UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Facultad de Matemáticas
Departamento de Análisis Matemático

CAOS LINEAL

Trabajo Fin de Grado

presentado por

Mercedes Prado Rodríguez

Director: José Antonio Prado Bassas

Sevilla, Septiembre de 2013

Índice general

Abstract III

Resumen V

Introducción VII

1. Preliminares 1

1.1. Algunos espacios de Banach clásicos 1

1.2. Espacios de Baire 2

1.3. F-espacios 3

1.4. Espacios de Fréchet 4

1.5. Nociones básicas de topología: separación 5

2. Caos 7

2.1. Sistemas Dinámicos 7

2.2. Transitividad 9

2.3. Puntos Periódicos 10

2.4. Sensibilidad a las condiciones iniciales 12

2.5. Caos Lineal 13

3. Hiperciclicidad **17**

3.1. Hiperciclicidad de un operador 18

3.2. Hiperciclicidad de sucesiones de operadores 24

3.3. El Criterio de Hiperciclicidad 32

4. Ejemplos **37**

4.1. Operador Traslación 37

4.2. Operador Derivada 41

4.3. Operador Backward Shift 42

Bibliografía **46**

Abstract

Chaos is a concept that has always attracted the attention of mathematicians and physicists as well as the general public. This dissertation deals with the concept of Chaos in the framework of linear Dynamical Systems. It may be a paradox that Chaos not only exists in these systems, but it appears in a much more complicated and not yet known way than in the nonlinear case.

Although there is no unified definition, throughout this report we will use the definition of Chaos given in 1986 by Robert L. Devaney. Thus, a (discrete) Dynamical System will be chaotic if there is a dense orbit, a dense set of periodic orbits and if it has sensitive dependance on initial conditions. The property of existence of a dense orbit is also known as hypercyclicity and happens to be the central idea of Linear Chaos.

This dissertation is divided into four chapters. In the first one, with the clear objective of being self-contained, we will briefly recall the basic notions of Functional Analysis, Operator Theory and Topology that will be used later.

The second Chapter is devoted to the concept of Chaos. We give the rigorous definition of a Dynamical System and with the help of simple examples we will introduce the definition of Chaos. Finally, we will prove that the first two conditions of chaos it selves imply the third one, that is, sensitive dependence on initial conditions, also known as *Butterfly Effect*.

In the third Chapter we will focus on the study of hypercyclic operators and some of its fundamental properties. We will extend the concept of hypercyclicty to a sequence of operators and conclude by showing a sufficient condition, known in the literature as Hypercyclicity Criterion, for a sequence to be hypercyclic.

The present report finishes with several classical examples of chaotic operators. More specifically, we will prove that both the translational operator and the differentiation operator are chaotic on the space of entire functions, and that some multiples of the backward shift operator are also chaotic on ell_p and c_0.

Studying Linear Chaos has allowed us to introduce into a line of work that combines concepts from Functional Analysis, Operator Theory and Topology. This field has been developed in the last 25 years, although its origins date back to the first decades of the twentieth century.

We have divided the Bibliography section into two parts. In the first block we collected references that have been intensively handled to carry out this report. In the second one, we have included a collection of some of the most relevant papers in the literature, both classical and modern, that illustrate the importance that the study of Linear Chaos has acquired.

Resumen

El Caos es un concepto que siempre ha llamado la atención tanto de matemáticos y físicos como del público en general. El presente trabajo versa sobre el Caos en el ámbito de Sistemas Dinámicos lineales. Aunque pueda parecer paradójico, el Caos en este tipo de sistemas no sólo existe, sino que puede presentarse bajo apariencias mucho más complicadas y que aún no se conocen en el caso no lineal.

Aunque no hay una definición unificada, a lo largo de la presente memoria utilizaremos la definición de Caos dada en 1986 por Robert L. Devaney. Así, un Sistema Dinámico (discreto) será caótico si existe una órbita densa, un conjunto denso de órbitas periódicas y si es sensible de las condiciones iniciales. La propiedad de existencia de órbita densa se conoce también como hiperciclicidad y resulta ser el eje central del Caos Lineal.

Este trabajo se dividirá en cuatro capítulos. En el primero de ellos, con el claro objetivo de que la lectura sea autocontenida, haremos un breve recordatorio de las nociones básicas de Análisis Funcional, Teoría de Operadores y Topología que se usarán en los capítulos posteriores.

El segundo Capítulo se dedica al concepto de Caos. Partiremos de la definición rigurosa de Sistema Dinámico para, a través de ejemplos sencillos, avanzar en la definición de Caos. Para finalizar, probaremos que las dos primeras condiciones de caos implican la tercera de ellas, es decir, la dependencia sensible de las condiciones iniciales, más conocida como Efecto Mariposa.

En el Capítulo tercero nos centraremos en el estudio de la hiperciclicidad de un operador y algunas de sus propiedades fundamentales. Extenderemos el concepto de

hiperciclicidad a una sucesión de operadores y concluiremos ofreciendo una condición suficiente para la hiperciclicidad de una sucesión, conocido en la literatura como Criterio de Hiperciclicidad.

La memoria finaliza presentando varios ejemplos clásicos de operadores caóticos. Concretamente, veremos que tanto el operador de traslación como el operador derivación son caóticos sobre el espacio de las funciones enteras, y comprobaremos que ciertos múltiplos del operador backward shift también son caóticos sobre los espacios de sucesiones ℓ_p ó c_0.

La realización del presente trabajo nos ha permitido adentrarnos en una línea de investigación que conjuga conceptos propios del Análisis Funcional, la Teoría de Operadores y la Topología. Se trata de un campo que se ha desarrollado principalmente en los últimos 25 años, aunque sus orígenes se remonten a las primeras décadas del siglo XX.

La bibliografía la hemos dividido en dos partes. En primer lugar destacamos la *Bibliografía fundamental*, en la que hemos recogido las referencias que se han manejado con mayor intensidad para la realización del trabajo. Por otro lado, bajo el epígrafe de *Otras referencias* hemos incluido una colección de algunos de los artículos más importantes en la literatura, tanto clásicos como modernos, y que ilustran la importancia que el estudio del Caos Lineal ha adquirido.

Introducción

Cuando se oye hablar de Caos de Sistemas Dinámicos, a menudo se cree que éste únicamente puede ocurrir en el ámbito no lineal: puede resultar evidente que un sistema lineal se debe comportar de forma absolutamente predecible. Pero esto no es cierto.

Uno de los principales ingredientes del caos es la existencia de órbitas densas, es decir, que llenan todo el espacio. En el presente Trabajo, veremos que este hecho es imposible si nos ceñimos a dimensión finita, pero si permitimos dimensión infinita, es posible encontrar Sistemas Dinámicos lineales y caóticos.

A pesar de que se han utilizado varias definiciones de Caos, parece que una de las que más aceptación ha tenido es la dada por R. L. Devaney [2] en 1986. Esta definición, que será la que manejaremos a lo largo del trabajo, se concentra en tres aspectos concretos: la existencia de órbitas densas, la existencia de un conjunto denso de puntos de órbita periódica y la dependencia sensible de las condiciones iniciales.

Es esta última propiedad, conocida como *Efecto Mariposa*, la que se suele interpretar por el público lego como Caos propiamente dicho, y sin embargo veremos que es algo superfluo. Dado que el estudio de puntos periódicos suele resultar una mera tarea de cálculo, el estudio del Caos de Sistemas Dinámicos Lineales se reduce, pues, al estudio de existencia de órbitas densas.

En este sentido, en 1929, C. D. Birkhoff [10], probó que existe una función entera $f(z)$ tal que el conjunto de sus trasladadas $\{f(z+n) : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $H(\mathbb{C})$, o lo que es lo mismo, el operador de traslación $\tau(f(z)) = f(z+1)$ es hipercíclico en $H(\mathbb{C})$. Posteriormente, en 1952, G. R. MacLane [15] demuestra la existencia de una función entera tal que el conjunto formado por ella misma y sus derivadas es denso en $H(\mathbb{C})$, o dicho de otro modo, el operador derivada es hipercíclico.

Se puede decir que, fundamentalmente, a partir de estos dos teoremas clásicos se desarrolló el estudio del fenómeno de la hiperciclicidad de operadores que, gracias a técnicas propias del Análisis Funcional, adquirió gran importancia a partir de finales del siglo pasado.

Para concluir con la terna de los ejemplos considerados como clásicos, mencionamos que en 1969, S. Rolewicz [16], estudió la existencia de operadores hipercíclicos en los espacios de Banach de sucesiones ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ y c_0, probando que ciertos múltiplos del operador Backward Shift son hipercíclicos sobre estos espacios. Muchos autores han continuado estudiando la existencia de operadores hipercíclicos en espacios de Banach, así como la hiperciclicidad de los operadores tipo Shift en otros espacios.

Un año más tarde, R. M. Gethner y H. J. Shapiro [11] y por otro lado C. Kitai [14] desarrollan el Criterio de Hiperciclicidad, una útil herramienta que nos permite comprobar si un operador es hipercíclico. Dicho criterio ha sido mejorado y generalizado posteriormente por autores como K.-G. Grosse-Erdmann [13], G. Godefroy y J. H. Shapiro [12], S. I. Ansari [4], J. P. Bés y A. Peris [8] y Bernal-González (cf. [1]).

En este trabajo haremos una recopilación de algunos resultados acerca de lo mencionado anteriormente. Daremos la definición rigurosa de Caos, profundizaremos en la Hiperciclicidad y relacionaremos ambas nociones. Veremos también un Criterio de Hiperciclicidad (y algunas variantes) y gracias a éste, probaremos la caoticidad de algunos operadores clásicos. Pero no sólo se trata de recopilar resultados, sino que modificaremos alguna demostración original y completaremos o mejoraremos otras tantas, para así, obtener una única notación entre todas las utilizadas a lo largo del estudio de estos temas.

Para comenzar, recordaremos en el Capítulo 1 algunas definiciones básicas y resultados necesarios relacionados con el Análisis Funcional, la Topología o la Teoría de Operadores para facilitar la comprensión de los posteriores capítulos. Hablaremos de espacios de Banach, de Baire, de Fréchet, así como de los F-espacios y los axiomas de separación T_1 y T_2.

En el Capítulo 2, empezaremos hablando de Sistemas Dinámicos, es decir, estudiaremos el comportamiento de las iteradas de un operador según los diferentes valores del punto inicial, viendo diversos ejemplos y sus distintos comportamientos. En las siguientes secciones veremos las tres características para que un operador sea caótico: la transitividad topológica, los puntos periódicos y la sensibilidad a las condiciones iniciales; con esto podremos introducir, en la última sección, la definición de Caos dada por Devaney [2] y comprobar además que la dependencia sensible de las condiciones iniciales, conocida como Efecto Mariposa, es una condición superflua del Caos.

Continuaremos estudiando la Hiperciclicidad en el Capítulo 3. En la primera sección, daremos la definición de hiperciclicidad de un operador y los resultados más interesantes relacionados con dicha definición. Probaremos, entre otros, el Teorema de Transitividad de Birkhoff [9] (el cual relaciona el concepto de transitividad e hiperciclicidad de un operador) y que no existen operadores hipercíclicos en espacios de dimensión finita. En la siguiente sección, veremos la hiperciclicidad de sucesiones de operadores y extenderemos a sucesiones los resultados vistos para un solo operador. Para finalizar con el capítulo, daremos varias versiones del Criterio de Hiperciclicidad y además, propondremos algún ejemplo de sucesiones hipercíclicas de operadores que no verifican dicho criterio.

Por último, en el Capítulo 4, estudiaremos los tres ejemplos clásicos de operadores caóticos, aquéllos que han servido para desarrollar la Teoría del Caos y de la Hiperciclicidad y, entre otros, los teoremas que prueban que el conjunto de iteradas de dichos operadores sobre funciones enteras es denso en el espacio $H(\mathbb{C})$. Estos operadores son el operador traslación (Teorema de Birkhoff [10]), el operador derivada (Teorema de MacLane [15]) y el operador Backward Shift (Teorema de Rolewicz [16]).

Capítulo 1

Preliminares

En este primer Capítulo y con el objetivo de que el trabajo sea autocontenido, trataremos de recordar los conceptos necesarios para la comprensión de los siguientes capítulos. Hablaremos de los tipos de espacios más utilizados, así como de algunos conceptos de Topología, Análisis Funcional o Teoría de Operadores.

1.1. Algunos espacios de Banach clásicos

En esta sección, recordaremos algunos espacios clásicos de Banach que aparecerán en posteriores resultados, así como alguna de las propiedades que verifican. Denotaremos por $\mathbb{K}$ el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$.

Se define el espacio c_0 como el espacio de las *sucesiones de escalares convergentes a cero*, es decir,

$$c_0 \;=\; \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,:\, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\}.$$

Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ se define la *norma infinito* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como:

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| \,:\, n \in \mathbb{N}\}.$$

La aplicación $\|\cdot\|_\infty$ es una verdadera norma en c_0 y el par $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach separable.

Para cada $p \in [1, +\infty)$, denotamos por ℓ_p el *conjunto de sucesiones p-sumables*, es decir,

$$\ell_p \;=\; \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,:\, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}.$$

Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$, definimos la *norma-$p$* de x como

$$\|x\|_p \;=\; \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

La aplicación $\|\cdot\|_p : \ell_p \longrightarrow [0, +\infty)$ define una norma en ℓ_p y el par $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach separable.

1.2. Espacios de Baire

Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subconjunto de X. Se dice que A es de *primera categoría* si es unión numerable de subconjuntos cuyo cierre tiene interior vacío. Por otra parte, A será de *segunda categoría* si no es de primera categoría. Un espacio topológico X se dice que es *de Baire* si todo subconjunto de X, abierto y no vacío, es de segunda categoría.

Si X es de Baire, se dice que A es *residual* si su complementario es de primera categoría. Se puede decir que un conjunto residual es "topológicamente grande". Asimismo, un subconjunto A de X será residual si y sólo si, contiene alguna intersección numerable de abiertos que sea densa, es decir, si contiene algún G_δ denso.

Además, contamos con el conocido *Teorema de Baire* que nos garantiza que todos los espacios con los que vamos a trabajar son de Baire.

Teorema 1.1 (**Teorema de Baire**). *Sea X un espacio topológico. Si X es un espacio métrico completo, entonces es un espacio de Baire.*

En este contexto, sabemos que X es un espacio de Baire si y sólo si, dada cualquier sucesión $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de abiertos densos su intersección, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, es también densa.

