX_n = u_n dt + v_{n1} dB_1 + \ldots + v_{nm} dB_m \end{cases} \tag{2.66}$$

Teorema 2.24 (Fórmula general de Itô). *Sea*

$$dX(t) = udt + vdB(t)$$

un proceso de Itô n-dimensional y $g(t,x) = (g_1(t,x), ..., g_p(t,x))$ una función de clase C^2 de $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^p$. Entonces el proceso $Y(t,\omega) = g(t, X_t)$ es de nuevo un proceso de Itô cuya componente k-ésima, Y_k viene dada por

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X_t)dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X_t)dX_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t)dX_i dX_j, \tag{2.67}$$

donde $dB_i dB_j = \delta_{i,j}dt$, $dB_i dt = dtdB_i = 0$.

Veamos algunas aplicaciones de esta Fórmula de Itô. Para ello, notemos en primer lugar que B_t es un proceso de Itô propiamente, sin más que tomar $u(s,\omega) \equiv 0$ y $v(s,\omega) \equiv 1$.

Anteriormente, calculamos $\int_0^t B_s dB_s$, en el Ejemplo 2.18, usando la isometría de Itô. Vamos a realizar el mismo cálculo pero usando ahora la Fórmula de Itô.

Ejemplo 2.25. *Tomemos, siguiendo la notación usada en el Teorema 2.22, $X_t = B_t$ y $g(t,x) = \frac{1}{2}x^2$. En ese caso, tenemos*

$$Y_t = g(t, B_t) = \frac{1}{2}B_t^2.$$

Aplicando la Fórmula de Itô resulta

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial x}dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(dB_t)^2 = B_t dB_T + \frac{1}{2}(dB_t)^2 = B_t dB_t + \frac{1}{2}dt,$$

es decir, llegamos a que

$$d(\frac{1}{2}B_t^2) = B_t dB_t + \frac{1}{2}dt.$$

En otras palabras, el resultado es

$$\frac{1}{2}B_t^2 = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}t, \tag{2.68}$$

que es lo mismo que obtuvimos en el Ejemplo 2.18.

Ejemplo 2.26. *Del mismo modo, vamos a calcular $\int_0^t s dB_s$.*

Para ello consideramos $g(t,x) = tx$, que vuelve a cumplir las condiciones necesarias para poder aplicar la fórmula de Itô, y además, es cierto que

$$Y_t = g(t, B_t) = tB_t.$$

Por la fórmula de Itô tenemos

$$dY_t = B_t dt + tdB_t + 0.$$

Es decir, tenemos que

$$d(tB_t) = B_t dt + t dB_t.$$

Despejando llegamos al resultado final, que es

$$\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds,$$

lo cual es razonable desde un punto de vista en el que esperáramos alguna regla de integración por partes.

Ejemplo 2.27. *Vamos con el último ejemplo de aplicación de la Fórmula de Itô. Para ello vamos a usar la Fórmula de Itô para encontrar la solución a una ecuación diferencial.*

Sean c, σ constantes positivas. Consideremos la ecuación diferencial lineal en el sentido de Itô dada por

$$X_t = X_0 + c\int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s, \ \ t \in [0, T]. \tag{2.69}$$

Vamos a buscar una solución de la forma $X_t = f(t, B_t)$, con esta función lo suficientemente regular como para aplicar esta Fórmula de Itô. Si es así, podemos obtener que

$$X_t = X_0 + \int_0^t (\frac{\partial f}{\partial s}(s, B_s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(s, B_s))ds + \partial_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)dB_s. \tag{2.70}$$

Comparando (2.69) *y* (2.70) *imponemos que esta función $f(t, x)$ cumpla que*

$$cf(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x), \tag{2.71}$$

$$\sigma f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x). \tag{2.72}$$

De esta ecuación (2.72) *obtenemos, además, que*

$$\sigma^2 f(t, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x). \tag{2.73}$$

Simplificando con esta nueva relación, nuestro sistema de ecuaciones en derivadas parciales pasa a ser

$$(c - \frac{1}{2}\sigma^2)f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x), \ \ \sigma f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x). \tag{2.74}$$

Si buscamos $f(t, x)$ como producto de dos funciones con la regularidad necesaria, $f(t, x) = g(t)h(x)$, esta ecuaciones en (2.74) *se transforman en*

$$(c - \frac{1}{2}\sigma^2)g(t) = g'(t), \ \ \sigma h(x) = h'(x). \tag{2.75}$$

Las soluciones a estas nuevas ecuaciones son

$$g(t) = g(0)e^{(c-\frac{1}{2}\sigma^2)t}, \;\; h(x) = h(0)e^{\sigma x}. \tag{2.76}$$

Parece, entonces, razonable proponer como solución

$$X_t = e^{(c-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma B_t}, \; t \in [0,T]. \tag{2.77}$$

En efecto, considerando $f(t,x) = e^{(c-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma x}$*, que posee la regularidad suficiente para aplicar la Fórmula de Itô, y tengamos en cuenta que*

$$f(t,x) = e^{(c-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma x}, \; \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = (c - \frac{1}{2}\sigma^2)f(t,x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \sigma f(t,x), \; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = \sigma^2 f(t,x).$$

De la simple aplicación de la fórmula de Itô obtenemos justamente la expresión en (2.69)*.*

2.4. Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas con movimiento Browniano

Finalizamos lo correspondiente a esta parte con un resultado de existencia y unicidad de solución para ecuaciones diferenciales estocásticas. Antes damos un teorema auxiliar que nos será útil en la prueba.

Teorema 2.28 (Desigualdad de Doob para martingalas)**.** *Si* M_t *es una martingala de manera que e.c.t.* ω*,* $t \to M_t(\omega)$ *es continua, entonces para todo* $p \geq 1$*,* $T \geq 0$ *y* $\lambda > 0$

$$P[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t| \geq \lambda] \leq \frac{1}{\lambda^p} E[|M_T|^p]. \tag{2.78}$$

Teorema 2.29. *Sea* $T > 0$ *y* $b(\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*,* $\sigma(\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ *funciones medibles cumpliendo que*

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq C(1 + |x|); \;\; x \in \mathbb{R}^n, \; t \in [0,T], \tag{2.79}$$

con C *una constante,* $|\sigma|^2 = \sum_{i,j} |\sigma_{i,j}|^2$ *y cumpliendo también*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq D|x - y|; \;\; x, y \in \mathbb{R}^n, \; t \in [0,T], \tag{2.80}$$

con D *otra constante. Sea* Z *una variable aleatoria independiente del* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_\infty^{(m)}$ *generado por* $B_s(\cdot)$*,* $s \geq 0$ *cumpliendo*

$$E[|Z|^2] < \infty.$$

Entonces, la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad 0 \leq t \leq T, \ X_0 = Z \tag{2.81}$$

tiene una única solución continua en t, $X_t(\omega)$, *cumpliendo que* $X_t(\omega)$ *está* $\mathcal{F}_t^Z$*-adaptado a la filtración* $\mathcal{F}_t^Z$ *generada por* Z *y* $B_s(\cdot); s \leq t$ *y*

$$E[\int_0^T |X_t|^2 dt] < \infty. \tag{2.82}$$

Procedemos a demostrar este teorema.

Demostración. En primer lugar demostramos la unicidad basándonos en la Isometría de Itô y en la condición (2.80). Así, sean $X_1(t,\omega) = X_t(\omega)$ y $X_2(t,\omega) = \hat{X}_t(\omega)$ soluciones con valor inicial Z respectivamente; es decir, $X_1(0,\omega) = Z = X_2(0,\omega)$ si $\omega \in \Omega$. Hacemos $a(s,\omega) = b(s, X_s) - b(s, \hat{X}_s)$ y $\gamma(s,\omega) = \sigma(s, X_s) - \sigma(s, \hat{X}_s)$. Entonces

$$\begin{aligned} E[|X_t - \hat{X}_t|^2] &= E[(\int_0^t ads + \int_0^t \gamma dB_s)^2] \leq 2E[(\int_0^t ads)^2] + 2E[(\int_0^t \gamma dB_s)^2] \\ &\leq 2tE[\int_0^t a^2 ds] + 2E[\int_0^t \gamma^2 ds] \leq 2(1+t)D^2 \int_0^t E[|X_s - \hat{X}_s|^2]ds. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Consideramos la función $v(t) = E[|X_t - \hat{X}_t|^2]$, con $0 \leq t \leq T$, que por la desigualdades anteriores cumple

$$v(t) \leq 3(1+T)D^2 \int_0^t v(s)ds. \tag{2.84}$$

Por la desigualdad de Gronwall, al no haber término constante sumando en (2.84), es claro que $v(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Por tanto, tenemos que

$$P[|X_t - \hat{X}_t| = 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Q} \cap [0,T] = 1].$$

Por la continuidad de $t \to |X_t - \hat{X}_t|$ tenemos que

$$P[|X_1(t,\omega) - X_2(t,\omega)| = 0 \quad \text{para todo } t \in [0,T]] = 1.$$

De aquí, la unicidad esta probada. Pasamos ahora a probar la existencia.

Para ello definimos $Y_t^{(0)} = X_0$ y $Y_t^{(k)} = Y_t^{(k)}(\omega)$ inductivamente como

$$Y_t^{(k+1)} = X_0 + \int_0^t b(s, Y_s^{(k)})ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s^{(k)})dB_s. \tag{2.85}$$

De forma totalmente análoga a la desigualdad obtenida en (2.83) obtenemos que

$$E[|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^2] \leq (1+T)2D^2 \int_0^t E[|Y_t^{(k)} - Y_t^{(k-1)}|^2]ds,$$

para $k \geq 1$ y $t \leq T$. Por otro lado, usando (2.80), tenemos

$$\begin{aligned} E[|Y_t^{(1)} - Y_t^{(0)}|^2] &= E[(\int_0^t b(s, X_0)ds + \int_0^t \sigma(s, X_0)dB_s)^2] \\ &\leq 2E[(\int_0^t b(s, X_0)ds)^2] + 2E[(\int_0^t \sigma(s, X_0)dB_s)^2] \\ &\leq 2tE[\int_0^t b(s, X_0)^2 ds] + 2E[\int_0^t \sigma(s, X_0)^2 ds] \\ &\leq 2tE[\int_0^t C^2(1 + |X_0|)^2 ds] + 2E[\int_0^t C^2(1 + |X_0|^2)ds] \leq A_1 t, \end{aligned} \tag{2.86}$$

donde A_1 depende de T, C y $E[|X_0|^2]$. Por inducción es claro que, juntando lo que sabemos hasta ahora,

$$E[|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^2] \leq \frac{A_2^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!}, \qquad \text{con } k \geq 0,\ t \in [0, T], \tag{2.87}$$

con A_2 una constante que solo depende de C, D, T y $E[|X_0|^2]$. Por otro lado

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}| \leq & \int_0^T |b(s, Y_s^{(k)}) - b(s, Y_s^{(k-1)})|ds \\ & + \sup_{0 \leq t \leq T} |\int_0^t (\sigma(s, Y_s^{(k)}) - \sigma(s, Y_s^{(k-1)}))dB_s|. \end{aligned}$$

Usando el Teorema 2.28, tenemos que

$$\begin{aligned} P[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}| > 2^{-k}] \leq & P[\int_0^T |b(s, Y_s^{(k)}) - b(s, Y_s^{(k-1)})|ds > 2^{-k-1}] \\ & + P[\sup_{0 \leq t \leq T} |\int_0^t (\sigma(s, Y_s^{(k)}) - \sigma(s, Y_s^{(k-1)}))dB_s| > 2^{-k-1}] \\ & \leq 2^{2k+2} T \int_0^T E(|b(s, Y_s^{(k)} - b(s, Y_s^{(k-1)})|^2)ds \\ & + 2^{k+2} \int_0^T E[|\sigma(s, Y_s^{(k)}) - \sigma(s, Y_s^{(k-1)})|^2]ds \\ & \leq 2^{2k+2} D^2 (T+1) \int_0^T \frac{A_2^k t^k}{k!} dt = 2^{2k+2} D^2 (T+1) A_2^k \frac{T^{k+1}}{(k+1)!} \\ & \leq \frac{(4A_2 T)^{k+1}}{(k+1)!}, \end{aligned}$$

pues en (2.87) podemos ver que dicha constante A_2 es proporcional a $(T+1)D^2$ y que dicha constante de proporcionalidad es mayor que 2.

