FACULTAD DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

TRABAJO FIN DE GRADO

"Espacios de Alexandrov: El puente entre poliedros y conjuntos ordenados"

AUTOR: *Álvaro Luque Amaro*
TUTOR: *D. Antonio Quintero Toscano*

CONVOCATORIA: *1ª Junio*

El alumno | El tutor

Álvaro Luque Amaro | Antonio Quintero Toscano

Presentación

Este trabajo de fin de grado es el resultado de un seminario informal sobre los primeros capítulos de las notas de J.P. May ([15]) que nos dio a conocer amablemente el Prof. M. Cárdenas.

El progreso del seminario se ha ajustado bastante bien con las asignaturas de topología cursadas por el alumno. Así, los tres primeros capítulos sólo requieren los conocimientos del curso de topología del primer año del grado y unas pocas nociones del curso sobre geometría y topología de superficies del tercer año, por lo que un repaso de estos cursos ha sido suficiente para el alumno. Cuando estos capítulos estaban prácticamente cerrados, el alumno ya conocía por el curso de homología simplicial del cuarto año los rudimentos de la topología simplicial usados en los capítulos 4 y 5. Sólo la última sección del quinto capítulo ha requerido conocer muy someramente la teoría de finales y las nociones más elementales de la categoría propia, temas que quedan fuera del grado.

Los espacios de Alexandrov y en especial los espacios finitos son un tema de estudio muy apropiado para que los alumnos del grado interesados en topología se inicien en la investigación, pues siendo accesible a estudiantes de último año, contiene problemas de importancia y está relacionado con investigaciones relevantes en otras áreas.

El Tutor

Índice general

Resumen

En este trabajo se estudia la topología básica de los espacios finitos y, más generalmente, los espacios de Alexandrov (también llamados A-espacios). Se comienza con los elementos de la topología de Alexandrov, incluyendo su equivalencia con los preórdenes. Se sigue con una detallada exposición de la relación entre A-espacios y complejos simpliciales descubierta por McCord y Stong, y algunas de las recientes extensiones y mejoras de este resultado. El trabajo termina con nuevas ideas sobre el infinito de los A-espacios localmente finitos que parecen no haber sido consideradas hasta ahora en la literatura matemática.

Abstract

In this work, the basic properties of finite spaces and, more generally, Alexandrov spaces (also termed A-spaces) are explored. It starts with the elements of the Alexandrov-type topologies including their equivalence with the preordered sets. It continues with a detailed account of the relationship between A-spaces and polyhedra owed to McCord and Stong, and some of the recent extensions and improvements to this result. This work ends with new ideas about the infinity of locally finite A-spaces which seem not to have been considered in the mathematical literature.

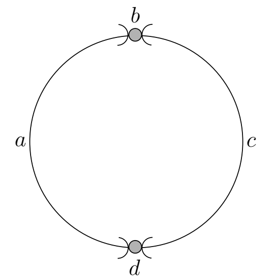
Introducción

Las relaciones de orden son estructuras que aparecen en muy variados contextos de las Matemáticas. Es conocido el procedimiento de asignar a un conjunto ordenado un poliedro (complejo orden) y usar la topología de éste para estudiar el conjunto original (ver [23]). Sin embargo, es mucho menos frecuente estudiar los conjuntos ordenados usando la topología intrínseca que poseen. Esta topología fue analizada por primera vez en 1937 por P.S. Alexandrov ([1]) e independientemente por A.W. Tucker ([22]), quienes demostraron que los conjuntos ordenados podían ser identificados como aquellos espacios topológicos en los que la intersección arbitraria de abiertos era también un conjunto abierto. Así pues todos los espacios finitos corresponden a los conjuntos ordenados finitos.

Originalmente Alexandrov denominó a esos espacios "espacios discretos", pero pasaron a llamarse espacios de Alexandrov o A-espacios debido a que la terminología original se reserva actualmente sólo a aquellos espacios cuyos conjuntos unitarios son todos abiertos. Los espacios discretos son entonces los únicos A-espacios dotados de la propiedad de separación de Hausdorff. Quizás debido a que los espacios métricos, los espacios del análisis y la geometría, poseen esta propiedad, los A-espacios quedaron olvidados tras el trabajo inicial de Alexandrov.

Después de treinta años en el que la sola referencia relevante sobre A-espacios seguía siendo el artículo de Alexandrov, aparecieron dos trabajos sobre la topología algebraica de los A-espacios debidos a M. McCord ([16]) y R. Stong ([21]). En el primero se probó que los invariantes algebraicos de cualquier poliedro compacto (por ejemplo, la homología) pueden ser realizados en algún espacio finito, y en el segundo se estudió combinatoriamente el tipo de homotopía de los espacios finitos a partir de su orden asociado. El punto crucial en los resultados de McCord y Stong es que, a pesar del fallo de la propiedad de Hausdorff, los A-espacios tienen propiedades de conexión sorprendentemente similares a los espacios de interés de la topología algebraico-geométrica.

De esta manera se llega al hecho, muy alejado de nuestra intuición euclídea, de que un espacio con sólo cuatro puntos tenga homología no trivial. La explicación de este fenómeno está en la "adherencia" que lleva aparejada toda estructura topológica. Así si sobre un conjunto un de cuatro puntos $X = \{a, b, c, d\}$ se considera una topología donde b y d son adherentes a a y a c (esto es, están en las clausuras de los conjuntos unitarios $\{a\}$ y $\{c\}$). Es algo así como considerar que la circunferencia unidad consta de cuatro "puntos": b el polo norte, d el polo sur, a el arco abierto de la izquierda de b a d y c el arco abierto de la derecha.



Pero mantenemos la "tensión" que hace que la circunferencia sea de una sola pieza, esto es, que b y d están adheridos tanto a a como a c.

También podemos imaginar esta adherencia mediante una experiencia incómoda de la vida ordinaria: b y d son "chicles" pegados a los "zapatos" a y c. Ahora "vemos" que el espacio es conexo e incluso una trayectoria cerrada continua en él que empieza en b, en el intervalo $(0, \frac{1}{2})$ está en a, en $\frac{1}{2}$ pasa a d, continúa con el intervalo $(\frac{1}{2}, 1)$ en c y en 1 llega a b otra vez.

Los trabajos de McCord y Stong no sacaron del olvido a los A-espacios, y el trabajo de K.A. Hardie y J.J.C. Vermeulen [10] de 1993 parece ser la única referencia de interés sobre A-espacios, aunque estos ya empezaban a ser usados para dotar de un lenguaje topológico al análisis de imágenes digitales. Pensemos que una imagen digital es un conjunto finito de píxeles en una pantalla de ordenador. El retículo de los píxeles de la pantalla es dotado de unas relaciones de adyacencia con el fin de buscar algoritmos para los procesamientos de imágenes digitales como son el adelgazamiento o el reconocimiento de bordes. E. Khalimsky dotó a las imágenes digitales de una topología de Alexandrov y expresó en términos topológicos la adyacencia de píxeles (ver ([12]).

En paralelo con el interés por el uso de los A-espacios en la topología digital, el estudio de estos espacios desde el punto de vista puramente teórico se revitalizó con la aparición en 2003 de unas notas de J.P. May sobre espacios finitos ([14]). En ellas se muestra cómo la clase de los A-espacios, aparentemente marginal, encaja sin esfuerzo en el marco de trabajo de la topología algebraica. Ver [15] para consultar un diagrama panorámico de las interconexiones de los A-espacios con otros objetos habituales en esta especialidad.

Este trabajo no pretende explorar el mencionado diagrama (la mayor parte del cual queda fuera de un grado en matemáticas), conformándonos con recopilar de manera detallada las nociones básicas de la topología de los A-espacios y poner en contexto algunas contribuciones recientes de los siguientes autores contenidas en los trabajos citados: J. Barmak y G. Minian ([2]), E. Wofsey ([24]), M.J. Kukiela ([13]) y E. Clader ([5]). Esta tarea expositiva ocupa todo el trabajo salvo la última sección que propone un tratamiento de la topología del infinito de los A-espacios que parece novedoso y cuyo eventual desarrollo podría ser de interés.

Pasamos a detallar el contenido del trabajo:

El **capítulo 1** recoge la terminología básica de topología general, necesaria para el trabajo. Los resultados que se presentan sin demostración están incluidos en las asignaturas de topología del grado. Las demostraciones que aparecen corresponden a resultados fuera del programa de estas asignaturas, pero que bien podrían ser ejercicios de las mismas.

En el **capítulo 2** se introducen las propiedades elementales de los espacios de Alexandrov (A-espacios), prestando especial atención a los espacios finitos, de los que se incluye su clasificación por tipos de homeomorfía en términos de matrices, dada por Stong.

En el **capítulo 3** se da el conocido teorema de Alexandrov, y algunas de sus consecuencias. Este teorema afirma que los A-espacios son exactamente los conjuntos preordenados, y aquellos que corresponden a los conjuntos parcialmente ordenados (posets) son los A-espacios T_0 (A_0-espacios). Esta equivalencia se establece con el lenguaje de categorías y funtores que no es habitual su conocimiento en el grado, salvo en asignaturas optativas.

Entre las consecuencias del teorema de Alexandrov aquí recogidas, podemos mencionar la codificación de A-espacios por medio de diagramas de Hasse y la reducción de los tipos de homotopía de los espacios finitos a tipos de homeomorfía debida a Stong.

El **capítulo 4** presenta la relación entre A-espacios y complejos simpliciales mediante el Teorema de McCord. Este teorema afirma que todo A-espacio X tiene asociado un poliedro $P(X)$ y una aplicación $\psi : P(X) \to X$ tal que para todo poliedro Q, la aplicación inducida $\psi_* : [Q, P(X)] \to [Q, X]$ ($\psi_*[f] = [\psi \circ f]$) entre clases de homotopías, es una biyección. Es bien conocido en topología algebraica que este hecho hace que ψ induzca isomorfismos entre los invariantes algebraicos de $P(X)$ y X. Para ello, necesitamos ampliar ligeramente el conocimiento de la topología simplicial adquirida en el grado.

El **capítulo 5** reúne recientes extensiones y mejoras de resultados contenidos en los capítulos 4 y 5, en especial aquellas en relación con el teorema de McCord debidas a Wofsey y Clader. Terminamos el trabajo con una propuesta para tratar la topología del infinito desde la perspectiva de los A-espacios que parece ser nueva en la literatura.

Capítulo 1

Preliminares de Topología General

En este capítulo se recogen las definiciones y resultados que forman la terminología básica de este trabajo. Los detalles pueden consultarse en cualquier texto de topología general (por ejemplo, [18] o [7]). Aquí sólo aparecen las demostraciones de aquellos resultados concernientes a bases minimales, que no suelen aparecer en la bibliografía habitual por carecer de interés desde el punto de vista de la topología continua subyacente al análisis y la geometría.

1.1. Espacios Topológicos

Definición 1.1.1. Una topología sobre un conjunto X es una familia de subconjuntos de X, $\mathcal{T}$, que cumple las siguientes propiedades:

1. $\emptyset$ y X están en $\mathcal{T}$.

2. La intersección finita de conjuntos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

3. La unión arbitraria de conjuntos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

Al par $(X, \mathcal{T})$ se le llama *espacio topológico*. Los conjuntos de $\mathcal{T}$ son llamados *conjuntos abiertos de* $(X, \mathcal{T})$.

Notación. Cuando la topología $\mathcal{T}$ se supone implícitamente, o no es relevante en el contexto, denotamos simplemente por X al espacio topológico, que también es abreviadamente referido como "espacio".

Los dos ejemplos extremos de topología son los siguientes:

- La *topología discreta* en X es la topología en la que todos los conjuntos son abiertos, o equivalentemente, todos los conjuntos unitarios son abiertos.

- La topología *indiscreta* o *trivial* en X es la topología en la que únicamente $\emptyset$ y X son los abiertos.

Es obvio que la topología discreta es la mayor topología posible, y la indiscreta, la menor.

Recordemos que un espacio topológico X se dice *compacto* si de todo recubrimiento de X por abiertos se puede extraer un subrecubrimiento finito.

Definición 1.1.2. Al complementario de un conjunto abierto en el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se le llama *conjunto cerrado.*

Nótese que una topología es discreta si y sólo si cualquier conjunto es cerrado.

La familia $\mathcal{F}$ de cerrados de un espacio cumple las siguientes propiedades:

1. $\emptyset$ y X están en $\mathcal{F}$.
2. La unión finita de conjuntos de $\mathcal{F}$ está en $\mathcal{F}$.
3. La intersección arbitraria de conjuntos de $\mathcal{F}$ está en $\mathcal{F}$.

Definición 1.1.3. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, dados $A \subseteq X$ y $x \in X$, se dice que x es *interior a* A en $(X, \mathcal{T})$ (o que A es *entorno* de x) si existe un abierto G con $x \in G \subseteq A$. Se llama *interior* de A en $(X, \mathcal{T})$ al conjunto $int(A) = \{x \in X; x \text{ es interior a } A\}$. Una familia $\mathcal{V}$ de entornos de x se dice *base de entornos* de x si para todo entorno N de x, existe $V \in \mathcal{V}$ con $V \subseteq N$.

Igualmente, $x \in X$ es llamado *punto adherente* a A si todo abierto G con $x \in G$ cumple $G \cap A \neq \emptyset$. Se llama *clausura* de A al conjunto $\overline{A} = \{x \in X; x \text{ es adherente a } A\}$.

Lema 1.1.4. Se cumple que $int(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}$. Un conjunto $A \subseteq X$ es *cerrado* en $(X, \mathcal{T})$ si y sólo si $\overline{A} = A$ y es abierto si y sólo si $int(A) = A$.

Definición 1.1.5. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y sea $A \subseteq X$. La topología sobre A,

$$\mathcal{T}_A = \{A \cap G; G \in \mathcal{T}\}$$

se denomina *topología relativa* a A. Al par $(A, \mathcal{T}_A)$ se le llama *subespacio topológico* de $(X, \mathcal{T})$.

Nota 1.1.6. Obsérvese que si A es abierto en $(X, \mathcal{T})$, entonces todo abierto de $(A, \mathcal{T}_A)$ lo es de $(X, \mathcal{T})$.

Proposición 1.1.7. Se tiene que $C \subseteq A$ es cerrado en $(A, \mathcal{T}_A)$ si y sólo si $C = F \cap A$, con F cerrado de $(X, \mathcal{T})$. En particular, si A es cerrado de $(X, \mathcal{T})$, entonces todo cerrado de $(A, \mathcal{T}_A)$ es cerrado de $(X, \mathcal{T})$. Además, si $B \subseteq A$ entonces la clausura de B en $(A, \mathcal{T}_A)$ coincide con $\overline{B} \cap A$.

Definición 1.1.8. Un subconjunto A de un espacio X se dice que es *denso* en X si $\overline{A} = X$.

1.2. Base de y para una topología

La topología de los espacios de interés (por ejemplo, los espacios métricos) no está dada explícitamente sino descrita a partir de ciertos abiertos generadores de acuerdo con la siguiente definición.

Definición 1.2.1. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, una subfamilia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ se dice que es una *base* de la topología $\mathcal{T}$ (o *base de abiertos*) si todo abierto no vacío de $\mathcal{T}$ es unión de abiertos de $\mathcal{B}$.

Lema 1.2.2. $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$ si y sólo si para cada abierto U y para cada $x \in U$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Definición 1.2.3. Una *base* $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ se dice *minimal* si para cualquier $B \in \mathcal{B}$ la familia $\mathcal{B} - \{B\}$ deja de ser base de $\mathcal{T}$.

Ejemplo 1.2.4. Una base de la topología discreta es la formada por todos los conjuntos unitarios $\{x\}$, $x \in X$. Además, esta base es minimal.

Ejemplo 1.2.5. El conjunto de las bolas de radio $r > 0$, es decir, $B_d(x, r) = \{y; d(x, y) < r\}$ es una base de la topología en un espacio métrico X.

Ejemplo 1.2.6. Si $\mathcal{B}$ es una base de $(X, \mathcal{T})$ y $A \subseteq X$, entonces $\mathcal{B}_A = \{B \cap A; B \in \mathcal{B}\}$ es una base de la topología relativa $\mathcal{T}_A$.

A la hora de definir una estructura topológica sobre un conjunto se usa habitualmente la siguiente noción.

Definición 1.2.7. Una *base* $\mathcal{B}$ para una topología sobre X es una colección de subconjuntos de X, llamados *elementos básicos*, que cumplen las siguientes propiedades:

1. Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico B que contiene a x.

2. Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2, entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x, tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Si $\mathcal{B}$ satisface estas dos condiciones, la familia $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ formada por los conjuntos $U \subseteq X$ tales que para cada $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subseteq U$, es la única topología sobre X que tiene a $\mathcal{B}$ como base y se denomina *topología generada por* $\mathcal{B}$.

Añadiendo una tercera condición a la Definición 1.2.7 se tiene la siguiente caracterización de base minimal para una topología:

Lema 1.2.8. Un conjunto $\mathcal{B}$ de subconjuntos no vacíos de X es una *base minimal* para una topología si y sólo si se cumplen las tres propiedades siguientes:

1. Todo punto de X está en algún conjunto B de $\mathcal{B}$.

2. Si x pertenece a la intersección de dos elementos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

3. Si una unión de conjuntos B_i de $\mathcal{B}$ está también en $\mathcal{B}$, entonces la unión es igual a uno de los B_i.

Demostración. Las dos primeras condiciones son las de la Definición 1.2.7.

Vamos a probar ahora la tercera condición. Supongamos que la base $\mathcal{B}$ no cumple la propiedad (3), es decir, existe algún $B' \in \mathcal{B}$ con $B' = \cup_{i \in I} B_i, B_i \in \mathcal{B}$ y $B' \neq B_i$, para todo $i \in I$. Entonces, la familia $\mathcal{B} - \{B'\}$ sigue siendo base de la la topología $\mathcal{T}(\mathcal{B})$, luego $\mathcal{B}$ no es minimal.

Recíprocamente, si se cumple (3) y $\mathcal{B}'$ una base de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ con $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$, dado cualquier $B \in \mathcal{B}$ tenemos $B = \cup_{\alpha \in \Lambda} B'_\alpha$ con $B'_\alpha \in \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ por ser $\mathcal{B}'$ base. Entonces por la condición (3), existe $\alpha_0 \in \Lambda$ con $B = B'_{\alpha_0} \in \mathcal{B}'$. Es decir, $B \in \mathcal{B}'$, y por tanto $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. □

Definición 1.2.9. La *topología de la unión* sobre $X \sqcup Y$ tiene como base la familia formada por los conjuntos abiertos de X, unión con los conjuntos abiertos de Y. En particular, si $\mathcal{B}_1$ es una base de la topología de X y $\mathcal{B}_2$ una base de la topología de Y, entonces $\mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2 = \{B \sqcup B'; B \in \mathcal{B}_1, B' \in \mathcal{B}_2\}$ es base de la topología de la unión $X \sqcup Y$.

Lema 1.2.10. Si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son minimales, también lo es $\mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2$.

Demostración. Para ver que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2$ es una base minimal de $X \sqcup Y$ usaremos el Lema 1.2.8. Sea $B \in \mathcal{B}$ que se puede escribir como una unión $B = \cup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$ con $B_\alpha \in \mathcal{B}$. Si $B \in \mathcal{B}_i$ $(i = 1, 2)$ entonces, necesariamente, $B_\alpha \in \mathcal{B}_i$ para todo α. Ahora aplicamos que $\mathcal{B}_i$ es minimal y existe $\alpha_0 \in \Lambda$ con $B = B_{\alpha_0}$. □

Definición 1.2.11. La *topología producto* sobre $X \times Y$ es la topología que tiene como base los productos $U \times V$, siendo U un abierto de X, y V un abierto de Y. En particular, si $\mathcal{B}_1$ es una base de la topología de X y $\mathcal{B}_2$ una base de la topología de Y, entonces $\mathcal{B}_1 \star \mathcal{B}_2 = \{B \times B'; B \in \mathcal{B}_1, B' \in \mathcal{B}_2\}$ es base de la topología producto $X \times Y$.

Lema 1.2.12. Si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son minimales, también lo es $\mathcal{B}_1 \star \mathcal{B}_2$.

Demostración. Para ver que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \star \mathcal{B}_2$ es una base minimal de $X \times Y$ usaremos el Lema 1.2.8. Sea $B_1 \times B_2 \in \mathcal{B}$ que se puede escribir como una unión de elementos de $\mathcal{B}$, $B_1 \times B_2 = \cup_{\alpha \in \Lambda} B_1^\alpha \times B_2^\alpha$. Usando las proyecciones $p_1 : X \times Y \to X$ y $p_2 : X \times Y \to Y$, tenemos $B_1 = p_1(B_1 \times B_2) = p_1(\cup_{\alpha \in \Lambda} B_1^\alpha \times B_2^\alpha) = \cup_{\alpha \in \Lambda} B_1^\alpha$ y, análogamente, $B_2 = \cup_{\alpha \in \Lambda} B_2^\alpha$. Ahora aplicamos que $\mathcal{B}_i$ $(i = 1, 2)$ es minimal y existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$ con $B_i = B_{\alpha_i}$ $(i = 1, 2)$.

Así pues los subconjuntos de índices $\Lambda_1 = \{\alpha \in \Lambda; B_1 = B_\alpha\}$ y $\Lambda_2 = \{\alpha \in \Lambda; B_2 = B_\alpha\}$ son no vacíos. Afirmamos que la intersección $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ tampoco lo es. En tal caso, tendríamos $B_1 \times B_2 = B_1^\alpha \times B_2^\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ y terminaríamos así la demostración.

Queda comprobar que $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 \neq \emptyset$. En efecto, si no es así $\Lambda = (\Lambda - \Lambda_1) \cup (\Lambda - \Lambda_2)$ y $B_1 \times B_2$ se puede escribir como una unión $B_1 \times B_2 = U_1 \cup U_2$ donde $U_i = \cup_{\alpha \in \Lambda - \Lambda_i} B_1^\alpha \times B_2^\alpha$ $(i = 1, 2)$. Aplicando de nuevo las proyecciones p_i $(i = 1, 2)$, obtenemos una contención estricta $p_i(U_i) = \cup_{\alpha \in \Lambda - \Lambda_i} B_i^\alpha \subsetneq B_i$ ya que en caso de igualdad la minimalidad de $\mathcal{B}_i$ nos implicaría que existe $\alpha \notin \Lambda_i$ con $B_i^\alpha = B_i$, que contradice la definición de Λ_i. Por tanto deben existir $x_0 \in B_1 - p_1(U_1)$ e $y_0 \in B_2 - p_2(U_2)$. Es decir, $(x, y_0) \notin U_2$ y $(x_0, y) \notin U_1$ para todo $x \in B_1$ y todo $y \in B_2$. Entonces $(x_0, y_0) \in B_1 \times B_2 = U_1 \cup U_2$ nos lleva a que $(x_0, y_0) \in U_1$ ó $(x_0, y_0) \in U_2$, que contradice la elección de x_0 e y_0. □

Nota 1.2.13. Para el caso de la topología relativa, no se cumple en general que si tenemos una base minimal de un espacio $(X, \mathcal{T})$ se tenga que la base restricción de ella (ver Ejemplo 1.2.6) sea minimal. De hecho, se sabe que todo espacio $(X, \mathcal{T})$ con una base dada $\mathcal{B}$ es topológicamente equivalente a un subespacio denso de algún espacio $(Y, \mathcal{T}')$ con una base minimal $\mathcal{B}'$ tal que $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \mid_X$ (ver [8]).

1.3. Axiomas de Separación

Es bien sabido que la unicidad de puntos límite, crucial en tantos resultados de análisis, es consecuencia de la famosa *propiedad de separación de Hausdorff*. Decimos que un espacio X tiene esta propiedad (o que es un *espacio* T_2) si para dos puntos distintos cualesquiera $x, x' \in X$ existen abiertos G_1, G_2 de X tales que $x \in G_1$, $y \in G_2$ y $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

La nomenclatura T_2 se debe a que la propiedad de Hausdorff es parte de una jerarquía de propiedades de separación que van de T_0 a T_5, estando los espacios métricos en lo más alto de la escala.

En contraste con el punto de vista habitual, dominado por los espacios métricos, los espacios de los que nos ocuparemos en este trabajo sólo tienen interés si ocupan el nivel más bajo de las escala, el T_0. El espacio discreto es el único entre ellos que aparece en un nivel superior (ver Lema 2.1.1, más adelante). Recordemos la definición de las propiedades de separación más débiles que T_2.

Definición 1.3.1. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

1. X es un *espacio* T_0 si para dos puntos distintos $x, y \in X$, existe un abierto G tal que, o bien $x \in G$ y $y \notin G$, o bien $y \in G$ y $x \notin G$.

2. X es un *espacio* T_1 si dados dos puntos distintos $x, y \in X$, existen abiertos $G_1, G_2 \in (X, \mathcal{T})$ tales que: $x \in G_1, y \notin G_1$, y también $y \in G_2, x \notin G_2$.

Obviamente, $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$. Además,

Lema 1.3.2. $(A, \mathcal{T}_A)$ es un espacio T_i si $(X, \mathcal{T})$ también es un espacio T_i, $i = 0, 1, 2$.

Lema 1.3.3. Se tienen las siguientes equivalencias:

1. X es T_0 si y sólo si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ o bien $x \notin \overline{\{y\}}$, o bien $y \notin \overline{\{x\}}$.

2. X es T_1 si y sólo si para todo $x \in X$, entonces $\{x\}$ es cerrado, es decir, $\{x\} = \overline{\{x\}}$, lo que a su vez equivale a pedir que para todo $x \in X$, $\{x\} = \cap_{x \in \mathcal{G}_x} G$ siendo $\mathcal{G}_x$ la familia de abiertos que contiene a x.

3. X es T_2 si y sólo si para todo $x \in X$, $\{x\} = \cap_{G \in \mathcal{G}_x} \overline{G}$.

1.4. Aplicaciones continuas y Homeomorfismos

Por medio de una topología se da una estructura de proximidad entre los puntos de un conjunto. La aplicaciones continuas entre espacios topológicos son aquellas que preservan la proximidad. Recordamos aquí la definición general de continuidad.