1.3. F-espacios

Un *espacio vectorial topológico* es un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$, en el que hay definida una topología tal que:

1. La aplicación suma, definida por
$$\begin{array}{ccc} X \times X & \to & X \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$
es continua.

2. La aplicación producto por escalares, definida por
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times X & \to & X \\ (\lambda, y) & \mapsto & \lambda \cdot y \end{array}$$
es continua.

Sea X un espacio vectorial y d una distancia sobre X. Se dice que dicha distancia d es *invariante por traslaciones*, si para cualesquiera vectores $x, y, a \in X$ se verifica que $d(x, y) = d(x + a, y + a)$.

Así, un espacio vectorial topológico X es un *F-espacio*, si existe una distancia d invariante por traslaciones cuya topología asociada es la topología de X y para la que X es completo.

Si X es un F-espacio y d la distancia que define la topología, denotaremos por
$$\|x\| = d(x, 0),$$
de modo que
$$\|x - y\| = d(x, y), \ \forall x, y \in X.$$
La aplicación $\| \cdot \|$ se llamará *F-norma* sobre X y cumple las siguientes propiedades:

- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- $\|\lambda x\| = \|x\|$ si $|\lambda| \leq 1$
- $\lim\limits_{\lambda \to 0} \|\lambda x\| = 0$
- $\|x\| = 0 \iff x = 0.$

Para ser una verdadera norma, faltaría que

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$$

sin embargo se puede demostrar que se cumple que

$$\|\lambda x\| \leq (1 + |\lambda|)\|x\|$$

con lo que es posible trabajar con ella, en la práctica, como si de una verdadera norma se tratase.

1.4. Espacios de Fréchet

Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se define una *seminorma* en X como una aplicación $p : X \to [0, +\infty)$ de forma que, para todo $x, y \in X$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene

(a) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

(b) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

es decir, una "norma" para la que hay vectores $x \neq 0$ con con $p(x) = 0$.

Un *espacio localmente convexo* es un espacio vectorial topológico que es Hausdorff y tal que el 0 posee una base de entornos formada por conjuntos convexos.

Un *espacio de Fréchet* es un F-espacio que es localmente convexo; es decir, un espacio localmente convexo cuya distancia invariante por traslaciones genera una topología para la que X es completo.

El espacio de funciones enteras $H(\mathbb{C})$ es uno de los ejemplos clásicos de espacios de Fréchet. Consideremos la familia de seminormas $(p_n)_n$ donde

$$p_n(f) = \max_{|z| \leq n} |f(z)|.$$

La topología definida por esta familia de seminormas es la topología de la convergencia uniforme en compactos de $\mathbb{C}$ y hace que $H(\mathbb{C})$ sea, en particular, metrizable.

1.5. Nociones básicas de topología: separación

Un espacio topológico X se dice que es T_1 si cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ se pueden separar por un abierto, es decir, si existe $U \subseteq X$ abierto tal que $x_1 \in U$ y $x_2 \notin U$.

Análogamente, un espacio topológico X se dice que es T_2 o de Hausdorff, si para cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$, existen abiertos $U, V \subseteq X$ tales que $U \cap V = \emptyset$, $x_1 \in U$ y $x_2 \in V$.

Obviamente, todo espacio T_2 es automáticamente T_1. Además, se cumple que un espacio topológico es T_1 si y sólo si cada conjunto unitario es cerrado.

En efecto, si cada conjunto unitario es cerrado, entonces dados $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$, se tiene que $U = X \setminus \{x_1\}$ es un abierto tal que $x_2 \in U$ y $x_1 \notin U$ y por tanto X es T_1. Recíprocamente, consideramos $x \in X$ y veamos que $\overline{\{x\}} = \{x\}$. Sea $y \in X$ con $y \neq x$; por ser X un espacio T_1, existe $U \subseteq X$ abierto tal que $y \in U$ y $x \notin U$, luego $U \cap \{x\} = \emptyset$ y se tiene que $y \notin \overline{\{x\}}$ por cada $y \neq x$, de donde $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

Para finalizar, veremos un lema que nos será de utilidad con posterioridad.

Lema 1.2. *Sea X un espacio topológico T_1 sin puntos aislados. Entonces, cada subconjunto finito de X tiene interior vacío y es cerrado.*

Demostración. Sea $F \subseteq X$ finito. Como X es T_1, cada subconjunto unitario $\{x\}$ es cerrado. Con lo cual, al ser F unión finita de conjuntos cerrados ($\{x_i\}$, $i = 1, \ldots, n$), $F = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$, es cerrado.

Ahora, por reducción al absurdo, probaremos que F tiene interior vacío. Llamemos $A = int(F)$, que es un conjunto abierto, finito (por ser F finito), luego cerrado. Suponemos que $A \neq \emptyset$; veamos entonces que A posee al menos dos puntos. En efecto, si A fuese unitario, $A = \{x\}$ sería un abierto que sólo contiene a x y a ningún otro punto, por tanto, x sería un punto aislado, lo que contradice las hipótesis del lema.

Escogemos ahora un subconjunto $B \subseteq A$ no vacío, abierto y minimal. Entonces, igual que ocurría con A, B tiene al menos dos puntos. Sean a y b dichos puntos; al ser X un espacio T_1, existe un subconjunto abierto $U \subseteq X$ tal que $a \in U$ y $b \notin U$. Sea $C = B \cap U$; entonces C es un abierto no vacío contenido en A y además $C \subsetneq B$, lo que es una contradicción puesto que B es minimal. $\square$

Capítulo 2

Caos

Los Sistemas Caóticos han sido muy investigados en los últimos años. En este trabajo nos restringiremos al estudio del Caos en Sistemas Dinámicos. Dichos sistemas serán el objetivo de estudio de la primera sección del capítulo. A pesar de no haber una definición matemática universalmente aceptada del Caos, trabajaremos con la que dio Devaney en 1986 [2]. Debemos mencionar el hecho de que hasta hace pocos años, el hablar de Caos implicaba hablar de sistemas no lineales, pero recientemente se ha descubierto que existen procesos físicos lineales caóticos, como por ejemplo el oscilador armónico cuántico.

La definición de Caos dada por Devaney posee tres componentes características de la idea de Caos. En primer lugar veremos la transitividad topológica de un operador (indescomponibilidad del sistema en otros más simples), seguidamente estudiaremos los puntos periódicos y varios ejemplos de los mismos y por último, antes de profundizar en el Caos Lineal, mostraremos la sensibilidad de algunos operadores respecto de las condiciones iniciales.

2.1. Sistemas Dinámicos

Un *Sistema Dinámico* (discreto) viene dado por una aplicación continua T de un espacio métrico X en sí mismo, $T : X \to X$. En la teoría de Sistemas Dinámicos se estudia el comportamiento de las iteradas de T según los diferentes valores del punto inicial. En otras palabras, si tomamos una calculadora científica, escribimos un número cualquiera y tras esto pulsamos reiteradamente la misma tecla correspondiente a una cierta función, generaremos un Sistema Dinámico discreto. Por ejemplo, si pulsamos la tecla "exp" en la calculadora sobre un cierto valor inicial x, obtendremos la secuencia

$$x,\, e^x,\, e^{e^x},\, e^{e^{e^x}},\, \ldots$$

Estamos iterando la función exponencial y podemos observar que dicha sucesión de iteradas tiende a ∞. Esto nos plantea la siguiente pregunta:

Dada una aplicación T y un valor inicial x_0, ¿Que ocurre con la sucesión de iteradas x_0, $T(x_0)$, $T(T(x_0))$, $T(T(T(x_0)))$, ...?

Otro ejemplo de sistema dinámico sería considerar la función seno. Es fácil comprobar que si pulsamos la tecla "sin" reiteradamente, la sucesión de iteradas que genera dicho operador tiende a cero. Algo parecido ocurre con el coseno, que tendería a $0{,}73908\ldots$ (en radianes, ó a $0{,}99984\ldots$ en grados). Sospechamos entonces que iterando repetidas veces una misma aplicación sobre un valor inicial dado, convergerá a un límite fijo (ya sea ∞, 0 ó un único valor).

Pero si tomamos algunas aplicaciones cuadráticas simples, obtendremos extraños resultados. Por ejemplo, si aplicamos reiteradamente la aplicación

$$T(x) = 4x(1-x),$$

y le damos como valor inicial un número al azar entre el 0 y el 1, observamos diferentes comportamientos dependiendo de dicho valor. Algunas veces este número se repite, otras no y más a menudo aparecen aleatoriamente valores del intervalo unidad sin un patrón claro. Modifiquemos un poco dicha aplicación, sea ahora

$$T(x) = 3{,}839x(1-x).$$

Reproducimos el proceso anterior y obtenemos que, al iterarla, llegamos a un ciclo en el que se repite la misma sucesión de tres números: $0{,}149888\ldots$, $0{,}489172\ldots$ y $0{,}959299\ldots$. Haremos dos comentarios al respecto. El primer ejemplo nos proporciona el fenómeno del Caos, que es el tema que trataremos en este trabajo. En el segundo ejemplo, solo algunos valores iniciales se comportan de forma tan impredecible como en el primero. Pero debido al redondeo o a errores de cálculo no se aprecia esta aleatoriedad a simple vista.

También cabe mencionar que existen aplicaciones de los Sistemas Dinámicos en muchos ámbitos de la ciencia, desde Ecuaciones Diferenciales de la Mecánica Clásica, en Física, hasta ecuaciones diferenciales de Matemáticas aplicadas a Economía o Biología.

Debemos introducir en esta sección la definición de órbita, ya que de aquí en adelante será un concepto que usaremos con bastante frecuencia. Sea T una aplicación continua de un espacio métrico X en sí mismo, $T : X \to X$, se define la *órbita* de un elemento $x \in X$ respecto de T como

$$\mathcal{O}(T, x) = \{x, Tx, T^2x, \dots\} = \{T^n x : n \geq 0\},$$

donde entendemos que $T^0 = Id$ y $T^n = T \circ \overset{(n)}{\dots} \circ T$ si $n \in \mathbb{N}$. En general nos interesará saber si la órbita de un punto converge a un cierto valor, si converge a un ciclo periódico o si se comporta de forma aparentemente aleatoria, por ejemplo, llenando todo el espacio.

2.2. Transitividad

Una aplicación $T : X \to X$ se dice que es *topológicamente transitiva* si dados cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

A la vista de esta definición, podemos observar que un espacio topológico X no puede descomponerse en dos conjuntos abiertos disjuntos invariantes bajo una aplicación transitiva, puesto que dicha aplicación tiene puntos que se mueven aleatoriamente de un entorno a cualquier otro. En otras palabras, un Sistema Dinámico definido por una aplicación topológicamente transitiva no puede descomponerse en sistemas más simples.

También debemos observar que si un elemento tiene una órbita densa respecto de una aplicación T, entonces dicha aplicación claramente es topológicamente transitiva. El recíproco también es cierto, bajo ciertas condiciones mínimas, pero lo probaremos un poco más adelante.

2.3. Puntos Periódicos

Se dice que $x \in X$ es un punto *periódico* de una aplicación $T : X \to X$ si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n x = x$; en otras palabras, x es periódico si tiene órbita finita. En ese caso, se dice que $n := \min\{k \in \mathbb{N} : T^k x = x\}$ es el *periodo* de x. Denotamos por $Per(T)$ al conjunto de puntos periódicos. El conjunto de todas las iteraciones de un punto periódico forma una órbita periódica.

Para el caso en el que $n = 1$, es decir, en el caso en que $Tx = x$, se dice que x es un *punto fijo*, por lo que podemos decir que el concepto de punto periódico es una generalización del de punto fijo.

Hay muchas aplicaciones con puntos periódicos, como por ejemplo aplicaciones definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ como las siguientes: la aplicación identidad, $Id(x) = x$, para la que todos sus puntos son fijos; la aplicación $T(x) = -x$, que tiene un único punto fijo, 0, y el resto de puntos son periódicos con periodo 2; $T(x) = x^3$, cuyos puntos fijos son 1, -1 y 0 y no tiene más puntos periódicos; o la aplicación $T(x) = x^2 - 1$, cuyos puntos fijos son $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ mientras que 0 y -1 son periódicos con periodo 2.

Denotamos ahora por $\mathbb{S}^1$ la circunferencia unidad en el plano real. Denotamos un punto en $\mathbb{S}^1$ por su ángulo θ medido en radianes. Por lo tanto, un punto estará determinado por un ángulo de la forma $\theta + 2k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$. Veamos algún ejemplo en este espacio.

Sea la aplicación $T : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $T(\theta) = 2\theta$ (está bien definido en la circunferencia unidad pues $T(\theta + 2k\pi) = T(\theta)$). Si tomamos las iteradas, $T^n(\theta) = 2^n\theta$, se tiene que θ es un punto periódico de periodo n si y sólo si $2^n\theta = \theta + 2k\pi$ para algún entero k, es decir, $\theta = \frac{2k\pi}{2^n-1}$ para algún entero $0 \leq k < 2^n$. Nótese que el único punto fijo es el cero. Además, es fácil comprobar que el conjunto de puntos periódicos respecto de T es denso en $\mathbb{S}^1$.

Otro ejemplo de este tipo es la traslación en $\mathbb{S}^1$. Sea $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Definimos

$$T_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda.$$

La aplicación T_λ presenta diferencias de comportamiento dependiendo de si λ es racional o irracional.

Si $\lambda \in \mathbb{Q}$, lo podemos escribir la forma p/q con $p, q \in \mathbb{Z}$ y primos entre sí. Entonces

$$T_\lambda^q(\theta) = \theta + 2q\pi\frac{p}{q} = \theta + 2p\pi = \theta,$$

por lo que podemos afirmar que todos los puntos son periódicos para T_λ de periodo q.

Por otro lado, el conocido como *Teorema de Jacobi* contempla el caso irracional.

Teorema 2.1. *Si λ es irracional, entonces $\mathcal{O}(T_\lambda, \theta)$ es densa en $\mathbb{S}^1$ para todo $\theta \in \mathbb{S}^1$.*

Demostración. Fijamos $\theta \in \mathbb{S}^1$. Veamos en primer lugar que todos los puntos de $\mathcal{O}(T_\lambda, \theta)$ son diferentes. En efecto, supongamos que $T_\lambda^n(\theta) = T_\lambda^m(\theta)$ para $n, m \in \mathbb{Z}$ con $n \neq m$. Por la definición del operador, esto equivale a que $\theta + 2n\pi\lambda = \theta + 2m\pi\lambda + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, o lo que es lo mismo, $(n-m)\lambda = k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Pero en tal caso, esto equivaldría a que $\lambda = \frac{k}{n-m}$, lo que es una contradicción puesto que $n - m \in \mathbb{Z}$ y entonces $\lambda \in \mathbb{Q}$, lo que contradice la hipótesis de que es irracional. Con lo cual, $m = n$.