Por el lema de Borel-Cantelli, al tener una sucesión de conjuntos verificando que

$$\sum_k P[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}| > 2^{-k}] \leq e^{4A_2 T} < \infty,$$

se tiene que la probabilidad del límite superior de esta sucesión es nula. Recordemos que el límite superior de una sucesión de conjuntos es el conjunto de los elementos que están en infinitos conjuntos. En conclusión,

$$P[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}|>2^{-k} \text{ para infinitos } k]=0.$$

De aquí, *e.c.t.* ω existe $k_0=k_0(\omega)$ cumpliendo que

$$\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}|\leq 2^{-k} \text{ para } k\geq k_0.$$

Así, *e.c.t.* ω la sucesión

$$Y_t^{(n)}(\omega)=Y_t^{(0)}(\omega)+\sum_{k=0}^{n-1}(Y_t^{(k+1)(\omega)}-Y_t^{(k)}(\omega))$$

converge uniformemente en $[0,T]$. Denotamos el límite por $X_t(\omega)$. Junto a esto, X_t es continua en t *e.c.t.* ω, pues así lo es cada $Y_t^{(n)}$. Además, $X_t(\cdot)$ es $\mathcal{F}_t^Z$-medible para todo t, pues así lo es $Y_t^{(n)}(\cdot)$ para todo n.

Por otro lado, vemos que para $m>n\geq 0$. Tenemos por (2.87) que

$$\begin{aligned}E[|Y_t^{(m)}-Y_t^{(n)}|^2]^{\frac{1}{2}}&=||Y_t^{(m)}-Y_t^{(n)}||_{L^2(dP)}=||\sum_{k=n}^{m-1}(Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)})||_{L^2(dP)}\\&\leq\sum_{k=n}^{m-1}||(Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)})||_{L^2(dP)}\leq\sum_{k=n}^{\infty}[\frac{(A_2t)^{k+1}}{(k+1)!}]^{\frac{1}{2}}\to 0 \text{ as } n\to\infty.\end{aligned}\tag{2.88}$$

Por tanto, $\{Y_t^{(n)}\}$ converge en $L^2(P)$ a un límite Y_t. Por el Teorema de Fisher-Riesz existe una subsucesión $Y_t^{(n)}(\omega)$ que converge puntualmente en ω a $Y_t(\omega)$ y por la unicidad de límite hemos de tener que $X_t=Y_t$ *e.c.t.* ω. Por último, veamos que se cumple (2.81). Para todo n tenemos que

$$Y_t^{(n+1)}=X_0+\int_0^t b(s,Y_s^{(n)})ds+\int_0^t\sigma(s,Y_s^{(n)})dB_s.\tag{2.89}$$

Si hacemos $n\to\infty$, $Y_t^{(n+1)}\to X_t$ uniformemente en $t\in[0,T]$ *e.c.t.* ω. Por el Lema de Fatou se cumple

$$E[\int_0^T|X_t-Y_t^{(n)}|^2dt]\leq\liminf_{m\to\infty}E[\int_0^T|Y_t^{(m)}-Y_t^{(n)}|^2ds]\to 0$$

si $n\to\infty$. Por la isometría de Itô y por (2.80) tenemos que

$$\int_0^t\sigma(s,Y_s^{(n)})dB_s\to\int_0^t\sigma(s,X_s)dB_s \quad \text{en } L^2(dP).$$

Usando la desigualdad de Hölder y de nuevo la condición (2.80) tenemos también que

$$\int_0^t b(s,Y_s^{(n)})ds\to\int_0^t b(s,X_s)ds \text{ en } L^2(dP).$$

En conclusión, tomando límite en (2.89) cuando $n\to\infty$ obtenemos el resultado X_t.

□

3. Integración con respecto al movimiento Browniano fraccionario

Comenzamos a estudiar la otra señal aleatoria que nos interesa en este trabajo, el **movimiento Browniano fraccionario (fBm)**, que será estudiado desde el inicio como un proceso estocástico unidimensional.

Vamos a introducir y estudiar las principales características de este proceso estocástico. Tras esto, vamos a ver en qué espacio nos interesa definir la integral. Igual que antes, buscaremos un conjunto de elementos que sea denso en el mismo, equipado con una cierta topología que facilite el proceso para definir esta integral. Posteriormente, con un paso al límite extenderemos la definición a todos los elementos del espacio.

3.1. Movimiento Browniano fraccionario

Sea $H \in (0,1)$. El movimiento Browniano fraccionario con parámetro de *Hurst* H, $(B_t^H)_{t\geq 0}$, es un proceso estocástico Gaussiano centrado en 0 que cumple

$$E[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}). \tag{3.1}$$

Es directo ver que en el caso particular en que $H = \frac{1}{2}$ tenemos el movimiento Browniano estándar, que ya estudiamos en la sección anterior. Vamos a ver las propiedades más importantes de este nuevo proceso estocástico, fijándonos en el caso particular de $H = \frac{1}{2}$, de forma que recuperaremos algunos resultados ya vistos o incluso aparecerán otros nuevos.

Definición 3.1 (Proceso autosimilar)**.** *Un proceso $\{X_t\}_{t\in T}$ se dice autosimilar de índice $H > 0$ si para cada $a > 0$ los procesos $\{X_{at}\}_{t\in T}$ y $\{a^H X_t\}_{t\in T}$ tienen las mismas funciones de distribución finito-dimensionales. Esto es equivalente a que también tengan la misma distribución los procesos $\{X_t\}_{t\in T}$ y $\{a^{-H} X_{at}\}_{t\in T}$.*

Vamos a ver que, de hecho, el movimiento Browniano fraccionario es autosimilar.

Teorema 3.2. *El movimiento Browniano fraccionario con parámetro de Hurst H es un proceso autosimilar de índice H.*

Demostración. Para ello queremos ver que para cualquier colección de índices $t_1, ..., t_k$ de T se cumple que $(B_{at_1}^{(H)}, ..., B_{at_k}^{(H)})$ y $(a^H B_{t_1}^H, ..., a^H B_{t_k}^H)$ siguen la misma distribución.

Del hecho de que ambos son procesos Gaussianos centrados en 0, la igualdad en el sentido distribucional será equivalente a la igualdad de las funciones de covarianzas. Esto es inmediato usando (3.1), ya que si tomamos, sin pérdida de generalidad, los índices t_1 y t_2 y $a > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
E[B^H_{at_1}B^H_{at_2}] &= \frac{1}{2}((at_1)^{2H} + (at_2)^{2H} - |at_1 - at_2|^{2H}) \\
&= \frac{1}{2}a^{2H}(t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}) = a^{2H}E[B^H_{t_1}B^H_{t_2}] \\
&= E[(a^H B^H_{t_1})(a^H B^H_{t_2})].
\end{aligned}$$

Con esto queda demostrado que el movimiento Browniano fraccionario es un proceso autosimilar.

□

Tenemos que, por ser autosimilar, $E[(B_0^H)^2] = a^H E[(B_0^H)^2]$, con $a > 0$. Se deduce el siguiente corolario.

Corolario 3.3. *Si $(B_t^H)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano fraccionario, entonces $B_0^H(\omega) = 0$ e.c.t. ω.*

Vamos a estudiar más propiedades de este proceso.

Teorema 3.4. *El movimiento Browniano fraccionario es un proceso de incrementos estacionarios. Esto es, para $s, t, h > 0$ la distribución de $B_t^H - B_s^H$ es la misma que la de $B_{t+h}^H - B_{s+h}^H$. Además, estos solo son independientes si y solo si $H = \frac{1}{2}$.*

Demostración. En efecto, se tiene que $\forall t \geq 0$, $E[(B_t^H)^2] = t^{2H}$. Si tomamos $t > s$, entonces $E[(B_{t-s}^H)^2] = (t-s)^{2H}$. Como tanto B_{t-s}^H como $B_t^H - B_s^H$ son variables aleatorias con distribución normal centradas en 0 basta ver la igualdad de las varianzas para tener la igualdad distribucional. Tenemos, usando (3.1), que

$$\begin{aligned}
E[(B_t^H - B_s^H)^2] &= E[(B_t^H)^2] + E[(B_t^H)^2] - 2E[B_t^H B_s^H] \\
&= t^{2H} + s^{2H} - (t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}) = (t-s)^{2H}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, para comprobar que el movimiento Browniano fraccionario tiene incrementos independientes si y solo si $H = \frac{1}{2}$ basta considerar $s_1 < s_2 < t_1 < t_2$ y recordar que el hecho de que $B_{s_2}^H - B_{s_1}^H$ y $B_{t_2}^H - B_{t_1}^H$ sean independientes es equivalente a que fueran incorreladas. Así, se tiene que

$$\begin{aligned}
E[(B_{s_2}^H - B_{s_1}^H)(B_{t_2}^H - B_{t_1}^H)] &= E[B_{s_2}^H B_{t_2}^H] - E[B_{s_2}^H B_{t_1}^H] - E[B_{s_1}^H B_{t_2}^H] + E[B_{s_1}^H B_{t_1}^H] \\
&= \frac{1}{2}[(t_2 - s_1)^{2H} + (t_1 - s_2)^{2H} - (t_2 - s_2)^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H}].
\end{aligned}$$

Y esto es 0 si y solo si $H = \frac{1}{2}$.

□

Esto ya lo sabíamos de antes, que en el caso del movimiento Browniano estándar los incrementos son independientes.

De nuevo, podemos intentar aplicar el criterio de continuidad de Kolmogorov, Teorema 2.10.

Teorema 3.5. *Si $(B_t^H)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano fraccionario, e.c.t. ω las trayectorias de dicho proceso son α-Hölderianas, con $\alpha \in (0, H)$.*

Demostración. Como vimos, considerando $t > s$, es cierto que $B_t^H - B_s^H$ sigue la misma distribución que B_{t-s}^H. Esta distribución es una normal de media nula y varianza $(t-s)^{2H}$. En este caso usamos que $E[(B_{t-s}^H)^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!}|t-s|^{2kH}$. Basta tomar k suficientemente grande para que $H > \frac{1}{2k}$ y entonces aplica el criterio de continuidad de Kolmogorov, que además dice que las trayectorias son α-Hölderianas con $\alpha \in (0, H)$ *e.c.t.* ω.

□

El comportamiento de dicho proceso frente a la diferenciabilidad con respecto a t es también muy interesante.

Teorema 3.6. *Para cada t, las trayectorias del movimiento Browniano fraccionario son no diferenciables en dicho punto t e.c.t. ω.*

Demostración. Para probar esto partimos del hecho de que $B_0^H = 0$ *e.c.t.*. Consideremos la variable aleatoria dada por

$$\frac{B_t^H - B_{t_0}^H}{t - t_0}, \text{ con } t, t_0 \in T \text{ y con } t_0 < t.$$

Usando que nuestro fBm es autosimilar y alguna de las propiedades que hemos visto tenemos que

$$\frac{B_t^H - B_{t_0}^H}{t - t_0} = \frac{B_{t-t_0}^H}{t - t_0} = \frac{(t-t_0)^H B_1^H}{t - t_0} = (t - t_0)^{H-1} B_1^H,$$

donde las igualdades son en el sentido distribucional.

Consideramos ahora el evento

$$A(t) = \{\omega : \sup_{t_0 \leq s \leq t} |\frac{B_s^H(\omega) - B_{t_0}^H(\omega)}{s - t_0}| > d\}, \;\; d \in \mathbb{R}_+.$$

Si consideramos una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente a t_0 se tiene que $A(t_{n+1}) \subset A(t_n)$.