Definición 1.4.1. Sean X e Y dos espacios topológicos. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es *continua* si $f^{-1}(V)$ es un abierto de X, para cada abierto V de Y.

Una aplicación continua f es un *homeomorfismo* si f es biyectiva y su inversa f^{-1} es también continua.

Lema 1.4.2. Todo homeomorfismo $f : X \to Y$ transforma una base $\mathcal{B}$ de abiertos de X en una base de abiertos de Y, $\mathcal{B}_f = \{f(B); B \in \mathcal{B}\}$. Si $\mathcal{B}$ es una base minimal de X, entonces $\mathcal{B}_f$ también es minimal.

Demostración. Usaremos el Lema 1.2.8 para probar la minimalidad. Sea $f(B) = \cup_{\alpha \in \Lambda} f(B_\alpha)$, con $B, B_\alpha \in \mathcal{B}$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Por ser f biyectiva $B = \cup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$ y por ser minimal $B = B_{\alpha_0}$ para algún $\alpha_0 \in \Lambda$, y por ello $f(B) = f(B_{\alpha_0})$. □

Una clase especial de aplicaciones continuas son aquellas que determinan la topología del espacio de llegada en función de la topología del dominio de la aplicación (en particular, esta clase incluye a los homeomorfismos). Estas aplicaciones son las llamadas *aplicaciones cociente*. Recordemos su definición.

Definición 1.4.3. Sean X e Y espacios topológicos y sea $p : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva. La aplicación p se dice que es una *aplicación cociente* (o *de identificación*) si un subconjunto $U \subseteq Y$ es abierto en Y si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en X.

Definición 1.4.4. Si X es un espacio, Y un conjunto y $p : X \to Y$ es una aplicación sobreyectiva, entonces existe exactamente una topología $\mathcal{T}$ sobre Y respecto a la cual p es una aplicación cociente; se denomina *topología cociente* inducida por p.

En particular, si "$\sim$" es una relación de equivalencia sobre un espacio topológico X, el conjunto cociente $X/\sim$ con la topología cociente inducida por la proyección natural $p : X \longrightarrow X/\sim$ se denomina *espacio cociente* de X.

Podemos describir la topología cociente de otro modo: Un subconjunto U de $X/\sim$ es una colección de clases de equivalencia, y el conjunto $p^{-1}(U)$ es justo la unión de los representantes de las clases pertenecen a U. Así, el conjunto abierto característico de $X/\sim$ es una colección de clases de equivalencia cuya unión es un conjunto abierto de X.

Nótese que $p : X \longrightarrow Y$ es una aplicación cociente si y sólo si Y es homeomorfo al espacio cociente $X/\sim$ donde "$\sim$" es la relación de equivalencia definida por $x \sim x'$ si $p(x) = p(x')$.

La siguiente propiedad es característica de los espacios cociente.

Proposición 1.4.5. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua compatible con la relación de equivalencia "$\sim$" sobre X, es decir, $f(x) = f(x')$ si $x \sim x'$. Entonces la aplicación $\widetilde{f} : X/\sim \longrightarrow Y$ dada por $\widetilde{f}([x]) = f(x)$ (llamada *aplicación inducida por* f) es continua para la topología cociente.

1.5. Conexión y Contractibilidad

Incluimos en esta sección las nociones de espacio conexo y espacio contráctil para su consideración posterior en la clase de los espacios de Alexandrov.

Definición 1.5.1. Un *camino* en un espacio X, con punto inicial $x \in X$ y punto final $x' \in X$, es una aplicación continua $\sigma : I \longrightarrow X$, donde $I = [0, 1]$ es el intervalo unidad euclídeo, tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = x'$. En tal situación diremos que los puntos x y x' se pueden unir por un camino. Diremos que un espacio es *conexo por caminos* si dos puntos arbitrarios de él se pueden unir por un camino. Un subconjunto $A \subseteq X$ se llamará conexo por caminos si lo es con respecto a su topología relativa.

Un espacio X es *localmente conexo por caminos* si para todo $x \in X$ y todo entorno N de x existe otro entorno N' de x que es conexo por caminos y $N' \subseteq N$.

Nota 1.5.2. La relación entre los puntos de X "estar unidos por un camino" es de equivalencia. En efecto, la *propiedad reflexiva* se deduce del camino constante $c(t) = x$ para todo $t \in [0, 1]$.

Sea $\sigma : I \to X$ un camino que une x y x'; entonces la aplicación $\overline{\sigma} : I \to X$ definida por $\overline{\sigma}(t) = \sigma(1 - t)$ es un camino cuyo punto inicial es x' y su final es x. Esto prueba la *propiedad simétrica.*

Finalmente, para demostrar la *propiedad transitiva*, dados $\sigma_1 : I \to X$ un camino que une x con x' y $\sigma_2 : I \to X$ un camino que une x' con x''. Entonces, la yuxtaposición de caminos $\sigma : I \longrightarrow X$ definida por:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_1(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \sigma_2(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

es un camino que une x con x''.

Se llama *componente conexa por caminos* de X al conjunto de puntos que pertenecen a una misma clase de equivalencia bajo la relación anterior.

Definición 1.5.3. Un espacio X se dice *disconexo* si se puede descomponer como la unión disjunta de dos conjuntos abiertos (o, equivalentemente, cerrados) disjuntos y no vacíos. En caso contrario se dirá que es *conexo*. Es claro que X es conexo si y sólo si los únicos conjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados son X y $\emptyset$.

Puesto que todo intervalo euclídeo es conexo, se sigue inmediatamente la siguiente proposición.

Proposición 1.5.4. Todo espacio conexo por caminos es conexo.

Para los espacios localmente conexos por caminos se tiene la equivalencia de ambas nociones de conexión. Esto es:

Proposición 1.5.5. Sea X un espacio localmente conexo por caminos. Entonces X es conexo si y sólo si es conexo por caminos.

Una noción mucho más fuerte que la conexión por caminos es la contractibilidad. Recordemos la definición.

Definición 1.5.6. Dos aplicaciones continuas $f, g : X \to Y$ se dicen *homotópicas* si existe una aplicación continua

$$H : X \times [0,1] \to Y$$

tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$, para todo $x \in X$. La aplicación H se llama *homotopía* entre f y g, y la relación de ser homotópicas se denotará por $f \simeq g$. Una *homotopía* se dice *constante sobre* un conjunto $A \subseteq X$ si $H(x,t) = f(x)$ para todo t.

Nota 1.5.7. La relación de homotopía es de equivalencia. En efecto, la *propiedad reflexiva* se deduce de la homotopía constante $H(x,t) = f(x)$ para todo $t \in [0,1]$.

Sea $H : X \times I \to Y$ una homotopía entre f y g; entonces la aplicación $\overline{H} : X \times I \to Y$ definida por $\overline{H}(t) = H(x, 1-t)$ es una homotopía entre g y f. Esto prueba la *propiedad simétrica.*

Finalmente, para demostrar la *propiedad transitiva*, dadas las homotopías $G : X \times I \to Y$ entre f y f' y $H : X \times I \to Y$ entre f' y f''. Entonces, la yuxtaposición de homotopías $F : X \times I \longrightarrow X$ definida por:

$$F(x,t) = \begin{cases} G(x,2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H(x,2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

es una homotopía entre f con f''.

Definición 1.5.8. Una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es una *equivalencia de homotopía* (o que X e Y son *homotópicamente equivalentes*) si existe $g : Y \longrightarrow X$ continua tal que $f \circ g \simeq id_Y$ y $g \circ f \simeq id_X$.

Un espacio X se dice que es *contráctil* si es homotópicamente equivalente a un espacio puntual. Es inmediato que esta condición es equivalente a afirmar que la identidad id_X es homotópica a una aplicación constante $c : X \to X$.

Definición 1.5.9. Un subespacio $A \subseteq X$ de un espacio X se dice un *retracto* de X si existe una aplicación continua $r : X \to A$ (llamada *retracción*) tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$. Esto es, si $i : A \to X$ es la inclusión, $r \circ i$ es la identidad de A. Se dice que A es un *retracto de deformación* de X si además la composición $i \circ r$ es homotópica a la identidad de X.

Si Y^X denota el conjunto de las aplicaciones continuas de X en Y, toda homotopía $h : X \times I \to Y$ induce una aplicación $\widehat{h} : I \to Y^X$ definida por $\widehat{h}(t)(x) = h(x,t)$. De esta manera si se dota a Y^X de una topología apropiada para que la aplicación $\widehat{h}$ sea continua se podrá identificar homotopías entre f y g con caminos en Y^X entre f y g.

Ello se consigue con la llamada *topología compacto-abierto* que es la topología generada por todas las intersecciones finitas de la forma $\cap_{i=1}^n \langle K_i, U_i \rangle$ siendo, para cada i, K_i y U_i conjuntos compactos y abiertos de X e Y, respectivamente, y $\langle K, U \rangle = \{f \in Y^X ; f(K) \subseteq U\}$. Para la topología compacto-abierto se tiene el siguiente resultado, conocido como *ley exponencial*; ver ([18]; Teorema 46.11). Recordemos que un espacio X se dice *localmente compacto* si para todo punto $x \in X$ y para todo entorno N de x existe un entorno más pequeño de x, $N' \subseteq N$, que es compacto. El teorema dado en [18] exige la propiedad de Hausdorff, pero esta no es necesaria como veremos a continuación.

Teorema 1.5.10. Sean Y y Z espacios topológicos cualesquiera y sea X localmente compacto (no necesariamente de Hausdorff). Entonces si Y^X está dotado de la topología compacto-abierto, la continuidad de $h : X \times Z \to Y$ es equivalente a la continuidad de la aplicación $\widehat{h} : Z \to Y^X$. Es decir, que la aplicación $h \to \widehat{h}$ induce una biyección $Y^{X\times Z} \cong (Y^X)^Z$.

Demostración. Supongamos que h es continua. Entonces, para todo $z \in Z$, $\widehat{h}(z) : X \to Y$ es continua por ser la composición $h \circ j_z$ donde $j_z : X \to X \times Z$ es la inclusión $j_z(x) = (x, z)$. Más aún, la aplicación $\widehat{h}$ es continua pues dados $K \subseteq X$ compacto y $U \subseteq Y$ abierto y $z \in \widehat{h}^{-1}(\langle K, U\rangle)$ se sigue que $\widehat{h}(z)(K) = h(K \times \{z\}) \subseteq U$; es decir $K \times \{z\} \subseteq h^{-1}(U)$. Por la continuidad de h, $h^{-1}(U)$ es abierto y por la definición de la topología producto para todo $x \in K$ existen abiertos $W_x \subseteq X$ y $\Omega_x \subseteq Z$ tales que $(x, z) \in W_x \times \Omega_x \subseteq h^{-1}(U)$.

Como $K \subseteq \cup_{x\in K} W_x$ y K es compacto, existen $x_1, \ldots, x_m \in K$ tales que $K \subseteq \cup_{i=1}^m W_{x_i}$. Sean $W = \cup_{i=1}^m W_{x_i}$ y $\Omega = \cap_{i=1}^m \Omega_{x_i}$. Entonces W y Ω son abiertos y $K \times \{z\} \subseteq W \times \Omega \subseteq h^{-1}(U)$. Así pues $z \in \Omega \subseteq \widehat{h}^{-1}(\langle K, U\rangle)$, lo que prueba que z es un punto interior y así $\widehat{h}^{-1}(\langle K, U\rangle)$ es abierto. Ahora a partir de la definición de la topología compacto-abierto se concluye que $\widehat{h}$ es continua.

Recíprocamente, si $\widehat{h}$ es continua, sea U abierto de Y y $(x, z) \in h^{-1}(U)$. Escribimos $g = \widehat{h}(z) : X \to Y$. Por hipótesis, g es continua así que $g^{-1}(U)$ es abierto de X que contiene a x. Ahora usamos la compacidad local de X para encontrar un entorno compacto de x, $K_x \subseteq g^{-1}(U)$, esto es, $\widehat{h}(z) = g \in \langle K_x, U\rangle$. Más aún, de ser $\widehat{h}$ continua tenemos que $V = \widehat{h}^{-1}(\langle K_x, U\rangle)$ es abierto con $z \in V$. Entonces $(int\ K_x) \times V$ es un abierto conteniendo a (x, z) y tal que $h((int\ K_x) \times V) \subseteq U$, esto prueba que (x, z) es un punto interior de $h^{-1}(U)$ y por tanto que $h^{-1}(U)$ es abierto. Hemos probado que h es continua. □

Como consecuencia inmediata del teorema anterior, si tomamos $Z = [0, 1]$, el intervalo unidad euclídeo, se tiene la siguiente identificación de las homotopías como caminos entre aplicaciones.

Corolario 1.5.11. Sea X un espacio localmente compacto. Entonces para todo espacio Y, dos aplicaciones continuas $f, g : X \to Y$ son homotópicas si y sólo si están conectadas por un camino en Y^X con la topología compacto-abierto.

Capítulo 2

Espacios de Alexandrov y Espacios Finitos

2.1. Espacios de Alexandrov

Un espacio topológico es un *espacio de Alexandrov*[1], *A-espacio* o *espacio principal* si la topología $\mathcal{T}$ es cerrada también bajo intersecciones arbitrarias. Es decir, la intersección arbitraria de abiertos es un conjunto abierto.

Es obvio que todo espacio finito es un A-espacio, ya que toda intersección de abiertos se puede expresar como una intersección finita. Por tanto, todo lo que se establezca para A-espacios, seguirá siendo válido para los espacios finitos. Históricamente fue el estudio de los espacios finitos el origen de los espacios de Alexandrov cuyas distintas denominaciones corresponden a los distintos contextos donde han sido estudiados (ver [19] para varias referencias). De hecho, Alexandrov llamó "discretos" a los A-espacios, pero esta terminología ha quedado sólo para la clase de A-espacios cuyos puntos son todos abiertos.

Notación. Los espacios finitos se denotarán *F-espacios.* Más aún, un A-espacio T_0 se abreviará a A_0*-espacio* y, si es finito, a F_0*-espacio.*

En gran medida, cuando pensamos en un espacio topológico, solemos considerar espacios con la propiedad de Hausdorff. Un ejemplo de esto son los espacios métricos. La intuición que solemos tener de este tipo de espacios puede resultar un poco engañosa cuando tratemos con espacios de Alexandrov. Para empezar, el siguiente lema nos haría dudar del interés de los A-espacios desde el punto de vista de la topología algebraico-geométrica.

Lema 2.1.1. Si un A-espacio es T_1, entonces es discreto.

Demostración. Por el Lema 1.3.3(2) cada $\{x\}$ es abierto y cerrado. □

Otra característica distintiva de los A-espacios es la existencia de una base mínima para su topología.

Definición 2.1.2. Sea X un A-espacio. Para todo $x \in X$, se define el *abierto mínimo* de x, U_x, como la intersección de todos los conjuntos abiertos que contienen a x.

Lema 2.1.3. Si X es un A-espacio, entonces $U_x = U_y$ si y sólo si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. En particular, X es A_0-espacio si y sólo si $U_x = U_y$, o, equivalentemente, $x = y$.

[1]Existe también el término "espacio de Alexandrov" para designar una clase de espacios en geometría riemanniana, introducida por A.D. Alexandrov (sin relación con P.S. Alexandrov) en 1957.

Demostración. Supongamos $U_x = U_y$ y sea $z \in \overline{\{x\}}$ cualquiera. Entonces tenemos que $U_z \cap \{x\} \neq \emptyset$, es decir, $x \in U_z$. Utilizando nuestra hipótesis, $U_x = U_y \subseteq U_z$. De aquí obtenemos que $y \in U_z$. Ahora, $U_z \cap \{y\} \neq \emptyset$. Por tanto $z \in \overline{\{y\}}$. Hemos demostrado inclusión $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$. La otra inclusión se prueba análogamente y tenemos la igualdad $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$.

Si ahora suponemos $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, entonces se sigue que $y \in \overline{\{x\}}$, y, de la misma manera $x \in \overline{\{y\}}$. Esto quiere decir que $U_y \cap \{x\} \neq \emptyset$ y $U_x \cap \{y\} \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in U_y$ e $y \in U_x$ y, por la definición de los abiertos mínimos, $U_x \subseteq U_y$ y $U_y \subseteq U_x$; esto es, $U_x = U_y$.

Si el espacio X fuese T_0 entonces la igualdad $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ equivale a $x = y$ por el Lema 1.3.3. Recíprocamente, si X no es T_0 entonces existen $x, y \in X$ con $x \neq y$ y tales que todo abierto que contiene a x contiene a y y viceversa; en particular, $y \in U_x$ y $x \in U_y$, por lo que $U_x \subseteq U_y$ y $U_y \subseteq U_x$ y, por tanto, $U_x = U_y$ aunque $x \neq y$. □

Lema 2.1.4. La familia de los conjuntos abiertos mínimos U_x es una base del espacio X. De hecho, es la única base minimal (es decir, mínima) de X.

Demostración. Ver que es base es inmediato, a partir del Lema 1.2.2. La minimalidad de $\mathcal{B}$ es inmediata a partir del Lema 1.2.8. En efecto, si $\cup_{x \in J} U_x = U_y$, con $y \in J$ debe existir $x_0 \in J$ con $y \in U_{x_0}$ y por tanto $U_y \subseteq U_{x_0}$. Por otro lado, $U_{x_0} \subseteq \cup_{x \in J} U_x = U_y$ y se sigue la igualdad $U_y = U_{x_0}$.

Veamos que $\mathcal{B}$ es la única base minimal. Supongamos que existe otra base minimal $\mathcal{M}$. Entonces para todo $U_x \in \mathcal{B}$ existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $x \in M \subseteq U_x$. Así pues, $M = U_x$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$. Como habíamos supuesto que $\mathcal{M}$ es minimal, se tiene, necesariamente, la igualdad $\mathcal{M} = \mathcal{B}$. □

Proposición 2.1.5. X es un A-espacio si y sólo si para todo punto $x \in X$, existe un abierto mínimo U_x que lo contiene.

Demostración. Ya sabemos por la Definición 2.1.2 que en todo A-espacio se puede encontrar un abierto mínimo para cada punto. Recíprocamente, sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia cualquiera de abiertos de X, con $\cap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha \neq \emptyset$ y tomemos $x \in \cap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$. Entonces, $x \in G_\alpha$, para todo $\alpha \in \Lambda$. Por hipótesis, $U_x \subseteq G_\alpha$, para todo $\alpha \in \Lambda$, y por tanto $x \in U_x \subseteq \cap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$, luego $x \in int(\cap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha)$. Así, $\cap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha = int(\cap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha)$. Hemos probado que $\cap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ es un abierto. □

Proposición 2.1.6. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre A-espacios. Entonces f es continua si y sólo si $f(U_x) \subseteq U_{f(x)}$ para todo $x \in X$.

Demostración. Si f es continua, entonces $f^{-1}(U_{f(x)})$ es abierto y $x \in f^{-1}(U_{f(x)})$, luego $U_x \subseteq f^{-1}(U_{f(x)})$. Esto es, $f(U_x) \subseteq U_{f(x)}$.

Recíprocamente, si Ω es cualquier abierto de Y y $x \in f^{-1}(\Omega)$, tenemos $f(x) \in \Omega$. Luego $f(U_x) \subseteq U_{f(x)} \subseteq \Omega$. Aquí usamos la hipótesis y la minimalidad de $U_{f(x)}$. Por tanto, $U_x \subseteq f^{-1}(\Omega)$ y $x \in int(f^{-1}(\Omega))$. Hemos probado que $int(f^{-1}(\Omega)) = f^{-1}(\Omega)$, y por consiguiente $f^{-1}(\Omega)$ es abierto, lo que quiere decir que f es continua. □

La demostración de la siguiente proposición es inmediata.

Proposición 2.1.7. Si $(X, \mathcal{T})$ es un A-espacio, entonces para todo conjunto $Y \subseteq X$ el subespacio $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es también un A-espacio. Además, la familia $\{U_y \cap Y\}_{y \in Y}$ es la base mínima de Y.

Nota 2.1.8. La Proposición 2.1.7 nos dice que los subespacios heredan la propiedad de ser A-espacios. Esto no ocurre en absoluto para espacios con una base minimal, como fue observado en la Nota 1.2.13 (ver [8] para un estudio exhaustivo de los A-espacios y su relación con los espacios dotados de una base minimal).

Proposición 2.1.9. Sean X e Y dos A-espacios. Entonces $X \sqcup Y$ es un A-espacio. Además, la familia $\{U_x, U_y\}_{x\in X, y\in Y}$ es la base mínima de $X \sqcup Y$.

Demostración. Por el Lema 1.2.10 la base indicada es mínima, en particular $X \sqcup Y$ es A-espacio por la Proposición 2.1.5. □

Proposición 2.1.10. Sean X e Y dos A-espacios. Entonces $X \times Y$ es un A-espacio. Además, $\{U_x \times U_y\}_{(x,y)\in X\times Y}$ es base mínima de $X \times Y$.

Demostración. Por el Lema 1.2.12 la base indicada es mínima y $X \times Y$ es A-espacio por la Proposición 2.1.5. □

Proposición 2.1.11. Si $p : X \longrightarrow Y$ es una aplicación cociente y X es un A-espacio, entonces Y también lo es.

Demostración. Sea $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de abiertos en Y, es decir, $p^{-1}(\Omega_\alpha)$ es abierto de X para cada $\alpha \in \Lambda$. Entonces $p^{-1}(\cap_{\alpha\in\Lambda}\Omega_\alpha) = \cap_{\alpha\in\Lambda}p^{-1}(\Omega_\alpha)$ es abierto de X por ser A-espacio. Por definición de topología cociente, $\cap_{\alpha\in\Lambda}\Omega_\alpha$ es abierto de $X/\sim$. □

Proposición 2.1.12. En la proposición anterior, la familia de imágenes $\{p(U_x)\}_{x\in X}$ de la base mínima de X es base mínima de Y si y sólo si la aplicación cociente es también abierta.

Recordemos que una aplicación (continua o no) $f : X \to Y$ se dice *abierta* si para todo abierto G de X su imagen $f(G)$ es un abierto de Y.

Demostración. Si la familia dada fuese una base mínima entonces cada imagen $p(U_x)$ sería un conjunto abierto y como todo abierto G de X se puede expresar como una unión $G = \cup_{x\in J}U_x$ se sigue que $p(G) = \cup_{x\in J}p(U_x)$ es abierto.

Para probar el recíproco, sabemos que cada $p(U_x)$ es un abierto que contiene a $p(x)$. Si $U_{p(x)}$ es el abierto mínimo de $p(x)$ en Y dado por la Proposición 2.1.11, la continuidad de p nos dice que $p(U_x) \subseteq U_{p(x)}$ por la Proposición 2.1.6. La minimalidad de $U_{p(x)}$ nos da $p(U_x) = U_{p(x)}$. □

Ejemplo 2.1.13. Un ejemplo donde $p(U_x)$ no es abierto es la siguiente aplicación cociente. Sean los F-espacios $X = \{a, b, c, d\}$ e $Y = \{x, y, z\}$ con topologías $\mathcal{T}_X = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ y $\mathcal{T}_Y = \{\emptyset, Y, \{x\}\}$. Entonces $p : X \to Y$ dada por $p(a) = x$, $p(b) = p(c) = y$ y $p(d) = z$ es una aplicación cociente y $p(U_b) = \{x, y\}$ no es abierto de Y con $U_b = \{a, b\}$.

2.2. Conexión y Conexión por Caminos

En contra de lo que se pudiera esperar a primera vista, las propiedades relativas a la conexión de los A-espacios son sorprendentemente similares a aquellas de los espacios de interés en la topología algebraico-geométrica; esto es, son espacios localmente conexos y que, por tanto, la conexión y la conexión por caminos coinciden para esta clase de espacios.

Lema 2.2.1. Sea X un A-espacio. Si $y \in U_x$ entonces existe un camino en U_x entre y y x. En particular, todos los abiertos mínimos de X son conexos por caminos.

Demostración. Se define $\sigma : [0, 1] \longrightarrow U_x$ como $\sigma(t) = y$ si $t < 1$ y $\sigma(1) = x$. Veamos que es continua. Para ello, bastará ver que σ es continua llegando a X, y por tanto comprobar que $\sigma^{-1}(U_z)$ es abierto para todo $z \in X$. Esto es trivial si $x, y \notin U_z$, ya que entonces $\sigma^{-1}(U_z) = \emptyset$. Si $x \in U_z$, tenemos $U_x \subseteq U_z$ y, por hipótesis, $U_y \subseteq U_x \subseteq U_z$. Por tanto, $\sigma^{-1}(U_z) = [0, 1]$. Finalmente, si $y \in U_z$ y $x \notin U_z$, entonces $\sigma^{-1}(U_z) = [0, 1)$. □

Corolario 2.2.2. Todo A-espacio X es localmente conexo por caminos.

Como consecuencia inmediata del Corolario 2.2.2 y la Proposición 1.5.5, tenemos que la conexión y la conexión por caminos coinciden en la clase de los A-espacios. Más aún, tenemos la siguiente caracterización de estas propiedades para los A-espacios.

Teorema 2.2.3. Sea X un A-espacio. Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. X es conexo
2. Dados $x, y \in X$, existe una secuencia $x = z_1, \ldots, z_s = y$, tal que $z_i \in U_{z_{i+1}}$ ó $z_{i+1} \in U_{z_i}$ para $0 < i < s$.
3. X es conexo por caminos

Demostración. Supongamos que X es conexo. Fijamos $x \in X$ y consideramos A como el conjunto de puntos y tales que existe una secuencia como en el enunciado de x a y.