Veamos ahora la densidad de $\{T_\lambda^n(\theta)\}_n$. Esta sucesión es acotada en $\mathbb{R}^2$, luego existe una subsucesión convergente y, por tanto, de Cauchy. De este modo, dado $\varepsilon > 0$, existen $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$ tal que $|T_\lambda^n(\theta) - T_\lambda^m(\theta)| < \varepsilon$, lo que implica que, llamando $l = n - m$,

$$|T_\lambda^l(\theta) - \theta| < \varepsilon,$$

puesto que $\varepsilon > |T_\lambda^n(\theta) - T_\lambda^m(\theta)| = |\theta + 2n\pi\lambda - (\theta + 2m\pi\lambda)| = |2(n-m)\pi\lambda| = |(\theta + 2(n-m)\pi\lambda) - \theta| = |T_\lambda^l(\theta) - \theta|$.

Ahora, como T_λ preserva las longitudes en el círculo unidad, resulta que el operador T_λ^l hace que los puntos θ y $T_\lambda^l(\theta)$ disten lo mismo, al igual que $T_\lambda^l(\theta)$ y $T_\lambda^{2l}(\theta)$, que $T_\lambda^{2l}(\theta)$ y $T_\lambda^{3l}(\theta)$, etc. Además, esta longitud es menor que ε. Por lo que obtenemos una partición de $\mathbb{S}^1$ en arcos de longitudes menores que ε:

$$\mathbb{S}^1 = \bigcup_{p=0}^{\infty} [T_\lambda^{lp}(\theta), T_\lambda^{l(p+1)}(\theta)]$$

donde ε es arbitrario. Esto prueba que la órbita de θ respecto de T_λ es densa en la circunferencia unidad. $\square$

2.4. Sensibilidad a las condiciones iniciales

Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que una aplicación $T : X \to X$ tiene *dependencia sensible de las condiciones iniciales* si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in X$ y cada $\delta > 0$ existen un punto $y = y(x, \delta) \in X$ y un número $n = n(x, \delta) \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, y) < \delta$ y $d(T^n x, T^n y) > \varepsilon$.

Intuitivamente, una aplicación tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales, cuando podemos encontrar puntos tan cercanos como queramos pero que al aplicarles reiteradamente T, sus imágenes distan entre sí más que un cierto valor prefijado. Debemos recalcar el hecho de que dado un punto $x \in X$, no todos los puntos próximos a él cumplen lo anterior, pero debe haber al menos uno en un entorno de x que sí lo cumpla.

Si una aplicación posee dependencia sensible de las condiciones iniciales, entonces, a efectos prácticos, la dinámica de la aplicación desafía cualquier cálculo numérico. Pequeños errores de cálculo, como los redondeos, pueden magnificarse al iterar la aplicación; es decir, los resultados del cálculo numérico de una órbita pueden no parecerse en absoluto a la órbita real.

Podemos observar que la condición de depencia sensiblemente de las condiciones iniciales se refiere al conocido *Efecto Mariposa*, es decir, pequeñas alteraciones de las condiciones iniciales, pueden provocar, a la larga, efectos a gran escala. O como dice el aforismo:

"El simple aleteo de las alas de una mariposa en Brasil puede provocar un tornado en Texas."

Un ejemplo muy visual de efecto mariposa sería el colocar una pelota exactamente en el pico de una montaña, en la que dicha pelota permanecería en equilibrio inestable. Pero la más mínima perturbación de esas condiciones de equilibrio, ocasionaría la caída de la pelota. Además, la pelota caerá arbitrariamente por cualquier ladera de la montaña, dependiendo del tipo de perturbación inicial.

2.5. Caos Lineal

Con las nociones vistas en las secciones anteriores, tenemos todas las herramientas para poder dar la definición de caos dada por Devaney [2].

Definición 2.2. *Sea $T : X \to X$ una aplicación continua sobre un espacio métrico (X, d) con infinitos puntos. Se dice que T es* caótica *si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:*

1. *T es transitiva.*

2. *El conjunto de puntos periódicos de T es denso en X.*

3. *T tiene sensibilidad respecto de las condiciones iniciales.*

Esta definición de Caos es aplicable a sistemas no lineales, pero también se puede aplicar al Caos Lineal.

Continuamos con el sencillo ejemplo que vimos en la Sección 2.3. La aplicación $T : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $T(\theta) = 2\theta$ es caótica. En efecto, T depende sensiblemente de las condiciones iniciales puesto que la distancia angular entre dos puntos se duplica en cada iteración y $2^n x \to \infty \, (n \to \infty)$ si $x \neq 0$. Por otro lado, T es transitiva, ya que un pequeño arco de la circunferencia unidad puede ser expandido por T^k a toda $\mathbb{S}^1$ y en particular, a cualquier otro arco de circunferencia. Y por último, el conjunto de puntos periódicos de T es denso en X como vimos en este mismo ejemplo en la Sección 2.3.

Como demostraremos a continuación, la dependencia sensible de las condiciones iniciales (es decir, el efecto mariposa) es una condición redundante en la definición de caos, a pesar de ser, a priori, una de las características más significativas de la misma. Este resultado fue probado en 1992 por los matemáticos J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis y P. Stacey y se puede encontrar en [5].

Teorema 2.3. *Sea X un espacio topológico metrizable y con infinitos puntos, sea $T : X \to X$ una aplicación continua sobre X. Si T es transitiva y tiene un conjunto denso de puntos periódicos, entonces T tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales (independientemente de la métrica d elegida compatible la topología de X).*

Demostración. Como X tiene infinitos puntos, podemos escoger dos puntos p_1 y p_2 periódicos tales que sus órbitas $\mathcal{O}(T, p_1)$ y $\mathcal{O}(T, p_2)$ son disjuntas y finitas (pues las órbitas periódicas o son coincidentes o son disjuntas). Sea $d = d(\mathcal{O}(T, p_1), \mathcal{O}(T, p_2))$; entonces cada $x \in X$ dista de alguna de las dos órbitas al menos $d/2$, es decir, $d(x, \mathcal{O}(T, p_1)) < d/2$, o bien $d(x, \mathcal{O}(T, p_2)) < d/2$. En efecto, gracias a la desigualdad triangular

$$d = d(\mathcal{O}(T, p_1), \mathcal{O}(T, p_2)) \leq d(x, \mathcal{O}(T, p_1)) + d(x, \mathcal{O}(T, p_2)) \leq 2d(x, \mathcal{O}(T, p_i))$$

donde p_i (con $i \in \{1, 2\}$) es la órbita que está a mayor distancia del punto x.

Vamos a probar entonces que T tiene sensibilidad a las condiciones iniciales con constante de sensibilidad $\varepsilon = d/8$, es decir, para cada punto $x \in X$ y cada $\delta > 0$, existe un punto $z \in X$ y un natural $N \in \mathbb{N}$ de manera que $d(x, z) < \delta$ y $d(T^m x, T^m z) > \varepsilon$.

Así pues, fijamos $x \in X$ y $\delta > 0$ (sin pérdida de generalidad, podemos imponer que $\delta \leq \varepsilon$). Sea $W = B(x, \delta)$. Como el conjunto de puntos periódicos $Per(T)$ es denso en X, existe un punto $p \in X$ periódico tal que $p \in B(x, \delta) = W$, es decir, $d(p, x) < \delta \leq \varepsilon$. Además, como vimos antes, existe un punto periódico $q \in X$ tal que $d(x, \mathcal{O}(T, q)) \geq d/2 = 4\varepsilon$.

Llamamos n al período de p, de modo que $T^n x = x$. Definimos ahora el conjunto

$$V := \bigcap_{i=0}^{n} (T^{-1})^i (B(T^i q, \varepsilon)).$$

Como $B(T^i q, \varepsilon)$ es abierto, y T es continua, entonces V es un abierto por ser intersección finita de abiertos y además es no vacío puesto que $q \in V$ (ya que para cada $i = 0, \dots, n$ obviamente $T^i q \in B(T^i q, \varepsilon)$. Por tanto existe un $\varepsilon_q > 0$ tal que $B(q, \varepsilon_q) \subset V)$.

Entonces, ya que T es transitiva, existe $k > 0$ tal que $T^k(W) \cap V \neq \emptyset$, es decir, existe un elemento $y \in W$ tal que $T^k y \in V$.

Llamando j a la parte entera de $\frac{k}{n} + 1$, se tienen las desigualdades $1 \leq nj - k \leq n$, y llamando $m = nj$, se tiene

$$T^m y = T^{m-k}(T^k y) \in T^{m-k}(V)$$

y, como $V := \bigcap_{i=0}^{n} (T^{-1})^i (B(T^i q, \varepsilon))$, resulta $V \subseteq (T^{-1})^i (B(T^i q, \varepsilon))$, $\forall i = 1, \dots, n$; en particular $V \subseteq (T^{-1})^{m-k}(B(T^{m-k} q, \varepsilon))$. Por la continuidad de T, se tiene que $T^{m-k}(V) \subseteq B(T^{m-k} q, \varepsilon)$, es decir, $T^m y \in B(T^{m-k} q, \varepsilon)$, o lo que es lo mismo, en términos de distancia, tenemos que $d(T^m y, T^{m-k} q) < \varepsilon$.

Recordemos que p era un punto periódico de periodo n; entonces como $m = nj$, se cumple que $T^m p = p$, luego

$$d(T^m p, T^m y) = d(p, T^m y).$$

Por otra parte, de la desigualdad triangular obtenemos

$$\begin{aligned} d(x, T^{m-k} q) &\leq d(x, T^m y) + d(T^m y, T^{m-k} q) \leq \\ &\leq d(x, p) + d(p, T^m y) + d(T^m y, T^{m-k} q) = \\ &= d(x, p) + d(T^m p, T^m y) + d(T^m y, T^{m-k} q). \end{aligned}$$

Entonces

$$d(T^m p, T^m y) \geq d(x, T^{m-k} q) - d(x, p) - d(T^m y, T^{m-k} q).$$

Hemos probado anteriormente que $d(p, x) < \delta < \varepsilon$; además, sabemos también que $d(x, \mathcal{O}(T, q)) > 4\varepsilon$, luego tenemos que $d(x, T^{m-k} q) > 4\varepsilon$; y por último, hemos visto que $d(T^m y, T^{m-k} q) < \varepsilon$. Entonces se tiene la siguiente desigualdad

$$d(T^m p, T^m y) \geq 4\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Finalmente, usando de nuevo la desigualdad triangular

$$d(T^m p, T^m x) + d(T^m x, T^m y) \geq d(T^m p, T^m y) \geq 2\varepsilon,$$

llegamos a que o bien $d(T^m p, T^m x) > \varepsilon$ o bien $d(T^m y, T^m x) > \varepsilon$. En cualquier caso, con $d(x,p) < \delta$ y $d(x,y) < \delta$ (pues $p, y \in W = B(x,\delta)$) hemos probado que existe un punto $z \in X$ y un $m \in \mathbb{N}$ tales que $d(x,z) < \delta$ y $d(T^m x, T^m z) > \varepsilon$. □

Tras este resultado, podemos dar una nueva pero equivalente definición de caos. Así pues, sea X un espacio topológico, metrizable y con infinitos puntos. Una aplicación T en X se dirá caótica si es transitiva y tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

Para concluir la sección veremos un resultado de Godefroy y Shapiro [12] en el que demuestran que, en el caso lineal, simplemente la transitividad, basta para obtener la dependencia sensible de las condiciones iniciales.

Proposición 2.4. *Sea T una aplicación lineal, continua y topológicamente transitiva sobre un F-espacio X. Entonces T tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales (para cualquier distancia invariante por traslaciones que defina la topología de X).*

Demostración. Sea d una distancia invariante por traslaciones que genera la topología de X y fijemos $\varepsilon, \delta > 0$ y $x \in X$. Consideremos $U = \{z \in X : d(0,z) < \delta\}$ y $V = \{z \in X : d(0,z) > \varepsilon\}$. Es claro que ambos conjuntos son abiertos y no vacíos; luego la transitividad de T nos garantiza que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap T^n(V) \neq \emptyset$ y podremos encontrar un punto $z \in U$ tal que $T^n z \in V$.

Sea $y := x + z$. Como d es invariante por traslaciones se cumple que $d(x,y) = d(x, x+z) = d(0,z) < \delta$, pues $z \in U$. Por otro lado, como T es lineal y de nuevo por la invarianza de d, se tiene que $d(T^n x, T^n y) = d(T^n x, T^n x + T^n z) = d(0, T^n z) > \varepsilon$, pues $T^n z \in V$. □

Capítulo 3

Hiperciclicidad

Vimos en el Capítulo anterior que una aplicación con una órbita densa es automáticamente transitiva. Las aplicaciones con órbita densa son las que llamaremos hipercíclicas.

En 1929, G. D. Birkhoff [10] fue el primer matemático que probó un resultado relacionado con la hiperciclicidad de un operador. Se trata del operador traslación $\tau : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$, $\tau f(z) = f(z+1)$, y Birkhoff probó la existencia de una función entera tal que el conjunto de sus trasladadas, es decir, $\{f(z+n) : n \geq 0\}$ es denso en $H(\mathbb{C})$.

En este capítulo profundizaremos en el estudio de la hiperciclicidad tanto de un solo operador, como de una sucesión de operadores, además de dedicar la sección final al Criterio de Hiperciclicidad, una condición suficiente de hiperciclicidad que ha resultado ser muy útil.

Como hemos visto, que una aplicación sea caótica se reduce a que sea transitiva y contenga un conjunto denso de puntos periódicos. Como el estudio de los puntos periódicos no suele ser una tarea complicada, en este capítulo nos centraremos en la hiperciclicidad y a lo largo del mismo comprobaremos que la hiperciclicidad equivale a la transitividad bajo ciertas condiciones.

3.1. Hiperciclicidad de un operador

Los resultados de esta sección los veremos en su forma más general posible, indicando en cada caso si se trata de espacios vectoriales topológicos, o más particularmente, de espacios de Fréchet, espacios métricos, localmente convexos, normados, de Banach.