También es cierto, usando las igualdades distribucionales que ya hemos probado, que

$$\begin{aligned} P(A(t_n)) &\geq \{\omega : |\frac{B_s^H(\omega) - B_{t_0}^H(\omega)}{s - t_0}| > d\} \\ &= P(\{\omega : |(t_n - t_0)^{H-1} B_1^H(\omega)| > d\}) \\ &= P(\{\omega : |B_1^H(\omega)| > (t_n - t_0)^{1-H} d\}). \end{aligned}$$

En consecuencia, se obtiene que

$$P(A(t_n)) \geq P(|B_1^H| > (t_n - t_0)^{1-H} d).$$

Tomando límite en la desigualdad anterior

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P(A(t_n)) &\geq \lim_{n\to\infty} P(|B_1^H| > (t_n - t_0)^{1-H} d) \\ = P(\cup_{n=1}^{\infty}\{|B_1^H| > (t_n - t_0)^{1-H} d\}) &= P(|B_1^H| > 0) = 1, \end{aligned}$$

pues la sucesión de sucesos $\{\omega : |B_1^H(\omega)| > (t_n - t_0)^{1-H} d\}$ es creciente. Concluimos con esto que $\lim_{n\to\infty} P(A(t_n)) = 1$.

Además, por el mismo argumento de monotonía sobre $(A(t_n))$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} P(A(t_n)) = P(\lim_{n\to\infty} A(t_n)).$$

Por consiguiente,

$$P(\lim_{n\to\infty} A(t_n)) = P(\lim_{n\to\infty} \sup_{t_0 \leq s \leq t_n} |\frac{B_s^H(\omega) - B_{t_0}^H(\omega)}{s - t_0}| > d) = 1.$$

Por tanto, finalmente llegamos a que

$$P(\lim_{t\searrow t_0} \sup_{t_0 \leq s \leq t_n} |\frac{B_s^H(\omega) - B_{t_0}^H(\omega)}{s - t_0}| > d) = P(\lim_{t\to t_0} A(t)) = 1.$$

□

Sin embargo, existe una propiedad que es más fuerte aún, y es que *e.c.t.* ω las trayectorias son no diferenciables en ningún punto.

Estudiemos otra propiedad de este proceso referida a la variación del mismo a lo largo de sus trayectorias.

Sea T una constante positiva y consideremos el intervalo de tiempo $[0, T]$. Sea $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un proceso estocástico denotado por X y $\{\pi_n\}_n$ una sucesión de particiones $\pi_n = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T\}$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_i (t_i^n - t_{i-1}^n) = 0.$$

Definición 3.7. *Se dice que un proceso estocástico X tiene α-variación finita si para toda familia de particiones $\pi_n = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T\}$ se tiene que la sucesión de variables aleatorias*

$$S_\alpha(X, \pi_n) = \sum_{i=1}^{n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|^\alpha, \ n \in \mathbb{N},$$

converge en probabilidad a una variable aleatoria $V_\alpha(X, [0, T])$. En tal caso, esta variable aleatoria $V_\alpha(X, [0, T])$ recibe el nombre de α-variación del proceso X.

Vamos a calcular la α-variación del Movimiento Browniano Fraccionario en el intervalo $[0, T]$, tomando la sucesión de particiones

$$\pi_n = \{\frac{iT}{n}, i = 0, 1, 2, ..., n\}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Usando lo que ya sabemos, tenemos que, en sentido distribucional

$$S_\alpha(B^H, \pi_n) = \sum_{i=1}^{n} |B_{\frac{iT}{n}}^H - B_{\frac{(i-1)T}{n}}^H|^\alpha = \sum_{i=1}^{n} |B_{\frac{T}{n}}^H|^\alpha$$

$$= \sum_{i=0}^{n} |(\frac{1}{n})^H B_T^H|^\alpha = (\frac{1}{n})^{\alpha H} \sum_{i=0}^{n} |B_T^H|^\alpha = (\frac{1}{n})^{\alpha H - 1} |B_T^H|^\alpha.$$

De aquí tenemos que

$$S_\alpha(B^H, \pi_n) \to \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha H > 1 \\ \infty & \text{si } \alpha H < 1 \\ |B_T^H|^\alpha & \text{si } \alpha H = 1, \end{cases} \text{ cuando } n \to \infty,$$

y por tanto se tiene que

$$V\alpha(B^H, \pi_n) \to \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha H > 1 \\ \infty & \text{si } \alpha H < 1 \\ T|B_1^H|^\alpha & \text{si } \alpha H = 1, \end{cases} \text{ cuando } n \to \infty,$$

Más aún, vamos a demostrar que la α-variación del Movimiento Browniano Fraccionario en $[0, T]$ es la variable aleatoria $TE[|N|^\alpha]$, donde N sigue una distribución normal de media 0 y varianza 1.

En efecto, sea (t_i^n) una partición del intervalo $[0, T]$ cumpliendo que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_i (t_{i+1}^n - t_i^n) = 0.$$

Por simplicidad en la notación denotamos por S_n a $S_\alpha(B^H, (t_i^n))$, donde

$$S_\alpha(B^H, (t_i^n)) = \sum_{i=0}^{n} |B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H|^\alpha.$$

Lo que queremos comprobar es

$$\lim_{n\to\infty} E[(S_n - TE[|N^\alpha|])^2] = 0.$$

Para ello, nótese que

$$E[(S_n - TE[|N|^\alpha])^2] = E[S_n^2] - 2TE[|N^\alpha|]E[S_n] + T^2E^2[|N|^\alpha],$$

donde tenemos

$$E[S_n] = E[\sum_{i=0}^{n} |B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H|] = \sum_{i=0}^{n} E[|B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H|^\alpha] = \sum_{i=0}^{n} E[|t_{i+1} - t_i|^{\alpha H}|N|^\alpha],$$

sin más que recordar las propiedades ya estudiadas del movimiento Browniano fraccionario.

Particularizando para el caso de $\alpha = \frac{1}{H}$ se sigue que

$$E[S_n] = \sum_{i=0}^{n} E[|t_{i+1} - t_i||N^\alpha|] = E[|N|^\alpha] \sum_{i=0}^{n} |t_{i+1} - t_i| = TE[|N|^\alpha].$$

Si sustituimos esto en (3.1) se llega a

$$E[(S_n - TE[|N|^\alpha])^2] = E[S_n^2] - T^2E^2[|N|^\alpha].$$

De aquí es claro que, entonces, todo se reduce a comprobar que $E[S_n^2] \to T^2E^2[|N|^\alpha]$ si $n \to \infty$.

En primer lugar, observemos que

$$
\begin{aligned}
S_n^2 = & \sum_{i,j} |B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}|^\alpha |B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j}|^\alpha \\
& + \sum_{i=0}^{n} |B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}|^{2\alpha} + 2\sum_{i>j} |B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}|^\alpha |B^H_{t_{j+1}} - B^H_{j_i}|^\alpha .
\end{aligned}
$$

Llamamos I_1 al primer sumando e I_2 al segundo. Por la linealidad del límite vamos a calcular los de estos términos por separado.

Usando para I_1 las propiedades ya estudiadas

$$
I_1 = \sum_{i=0}^{n} E[|B^H_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^{2\alpha}] = \sum_{i=0}^{n} E[(t_{i+1} - t_i)^{2\alpha H} |N|^{2\alpha}].
$$

Usando que $\alpha = \frac{1}{H}$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{i=0}^{n} E[(t_{i+1} t_i)^2 |N|^{2\alpha}] = E[|N|^{2\alpha}] \sum_{i=0}^{n} (t_{i+1} - t_i)(t_{i+1} - t_i) \\
&\leq E[|N|^{2\alpha}] \sup_i (t_{i+1} - t_i) \sum_{i=0}^{n} (t_{i+1} - t_i) \\
&= E[|N|^{2\alpha}] \sup_i (t_{i+1} - t_i) T \to 0 \text{ si } n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Nos queda por ver qué pasa con I_2 si $n \to \infty$. Usando las mismas propiedades del Movimiento Browniano Fraccionario, así como la independencia de sus incrementos tenemos que

$$
\begin{aligned}
I_2 &= 2\sum_{i>j} E[|B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}|^\alpha ||B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_i}|^\alpha |] \\
&= 2\sum_{i>j} E[|(t_{i+1} - t_i) N_1|^\alpha |(t_{j+1} - t_j) N_2|^\alpha] \\
&= 2E[|N_1|^\alpha |N_2|^\alpha] \sum_{i>j} |t_{i+1} - t_i|^{\alpha H} |t_{j+1} - t_j|^{\alpha H}.
\end{aligned}
$$

Haciendo, de nuevo, $\alpha = \frac{1}{H}$ resulta que

$$
I_2 = 2E[|N_1|^\alpha |N_2|^\alpha] \sum_{i>j} |t_{i+1} - t_i||t_{j+1} - t_j|.
$$

Usando ahora, la independencia de los incrementos de los que antes hablábamos, obtenemos que N_1 y N_2 son variables independientes. Así, se cumple que

$$
\begin{aligned}
I_2 &= 2E[|N_1|^\alpha] E[|N_2|^\alpha] \sum_{i>j} |t_{i+1} - t_i||t_{j+1} - t_j| \\
&= 2E^2[|N_1|^\alpha] \sum_{i=0}^{n} |t_{i+1} - t_i| \sum_{j=0}^{i-1} |t_{j+1} - j_i| \\
&= 2E^2[|N_1|^\alpha] \sum_{i=0}^{n} |t_{i+1} - t_i| t_i.
\end{aligned}
$$

De la propia definición de la integral de Riemann

$$\sum_{i=0}^{n}(t_{i+1}-t_i)t_i \to \int_0^T t\,dt = \frac{T^2}{2}, \text{ si } n\to\infty.$$

Concluimos, por tanto, que

$$I_2 \to T^2E^2[|N|^\alpha] \quad \text{si } n\to\infty,$$

y así conseguimos lo que buscábamos, pues ya es inmediato que

$$E[S_n^2] \to T^2E^2[|N|^\alpha], \quad \text{si } n\to\infty.$$

En resumen, $V_\alpha(B^H,[0,T]) = TE[|N|^\alpha]$ *e.c.t.* si $\alpha=\frac{1}{H}$.

Si para un proceso estocástico cualquiera, $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ definimos el índice de la α-variación, $I(X,[0,T])$, como

$$I(X,[0,T]) = \text{ínf}\{\alpha>0 : V_\alpha(X,[0,T])<\infty\} \tag{3.2}$$

es claro que tenemos que $I(B^H,[0,T])=\frac{1}{H}$.

3.2. Diferencias entre el movimiento Browniano fraccionario y movimiento Browniano estándar

Vamos a estudiar, finalmente, el hecho por el que el movimiento Browniano fraccionario requiere una teoría de integración diferente de la que ya hemos visto. Para ello recordemos el concepto de tiempo de parada, que ya fue introducido y presentamos el de semimartingala continua.

Definición 3.8. *Sea $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espacio de probabilidad y $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ una filtración, y $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso estocástico continuo y adaptado a dicha filtración. Decimos que el mismo es una martingala local continua si existe una sucesión de tiempos de parada $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ creciente, con $\text{lím}_{n\to\infty}\tau_n=\infty$ y tal que para cada $n\in\mathbb{N}$ se verifica que $X_{\text{mín}\{t,\tau_n\}}\chi_{\{\tau_n>0\}}$ es una martingala con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$.*

Definición 3.9. *Sea $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espacio de probabilidad y $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ una filtración continua por la derecha. Es decir, que cumple que $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}=\{\mathcal{F}_{t+}\}_{t\in T}$ con $\mathcal{F}_{t+}=\cap_{s<t}\mathcal{F}_s$. Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in T}$ adaptado a dicha filtración es una semimartingala continua si admite la representación*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

donde M es una martingala local continua y nula en cero, y A es un proceso continuo adaptado a dicha filtración, de variación finita y nulo en 0.