Se tiene que si $A \cap U_p \neq \emptyset$ entonces $U_p \subseteq A$; en efecto, si $y \in A \cap U_p$ la secuencia $z_1, \ldots, z_s$ de x a y se puede modificar para encontrar una secuencia entre x y cualquier $w \in U_p$ como sigue. Si $y \in U_{z_{s-1}}$, entonces la secuencia original se extiende a otra con dos términos más, $z_{s+1} = p$ y $z_{s+2} = w$ ya que $y = z_s$ y w están en $U_p = U_{z_{s+1}}$. Si, en otro caso, $z_{s-1} \in U_y$, entonces consideramos la nueva secuencia $q_1, \ldots, q_{s+1}$ donde $q_j = z_j$ si $j \leq s-1$, $q_s = p$ y $q_{s+1} = w$ ya que en este caso $z_{s-1} \in U_{z_{s-1}} \subseteq U_y \subseteq U_{q_s}$ y $q_{s+1} \in U_{q_s}$.

De la observación anterior se sigue inmediatamente que $y \in A$ si y sólo si $U_y \subseteq A$ y, como consecuencia, A es abierto y cerrado, por lo que o bien $A = \emptyset$ ó $A = X$ ya que X es conexo. Como $x \in A$, se sigue que $A = X$ y por tanto se tiene (2).

Si se cumple (2), usamos el Lema 2.2.1 para definir un camino σ_i entre z_i y z_{i+1} para todo $1 \leq i \leq s$. Entonces por la transitividad de la Nota 1.5.2 se sigue que existe un camino entre x e y y así X es conexo por caminos.

La implicación (3) $\Rightarrow$ (1) es válida en general. $\square$

2.3. Homotopía y A-espacios

En esta sección comprobaremos que los A-espacios tienen la propiedad homotópica local distintiva de los buenos espacios para la topología algebraica: poliedros y variedades. Aunque no se crea, los A-espacios son, como aquellos, espacios localmente contráctiles. Recordemos que un espacio X se dice *localmente contráctil* si para todo $x \in X$ y todo entorno N de x, existe otro entorno N' de x que es contráctil y tal que $N' \subseteq N$. Obviamente, para A-espacios esto equivale a decir que el abierto mínimo es contráctil. Empezamos con el siguiente resultado:

Lema 2.3.1. Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas, donde Y es un A-espacio. Supongamos que $U_{f(x)} \subseteq U_{g(x)}$ (o, equivalentemente, $f(x) \in U_{g(x)}$), para todo $x \in X$. Entonces f y g son homotópicas por una homotopía que es constante sobre el conjunto $\{x \in X; f(x) = g(x)\}$.

Demostración. Sea $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ la aplicación definida por $H(x,t) = f(x)$ si $t < 1$, y $H(x,1) = g(x)$. Nótese que si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$, entonces $H(x,t) = f(x)$ para todo t. Para comprobar que H es continua, sea Ω cualquier abierto en Y. Dado $(x,t) \in H^{-1}(\Omega)$, si $t < 1$ entonces $H(x,t) = f(x) \in \Omega$. Como f es continua, existe un abierto V con $x \in V$ y $f(V) \subseteq U_{f(x)} \subseteq \Omega$. Así pues, $H(V \times [0,1)) = f(V) \subseteq \Omega$. Luego $(x,t) \in V \times [0,1) \subseteq H^{-1}(\Omega)$. Es decir, $(x,t) \in int(H^{-1}(\Omega))$.

Por otro lado, si $t = 1$, $H(x,1) = g(x) \in \Omega$, y como g es continua podemos encontrar un abierto W conteniendo a x y contenido en el abierto V dado más arriba tal que

$g(W) \subseteq U_{g(x)} \subseteq \Omega$. Más aún, por hipótesis $U_{f(x)} \subseteq U_{g(x)} \subseteq \Omega$. Así pues, $H(W \times [0,1]) = H(W \times [0,1)) \cup H(W \times \{1\}) = f(W) \cup g(W) \subseteq \Omega$. Esto es, $(x,1) \in W \times [0,1] \subseteq H^{-1}(\Omega)$ y también en este caso tenemos $(x,1) \in int(H^{-1}(\Omega))$. Por tanto, siempre $H^{-1}(\Omega)$ es abierto y así H es continua. □

Corolario 2.3.2. Si Y es un A-espacio tal que para algún $y_0 \in Y$ se tiene $U_{y_0} = Y$ entonces Y es contráctil.

Demostración. Sean $f = id_Y$ y $g = c_{y_0}$ la identidad y la constante $c_{y_0}(y) = y_0$, $y \in Y$. Por hipótesis $U_y \subseteq Y = U_{y_0}$ para todo $y \in Y$ y así por el Lema 2.3.1 se sigue que $id_Y \simeq c_{y_0}$, es decir, Y es contráctil. □

Corolario 2.3.3. Todo A-espacio X es localmente contráctil.

Demostración. En efecto, para todo $x \in X$ sea $Y = U_x$ en el Corolario 2.3.2. Nótese que en la topología relativa de U_x, él es el único abierto que contiene a x. Entonces U_x es contráctil. La minimalidad de U_x asegura que X es localmente contráctil. □

Otra interesante consecuencia del Lema 2.3.1 es que para todo A-espacio X podemos encontrar un A_0-espacio, X_0, que es homotópicamente equivalente a él. Más aún, $X_0 \subseteq X$ puede ser elegido como un retracto de deformación de X. Con más detalle,

Teorema 2.3.4. Todo A-espacio X tiene un cociente canónico X_0 que es T_0. Más aún, la aplicación cociente $p : X \to X_0$ es una equivalencia de homotopía. Además, para todo $x \in X$, $p(U_x)$ es el abierto mínimo de la clase $[x] \in X_0$. Finalmente, X_0 se puede suponer un retracto de deformación de X.

Demostración. Definimos la relación $x \sim y$ si $U_x = U_y$. Sea $X_0 = X/\sim$ el espacio cociente correspondiente. Sabemos que X_0 es un A-espacio por la Proposición 2.1.11. Más aún, la proyección canónica $p : X \longrightarrow X_0$ es una aplicación abierta ya que $p^{-1}(p(U_x)) = U_x$, pues si $y \in p^{-1}(p(U_x))$ entonces existe $z \in U_x$ con $p(y) = p(z)$, esto es, $U_y = U_z \subseteq U_x$ y así $y \in U_x$. Tenemos, por la Proposición 2.1.12, que $\{p(U_x)\}_{x \in X}$ es la base mínima de X_0. El espacio X_0 es T_0 como consecuencia inmediata del Lema 2.1.3 pues $p(U_x) = p(U_y)$ es equivalente a $[x] = [y]$.

Para ver p es una equivalencia de homotopía definimos $f : X_0 \longrightarrow X$, eligiendo para $[x] \in X_0$ un representante cualquiera, pero fijo, $z_x \sim x$ y tomamos $f([x]) = z_x$. Para comprobar que f es continua. basta observar que para $x \in X$,

$$f^{-1}(U_x) = \{[x'] \in X_0; x' \sim z_{x'} \in U_x\} = \{[x']; U_{x'} \subseteq U_x\} = p(U_x).$$

Por otra parte, es obvio que $p \circ f = id_{X_0}$. Además, por definición de f y la relación "$\sim$", se sigue la igualdad $U_{f(p(x))} = U_{z_x} = U_x$, y obtenemos una homotopía H entre $f \circ p$ y id_X como consecuencia del Lema 2.3.1.

Comprobemos que la restricción de f a la imagen $\widetilde{f} : X_0 \to f(X_0)$ es un homeomorfismo y así $\widetilde{f} \circ p : X \to X_0 \to f(X_0)$ es un retracción de X sobre $f(X_0)$ ya que para todo $f([x]) \in f(X_0)$ tenemos $\widetilde{f}(q(f([x])) = f([x])$. Además es un retracto de deformación pues si $i : f(X_0) \to X$ es la inclusión, la homotopía H encontrada anteriormente nos da una homotopía entre $i \circ \widetilde{f} \circ p = f \circ p$ y la identidad de X.

Para comprobar que $\widetilde{f}$ es un homeomorfismo sólo hay que ver que su inversa $\widetilde{f}^{-1} : f(X_0) \to X_0$ es continua, pero esto es inmediato ya que $\widetilde{f}^{-1} = p|f(X_0)$. □

Nota 2.3.5. El teorema anterior es debido a M. McCord ([16], Teorema 4) y nos dice que, desde el punto de vista homotópico, no hay pérdida de generalidad si nos centramos en los A_0-espacios.

2.4. Clasificación de los tipos de homeomorfía de F-espacios

No se conoce una fórmula recursiva que calcule el cardinal del conjunto T_n de las posibles topologías sobre un conjunto de n elementos. Es trivial ver que $card(T_1) = 1$ y $card(T_2) = 4$, con algo más de trabajo se puede comprobar $card(T_3) = 39$ y sólo con $n = 18$ se tiene $card(T_{18}) > 2 \cdot 10^{36}$ (ver [3]). Se sabe que $card(T(n))$ se comporta asintóticamente como $2^{n^2/4}$ (ver [11]).

Naturalmente, los números anteriores se reducen al considerar el número de clases de homeomorfía de los espacios. En esta sección recogemos un procedimiento debido a R. Stong ([21]) para describir tales clases por medio de matrices. Comenzamos con una pequeña introducción a las matrices de permutación tomada de [4].

2.4.1. Definición y propiedades de las matrices de permutación

Sean $n \geq 1$ y π una permutación sobre el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ de n elementos. Asociada a esta permutación se puede construir la matriz cuadrada $n \times n$, $P_\pi = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ donde $a_{ij} = 0$ si $j \neq \pi(i)$ y $a_{i\pi(i)} = 1$.

A toda matriz cuadrada $n \times n$ de la forma P_π se llama *matriz de permutación*. Sea $\mathcal{P}_n$ el conjunto de las matrices de permutación de orden $n \times n$. Es obvio que el conjunto $\mathcal{P}_n$ está en biyección con el conjunto de permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$. Obsérvese que $P \in \mathcal{P}_n$ si y sólo si $P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ es una matriz cuadrada $n \times n$ que tiene un único término no nulo en cada fila y en cada columna, y éste término es siempre 1. En efecto, la permutación asociada a P le asigna a cada $i \leq n$ el único índice $\pi(i)$ tal que $p_{i\pi(i)} = 1$.

Nótese también que para la composición de permutaciones se tiene $P_{\pi' \circ \pi} = P_\pi \cdot P_{\pi'}$, donde el término de la derecha es la multiplicación de las correspondientes matrices de permutación. En particular, si π^{-1} es la inversa de π, entonces $P^{-1}{}_\pi = P_{\pi^{-1}}$; más aún, $P_{\pi^{-1}} = P^t{}_\pi$ y por tanto, $P^{-1}{}_\pi = P^t{}_\pi$.

Lema 2.4.1. Si $P = P_\pi$ es una matriz de permutación $n \times n$ y A es cualquier matriz cuadrada $n \times n$, entonces las filas del producto PA son las filas de A permutadas por π. Análogamente, las columnas de AP son las columnas de A, permutadas por π^{-1}.

Demostración. Sean $P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $A = (a_{jk})_{1 \leq j,k \leq n}$ y $PA = (q_{ik})_{1 \leq i,k \leq n}$. Entonces:

$$q_{ik} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} a_{jk} = p_{i\pi(i)} a_{\pi(i)k} = a_{\pi(i)k}$$

Así pues, la fila i-ésima de PA es la fila $\pi(i)$-ésima de A. Si $AP = (r_{ik})_{1 \leq i,k \leq n}$, entonces

$$r_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_{jk} = a_{i\pi^{-1}(k)} p_{\pi^{-1}(k)k} = a_{i\pi^{-1}(k)}.$$

□

Corolario 2.4.2. Si $P = P_\pi$, las filas y columnas de $PAP^{-1} = PAP^t$ son las de A, permutadas por π. Es decir, el término que ocupa el lugar (i, j) de PAP^{-1} es $a_{\pi(i)\pi(j)}$. En particular, los términos de la diagonal de PAP^{-1} son los de la diagonal de A, permutados por la permutación π.

2.4.2. Matriz asociada a una base mínima ordenada

Sea Fin^r la familia de los F-espacios con r elementos, y $Fin= \cup_{r\geq 1} Fin^r$ la familia de todos los F-espacios. Sea $Fin^r/\cong$ y $Fin/\cong$ los conjuntos cociente por la relación de homeomorfía. En lo que sigue se dará una descripción de las clases de homeomorfía en $Fin/\cong$ usando matrices de permutación.

Si X es un F-espacio, tomamos una enumeración, con los elementos distintos dos a dos, de su base mínima $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x\in X}$:

$$\varepsilon_{\mathcal{U}} = U_1, \ldots, U_n. \tag{2.1}$$

Entonces a $\varepsilon_{\mathcal{U}}$ le asociamos la matriz $n \times n$, $E_{\mathcal{U}} = (e_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, donde:

- Si $i = j$, entonces e_{ii} es el número de elementos $x \in X$ tales que $U_x = U_i$.
- En el caso de que $U_i \subseteq U_j$, y no existe un k (distinto de i ó j) tal que $U_i \subseteq U_k \subseteq U_j$, asignamos los valores $e_{ij} = 1$ y $e_{ji} = -1$.
- Para los casos restantes, $e_{ij} = 0$.

De esta forma, la matriz $E_{\mathcal{U}}$ pertenece al conjunto de las matrices cuadradas $n \times n$, $\mathcal{M}_n$ $(n \geq 2)$, que consiste en las matrices $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ con las siguientes condiciones:

1. $a_{ii} \geq 1$.
2. a_{ij} es igual a $-1, 0$ ó 1 si $i \neq j$.
3. $a_{ij} = -a_{ji}$ si $i \neq j$.
4. $a_{ij} = 0$ si existe una sucesión de índices distintos dos a dos $\{i_1, \ldots, i_s\}$ tales que $i_1 = i$, $i_s = j$ y $a_{i_k i_{k+1}} = 1$ para $1 \leq k \leq s-1$.

Si cambiamos la enumeración (2.1) por medio de una permutación π de $\{1, \ldots, n\}$ a $\varepsilon'_{\mathcal{U}} = U_{\pi(1)}, \ldots, U_{\pi(n)}$, entonces la matriz asociada a esta nueva enumeración, $E_{\mathcal{U}}{}' = (e_{ij}{}')_{1\leq i,j\leq n}$, tiene como entradas los siguientes valores:

- $e_{ii}{}' =$ número de elementos de $U_{\pi(i)}$.
- $e_{ij}{}' = 1$, $e_{ji}{}' = -1$ si $U_{\pi(i)} \subseteq U_{\pi(j)}$ y no hay otro abierto de $\varepsilon'_{\mathcal{U}}$ intermedio.
- En otro caso, $e'_{ij} = 0$.

Es decir, $E'_{\mathcal{U}} = P_\pi E_{\mathcal{U}} P_\pi^{-1}$, donde P_π es la matriz asociada a la permutación π. De esta forma el espacio X tiene asociado un elemento del conjunto cociente $\mathcal{M}_n/\sim$ de clases de equivalencia por conjugación de matrices de permutación de la familia $\mathcal{M}_n$.

Si $\mathcal{M} = \cup_{n\geq 1}\mathcal{M}_n$, esta asociación induce una biyección entre las clases de homeomorfía de F-espacios y el conjunto cociente $\mathcal{M}/{\sim} = \cup_{n\geq 1}\mathcal{M}_n/{\sim}$. Más precisamente,

Teorema 2.4.3. La aplicación:

$$\Phi : Fin/{\cong} \longrightarrow \mathcal{M}/{\sim}$$

Dada por $\Phi[X] = [E_{\mathcal{U}}]$ es una biyección.

Demostración. Veamos que Φ es sobreyectiva. Dada una clase $[A] \in \mathcal{M}_n/\sim$ representada por la matriz $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, sea X el conjunto formado por los pares de enteros (i, j) donde $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq a_{ii}$. A cada $1 \leq i \leq n$ le asociamos el subconjunto $U_i \subseteq X$ dado por $U_i = \{(k, j) \in X; k = i$ o existe una secuencia de índices $\{i_1, \ldots, i_m\}$ con $m \geq 2$ con $i_1 = k, i_s = i$ y $a_{i_t i_{t+1}} = 1$ para $1 \leq t \leq m-1\}$. Cuando esto ocurra, diremos que *k está ligado a i por una A-secuencia de longitud m* (o, simplemente *A-ligado*).

Obsérvese que cada conjunto U_i se descompone en una unión:

$$U_i = \{(i, j) \in X; 1 \leq j \leq a_{ii}\} \cup \{(k, j) \in X; 1 \leq j \leq a_{kk} \text{ y } k \text{ está } A\text{-ligado a } i\}$$

Nótese también que si $(k, j_0) \in U_i$ entonces $(k, j) \in U_i$ para todo $1 \leq j \leq a_{kk}$.

También, $U_i \subseteq U_s$, $(i \neq s)$ si y sólo si i está A-ligado a s. En efecto, si se da la inclusión, se sigue por definición que i está A-ligado a s. Recíprocamente, si i está A-ligado a s tenemos que $(i, j) \in U_s$ para todo $1 \leq j \leq a_{ii}$; además, si $(t, m) \in U_i$ con $t \neq i$, entonces t debe estar A-ligado a i, y como i lo está a s, entonces t está A-ligado a s y $(t, m) \in U_s$. En particular, $U_i \subseteq U_s$ y no existe U_t tal que $U_i \subseteq U_t \subseteq U_s$ si y sólo si i esta ligado a s por una A-secuencia de longitud 1; esto es, $a_{is} = 1$.

Con estas observaciones es fácil verificar que la familia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\leq n}$ cumple las condiciones de la Definición 1.2.7 para ser base para una topología sobre X:

1. Es obvio que el punto $(i, j) \in X$ está en U_i.
2. Tenemos que si $(i, j) \in U_s$ entonces i está A-ligado a s y $U_i \subseteq U_s$. Por tanto, si $(i, j) \in U_s \cap U_{s'}$, entonces $(i, j) \in U_i \subseteq U_s \cap U_{s'}$.

Más aún, $\mathcal{U}$ es base minimal, pues de (2) se sigue que U_i es el abierto mínimo de todo (i, j) con $1 \leq j \leq a_{ii}$.

Comprobemos que $\Phi([X]) = [A]$. Para ello consideramos la base $\mathcal{U}$ ordenada tal y como está. Entonces $E_{\mathcal{U}} = A$. En efecto, es claro que $e_{ii} = a_{ii}$ para todo $1 \leq i \leq n$. También, si $e_{is} = 1$ es porque $U_i \subseteq U_s$ y no existe U_t tal que $U_i \subseteq U_t \subseteq U_s$, esto es, $a_{is} = 1$ como se observó más arriba.

Para ver la inyectividad, sean X e Y F-espacios con bases mínimas ordenadas $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_r\}$ y $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_r\}$, respectivamente, para las cuales $[E_{\mathcal{U}}] = [E_{\mathcal{V}}]$. Entonces usando una adecuada matriz de permutación podemos suponer que ambas bases tienen la misma matriz asociada. Ello nos permite elegir, para cada $1 \leq i \leq r$, una biyección $f_i : U_i \to V_i$. Todas juntas, estas biyecciones definen la biyección $f : X \to Y$ dada por $f(x) = f_i(x)$ si $x \in U_i$. Como $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son bases y $f(U_i) = V_i$ para todo i, se sigue que f es un homeomorfismo.

□

Nota 2.4.4.

1. Para un espacio discreto de n elementos X la clase $\Phi([X])$ se reduce a la matriz unidad 1_n.
2. Nótese que el número de elementos de $\mathcal{U}$ determina el tamaño de la matriz $E_{\mathcal{U}}$, siendo la traza (suma de los elementos de la diagonal principal) de $E_{\mathcal{U}}$ el cardinal de X. Más aún, si X es un F_0-espacio, todos los términos de la diagonal de $E_{\mathcal{U}}$ son unos.
3. Para la subfamilia $Fin_0 \subseteq Fin$ de F_0-espacios, la biyección Φ se descompone en la unión de biyecciones $\Phi_n : Fin_0^n/\cong \longrightarrow \mathcal{M}_n/\sim$.
4. Si X_0 es el F_0-espacio asociado al F-espacio X en el Teorema 2.3.4, entonces la aplicación cociente $q : X \to X_0$ induce una biyección entre una base ordenada $\mathcal{U}$ de X y una base ordenada $\mathcal{U}_0$ de X_0 tal que la matriz $E_{\mathcal{U}_0}$ se obtiene de $E_{\mathcal{U}}$ reemplazando la diagonal de ésta por unos.

Capítulo 3

Conjuntos Parcialmente Ordenados (Posets)

La idea de orden es fundamental en todas las ramas de las Matemáticas. Su formalización es la teoría de conjuntos parcialmente ordenados (también llamados posets). Curiosamente esta teoría se puede considerar parte de la Topología ya que los posets son exactamente los A_0-espacios. Dedicamos el capítulo a tratar con detalle esta equivalencia.

3.1. Definiciones básicas sobre Estructuras Ordenadas

Sea X un conjunto. Una *relación binaria (o* relación*)* en X es cualquier subconjunto $\mathcal{R} \subseteq X \times X$. Una relación $\mathcal{R}$ es *reflexiva* si $(x, x) \in \mathcal{R}$ para cada $x \in X$. Se dice *simétrica* si para todo $x, y \in X$ la condición $(x, y) \in \mathcal{R}$ implica $(y, x) \in \mathcal{R}$. Por el contrario, $\mathcal{R}$ es *antisimétrica* si para todo $x, y, z \in X$ la condición $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $(y, x) \in \mathcal{R}$ implica $x = y$. Finalmente, $\mathcal{R}$ es *transitiva* si para todo $x, y, z \in X$ la condición $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $(y, z) \in \mathcal{R}$ implica $(x, z) \in \mathcal{R}$.

Definición 3.1.1. Un *preorden* $\mathcal{R}$ en un conjunto X es una relación reflexiva y transitiva. Si un preorden $\mathcal{R}$ en X es además antisimétrico, se llamará *orden parcial* (o simplemente *orden* en X) y decimos que $(X, \mathcal{R})$ es un *conjunto parcialmente ordenado* (o *poset*).

Notación. Como de costumbre, se escribe $x \leq y$ si $(x, y) \in \mathcal{R}$.

Definición 3.1.2. Un elemento $x \in X$ es un *elemento maximal (minimal)* si para cada z en X, $x \leq z$ ($z \leq x$, respectivamente) implica $x = z$. Se denotará por $Max(X)$ ($Min(X)$, respectivamente) el conjunto de los elementos maximales (minimales, respectivamente) de X.

Dos elementos x, y se dice *comparables* si $x \leq y$ ó $y \leq x$, de lo contrario se dicen *incomparables.* Si cada par de elementos son comparables decimos que $(X, \leq)$ es un conjunto *totalmente ordenado.* En general, cualquier subconjunto totalmente ordenado de un poset se llamará *cadena.* Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice una *anticadena* si ningún par de su elementos son comparables. Nótese que tanto $Max(X)$ como $Min(X)$ son anticadenas.

Definición 3.1.3. Una aplicación entre conjuntos preordenados $f : (X, \leq) \to (Y, \preceq)$ se dice que *preserva el orden* (o que es una *aplicación ordenada*) si para $x \leq x'$ se tiene $f(x) \preceq f(x')$. Se dice que *invierte el orden* (o es *antiordenada*) si para $x \leq x'$ se tiene $f(x') \preceq f(x)$.

La aplicación anterior se dice que es un *isomorfismo* entre conjuntos preordenados si es una biyección tal que f y f^{-1} son aplicaciones ordenadas. Si son antiordenadas se llama *antiisomorfismo.*

Definición 3.1.4. Un subconjunto $S \subseteq X$ se llama *conjunto decreciente* si $y \leq x \in S$ implica $y \in S$. Para $x \in X$, $\downarrow x = \{y \in X; y \leq x\}$ es un conjunto decreciente, llamado el *ideal principal generado* por x.

Dualmente, un subconjunto $S \subseteq X$ se llama *conjunto creciente* si $y \geq x \in S$ implica $y \in S$. Como caso particular, $\uparrow x = \{y \in X; y \geq x\}$ es un conjunto creciente para todo $x \in X$, llamado *filtro principal* generado por x.

3.2. A-topologías y Preórdenes

Alexandrov ([1]) y Tucker ([22]), descubrieron de manera independiente la equivalencia entre A-topologías y preórdenes. Éste es una consecuencia más del método de trabajo consistente en comparar estructuras matemáticas distintas y obtener consecuencias. Este método llevó a la creación de la teoría de categorías y funtores por S. Eilenberg y S. MacLane en 1945. Las categorías y los funtores han sido utilizadas en casi todas las ramas de las Matemáticas, permitiendo unificar relaciones estructurales que antes aparecían de forma dispersa. Recordemos las definiciones básicas relativas a categorías y funtores.

Definición 3.2.1. Se llama *categoría* a un triple $\mathbf{C}$ formado por:

1. Una clase (no necesariamente un conjunto), llamada la *clase de objetos* de $\mathbf{C}$ y denotada por $Ob(\mathbf{C})$.

2. Una familia de conjuntos $\mathbf{C}(A, B)$, uno para cada par de objetos $A, B \in Ob(\mathbf{C})$, llamado el *conjunto de los morfismos* de A en B.

3. Una familia de aplicaciones:

$$\Phi(A, B, C) : \mathbf{C}(A, B) \times \mathbf{C}(B, C) \longrightarrow \mathbf{C}(A, C),$$

   una para cada tripleta de objetos $A, B, C \in Ob(\mathbf{C})$, llamada composición y denotada $\Phi(f, g) = g \circ f$, que cumple las siguientes condiciones:

   a) Si $A, B, C, D \in Ob(\mathbf{C})$ se tiene la igualdad $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ para $f \in \mathbf{C}(A, B), g \in \mathbf{C}(B, C)$ y $h \in \mathbf{C}(C, D)$ arbitrarios.

   b) Para todo objeto $A \in Ob(\mathbf{C})$, existe un morfismo $1_A \in \mathbf{C}(A, A)$ llamado *identidad* de A tal que si $f \in \mathbf{C}(A, B)$ y $g \in \mathbf{C}(C, A)$ se tiene $f \circ 1_A = f$ y $1_A \circ g = g$ respectivamente.