Definición 3.1. *Una aplicación continua T sobre un espacio topológico X, se dice que es* hipercíclica *si existe $x \in X$, que se llamará* elemento o vector hipercíclico *respecto de T, tal que la órbita $\mathcal{O}(T, x)$ es densa en X. Denotaremos por $HC(T)$ el conjunto de elementos hipercíclicos respecto de T.*

Es obvio que para que la aplicación T sea hipercíclica, el espacio X debe contener un subconjunto denso y numerable, es decir, X ha de ser *separable.* Con lo cual, a partir de ahora solo nos interesarán espacios separables.

A continuación, y gracias fundamentalmente al Lema 1.2 visto en la Sección 1, vamos a demostrar el primer resultado importante de hiperciclicidad que nos dará información acerca de la cantidad de elementos hipercíclicos de una aplicación.

Teorema 3.2. *Sea X un espacio topológico T_1 sin puntos aislados. Si $x \in HC(T)$, entonces $T^m x \in HC(T)$ para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Por hipótesis, sabemos que $x \in HC(T)$, luego la órbita $\mathcal{O}(T, x)$ es densa en X. Pero, para cada natural $m \geq 0$, se tiene que $\mathcal{O}(T, T^m x) = \mathcal{O}(T, x) \setminus F$ donde $F = \{x, Tx, \ldots, T^{m-1}x\}$, pues

$$\mathcal{O}(T, T^m x) = \{T^n T^m x : n \geq 0\} = \{T^{n+m} x : n \geq 0\} = \{T^n x : n \geq m\},$$

$$\mathcal{O}(T, x) \setminus F = \{T^n x : n \geq 0\} \setminus \{x, Tx, \ldots, T^{m-1}x\} = \{T^n x : n \geq m\}$$

Podemos aplicar ahora el Lema 1.2 por ser F un subconjunto finito de X. Así F es cerrado y de interior vacío. Luego $\mathcal{O}(T, T^m x)$ es densa en X, por lo que todo elemento $T^m x$ es hipercíclico respecto de T. □

Como consecuencia de este teorema, podemos concluir que si existe un elemento hipercíclico respecto de T, es decir, si $HC(T) \neq \emptyset$, entonces el conjunto de elementos hipercíclicos es denso. En efecto, en la demostración hemos visto que la órbita $\mathcal{O}(T,x)$ es densa en X y que todo elemento $T^m x$ es hipercíclico; entonces $\mathcal{O}(T,x) \subseteq HC(T)$ y por tanto $HC(T)$ también es denso en X. Con esto hemos obtenido el primer hecho esencial acerca de la estructura de los elementos hipercíclicos.

A partir de ahora, nos centraremos en el ámbito de los espacios vectoriales topológicos. En estos espacios, los casos más interesantes son las aplicaciones lineales, así que, en lo que sigue, entenderemos que un operador es una aplicación lineal y continua.

Usando los resultados anteriores, estamos en condiciones de probar el Teorema de Transitividad de Birkhoff [9], que nos permitirá relacionar caos e hiperciclicidad.

Teorema 3.3 (**Teorema de Transitividad de Birkhoff.**). *Sean X un espacio vectorial topológico T_1, segundo numerable, sin puntos aislados y de Baire, y T un operador sobre X. Entonces, T es hipercíclico si y sólo si T es transitivo.*

Demostración. En primer lugar, veamos que hiperciclicidad implica transitividad. Para ello, sean dos abiertos U y V no vacíos de X. Si existe un elemento $x \in HC(T)$, entonces existe $n \geq 0$ de manera que $T^n x \in U$. Por el Teorema 3.2, $T^n x$ tiene órbita densa, por lo tanto existe $m \geq 0$ tal que $T^m(T^n x) \in V$. Luego se tiene que $T^m(U) \cap V \neq \emptyset$.

Veamos ahora la otra implicación. Como X es segundo numerable, existe una base $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ numerable de abiertos de X. Se tiene además que

$$\begin{aligned} x \in HC(T) &\iff \mathcal{O}(T,x) \text{ es densa en } X \iff \overline{\{T^n x : n \geq 0\}} = X \iff \\ &\iff \text{Para todo } k \in \mathbb{N},\ U_k \cap \{T^n x : n \geq 0\} \neq \emptyset \iff \\ &\iff \text{Para todo } k \in \mathbb{N}, \text{ existe } n_0 \geq 0 \text{ tal que } T^{n_0} x \in U_k. \end{aligned}$$

Luego, podemos escribir $HC(T)$ de la siguiente forma

$$HC(T) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq 0} (T^n)^{-1} U_k.$$

Como U_k es abierto, $(T^n)^{-1}U_k$ también lo es por ser inversa por aplicaciones continuas de un abierto y por tanto $H_k := \bigcup_{n\geq 0} (T^n)^{-1} U_k$ es abierto por ser unión de abiertos.

Si probamos que para todo abierto no vacío $U \subseteq X$, $H_k := \bigcup_{n\geq 0}(T^n)^{-1}U$ es denso en X, entonces tendríamos que $HC(T)$ se puede escribir como intersección de abiertos densos. Así, por el Teorema de Baire, $HC(T)$ sería denso y, por tanto, no vacío.

En efecto, fijemos $V \subseteq X$ abierto y no vacío. Como T es transitivo, se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^{n_0}(V) \cap U \neq \emptyset \Rightarrow V \cap (T^{n_0})^{-1}U \neq \emptyset$$

y, como $V \cap (T^{n_0})^{-1}U \subseteq V \cap H$, entonces se tiene que $V \cap H \neq \emptyset$. □

Como hemos dicho antes, con este teorema podemos redefinir el concepto de Caos Lineal. Así, un operador $T : X \to X$ será caótico si es hipercíclico y posee un conjunto denso de puntos periódicos. En otras palabras, un operador es caótico si cerca de cada punto pasa una órbita densa y una órbita periódica.

Como Corolario del teorema anterior, veremos que no es necesario imponer ninguna condición extra para que el conjunto de vectores hipercíclicos sea residual.

Corolario 3.4. *Sea X un espacio topológico T_1, segundo numerable, sin puntos aislados y de Baire. Si $T : X \to X$ es hipercíclico, entonces $HC(T)$ es residual.*

Demostración. Hay que probar que $HC(T)$ contiene algún G_δ denso. En la demostración del teorema anterior hemos visto que $HC(T) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} H_k$, con $H_k := \bigcup_{n\geq 0} (T^n)^{-1}U_k$. Por tanto, $HC(T)$ es realmente un G_δ puesto que es intersección numerable de abiertos. Por otra parte, por el Teorema 3.2, $HC(T)$ es denso en X. Así, $HC(T)$ es un G_δ denso en X (y X es de Baire), por lo cual se tiene que $HC(T)$ es residual. □

A continuación, veamos una consecuencia de este resultado y del Teorema de Baire.

Corolario 3.5. *Sea X un espacio de Baire y $T_n : X \to X$ $(n \in \mathbb{N})$ una sucesión de operadores sobre X. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, T_n es un operador hipercíclico, entonces existe un vector hipercíclico común para todos los operadores T_n.*

Demostración. Por hipótesis, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un elemento $x_n \in HC(T_n)$, es decir, que $HC(T_n) \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por el Corolario 3.4, cada $HC(T_n)$ es un G_δ denso y por tanto, por ser X de Baire, la intersección $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} HC(T_n)$ es densa y en particular no vacía, luego existe un elemento x en dicha intersección, con lo que $x \in HC(T_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

De hecho, también hemos probado que existe un conjunto residual de vectores hipercíclicos comunes a todos los operadores T_n.

El siguiente resultado es una interesante consecuencia de la residualidad de $HC(T)$ y nos dice que todo vector puede descomponerse en dos vectores hipercíclicos.

Corolario 3.6. *Sea X un espacio vectorial topológico, metrizable y de Baire. Sea T un operador hipercíclico sobre X. Entonces cada vector de X puede descomponerse en suma de dos vectores hipercíclicos.*

Demostración. Para probar este resultado, usaremos el Corolario 3.4; veamos que se cumplen las hipótesis para X:

- Es un espacio de Baire por hipótesis.
- Es T_1, por ser metrizable.
- Es segundo numerable, pues es metrizable y separable (por ser T hipercíclico en X).
- Carece de puntos aislados, ya que los espacios vectoriales son conexos.

Fijado $x \in X$ y aplicando el corolario citado anteriormente, $HC(T)$ es residual y no vacío, luego su traslación, $x - HC(T)$, también lo es. Además la intersección $HC(T) \cap (x - HC(T))$ sigue siendo residual puesto que la intersección de G_δ densos sigue siendo un G_δ denso y en particular, dicha intersección es no vacía, por lo que contiene al menos un elemento. Sea z dicho elemento, $z \in HC(T)$ y $z \in x - HC(T)$. Por tanto, existen $y, z \in HC(T)$ tal que $x - y = z$ y, por tanto, $x = y + z$ con $y, z \in HC(T)$. $\square$

A continuación, veremos dos condiciones necesarias para la hiperciclicidad de un operador. La primera de ellas se enmarca dentro de los espacios normados. Sea X un espacio normado denotaremos la norma en X por $\|\cdot\|$.

Teorema 3.7. *Sea T un operador sobre un espacio normado X. Si T es hipercíclico, entonces $\|T\| > 1$.*

Demostración. Vamos a probar el contrarrecíproco, suponiendo que $\|T\| \leq 1$. Para cada $x \in X$, se tiene $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\| \leq \|x\|$ ya que T es un operador continuo. Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$, $\|T^n x\| \leq \|T^n\|\|x\| = \|T\|^n\|x\| \leq \|x\|$. Por tanto la órbita $\{T^n x : n \geq 0\}$ está acotada y no puede ser densa. Por lo que T no puede ser hipercíclico. $\square$

Antes de enunciar la segunda de las condiciones, recordemos que si X es un espacio vectorial topológico y T un operador sobre X, se dice que un escalar λ es un autovalor de T cuando existe un vector no nulo $\phi \in X$ tal que $T\phi = \lambda\phi$. En tal caso, se dirá que ϕ es un autovector del operador T. Además, recordemos que el adjunto de T es el operador $T^* : X^* \to X^*$, el cual viene dado para cada $\varphi \in X^*$ por $(T^*\varphi)(x) = \varphi(Tx)$ para $x \in X$.

Teorema 3.8. *Sean X un espacio vectorial topológico y T un operador hipercíclico sobre X. Entonces T^* carece de autovalores.*

Demostración. Haremos la prueba por reducción al absurdo, suponiendo pues que T^* posee algún autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$ donde $\mathbb{K}$ es el cuerpo de escalares de X. Entonces existe un autovector $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ tal que $T^*\varphi = \lambda\varphi$. Tomamos un vector $u \in HC(T)$. Así pues, se tiene que $\varphi(Tu) = (T^*\varphi)(u) = \lambda\varphi(u)$ y por tanto, por inducción se tiene también que $\varphi(T^n u) = \lambda^n\varphi(u)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, como u es hipercíclico para T, el conjunto $\{T^n u : n \geq 0\}$ es denso en X, luego por ser φ continua, $\{\varphi(T^n u) : n \geq 0\}$ también es denso en $\varphi(X) = \mathbb{K}$. Y como hemos probado antes que $\varphi(T^n u) = \lambda^n\varphi(u)$, entonces el conjunto $\{\lambda^n\varphi(u) : n \geq 0\}$ es denso en $\mathbb{K}$, pero esto es una contradicción puesto que, en $\mathbb{K}$, la sucesión $(\lambda^n c)_n$, con c fijo, o tiende a 0, o tiende a ∞, o tiene módulo constante $|c|$, según sea, respectivamente, $|\lambda| < 1$, $|\lambda|$ mayor, menor o igual a 1; en cualquier caso, $(\lambda^n c)_n$ no sería densa. □

Para concluir con esta sección, veremos uno de los resultados más importantes de la misma, en el que probaremos la ausencia de operadores hipercíclicos en espacios de dimensión finita.

Teorema 3.9. *Sobre un espacio X de dimensión finita no hay operadores hipercíclicos.*

Demostración. Sabemos que un espacio vectorial topológico de dimensión finita es topológicamente isomorfo a $\mathbb{K}^N$ para algún $N \in \mathbb{N}$. Así que podemos partir de que $X = \mathbb{K}^N$ y T un operador sobre X. Supongamos que T es hipercíclico, es decir, que existe un elemento hipercíclico $x \in X$.

Veamos en primer lugar que $\{x, Tx, \ldots, T^{N-1}x\}$ es linealmente independiente. Supongamos lo contrario; entonces existen $a_0, \ldots, a_{N-1} \in \mathbb{K}$ no todos nulos, tales que

$$a_0 x + a_1 Tx + \ldots + a_{N-1} T^{N-1} x = 0.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a_{N-1} \neq 0$. Entonces

$$a_{N-1} T^{N-1} x = -\sum_{i=0}^{N-2} a_i T^i x \in \mathcal{L}(x, Tx, \ldots, T^{N-2}x),$$

(donde $\mathcal{L}(x_1, \cdots, x_p)$ denotará al espacio vectorial generado por los vectores $x_i \in X$, $1 \leq i \leq p$). Así, aplicando T, se tiene que

$$a_{N-1} T^N x = -\sum_{i=0}^{N-2} a_i T^{i+1} x \in \mathcal{L}(Tx, \ldots, T^{N-1}x) \subseteq \mathcal{L}(x, Tx, \ldots, T^{N-1}x).$$

Luego se tiene que $T^N x \in \mathcal{L}(x, Tx, \ldots, T^{N-1}x)$. Aplicando de nuevo T, se tiene que $T(T^N x) = T^{N+1} x \in \mathcal{L}(Tx, \ldots, T^N x) \subseteq \mathcal{L}(x, Tx, \ldots, T^N x) = \mathcal{L}(x, Tx, \ldots, T^{N-1}x)$, pues $T^N x$ depende linealmente de $T^i x$ para $i = 0, \ldots, N-1$. Por inducción, se llega a que si $T^{N+m} x \in \mathcal{L}(x, Tx, \ldots, T^{N-1}x)$, entonces

$$T(T^{N+m} x) = T^{N+m+1} x \in \mathcal{L}(x, Tx, \ldots, T^{N-1}x).$$

Por lo que se tiene que $\mathcal{L}(\mathcal{O}(T,x)) = \mathcal{L}(x, Tx, \ldots, T^{N-1}x)$ y por lo tanto, la dimensión de $\mathcal{L}(\mathcal{O}(T,x))$ sería igual a la de $\mathcal{L}(x, Tx, \ldots, T^{N-1}x)$; pero ésta es menor estricto que N por ser linealmente dependientes. Así, $\mathcal{O}(T,x)$ no puede ser densa en $\mathbb{K}^N$ y, por tanto, los vectores $\{x, Tx, \ldots, T^{N-1}x\}$ son linealmente independientes, luego forman una base de $\mathbb{K}^N$.