Con estos conceptos podemos afirmar que si $H\neq\frac{1}{2}$ el movimiento Browniano fraccionario no es una semimartingala continua, y es que para que eso ocurra tendríamos que tener que $I(B^H,[0,T])$ tiene que pertenecer a $[0,1]\cup\{2\}$, lo que no es posible si $H\neq\frac{1}{2}$.

3.3. Integrales de Wiener

El primer paso en el camino hasta tener una integral estocástica con movimiento Browniano fraccionario consiste en definir dicha integral cuando el control lo hace este proceso estocástico pero el integrando es una función determinista. Estas integrales reciben el nombre de integrales de Wiener.

En lo que resta de trabajo nos centramos en el movimiento Browniano fraccionario con $H > \frac{1}{2}$.

La definición de estas integrales es la natural, la que se espera. Esto es, al tener un integrando determinista en un espacio que más tarde determinaremos, la integral de la misma con respecto a un movimiento Browniano fraccionario, si dicha función es simple, $f(s) = \sum_i a_i \chi_{[i,i-1]}(s)$, se toma como

$$\int_0^\infty f(s) dB_s^H = \sum_i a_i (B_i^H - B_{i-1}^H). \tag{3.3}$$

Si por contra, no tratamos con una función simple la idea es básicamente aproximar la misma por funciones simples y tomar límite de la definición anterior.

3.4. Construcción de la integral con respecto al Movimiento Browniano Fraccionario

Sea $\Omega = C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ el espacio de funciones reales continuas en $\mathbb{R}_+$ comenzando en 0 con la topología de la covergencia uniforme local. Existe una probabilidad P^H en $(\Omega, \mathcal{F})$, donde $\mathcal{F}$ es la σ-álgebra de Borel, que hace que en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P^H)$ el proceso coordenado $B^H : \Omega \to \mathbb{R}$ que se define como

$$B_t^H(\omega) = \omega(t), \ \ \omega \in \Omega,$$

sea un proceso Gausiano que verifica (3.1). Podemos encontrar la construcción de dicha probabilidad en [8] o [5]. Así, el proceso $\{B_t^H\}_{t \geq 0}$ es un Movimiento Browniano Fraccionario con parámetro de Hurst igual a H, y la medida de probabilidad P^H depende del parámetro H.

En esta sección, como hemos dicho, siempre tendremos que $H > \frac{1}{2}$ y veremos qué pasa en el caso límite, cuando $H = \frac{1}{2}$ para comparar con el caso del movimiento Browniano estándar.

Comenzamos definiendo $\phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ como

$$\phi(s,t) = H(2H-1)|s-t|^{2H-2}. \tag{3.4}$$

Esta función ϕ jugará un papel importante en el desarrollo de la teoría, y muchos de los resultados que aparecen se pueden extender a funciones más generales que también sean simétricas y definidas positivas. Este es el motivo por el que interesa considerarla como una función de dos variables en vez de una función de una sola.

Consideremos $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función medible Borel y determinista. Llamamos $L^2_\phi(\mathbb{R}_+)$ al conjunto de estas funciones que además cumplen la condición

$$|f|^2_\phi = \int_0^\infty \int_0^\infty f(s)f(t)\phi(s,t)\, ds\, dt < \infty.$$

Además, consideramos en este espacio el producto escalar, denotado por $\langle f|g\rangle_\phi$, dado por

$$\langle f|g\rangle_\phi = \int_0^\infty \int_0^\infty g(s)f(t)\phi(s,t)\, ds\, dt, \tag{3.5}$$

Obtenemos que el espacio $L^2_\phi(\mathbb{R}_+)$ equipado con este producto escalar es además un espacio de Hilbert.

Existen propiedades interesantes que nos van a servir y que damos en los siguientes Lemas.

Lema 3.10. *Si $(B^H_t)_{t\geq 0}$ es el movimiento Browniano fraccionario, se cumple que*

$$E[B^H_t B^H_s] = \int_0^t \int_0^s \phi(u,v) du\, dv. \tag{3.6}$$

Demostración. Para probar esto llamamos α_H a $H(2H-1)$ y procedemos realizando la integral de (3.6) de forma directa. Diferenciando la zona en la que $s > t$ y que $s < t$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^s \phi(u,v) du\, dv &= \int_0^t \int_0^s \alpha_H |u-v|^{2H-2} du\, dv \\
&= \alpha_H \left[\int_0^t du \int_0^u (u-v)^{2H-2} dv + \int_0^t du \int_u^s (v-u)^{2H-2} dv \right] \\
&= \alpha_H \left[\int_0^t \left(\frac{u^{2H-1}}{2H-1} + \frac{(s-u)^{2H-1}}{2H-1} \right) du \right] \\
&= \frac{\alpha_H}{2H(2H-1)} (t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}) = E[B^H_t B^H_s].
\end{aligned}$$

□

Lema 3.11. *Sean $f, g \in L^2_\phi(\mathbb{R}_+)$, entonces $\int_0^\infty f(s) dB_s$ y $\int_0^\infty g(s) dB_s$ están bien definidas y son variables aleatorias Gausianas de media nula, varianzas $|f|^2_\phi$ y $|g|^2_\phi$ respectivamente y además*

$$E\left[\int_0^\infty f(s) dB^H_s \int_0^\infty g(s) dB^H_s\right] = \int_0^\infty \int_0^\infty g(s)f(t)\phi(s,t)\, ds\, dt = \langle f|g\rangle_\phi .$$

Demostración. Solo vamos a ofrecer un esbozo de cómo probaríamos este lema basándonos en el uso de funciones simples.

Si tenemos $f(s) = \sum_i a_i \chi_{[i,i-1]}(s)$ y $g(s) = \sum_j a_j \chi_{[j,j-1]}(s)$. Por la propia definición de la integral de Wiener, (3.3), es claro que tenemos una variable aleatoria normal y que la esperanza de dicha integral es nula.

Si calculamos ahora la covarianza de $\int_0^\infty f(s)dB_s^H$ y $\int_0^\infty g(s)dB_s^H$, tenemos que usando el Lema 3.10

$$
\begin{aligned}
&E[\int_0^\infty f(s)dB_s^H \int_0^\infty g(s)dB_s^H] = \sum_i \sum_j a_i b_j E[(B_i^H - B_{i-1}^H)(B_j^H - B_{j-1}^H)] \\
&= \sum_i \sum_j a_i b_j (E[B_i^H B_j^H] - E[B_i^H B_j^H] - E[B_{i-1}^H B_j^H] + E[B_{i-1}^H B_{j-1}^H]) \\
&= \sum_i \sum_j a_i b_j (\int_0^i \int_0^j \phi(u,v) du\, dv + \int_0^{i-1} \int_0^{j-1} \phi(u,v) du\, dv - \int_0^{i-1} \int_0^j \phi(u,v) du\, dv \\
&- \int_0^i \int_0^{j-1} \phi(u,v) du\, dv) = \sum_i \sum_j a_i b_j \int_{i-1}^i \int_{j-1}^j \phi(u,v) du\, dv = \langle f|g \rangle_\phi .
\end{aligned}
$$

En el caso particular en que $f \equiv g$, se tiene que $E[(\int_0^\infty f(s)dB_s^H)^2] = |f|_\phi^2$.

□

Prosigamos con la construcción de esta integral. Vamos a trabajar en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P^H)$. Además, como el parámetro $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ es considerado fijo denotamos, para simplificar la notación, a la probabilidad de este espacio por P.

Consideremos $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ el espacio de variables aleatorias $F : \Omega \to \mathbb{R}$ que cumplen

$$||F||_p = (E[|F|^p])^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Para cada $f \in L_\phi^2(\mathbb{R}_+)$ definimos $\varepsilon : L_\phi^2 \to L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ como

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(f) &= \exp\{\int_0^\infty f(s)dB_s^H - \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^\infty f(s)f(t)\phi(s,t)\, ds\, dt\} \\
&= \exp\{\int_0^\infty f(s)dB_s^H - \frac{1}{2}|f|_\phi^2\}.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Si $f \in L_\phi^2(\mathbb{R}_+)$, entonces $\varepsilon(f) \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ para cada $p \geq 1$ y $\varepsilon(f)$ recibe el nombre de función exponencial. Esto es fácil de ver, pues por el Lema 3.11 tenemos que $\int_0^\infty f(s)dB_s$ sigue una distribución normal de media 0 y varianza $|f|_\phi^2$. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
E[|e^{\int_0^\infty f(s)dB_s - \frac{1}{2}|f|_\phi^2}|^p] &= \int_{\mathbb{R}} e^{px}\, e^{-\frac{p}{2}|f|_\phi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}|f|_\phi} e^{-\frac{x^2}{2|f|_\phi^2}} dx \\
&= e^{-\frac{p}{2}|f|_\phi^2}\, e^{\frac{|f|_\phi^2 p^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}|f|_\phi} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\frac{x}{\sqrt{2}|f|_\phi} - \frac{|f|_\phi p}{\sqrt{2}})^2} dx < \infty.
\end{aligned}
$$

Sea $\mathcal{E}$ la expansión lineal de estas funciones, es decir

$$\mathcal{E} = \{\sum_{k=1}^{n} a_k \varepsilon(f_k),\ n \in \mathbb{N},\ f \in L^2_\phi(\mathbb{R}_+) \text{ para } k \in \{1, ..., n\}\}. \quad (3.8)$$

Definición 3.12. *Definimos el **producto de Wick** de dos exponenciales, $\varepsilon(f)$ y $\varepsilon(g)$, denotado por $\varepsilon(f) \diamond \varepsilon(g)$ como*

$$\varepsilon(f) \diamond \varepsilon(g) = \varepsilon(f+g). \quad (3.9)$$

Este producto jugará un papel importante en la construcción de la integral que estamos buscando.

Definición 3.13. *Una variable aleatoria $F : \Omega \to \mathbb{R}$ es un polinomio del movimiento Browniano fraccionario si existe un polinomio $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ cumpliendo que $F = p(B^H_{t_1}, B^H_{t_2}, ..., B^H_{t_n})$, para ciertos $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$.*

Teorema 3.14. *$\mathcal{E}$ es denso en $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ para cada $p \geq 1$. En particular, $\mathcal{E}$ es denso en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

Demostración. Si $(B^H_t, t \geq 0)$ es un movimiento Browniano fraccionario es cierto que el conjunto de todos los polinomios definidos en el párrafo anterior es denso en $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ para $p \geq 1$. En este caso la densidad se debe a la continuidad del mismo proceso y al teorema de Stone-Weierstrass, que asegura que si una familia de funciones separa puntos y contiene a las constantes entonces es densa en ese espacio.

La prueba de este teorema se reduce a ver que cualquier polinomio se puede aproximar por algún elemento de $\mathcal{E}$. Además, como el producto de Wick de exponenciales sigue siendo exponencial lo que haremos es ver que para cualquier $t > 0$, B^H_t puede ser aproximado por elementos en $\mathcal{E}$.

Sea $f_\delta(s) = \chi_{[0,t]}(s)\delta$. Es inmediato que para cualquier $\delta > 0$, f_δ está en L^2_ϕ, y que $\varepsilon(f_\delta) = c(\delta)e^{\delta B^H_t}$ para cierta constante positiva $c(\delta)$.