Un morfismo $f \in \mathbf{C}(A, B)$ se denotará a partir de ahora $f : A \longrightarrow B$. Un morfismo $f : A \longrightarrow B$ se dice un *isomorfismo* si existe $g : B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$. A g se le llama *inverso* de f.

Ejemplo 3.2.2. Algunas categorías que hemos manejado implícitamente hasta ahora son las siguientes:

1. La categoría **Set** de conjuntos y aplicaciones. Los isomorfismos de **Set** son las aplicaciones biyectivas.

2. La categoría **Top** de los espacios topológicos y aplicaciones continuas. Sus isomorfismos son los homeomorfismos.

3. La categoría **Alex** de los A-espacios y aplicaciones continuas entre ellos.

4. Las categorías **PreOrd** y **Poset** de conjuntos preordenados y posets, respectivamente, con las aplicaciones ordenadas y los isomorfismos de la Definición 3.1.3. Obsérvese que podemos usar alternativamente aplicaciones antiordenadas y obtenemos nuevas categorías.

5. La categoría $\mathbf{Top}/\simeq$ de espacios topológicos y clases de homotopía de aplicaciones continuas como morfismos. Ahora los isomorfismos están representados por equivalencias de homotopía.

6. Obviamente, como consecuencia del punto anterior, también tenemos la categoría homotópica $\mathbf{Alex}/\simeq$ si nos restringimos a los A-espacios.

Definición 3.2.3. Una categoría $\mathbf{D}$ se dice *subcategoría* de otra categoría $\mathbf{C}$ si $Ob(\mathbf{D}) \subseteq Ob(\mathbf{C})$ y para todo par de objetos $A, B \in Ob(\mathbf{D})$, $\mathbf{D}(A,B) \subseteq \mathbf{C}(A,B)$, preservando esta inclusión las composiciones de morfismos y las aplicaciones identidades. Cuando $\mathbf{D}(A,B) = \mathbf{C}(A,B)$ para todo $A, B \in \mathbf{D}$, decimos que $\mathbf{D}$ es una *subcategoría llena* de $\mathbf{C}$.

Ejemplo 3.2.4. **Alex** es una subcategoría llena de **Top**. Análogamente, **Poset** es una subcategoría llena de **PreOrd**. También es llena en **Alex** (y por tanto en **Top**) la subcategoría $\mathbf{Alex}_0 \subseteq \mathbf{Alex}$ consistente en los A_0-espacios.

Definición 3.2.5. Sean $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ dos categorías. Un *funtor covariante* $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ es una regla que asocia a cada objeto X de $\mathbf{C}$ a un objeto $F(X) \in Ob(\mathbf{D})$ y a todo morfismo $f : A \longrightarrow B$ un morfismo $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ tal que $F(1_A) = 1_{F(A)}$ y $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$. Se dice que F es un *funtor contravariante* si, en la situación anterior $F(f) : F(B) \longrightarrow F(A)$ y $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$. Nótese que podemos definir la composición de funtores covariantes y también contravariantes.

Definición 3.2.6. Sean $F, G : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ dos funtores covariantes. Una *transformación natural* $\tau : F \longrightarrow G$ es una regla que asigna a todo objeto $X \in Ob(\mathbf{C})$ un morfismo $\tau_X : F(X) \longrightarrow G(X)$ en $\mathbf{D}$ tal que para todo morfismo $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathbf{C}$ se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\tau_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Cuando τ_X es un isomorfismo para todo objeto X se dice que τ es una *equivalencia natural*. Es inmediato definir la noción de composición de transformaciones naturales. Para funtores contravariantes, todo lo anterior puede establecerse de manera análoga.

Definición 3.2.7. Un isomorfismo de categorías es un funtor $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ para el que existe otro funtor $G : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ tal que $F \circ G = id_{\mathbf{D}}$ y $G \circ F = id_{\mathbf{C}}$. Cuando las identidades anteriores son reemplazadas por equivalencias naturales, se dice que F es una equivalencia de categorías.

Ejemplo 3.2.8. Veamos como la construcción dada en el Teorema 2.3.4 define un funtor $G : \mathbf{Alex} \to \mathbf{Alex}_0$. En efecto definimos $G(X) = X_0$ siendo X_0 el A_0-espacio obtenido como cociente de X en el Teorema 2.3.4. Dada una aplicación continua $f : X \to Y$ definimos $G(f) = f_0 : X_0 \to Y_0$ como la aplicación inducida por $q_Y \circ f$ en el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_X"'] & Y \arrow[d, "q_Y"] \\ X_0 \arrow[r, "f_0"'] & Y_0 \end{tikzcd}$$

Para ver que f_0 está bien definida basta comprobar que si $U_x = U_{x'}$ entonces $q_Y(f(x))$ $= q_Y(f(x'))$. Ahora bien, por continuidad de $q_Y \circ f$ tenemos por la Proposición 2.1.6, $q_Y(f(x')) \in q_Y(f(U_{x'})) = q_Y(f(U_x)) \subseteq U_{q_Y(f(x))}$ y $q_Y(f(x)) \in q_Y(f(U_x)) = q_Y(f(U_{x'})) \subseteq U_{q_Y(f(x'))}$. Por tanto, $U_{q_Y(f(x))} = U_{q_Y(f(x'))}$ es el abierto mínimo tanto de $q_Y(f(x))$ como de $q_Y(f(x'))$ (ver Teorema 2.3.4). Ahora, aplicando que Y_0 es T_0, concluimos que $q_Y(f(x)) = q_Y(f(x'))$ por el Lema 2.1.3.

Dedicamos el resto de la sección a describir la identificación entre A-espacios y conjuntos preordenados debida a Alexandrov ([1]) y Tucker ([22]) como un isomorfismo entre las categorías **Alex** y **PreOrd**. Comenzamos con el siguiente lema.

Lema 3.2.9. Si $\leq$ es un preorden en X, entonces la familia de los ideales principales en X:

$$\downarrow x = \{y \in X; y \leq x\},\ x \in X$$

es base mínima para una A-topología sobre X para la cual los abiertos son exactamente los conjuntos decrecientes (o, equivalentemente, los cerrados son los conjuntos crecientes). Más aún, si "$\leq$" es un poset, entonces esta topología es T_0.

Demostración. Para ver que la familia anterior forma una base minimal usaremos el Lema 1.2.8. Obviamente $x \in \downarrow x$. Más aún, si $z \in \downarrow x$, claramente tenemos $\downarrow z \subseteq \downarrow x$. Esto prueba tanto la segunda condición del lema como que los conjuntos $U_x = \downarrow x$ forman una base minimal.

Si además $(X, \leq)$ es un poset, entonces si $x \in U_y$ e $y \in U_x$ tenemos que $x \leq y$ y $y \leq x$. Por tanto $x = y$, es decir, la topología así construida es T_0.

Finalmente, si A es un conjunto decreciente se prueba fácilmente que $A = \cup_{a \in A} \downarrow a$, esto es, A es un abierto de esta topología. □

Definición 3.2.10. A la topología anterior la llamaremos *topología del preorden "$\leq$"* y la denotaremos por $\mathcal{T}_{\leq}$.

Nota 3.2.11. También es base mínima para una topología sobre X la familia de filtros principales $\uparrow x$, que sería la topología del preorden opuesto definido por $x \leq^{op} y$ si $y \leq x$.

De manera inversa tenemos el siguiente lema.

Lema 3.2.12. En todo A-espacio $(X, \mathcal{T})$ se puede definir un preorden $\leq_{\mathcal{T}}$ (*preorden de especialización* de $\mathcal{T}$) estableciendo $x \leq_{\mathcal{T}} y$ si se cumple una de las siguientes condiciones equivalentes:

$$x \in \overline{\{y\}} \Leftrightarrow y \in U_x, \text{ para todo entorno } U_x \text{ de } x \Leftrightarrow \overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$$

Más aún, si $(X, \mathcal{T})$ es T_0 entonces el preorden $\leq_{\mathcal{T}}$ es de hecho un orden parcial.

Demostración. La propiedad reflexiva sigue de $x \in U_x$. Para ver la propiedad transitiva, supongamos $x \leq_{\mathcal{T}} y$ e $y \leq_{\mathcal{T}} z$. Entonces tenemos $x \in U_y$ y $y \in U_z$, respectivamente. En particular, por ser X un A-espacio, $U_y \subseteq U_z$. Por tanto tenemos $x \in U_y \subseteq U_z$, es decir, $x \leq_{\mathcal{T}} z$.

Si además $(X, \mathcal{T})$ es T_0, y tenemos $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x \in U_y$ e $y \in U_x$ y por ello $U_x \subseteq U_y$ y $U_y \subseteq U_x$. Así que $U_x = U_y$, y por el Lema 2.1.3 tenemos $x = y$. □

Teorema 3.2.13. Toda relación de preorden "$\leq$" sobre un conjunto X coincide con el preorden de especialización de su topología. Más aún, toda A-topología $\mathcal{T}$ sobre X es la topolología de su preorden de especialización. Además, $f : (X, \leq) \longrightarrow (Y, \preceq)$ es ordenada si y sólo si $f : (X, \mathcal{T}_{\leq}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_{\preceq})$ es continua.

Demostración. Denotemos por "$\trianglelefteq$" el preorden de especialización de $\mathcal{T}_\leq$ y supongamos que $x \trianglelefteq y$, esto es, $x \in U_y$. Como el abierto mínimo de y en $\mathcal{T}(\leq)$ es el ideal principal de y con respecto al preorden "$\leq$", $U_y = \downarrow y$, se sigue que $x \leq y$.

Si ahora A es un abierto de la topología del preorden de especialización de $\mathcal{T}$ podemos escribir A como la unión $A = \cup_{a \in A} \downarrow a$ donde los ideales principales están tomados respecto a "$\leq_\mathcal{T}$". Pero, respecto a este orden, es inmediato probar que $\downarrow a = U_a$ es el abierto mínimo de a en la A-topología $\mathcal{T}$, y así A es abierto de esta topología.

Ahora, si $f : (X, \mathcal{T}_\leq) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_\preceq)$ es continua, entonces, la continuidad y la definición de la topología del preorden nos dan $\downarrow x = U_x \subseteq f^{-1}(U_{f(x)}) = f^{-1}(\downarrow f(x))$. Luego si $y \leq x$, entonces $f(y) \preceq f(x)$. El recíproco es análogo. □

Usando el lenguaje de categorías y funtores, podemos reescribir el Teorema 3.2.13 como sigue:

Teorema 3.2.14. Hay un isomorfismo de categorías:

$$\Phi : \mathbf{Alex} \longrightarrow \mathbf{PreOrd}$$

que lleva $(X, \mathcal{T})$ en $(X, \leq_\mathcal{T})$, y que es es una identidad sobre los morfismos. Su inverso:

$$\Phi^{-1} : \mathbf{PreOrd} \longrightarrow \mathbf{Alex}$$

viene dado por $\Phi^{-1}(X, \leq) = (X, \mathcal{T}_\leq)$.

Para la subcategoría llena $\mathbf{Alex}_0 \subseteq \mathbf{Alex}$, el isomorfismo anterior se restringe a un isomorfismo de categorías:

$$\Phi : \mathbf{Alex}_0 \longrightarrow \mathbf{Poset}$$

Nota 3.2.15. El isomorfismo Φ en el Teorema 3.2.14 tiene las siguientes propiedades:

1. Si $\leq$ y $\preceq$ son los preórdenes de especialización de los A-espacios X e Y, respectivamente, entonces el preorden de especialización de la unión topológica de $X \sqcup Y$ está dado por $z \leq_{X \sqcup Y} z'$ si $z, z' \in X$ y $z \leq z'$ ó $z, z' \in Y$ y $z \preceq z'$. Esto es inmediato a partir de la Proposición 2.1.9.

2. Igualmente, como consecuencia de la Proposición 2.1.10 se tiene que el preorden de especialización del producto topológico $X \times Y$ es el *preorden producto* de "$\leq$" y "$\preceq$" sobre $X \times Y$, esto es, $(x, y) \leq_{X \times Y} (x', y')$ si $x \leq x'$ e $y \preceq y'$.

3. Si $\mathcal{T}$ es la A-topología del preorden "$\leq$", entonces la topología del preorden opuesto $\leq^{op}$ es la *topología opuesta* a $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^{op}$, cuyos abiertos son los cerrados de $\mathcal{T}$. En efecto, un abierto de la topología del orden opuesto es una unión $G = \cup_{x \in G} \uparrow x$ que es un conjunto creciente para el orden original y por tanto un cerrado de $(X, \mathcal{T})$; ver el Lema 3.2.9.

   Nótese que la existencia de una topología opuesta es, pues, una caracterización de las A-topologías sobre un conjunto X.

3.3. Algunas consecuencias

En esta sección vemos algunas propiedades topológicas de los A-espacios en términos de los preórdenes que definen. Comenzamos con el siguiente resultado.

Proposición 3.3.1. Los elementos minimales de un conjunto preordenado $(X, \leq)$ son abiertos unitarios de la A-topología asociada al preorden. Igualmente, los elementos maximales de X son conjuntos cerrados unitarios. En particular, $Min(X)$ es un subespacio abierto discreto y y $Max(X)$ es un subespacio cerrado discreto.

Demostración. Si $x \in Min(X)$, entonces no existe $y \in X$ tal que $y \leq x$, esto es, para el abierto mínimo de x en $\mathcal{T}_{\leq}$ tenemos $y \notin U_x$ para todo $y \neq x$, luego $U_x = \{x\}$. Análogamente, si $x \in Max(X)$, no existe $y \in X$ tal que $x \leq y$, esto es, x no está en ningún abierto mínimo U_y si $y \notin U_x$ o, equivalentemente, $y \notin \overline{\{x\}}$ si $y \neq x$, esto es, $\overline{\{x\}} = \{x\}$. Así pues, $Min(X)$ es abierto en $(X, \mathcal{T}(\leq))$ y, por ser un A-espacio, $Max(X)$ es cerrado por ser unión (posiblemente infinita) de cerrados. $\square$

Como todo poset finito tiene algún elemento maximal y minimal, tenemos la siguiente consecuencia.

Corolario 3.3.2. Todo F_0-espacio posee al menos un punto que es subconjunto cerrado y otro punto que es abierto.

Ejemplo 3.3.3. La propiedad del Corolario 3.3.2 no se cumple para A-espacios en general. Basta considerar el orden natural sobre los números enteros para el cual, $Max(\mathbb{Z}) = Min(\mathbb{Z}) = \emptyset$.

De hecho en los F-espacios los abiertos pueden ser descritos como las anticadenas del preorden asociado.

Proposición 3.3.4. Los abiertos de un F-espacio $(X, \mathcal{T})$ están en correspondencia biunívoca con las anticadenas de su preorden asociado. Más precisamente, la anticadena asociada a un abierto G es el conjunto $Max(G)$.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ la familia de anticadenas de X (incluyendo la anticadena vacía). Sea $\psi : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$ la aplicación que lleva G en $Max(G)$. Para ver que ψ es sobreyectiva, dada una anticadena $A \in \mathcal{A}$ consideramos el abierto $G = \cup_{x \in A} U_x$. Por definición del preorden, tenemos que $Max(G) = A$. La inyectividad de ψ sigue inmediatamente si comprobamos la igualdad $G = \cup_{x \in Max(G)} U_x$. Para ver esta igualdad, sea $y \in G$, y C una secuencia de longitud máxima de elementos comparables en G conteniendo a y. Entonces el elemento máximo de C, digamos m, es maximal en G, pues si no es así existe $x \in G$ con $m \leq x$ y la secuencia C puede ser alargada añadiendo x. Entonces $y \in U_m$ y tenemos la inclusión $G \subseteq \cup_{x \in Max(G)} U_x$. La otra inclusión es obvia. $\square$

También podemos usar las anticadenas para demostrar el siguiente resultado.

Proposición 3.3.5. Sean X un F-espacio y $f : X \to X$ continua e inyectiva, o bien sobreyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Por ser X finito, si f es inyectiva o sobreyectiva, entonces f es biyectiva, y por tanto existe f^{-1} que es también biyectiva. y por tanto induce, para la familia de las partes de X, $\mathcal{P}(X)$, la aplicación biyectiva $\mathcal{P}(f^{-1}) : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, con $\mathcal{P}(f^{-1})(A) = f^{-1}(A)$, $A \in \mathcal{P}(X)$. Esta aplicación tiene como inversa $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, definida como $\mathcal{P}(f)(B) = f(B)$, para todo $B \in \mathcal{P}(X)$.

Ahora probaremos que f^{-1} es continua. Para ello, sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ la subfamilia de las anticadenas de X. Como f es continua, f es ordenada para el preorden de especialización y entonces $f^{-1}(A)$ es una anticadena si A es una anticadena. Así pues, $\mathcal{P}(f^{-1})$ se restringe a $\mathcal{P}(f^{-1}) \mid_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$. Como $\mathcal{P}(f^{-1})$ es inyectiva, entonces $\mathcal{P}(f^{-1}) \mid_{\mathcal{A}}$ también lo es. Al ser $\mathcal{A}$ finita, $\mathcal{P}(f^{-1}) \mid_{\mathcal{A}}$ es una biyección, con inversa la restricción $\mathcal{P}(f) \mid_{\mathcal{A}}$.

Luego si A' es una anticadena cualquiera de $\mathcal{A}$, $\mathcal{P}(f)\mid_{\mathcal{A}}(A') = f(A')$ es también una anticadena. Entonces, dado cualquier abierto $G \subseteq X$, usamos la Proposición 3.3.4 para escribir $G = \cup_{a\in A} U_a$ para cierta anticadena A . Como f es ordenada, se sigue fácilmente $f(G) = \cup_{y\in f(A)} U_y$, y teniendo en cuenta que $f(A)$ es una anticadena por la observación anterior, deducimos que $f(G)$ es abierto y f^{-1} es continua. $\square$

Terminamos caracterizando la conexión y la compacidad de los A-espacios por medio del orden asociado por el Teorema 3.2.14. Para la conexión se tiene como consecuencia inmediata del Teorema 2.2.3 el siguiente resultado.

Teorema 3.3.6. Un A-espacio X es conexo (o, equivalentemente, conexo por caminos) si y sólo si existe una secuencia de elementos comparables para el orden de especialización entre dos puntos cualesquiera de X.

Para la compacidad tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.3.7. Un A-espacio X es compacto si y sólo si $Max(X)$ es finito, y todo $x \in X$ es menor que algún elemento de $Max(X)$.

Demostración. Supongamos que X es compacto, y sea $X = \cup_{x\in X} U_x$ el recubrimiento de X por abiertos mínimos. Por compacidad existe un subconjunto finito $J = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ tal que $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_s}$. Podemos suponer que ningún par en J es comparable, ya que si $x_i \leq x_j$ entonces $U_{x_i} \subseteq U_{x_j}$ y podemos eliminar U_{x_i} del subrecubrimiento finito. De ello se sigue inmediatamente que $J = Max(X)$ y que todo elemento de X es menor que algún x_j.

Si se cumplen las condiciones del teorema, y consideramos cualquier recubrimiento por abiertos $X = \cup_{\alpha\in\Lambda}\Omega_\alpha$, para cada $x \in Max(X)$ consideramos un índice $\alpha(x) \in \Lambda$ tal que $x \in \Omega_{\alpha(x)}$. Entonces $U_x \subseteq \Omega_{\alpha(x)}$y tenemos, por la segunda condición, $X = \cup_{x\in Max(X)} U_x \subseteq \cup_{x\in Max(X)}\Omega_{\alpha(x)}$, es decir X es compacto. $\square$

3.4. Diagramas de Hasse. Ejemplos

Es bien conocido que todo conjunto preordenado $(X, \leq)$ puede ser representado gráficamente como un grafo dirigido cuyos vértices son los elementos de X y aparece una arista dirigida de a a b si $a < b$. Por tanto, a todo A-espacio $(X, \mathcal{T})$ le corresponde el grafo de su preorden de especialización "$\leq_{\mathcal{T}}$". Por supuesto, dado el grafo correspondiente a $\leq_{\mathcal{T}}$, podemos visualizar la topología: un conjunto de vértices del grafo U es abierto si cada arista que tiene su punto final en un elemento de U tiene su punto inicial también en U.

Ejemplo 3.4.1. Para la topología $\mathcal{T} = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}, X, \emptyset\}$ sobre $X = \{a, b, c, d\}$ los abiertos mínimos son $U_a = \{a, b\}$, $U_b = \{b\}$, $U_c = U_d = \{b, c, d\}$. Por tanto su preorden es $b < a$, $b < c$, $b < d$, $c < d$ y $d < c$ y su grafo dirigido asociado es:

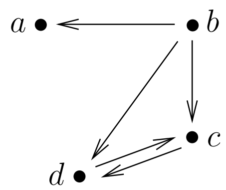


Figura 3.1.

Obsérvese que el grafo dirigido en el ejemplo anterior contiene una arista doble debido a que el espacio no es T_0. Para el caso de los A_0-espacios, es decir posets, tales aristas no existen, y el grafo dirigido queda determinado por su subgrafo descrito como sigue.

Definición 3.4.2. Dado un poset $(X, \leq)$, se llama *diagrama de Hasse asociado a X* al grafo orientado $\mathcal{H}(X)$, en el que sus vértices son los elementos de X y sus aristas son los pares ordenados (a, b) tales que $a < b$ y no existe $c \in X$ con $a < c < b$.

Como cada F-espacio $(X, \mathcal{T})$ puede ser identificado con un poset (Teorema 3.2.14), se llama diagrama de Hasse del espacio al diagrama del poset que determina.

Usualmente, $\mathcal{H}(X)$ se dibuja en el plano de tal manera que, si $a < b$ entonces el vértice que representa a b está arriba del vértice que represente a a, quedando la dirección de la arista de a a b bien definida por el dibujo.

Nota 3.4.3. Si X es un F-espacio y $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_k\}$ una base ordenada de su topología con $U_i = U_{x_i} \neq U_j = U_{x_j}$ cuando $i \neq j$, la matriz cuadrada $k \times k$ $E_{\mathcal{U}} = (e_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ definida por $\mathcal{U}$ y que representa la clase de homeomorfía de X en el Teorema 2.4.3 cumple que e_{ii} es el cardinal del conjunto $X_i = \{x \in X; x \leq x_i \text{ y } x_i \leq x\}$ para el preorden de especialización de X y $e_{ij} = -e_{ji} = 1$ con $i \neq j$ si y sólo si la arista ordenada (x_i, x_j) aparece en el grafo dirigido asociado a X.

En particular, si X es T_0 entonces $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $X_i = \{x_i\}$ y $e_{ij} = 1$ si y sólo si la arista (x_i, x_j) aparece en el diagrama de Hasse de X. Esto prueba que la correspondencia $X \mapsto \mathcal{H}(X)$ define una biyección entre las clases de homeomorfía de los F_0-espacios y las clases de isomorfía de grafos finitos dirigidos. Recordemos que un *isomorfismo de grafos dirigidos* $G_1 \cong G_2$ es una biyección entre los conjuntos de vértices $\varphi : Vert(G_1) \to Vert(G_2)$ tal que (v, w) es una arista ordenada de G_1 si y sólo si $(\varphi(v), \varphi(w))$ lo es de G_2.

Proposición 3.4.4. Si X es finito, entonces X es conexo si y sólo si el diagrama de Hasse asociado a X es conexo.

Demostración. Supongamos que el diagrama de Hasse asociado a X es conexo. Dados dos elementos $x, y \in X$, podemos encontrar un arco por aristas Γ en el diagrama de Hasse entre x e y. Como los vértices de cada arista de $\mathcal{H}(X)$ son elementos comparables en X, el arco Γ determina una secuencia de elementos comparables en X. Esto prueba que X es conexo por el Teorema 3.3.6.

Si X es conexo y $a, b \in X$, existe una secuencia de elementos comparables $x_0, x_1, \ldots, x_n$ con $a = x_0$ y $b = x_n$. Por ser X finito, si la relación entre x_i y x_{i+1}, $i = 0, \ldots, n-1$ no aparece en $\mathcal{H}(X)$ es porque se ha podido descomponer en una cadena finita de relaciones directas que dan lugar a un arco ascendente o descendente por aristas en $\mathcal{H}(X)$ entre x_i y x_{i+1}. De esta forma a y b quedan unidos $\mathcal{H}(X)$ por la yuxtaposición de estos arcos. □

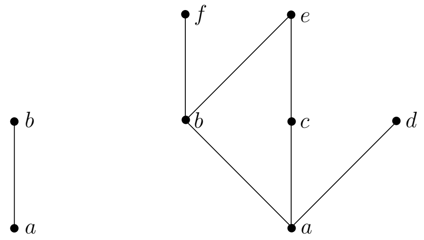
Nota 3.4.5. En general, la Proposición 3.4.4 puede no ser cierta. Ver Ejemplo 3.4.12.

Terminamos esta sección con varios ejemplos de A_0-topologías, sus órdenes asociados y los diagramas de Hasse que definen.

Ejemplo 3.4.6.

1. Si D_n denota el espacio discreto, el orden asociado es la igualdad, es decir, $x \leq x'$ si y sólo si $x = x'$ y el diagrama de Hasse $\mathcal{H}(D_n)$ es la unión disjunta de n puntos.

2. Si $(X, \mathcal{T})$ es el *espacio de Sierpinski* $X = \{a, b\}$ con $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$, entonces el orden asociado es $a \leq b$ y el diagrama de Hasse es un arco; ver Figura 3.2(a).



(a) (b)

Figura 3.2.

Ejemplo 3.4.7. Para $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ con $a < b$, $a < c$, $a < d$, $a < e$, $a < f$, $b < e$, $b < f$ y $c < e$, el diagrama de Hasse de X está descrito en la Figura 3.2(b). Obsérvese que en $\mathcal{H}(X)$ las relaciones $a < e$ y $a < f$ no aparecen explícitamente. Puesto que $\mathcal{H}(X)$ contiene a todas las anticadenas del orden, la topología del orden puede obtenerse a partir del diagrama de Hasse por medio de la Proposición 3.3.4, de forma que los abiertos mínimos son los correspondientes a las anticadenas unitarias, esto es, $U_a = \{a\}$, $U_b = \{a, b\}$, $U_c = \{a, c\}$, $U_d = \{a, d\}$, $U_e = \{a, b, c, e\}$ y $U_f = \{a, b, f\}$.