Tomamos ahora un $\alpha \in \mathbb{R}$ positivo, por la hiperciclicidad del vector x, existe una sucesión de números naturales $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $T^{n_k}x \to \alpha x$. Se tiene entonces que $T^{n_k}(T^i x) = T^i(T^{n_k}x) \to T^i(\alpha x) = \alpha T^i x$, $\forall i < N$ por la continuidad de T. Por ser $\{x, Tx, \ldots, T^{N-1}x\}$ una base de $\mathbb{K}^N$, $T^{n_k}z \to \alpha z$, $\forall z \in \mathbb{K}^N$ y por tanto $T^{n_k} \to \alpha I$ de donde $det(T^{n_k}) \to det(\alpha I) = \alpha^N$. Si tomamos $\alpha = |det(T)|$, se tiene que el conjunto $\{\alpha^n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{K}$ y llegamos a una contradicción, pues hemos visto que conjuntos así no pueden ser densos en $\mathbb{K}$. Por lo tanto, no existen operadores hipercíclicos en espacios de dimensión finita. $\square$

Como consecuencia de este resultado, el estudio de hiperciclicidad y, por extensión, de Caos lineal, debe restringirse a espacios de dimensión infinita.

3.2. Hiperciclicidad de sucesiones de operadores

Se puede generalizar la definición de hiperciclicidad de un operador a hiperciclicidad de una sucesión de operadores $T_n : X \to Y$ $(n \geq 0)$, donde X e Y son dos espacios topológicos.

Definición 3.10. *Se dice que $x \in X$ es* hipercíclico *respecto de la sucesión $\{T_n\}_{n\geq 0}$ si y sólo si la órbita $\mathcal{O}(\{T_n\}, x) = \{T_n x : n \geq 0\}$ es densa en Y.*

Al subconjunto de elementos de X que son hipercíclicos respecto de la sucesión $\{T_n\}_{n\geq 0}$ lo notaremos por $HC(\{T_n\})$.

Se dirá que $\{T_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión hipercíclica *si dicho conjunto $HC(\{T_n\})$ es no vacío. Además, si $HC(\{T_n\})$ es denso en X, se dice que la sucesión $\{T_n\}_{n\geq 0}$ es* densamente hipercíclica.

Así pues, la definición de un operador hipercíclico es un caso particular de ésta, tomando $X = Y$ y la sucesión $\{T_n\}_{n\geq 0}$ de iteradas de una sola aplicación continua $T : X \to X$, es decir, $T_0 = Id$ y, si $n > 0$, $T^n = T \circ \overset{(n)}{\cdots} \circ T$.

A la vista de esta definición, podemos observar que para que una sucesión de operadores entre dos espacios topológicos, $T_n : X \to Y$ $(n \geq 0)$, sea hipercíclica, es necesario que el espacio de llegada Y sea separable. Por tanto, desde este momento nos centraremos en espacios (de llegada) separables.

También tenemos que recalcar que, al contrario de lo que sucedía con un único operador (Teorema 3.2), la existencia de un elemento hipercíclico para una sucesión $\{T_n\}_{n\geq 0}$ no implica que ésta sea densamente hipercíclica.

En efecto, sean X un espacio (de Hilbert) bidimensional y $\{u_1, u_2\}$ una base ortonormal de X. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un subconjunto de X denso y numerable e y_n un vector ortogonal a x_n con norma n, para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos la sucesión $\{T_n\}_{n\geq 0}$ de operadores lineales sobre X como

$$T_n(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha x_n + \beta y_n \text{ con } \alpha \text{ y } \beta \text{ escalares.}$$

Entonces todos los múltiplos de u_1 de la forma αu_1 tal que $\alpha \neq 0$ son hipercíclicos para la sucesión $\{T_n\}_{n\geq 0}$; pero si $\beta \neq 0$, se tiene que $\|T_n(\alpha u_1 + \beta u_2)\| \geq |\beta|\|y_n\| \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Y por tanto no existen vectores de la forma $\alpha u_1 + \beta u_2$ hipercíclicos. En resumen, el conjunto $HC(\{T_n\}) = \{\alpha u_1 : \alpha \neq 0\}$ no es denso en X, luego $\{T_n\}_{n\geq 0}$ no es densamente hipercíclico.

Establecemos ahora un teorema bastante importante que extiende a sucesiones muchas de las propiedades que vimos para un sólo operador.

Teorema 3.11. *Sean X e Y espacios vectoriales topológicos con Y segundo numerable y $T_n : X \to Y$ $(n \geq 0)$ una sucesión de operadores. Entonces:*

1. *$HC(\{T_n\})$ es un G_δ.*
2. *Si X es de Baire, son equivalentes:*
    a) $HC(\{T_n\})$ es residual en X.

b) $\{T_n\}$ *es densamente hipercíclico.*

c) *El conjunto* $\{(x, T_n x) : x \in X, n \geq 0\}$ *es denso en* $X \times Y$.

d) *Para cada par de abiertos no vacíos* U, V *de* X *e* Y *respectivamente, existe* $n \geq 0$ *tal que* $T_n(U) \cap V \neq \emptyset$.

3. Si X *es primer numerable y de Baire, las condiciones a)-d) anteriores son también equivalentes a las siguientes:*

e) *Para cada* $x \in X$ *y cada* $y \in Y$ *existe* $\{x_p : p \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ *y una sucesión de enteros positivos* $\{n_p\}$ *tales que* $x_p \to x$ *y* $T_{n_p} x_p \to y$ $(p \to \infty)$.

f) *Existe* $D \subseteq X$ *denso en* X *y existe* $D' \subseteq Y$ *denso en* Y *tales que para cada* $d \in D$ *y cada* $d' \in D'$, *se puede encontrar una sucesión* $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}} \subseteq X$ *y una sucesión de enteros positivos* $\{n_p\}$ *tales que* $x_p \to d$ *y* $T_{n_p} x_p \to d'$ $(p \to \infty)$.

Demostración. Al ser Y segundo numerable, existe una base numerable $\{V_m : m \in \mathbb{N}\}$ de abiertos de Y.

1. Hay que probar que $HC(\{T_n\})$ es intersección numerable de abiertos, es decir, que $HC(T)$ es un G_δ. Se tiene:

$$\begin{aligned} x \in HC(\{T_n\}) &\iff \mathcal{O}(\{T_n\}, x) \text{ es densa en } X \iff \overline{\{T_n x : n \geq 0\}} = X \iff \\ &\iff \text{Para todo } m \in \mathbb{N},\ V_m \cap \{T_n x : n \geq 0\} \neq \emptyset \iff \\ &\iff \text{Para todo } m \in \mathbb{N}, \text{ existe } n_0 \geq 0 \text{ tal que } T_{n_0} x \in V_m. \end{aligned}$$

Luego podemos escribir $HC(\{T_n\})$ como:

$$HC(\{T_n\}) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq 0} (T_n)^{-1} V_m.$$

Como V_m es abierto, $(T^n)^{-1} V_m$ también lo es por ser inversa por aplicaciones continuas de un abierto, y por tanto $\bigcup_{n \geq 0} (T^n)^{-1} V_m$ es abierto por ser unión de abiertos. Luego tenemos que $HC(\{T_n\})$ es intersección de abiertos. Además, vemos que dicha intersección es numerable. Hemos probado pues que $HC(\{T_n\})$ es un G_δ.

2. Si X es de Baire, hay que probar que son equivalentes a), b), c) y d).

a) ⇒ b):

Si $HC(\{T_n\})$ es residual en X, en particular implica que $HC(\{T_n\})$ es denso, por lo que $\{T_n\}$ es densamente hipercíclico.

b) ⇒ a):

Si X es de Baire y T densamente hipercíclico, $HC(\{T_n\})$ es denso en X y por el apartado 1., es G_δ. Entonces $HC(\{T_n\})$ contiene un G_δ denso, a saber, él mismo. Por tanto, $HC(\{T_n\})$ es residual en X.

b) ⇒ c):

Una base de abiertos de $X \times Y$ es $\{U \times V : U \subseteq X, V \subseteq Y$ abiertos no vacíos$\}$. Consideramos dos abiertos no vacíos $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$. Hay que demostrar que $\{(x, T_n x) : x \in X, n \geq 0\} \cap (U \times V) \neq \emptyset$. Equivalentemente, para todo abierto $U \subseteq X$ y para todo abierto $V \subseteq Y$, existen $x_0 \in X$ y $n_0 \geq 0$ tal que $(x_0, T_{n_0} x_0) \in U \times V$.

Así pues, fijamos $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ abiertos no vacíos. Como $HC(\{T_n\})$ es denso en X y $U \subseteq X$ es abierto no vacío, existe $x_0 \in HC(\{T_n\}) \cap U$. En particular, se tiene que $x_0 \in HC(\{T_n\})$, por lo que $\{T_n x_0 : n \geq 0\}$ es denso en Y, y al ser $V \subseteq Y$ un abierto de Y, existe $n_0 \geq 0$ tal que $T_{n_0} x_0 \in V$.

Entonces, hemos probado que $x_0 \in U$ y $T_{n_0} x_0 \in V$, es decir, $(x_0, T_{n_0} x_0) \in U \times V$.

c) ⇒ b):

Por la demostración del apartado 1 se tiene que

$$HC(\{T_n\}) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} H_m,$$

donde $H_m = \bigcup_{n \geq 0} (T^n)^{-1}(V_m)$, siendo $\{V_m\}_m$ base de abiertos de Y.

Hay que demostrar entonces que H_m es denso en X, para que así, como la intersección de densos es densa (por ser X de Baire), se tenga que $HC(\{T_n\})$ es denso. Para ello, fijado un subconjunto $U \subseteq X$ abierto y no vacío, probaremos que $\bigcup_{n \geq 0} (T_n)^{-1}(V_m) \cap U \neq \emptyset$. Así pues, como $U \times V_m \subseteq X \times Y$ es abierto y por hipótesis $\{(x, T_n x) : x \in X, n \geq 0\}$ es denso en $X \times Y$, entonces existen $x_0 \in X$ y $n_0 \geq 0$ tales que $x_0 \in U$ y $T_{n_0} x_0 \in V_m$. Equivalentemente, $x_0 \in U$ y $x_0 \in (T_{n_0})^{-1} V_m$; en particular $x_0 \in \bigcup_{n \geq 0} (T_n)^{-1} V_m$. Luego $x \in U \cap \bigcup_{n \geq 0} (T_n)^{-1} V_m$. Por lo tanto dicha intersección es no vacía, obteniéndose así lo que queríamos probar.

<u>$c) \iff d)$:</u>

El conjunto $\{(x, T_n x) : x \in X, n \geq 0\}$ es denso en $X \times Y$ si y sólo si, para todo par de abiertos no vacíos $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$, se tiene que

$$\{(x, T_n x) : x \in X, n \geq 0\} \cap (U \times V) \neq \emptyset.$$

Pero esto equivale a que existen $x_0 \in U$ y $n_0 \geq 0$ tales que $(x_0, T_{n_0} x_0) \in U \times V$. Así para cada par de abiertos no vacíos $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ se tiene que $T_{n_0}(U) \cap V \neq \emptyset$.

3. Hay que probar que las condiciones $e)$ y $f)$ son también equivalentes a $a)$, $b)$, $c)$ y $d)$.

<u>$e) \Rightarrow f)$:</u>

Es obvio, puesto que el apartado $f)$ es un caso particular de $e)$ para subconjuntos densos de X e Y.

<u>$c) \Rightarrow e)$:</u>

Como X es primer numerable, todo punto del conjunto tiene base de entornos numerable, por lo que la topología de X queda definida por sucesiones convergentes. Por lo tanto, por la densidad de $\{(x, T_n x) : x \in X, n \geq 0\}$, mediante sucesiones en $X \times Y$ se tiene $e)$.

<u>$f) \Rightarrow a)$:</u>

En la prueba del apartado 1 hemos visto que se puede escribir

$$HC(\{T_n\}) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} H_m,$$

donde $H_m = \bigcup_{n \geq 0} \{T_n^{-1}(V_m)\}$. Basta probar entonces que H_m es denso para cada $m \in \mathbb{N}$. Fijamos pues un subconjunto abierto y no vacío U de X. Por la densidad de D, existe $d \in D \cap U$ tal que $d \in S$. De la misma forma, existe $d' \in D' \cap V_m$. Entonces, por hipótesis, se puede encontrar unas sucesiones $\{x_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ y $\{n_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ tales que $x_p \in U$ y $T_{n_p}x_p \in V_m$, luego $x_p \in (T_{n_p})^{-1}V_m \subseteq H_m$ y se deduce que $x_p \in H_m$. Luego, como $x_p \in U$ y $x_p \in H_m$, entonces la intersección $U \cap H_m$ es no vacía y se tiene así que H_m es denso. □

Observemos que el apartado 2d) de este teorema coincide con la definición de transitividad de un operador. A pesar de no tener, en general, la densidad de $HC(\{T_n\})$, con sólo saber que la sucesión es hipercíclica, vamos a establecer un resultado que nos asegura que, bajo ciertas condiciones, sí que tenemos garantizada la densidad o incluso la residualidad de $HC(\{T_n\})$.

Corolario 3.12. *Sean X e Y dos espacios vectoriales topológicos y $T_n : X \to Y$ $(n \geq 0)$ una sucesión de operadores.*

1. *Supongamos que Y es de Hausdorff o seudometrizable. Si existe $C \subseteq X$ denso tal que existe $\lim_{n\to\infty} T_n x$ en Y para cada $x \in C$ y $\{T_n\}$ es hipercíclica, entonces $\{T_n\}$ es densamente hipercíclica.*

2. *Supongamos que X es de Baire y que Y es seudometrizable y separable. Supongamos también que existen D y D' densos en X e Y respectivamente, tal que para todo $d \in D$ y $d' \in D'$, se pueden encontrar una sucesión $\{v_p : p \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ y una sucesión de enteros positivos $\{n_p\}$ tales que $v_p \to 0$, $T_{n_p}d \to 0$ y $T_{n_p}v_p \to d'$ $(p \to \infty)$. Entonces el conjunto $HC(\{T_n\})$ es residual.*

Demostración.