Si escribimos

$$F_\delta = \frac{\varepsilon(f_\delta) - c(\delta)}{c(\delta)\delta} = \frac{e^{\delta B^H_t} - 1}{\delta},$$

es cierto que F_δ está en $\mathcal{E}$, pues es suma de elementos de $\mathcal{E}$ y el producto de la misma por una constante. Además, es cierto también que si hacemos pequeño δ, F_δ tiende puntualmente a B^H_t. Apoyándonos en el teorema de la convergencia dominada se tiene que $F_\delta \to B^H_t$ en $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

□

Teorema 3.15. *Sean $f_1, f_2, ..., f_n$ son elementos de L^2_ϕ cumpliendo que $|f_i - f_j|_\phi \neq 0$ si $i \neq j$. Entonces, $\varepsilon(f_1), \varepsilon(f_2), ..., \varepsilon(f_n)$ son linealmente independientes en L^2_ϕ.*

Demostración. Para probar esto consideremos $f_1, f_2, ..., f_k$ elementos distintos de L^2_ϕ, y sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ números reales tales que

$$|\lambda_1 \varepsilon(f_1) + \lambda_2 \varepsilon(f_2) + ... + \lambda_k \varepsilon(f_k)|_\phi = 0.$$

Sea $g \in L^2_\phi$. Entonces, por la ecuación anterior tenemos que

$$E[\{\lambda_1 \varepsilon(f_1) + \lambda_2 \varepsilon(f_2) + ... + \lambda_k \varepsilon(f_k)\}\varepsilon(g)] = 0.$$

Realizando un cálculo para variables aleatorias Gaussianas, que encontramos en [10], llegamos a que

$$\lambda_1 e^{\langle f_1|g\rangle_\phi} + \lambda_2 e^{\langle f_2|g\rangle_\phi} + ... + \lambda_k e^{\langle f_k|g\rangle_\phi} = 0.$$

Si volvemos atrás y reemplazamos g por δg con $\delta \in \mathbb{R}$, por la linealidad del producto escalar llegamos a

$$\lambda_1 e^{\delta\langle f_1|g\rangle_\phi} + \lambda_2 e^{\delta\langle f_2|g\rangle_\phi} + ... + \lambda_k e^{\delta\langle f_k|g\rangle_\phi} = 0.$$

Podemos realizar un desarrollo en serie de potencias del parámetro δ y agrupando las ecuaciones para los distintos δ^p con $p \in \{0, 1, ..., k-1\}$ y agrupamos para cada valor de p obtenemos la ecuación

$$\lambda_1 \langle f_1|g\rangle^p_\phi + \lambda_2 \langle f_2|g\rangle^p_\phi + ... + \lambda_k \langle f_k|g\rangle^p_\phi = 0, \tag{3.10}$$

con $p = 0, 1, ..., k-1$. Así, tenemos un sistema de ecuaciones lineales donde nuestras incógnitas son $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$. Además si nos fijamos en (3.10) tenemos que el determinante de la matriz de coeficientes es el determinante de Vandermonde. Si llamamos A a dicha matriz de coeficientes tenemos que $\det(A) = \prod_{i<j} \langle f_i - f_j|g\rangle_\phi$.

Para cada par (i, j) con $i \neq j$ el conjunto $\{g \in L^2_\phi : \langle f_i - f_j|g\rangle \neq 0\}$ es el complemento de un hiperplano en L^2_ϕ.

Es claro que la intersección de una cantidad finita de complementos de hiperplanos en L^2_ϕ es no vacía. Así, como existe un elemento en dicha intersección podemos afirmar la existencia de una $g \in L^2_\phi$ que verifica que para cada uno de estos pares (i, j) con $i \neq j$ cumple que $\langle f_i - f_j|g\rangle^p_\phi \neq 0$. Como consecuencia de esto, el determinante de la matriz A es no nulo y la única solución al sistema de ecuaciones diferenciales es la trivial, $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$, y, por tanto, $\varepsilon(f_1), \varepsilon(f_2), ..., \varepsilon(f_k)$ son linealmente independientes. $\square$

Como para distintas $f_1, f_2, ..., f_k$ en L^2_ϕ sus correspondientes exponenciales son independientes, podemos usar esta definición en (3.9) para extender este producto de Wick al producto de dos funcionales en $\mathcal{E}$, $F \diamond G$.

Más aún, podemos hacer una extensión de dicho producto para todos los elementos de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ usando el Teorema 3.14.

Definición 3.16. *La ϕ-derivada de una variable aleatoria $F \in L^P(\Omega, \mathcal{F}, P)$ en la dirección ϕg con $g \in L^2_\phi$ se define como*

$$D_{\phi_g} F(\omega) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}\{F(\omega + \delta \int_0^\cdot (\phi g)(u)du) - F(\omega)\}$$

si dicho límite existe en $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde $(\phi g)(t) = \int_0^\infty \phi(t,u) g_u du$. Además, si existe un proceso estocástico $(D^\phi F_s, s \geq 0)$ cumpliendo que

$$D_{\phi_g} F = \int_0^\infty D^\phi F_s g_s ds, \quad e.c.t.\ \omega \in \Omega,$$

para todo $g \in L^2_\phi$, entonces decimos que F es ϕ-diferenciable.

Las derivadas de orden superior se pueden definir de una manera similar.

Definición 3.17. *Sea $F : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ un proceso estocástico. Decimos que el mismo es ϕ-diferenciable si para cada $t \in [0,T]$, $F(t,\cdot)$ es ϕ-diferenciable y $D_s^\phi F_t$ es medible conjuntamente.*

A partir de estas definiciones podemos obtener una versión elemental de la regla de la cadena. Es decir, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función regular y $F : \Omega \to \mathbb{R}$ es ϕ-diferenciable, entonces $f(F)$ también es ϕ-diferenciable y se cumple que

$$D_{\phi_g} f(F) = f'(F) D_{\phi_g} F$$

y junto a eso,

$$D_s^\phi f(F) = f'(F) D_s^\phi F.$$

Damos algunas reglas de diferenciación que nos serán útiles en el desarrollo de la teoría. Estas son:

$$D_{\phi_g} \int_0^\infty f_s dB_s^H = \int_0^\infty \int_0^\infty \phi(u,v) f_u g_v du\, dv = \langle f|g \rangle_\phi\,, \tag{3.11}$$

$$D_s^\phi \int_0^\infty f_u dB_u^H = \int_0^\infty \phi(u,s) f_u du = (\phi f)(s), \tag{3.12}$$

$$D_{\phi_g} \varepsilon(f) = \varepsilon(f) \int_0^\infty \int_0^\infty \phi(u,v) f_u g_v du\, dv = \varepsilon(f) \langle f|g \rangle_\phi\,, \tag{3.13}$$

$$D_s^\phi \varepsilon(f) = \varepsilon(f) \int_0^\infty \phi(u,s) f_u du = \varepsilon(f)(\phi f)(s), \tag{3.14}$$

donde tanto f como g pertenecen a L^2_ϕ.

Proposición 3.18. *Si $g \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y $D_{\phi_g} F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, entonces*

$$F \diamond \int_0^\infty g_s dB_s^H = F \int_0^\infty g_s dB_s^H - D_{\phi_g} F. \tag{3.15}$$

Demostración. Por la definición del producto de Wick tenemos que

$$\varepsilon(f) \diamond \varepsilon(\delta g) = \varepsilon(f + \delta g).$$

Diferenciando esta igualdad y evaluando en $\delta = 0$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \varepsilon(f) \diamond \int_0^\infty g_s dB_s^H &= \varepsilon(f)[\int_0^\infty g_s dB_s^H - \langle f|g \rangle_\phi] \\ &= \varepsilon(f) \int_0^\infty g_s dB_s^H - \varepsilon(f) \langle f|g \rangle_\phi\,. \end{aligned}$$

Usando la identidad en (3.13), podemos reescribir esta última igualdad como

$$\varepsilon(f) \diamond \int_0^\infty g_s dB_s^H = \varepsilon(f) \int_0^\infty g_s dB_s^H - D_{\phi_g}\varepsilon(f).$$

Si $F \in \mathcal{E}$ es ahora una combinación de elementos de la forma $\varepsilon(f_1), \varepsilon(f_2), ..., \varepsilon(f_n)$, entonces por linealidad tenemos que

$$F \diamond \int_0^\infty g_s dB_s^H = F \int_0^\infty g_s dB_s^H - D_{\phi_g} F.$$

En cualquier otro caso, usando el Teorema 3.14 se tiene el resultado que buscamos.

□

Como hemos visto anteriormente, se tiene que

$$E[\varepsilon(f)\varepsilon(g)] = e^{\langle f|g\rangle_\phi}.$$

Con esto presente, es cierto que

$$E[(\varepsilon(f) \diamond \varepsilon(\gamma g))(\varepsilon(h) \diamond \varepsilon(\delta g))] = E[\varepsilon(f + \gamma g)\varepsilon(h + \delta g)] = e^{\langle f+\gamma g|h+\delta g\rangle_\phi}.$$

Podemos considerar todos elementos de esta igualdad función de γ y δ. Tomamos la derivada parcial $\frac{\partial^2}{\partial\gamma\,\partial\delta}$ y evaluamos en 0 el primer y último término de esta igualdad para obtener

$$\begin{aligned} E[(\varepsilon(f) \diamond \int_0^\infty g_s dB_s^H)(\varepsilon(h) \diamond \int_0^\infty g_s dB_s^H)] &= e^{\langle f|g\rangle_\phi}(\langle f|g\rangle_\phi \langle h|g\rangle_\phi + \langle g|g\rangle_\phi) \\ &= E[D_{\phi_g}\varepsilon(f) D_{\phi_g}\varepsilon(h) + \varepsilon(f)\varepsilon(g) \langle g|g\rangle_\phi]. \end{aligned}$$

donde para la última igualdad hemos vuelto a usar (3.13).

Por bilinealidad en ambos lados de la ecuación, para funcionales F y G en $\mathcal{E}$ se tiene que

$$E[(F \diamond \int_0^\infty g_s dB_s^H)(G \diamond \int_0^\infty g_s dB_s^H)] = E[D_{\phi_g}F D_{\phi_g}G + FG \langle g|g\rangle_\phi]. \tag{3.16}$$

En el caso particular en el que tenemos que $F = G$, se tiene el resultado

$$E[F \diamond \int_0^\infty g_s dB_s]^2 = E[(D_\phi F)^2 + F^2|g|_\phi^2]. \tag{3.17}$$

Si, en cambio, tomamos $h, g \in L_\phi^2$ y $F, G \in \mathcal{E}$, procediendo de forma totalmente análoga a como hemos hecho para obtener (3.16) obtenemos que

$$E[(F \diamond \int_0^\infty g_s dB_s^H)(G \diamond \int_0^\infty h_s dB_s^H)] = E[D_{\phi_g}F D_{\phi_h}G + FG \langle g|h\rangle_\phi]. \tag{3.18}$$

Esta ecuación es el punto de partida en nuestro camino a definir una integral estocástica respecto del movimiento Browniano fraccionario. Sea $F \in \mathcal{E}$. Vamos a definir la integral estocástica $\int_0^T F_s dB_s$ y estudiar algunas de sus propiedades.