Ejemplo 3.4.8. Para $X = \{a, b, c, d\}$ se considera la topología

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a, b, d\}, \{b\}, \{d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, \{b, d\}\}$$

Como $U_a = \{a, b, d\}$, $U_b = \{b\}$, $U_c = \{c, d\}$, $U_d = \{d\}$, entonces tenemos el orden $b < a$, $d < a$, $d < c$, y el diagrama de Hasse aparece en la Figura 3.3(a).

(a) (b)

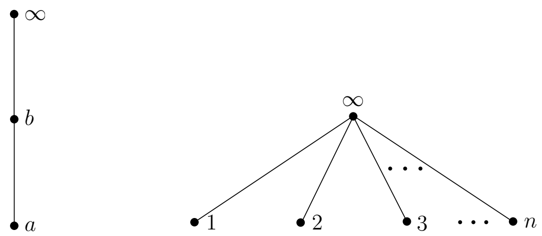
Figura 3.3.

Ejemplo 3.4.9. Ahora, supongamos que nos es dado un diagrama de Hasse indicado en la Figura 3.3(b). Del diagrama se deduce que las anticadenas no vacías con más de un elemento son $\{a, d\}$, y $\{b, c\}$. De donde se sigue que la topología de este orden es $\mathcal{T}_{\leq} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}\}$.

Ejemplo 3.4.10. Se llama *cono del* poset $(X, \leq)$ al poset $(\mathbb{C}(X), \leq)$ donde $\mathbb{C}(X) = X \cup \{\infty\}$ y el orden de X se extiende a un orden de $\mathbb{C}(X)$ tomando $x \leq \infty$ para todo $x \in X$.

Obsérvese que si $(X, \mathcal{T})$ es el A-espacio asociado a $(X, \leq)$ entonces el espacio asociado a $(\mathbb{C}(X), \leq)$ tiene por topología a $\mathcal{T}_{\mathbb{C}(X)} = \mathcal{T} \cup \{\mathbb{C}(X)\}$. El espacio $(\mathbb{C}(X), \mathcal{T}_{\mathbb{C}(X)})$ se llama *cono no-Hausdorff* o *cono de Alexandrov* de $(X, \mathcal{T})$. Nótese que $U_\infty = \mathbb{C}(X)$, por lo que, de acuerdo con el Corolario 2.3.2, todo cono de Alexandrov es contráctil.

Si $(X, \mathcal{T})$ es el espacio de Sierpinski del Ejemplo 3.4.6, el diagrama de Hasse de $(\mathbb{C}(X), \mathcal{T}_{\mathbb{C}(X)})$ está dibujado en Figura 3.4(a), mientras que el diagrama de Hasse de $\mathbb{C}(D_n)$ es el que aparece en la Figura 3.4(b).



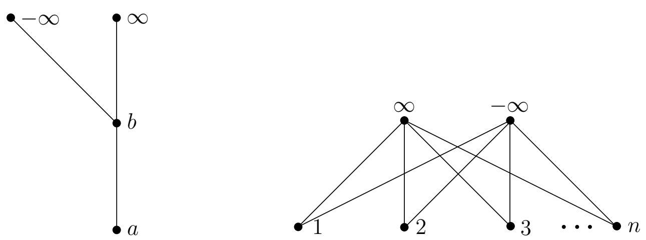
(a) (b)

Figura 3.4.

Ejemplo 3.4.11. Se llama *suspensión* del poset $(X, \leq)$ al poset $(\mathbb{S}(X), \leq)$ donde $\mathbb{S}(X) = X \cup \{-\infty, \infty\}$ y el orden de X se extiende a un orden de $\mathbb{S}(X)$ tomando $x \leq \infty$, $x \leq -\infty$ para todo $x \in X$, y ∞ y $-\infty$ no son comparables.

Obsérvese que si $(X, \mathcal{T})$ es el A-espacio asociado a $(X, \leq)$ entonces el espacio asociado a $(\mathbb{S}(X), \leq)$ es $(\mathbb{S}(X), \mathcal{T}_{\mathbb{S}(X)})$ donde $\mathcal{T}_{\mathbb{S}(X)} = \mathcal{T} \cup \{\mathbb{C}_+(X), \mathbb{C}_-(X), \mathbb{S}(X)\}$, con $\mathbb{C}_+(X) = X \cup \{\infty\}$ y $\mathbb{C}_-(X) = X \cup \{-\infty\}$.

El espacio $(\mathbb{S}(X), \mathcal{T}_{\mathbb{S}(X)})$ se llama *suspensión no-Hausdorff* o *suspensión de Alexandrov* de X. El diagrama de Hasse de la suspensión el espacio de Sierpinski aparece en la Figura 3.5(a) y para el espacio discreto D_n en la Figura 3.5(b).



(a) (b)

Figura 3.5.

Ejemplo 3.4.12. Hay ejemplos donde el diagrama de Hasse puede ser no conexo. Sea $(\mathbb{Z}, \leq)$ con el orden habitual. Entonces el diagrama de Hasse de $(\mathbb{C}(\mathbb{Z}), \leq)$ no es conexo (aunque $\mathbb{C}(\mathbb{Z})$ sí lo sea). El elemento ∞ no se une a ningún otro por la definición del diagrama de Hasse, ya que cualquier relación $x < \infty$ se descompone en $x < x' < \infty$ para algún x' (ver Figura 3.6).

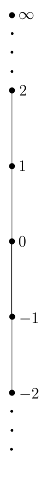


Figura 3.6.

Nota 3.4.13. Recordemos que el cono topológico habitual de un espacio X es el espacio cociente $C(X)$ obtenido del cilindro $X \times I$ al identificar todo $X \times \{0\}$ con un punto. Análogamente, la suspensión $S(X)$ es el espacio cociente obtenido de $X \times I$ al identificar $X \times \{0\}$ con un punto y $X \times \{1\}$ con otro punto.

En particular, los conos topológicos y las suspensiones topológicas de D_n son homeomorfos a los conos y suspensiones de Alexandrov de D_n.

Ejemplo 3.4.14. La *recta de Khalimsky* es el poset $K = (\mathbb{Z}, \preccurlyeq)$ donde $2k, 2k+2 \preccurlyeq 2k+1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. La *semirrecta de Khalimsky* es el subposet de K, $K_{\geq 0} = (\mathbb{Z}_{\geq 0}, \preccurlyeq)$. Sus diagamas de Hasse están descritos en las Figuras 3.7(a) y 3.7(b), respectivamente.

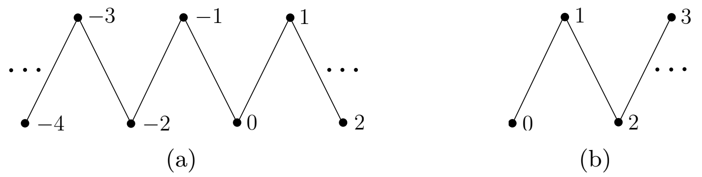


Figura 3.7.

Un *arco de Khalimsky* de longitud $n \geq 2$ es un subposet de K con n elementos consecutivos (en el orden de $\mathbb{Z}$). En la Figura 3.8(a) aparece el arco de Khalimsky comprendido entre $2k-1$ y $2k+3$. Obsérvese que para $n = 2$ un arco de Khalimsky es isomorfo al poset asociado al espacio de Sierpinski.

En general, la topología de Alexandrov asociada a la recta de Khalimsky tiene los conjuntos mínimos esquematizados en la Figura 3.8(b).

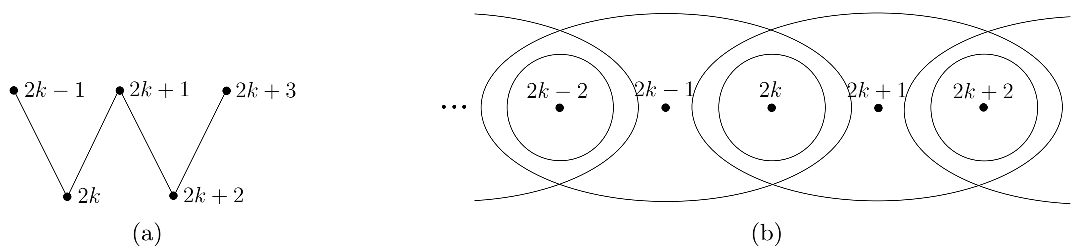


Figura 3.8.

De forma más general, se llamará *n-espacio de Khalimsky* al poset producto de n copias de la recta de Khalimsky $K^n = (\mathbb{Z}^n, \preccurlyeq_n)$. Ante la dificultad de representar el diagrama de Hasse del 2-espacio de Khalimsky siguiendo el convenio habitual, damos en la Figura 3.9 una representación plana del mismo, donde en grueso se representan los ejes coordenados. Los números indican el nivel en el diagrama de Hasse del correspondiente vértice.

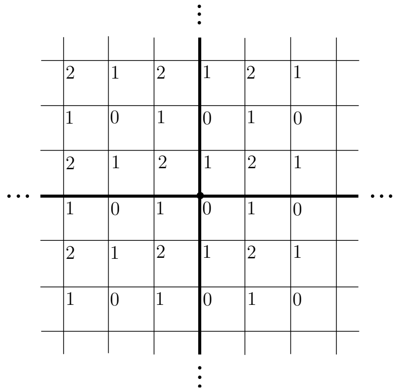


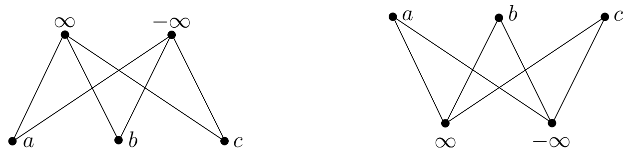
Figura 3.9.

En el ejemplo que sigue se puede ver que si invertimos el orden "$\leq$" por su opuesto, también invertimos el diagrama de Hasse y la topología del espacio asociado.

Ejemplo 3.4.15. Sea $\mathbb{S}(D_3)$, cuyo diagrama de Hasse está indicado en la Figura 3.10(a). De él podemos deducir que su topología es:

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{S}(D_3), \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{-\infty, a, b, c\}, \{\infty, a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\{a, b, c\}\}$$

Por otro lado, el diagrama de Hasse de $\mathcal{S}(D_3)^{op}$ está en la Figura 3.10(b). Se ve fácilmente que $\mathcal{T}^{op} = \{\emptyset, \mathbb{S}(D_3), \{-\infty\}, \{\infty\}, \{a, \infty, -\infty\}, \{b, \infty, -\infty\}, \{c, \infty, -\infty\}, \{a, b, \infty, -\infty\}, \{b, c, \infty, -\infty\}, \{a, c, \infty, -\infty\}, \{\infty, -\infty\}\}$, que son justamente los cerrados de $\mathcal{T}$(ver Nota 3.2.15 (3)).



(a) (b)

Figura 3.10.

3.5. Homotopía y orden

Ya comentamos en la Sección 1.5 que si por Y^X denotamos el espacio de aplicaciones continuas de X en Y dotado de la llamada topología compacto-abierto, entonces las homotopías entre aplicaciones $f, g \in Y^X$ son exactamente los caminos entre f y g (Corolario 1.5.11). Si X e Y son ahora A-espacios (o, equivalentemente, conjuntos preordenados), también podemos dotar a Y^X con el orden:

$$f \leq g \text{ si } f(x) \leq g(x) \text{ en el preorden de } Y \text{ para todo } x \in X. \tag{3.1}$$

Para la topología de Alexandrov asociada a este preorden, la conexión por caminos se corresponde a la conexión por secuencias de aplicaciones comparables por ese orden (Teorema 3.3.6). En general la ley exponencial no se cumple para esta topología, por lo que a una homotopía no siempre se le podrá asociar una secuencia de aplicaciones comparables como veremos más adelante en el Ejemplo 3.5.5. Esto sí ocurre para los F-espacios de acuerdo con el siguiente resultado.

Proposición 3.5.1. Si X es un F-espacio e Y es cualquier A-espacio, la topología compacto-abierto sobre Y^X coincide con la A-topología del orden en (3.1).

Demostración. Sea $\langle K, U\rangle = \{f \in Y^X; f(K) \subseteq U\}$ cualquiera de los conjuntos cuyas intersecciones definen la base de la topología compacto-abierto. Recordemos que U es abierto en Y y K es compacto en X. En este caso, K es cualquier subconjunto de X ya que éste es finito. Sea $K = \{x_1, \dots, x_s\}$. Dada $f \in \langle K, U\rangle$, tenemos $f(x_i) \in U$ para todo y por tanto $U_{f(x_i)} \subseteq U$. Entonces, si U_f es el abierto mínimo de f en la A-topología de Y^X, para todo $g \in U_f$, se tiene $g(x_i) \leq f(x_i)$ y por tanto $g(x_i) \in U_{f(x_i)}$. Así pues $g(K) \subseteq U$ y $g \in \langle K, U\rangle$, es decir, $U_f \subseteq \langle K, U\rangle$. De aquí se sigue fácilmente que todo abierto de la topología compacto-abierto es abierto en la A-topología del orden.

Recíprocamente, dado U_f, para cualquier $x \in X$ tenemos que, gracias a que X es finito, $\Omega = \cap_{x\in X}\langle\{x\}, U_{f(x)}\rangle$ es un abierto básico de la topología compacto-abierto que contiene a f y tal que $\Omega \subseteq U_f$ pues si $g \in \Omega$ entonces $g(x) \in U_{f(x)}$ para todo $x \in X$, es decir, $g \leq f$, o lo que es lo mismo, $g \in U_f$. □

Ahora, como una consecuencia inmediata del Corolario 1.5.11 y el Teorema 3.3.6 tenemos:

Corolario 3.5.2. Si $f, g : X \to Y$ son aplicaciones continuas del F-espacio X en el A-espacio Y, f es homotópica a g si y sólo si existe una secuencia de aplicaciones $f_1, f_2, \dots, f_n$ donde $f_1 = f$, $f_n = g$ y f_i y f_{i+1} son comparables para el preorden en (3.1) $(1 \leq i \leq n-1)$.

El siguiente ejemplo muestra que el resultado anterior no es válido para A-espacios infinitos.

Ejemplo 3.5.3. 1. La semirrecta de Khalimsky $K_{\geq 0} = (\mathbb{Z}_{\geq 0}, \preccurlyeq)$ en el Ejemplo 3.4.14 es contráctil. En efecto, para cada $n \geq 0$ consideremos la aplicación $\gamma_n : K_{\geq 0} \to K_{\geq 0}$ dada por $\gamma_n(x) = x$ si $x \leq n$ y $\gamma_n(x) = n$ para $x \geq n$. Aquí y en todo el ejemplo el símbolo "$\leq$" indicará el orden natural de $\mathbb{R}$.

Nótese que $\gamma_0(x) = 0$ es la constante. Más aún, cada γ_n es continua pues para todo $x \in K_{\geq 0}$ su abierto mínimo es $U_x = \{x\}$ si x es par y $U_x = \{x-1, x, x+1\}$ si x es impar. Por tanto $\gamma^{-1}(U_x) = U_x$ si $x \leq n-1$ y $\gamma_n^{-1}(U_x) = \emptyset$ si $x \geq n+1$. Además, $\gamma_n^{-1}(U_n) = \cup_{j\geq n} U_j$.

Ahora definimos $H : K_{\geq 0} \times I \to K_{\geq 0}$ por $H(x,t) = \gamma_n(x)$ si $\frac{n}{n+1} \leq t < \frac{n+1}{n+2}$ $(n \geq 0)$ y $H(x, 1) = x$.

Una vez que comprobemos que H es continua, tendremos una homotopía entre la identidad de $K_{\geq 0}$ y la constante γ_0 y concluiremos que $K_{\geq 0}$ es contráctil. Para probar la continuidad, sea Ω un abierto de $K_{\geq 0}$. Veremos que su preimagen $H^{-1}(\Omega)$ es un conjunto abierto comprobando que todo punto $(x,t) \in H^{-1}(\Omega)$ está en su interior. Para ello consideramos tres casos:

a) Para $0 \leq t < \frac{1}{2}$, $H(x,t) = \gamma_0(x) = 0 \in \Omega$ y $H(U_x \times [0, \frac{1}{2})) = 0 \in \Omega$, es decir, $(x,t) \in int\ H^{-1}(\Omega)$.

b) Si $\frac{n-1}{n} < t < \frac{n+1}{n+2}$ con $n \geq 1$, entonces $H(x,t) = \gamma_n(x) \in \Omega$ si $t \geq \frac{n}{n+1}$ y $H(x,t) = \gamma_{n-1}(x)$ si $t < \frac{n}{n+1}$. Como γ_n y γ_{n-1} son continuas sabemos que $\gamma_n(U_x) \cup \gamma_{n-1}(U_x) \subseteq \Omega$ (Proposición 2.1.6). Entonces $H(U_x \times (\frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n+2})) = \gamma_n(U_x) \cup \gamma_{n-1}(U_x) \subseteq \Omega$. Así pues, también en este caso, $(x,t) \in int\ H^{-1}(\Omega)$.

c) Finalmente, si $t = 1$ $H(x,1) = x \in \Omega$ y $U_x \subseteq \Omega$. Si tomamos n suficientemente grande para que $n > x+1$, entonces $\gamma_m(x) = x$ para todo $m \geq n$ y por tanto $H(U_x \times (\frac{n}{n+1}, 1]) = U_x \subseteq \Omega$, verificándose que $(x,1) \in int\ H^{-1}(\Omega)$.

A pesar de la existencia de la homotopía H, no se puede encontrar una secuencia (finita) de funciones comparables entre la identidad de $K_{\geq 0}$ y la constante γ_0 como en el Corolario 3.5.2. En efecto, supongamos que existiese tal secuencia $f_0, f_1, \ldots, f_n$ donde f_0 es la identidad y f_n es la constante γ_0. Además podemos suponer que los elementos de esta secuencia son todos distintos.

Teniendo en cuenta el orden "$\preccurlyeq$" de la semirrecta de Khalimsky, si $f_1 \leq f_0$, entonces para todo entero par tenemos $f_1(2n) \preccurlyeq 2n$ y por tanto $f_1(2n) = 2n$. Ahora por ser f_1 ordenada, $2n = f_1(2n) \preccurlyeq f_1(2n+1) \succcurlyeq f_1(2n+2) = 2n+2$ y, necesariamente, $f_1(2n+1) = 2n+1$. Así que $f_1 = f_0$, que ya hemos descartado. En el caso que $f_0 \leq f_1$, se sigue $2n+1 \preccurlyeq f_1(2n+1)$ y, necesariamente, $f_1(2n+1) = 2n+1$. Ahora, por conservar f_1 el orden, $2n-1 = f_1(2n-1) \succcurlyeq f_1(2n) \preccurlyeq 2n+1 = f_1(2n+1)$ ($n \geq 1$) y $f_1(0) \preccurlyeq 1 = f_1(1)$. En consecuencia, $f_1(2n) = 2n$ si $n \geq 1$ y , como $f_1 \neq f_0$, $f_1(0) = 1$.

Acabamos de ver que, necesariamente, $f_0 \leq f_1$, por lo que si $f_1 \leq f_2$ entonces $f_0 \leq f_2$ y el razonamiento anterior nos lleva a que $f_2 = f_1$, y este caso está descartado. Por tanto, sólo queda que $f_2 \leq f_1$ y, entonces, $f_2(2n) = f_1(2n) = 2n$ si $n \geq 1$, así que $f_2(2n) = 2n$ si $n \geq 1$. Además, $f_2(0) \preccurlyeq f_1(0) = 1$ y $f_2(1) \preccurlyeq f_1(1) = 1$, lo que da para estas imágenes las opciones 0,1 y 2. Por otro lado, para $n \geq 1$, $f_2(2n+1) \preccurlyeq f_1(2n+1) = 2n+1$ y por ser f_2 ordenada $2n = f_2(2n) \preccurlyeq f_2(2n+1) \succcurlyeq f_2(2n+2) = 2n+2$ y, necesariamente, $f(2n+1) = 2n+1$ para $n \geq 1$.

Fijemos ahora los valores $f_2(0)$ y $f_2(1)$. Como $f_2(2) = 2 \preccurlyeq f_2(1) \preccurlyeq 1$ sólo puede ocurrir que $f_2(1) = 1$ o que $f_2(1) = 2$. En el primer caso a $f_2(0)$ le quedan las opciones $f_2(0) = 0$ (y f_2 es la identidad, por lo que está descartado) ó $f_2(0) = 1$ (y $f_2 = f_1$, que también está descartado). Así pues $f_2(1) = 2$ y como $f_2(0) \preccurlyeq f_2(1) = 2$, necesariamente $f_2(0) = 2$.

Reiterando este razonamiento, cuando llegamos a f_n aún tenemos infinitos valores con $f_n(x) = x$ y por tanto no existe tal secuencia.

2. También la recta de Khalimsky $K = (\mathbb{Z}, \preccurlyeq)$ es contráctil y tampoco hay secuencias finitas de funciones comparables entre la identidad y la constante 0. La construcción de la homotopía es similar al caso de la semirrecta. Para demostrar que no existen las secuencias finitas de funciones comparables se sigue el argumento de la semirrecta, pero es aún más restrictivo ya que es no difícil comprobar que la única aplicación $f : K \to K$ comparable con la identidad es la propia identidad.

Para los conjuntos finitos, la caracterización de aplicaciones homotópicas dada en el Corolario 3.5.2 permitió a Stong ([21]) dar un método para reducir el estudio de los tipos de homotopía de estos espacios al de tipos de homeomorfía. Para ello usó la siguiente definición en términos del orden de especialización.

Definición 3.5.4. Sea X un A-espacio. Un punto $x \in X$ se dice que es *eliminable ascendentemente* (abreviado como *punto e.a.*) si existe $y \in X$ con $y \geq x$ tal que $z \geq x$ implica $z \geq y$. De forma similar, un punto $x \in X$ se dice que es *eliminable descendentemente* (abreviado a *punto e.d.*) si existe $y \in X$ con $y \leq x$ tal que $z \leq y$ para todo $z \leq x$.

Un A-espacio se dice *minimal* si es T_0 y no tiene puntos e.a. ni puntos e.d. A todo subespacio minimal de un A-espacio que sea retracto de deformación de X se le llama un *alma* de X.

Ejemplo 3.5.5. La situación de un punto e.a. en el diagrama de Hasse de un espacio está esbozada en la Figura 3.11(a) y la de un punto e.d. en la Figura 3.11(b).

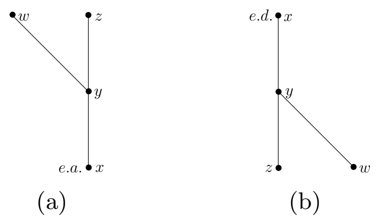


Figura 3.11.

Para los espacios minimales finitos los tipos de homotopía se reducen al los tipos de homeomorfia. Más explícitamente, Stong ([21]) obtuvo los siguientes resultados.

Teorema 3.5.6. Si X es un espacio minimal finito y $f : X \to X$ es homotópica a la identidad entonces f es la identidad.

Demostración. De acuerdo con el Corolario 3.5.2 tenemos una secuencia de aplicaciones comparables $f = f_0, f_1, \ldots, f_n = id$. Por inducción sobre la longitud de la secuencia, podemos suponer sólo los casos $f \geq id$ y $f \leq id$. En el primero, si $x \in X$ es maximal entonces $f(x) = x$. Sea h la altura máxima en el diagrama de Hasse de X. Como la altura h la ocupan elementos maximales, podemos suponer por inducción sobre $k \leq h$ que $f = id$ sobre los elementos de altura $\geq h - k$. Si x tiene altura $h - k - 1$ y $f(x) \neq x$, entonces x no es maximal y todo $z \in X$ con $z > x$ tiene altura $\geq h - k$. Entonces, por la hipótesis de inducción y el ser f ordenada, $z = f(z) \geq f(x) \geq x$. Esto es lo mismo que decir que $f(x)$ es un punto e.a que no existen por ser X minimal y llegamos a una contradicción.

Para el caso $f \leq id$ razonamos análogamente para los puntos minimales y desde la altura 0. □

Corolario 3.5.7. Toda equivalencia de homotopía entre espacios minimales finitos es un homeomorfismo.

Demostración. Si $f : X \to Y$ es una equivalencia de homotopía, existe $g : Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ g \simeq id_Y$ y $g \circ f \simeq id_X$. Entonces por el Teorema 3.5.6, $f \circ g = id_Y$ y $g \circ f = id_X$. □

Además del resultado anterior, Stong también probó en [21] la existencia de almas para los F-espacios.

Teorema 3.5.8. Sea X un F-espacio. Entonces X admite un alma.

Demostración. De acuerdo con el Teorema 2.3.4, X admite un retracto de deformación que es T_0, por lo que se puede suponer que X ya es T_0. Supongamos que $x \in X$ es un punto e.a. de X. Es decir, existe $y \geq x$ tal que para todo $z \geq x$ se tiene $z \geq y$. Con estos datos se define una retracción $r : X \to X - \{x\}$ tomando $r(z) = z$ si $z \neq x$ y $r(x) = y$. Es obvio que $r \geq id$. Afirmamos que r es ordenada y por tanto continua entre los A-espacios y de esta forma $i \circ r \simeq id$ por el Corolario 3.5.2, siendo $i : X - \{x\} \to X$ la inclusión. Supongamos que $w \leq w'$. Consideramos los siguientes casos:

1. $w, w' \neq x$. Trivialmente, $r(w) = w \leq w' = r(w')$.

2. $w = x$. Entonces $r(w) = y \leq w' = r(w')$.

3. $w' = x$. Ahora, $r(w) = w \leq x \leq y = r(w')$.