1. Por hipótesis, $\{T_n\}$ es hipercíclico; entonces existe un vector $u \in HC(\{T_n\})$.

Veamos primero que $u + C$ es denso. Sabemos que $C \subseteq X$ es denso; entonces para todo abierto $U \subseteq X$, $U \cap C \neq \emptyset$. Equivalentemente, para todo abierto $U \subseteq X$, existe $c_0 \in C$ tal que $c_0 \in U$. Hay que probar que para todo abierto $U \subseteq X$, $(u+C)\cap U \neq \emptyset$. Es decir, para todo abierto $U \subseteq X$ existe $c_0 \in C$ tal que $u_0 + c_0 \in U$. En efecto, si U es abierto, $U - u_0$ también lo es. Entonces, existe $c_0 \in C$ tal que $c_0 \in U - u_0$ (puesto que C es denso y $U - u_0$ es abierto), es decir, existe $c_0 \in C$ tal que $c_0 + u_0 \in U$.

Sea z un elemento del conjunto denso $u+C$, es decir, $z = u+x$ para cierto $x \in C$. Sea $y' = \lim_{x\to\infty} T_n x \in Y$.

- Si suponemos que Y es de Haussdorf, hay que probar que $\{T_n\}$ es densamente hipercíclica. Así pues, fijamos $y \in Y$ y un entorno V del origen en Y. Entonces, existe un entorno del origen V_1 tal que $V_1+V_1 \subseteq V$. Como $y' \in Y$, entonces $y'+V_1$ es un entorno de y' y como $y' = \lim_{x\to\infty} T_n x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T_n x \in y' + V_1$, $\forall n \geq n_0$.

  Por ser Y un espacio vectorial topológico, es poligonalmente conexo, luego es conexo y por tanto no tiene puntos aislados. Entonces, usando el Lema 1.2, el conjunto finito $F = \{T_n x : \ n = 1, 2, \ldots, n_0 - 1\}$ es cerrado y tiene interior vacío. Luego, al ser $\{T_n u : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso en Y, se tiene que $\{T_n u : n \geq n_0\}$ también lo es. Entonces, existe $m \geq n_0$ tal que $T_m u \in (y - y') + V_1$. Y por tanto, $T_m z = T_m u + T_m x \in (y - y' + V_1) + (y' + V_1) = y + V_1 + V_1 \subseteq y + V$.

  Hemos probado entonces que para todo $y \in Y$ y para todo entorno V del cero, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T_m z \in y+V$, lo que garantiza la densidad de $\{T_m z : m \geq 0\}$. Luego $z \in HC(\{T_n\})$. Así, $u + C \subset HC(\{T_n\})$ y $HC(\{T_n\})$ es denso.

- Supongamos ahora que Y es seudometrizable, que equivale a que Y sea primer numerable. Si $y \in Y$, por ser Y primer numerable, existe una sucesión de números naturales $\{n_k\}$ tal que $T_{n_k} u \to y - y'$. Entonces

  $$\lim_{k\to\infty} T_{n_k} z = \lim_{k\to\infty} T_{n_k} u + \lim_{k\to\infty} T_{n_k} x = (y - y') + y' = y.$$

  Luego z es hipercíclico. Finalmente, como $u+C$ es denso y $u+C \subseteq HC(\{T_n\})$, se tiene que $HC(\{T_n\})$ es denso.

2. Por hipótesis, Y es ahora seudometrizable y separable, lo que equivale a que Y sea segundo numerable. Aplicamos el apartado 3 del Teorema 3.11 a la sucesión $x_p = v_p + d$ ($p \in \mathbb{N}$). Sólo necesitamos la implicación $f) \Rightarrow a)$.

Veamos que se cumplen las hipótesis del teorema. Por una parte, tenemos que X es de Baire, y no hace falta imponer que X es primer numerable puesto que no se usa en la implicación que queremos. Por otra parte, existen $D \subseteq X$ y $D' \subseteq Y$ densos tales que para cada $d \in D$, $d' \in D'$, se puede encontrar una sucesión $\{x_p\} \equiv \{v_d + d\}$ y una sucesión de enteros positivos $\{n_p\}$ tales que $x_p \to d$ cuando $p \to \infty$ (pues $x_p = v_p + d$ y $v_p \to 0$) y $T_{n_p} x_p \to d'$ cuando $p \to \infty$ (pues $T_{n_p} x_p = T_{n_p} v_p + T_{n_p} d$, donde $T_{n_p} v_p \to d'$ y $T_{n_p} d \to 0$).

Por tanto se cumplen las hipótesis y aplicando dicho teorema, se tiene que $HC(\{T_n\})$ es residual en X. □

Teorema 3.13. *Sean X e Y dos espacios topológicos, de Baire y segundo numerables. Sea $T_n : X \to Y$ $(n \geq 0)$ una sucesión de operadores biyectivos tales que cada T_n^{-1} es continuo. Entonces, $\{T_n\}$ es densamente hipercíclica si y sólo si $\{T_n^{-1}\}$ también lo es.*

En particular, si X es T_1, de Baire, segundo numerable y sin puntos aislados, y $T : X \to X$ es un homeomorfismo, entonces T es hipercíclico si y sólo si T^{-1} lo es.

Demostración. La sucesión $\{T_n\}$ es densamente hipercíclica si y solo si para todo par de abiertos no vacíos $U \subset X$ y $V \subset Y$, existe $n \geq 0$ tal que $T_n(U) \cap V \neq \emptyset$ (por el Teorema 3.11). Aplicando $(T_n)^{-1}$ se tiene que $(T_n)^{-1}(T_n(U) \cap V) \neq \emptyset$ y al ser T_n biyectiva, $(T_n)^{-1}(T_n(U)) \cap (T_n)^{-1}(V) \neq \emptyset$ si y solo si $U \cap (T_n)^{-1}(V) \neq \emptyset$. Luego $\{T_n^{-1}\}$ es densamente hipercíclica.

Para probar lo que nos falta, usaremos el Corolario 3.4. Si T es hipercíclica, entonces $HC(T)$ es residual. Por el Teorema 3.11, $HC(T)$ es residual si y solo si T es densamente hipercíclico. Y por lo anterior, T^{-1} también es densamente hipercíclico y por lo tanto hipercíclico. Sólo es necesario probar una implicación puesto que, al ser T biyectiva, $(T^{-1})^{-1} = T$. □

Para finalizar la sección vamos a ver que, bajo ciertas condiciones, es posible hallar elementos hipercíclicos de un subespacio.

Teorema 3.14. *Sean X e Y espacios topológicos y $T_n : X \to Y$ $(n \geq 0)$ una sucesión de operadores. Sean los subconjuntos $X_1 \subseteq X$ e $Y_1 \subseteq Y$ tales que X_1 es denso en X e Y_1 denso en Y, $T_n(X_1) \subset Y_1$ $(n \geq 0)$ y cada restricción $T_n|_{X_1} : X_1 \to Y_1$ es continua si se dota a X_1 e Y_1 de ciertas topologías, respectivamente más fuertes que las inducidas por X e Y. Entonces se tiene:*

a) Cada elemento de X_1 hipercíclico para $\{T_n |_{X_1}\}$, lo es para $\{T_n\}$.

b) Si $\{T_n |_{X_1}\}$ es densamente hipercíclica, entonces $\{T_n\}$ también lo es.

Demostración.

a) Y_1 es denso en Y, luego dado un abierto no vacío V de Y, entonces se tiene que $V \cap Y_1 \neq \emptyset$ y además es un abierto en la nueva topología de Y_1 ya que ésta es más fuerte que la inducida por Y. Entonces, sea $x \in X_1$ hipercíclico para $\{T_n |_{X_1}\}$, el conjunto $\{T_n |_{X_1} x : n \geq 0\}$ es denso en Y_1. Como $V \cap Y_1$ es un abierto de Y_1, se tiene que $\{T_n |_{X_1} x : n \geq 0\} \cap (V \cap Y_1) \neq \emptyset$, o equivalentemente, $\{T_n |_{X_1} x : n \geq 0\} \cap V \neq \emptyset$. Así, existe $m \geq 0$ tal que $T_m x \in V$. Hemos probado pues que el conjunto $\{T_n x : n \geq 0\}$ es denso en Y, luego x es hipercíclico para $\{T_n\}$.

b) Denotamos $cl_1(A)$ a la clausura en X_1 de un subconjunto $A \subseteq X_1$. Veamos que $cl_1(A) \subseteq \overline{A}$.

Sea $x \in cl_1(A)$; entonces, para cada abierto U_1 de X_1 con $x \in U_1$, se tiene que $U_1 \cap A \neq \emptyset$. Para ver que x pertenece a $\overline{A}$, tomemos un abierto $U \subseteq X$ con $x \in U$ y veamos que $A \cap U \neq \emptyset$. En efecto, sabemos que $U \cap X_1$ es abierto de X_1 y $x \in U \cap X_1$, por tanto, $A \cap (U \cap X_1) \neq \emptyset$, pero $A \cap U \supseteq (A \cap U) \cap X_1 = A \cap (U \cap X_1) \neq \emptyset$, luego $A \cap U \neq \emptyset$ y $x \in \overline{A}$.

Por el apartado a), tenemos que $HC(\{T_n |_{X_1}\}) \subseteq HC(\{T_n\})$ y debido a que $cl_1(A) \subseteq \overline{A}$, se tiene que $\overline{HC(\{T_n\})} \supseteq \overline{HC(\{T_n |_{X_1}\})} \supseteq cl_1(\{T_n |_{X_1}\})$, y como $\{T_n |_{X_1}\}$ es densamente hipercíclico, entonces $cl_1(\{T_n |_{X_1}\}) = X_1$. Tenemos que $X_1 \subseteq HC(\{T_n\})$, por tanto, $X = \overline{X_1} \subseteq \overline{\overline{HC(\{T_n\})}} = \overline{HC(\{T_n\})}$, es decir, $X \subseteq \overline{HC(\{T_n\})}$, de donde se deduce que $X = \overline{HC(\{T_n\})}$ puesto que la otra contención ($\supseteq$) es trivial. Hemos probado pues que $\{T_n\}$ es densamente hipercíclica. $\square$

3.3. El Criterio de Hiperciclicidad

En esta sección veremos una condición que garantiza la hiperciclicidad de una sucesión de operadores. Este criterio fue dado originalmente por Gethner y Shapiro [11] y por Kitai [14] de manera independiente y en ambos casos, la demostración está inspirada en el Teorema de Rolewicz [16] que veremos más adelante. Dicho criterio nos será de gran utilidad en el posterior estudio de ejemplos de operadores hipercíclicos y caóticos.

El resultado lo daremos en el contexto de F-espacios. Recordamos que un F-espacio es un espacio métrico donde la distancia es completa e invariante por traslaciones y que escribiremos $\|x-y\| = d(x,y)$.

Teorema 3.15. *Sea X un F-espacio separable y $T : X \to X$ un operador. Supongamos que existen un subconjunto denso $\mathcal{D}$ de X y una aplicación $S : X \to X$ tales que:*

a) $T \circ S = Id$ *en* X.

b) $\lim_{n\to\infty} T^n x = 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} S^n x = 0$ *para todo* $x \in \mathcal{D}$.

Entonces el conjunto $HC(T)$ es denso y, en particular, no vacío.

Demostración. Sabemos que $x \in HC(T)$ si y solo si, para todo $N \in \mathbb{N}$, $T^N x \in HC(T)$. Además, una base de abiertos de X es $\{B(x_k, \frac{1}{j})\}_{k,j}$, donde $\{x_k\}_k \subseteq X$ es una sucesión densa en X. Así pues $x \in HC(T)$ si y solo si, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\{T^n x : n \geq N\}$ es denso en X, lo que es lo mismo, $\forall N, j, k \in \mathbb{N}$, $\{T^n x : n \geq N\} \cap B(x_k, \frac{1}{j}) \neq \emptyset$. Pero esto último ocurre si y solo si $\forall N, j, k \in \mathbb{N}$, $x \in \{z \in X : \|T^n x - x_k\| < \frac{1}{j}$ para algún $n \geq N\}$.

Si para cada $N \in \mathbb{N}$, cada $y \in X$ y cada $\varepsilon > 0$, tomamos

$$F(y, N, \varepsilon) = \{z \in X : \|T^n x - y\| < \varepsilon \text{ para algún } n \geq N\},$$

acabamos de probar que

$$HC(T) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F(x_k, N, 1/j).$$

Así, si vemos que cada conjunto de la forma $F(y, N, \varepsilon)$ es denso, por el Teorema de Baire, tendríamos que $HC(T)$ es denso y se concluirá la prueba.

Fijemos $\delta > 0$, $z, y \in X$, $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Veamos que $F(y, N, \varepsilon) \cap B(z, \delta) \neq \emptyset$. Como $\mathcal{D}$ es denso en X, existen elementos $y_0, z_0 \in \mathcal{D}$, tales que $\|y - y_0\| < \varepsilon/2$ y

$\|z - z_0\| < \delta/2$. Tenemos por la hipótesis (b) que $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \|S^n x\| = 0$ en $\mathcal{D}$, es decir, que existe $n \geq N$ tal que $\|S^n y_0\| < \delta/2$ y $\|T^n z_0\| < \varepsilon/2$ respectivamente.

Tomamos pues $x = S^n y_0 + z_0$ y se tiene que

$$\|x - z\| \leq \|x - z_0\| + \|z_0 - z\| = \|S^n y_0\| + \|z_0 - z\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Entonces hemos probado que existe $x \in X$ tal que $\|x - z\| < \delta$.

Veamos ahora que $\|T^n x - y\| < \varepsilon$ para algún $n \geq N$. Por la hipótesis (a) se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$, $T^n \circ S^n = Id_X$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|T^n x - y\| &= \|T^n(S^n y_0 + z_0) - y\| = \|T^n(S^n y_0) + T^n z_0 - y\| = \\ &= \|y_0 + T^n z_0 - y\| \leq \|y_0 - y\| + \|T^n z_0\| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

con lo que se concluye la demostración. □

Diversos autores han estudiado este resultado y han ido mejorándolo y debilitando las hipótesis, como por ejemplo K. G. Grosse-Erdmann [13], G. Godefroy y el propio Shapiro [12], Bernal [1] o J. Bés y A. Peris [8]. Enunciamos a continuación una de las versiones más usadas de este criterio para sucesiones de operadores (ver [13]).