Consideremos una partición arbitraria de $[0, T]$, $\pi : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$. En primer lugar, damos la siguiente suma de Riemann usando el producto de Wick ya introducido

$$S(F,\pi)=\sum_{i=0}^{n-1}F_{t_i}\diamond(B^H_{t_{i+1}}-B^H_{t_i}). \tag{3.19}$$

De la definición del producto de Wick tenemos que para cualesquiera F, G de $\mathcal{E}$ se tiene que $E[F\diamond G]=E[F]E[G]$. Entonces, para cualquier partición π,

$$\begin{aligned} E[\sum_{i=0}^{n-1}F_{t_i}\diamond(B^H_{t_{i+1}}-B^H_{t_i})] &= \sum_{i=0}^{n-1}E[F_{t_i}\diamond(B^H_{t_{i+1}}-B^H_{t_i})] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}E[F_{t_i}]E[B^H_{t_{i+1}}-B^H_{t_i}]=0. \end{aligned}$$

Si lo que queremos ahora es calcular la norma en $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ de $S(F,\pi)$, denotamos

$$\sigma_{i,j}=E[(F_{t_i}\diamond(B^H_{t_{i+1}}-B^H_{t_i}))(F_{t_j}\diamond(B^H_{t_{j+1}}-B^H_{t_j}))].$$

Usando la ecuación (3.18) se tiene que

$$\sigma_{i,j}=E[\int_{t_i}^{t_{i+1}}D^\phi_s F_{t_i}ds\int_{t_j}^{t_{j+1}}D^\phi_t F_{t_j}dt+F_{t_i}F_{t_j}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\phi(u,v)dudv].$$

En conclusión, tenemos que

$$\begin{aligned} E[S(F,\pi)^2]=\sum_{i,j}^{n-1}E[&\int_{t_i}^{t_{i+1}}D^\phi_s F_{t_i}ds\int_{t_j}^{t_{j+1}}D^\phi_t F_{t_j}dt \\ &+F_{t_i}F_{t_j}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\phi(u,v)du\,dv]. \end{aligned}$$

Llamamos $|\pi|=\text{máx}_i(t_{i+1}-t_i)$ y $F^\pi_t=F_{t_i}$ si $t_i\le t\le t_{i+1}$. Asumimos que si $|\pi|\to 0$, $E[F^\pi-F]^2\to 0$ y que

$$\sum_{i=0}^{n-1}E[\int_{t_i}^{t_{i+1}}|D^\phi_s F_{t_i}-D^\phi_s F_s|ds]^2$$

converge a 0. De todo esto obtenemos que si $(\pi_n,\ n\in\mathbb{N})$ es una sucesión de particiones verificando que $|\pi_n|\to 0$ si $n\to\infty$, entonces $(S(F,\pi_n),\ n\in\mathbb{N})$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. Por tanto, tiene sentido definir la integral $\int_0^T F_s dB^H_s$ como

$$\int_0^T F_s dB^H_s=\lim_{|\pi|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}F^\pi_{t_i}\diamond(B^H_{t_{i+1}}-B^H_{t_i}), \tag{3.20}$$

de manera que, con las hipótesis anteriores se verifica que

$$E[\int_0^T F_s dB^H_s]^2=E[(\int_0^T D^\phi_s F_s ds)^2+|F|^2_\phi]. \tag{3.21}$$

Para recoger toda esta construcción de forma compacta en un resultado definimos el espacio $\mathcal{L}(0,T)$. Este es el espacio de todos los procesos estocásticos en $[0,T]$ tales que $E[|F|^2_\phi]<\infty$, F es ϕ-diferenciable, la traza de $(D^\phi_s F_t,\ 0\le s\le T,\ 0\le t\le T)$ existe,

$E[\int_0^T (D_s^\phi F_s)^2 ds] < \infty$, y que para cada sucesión de particiones $(\pi_n,\ n \in \mathbb{N})$ tales que $|\pi_n| \to 0$ las cantidades

$$\sum_{i_0}^{n-1} E[\int_{t_i^{(n)}}^{t_{i+1}^{(n)}} |D_s^\phi F_{t_i^{(n)}}^\pi - D_s^\phi F_s| ds]^2$$

y

$$E[|F^\pi - F|_\phi^2]$$

convergen a 0 si $n \to \infty$, donde $\pi_n : 0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{n-1}^{(n)} < t_n^{(n)} = T$.

Teorema 3.19. *Sea $(F_t,\ t \in [0,T])$ un proceso estocástico tal que $F \in \mathcal{L}(0,T)$. Entonces, el límite en (3.20) existe y es así como definimos la integral $\int_0^T F_s dB_s^H$. Además, esta integral así definida verifica que $E[\int_0^T F_s dB_s^H] = 0$ y que*

$$E[\int_0^T F_s dB_s^H]^2 = E[(\int_0^T D_s^\phi F_s ds)^2 + |\chi_{[0,T]} F|_\phi^2]. \tag{3.22}$$

De esta definición se tienen los siguientes resultados.

Proposición 3.20. *Si $F, G \in \mathcal{L}(0,T)$, entonces*

$$\int_0^t (aF_s + bG_s) dB_s^H = a \int_0^t F_s dB_s^H + b \int_0^t G_s dB_s^H \ \ e.c.t.\ \omega,$$

para cualesquiera constantes a y b, y $t \in (0,T]$.

Proposición 3.21. *Si $F \in \mathcal{L}(0,T)$, $E[\sup_{0\le t\le T} F_s]^2 < \infty$, y $\sup_{0\le t\le T} E[D_s^\phi F_s]^2 < \infty$, entonces $(\int_0^t F_s dB_s^H,\ 0 \le t \le T)$ tiene una versión continua.*

Demostración. Sea $Y_t = \int_0^t F_s dB_s^H$, $0 \le t \le T$. Por la igualdad de (3.22) y usando la desigualdad de Hölder se sigue que

$$\begin{aligned} E[|Y_t - Y_s|^2] &= E[(\int_s^t F_u dB_u^H)^2] \\ &\le E[(\int_s^t D_u^\phi F_u du)^2 + \int_s^t \int_s^t F_u F_v \phi(u,v) du dv] \\ &\le (t-s) \int_s^t E[|D_u^\phi F_u|^2] du + E[\sup_{0\le t\le T} F_s]^2 \int_s^t \int_s^t \phi(u,v) du dv \\ &\le (t-s)^2 + C(t-s)^{2H}. \end{aligned}$$

Podemos tomar sin pérdida de generalidad $T < 1$, y en ese caso tendríamos que

$$E[|Y_t - Y_s|^2]^{\frac{1}{2}} \le (C+1)|t-s|^H.$$

El resultado se tiene sin más que usar el Teorema 2.10.

$\square$

En el Teorema 3.19 no se ha supuesto en ningún momento que el proceso estocástico $(F_s,\ s \in [0,T])$ esté adaptado al movimiento Browniano fraccionario, al contrario de lo que tuvimos que hacer en la construcción en el caso del movimiento Browniano estándar. Si, por otro lado, asumimos que la traza de $(D_s^\phi F_t,\ 0 \leq s \leq T,\ 0 \leq t \leq T)$ es nula para cualquier $s \in [0,T]$, obtenemos en ese caso que

$$E[\int_0^T F_s dB_s^H]^2 = E[\int_0^T \int_0^T F_u F_v \phi(u,v) du dv].$$

Al igual que en el caso del movimiento Browniano estándar, aquí también tiene sentido definir una integral de Stratonovich, que se denota por $\int_0^T F_s \delta B_s^H$.

Definición 3.22. *Sea $(\pi_n,\ n \in \mathbb{N})$ una sucesión de particiones del intervalo $[0,t]$ tales que $|\pi_n| \to 0$ si $n \to \infty$. Si $\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i^{(n)})(B^H(t_{i+1}^{(n)}) - B^H(t_i^{(n)}))$ converge en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ al mismo límite para cualquiera de estas secuencias, este límite define la integral estocástica de tipo Stratonovich y se denota por $\int_0^T F_s \delta B_s^H$.*

Teorema 3.23. *Si $F \in \mathcal{L}(0,T)$, entonces la integral estocástica de Stratonovich $\int_0^t f\ \delta B_s^H$ existe y además verifica que*

$$\int_0^t F_s \delta B_s^H = \int_0^t F_s\ dB_s^H + \int_0^t D_s^\phi F_s ds, \ \ e.c.t.$$

Demostración. Para probar esto nos basamos en la Proposición 3.18.

En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1} F_{t_i^{(n)}} (B^H(t_{i+1}^{(n)}) - B^H(t_i^{(n)})) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{n-1} F_{t_i^{(n)}} \diamond (B^H(t_{i+1}^{(n)}) - B^H(t_i^{(n)})) + \sum_{i=0}^{n-1} D_{\phi \chi_{[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}]}} F_{t_i^{(n)}} \\
&\quad = \sum_{i=0}^{n-1} [F_{t_i^{(n)}} \diamond (B^H(t_{i+1}^{(n)}) - B^H(t_i^{(n)})) + \int_{t_i^{(n)}}^{t_{i+1}^{(n)}} D_s^\phi F_{t_i^{(n)}} ds].
\end{aligned}$$

□

Además, con este tipo de integral, en caso de existir, no tiene por qué verificarse que $E[\int_0^t F_s\ \delta B_s] = 0$. En efecto, estudiemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.24. *Sea X una variable aleatoria siguiendo una distribución normal de media 0 y varianza 1, $X \sim N(0,1)$. Es un hecho conocido que en ese caso se verifica*

$$E[X^n] = \begin{cases} \frac{n!}{(\sqrt{2})^n (\frac{n}{2})!} & si\ n\ es\ par \\ 0 & si\ n\ es\ impar. \end{cases} \tag{3.23}$$

Sea $f(x) = x^n$. Si n es impar y usando la expresión en (3.12) entonces se verifica que

$$\begin{aligned}
E[\int_0^t f(B_s^H)\delta B_s^H] &= E[\int_0^t D_s^\phi f(B_s^H)ds] \\
&= E[\int_0^t f'(B_s^H) D_s^\phi B_s^H ds] \\
&= E[\int_0^t f'(B_s^H) \int_0^s \phi(u,s)du\, ds] \\
&= H \int_0^t s^{2H-1} E[f'(B_s^H)]ds \\
&= nH \int_0^t s^{2H-1} E[(B_s^H)^{n-1}]ds \\
&= nH \int_0^t s^{2H-1} E[(\frac{B_s^H}{s^H})^{n-1}] s^{nH-H} ds \\
&= \frac{n! H t^{(n+1)H}}{2^{\frac{n-1}{2}}(n+1)H(\frac{n-1}{2})!} \neq 0.
\end{aligned}$$

Estudiemos otro interesante fenómeno. Recordemos que en el caso del movimiento Browniano estándar la definición de la correspondiente integral de Stratonovich se hacía de un modo similar al de este caso del movimiento Browniano fraccionario, mediante un limite de sumas parciales. Sin embargo, en el caso anterior el punto tomado en cada intervalo de la partición, $[t_i, t_{i+1}]$ para la función que integrábamos, $f(\cdot)$, era el punto medio. ¿Por qué en este caso no lo hacemos así? La respuesta es sencilla: porque en este caso esta definición es independiente del punto del intervalo tomado para una gran clase de procesos estocásticos.

Vamos a centrarnos en demostrar esto para el caso en el que tomamos los puntos t_i y t_{i+1}.

En primer lugar, recordemos que en este caso de movimiento Browniano fraccionario por las igualdades distribucionales ya estudiadas tenemos que $\frac{B_t^H - B_t^H}{|t-s|^H}$ sigue una distribución $\mathcal{N}(0,1)$ y si tomamos un número par p, por la expresión (3.23), obtenemos que

$$E[B_t^H - B_s^H]^p = \frac{p!}{2^{\frac{p}{2}}(\frac{p}{2})!}|t-s|^{pH}.$$

Como consecuencia de esto, tenemos que si $\alpha > 1$, existe $C_\alpha < \infty$ cumpliendo que $E[|B_t^H - B_s^H|]^\alpha \leq C_\alpha |t-s|^{\alpha H}$, sin más que usar el carácter creciente de los momentos del valor absoluto de una distribución normal de media nula y varianza unidad.