Este procedimiento puede ser continuado hasta acabar sin puntos e.a. y un razonamiento similar se usaría para eliminar los punto e.d., llegando así a un alma de X como se quería. □

Corolario 3.5.9. Dos F-espacios son homotópicamente equivalentes si y sólo si tienen almas homeomorfas. En particular, todas las almas de un F-espacio son homeomorfas.

Demostración. De la propiedad transitiva de la relación de homotopía se sigue que las almas de X e Y son homotópicamente equivalentes. Entonces por el Corolario 3.5.7 estas almas son homeomorfas. □

Ejemplo 3.5.10. Para el A-espacio X cuyo diagrama de Hasse aparece en la Figura 3.2(b) podemos hacer una secuencia finita de eliminaciones como se indica en la Figura 3.12, hasta quedarnos con un sólo punto, que es su alma. Análogamente, los A-espacios cuyos diagramas de Hasse son los de las Figuras 3.2(a), 3.3(a), 3.4(a), 3.4(b), 3.5(a) y 3.8(a) tienen como alma un punto; es decir, son contráctiles. En contraste, los diagramas de Hasse de las Figuras 3.3(b), 3.5(b), 3.10(a) y 3.10(b) representan A-espacios minimales, luego cada uno de ellos es igual a su respectiva alma.

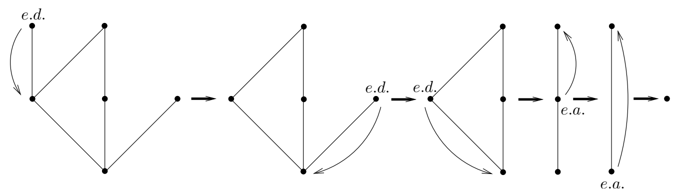


Figura 3.12.

Nota 3.5.11. La secuencia de eliminaciones no tiene por qué ser única.

Nota 3.5.12. Toda clase de homotopía de cualquier F-espacio tiene un representante con el menor número de elementos. Este representante debe ser por tanto un espacio minimal puesto que su alma es un subespacio homotópicamente equivalente a él. En particular, este representante mínimo es homeomorfo al alma de cualquiera de los espacios en esa clase de homotopía.

Estas observaciones están en la base de la construcción del algoritmo dado en [9] que permite estimar el número de clases de homotopía de F-espacios de un tamaño dado. En ese mismo trabajo se demuestra que el número de clases de homotopía de los F-espacios es asintótico con el número de clases de homeomorfía ([9]; Corolario 9.3).

Capítulo 4

A-espacios y Poliedros

El artículo [1] en el que Alexandrov presentó los A-espacios y su caracterización como preórdenes contiene también la observación de que los A_0-espacios (o, equivalentemente, los posets) tienen asociados de manera natural un complejo simplicial. Mucho más tarde, ya en 1966, McCord ([16]) estudió en profundidad esta relación, llegando a demostrar que desde el punto de vista de la topología algebraica los A-espacios son equivalentes a los complejos simpliciales.

En este capítulo presentamos el paso de ida y vuelta entre la clase de A_0-espacios y la clase de complejos simpliciales.

4.1. Topología Simplicial

Los poliedros son el prototipo de objetos geométricos dotados de una estructura combinatoria al estar construidos a partir de puntos, segmentos, triángulos, tetraedros, etc., que son pegados por sus caras. El estudio topológico de los poliedros forma una especialidad de la Topología conocida como Topología Simplicial o Poliedral. En esta sección recordaremos las definiciones básicas de esta disciplina. Para los detalles se pueden consultar los manuales [17] o [20].

Recordemos que una colección de puntos $\{a_0, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ se dice *afínmente independiente* si los vectores $\{a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0\}$ son linealmente independientes. El *n-símplice* generado por $\{a_0, \ldots, a_n\}$ es el conjunto convexo

$$\sigma^n = \{x \in \mathbb{R}^m; x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \text{ con } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \text{ y } \lambda_i \geq 0\}.$$

Así un 0-símplice es un punto, un 1-símplice es un segmento, un 2-símplice es un triángulo y un 3-símplice es un tetraedro. Si $e_i = (0, \ldots, \overset{\overset{i}{\wedge}}{1}, 0, \ldots)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$, se llama *n-símplice canónico* Δ^n al que tiene por vértices e_i $(1 \leq i \leq n+1)$.

Los coeficientes λ_i son llamados *coordenadas baricéntricas*. El punto de σ con todas sus coordenadas iguales a $\frac{1}{n+1}$ se llama el *baricentro* de σ y se denota $b(\sigma)$. El *interior (afín)* de σ es el conjunto $\overset{\circ}{\sigma} = \{x \in \sigma; \lambda_i > 0\}$. Los puntos a_i $(0 \leq i \leq n)$ se llaman *vértices* de σ y se escribirá $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ para representar de manera explícita el símplice en función de sus vértices.

Nota 4.1.1. 1. Dos n-símplices $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ y $\tau = (b_0, \ldots, b_n)$ son afínmente isomorfos; esto es, existe $f : \sigma^n \to \tau^n$ biyectiva, con $f(\Sigma_{i=0}^{n} \lambda_i a_i) = \Sigma_{i=0}^{n} \lambda_i b_i$.

2. Un n-símplice $\sigma = (a_0, \dots, a_n) \subseteq \mathbb{R}^m$ se considera topologizado por la topología relativa de $\mathbb{R}^m$. Obsérvese que ésta coincide con la topología intrínseca de σ definida por la distancia $d(\Sigma_{i=0}^n \lambda_i a_i, \Sigma_{i=0}^n \mu_i a_i) = \sqrt{\Sigma_{i=0}^n (\lambda_i - \mu_i)^2}$.

3. Si $\sigma \subseteq \mathbb{R}^m$ es un n-símplice su interior afín no coincide con el interior topológico si $n \neq m$ pues este último es vacío.

Sean σ y τ dos símplices en $\mathbb{R}^m$. Se dice que τ es *cara* de σ, y lo denotaremos por $\tau \leq \sigma$, si los vértices de τ son vértices de σ. Si $\tau \neq \sigma$ y $\tau \leq \sigma$ diremos que τ es una *cara propia* de σ y escribiremos entonces $\tau < \sigma$. Si $\tau \leq \sigma$, se dirá que $\mathring{\tau}$ es una *cara abierta* de σ. La unión de caras propias de un n-símplice $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ se llama *borde* de σ, y lo denotaremos por $\dot{\sigma}$. Nótese que $\dot{\sigma} = \{x \in \sigma;\ x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i$ tal que $\lambda_j = 0$ para algún $j\}$ y por tanto $\mathring{\sigma} = \sigma - \dot{\sigma}$. Se tienen las dos propiedades siguientes:

a) Todo símplice es unión disjunta de sus caras abiertas.

b) Dos caras de un mismo símplice o son disjuntas o intersectan en una cara común a ambas.

Definición 4.1.2. Llamamos *complejo simplicial* a una colección K (no necesariamente finita) de símplices en algún espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ verificando:

1. Si $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ entonces $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ ó $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara común de σ_1 y σ_2.

2. Si $\sigma \in K$ y $\tau \leq \sigma$ entonces $\tau \in K$.

La *dimensión* de K es el número $\text{máx}\{\dim \sigma; \sigma \in K\}$.

Nótese que todo símplice σ determina un complejo simplicial al considerar σ y todas sus caras. En lo que sigue, σ denotar indistintamente un símplice o el complejo simplicial determinado por él.

Un *subcomplejo* $L \subseteq K$ es un conjunto de símplices de K que es un complejo simplicial. Se llama m-*esqueleto* de K y se denota K^m al subcomplejo

$$K^m = \{\sigma \in K;\ \dim \sigma \leq m\}$$

Diremos que K^0 es el *conjunto de vértices* de K y los 1-símplices serán llamados las *aristas* de K.

Al conjunto de todos los puntos que conforman los símplices de K se le denomina *poliedro subyacente* de K, y lo denotaremos por $|K|$, es decir, $|K| = \cup\{\sigma;\ \sigma \in K\}$. Es una consecuencia inmediata de la propiedad a) dada más arriba que todo $x \in |K|$ está en el interior de un único símplice de K, llamado *símplice soporte* de x.

El poliedro $|K|$ puede ser dotado de dos topologías naturales: la topología relativa de $\mathbb{R}^n$ o la topología débil de los símplices; es decir, un conjunto $A \subseteq |K|$ se declara abierto si la intersección $A \cap \sigma$ es abierto en cada símplice $\sigma \in K$. La segunda, que contiene a la primera, es la que se usa habitualmente y así lo haremos en este trabajo. Ambas topologías coinciden si y sólo si el complejo es *localmente finito*, esto es, si todo vértice pertenece sólo a una cantidad finita de símplices de K.

Definición 4.1.3. Sean K_1 y K_2 complejos simpliciales y φ una aplicación definida entre los vértices de K_1 y K_2. Se dice que φ es *aplicación simplicial* si dado un símplice $\sigma \in K_1$ con $\sigma = (v_0, \dots, v_n)$, los vértices $\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_n)$ conforman un símplice en K_2.

Al referirnos a una aplicación simplicial φ entre K y L, escribiremos $\varphi : K \to L$. Obsérvese que la composición de aplicaciones simpliciales es siempre una aplicación simplicial.

Un *isomorfismo simplicial* entre dos complejos simpliciales K_1 y K_2 es una biyección φ entre los vértices tal que $(v_0, \ldots, v_n)$ es un símplice de K_1 si y sólo si $(\varphi(v_0), \ldots, \varphi(v_n))$ es un símplice de K_2.

Toda aplicación simplicial $\varphi : K_1 \to K_2$ da lugar a una aplicación $|\varphi| : |K_1| \to |K_2|$ definida por extensión lineal. Esto es, si $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i \in \sigma = (v_0 \ldots v_n)$ se define $|\varphi|(x) = \sum \lambda_i \varphi(v_i)$. Nótese que $|\varphi|$ es continua para las dos posibles topologías sobre $|K|$.

Definición 4.1.4. Sea K un complejo simplicial y $\sigma \in K$ un símplice. Se llama *estrella* de σ en K al subcomplejo:

$$st(\sigma; K) = \{\tau \in K;\ \text{existe } \rho \in K \text{ con } \tau, \sigma \leq \rho\}.$$

Obsérvese que $|st(\sigma; K)| = \bigcup\{\mu \in K; \sigma \leq \mu\}$.

Si $x \in |K|$ se define la *estrella* de x en K como el subcomplejo $st(x; K)$ de K formado por los símplices que contienen a x y todas sus caras. Si $\sigma \in K$ es el símplice soporte de x se tiene $st(x; K) = st(\sigma; K)$. Por otra parte se define la *estrella abierta* de $x \in |K|$ como el conjunto

$$\overset{\circ}{st}(x; K) = \bigcup\{\overset{\circ}{\mu}; \mu \in K \text{ y } x \in \mu\}. \tag{4.1}$$

La propiedad clave de la estrella abierta es que define un abierto de la topología débil de $|K|$ a partir de la estructura simplicial. Esto se debe al hecho de que cuando la intersección $\overset{\circ}{st}(x; K) \cap \sigma$ no es vacía, entonces $x \in \sigma$ y esa intersección es justamente la diferencia $\sigma - \cup\{\tau < \sigma; x \notin \tau\}$.

Definición 4.1.5. Sean K y K' complejos simpliciales. Se dice que K' es una *subdivisión* de K si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $|K| = |K'|$.
2. Todo símplice de K es unión de símplices de K'. En particular los vértices de K son vértices de K'.

Prestaremos especial atención al caso particular de subdivisión llamada subdivisión baricéntrica y cuya definición es como sigue.

Definición 4.1.6. Sea K un complejo simplicial. Dada una secuencia de símplices de K ordenada por la relación de cara $\sigma_0 < \sigma_1 < \ldots \sigma_n \in K$, el conjunto de sus baricentros $\{b(\sigma_0), \ldots, b(\sigma_n)\}$ es afínmente independiente y determina así un símplice contenido en σ_n. La *subdivisión baricéntrica* de K, sdK, es el complejo simplicial formado por estos símplices descritos, teniendo así como vértices los baricentros $b(\sigma)$ con $\sigma \in K$.

Nota 4.1.7.

1. Nótese que si σ es de dimensión n, los n-símplices de sdK contenidos en σ están en biyección con las permutaciones de los vértices de σ.
2. Para subdivisiones baricéntricas reiteradas usamos la notación $sd^m K = sd(sd^{m-1}K)$ $(m \geq 1)$ con $sd^0 K = K$.
3. Se denomina *medida* de un complejo simplicial K al número

$$m(K) = \text{máx}\{\text{diámetro}(\sigma); \sigma \in K\}.$$

Es bien conocido que si K es un complejo simplicial finito de dimensión r, entonces $m(sd^n K) \leq (\frac{r}{r+1})^n m(K)$. A partir de esta observación, los diámetros de los símplices de subdivisiones baricéntricas reiteradas de K tiende a 0. Y si L es un complejo localmente finito, entonces la estrella $st(x, L)$ es un subcomplejo finito y la familia $\overset{\circ}{\mathcal{V}} = \{\overset{\circ}{st}(x, sd^n L)\}_{n \geq 0}$ es una una base encajada de entornos abiertos, para cada punto $x \in |L|$, y como consecuencia $\mathcal{V} = \{|st(x, sd^n L)|\}_{n \geq 0}$ es base de entornos (compactos) de X.

Definición 4.1.8. Sean K_1 y K_2 complejos simpliciales y $f : |K_1| \to |K_2|$ continua. Una aplicación simplicial $\varphi : K_1 \to K_2$ se dice *aproximación simplicial* de f si para todo $x \in |K_1|$, $|\varphi|(x)$ pertenece al símplice soporte de $f(x) \in K_2$. Equivalentemente si $f(x) \in \sigma \in K_2$ entonces $|\varphi|(x) \in \sigma$. Es sabido que esto implica en particular que f es homotópica a $|\varphi|$.

Nota 4.1.9. Si $v \in |K_1|$ y $f(v)$ es un vértice de K_2 entonces $f(v) = \varphi(v)$ si φ es aproximación simplicial de f. Por tanto toda aproximación simplicial de una aplicación simplicial coincide con ésta.

Proposición 4.1.10. Una aplicación continua $f : |K_1| \to |K_2|$ admite una aproximación simplicial $\varphi : K_1 \to K_2$ si y sólo si para cada vértice $v \in K_1$ se verifica $\overset{\circ}{st}(v; K_1) \subseteq f^{-1}(\overset{\circ}{st}(w; K_2))$ para algún vértice $w \in K_2$.

El siguiente resultado es fundamental para pasar de la topología combinatoria a la topología continua (ver ([17], Teorema 16.5)).

Teorema 4.1.11. (Teorema de aproximación simplicial). Sean K_1 y K_2 complejos simpliciales y $f : |K_1| \to |K_2|$ continua. Entonces existe una subdivisión K_1' de K_1 y una aplicación $\varphi : K_1' \to K_2$ que es aproximación simplicial de f. Si K_1 es un complejo finito K_1' puede ser elegida como una subdivisión baricéntrica $sd^n K_1$ con n suficientemente grande.

A pesar de la sencillez de su definición, los complejos simpliciales son excesivamente "rígidos" para ser manipulados con facilidad. Pensemos por ejemplo en cómo representar de manera cómoda un complejo simplicial que triangule el plano proyectivo o cómo tratar la dimensión infinita. Estos inconvenientes fueron rápidamente resueltos por los fundadores de la Topología Simplicial con la introducción de los complejos abstractos que formalizan las propiedades combinatorias del conjunto de vértices de un complejo simplicial sin referencia a un espacio ambiente.

Definición 4.1.12. Dado un conjunto V (de cualquier cardinal), un *complejo abstracto* $\mathcal{A}$ con vértices en V consiste en una colección no vacía de partes finitas de V verificando las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{A}$ contiene todos los conjuntos unitarios de V.
2. Dado $\Sigma \in \mathcal{A}$ todo subconjunto de Σ pertenece a $\mathcal{A}$.

A los elementos de V se les llama *vértices* de $\mathcal{A}$, y a los subconjuntos de $\mathcal{A}$, *símplices* de $\mathcal{A}$. El complejo abstracto $\mathcal{A}$ se dice *localmente finito* si cada vértice sólo aparece en una cantidad finita de símplices. La *dimensión* de $\mathcal{A}$ es el número (posiblemente ∞)

$$\dim \mathcal{A} = \sup\{\text{card }(\Sigma); \Sigma \in \mathcal{A}\} - 1$$

Es claro que todo complejo simplicial K determina un complejo abstracto $\mathcal{A}(K)$ donde los vértices de $\mathcal{A}(K)$ son los vértices de K y los símplices de $\mathcal{A}(K)$ son los conjuntos de vértices de K situados en un mismo símplice de K.

La definición de aplicación simplicial entre complejos abstractos es inmediata: dados dos complejos abstractos $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ una aplicación entre sus conjuntos de vértices $\varphi : V_1 \to V_2$ se dice *aplicación simplicial* si para todo símplice s de $\mathcal{A}_1$ $\varphi(s)$ es un símplice de $\mathcal{A}_2$. De esta manera, φ será un *isomorfismo simplicial* si además es una biyección entre V_1 y V_2. Como es habitual, escribimos $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ para indicar que φ es una aplicación simplicial.

A todo complejo abstracto $\mathcal{A}$ se le puede asociar un espacio métrico $|\mathcal{A}|_d$ como sigue. Si V es el conjunto de vértices de $\mathcal{A}$, llamamos *soporte* de una aplicación $\alpha : V \to [0, 1]$ al conjunto $sop(\alpha) = \{v \in V; \alpha(v) \neq 0\}$. Sea $|\mathcal{A}|$ el conjunto de tales aplicaciones que cumplen las dos propiedades siguientes:

1. Para cada $\alpha \in |\mathcal{A}|$, $sop(\alpha)$ es un símplice de $\mathcal{A}$. En particular, todas las aplicaciones en $\mathcal{A}$ tienen soporte finito.

2. Para toda $\alpha \in |\mathcal{A}|$, $\sum_{v\in V} \alpha(v) = 1$.

Sobre $|\mathcal{A}|$ se define la distancia $d(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{v\in V}(\alpha(v) - \beta(v))^2}$. A la topología asociada a d se le llama *topología métrica* de $|\mathcal{A}|$ y denotamos por $|\mathcal{A}|_d$ al correspondiente espacio métrico.

Nótese que cada símplice s de $\mathcal{A}$ determina el conjunto (cerrado de $|\mathcal{A}|_d$) $|s| = \{\alpha \in \mathcal{A}; sop(\alpha) \subseteq s\}$ de manera que cada vértice $v \in V$ queda identificado con la aplicación $\alpha_v \in |\mathcal{A}|$ dada por $\alpha_v(v) = 1$ y cada $\alpha \in |s|$ con la suma formal $\alpha = \sum_{v\in s} t_v\alpha_v$ donde $t_v = \alpha(v)$. De esta forma, si damos un orden total sobre V (esto es posible por el Principio de la Buena Ordenación) y $s = \{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ es el orden restringido a s, existe un homeomorfismo sobre el símplice canónico Δ^n, $f_s : |s| \to \Delta^n$ que lleva la aplicación $\alpha = \sum_{i=1}^{n+1} t_{v_i}\alpha_{v_i}$ al punto $f_s(\alpha) = \sum_{i=1}^{n+1} t_{v_i}e_i \in \Delta^n$.

Como se hace en los complejos simpliciales, la topología métrica de $|\mathcal{A}|$ no es la más conveniente y se reemplaza por la topología débil de los símplices, esto es, aquella cuyos abiertos son los subconjuntos $A \subseteq |\mathcal{A}|$ tales que cada intersección $A \cap |s|$ es abierta en $|s|$ para todo símplice s de $\mathcal{A}$. No usaremos ninguna notación adicional para indicar esta topología, así que cuando escribamos $|\mathcal{A}|$ se entenderá que estamos usando la topología débil sobre $|\mathcal{A}|$.

Al igual que para los complejos simpliciales podemos usar estrellas abiertas como conjuntos abiertos de $|\mathcal{A}|$ definidos a partir de la estructura combinatoria de $\mathcal{A}$. Identificaremos s con $|s|$ de forma que también llamaremos símplice de $\mathcal{A}$ al conjunto $|s|$.

Imitando al caso de un complejo simplicial, llamamos *interior afín* de $|s|$ al conjunto $|\overset{\circ}{s}| = \{\alpha \in |\mathcal{A}|; sop(\alpha) = s\}$. Si $\alpha \in |\overset{\circ}{s}|$ (o, equivalentemente, $sop(\alpha) = s$), decimos que $|s|$ es el *símplice soporte* de α. Es inmediato comprobar que el homeomorfismo f_s lleva $|\overset{\circ}{s}|$ sobre el interior afín del símplice canónico de dimensión $\dim s$. Ahora se define la *estrella abierta* de $\alpha \in |\mathcal{A}|$ como el conjunto $\overset{\circ}{st}(\alpha, \mathcal{A}) = \cup_{\alpha\in|s|}|\overset{\circ}{s}|$. Una simple comprobación muestra que si $|s| \cap \overset{\circ}{st}(\alpha, \mathcal{A}) \neq \emptyset$ entonces $sop(\alpha) \subseteq s$, esto es, $\alpha \in |s|$ y la intersección coincide con la diferencia $|s| - \cup\{|s'|; sop(\alpha) \nsubseteq s' \subseteq s\}$, que es un abierto de $|s|$ y así las estrellas abiertas son conjuntos abiertos de $|\mathcal{A}|$.

Se llama *poliedro* a cualquier espacio homeomorfo a uno de la forma $|\mathcal{A}|$ para algún complejo abstracto $\mathcal{A}$. Es claro que el poliedro subyacente de un complejo simplicial K es un poliedro en este sentido.

Toda aplicación simplicial entre complejos abstractos $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ induce una aplicación continua $|\varphi| : |\mathcal{A}| \to |\mathcal{B}|$ que lleva $\alpha = \sum_{v\in s} t_v\alpha_v$ a $|\varphi|(\alpha) = \sum_{v\in s} t_v\beta_{\varphi(v)}$ donde los elementos de $|\mathcal{B}|$ se denotan con la letra β. De manera más precisa tenemos:

Lema 4.1.13. Si **Pol** $\subseteq$ **Top** es la subcategoría llena formada por los poliedros y **Abstr** es la categoría de los complejos abstractos y aplicaciones simpliciales, la construcción anterior define un funtor:

$$|\ | : \mathbf{Abstr} \to \mathbf{Pol}$$

que llamaremos *funtor de realización.*

Definición 4.1.14. Una *realización geométrica* de un complejo abstracto $\mathcal{A}$ es un complejo simplicial K cuyo complejo abstracto es simplicialmente isomorfo a $\mathcal{A}$. En particular, los poliedros $|\mathcal{A}|$ y $|K|$ son homeomorfos por un homeomorfismo que lleva las aplicaciones α_v en los vértices de K y para cada símplice s de $\mathcal{A}$ se restringe a un homeomorfismo lineal entre $|s|$ y el correspondiente símplice de K.

Teorema 4.1.15. ([20], Teorema 3.2.9) Todo complejo abstracto $\mathcal{A}$ que sea numerable, localmente finito y de dimensión $\leq n$ admite una realización geométrica en $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Obsérvese que todas las realizaciones geométricas de un mismo complejo abstracto son simplicialmente isomorfas. y que, en vista del Teorema 4.1.15, los complejos simpliciales abstractos y geométricos pueden ser identificados si estamos en las condiciones de ese teorema.

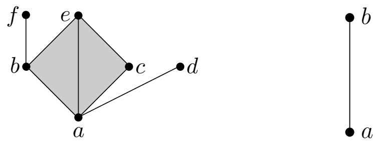
4.2. Poliedros asociados a A-espacios. El complejo orden

Sea X un A_0-espacio, se llama *complejo orden* de X al complejo abstracto $\mathcal{O}(X)$ cuyos vértices de $\mathcal{O}(X)$ son los puntos de X y sus símplices son las cadenas (esto es, conjuntos totalmente ordenados) finitas del orden de especialización X (ver Lema 3.2.12). Más aún, toda $f : X \to Y$ continua entre F-espacios define una aplicación simplicial $\mathcal{O}(f) : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y)$ que envía la cadena $x_0 \leq x_1 \leq \ldots x_n$ en la cadena $f(x_0) \leq f(x_1) \leq \cdots \leq f(x_n)$ (posiblemente con elementos repetidos). De esta forma la correspondencia $\mathcal{O}$ define un funtor

$$\mathcal{O} : \mathbf{Alex_0} \to \mathbf{Abstr}. \tag{4.2}$$

En los siguientes ejemplos tomados de la Sección 3.4, explicaremos la construcción de los complejos orden de algunos A-espacios. Recordemos que todo A-espacio queda determinado por el diagrama de Hasse de su poset asociado.

Ejemplo 4.2.1. El poliedro subyacente al complejo orden $\mathcal{O}(X)$ del A-espacio cuyo diagrama de Hasse aparece en la Figura 3.2(b) se construye añadiendo una arista entre a y e y los triángulos (a, b, e) y (a, c, e), ya que a y e están relacionados a través de b y c, como se indica en la figura 4.1(b).



(a) (b)

Figura 4.1.

Análogamente al ejemplo anterior, si nos fijamos en el diagrama de Hasse del espacio de Sierpinski en la Figura 3.2(a), vemos fácilmente que el poliedro $|\mathcal{O}(X)|$ coincide con él mismo; ver Figura 4.1(b).

En estos ejemplos observamos el siguiente hecho general, cuya demostración es inmediata.

Proposición 4.2.2. La dimensión de $\mathcal{O}(X)$ coincide con la altura máxima de $\mathcal{H}(X)$. Más aún, si la altura de $\mathcal{H}(X)$ es 1, entonces $\mathcal{O}(X)$ coincide con el diagrama de Hasse de X.

Ejemplo 4.2.3. El complejo orden $|\mathcal{O}(X)|$ de la recta de Khalimsky (Figura 3.7) es isomorfa a la triangulación de la recta euclídea con vértices en los números enteros. Para el plano de Khalimsky (Figura 4.2), $|\mathcal{O}(K^2)|$ es la triangulación del plano $\mathbb{R}^2$, definida al introducir todas las aristas entre vértices con altura 0 y 2.