Teorema 3.16 (Criterio de Hiperciclicidad). *Sean X e Y dos F-espacios con Y separable y $T_n : X \to Y$ $(n \geq 0)$ una sucesión de operadores. Supongamos que existen dos subconjuntos densos X_0 de X e Y_0 de Y y una sucesión creciente $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$ cumpliendo las dos condiciones siguientes:*

(i) *$T_{n_k} x \to 0$ $(k \to \infty)$ para todo $x \in X_0$.*

(ii) *Para todo $y \in Y_0$, existe una sucesión $\{u_k\}_k$ en X tal que $u_k \to 0$ y $T_{n_k} u_k \to y$ $(k \to \infty)$.*

Entonces la sucesión $(T_n)_n$ posee un conjunto G_δ-denso, luego residual, de elementos hipercíclicos.

Para un solo operador y sus iteradas se tiene un enunciado equivalente simplemente sustituyendo $\{T_n\}_n$ por $\{T^n\}_n$.

Se dice que un operador (o una sucesión de operadores) verifica el Criterio de Hiperciclicidad para $\{n_k\}_k$ si satisface las hipótesis del teorema anterior para alguna sucesión creciente $\{n_k\}_k \subseteq \mathbb{N}$. En tal caso, es evidente que el operador (sucesión de operadores resp.) es hipercíclico. Pero, *¿qué se puede decir del recíproco de esta última afirmación?*, en otras palabras, *¿todo operador hipercíclico cumple el Criterio de Hiperciclicidad?*

Podemos encontrar sucesiones hipercíclicas de operadores de rango 1 sobre F-espacios que no verifican el Criterio de Hiperciclicidad. Un ejemplo de ello es el siguiente resultado.

Proposición 3.17. *Sean X e Y dos F-espacios con Y separable. Sean $\{y_n\}_n$ una sucesión densa en Y y $f \in X^* \setminus \{0\}$. Entonces la sucesión de operadores $T_n : X \to Y$ $(n \geq 0)$ dada por*

$$T_n x = f(x) y_n \ (x \in X,\, n \geq 0)$$

es hipercíclica y no satisface el criterio de hiperciclicidad.

Demostración. La sucesión $\{T_n\}_n$ es hipercíclica pues como $f \not\equiv 0$, existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq 0$, por lo tanto $\{T_n x : n \geq 0\} = f(x)\{x_n : n \geq 0\}$ y este conjunto es evidentemente denso en X pues $\{x_n\}_n$ lo es.

Veamos que $\{T_n\}$ no cumple el Criterio de Hiperciclicidad para ninguna sucesión $\{u_k\}_k$.

En primer lugar, si $\{n_k\}_k$ es una sucesión tal que $y_{n_k} \not\to 0$ y $T_{n_k} x = f(x) y_{n_k}$, entonces para que $T_{n_k} x \to 0$, ha de ser $f(x) = 0$, lo que significa que $x \in ker(f)$ que no es denso (pues es cerrado y $f \neq 0$), con lo cual la primera condición del Criterio de Hiperciclicidad falla.

Por otro lado, sea $(n_k)_k$ una sucesión tal que $y_{n_k} \to 0$; luego $T_{n_k} x = f(x) y_{n_k} \to 0$ $\forall x \in X$ (en este caso se tendría la primera condición del criterio para todo $x \in X$). Si ahora $u_k \to 0$ en X, tenemos que $f(u_k) \to 0$ (f lineal y continua). Por lo tanto, $T_{n_k} u_k = f(u_k) y_{n_k} \to 0$ con lo que falla la segunda condición del criterio.

En definitiva, el operador T_n definido como $T_n x = f(x) y_n$ con f lineal y continua e $\{y_n\}$ densa en X no cumple el Criterio de Hiperciclicidad. $\square$

Más recientemente, Bernal, Calderón y Prado-Bassas [7] han verificado que existen sucesiones de multiplicadores de coeficientes en $H(\mathbb{C})$ (operadores que a cada $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ le hace corresponder $Tf(z) = \sum_{k\geq 0} s_k a_k z^k \in H(\mathbb{C})$ para sucesiones adecuadas de escalares $\{s_k\}_k$) que son hipercíclicas pero no verifican el Criterio de Hiperciclicidad.

Sin embargo, estos ejemplos no nos son útiles si consideramos el Criterio de Hiperciclicidad para un único operador. En 1999, Bès y Peris [8] plantean el siguiente problema:

Si T es un operador hipercíclico sobre un espacio de Hilbert (o de Banach), ¿satisface T el Criterio de Hiperciclidad?

Dichos matemáticos obtienen, para el caso en que T sea un operador caótico sobre espacios de Fréchet, una respuesta afirmativa. Pero para operadores hipercíclicos, el problema ha permanecido abierto hasta que recientemente, en 2009, De la Rosa y Read [17] construyeron un espacio y un operador sobre él, que es hipercíclico pero no verifica el Criterio de Hiperciclicidad, cerrando así uno de los problemas más importantes sobre Caos lineal.

Debemos señalar también que en la literatura se pueden encontrar diversos Criterios de Hiperciclicidad, pero a pesar de ello, Bermúdez, Bonilla y Peris [6] han probado que todos ellos son equivalentes.

Capítulo 4

Ejemplos

En este capítulo, analizaremos tres ejemplos clásicos de operadores caóticos. Se trata de algunos de los más importantes operadores que, históricamente, han servido para desarrollar la teoría de la hiperciclicidad y Caos.

4.1. Operador Traslación

El primer ejemplo de operador hipercíclico que encontramos en la literatura fue dado por C. D. Birkhoff [10] en el año 1929. Se trata del operador traslación, que lo denotaremos por T_a y se define como

$$T_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C}),\ T_a f(z) = f(z+a), \text{ con } a \in \mathbb{C}.$$

Podemos comprobar fácilmente que T_a es un lineal. Sabemos además que si una sucesión $\{f_m(z)\}_{m\in\mathbb{N}}$ de funciones enteras converge a una función $f(z)$ uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$, entonces $\{f_m(z+a)\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a la función $f(z+a)$ uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$, por lo que se tiene la continuidad de T_a.

Veamos a continuación el resultado que nos muestra la hiperciclicidad de este tipo de operadores.

Teorema 4.1 (Teorema de Birkhoff). *Para cada $a \in \mathbb{C}$, existe un conjunto G_δ-denso de funciones enteras f, tales que el conjunto de sus trasladadas*

$$\{T_a^n f(z) : n \in \mathbb{N}\} = \{f(z + na) : n \in \mathbb{N}\}$$

es denso en $H(\mathbb{C})$.

Demostración. Usando el Criterio de Hiperciclicidad, tomamos $X = H(\mathbb{C})$, T el operador traslación por a, es decir, $Tf(z) = f(z+a)$ para cada $f \in H(\mathbb{C})$, y S el operador traslación por $-a$. Veamos que se cumplen las hipótesis del teorema:

a) $T \circ Sf(z) = Tf(z-a) = f(z-a+a) = f(z)$, luego $T \circ S = Id$.

b) Para probar esta condición, hay que encontrar un conjunto $\mathcal{D}$ denso en $H(\mathbb{C})$ de manera que T^n y S^n converjan puntualmente a cero en $\mathcal{D}$. Definimos la función entera $f_{m,k}$ para cada par de enteros $k > 0$ y $m \geq 0$ como:

$$f_{m,k}(z) = z^m \left(\frac{\operatorname{sen}(z/k)}{z/k} \right)^{m+1} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Además, fijada m, se tiene que $f_{m,k}(z) \to z^m$ uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$ cuando $k \to \infty$. Y también se tiene que:

$$T^n f_{m,k}(z) = (z+na)^m \left(\frac{\operatorname{sen}(\frac{z+na}{k})}{\frac{z+na}{k}} \right)^{m+1} \to 0 \ (n \to \infty) \text{ en } H(\mathbb{C}),$$

$$S^n f_{m,k}(z) = (z-na)^m \left(\frac{\operatorname{sen}(\frac{z-na}{k})}{\frac{z-na}{k}} \right)^{m+1} \to 0 \ (n \to \infty) \text{ en } H(\mathbb{C}).$$

Hemos probado entonces que las sucesivas potencias de T y S convergen puntualmente a cero en el subespacio vectorial $\mathcal{D}$ generado por $\{f_{m,k} : k > 0, m \geq 0\}$.

Por último, como $f_{m,k}(z) \to z^m$ cuando $k \to \infty$, entonces cualquier polinomio está en el cierre de $\mathcal{D}$, y como los polinomios son densos en $\mathcal{D}$, se tiene que $\mathcal{D}$ es denso en $H(\mathbb{C})$. □

Antes de probar que el operador traslación es caótico, veamos algunos conceptos y resultados previos.

Recordemos que si A es un subconjunto de un espacio vectorial, al subespacio vectorial generado por A lo denotamos por $span(A)$, es decir, el menor subespacio vectorial que contiene a A. Por lo tanto

$$span(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \, : \, n \in \mathbb{N}, \, x_k \in A, \, \alpha_k \in \mathbb{K} \right\}.$$

Además, denotaremos por $\overline{span}(A)$ al subespacio vectorial cerrado generado por A, es decir, el menor subespacio vectorial cerrado que contiene a A.

Veremos ahora una descripción bastante útil del espacio de puntos periódicos de un operador T en términos de autovalores y autovectores, éstos últimos unitarios. El correspondiente resultado es de naturaleza puramente algebraica.

Teorema 4.2. *Sean X un espacio vectorial complejo y T un operador sobre X. El conjunto de puntos periódicos de T viene dado por*

$$Per(T) = span \left\{ x \in X : Tx = e^{\alpha\pi i} x \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Demostración. Para empezar, tomando $\alpha = \frac{2k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$T^n x = e^{\alpha\pi i n} x = e^{\frac{2k}{n}\pi i n} x = e^{2k\pi i} x = x.$$

Luego x es un punto periódico, con lo que se prueba la primera contención.

Para la otra contención, supongamos que $T^n x = x$, $n \in \mathbb{N}$. Ahora, dado el polinomio $z^n - 1$, podemos descomponerlo en producto de monomios, donde λ_k $(k = 1, \ldots, n)$ son las diferentes raíces, de la forma $z^n - 1 = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n)$.

Por resultados algebraicos, sabemos que el sistema $\{p_1(z), \ldots, p_n(z)\}$ de polinomios, donde

$$p_k(z) := \prod_{j \neq k} (z - \lambda_j), \; 1 \leq k \leq n,$$

es una base del espacio de polinomios de grado menor estricto que n. Por lo tanto, dichos $p_k(z)$ son linealmente independientes, es decir, existen $\alpha_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, \ldots, n)$ tales que

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k(z),$$

y si sustituimos z por T se tiene que

$$Id = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k(T).$$

Multiplicando ahora la igualdad por x, obtenemos $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k$ donde $y_k = p_k(T)x$ $(k = 1, \ldots, n)$. Por lo tanto

$$(T - \lambda_k I)y_k = (T - \lambda_k I)\, p_k(T)\, x = (T^n - I)x = 0$$

con $\lambda_k^n = 1$, o lo que es lo mismo, $\lambda_k = e^{\alpha\pi i}$ con $\alpha_k = \frac{2k}{n}$. Es decir, $T_{y_k} = \lambda_k y_k$. Hemos probado pues que $x \in span\{y \in X : Ty = e^{\alpha\pi i}y$ para algún $\alpha \in \mathbb{Q}\}$. $\square$

Para probar que el conjunto de puntos periódicos es denso, necesitamos también el siguiente resultado, donde e_λ denota la función exponencial, es decir,

$$e_\lambda(z) = e^{\lambda z},\ z \in \mathbb{C},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Teorema 4.3. *Sea $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un conjunto con puntos de acumulación. Entonces el conjunto $span\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es denso en $H(\mathbb{C})$.*

Demostración. Como Λ tiene puntos de acumulación, existen $\{\lambda_n\}_n \subset \Lambda$ y $\lambda \in \Lambda$ con $\lambda_n \to \lambda$ y $\lambda_n \neq \lambda$ para todo $n \geq 1$. Así, podemos escribir

$$e^{\lambda_n z} = e^{\lambda z} e^{(\lambda_n - \lambda)z} = e^{\lambda z} + e^{\lambda z}(\lambda_n - \lambda)z + e^{\lambda z}\frac{(\lambda_n - \lambda)^2 z^2}{2!} + \cdots$$

Por tanto, podemos ver que $e^{\lambda_n z} \to e^{\lambda z}$ $(n \to \infty)$ uniformemente en compactos. Entonces, $e_\lambda \in \overline{span}\{e_{\lambda_n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Se tiene también que

$$\frac{e^{\lambda_n z} - e^{\lambda z}}{\lambda_n - \lambda} = e^{\lambda z}z + e^{\lambda z}\frac{(\lambda_n - \lambda)z^2}{2!} + \cdots \to ze^{\lambda z} \quad (n \to \infty)$$

uniformemente en compactos, de modo que la función $z \mapsto ze^{\lambda z}$ pertenece a $\overline{span}\{e_{\lambda_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Si repetimos el proceso k veces, podemos deducir que las funciones $z \mapsto z^k e^{\lambda z}$ pertenecen a $\overline{span}\{e_{\lambda_n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Sea ahora $f \in H(\mathbb{C})$. Entonces se tiene

$$f(z) = e^{\lambda z}(e^{-\lambda z} f(z)) = e^{\lambda z} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k e^{\lambda z}$$

con $a_k \in \mathbb{C}$, $k \geq 0$, de donde se tiene la convergencia en $H(\mathbb{C})$. Entonces, tenemos que $f \in \overline{span}\{e_{\lambda_n} : n \in \mathbb{N}\}$ y, por tanto, $\overline{span}\{e_\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\} = H(\mathbb{C})$, como quería probarse. □

Estamos en condiciones de probar que el conjunto de puntos periódicos del operador traslación es denso. Sea T_a dicho operador, con $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, veamos que e_λ un autovector de T_a asociado al autovalor $e^{a\lambda}$. En efecto, se tiene que $T_a e_\lambda(z) = e_\lambda(z+a) = e^{\lambda(z+a)} = e^{\lambda z} + e^{\lambda a} = e^{\lambda a} e_\lambda(z)$.

Entonces, por el Teorema 4.2, el conjunto de puntos periódicos para T_a contiene al conjunto

$$span\{e_\lambda : e^{a\lambda} = e^{\alpha\pi i} \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{Q}\} = span\{e_\lambda : \lambda = \frac{\pi i \alpha}{a}, \alpha \in \mathbb{Q}\}.$$

Pero este último conjunto es denso en $H(\mathbb{C})$ debido al Teorema 4.3, luego $Per(T_a)$ también lo es. Así, T_a es caótico, puesto que hemos probado previamente que es hipercíclico.