Por otro lado, en la línea de la definición anterior de α-variación para un proceso cualquiera, diremos que un proceso $(f_s, 0 \leq s \leq T)$ es de variación cuadrática acotada si se verifica que existen constantes $p \geq 1$ y $0 < C_p < \infty$ tales que para cualquier partición $\pi : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = T$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} (E[f_{t_{i+1}} - f_{t_i}]^{2p})^{\frac{1}{p}} \leq C_p.$$

Teorema 3.25. *Sea $(f(t), 0 \leq t \leq T)$ un proceso de variación cuadrática acotada. Sea $(\pi_n, n \in \mathbb{N})$ una sucesión de particiones en $[0,T]$ verificando que $|\pi_n| \to 0$ si $n \to \infty$ y además*

$$(\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i^{(n)})(B^H(t_{i+1}^{(n)}) - B^H(t_i^{(n)})),\ n \in \mathbb{N})$$

converge a una variable aleatoria G en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde $\pi_n = \{t_0^{(n)}, ..., t_n^{(n)}\}$. Entonces, se verifica que

$$(\sum_{i=0}^{n-1} f(t_{i+1}^{(n)})(B^H(t_{i+1}^{(n)}) - B^H(t_i^{(n)})),\ n \in \mathbb{N})$$

converge a la misma variable aleatoria en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Demostración. Basta mostrar que $\sum_{i=0}^{n-1}(f_{t_{i+1}} - f_{t_i})(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i})$ converge a 0 en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sea p un número como en la definición de variación cuadrática acotada para $(f_t, 0 \leq t \leq T)$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
&(E[\sum_{i=0}^{n-1}(f_{t_{i+1}} - f_{t_i})(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i})]^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad = || \sum_{i=0}^{n-1}(f_{t_{i+1}} - f_{t_i})(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i})||_{L^2(\Omega)} \\
&\quad \leq \sum_{i=0}^{n-1} ||(f_{t_{i+1}} - f_{t_i})(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i})||_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Usando ahora la versión integral de la desigualdad de Hölder se tiene que con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1}||(f_{t_{i+1}} - f_{t_i})(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i})||_{L^2(\Omega)} \\
&\quad \leq \sum_{i=0}^{n-1}(E[f_{t_{i+1}} - f_{t_i}]^{2p})^{\frac{1}{2p}}\ (E[B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}]^{2q})^{\frac{1}{2q}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, usamos la desigualdad de Hölder. Es decir, que si a_k, b_k son números reales positivos, entonces si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se verifica que $\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq (\sum_{k=0}^n a_k^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=0}^n b_k^q)^{\frac{1}{q}}$.

Aplicando esto a lo que ya hemos obtenido se llega al resultado final.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1}(E[f_{t_{i+1}} - f_{t_i}]^{2p})^{\frac{1}{2p}}\ (E[B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}]^{2q})^{\frac{1}{2q}} \\
&\quad \leq \{\sum_{i=0}^{n-1}(E[f_{t_{i+1}} - f_{t_i}]^{2p})^{\frac{1}{p}}\}^{\frac{1}{2}}\ \{\sum_{i=0}^{n-1}(E[B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}]^{2q})^{\frac{1}{q}}\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leq C\ \{\sum_{i=0}^{n-1} |t_{i+1} - t_i|^{2H}\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leq C\ \max_{0 \leq i < n-1}(t_{i+1} - t_i)^{H - \frac{1}{2}}\{\sum_{i=0}^{n-1} |t_{i+1} - t_i|\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leq C\sqrt{T}\ \max_{0 \leq i < n-1}(t_{i+1} - t_i)^{H-\frac{1}{2}} \to 0,\ \text{si } |\pi_n| \to 0.
\end{aligned}$$

Con esto demostramos que $\sum_{i=0}^{n-1}(f_{t_{i+1}} - f_{t_i})(B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H)$ converge a 0 en el sentido que habíamos dicho y el teorema queda demostrado.

□

Como caso particular de proceso de variación cuadrática finita tenemos el que resulta de la composición del movimiento Browniano fraccionario con una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continuamente diferenciable con su primera derivada acotada por una constante K. Además, en este caso si x e y son dos puntos de su dominio se verifica que $f(x) = f(y) + \int_y^x f'(z)dz$. Sin más que tomar el cambio de variable $z = y + \theta(x - y)$ resulta que $f(x) = f(y) + \int_0^1 f'(x + \theta(y - x))d\theta\ (y - x)$. Esta expresión será ahora usada.

Así, para cualquier $p \geq 1$ y cualquier partición π se cumple

$$
\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{i=0}^{n-1}\{E[f(B_{t_{i+1}}^H) - f(B_{t_i}^H)]^{2p}\}^{\frac{1}{p}} \\
&= \{E(\int_0^1 f'(B_{t_i}^H + \theta(B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H))\, d\theta(B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H))^{2p}\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K\sum_{i=0}^{n-1} E[|B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H|^{2p}]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K\sum_{i=0}^{n-1} |t_{i+1} - t_i|^{2H} \leq CT.
\end{aligned}
$$

3.5. Fórmulas de Itô para el movimiento Browniano fraccionario

Al igual que hicimos con el movimiento Browniano estándar, vamos a dar dos fórmulas de Itô para esta integral con respecto al movimiento Browniano Fraccionario. Estas facilitarán enormemente el cálculo de muchas integrales.

La primera es algo más simple. Como aplicación de esta vamos a calcular la integral del movimiento Browniano fraccionario con $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ con respecto de él mismo en $[0, t]$.

Vamos a comparar el resultado que se obtiene con el que obtuvimos en el apartado anterior con el movimiento Browniano estándar, para ver que estos coinciden formalmente cuando $H = \frac{1}{2}$.

La segunda fórmula de Itô que vamos a estudiar es más general. Comencemos con la primera.

Teorema 3.26 (Fórmula de Itô)**.** *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable con segunda derivada acotada. Se cumple entonces que*

$$
f(B_T^H) - f(B_0^H) = \int_0^T f'(B_s^H)dB_s^H + H\int_0^T s^{2H-1}\, f''(B_s^H)\, ds, \ \ e.c.t\, \omega. \tag{3.24}
$$

Demostración. Consideremos una partición $\{t_0, t_1, ..., t_n\}$ de $[0, T]$. Se tiene entonces, por la fórmula de Taylor y la Proposición 3.18, que

$$
\begin{aligned}
f(B_T^H) - f(0) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(B_{t_{i+1}}^H) - f(B_{t_i}^H) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{t_i})\,[B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H] + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\chi_i)[B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H]^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{t_i}^H) \diamond [B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H] + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} D_s^\phi\, f'(B_{t_{i+1}}^H)\, ds \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)[B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H]^2 \\
&= I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned}
$$

donde $\xi \in (B_{t_i}^H, B_{t_{i+1}}^H)$. Como estamos suponiendo siempre que $H > \frac{1}{2}$ es claro por lo ya estudiado sobre el movimiento Browniano fraccionario que $I_3 \to 0$ en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Por otro lado, el término I_1 converge a $\int_0^T f'(B_s^H) dB_s^H$ en este mismo espacio, $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, por definición de la misma. Finalmente, por las propiedades de la derivada que hemos visto se tiene que

$$
\begin{aligned}
D_s^\phi f'(B_{t_i}^H) &= f''(B_{t_i}^H)\, D_s^\phi B_{t_i}^H \\
&= f''(B_{t_i}^H) \int_0^{t_i} \phi(u, s) du \\
&= H f''(B_{t_i}^H)[s^{2H-1} - (s - t_i)^{2H-1}].
\end{aligned}
$$

Si integramos el término correspondiente al segundo término del corchete y usando la acotación sobre la segunda derivada de f, digamos por M, se tiene que al ser $2H > 1$

$$
\begin{aligned}
&|H \sum_{i=0}^{n-1} f''(B_{t_i}^H)\,(t_{i+1} - t_i)^{2H}| \leq MH \max_{0 \leq i < n-1} (t_{i+1} - t_i)^{2H-1} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \\
&= MHT \max_{0 \leq i < n-1} (t_{i+1} - t_i)^{2H-1} \to 0.
\end{aligned}
$$

Entonces, I_2 converge en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a $H \int_0^T s^{2H-1} f''(B_s^H)\, ds$.

□

Nótese que obtenemos la fórmula de Itô en el caso en el que f no depende de forma explícita de s y sustituimos formalmente $H = \frac{1}{2}$ en (3.24).

Vamos a usar esto para calcular la integral del movimiento Browniano fraccionario con respecto a él mismo en el intervalo $[0, t]$, igual que hicimos con el movimiento Browniano estándar, para comparar ambas soluciones y ver que recuperamos esta si $H \to \frac{1}{2}$.

Ejemplo 3.27. *Usando el Teorema 3.26 vamos a calcular* $\int_0^t B_s^H\, dB_s^H$ *para* $H \in (\frac{1}{2}, 1)$.

De modo similar a como hicimos en el Ejemplo 2.25, consideramos $f(x) = x^2$. *Con esta función estamos en condiciones de aplicar el Teorema 3.26.*

Usando la expresión (3.24) *y recordando que* $B_0^H(\omega) = 0$ *e.c.t.* ω *tenemos que*

$$(B_t^H)^2 = 2\int_0^t B_s^H\, dB_s^H + H\int_0^t s^{2H-1}\, 2ds.$$

Resolviendo la integral y despejando llegamos a

$$\int_0^t B_s^H\, dB_s^H = \frac{1}{2}(B_t^H)^2 - \frac{t^{2H}}{2}. \tag{3.25}$$

Aunque este resultado solo tiene sentido si $H \in (\frac{1}{2}, 1)$*, como ya hemos comentado, si sustituimos formalmente* $H = \frac{1}{2}$ *recuperamos el resultado que obtuvimos en* (2.68).

Estudiamos ahora una fórmula de Itô más general aún. Pero antes damos un teorema útil a la hora de calcular derivadas en cualquier dirección.

Teorema 3.28. *Sea* $(F_t, t \in [0,T])$ *un proceso estocástico en* $\mathcal{L}(0,T)$ *y* $\sup_{0\le s\le T} E[D_s^\phi F_s]^2 < \infty$*, y* $\eta_t = \int_0^t F_u dB_u^H$ *para* $t \in [0,T]$*. Entonces, para* $s,t \in [0,T]$*,*

$$D_s^\phi \eta_t = \int_0^t D_s^\phi F_u\, dB_u^H + \int_0^t F_u \phi(s,u) du, \;\; e.c.t.$$

Con este teorema en mente damos paso a esta otra fórmula de Itô.

Teorema 3.29. *Sea* $\eta_t = \int_0^t F_u dB_u^H$*, donde* $(F_u, 0 \le u \le T)$ *es un proceso estocástico en* $\mathcal{L}(0,T)$*. Suponemos que existe* $\alpha > 1 - H$ *que cumple que*

$$E[F_u - F_v]^2 \le C|u-v|^{2\alpha},$$

donde $|u-v| \le \delta$ *para algún* $\delta > 0$ *y que*

$$\lim_{0\le u,v\le t, |u-v|\to 0} E[D_u^\phi(F_u - F_v)]^2 = 0.$$

Sea $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función con su primera derivada en el primer argumento continuo y lo mismo para la segunda derivada en su segunda variable. Además, supongamos que estas derivadas están acotadas. Si además de esto se verifica que* $E[\int_0^T |F_s D_s^\phi \eta_s| ds] < \infty$ *y que* $(f'(s,\eta_s)F_s, s \in [0,T])$ *está en* $\mathcal{L}(0,T)$*, entonces tenemos que para todo* $t \in [0,T]$ *se tiene que*

$$\begin{aligned} f(t,\eta_t) = f(0,0) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s,\eta_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,\eta_s) F_s dB_s^H \\ &+ \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,\eta_s) F_s D_s^\phi \eta_s ds \;\; e.c.t.\ \omega. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Demostración. Sea π una partición como las que hemos definido hasta ahora pero reemplazando T por t. Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} f(t,\eta_t)-f(0,0) &= \sum_{k=0}^{n-1}[f(t_{k+1},\eta_{t_{k+1}})-f(t_k,\eta_{t_k})] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}[f(t_{k+1},\eta_{t_{k+1}})-f(t_k,\eta_{t_{k+1}})] \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1}[f(t_k,\eta_{t_{k+1}})-f(t_k,\eta_{t_k})]. \end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio podemos afirmar que el primer sumando converge a $\int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s,\eta_s)ds$ en $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. Para el segundo hacemos un desarrollo de Taylor hasta segundo orden. Obtenemos, así, que

$$f(t_k,\eta_{t_{k+1}})-f(t_k,\eta_{t_k}) = \frac{\partial f}{\partial x}(t_k,\eta_{t_k})(\eta_{t_{k+1}}-\eta_{t_k}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_k,\xi_k)(\eta_{t_{k+1}}-\eta_{t_k})^2,$$

donde $\xi_k \in (\eta_{t_k},\eta_{t_{k+1}})$.