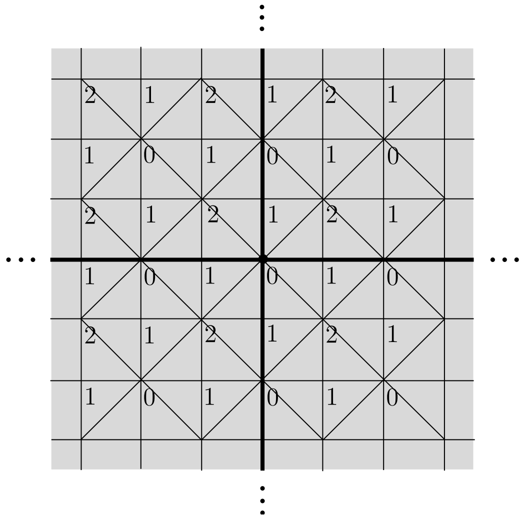


Figura 4.2.

Para el poliedro $|\mathcal{O}(X)|$ siempre es posible definir para cada A_0-espacio, X, una aplicación $\psi_X : |\mathcal{O}(X)| \to X$ de la siguiente manera. Dado $z \in |\mathcal{O}(X)|$ sea $s = \{x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n\}$ el símplice de $\mathcal{O}(X)$ tal que $|s|$ es el soporte de z en $|\mathcal{O}(X)|$, es decir $z \in \mathring{|s|}$. Entonces se toma $\psi_X(z) = x_0 = \text{mín}\, s$.

Lema 4.2.4. La aplicación ψ_X es continua. Más aún, al variar X se determina una transformación natural entre funtores $\psi : |\mathcal{O}| \to Id_{\mathbf{Alex_0}}$, donde $|\mathcal{O}|$ es la composición de funtores:

$$|\mathcal{O}| : \mathbf{Alex}_0 \xrightarrow{\mathcal{O}} \mathbf{Abstr} \xrightarrow{|\ |} \mathbf{Pol}$$

Demostración. La continuidad de $\psi = \psi_X$ es inmediata a partir de la igualdad $\psi^{-1}(U_x) = \cup_{y \leq x} \mathring{st}(y, \mathcal{O}(X))$, teniendo en cuenta que las estrellas abiertas son abiertos de $|\mathcal{O}(X)|$ (ver Sección 4.1). Para ver la igualdad simplemente observamos que si $\psi(z) = \text{mín}\, s \in U_x$, como $|s|$ es el símplice soporte de z en $\mathcal{O}(X)$, $z \in \mathring{|s|} \subseteq \mathring{st}(y, \mathcal{O}(X))$ con $y = \text{mín}\, s \leq x$. Recíprocamente, si $w \in \mathring{st}(y, \mathcal{O}(X))$ con $y \leq x$ entonces el interior del símplice soporte de w en $\mathcal{O}(X)$, digamos $|s|$, forma parte de $\mathring{st}(y, \mathcal{O}(X))$ y por tanto contiene a y como vértice. Tenemos así $\text{mín}\, s \leq y \leq x$, luego $\psi(w) = \text{mín}\, s \in U_x$.

La conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} |\mathcal{O}(X)| \arrow[r, "|\mathcal{O}(f)|"] \arrow[d, "\psi_X"'] & |\mathcal{O}(Y)| \arrow[d, "\psi_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

sigue de la observación de que si $s = (x_0 \leq x_1, \leq \cdots \leq x_n$ es tal que $|s|$ es el símplice soporte de z en $|\mathcal{O}(X)|$ entonces, por definición, $|\mathcal{O}(f)|(z)$ tiene a $|\mathcal{O}(f)(s)|$ como símplice soporte y, por preservar f el orden, $f(\text{mín}\, s) = \text{mín}\, f(s)$. □

McCord demostró en [16] que las aplicaciones ψ_X tienen la siguiente propiedad homotópica.

Teorema 4.2.5. Para todo A_0-espacio, X, la aplicación ψ_X es una equivalencia de homotopía débil.

Recordemos la noción de equivalencia de homotopía débil. Si $[X, Y]$ denota el conjunto cociente $Y^X/\simeq$ por la relación de homotopía, toda aplicación $f : Y \to Z$ induce una aplicación $f_* : [X, Y] \to [X, Z]$ dada por $f_*([g]) = [f \circ g]$. Observése que si $g \simeq g'$ y $f \simeq f'$ se sigue que $f \circ g \simeq f' \circ g'$ por la compatibilidad de la relación de homotopía con la composición de aplicaciones. En particular f_* está bien definida y $f_* = f'_*$.

Una aplicación continua se llama una *equivalencia de homotopía débil* si para todo complejo simplicial finito K se tienen que $f_* : [|K|, X] \to [|K|, Y]$ es una biyección. Dos espacios X e Y son del *mismo tipo de homotopía débil* (o *débilmente homotópicamente equivalentes*) si existe una secuencia de espacios $X = X_0, X_1, \dots, X_n = Y$ tal que para cada $1 \leq i \leq n$ hay equivalencias débiles $X_i \to X_{i+1}$ ó $X_{i+1} \to X_i$.

Nota 4.2.6. Obsérvese que para el espacio opuesto a X, X^{op}, es inmediato comprobar que $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X^{op})$, por lo que, como consecuencia directa del teorema de McCord se sigue que X y X^{op} siempre tienen el mismo de homotopía débil.

Nota 4.2.7. La noción de equivalencia de homotopía débil se define habitualmente en términos de los grupos de homotopía. Para la equivalencia de las definiciones ver ([20], sección 7,6, Corolario 23), donde se prueba que, de hecho, toda equivalencia de homotopía débil $f : X \to Y$ induce una biyección $f_* : [|\mathcal{K}|, X] \to [|\mathcal{K}|, Y]$ para todo complejo abstracto $\mathcal{K}$.

Los lemas siguientes son propiedades básicas de las equivalencias de homotopía débiles que usaremos en este trabajo.

Lema 4.2.8. Toda equivalencia de homotopía es una equivalencia de homotopía débil. Más aún, el reciproco es cierto para los poliedros subyacentes a complejos finitos.

Demostración. Si $f : X \to Y$ es una equivalencia de homotopía existe $g : Y \to X$ tal quer $f \circ g \simeq id_Y$ y $g \circ f \simeq id_X$. Entonces $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (id_Y)_*$ es la identidad y, similarmente, $g_* \circ f_*$ también lo es. Por tanto f_* es una biyección con inversa g_*.

Sea ahora $f : |K| \to |L|$ una equivalencia débil con K y L complejos simpliciales finitos. Como $f_* : [|L|, |K|] \to [|L|, |L|]$ es sobreyectiva, existe $g : |L| \to |K|$ tal que $[g]$ es enviada por f_* en la clase de la identidad, esto es, $f \circ g \simeq id_{|L|}$. En particular, $(f \circ g) \circ f \simeq f$, es decir, $f_*([g \circ f]) = [f] = f_*([id_{|K|}])$, y de la inyectividad de f_* se sigue $g \circ f \simeq id_{|K|}$. Resulta así que f es una equivalencia de homotopía. □

Nota 4.2.9. De acuerdo con la Nota 4.2.7, el recíproco del lema anterior es válido para cualquier poliedro $|\mathcal{A}|$, siendo $\mathcal{A}$ un complejo abstracto cualquiera.

Lema 4.2.10. Supongamos que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[r, "h"] & Z \end{tikzcd}$$

es conmutativo salvo homotopía (es decir, $h \circ f \simeq g$) y que dos de las tres aplicaciones son equivalencias de homotopía débiles. Entonces también lo es la tercera.

Demostración. Como $h \circ f \simeq g$ tenemos, para todo poliedro compacto $|K|$,

$$g_* = (h \circ g)_* = h_* \circ f_* : [|K|, X] \to [|K|, Y] \to [|K|, Z].$$

Así pues, si dos de estas aplicaciones son biyecciones lo es necesariamente la tercera. □

Proposición 4.2.11. Si X e Y son F_0-espacios del mismo tipo de homotopía débil, entonces sus complejos de orden definen poliedros del mismo tipo de homotopía.

Demostración. Por hipótesis, existe una secuencia de espacios $X_0, X_1, \ldots, X_n$ con $X_0 = X$, $X_n = Y$ y equivalencias de homotopía débiles $f_i : X_i \to X_{i+1}$ ó $f_i : X_{i+1} \to X_i$. Veamos cómo definir una secuencia de equivalencias de homotopía débiles $g_i : |\mathcal{O}(X)| \to X_i$ para todo $0 \leq i \leq n$. Comenzamos con la aplicación canónica $g_0 = \psi_X : |\mathcal{O}(X)| \to X = X_0$ (Teorema 4.2.5).

Supongamos que tenemos construida ya g_i. Si $f_i : X_i \to X_{i+1}$ entonces tomamos g_{i+1} simplemente como la composición $g_{i+1} = f_i \circ g_i$. Si, por el contrario, $f_i : X_{i+1} \to X_i$ entonces aplicamos que f_i es una equivalencia de homotopía débil para tener la biyección $f_{i*} : [|\mathcal{O}(X)|, X_{i+1}] \to [|\mathcal{O}(X)|, X_i]$, y por tanto existe $g_{i+1} : |\mathcal{O}(X)| \to X_{i+1}$ tal que $f_i \circ g_{i+1}$ es homotópica a g_i. Del Lema 4.2.10 concluimos que g_{i+1} es una equivalencia de homotopía débil.

Reiterando el proceso encontramos una equivalencia de homotopía débil $g_n : |\mathcal{O}(X)| \to X_n = Y$. Ahora usamos la aplicación canónica $\psi = \psi_Y : |\mathcal{O}(Y)| \to Y$ para tener la biyección $\psi_* : [|\mathcal{O}(X)|, |\mathcal{O}(Y)|] \to [|\mathcal{O}(Y)|, Y]$ (Teorema 4.2.5) y, en particular, encontrar una aplicación $g : |\mathcal{O}(X)| \to |\mathcal{O}(Y)|$ tal que $\psi \circ g \simeq g_n$. De nuevo por el Lema 4.2.10, g es una equivalencia de homotopía débil y por el Lema 4.2.8, una equivalencia de homotopía. □

Nota 4.2.12. La Proposición 4.2.11 es válida para un A_0-espacio cualquiera; ver Notas 4.2.7 y 4.2.9.

No damos aquí la demostración original de McCord del Teorema 4.2.5. Veremos más adelante en la Sección 5.2 una reciente demostración alternativa debida a E. Wosfey ([24]). Aunque la demostración de Wofsey es algo más restrictiva que la de McCord, es aún válida para una amplia clase de A_0-espacios y está basada sólo en nociones elementales de la teoría de homotopía. Terminamos esta sección con la siguiente observación.

Nota 4.2.13. Si bien ψ_X es siempre una equivalencia de homotopía débil, para el caso de F_0-espacios sólo puede ser una equivalencia de homotopía cuando $|\mathcal{O}(X)|$ es una unión disjunta de poliedros contráctiles. En efecto, si X no es conexo y $X_1, \ldots, X_m$ son sus componentes conexas entonces, por construcción, ψ_X es la unión de las aplicaciones $\psi_{X_i} : |\mathcal{O}(X_i)| \to X_i$. Así pues, sea X conexo y supongamos que existe $g : X \to |\mathcal{O}(X)|$ tal que las composiciones $\psi_X \circ g$ y $g \circ \psi_X$ son homotópicas a las correspondientes identidades. En particular la imagen de $g \circ \psi_X : |\mathcal{O}(X)| \to |\mathcal{O}(X)|$ debe ser un conjunto conexo de un poliedro y contener sólo una cantidad finita de puntos. Esto sólo es posible si es un único punto (ya que $|\mathcal{O}(X)|$ es Hausdorff) y entonces la identidad de $|\mathcal{O}(X)|$ es homotópica a una constante y por tanto este poliedro debe ser contráctil.

Aún siendo el poliedro $|\mathcal{O}(X)|$ contráctil, es posible dar ejemplos de F_0-espacios para los que ψ_X no es una equivalencia de homotopía. El primero de tales ejemplos fue dado por Barmak y Minian (ver [2]) y lo detallaremos en el Ejemplo 5.1.1 más adelante.

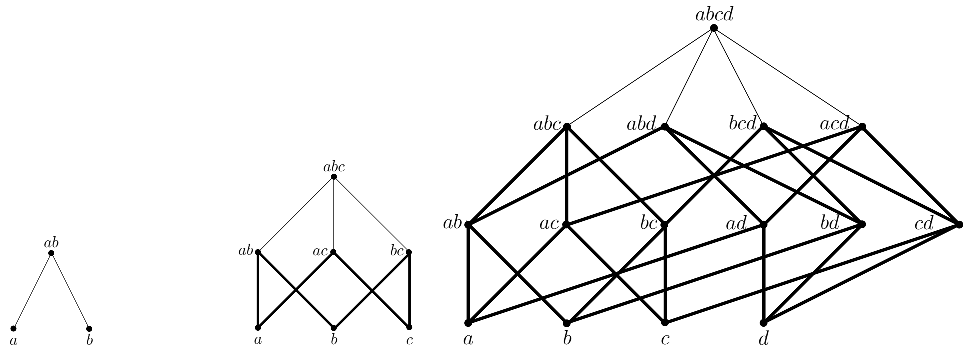
4.3. A-espacios asociados a complejos. A-modelos de poliedros

La estructura combinatoria de un complejo abstracto $\mathcal{K}$ da lugar de manera natural a un poset (o, equivalentemente, un A-espacio) $A(\mathcal{K}) = (A(\mathcal{K}), \leq)$ al considerar como puntos de $A(\mathcal{K})$ a los símplices de $\mathcal{K}$ y la relación de orden "$\leq$" como la inclusión de símplices. De esta forma, en el A-espacio asociado el abierto minimal de $s \in A(\mathcal{K})$, U_s, coincide con el subcomplejo de $\mathcal{K}$ formado por s y todas sus caras. Dada una aplicación simplicial entre complejos abstractos $f : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$, se define $A(f) : A(\mathcal{K}) \to A(\mathcal{L})$ por $A(f)(s) = f(s)$. Nótese que $A(f)$ preserva el orden, y por tanto es continua entre los correspondientes A-espacios. Tenemos así definido un funtor:

$$A : \mathbf{Abstr} \to \mathbf{Alex}_0. \tag{4.4}$$

A $A(\mathcal{K})$ se le llama *A-modelo* de $\mathcal{K}$.

En cada nivel $n \geq 0$ del diagrama de Hasse del A-modelo $A(\mathcal{K})$ se colocan tantos puntos como símplices de dimensión n haya en $\mathcal{A}$, y se dibuja una arista de cada uno de ellos con los puntos del nivel inmediatamente superior que lo contengan como cara. De esta manera, los A-modelos concernientes al 1-símplice, al 2-símplice y al 3-símplice son los que aparecen en las Figuras 4.3(a), 4.3(b) y 4.3(c), respectivamente. Los A-modelos de los bordes del 2-símplice y del 3-símplice aparecen en trazo más grueso en las Figuras 4.3(b) y 4.3(c).



(a) (b) (c)

Figura 4.3.

Estudiaremos a continuación la relación que existe entre la operación de subdivisión y los funtores A y $\mathcal{O}$. Sea **Simpl** la categoría de los complejos simpliciales y las aplicaciones simpliciales. A partir de ahora identificaremos cada complejo simplicial con su complejo abstracto de forma que la categoría **Simpl** será considerada una subcategoría llena de **Abstr**, **Simpl** $\subseteq$ **Abstr**.

Definición 4.3.1. Se llamará *funtor de cadenas* a la composición de funtores

$$chain = \mathcal{O} \circ A : \mathbf{Abstr} \to \mathbf{Alex}_0 \to \mathbf{Abstr}$$

que lleva cada complejo abstracto $\mathcal{A}$ en el complejo abstracto $chain(\mathcal{A})$ cuyos vértices son los símplices de $\mathcal{A}$ y un símplice de $chain(\mathcal{A})$ es una cadena $c = (s_0 \subseteq s_1 \subseteq \cdots \subseteq s_m)$ de símplices de $\mathcal{A}$ ordenados por inclusión. Dada una aplicación simplicial $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $chain(\varphi) : chain(\mathcal{A}) \to chain(\mathcal{B})$ lleva c en $chain(\varphi)(c) = (\varphi(s_0) \subseteq \varphi(s_1) \subseteq \cdots \subseteq \varphi(s_m))$.

Sea $sd : \mathbf{Simpl} \to \mathbf{Simpl}$ el funtor subdivisión que lleva el complejo simplicial K a su subdivisión baricéntrica sdK y la aplicación simplicial $\varphi : K \to L$ a la aplicación simplicial $sd(\varphi) : sdK \to sdL$ determinada por $sd(\varphi)(b(\sigma)) = b(\varphi(\sigma))$ para todo $\sigma \in K$.

Lema 4.3.2. Las composiciones

$$\mathbf{Simpl} \subseteq \mathbf{Abstr} \xrightarrow{chain} \mathbf{Abstr}$$

y

$$\mathbf{Simpl} \xrightarrow{sd} \mathbf{Simpl} \subseteq \mathbf{Abstr}$$

son naturalmente equivalentes. En particular, si $\mathcal{A}_K$ es el complejo abstracto de un complejo simplicial K entonces $chain(\mathcal{A}_K)$ es isomorfo al complejo abstracto de sdK, $\mathcal{A}_{sdK}$.

Demostración. Es claro que si identificamos cada símplice s_σ de $\mathcal{A}_K$ con el baricentro $b(\sigma)$ de su símplice asociado $\sigma \in K$, cada símplice $c = (s_{\sigma_0} \subseteq s_{\sigma_1} \subseteq \cdots \subseteq s_{\sigma_m})$ de $chain(\mathcal{A}_K)$ determina el único símplice $\tau = (b(\sigma_0), \ldots, b(\sigma_m)) \in sdK$ y por tanto un único símplice s_τ de $\mathcal{A}_{sdK}$. Es inmediato comprobar que tenemos así definido un isomorfismo simplicial $t_K : chain(\mathcal{A}_K) \to \mathcal{A}_{sdK}$. Además, si $\varphi : K \to L$ es simplicial y denotamos por la misma letra la aplicación inducida entre los correspondientes complejos abstractos, una simple comprobación prueba que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} chain(\mathcal{A}_K) \arrow[r, "chain(\varphi)"] \arrow[d, "t_K"', "\cong"] & chain(\mathcal{A}_L) \arrow[d, "\cong"', "t_L"] \\ \mathcal{A}_{sdK} \arrow[r, "sd(\varphi)"'] & \mathcal{A}_{sdL} \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

lo que significa que los isomorfismos simpliciales t_K definen la equivalencia natural deseada. □

De acuerdo con el Teorema 4.2.5 tenemos una equivalencia de homotopía débil $\psi_{A(\mathcal{K})} : |chain(\mathcal{K})| = |\mathcal{O}(A(\mathcal{K}))| \to A(\mathcal{K})$. Para un complejo simplicial K, usando los isomorfismos simpliciales del diagrama 4.5, obtenemos una equivalencia de homotopía débil

$$\phi_K = \psi_{A(\mathcal{A}_K)} \circ t_K^{-1} : |K| = |sdK| = |\mathcal{A}_{sdK}| \to |chain(\mathcal{A}_K)| \to A(\mathcal{A}_K) = A(K) \tag{4.6}$$

De hecho esta aplicación es natural en el siguiente sentido.

Lema 4.3.3. Las equivalencias débiles en 4.6 determinan una transformación natural ϕ entre $A : \mathbf{Simpl} \to \mathbf{Alex}_0 \subseteq \mathbf{Top}$ y la siguiente composición de funtores

$$|sd| : \mathbf{Simpl} \xrightarrow{sd} \mathbf{Simpl} \xrightarrow{|\ |} \mathbf{Pol} \subseteq \mathbf{Top}$$

Demostración. Sólo hay que ver la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} |sdK| \arrow[r, "|sd(\varphi)|"] \arrow[d, "\phi_K"'] & |sdL| \arrow[d, "\phi_L"] \\ A(K) \arrow[r, "A(\varphi)"'] & A(L) \end{tikzcd} \tag{4.7}$$

donde $\varphi : K \to L$ es una aplicación simplicial. Ello es consecuencia inmediata de la conmutatividad de los diagramas 4.3 y 4.5. □

Nota 4.3.4. Aunque $|K| = |sdK|$, el diagrama 4.7 no es conmutativo si se sustituye $sd(\varphi)$ por φ pues, en general $|sd(\varphi)| \neq |\varphi|$. No obstante $\varphi : K \to L$ es aproximación simplicial de $|sd(\varphi)| : |K| \to |L|$ ya que es fácil probar que el símplice soporte de $|sd(\varphi)|(x)$ en L coincide con el de $|\varphi(x)|$, por lo que ambas aplicaciones son homotópicas (Definición 4.1.8) y se tiene por tanto que $\phi_L \circ |\varphi| \simeq A(\varphi) \circ \phi_K$.

Mediante los funtores A y $\mathcal{O}$ Hardie y Vermeulen en [10] definieron y desarrollaron para los A_0-espacios herramientas análogas a las de la topología simplicial basadas en la idea de subdivisión baricéntrica y aproximación simplicial. Comentamos a continuación estas ideas.

Definición 4.3.5. Se llama *A-subdivisión* del A_0-espacio X al A_0-espacio $X' = A\circ\mathcal{O}(X)$. Esta construcción se puede iterar y se define la *n-ésima A-subdivisión* de X como $X^{(n)} = (X^{n-1})'$ con $X^{(0)} = X$, esto es, $X^{(n)} = (A\circ\mathcal{O})^n(X)$. Además, dada una aplicación continua $f : X \to Y$ entre A_0-espacios se puede definir $f' : X' \to Y'$ como $f' = A\circ\mathcal{O}(f)$ y reiterar la definición con $f^{(n)} = (A \circ \mathcal{O})^n(f)$. Tenemos así que las A-subdivisiones reiteradas definen funtores ($n \geq 1$)

$$sd_A^n = (A \circ \mathcal{O})^n : \mathbf{Alex}_0 \to \mathbf{Alex}_0 \tag{4.8}$$

Lema 4.3.6. Los funtores reiterados $chain^n$ y sd_A^n están ligados por la igualdad $\mathcal{O}\circ sd_A^n = chain^n \circ \mathcal{O}$. En particular, si la equivalencia natural t en el diagrama 4.5 se usa como identificación, para todo A_0-espacio X cuyo complejo de orden admite una realización geométrica (Definición 4.1.14), se tiene $\mathcal{O} \circ sd_A^n = sd^n \circ \mathcal{O}$.

Demostración. De acuerdo con las definiciones $chain \circ \mathcal{O} = (\mathcal{O} \circ A) \circ \mathcal{O} = \mathcal{O} \circ (A \circ \mathcal{O}) = \mathcal{O} \circ sd_A$. Supongamos por inducción que $\mathcal{O}\circ sd_A^{n-1} = chain^{n-1}\circ\mathcal{O}$. Entonces $chain^n\circ\mathcal{O} = chain \circ (chain^{n-1} \circ \mathcal{O}) = chain \circ (\mathcal{O} \circ sd_A^{n-1})$ y, por el caso $n = 1$, la última composición es $(\mathcal{O} \circ sd_A) \circ sd_A^{n-1} = \mathcal{O} \circ sd_A^n$. □

Lema 4.3.7. Existe una transformación natural ζ entre los funtores sd_A e $Id_{\mathbf{Alex}_0}$. Más aún, para todo A_0-espacio X cuyo complejo de orden admite una realización geométrica se tiene que $\zeta_X : sd_AX \to X$ es una equivalencia de homotopía débil.

Demostración. Por definición, los puntos de $sd_AX = A(\mathcal{O}(X))$ son cadenas finitas $c = (x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n)$ de puntos de X. Entonces se define $\zeta(c) = x_n = \max c$. Es inmediato comprobar que ζ preserva el orden pues si $c \subseteq c'$ entonces $\max c \leq \max c'$. Ahora la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} sd_AX \arrow[r, "sd_A(f)"] \arrow[d, "\zeta_K"'] & sd_AY \arrow[d, "\zeta_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \tag{4.9}$$

es inmediata a partir de las definiciones.

Veamos ahora que que ζ_X es una equivalencia de homotopía débil si $\mathcal{O}(X)$ tiene una realización geométrica (y lo identificaremos con ella). Recordemos que los vértices del complejo simplicial $\mathcal{O}(X)$ están parcialmente ordenados (son los puntos de X), entonces es bien conocido en topología simplicial que la identidad de $|\mathcal{O}(X)|$ admite la aproximación simplicial $\xi = \xi_{\mathcal{O}(X)} : sd(\mathcal{O}(X)) \to \mathcal{O}(X)$ dada por $\xi(b(\sigma_0), \ldots b(\sigma_m)) = (\max\sigma_0, \max\sigma_1, \ldots, \max\sigma_m)$. En efecto, si σ es el símplice soporte de x en $\mathcal{O}(X)$ entonces el soporte de x en $sd(\mathcal{O}(X))$ es un símplice $(b(\sigma_1), \ldots, b(\sigma_n))$ con $\sigma_n = \sigma$, por lo que el símplice soporte de $\xi(x)$ es una cara de σ. Más aún, la aplicación ξ hace conmutativo al siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} {|\mathcal{O}(A(\mathcal{O}(X)))| = |sd(\mathcal{O}(X))|} \arrow[r, "|\xi|"] \arrow[d, "\psi_{A\mathcal{O}(X)}"] & {|\mathcal{O}(X)|} \arrow[d, "\psi_X"] \\ sd_AX = A(\mathcal{O}(X)) \arrow[r, "\zeta_X"'] & X \end{tikzcd} \tag{4.10}$$

En efecto, dado $x \in |sd(\mathcal{O}(X)|)$ con símplice soporte $s = (c_0 \subseteq c_1 \subseteq, \cdots \subseteq c_m)$, donde cada c_i es una cadena de X, se tiene $\zeta_X \circ \psi_{A\mathcal{O}(X)}(x) = \max(\min s) = \max c_0 = \min\{\max c_0, \ldots, \max c_m\} = \psi_X \circ |\xi|(x)$. Aquí usamos que $\xi(s)$ es el símplice soporte de $|\xi|(x)$ en $\mathcal{O}(X)$.