4.2. Operador Derivada

En esta sección trabajaremos con el operador derivada en $H(\mathbb{C})$, que se define como $D : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$, $D(f) = f'$. Denotaremos el conjunto de todas las derivadas de f por

$$\{D^n f : n \geq 0\} = \{f^{(n)} : n \geq 0\}.$$

Obviamente el operador derivada es lineal. Por otro lado, es bien conocido que si una sucesión de funciones enteras $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$, entonces $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f' uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$ (es el Teorema de convergencia de Weierstrass). Por tanto, como el espacio $H(\mathbb{C})$ es métrico, se deduce la continuidad de D.

Veamos ahora la hiperciclicidad de este tipo de operadores (ver [15]).

Teorema 4.4 (Teorema de MacLane). *Existe un conjunto G_δ-denso de funciones enteras f tales que el conjunto de todas sus derivadas $\{f^{(n)} : n \geq 0\}$ es denso en $H(\mathbb{C})$.*

Demostración. Escogemos $X = H(\mathbb{C})$, $\mathcal{D}$ el conjunto de todos los polinomios, T el operador diferencial y S el operador integración definido como

$$Sf(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)dt \quad (f \in H(\mathbb{C}), z \in \mathbb{C}),$$

con $z_0 \in \mathbb{C}$ fijo y la integral tomada a lo largo de un arco rectificable que une z_0 y z. En estas condiciones, veamos que se cumplen las hipótesis del Criterio de Hiperciclicidad. En primer lugar, está claro que al componer el operador integral con el operador derivada, se tiene la identidad en $H(\mathbb{C})$ ($T \circ S = Id_{H(\mathbb{C})}$). Por otra parte, si $p(z)$ es un polinomio, entonces $T^n p(z) = 0$ para todo $n >$ grado(p) y

$$S^n((z-z_0)^m) = \frac{m!(z-z_0)^{m+n}}{(m+n)!} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

luego se tiene la convergencia de T^n y S^n a cero en compactos de $\mathbb{C}$. □

Veamos ahora que el conjunto de puntos periódicos del operador D es denso en $H(\mathbb{C})$. Es claro que e_λ es un autovector de D y λ es el correspondiente autovalor. Así, debido al Teorema 4.2 el conjunto de puntos periódicos del operador derivada contiene al siguiente conjunto

$$span\{e_\lambda : \lambda = e^{\alpha\pi i} \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{Q}\}.$$

Dicho conjunto es denso por el Teorema 4.3, con lo cual se tiene que el operador D es caótico puesto que hemos probado ya que es hipercíclico.

4.3. Operador Backward Shift

Sea X el espacio ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$ o bien el espacio c_0. Se define el operador backward shift, B, sobre X como

$$B(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_2, \ldots, x_n, \ldots).$$

Podemos comprobar que $\|B\| = 1$, donde $\|\cdot\|$ denotará la norma en X. En efecto,

$$\|Bx\| = \|B(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\| = \|(x_2, \ldots, x_n, \ldots)\| \leq$$

$$\leq \|(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\| = \|x\|.$$

Hemos probado entonces que $\|Bx\| \leq \|x\|$ y por tanto que $\|B\| \leq 1$. Pero si tomamos, en particular, si $x = e_2$ se tiene que $B(e_2) = e_1$, por lo tanto $\|B(e_2)\| = \|e_1\| = 1$. Como se alcanza la norma, entonces efectivamente $\|B\| = 1$. Así, se tiene que el operador Backward Shift es continuo y además es obviamente lineal.

Está claro, por el Teorema 3.7, que B no puede ser hipercíclico, ni siquiera aB con $|a| \leq 1$. Sin embargo, Rolewicz probó en 1969 [16] que los múltiplos de B por escalares de módulo mayor que 1 sí son hipercíclicos.

Teorema 4.5. *Sea X el espacio ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$ o bien el espacio c_0. Sea B el operador backward shift en X. Entonces, para cada escalar a con $|a| > 1$, el operador $T = aB$ es hipercíclico en X.*

Demostración. Sea X el espacio ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$ o bien el espacio c_0. Sea R el operador forward shift definido para cada $(x_1, x_2, \ldots) \in X$ como

$$R(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots).$$

Se tiene entonces que

$$B \circ R(x_1, x_2, \ldots) = B(0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots),$$

por tanto $B \circ R = Id_X$.

Consideramos ahora $|a| > 1$ fijo y probaremos el teorema usando el Criterio de Hiperciclicidad. Para ello tomamos $\mathcal{D} = c_{00}$, el espacio de las sucesiones eventualmente nulas, que es denso tanto el ℓ^p como en c_0, y los operadores $T = aB$ y $S = \frac{1}{a}R$. Entonces se tiene fácilmente que $T \circ S = Id_X$.

Por otra parte, como hemos probado anteriormente que $\|B\| = 1$, obtenemos que $\|T\| = \|aB\| = |a|\|B\| = |a|$. De forma análoga, se prueba que $\|R\| = 1$ y así $\|S\| = \frac{1}{|a|}$.

Tenemos entonces, por ser el operador S continuo, que

$$\|S^m x\| \leq \|S^m\|\|x\| = \|S\|^m\|x\| = \frac{\|x\|}{a^m} \to 0 \quad (m \to \infty)$$

para $x \in \mathcal{D}$, puesto que $|a| > 1$.

Por otro lado, podemos observar que si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots)$, entonces se tiene $Tx = (x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots)$ y aplicando este operador m veces, donde $m \geq n$, obtenemos que $T^m x = 0$ y así, $\|T^m x\| = 0$, $\forall m \geq n$ y $T^m x \to 0$ si $x \in \mathbb{N}$.

Concluimos entonces, por el Criterio de Hiperciclicidad, que el operador $T = aB$ es hipercíclico. $\square$

Podemos observar en la prueba de este Teorema que efectivamente se cumple la primera condición del Criterio de Hiperciclicidad, es decir, $T \circ S = Id_X$, donde $T = aB$ y $S = \frac{1}{a}R$. Pero si componemos ambos operadores en sentido contrario, es fácil ver que no se tiene la identidad. En efecto,

$$S \circ T(x_1, x_2, \ldots) = S(ax_2, ax_3, \ldots) = (0, x_2, x_3, \ldots).$$

Como en los casos anteriores, para probar que este operador es caótico, basta comprobar que el conjunto de puntos periódicos de T es denso en X. Para ello, tenemos que ver en primer lugar cuáles son los puntos periódicos de X respecto de T y tras esto ver que el conjunto de los mismos es denso.

Proposición 4.6. *Sea X el espacio ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ o bien el espacio c_0 y sea $x \in X$. Los puntos periódicos de X respecto de T son de la forma*

$$x = (x_1, \ldots, x_N, a^{-N}x_1, \ldots, a^{-N}x_N, a^{-2N}x_1, \ldots, a^{-2N}x_N, \ldots).$$

Demostración. En primer lugar, hay que demostrar que dicho punto es periódico (y de periodo N). En efecto,

$$\begin{aligned} T^N x &= (aB)^N(x_1, \ldots, x_N, a^{-N}x_1, \ldots, a^{-N}x_N, a^{-2N}x_1, \ldots, a^{-2N}x_N, \ldots) = \\ &= a^N B^{N-1}(x_2, \ldots, x_N, a^{-N}x_1, \ldots, a^{-N}x_N, a^{-2N}x_1, \ldots, a^{-2N}x_N, \ldots) = \\ &= a^N B^{N-2}(x_3, \ldots, x_N, a^{-N}x_1, \ldots, a^{-N}x_N, a^{-2N}x_1, \ldots, a^{-2N}x_N, \ldots) = \\ &= \cdots = a^N(a^{-N}x_1, \ldots, a^{-N}x_N, a^{-2N}x_1, \ldots, a^{-2N}x_N, \ldots) = \\ &= (x_1, \ldots, x_N, a^{-N}x_1, \ldots, a^{-N}x_N, a^{-2N}x_1, \ldots, a^{-2N}x_N, \ldots) = x. \end{aligned}$$

A continuación, veamos que todo punto periódico $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$ es de esa forma. En efecto, para $N = 2$ tendríamos

$$
\begin{aligned}
&(aB)x = aB(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = a(x_2, x_3, x_4, \ldots) = (ax_2, ax_3, ax_4, \ldots)\\
&(aB)^2x = a^2B(Bx) = a^2B(x_2, x_3, x_4, \ldots) = a^2(x_3, x_4, \ldots) = (a^2x_3, a^2x_4, \ldots)
\end{aligned}
$$

Como queremos que $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$ sea periódico (y de periodo $N = 2$), entonces $(aB)^2x = x$, por tanto

$$(a^2x_3, a^2x_4, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

Igualando componentes obtenemos

$$
\begin{aligned}
&x_1 = a^2x_3 \Rightarrow x_3 = a^{-2}x_1, \quad x_3 = a^2x_5 \Rightarrow x_5 = a^{-2}x_3 = a^{-4}x_1 \quad \ldots\\
&x_2 = a^2x_4 \Rightarrow x_4 = a^{-2}x_2, \quad x_4 = a^2x_6 \Rightarrow x_6 = a^{-2}x_4 = a^{-4}x_2 \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Entonces, los puntos periódicos para $N = 2$ serían de la forma

$$x = (x_1, x_2, a^{-N}x_1, a^{-N}x_2, a^{-2N}x_1, a^{-2N}x_2, \ldots).$$

Veámoslo ahora para un N genérico. Sea $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$ un punto periódico de periodo N. Aplicando N veces el operador T obtendremos el mismo punto. En efecto

$$
\begin{aligned}
T^Nx &= (aB)^Nx = (a^Nx_{N+1}, a^Nx_{N+2}, \ldots, a^Nx_{2N}, a^Nx_{2N+1}, \ldots)\\
&= (x_1, x_2, \ldots, x_N, x_{N+1}, \ldots)
\end{aligned}
$$

Entonces, igualando las componentes de los vectores, llegamos a

$$
\begin{aligned}
&x_1 = a^Nx_{N+1} \Rightarrow x_{N+1} = a^{-N}x_1,\\
&x_2 = a^Nx_{N+2} \Rightarrow x_{N+2} = a^{-N}x_2,\\
&\vdots\\
&x_N = a^Nx_{2N} \Rightarrow x_{2N} = a^{-N}x_N,\\
&x_{N+1} = a^Nx_{2N+1} \Rightarrow x_{2N+1} = a^{-N}x_{N+1} = a^{-2N}x_1,\\
&x_{N+2} = a^Nx_{2N+2} \Rightarrow x_{2N+2} = a^{-N}x_{N+2} = a^{-2N}x_2,\\
&\vdots\\
&x_{2N} = a^Nx_{3N} \Rightarrow x_{3N} = a^{-N}x_{2N} = a^{-2N}x_N,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Obtenemos pues que el punto periódico x es de la forma

$$(x_1, \dots, x_N, a^{-N}x_1, \dots, a^{-N}x_N, a^{-2N}x_1, \dots, a^{-2N}x_N, \dots).$$

$\square$

Para concluir, vamos a ver que el conjunto de este tipo de puntos es denso.

Proposición 4.7. *El conjunto de puntos periódicos de T es denso en X.*

Demostración. Como c_{00} es denso en X, basta ver que puntos de c_{00} se pueden aproximar por puntos periódicos. En efecto, fijemos

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in c_{00}.$$

Para cada $N \geq n$, sea x_N el punto periódico de aB cuyos N primeras coordenadas coinciden con las de y, es decir

$$x_N = (y_1, y_2, \dots, y_n, 0, \overset{(N-n)}{\dots}, 0, a^{-N}y_1, a^{-N}y_2, \dots, a^{-N}y_n, 0, \overset{(N-n)}{\dots}, 0, \dots).$$

Entonces,

$$x_N - y = (0, \overset{(N-n)}{\dots}, 0, a^{-N}y_1, \dots, a^{-N}y_n, 0, \overset{(N-n)}{\dots}, 0, a^{-2N}y_1, \dots, a^{-2N}y_n, 0, \overset{(N-n)}{\dots}, 0, \dots)$$

y es fácil comprobar que

$$\|x_N - y\| = \sum_{j=1}^{\infty} |a|^{Nj}\|y\| = \frac{|a|^N}{1-|a|^N}\|y\|.$$

Pero como $\frac{|a|^N}{1-|a|^N} \to 0$ $(N \to \infty)$, tenemos lo que buscábamos. $\square$

Hemos probado entonces que el operador aB es caótico.

Bibliografía

Bibliografía fundamental

[1] L. Bernal-González, “Universalidad y Caos”, Curso de Doctorado, 2005.

[2] L. R. Devaney, “An introduction to chaotic dynamical systems”, Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, 1986; second edition, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1989.

[3] K.-G. Grosse-Erdmann y A. Peris, “Linear Chaos”, Springer, 2011.

Otras Referencias

[4] S. I. Ansari, *Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces*, J. Funct. Anal. 148 (1997), 384–390.

[5] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis y P. Stacey, *On Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Monthly 99 (1992), 332–334.

[6] T. Bermúdez, A. Bonilla y A. Peris, *On hypercyclicity and supercyclicity criteria*, Bull. Austral. Math. Soc. 70 (2004), 45–54.

[7] L. Bernal-González, M. C. Calderón-Moreno y J. A. Prado-Bassas, *Cyclicity of coefficient multipliers: linear structure*, Acta Math. Hungar. 114 (2007), 287–300.

[8] J. P. Bés y A. Peris, *Hereditarily Hypercyclic Operators*, J. Funct. Anal. 167 (1999), 94–112.

[9] G. D. Birkhoff, *Surface transformations and their dynamical applications*, Acta Math. 43 (1920), 1–119.

[10] G. D. Birkhoff, *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières,* C. R. Acad. Sci. Paris 189 (1929), 473–475.

[11] R. M. Gethner y J. H. Shapiro, *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), 281–288.

[12] G. Godefroy y J. H. Shapiro, *Operators with dense invariant cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. 98 (1991), 229–269.

[13] K.-G. Grosse-Erdmann, *Universal families and hypercyclic operators*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 36 (1999), 345–381.

[14] C. Kitai, "Invariant Closed Sets for Linear Operators", Thesis, Univ. Toronto, 1982.

[15] G. R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families*, J. Analyse Math. 2 (1952), 72–87.

[16] S. Rolewicz, *On orbits of elements*, Studia Math. 32 (1969), 17-22.

[17] M. de la Rosa y C. Read, *A hypercyclic operator whose direct sum $T \oplus T$ is not hypercyclic*, J. Operator Th. 61 (2009), 369–380.