Usando la expresión en (3.21) y la desigualdad de Hölder se sigue que

$$\begin{aligned} E[\eta_{t_{k+1}}-\eta_{t_k}]^2 =& E[\int_{t_k}^{t_{k+1}} D_s^\phi F_s ds]^2 + E[\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}} F_u F_v \phi(u,v)du\,dv] \\ &\leq (t_{k+1}-t_k)\int_{t_k}^{t_{k+1}} E[D_s^\phi F_s]^2 ds \\ &+ \int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (E[F_u]^2)^{\frac{1}{2}}(E[F_v]^2)^{\frac{1}{2}}\phi(u,v)dudv \\ &\leq C[(t_{k+1}-t_k)^2 + \int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(u,v)dudv] \\ &\leq (t_{k+1}-t_k)^2 + C(t_{k+1}-t_k)^{2H} \leq C(t_{k+1}-t_k)^{2H}, \end{aligned}$$

donde $t_{i+1}-t_i<1$ y se puede definir una nueva constante C, que en general depende del proceso pero no de la partición.

Si usamos la acotación de la segunda derivada con respecto a la segunda variable de f tenemos

$$\begin{aligned} E[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_k,\xi_k)(\eta_{t_{k+1}}-\eta_{t_k})^2] &\leq K\sum_{k=0}^{n-1}E[\eta_{t_{k+1}}-\eta_{t_k}]^2 \\ &\leq K\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)^{2H} \to 0 \text{ si } |\pi|\to 0, \end{aligned}$$

como se demostró antes.

Nos centramos ahora en el otro término. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(t_k,\eta_{t_k})(\eta_{t_{k+1}}-\eta_{t_k}) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t_k,\eta_{t_k})(F_{t_k}\diamond(B^H_{t_{k+1}}-B^H_{t_k})) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(t_k,\eta_{t_k})(\int_{t_k}^{t_{k+1}}(F_s-F_{t_k})dB_s^H). \end{aligned}$$

A partir del primer término obtenemos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(t_k, \eta_{t_k})(F_{t_k} \diamond (B^H_{t_{k+1}} - B^H_{t_k})) \\
&\quad = \frac{\partial f}{\partial x}(t_k, \eta_{t_k})(F_{t_k}(B^H_{t_{k+1}} - B^H_{t_k}) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} D^\phi_s F_{t_k} ds) \\
&\quad = \frac{\partial f}{\partial x}(t_k, \eta_{t_k}) F_{t_k}(B^H_{t_{k+1}} - B^H_{t_k}) - \frac{\partial f}{\partial x}(t_k, \eta_{t_k}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} D^\phi_s F_{t_k} ds \\
&\quad - \frac{\partial f}{\partial x}(t_k, \eta_{t_k}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} D^\phi_s F_{t_k} ds \\
&\quad = [\frac{\partial f}{\partial x}(t_k, \eta_{t_k}) F_{t_k}] \diamond (B^H_{t_{k+1}} - B^H_{t_k}) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} F_{t_k} D^\phi_s \frac{\partial f}{\partial x}(t_k, \eta_{t_k}) ds.
\end{aligned}
$$

Si hacemos $|\pi| \to 0$, el primer término converge a $\int_0^t F_s \frac{\partial f}{\partial x}(s, \eta_{t_s}) dB^H_s$ en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y el segundo lo hace a $\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, \eta_s) D^\phi_s \eta_{t_s} F_s ds$.

Para llegar al resultado final basta entonces comprobar que si $|\pi| \to 0$ se cumple

$$
\sum_{k=0}^{n-1} E[|\frac{\partial f}{\partial x}(t_k, \eta_{t_k}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} (F_s - F_{t_k}) dB^H_s|] \to 0.
$$

De la acotación de las derivadas se tiene que $E[\frac{\partial f}{\partial x}(t_k, \eta_{t_k})]^2 \leq C$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} E[|\frac{\partial f}{\partial x}(t_k, \eta_{t_k}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} (F_s - F_{t_k}) dB^H_s|] \\
&\quad \leq C \sum_{k=0}^{n-1} \{E[\int_{t_k}^{t_{k+1}} (F_s - F_{t_k})]^2\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad = C \sum_{k=0}^{n-1} \{E[\int_{t_k}^{t_{k+1}} (D^\phi_s (F_s - F_{t_k}))]^2 \\
&\quad + E[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (F_u - F_{t_k})(F_v - F_{t_k}) \phi(u,v)\, dudv]\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leq C \sum_{k=0}^{n-1} \{(t_k - t_{k+1}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} E[D^\phi_s (F_s - F_{t_k})]^2 ds \\
&\quad + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \{E[F_u - F_{t_k}]^2\}^{\frac{1}{2}} \{E[F_v - F_{t_k}]^2\}^{\frac{1}{2}} \phi(u,v) dudv\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leq C \sum_{k=0}^{n-1} \{(t_{k+1} - t_k)^2 \sup_{t_k \leq s \leq t_{k+1}} E[D^\phi_s (F_s - F_{t_k})]^2 \\
&\quad + (t_{k+1} - t_k)^{2H} (\sup_{t_k \leq s \leq t_{k+1}} E[F_s - F_{t_k}]^2)\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leq C\{\sup_{t_k \leq s \leq t_{k+1}} E[D^\phi_s F_s - F_{t_k}]^2\}^{\frac{1}{2}} + C|\pi|^{H+\alpha-1} \to 0, \text{ si } |\pi| \to 0.
\end{aligned}
$$

□

3.6. Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas con movimiento Browniano fraccionario

Finalmente, y análogamente a como hicimos en la sección anterior, estudiamos un teorema de existencia y unicidad en ecuaciones diferenciales estocásticas en las que aparece el movimiento Browniano fraccionario. Este es un caso particular del que podemos encontrar en [1], en el que se trata con ecuaciones diferenciales con retardo y condiciones más generales.

Teorema 3.30. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad completo en el que consideramos la ecuación*

$$dU = A\,Udt + f(t,U)dt + g(t)dB_t^H, \text{ con } 0 \leq t \leq T, \tag{3.27}$$

con la condición inicial $U(0) = U_0$ *y además se cumple:*

- $U \in C(0,T; L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^N))$. *U pertenece al espacio de funciones continuas de* $(0,T)$ *al espacio de funciones de cuadrado integrable definidas en el espacio de probabilidad anterior con llegada a* $\mathbb{R}^N$.
- $U_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^N)$.
- $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N)$, *espacio de funciones lineales de* $\mathbb{R}^n$ *en sí mismo. Definimos* $S(t)$ *como la exponencial de esta matriz,* $S(t) = e^{At}$. *Supongamos que existe* $\rho \in \mathbb{R}$ *de manera que para cada* $t \in (0,T)$, $||e^{tA}||_{\mathbb{R}^N} \leq e^{\rho t}$.
- $g : [0,T] \to \mathbb{R}^N$, *con* $\int_0^T g^2(s)ds < \infty$.
- $f : [0,T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, *localmente lipschitziana respecto a la segunda variable.*

Decimos que $U(t)$ *es solución de este problema si verifica que*

$$U(t) = S(t)U(0) + \int_0^t S(t-s)f(s,U(t)) + \int_0^t S(t-s)g(s)dB_s^H. \tag{3.28}$$

Entonces, bajo las anteriores suposiciones existe una única solución a este problema.

Demostración. Vamos a ofrecer un esbozo de la demostración basándonos, de nuevo, en el artículo correspondiente a [1].

En primer lugar, se comprueba que si existe solución esta ha de ser única. Si tenemos dos soluciones, $X(t)$ e $Y(t)$, ambas han de cumplir (3.28). Usando la acotación sobre $S(t)$ así como la propiedad de f, si restamos ambas soluciones y calculamos su esperanza al cuadrado llegamos a que existe $M > 0$ tal que

$$E[|X(t) - Y(t)|^2] \leq tMe^{2\rho t} \int_0^t E[|X(s) - Y(s)|^2]ds.$$

Usando la desigualdad de Gronwall e igual que hicimos en el caso del Teorema 2.29 llegamos a que la solución ha de ser única.

Para demostrar que existe solución se comprueba en primer lugar que esta solución que ha de cumplir (3.28) posee la regularidad necesaria.

Tras esto, definimos $U^0 = 0$ y de forma recursiva

$$\begin{cases} U^n(t) = & S(t)U(0) + \int_0^t S(t-s)f(s,U^{n-1}(t)) + \int_0^t S(t-s)g(s)dB_s^H,\ t \in [0,T]. \\ U^n(t) = & U_0. \end{cases}$$

Cada elemento de la sucesión tiene la regularidad deseada y además esta es una sucesión de Cauchy en $C(0,T;L^2(\Omega,\mathcal{F},P;\mathbb{R}^N))$.

Tomando límite cuando $n \to \infty$ se comprueba que, en efecto, el límite ha de cumplir (3.28) y por tanto es la solución que buscábamos.

$\square$

4. Comentarios finales

Nuestro objetivo inicial era encontrar soluciones en cierto sentido a ecuaciones diferenciales estocásticas. Para ello, reducimos el problema de encontrar una solución a este problema a realizar una integral en la que el término con respecto al que se integra es estocástico, como vimos, por ejemplo, en (2.29).

Sin embargo, esto ha limitado bastante nuestras opciones, pues con esta integral estocástica sería imposible dar solución a ecuaciones diferenciales en las que la función que acompañaba al término estocástico dependiera de nuestra incógnita. Es decir, que en esta ecuación de la que hablamos, (2.29), σ dependiera de X.

Tampoco podríamos encontrar solución en el caso en el que esta función que integramos con respecto al movimiento Browniano o movimiento Browniano fraccionario no fuera determinista.

Para dar respuesta a estos problemas surge la *Rough Path Theory*, iniciada por Terry Lyons a finales del siglo pasado, siendo fundamental su artículo [9]. Esta teoría permite resolver las integrales de manera trayectorial, en contraste con el sentido probabilístico que aquí hemos trabajado.

Esta teoría ha ganado mucha importancia desde su creación por la perspectiva relativamente simple que proporciona para resolver las integrales y ecuaciones deseadas. Podemos encontrar más información acerca de la misma en [3] y [4].

Referencias

[1] T. Caraballo, M. J. Garrido-Atienza & T. Taniguchi, The existence and exponential behavior of solutions to stochastic delay evolution equations with a fractional Brownian motion, *Nonlinear Analysis.* **74** (2011), 3671-3684.

[2] T.E. Duncan, Y. Hu & B. Pasik-Duncan, Stochastic calculus for fractional Brownian motion, *SIAM J. Control Optim.* **38** (2000), 582-612.

[3] P. Friz & M. Hairer, *A course on Rough paths.* Springer, 2014.

[4] P. Friz & N. Victoir, *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths: Theory and Applications.* Cambridge University Press, 2010.

[5] H. Holden, B. Oksendal, J. Uboe & T. Zhang *Stochastic Partial Differential Equations.* Birkhauser, 1996.

[6] G. Kallianpur, *Stochastic Filtering Theory.* Springer, 1980.

[7] I. Karatzas & S.E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer, 1991.

[8] H. Kuo, *White Noise Distribution Theory.* CRC Press, 1996.

[9] T. J. Lyons, Differential equations driven by rough signals, *Revista Matemática Iberoamericana.* **14** (1998), 215-310.

[10] P. Meyer, *Quantum Probability for Probabilists.* Springer, 1995.

[11] B. Oksendal, *Stochastic Differential Equations.* Springer, 1995.

[12] B. Oksendal, F. Biagini, Y. Hu & T. Zhang, *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications.* Springer-Verlag, 2008.

[13] J. Real, Notas del curso de doctorado, 2000.

[14] T. Tao, *An Introduction to Measure Theory.* American Mathematical Society, 2011.