Como las aplicaciones ψ son equivalencias de homotopía débiles y ξ es una equivalencia de homotopía por ser homotópica a la identidad (Definición 4.1.8), se sigue del diagrama 4.10 que ζ_X es una equivalencia de homotopía débil. □

Nota 4.3.8. A partir de las definiciones es fácil comprobar la igualdad $\mathcal{O}(\zeta_X) = \xi_{\mathcal{O}(X)}$ para la aproximación de la identidad $\xi_{\mathcal{O}(X)}$ definida en la demostración del Lema 4.3.7. En particular, $|\mathcal{O}(\zeta_Y)| \simeq id_{|\mathcal{O}(Y)|}$ (Ver Definición 4.1.8)

Terminamos esta sección con el siguiente teorema que es un análogo para F_0-espacios del teorema de aproximación simplicial para complejos simpliciales finitos (Teorema 4.1.11). Obsérvese que sólo hay una cantidad finita de aplicaciones continuas entre F_0-espacios $f : X \to Y$ y por ello, en general, no todas las clases de homotopía entre los poliedros subyacentes a sus complejos de orden pueden ser representadas por las aplicaciones $\mathcal{O}(f)$. El Teorema 4.3.9 no dice que podemos encontrar representantes para todas las clases si subdividimos el dominio inicial. Recuérdese que para todo F_0-espacio X, $\mathcal{O}(sd^n_A X) = sd^n \mathcal{O}(X)$ por el Lema 4.3.6.

Teorema 4.3.9. ([10], Teorema 2.3) Sea $f : |\mathcal{O}(X)| \to |\mathcal{O}(Y)|$ una aplicación continua donde X e Y son F_0-espacios. Entonces para algún n suficientemente grande existe una aplicación continua $g : sd^n_A X \to Y$ tal que f es homotópica a $|\mathcal{O}(g)| : |\mathcal{O}(sd^n_A X)| \to |\mathcal{O}(Y)|$.

Demostración. Por el Teorema 4.1.11 existe una aproximación simplicial $\varphi : sd^{n-1}\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y)$ para un n adecuado. Sea $g : sd^n_A X \to Y$ la composición

$$g : sd^n_A X = sd_A(sd^{n-1}_A X) A(sd^{n-1}(\mathcal{O}(X))) \stackrel{A(\varphi)}{\to} A(\mathcal{O}(Y)) = sd_A Y \stackrel{\zeta_Y}{\to} Y$$

Aquí hemos usado la definición de sd_A y los Lemas 4.3.6 y 4.3.2. Además, por el Lema 4.3.2 tenemos $\mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(\zeta_Y) \circ \mathcal{O}(A(\varphi)) = \mathcal{O}(\zeta_Y) \circ sd(\varphi)$. Por otro lado, $f \simeq |\varphi| \simeq |sd(\varphi)|$ ya que φ se supone que es una aproximación simplicial de f y φ es siempre aproximación simplicial de $|sd(\varphi)|$ como ya comentamos en la Nota 4.3.4 (ver Definición 4.1.8). Finalmente, por la Nota 4.3.8, $|\mathcal{O}(\zeta_Y)| \simeq id_{|\mathcal{O}(Y)|}$. Así pues $\mathcal{O}(g) \simeq f$. □

Capítulo 5

Recientes avances y nuevas ideas en la topología de los A-espacios

Los capítulos anteriores resumen el estado de la topología de los A-espacios desde su definición por Alexandrov en 1937 hasta los trabajos de 1966 y de McCord ([16]) y Stong ([21]), con mención también del trabajo posterior de Hardie y Vermeulen ([10]) de 1993. Esta escasa literatura sobre la topología de los A-espacios se debe a que, aunque la relación entre posets y complejos simpliciales se ha aplicado en multitud de situaciones, el estudio de la A-topología intrínseca de los posets había estado en la sombra hasta que la aparición de la topología digital (el lenguaje topológico que requiere el análisis de los píxeles de la pantalla de un ordenador) y la difusión de las notas de May desde 2003 ([15]) volvieron a poner el foco de atención en los A-espacios, planteando nuevas preguntas sobre sus propiedades, especialmente para F-espacios.

Este capítulo final resume algunos de los avances y extensiones de los resultados iniciales de McCord y Stong que se han conseguido en los últimos años y propone un tratamiento del infinito desde la perspectiva de los A-espacios que parece novedoso y cuyo eventual desarrollo podría ser de interés.

5.1. La topología algebraica de los F_0-espacios

Comenzamos refiriéndonos a algunos de los resultados conseguidos por Barmak y Minian que aparecen en [2]. Estos autores, inspirados por la notas de May, han hecho importantes contribuciones a la topología algebraica de los F_0-espacios así como su aplicación a la topología algebraica clásica. Una aportación sencilla pero que es de considerable interés es el siguiente ejemplo ([2], Ejemplo 4.2.1), que fue el primero de un F_0-espacio débilmente homotópicamente equivalente a un punto pero no contráctil.

Ejemplo 5.1.1. Sea X el F_0-espacio cuyo diagrama de Hasse aparece en la Figura 5.1(a). Como X no tiene puntos e.a. ni e.d. estamos ante un modelo minimal y por ello no puede ser contráctil. Sin embargo, su complejo de orden $\mathcal{O}(X)$ es la triangulación del cuadrado que aparece en la Figura 5.1(b). Por tanto, del Teorema 4.2.5 se sigue que X es del tipo de homotopía débil de un punto, pero no es contráctil.

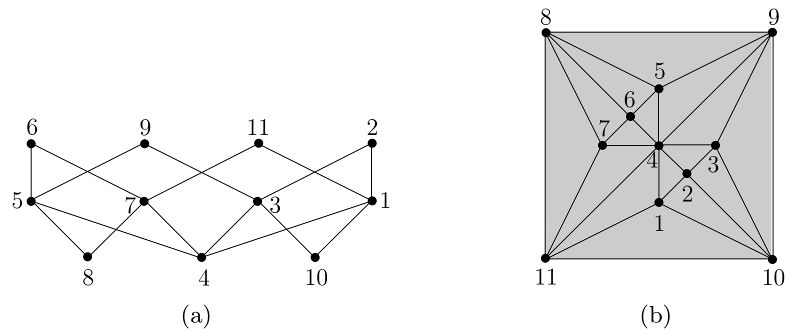


Figura 5.1.

Este ejemplo muestra que la contractibilidad de un F_0-espacio X no equivale a la contractibilidad de su complejo de orden $\mathcal{O}(X)$. La contractibilidad de X está caracterizada por la propiedad de "colapsibilidad fuerte" de $\mathcal{O}(X)$ en ([2], Corolario 5.2.8). No nos paramos en este punto y pasamos a destacar el Teorema 3.2.1 de [2], relativo al modelo minimal de las esferas. Damos a continuación las definiciones necesarias para establecerlo.

Definición 5.1.2. Sea X un espacio. Un F_0-espacio Y del tipo de homotopía débil de X se dice que es un *modelo finito* de X. Un *modelo finito* se dice *minimal* si es de cardinal mínimo.

Nota 5.1.3.

1. De acuerdo con el Teorema 4.2.5 y el Lema 4.3.3, todo F_0-espacio es un modelo finito del poliedro subyacente a su complejo de orden $\mathcal{O}(X)$ y para todo complejo simplicial finito K su A-espacio asociado $A(K)$ es un modelo finito del poliedro $|K|$.
2. Puesto que todo F_0-espacio es homotópicamente equivalente a su alma, tenemos que todo modelo finito minimal debe ser un F_0-espacio minimal en el sentido de la Definición 3.5.4.
3. Obsérvese que el Teorema 4.2.5 nos dice que el F_0-espacio X cuyo diagrama de Hasse es el indicado en la Figura 3.10 es un modelo finito de la letra "Θ" (esto es, la circunferencia con un diámetro) y también lo es X^{op} cuyo diagrama de Hasse está indicado en la Figura 3.10(b). Además son minimales[1]. Así pues el modelo finito minimal no tiene que ser único.

McCord probó en [16] el siguiente resultado. Aquí usamos las suspensión reiterada de Alexandrov $\mathbb{S}^n(X) = \mathbb{S}(\mathbb{S}^{n-1}(X))$ con $\mathbb{S}^0(X) = X$ en el Ejemplo 3.4.11.

Proposición 5.1.4. Si S^0 denota el espacio discreto de dos puntos, entonces $\mathbb{S}^n(S^0)$ es un modelo finito de la esfera S^n para $n \geq 0$.

En ([2], Teorema 3.2.1) se prueba la siguiente mejora del resultado de McCord.

Teorema 5.1.5. Sea X un espacio minimal finito con más de un punto. Entonces X tiene al menos $2h(X)+2$ puntos, donde $h(X)$ es la altura máxima del diagrama de Hasse de X. Más aún, si X tiene exactamente $2h(X)+2$ puntos entonces X es homeomorfo a $\mathbb{S}^{h(X)}S^0$.

Como consecuencia del teorema anterior, la esfera S^n tiene un único modelo finito minimal que además tiene $2n+2$ puntos.

[1] Obsérvese que dado un espacio T_0, Y, con a lo más cuatro puntos, sus posibles diagramas de Hasse corresponden a espacios disconexos, contráctiles o modelos finitos de la circunferencia. Usando la Proposición 4.2.11 se deduce que en ningún caso Y es homotópicamente equivalente a "Θ" (por ejemplo, usando homología).

La monografía [2] contiene muchos más resultados de interés sobre la topología de los F_0-espacios pero dejamos aquí los comentarios sobre esta publicación y terminamos esta sección con un resultado reciente debido a E. Clader ([5]) que muestra que, si bien los F_0-espacios sólo representan el tipo de homotopía débil de los poliedros (ver la Nota 4.2.13), pasando al límite adecuados F_0-espacios se puede obtener un representante del tipo de homotopía de cualquier poliedro compacto. Más explícitamente,

Teorema 5.1.6. ([5], Teorema 1.1.) Todo poliedro compacto es homotópicamente equivalente al límite inverso de una sucesión de F_0-espacios.

En este trabajo observamos cómo la demostración de Clader puede extenderse a poliedros localmente compactos. Lo haremos en la Sección 5.3 donde se encuentra la terminología necesaria para el Teorema 5.1.6.

5.2. Extensiones a ciertas clases de A_0-espacios infinitos

Nuevas contribuciones en el estudio de la topología de los A_0-espacios han extendido resultados ya conocidos para F_0-espacios a A_0-espacios infinitos que han llevado incluso a nuevas técnicas para el estudio de los F_0-espacios. A continuación seleccionaremos algunas de estas contribuciones. Comenzamos recordando las clases de posets (o A_0-espacios) infinitos más estudiadas en la teoría de posets.

Definición 5.2.1. Un poset $(X, \leq)$ se dice *localmente finito descendentemente* (abreviado a *l.f.d.*) si para todo $x \in X$ el ideal principal generado por él, $\downarrow x$, es finito. Dualmente, decimos que es *localmente finito ascendentemente* (abreviado a *l.f.a.*) si para todo $x \in X$ el filtro principal $\uparrow x$ es finito. Nótese que $(X, \leq)$ es l.f.a. si y sólo si su opuesto es l.f.d. Un poset $(X, \leq)$ se dice *localmente finito* (abreviado a *l.f.*) si es a la vez l.f.a. y l.f.d. Es claro que el poset es l.f. si y sólo si para todo $x \in X$ el conjunto de los elementos comparables a x es finito. Equivalentemente, X es l.f. si y sólo si para todo $x \in X$, el número de cadenas en X que contiene a x es finito.

Un A_0-espacio se dice *localmente finito* si su poset asociado lo es; análogamente se definen A_0-espacios l.f.a. o l.f.d.

El siguiente lema es fácil de demostrar a partir de las propiedades básicas del orden de especialización de una A-topología.

Lema 5.2.2. Sea X un A_0-espacio. Se cumple las siguientes propiedades.

1. X es l.f.d. si y sólo si U_x es finito para todo $x \in X$.

2. X es l.f.a. si y sólo si $\overline{\{x\}}$ es finito para todo $x \in X$.

3. X es l.f. si y sólo si $\overline{U_x}$ es finito para todo $x \in X$.

Sobre la compacidad y conexión de los A-espacios l.f. tenemos las dos propiedades siguientes.

Lema 5.2.3. Sea X un A_0-espacio l.f.d. Entonces un conjunto $Z \subseteq X$ es compacto si y sólo si es finito.

Demostración. Supongamos que Z es compacto. Entonces por el Teorema 3.3.7 el conjunto $M = Max(Z)$ es finito y para todo $z \in Z$ existe $m \in M$ con $z \leq m$. Por ser X l.f.d. sólo existe una cantidad finita de elementos menores que cada $m \in M$ en X y por ello Z es finito. El recíproco es trivial. $\square$

Lema 5.2.4. Todo A_0-espacio l.f. conexo es numerable

Demostración. Recordemos que la conexión de X es equivalente a su conexión por caminos. Dado $x_0 \in X$, sea $X_n \subseteq X$ el conjunto de los $x \in X$ que se pueden unir a x_0 por una secuencia de hasta n elementos comparables. Entonces, $X_0 = \{x_0\}$ y $X_n = \{x; x \text{ es comparable a algún } y \in X_{n-1}\}$. De acuerdo con la finitud local, los elementos comparables a cualquier $x \in X$ forman un conjunto finito y así podemos deducir inductivamente que cada X_n es finito, y por tanto $X = \cup_{n=0}^{\infty} X_n$ es numerable. □

Otras propiedades también usadas en la teoría de posets son las siguientes.

Definición 5.2.5. Un poset $(X, \leq)$ se dice que cumple la *condición de cadenas descendentes finitas* (abreviado a *c.c.d.f.*) si no contiene sucesiones infinitas descendentes. Análogamente, decimos que cumple la *condición de cadenas ascendentes finitas* (abreviado a *c.c.a.f.*) si no contiene sucesiones infinitas ascendentes. Nótese que $(X, \leq)$ cumple la c.c.d.f. si y sólo si su opuesto cumple la c.c.a.f. Un poset $(X, \leq)$ se dice que cumple la *condición de cadenas finitas* (abreviado a *c.c.f.*) si cumple a la vez la c.c.d.f. y la c.c.a.f.

Un A_0-espacio se dice que cumple cada una de las condiciones anteriores si su poset asociado lo hace.

Los siguientes lemas son bien conocidos.

Lema 5.2.6. Sea $(X, \leq)$ un poset.

1. $(X, \leq)$ cumple la c.c.f. si y sólo si toda cadena en él es finita.

2. $(X, \leq)$ cumple la c.c.a.f. si y sólo si para todo subconjunto no vacío $A \subseteq X$, $Max(A) \neq \emptyset$. Dualmente, cumple la c.c.d.f. si $Min(A) \neq \emptyset$.

Lema 5.2.7. Si $(X, \leq)$ es l.f. entonces cumple la c.c.f.

Ejemplo 5.2.8. 1. La recta y, en general, los espacios de Khalimsky son localmente finitos.

2. Sea $X = \vee_{n=1}^{\infty} X_n$ la unión por el origen de copias disjuntas de intervalos de longitudes crecientes de números enteros positivos $X_n = \{x \in \mathbb{Z}; 0 \leq x \leq n\}$. Si damos sobre X el orden natural, el poset $(X, \leq)$ cumple la c.c.f. pero no es l.f.

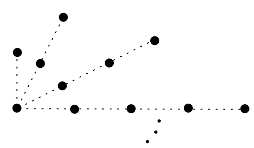


Figura 5.2.

En [13], Kukiela da condiciones para que la topología compacto-abierto sobre Y^X coincida con la A-topología del orden en 3.1 cuando X es un A_0-espacio infinito, extendiendo el resultado ya conocido para F_0-espacios en la Proposición 3.5.1. Incluimos aquí sin demostración el siguiente teorema.

Teorema 5.2.9. ([13], Corolario 4.12) Si X es un A_0-espacio hereditariamente compacto e Y es un A_0-espacio cumpliendo la c.c.d.f. entonces la topología compacto-abierto sobre Y^X coincide con la topología del orden.

Un espacio se dice *hereditariamente compacto* si todos sus subconjuntos son compactos. También en [13] se extiende la caracterización de homotopía por sucesiones finitas de aplicaciones comparables para F_0-espacios en el Corolario 3.5.2 por medio del teorema siguiente.

Teorema 5.2.10. ([13], Teorema 4.14) Sean X e Y A_0-espacios y $f_i : X \to Y$ $(i \geq 0)$ una sucesión infinita de aplicaciones continuas tales que f_i es comparable a f_{i+1} para el orden en 3.1. Supongamos que existe una aplicación continua $f_\omega : X \to Y$ tal que para todo x existe $n(x)$ tal que $f_n(x) \leq f_\omega(x)$ para todo $n \geq n(x)$. Entonces f_0 es homotópica a f_ω.

El artículo [13] contiene además resultados sobre A_0-espacios infinitos minimales. Destacamos a continuación tres de ellos. Empezamos con la siguiente definición.

Definición 5.2.11. Sea X un A_0-espacio. Una *retracción* $r : X \to A \subseteq X$ se dice *comparativa* si $r(x)$ es comparable con x para todo $x \in X$. Sea $\mathcal{C}$ la clase de las retracciones comparativas. Un A_0-espacio se dice un *$\mathcal{C}$-minimal* si la única $\mathcal{C}$-retracción de X es la identidad.

Todo A_0-espacio $\mathcal{C}$-minimal X es un espacio minimal en el sentido de la Definición 3.5.4, esto es, X carece de puntos e.a. y puntos e.d. pues las retracciones usadas para eliminar tales puntos en la demostración del Teorema 3.5.8 son comparativas. En contraste, el recíproco no es cierto. Por ejemplo, sea $\mathbb{Q}$ los números racionales. Es claro que $\mathbb{Q}$ carece de puntos e.a. y e.d. pero la constante $r : \mathbb{Q} \to \{0\}$ es una $\mathcal{C}$-retracción comparativa. Kukiela encontró el siguiente recíproco parcial.

Proposición 5.2.12. ([13], Proposición 5.7) Sea X un A_0-espacio sin puntos e.a. ni puntos e.d. (es decir, un espacio minimal en el sentido de la Definición 3.5.4). Si X cumple la c.c.f. entonces X es $\mathcal{C}$-minimal.

El proceso de obtener a partir de un A_0-espacio infinito un subespacio que sea $\mathcal{C}$-minimal con el fin de estimar los tipos de homotopía de A_0-espacios infinitos no es tan útil como en el caso de los F_0-espacios donde se cumplía el Teorema 3.5.8. De hecho la recta de Khalimsky, que es $\mathcal{C}$-minimal y contractible, por el Ejemplo 3.5.3 (2), no cumple el análogo del Teorema 3.5.8. No obstante Kukiela demostró el siguiente resultado.

Proposición 5.2.13. ([13], Proposiciones 5.19 y 5.21) Sea X un A_0-espacio conexo y localmente finito. Entonces X es $\mathcal{C}$-desmantelable en ω pasos a un subespacio $\mathcal{C}$-minimal o al conjunto vacío. Además X nunca puede ser $\mathcal{C}$-desmantelable a un espacio $\mathcal{C}$-minimal finito distinto de vacío.

Los conceptos usados en la proposición anterior están recogidos en la siguiente definición.

Definición 5.2.14. Sea X un A_0-espacio y sea $\{r_n : X_n \to X_{n+1}\}_{n\geq 0}$ una sucesión de $\mathcal{C}$-retracciones donde $X_0 = X$ y $r_n(X_n) = X_{n+1}$. Escribimos $X_\omega = \cap_{n=0}^{\infty} X_n$ y $r^j = r_{j-1} \circ \cdots \circ r_0 : X_0 \to X_j$. Si la retracción $r_\omega : X \to X_\omega$, $r_\omega(x) = \lim_{j\to\infty} r^j(x)$ está definida se dice que X es *$\mathcal{C}$-desmantelable* a $X_\omega \subseteq X$ *en ω pasos*. Si por el contrario, $X_\omega = \emptyset$ o r_ω no está bien definida se dice que X es *$\mathcal{C}$-desmantelable al vacío en ω pasos*.

Ejemplo 5.2.15. La semirrecta de Khalimsky es un A_0-espacio localmente finito que es $\mathcal{C}$-desmantelable al vacío en ω pasos. En efecto, se puede definir una sucesión de retracciones $r_n : K_{\geq n} \to K_{\geq n+1}$ donde $K_{\geq n}$ es el subespacio de la semirrecta de Khalimsky $K_{\geq 0}$ formado por los enteros $\geq n$. La retracción r_n está definida por $r_n(x) = x$ si $x \geq n+1$ y $r_n(x) = n+1$ si $x \leq n$.

En el caso de la recta de Khalimsky K ya se observó en el Ejemplo 3.5.5 (2) que no existen aplicaciones de K en sí mismo comparables con la identidad salvo la propia identidad.

Terminamos esta sección con la mención de la siguiente propiedad demostrada por E. Wofsey ([24]) de la aplicación canónica $\psi_X : |\mathcal{O}(X)| \to X$ en el Lema 4.2.4.

Teorema 5.2.16. ([24], Teorema 5.1). Sean $\mathcal{K}$ un complejo abstracto, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ un subcomplejo y X un A_0-espacio l.f. La aplicación canónica $\psi = \psi_X : |\mathcal{O}(X)| \to X$ tiene la siguiente propiedad. Dado el diagrama conmutativo en líneas continuas

$$\begin{tikzcd} |\mathcal{L}| \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "i"'] & |\mathcal{O}(X)| \arrow[d, "\psi_X"] \\ |\mathcal{K}| \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] & X \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

existe una aplicación $\widetilde{f} : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{O}(X)|$ que hace conmutativo los dos triángulos, esto es, $\psi \circ \widetilde{f} = f$ y $\widetilde{f}|_{|\mathcal{L}|} = g$. A $\widetilde{f}$ se le llama un *levantamiento* de $\widetilde{f}$ respecto a ψ. Además si $\widetilde{f_1}$ es otro levantamiento, existe una homotopía H entre $\widetilde{f}$ y $\widetilde{f_1}$ tal que para todo $0 \leq t \leq 1$ el nivel $H(-,t)$ también es un levantamiento.

Wosfey probó en ([24], Corolario 3.7) que esta propiedad de levantamiento (cuya demostración sólo requiere propiedades elementales de la teoría de homotopía) lleva a la siguiente demostración inmediata del teorema de McCord para A_0-espacios l.f.

Corolario 5.2.17. Sea X un A_0-espacio l.f. Entonces su aplicación canónica $\psi = \psi_X$: $|\mathcal{O}(X)| \to X$ es una equivalencia débil de homotopía.

Demostración. Tenemos que ver que para todo complejo simplicial finito K la aplicación $\psi = \psi_X$ induce una biyección $\psi_* : [|K|, |\mathcal{O}(X)|] \to [|K|, X]$. La sobreyectividad de ψ_* es inmediata a partir del Teorema 5.2.16 con el subcomplejo vacío $L = \emptyset$. Para ver la inyectividad, sean $f_1, f_2 : |K| \to |\mathcal{O}(X)|$ tales que existe una homotopía $H : |K| \times I \to X$ entre las composiciones $\psi \circ f_1$ y $\psi \circ f_2$. Consideremos la aplicación unión $g = f_1 \cup f_2 : |K| \times \{0,1\} \to X$. Si consideramos el complejo producto[2] $J = K \times I$ que tiene a $L = K \times \{0,1\}$ como subcomplejo, podemos aplicar el Teorema 5.2.16 al par $L \subseteq J$ para elevar H a una homotopía $G : |K \times I| = |K| \times I \to |\mathcal{O}(X)|$ entre f_1 y f_2. □

5.3. La categoría propia de los A_0-espacios

Aunque la compacidad es una propiedad con muchas e importantes consecuencias, los espacios no compactos de interés no son escasos, comenzando por los espacios euclídeos. La ausencia de compacidad en los espacios lleva aparejada la necesidad de un análisis del "infinito" de estos. Para ello los espacios no compactos son dotados de un infinito topologizado y las aplicaciones a considerar son aquellas "continuas en el infinito".

El método habitual de topologizar el infinito de un espacio X es por medio de la llamada *compactificación de Alexandrov*, construida al tomar un punto ∞, denominado infinito del espacio, y sobre $X^+ = X \cup \{\infty\}$ se considera la topología generada por la base consistente en los abiertos de X junto con los conjuntos de la forma $(X - C) \cup \{\infty\}$ donde C recorre los conjuntos compactos y cerrados en X. Obsérvese que si X es Hausdorff

[2] Si K es un complejo simplicial en $\mathbb{R}^n$, el complejo producto $K \times I$ es el complejo en $\mathbb{R}^{n+1}$ construidos al ordenar los vértices de K y considerar los símplices de la forma $\tau(\sigma, i) = ((v_0, 0), (v_1, 0), \ldots, (v_i, 0), (v_i, 1); (v_{i+1}, 1), \ldots (v_n, 1))$ donde $\sigma = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ es un símplice (ordenado) de K y $0 \leq i \leq n$.

entonces basta exigir que C sea sólo compacto, ya que la propiedad de Hausdorff implica que todo compacto es cerrado.

Las diferencias $X - C$ son llamadas *entornos básicos del infinito* en X. Con estos entornos, la continuidad en el infinito queda garantizada por las llamadas aplicaciones propias. Recordemos que una aplicación continua $f : X \to Y$ se dice *propia* si para cada $C \subseteq Y$ cerrado y compacto se tiene que $f^{-1}(C)$ es también cerrado y compacto en X. Nótese que $f^{-1}(C)$ ya es cerrado por continuidad. Habitualmente se trabaja con espacios de Hausdorff por lo que la definición de aplicación propia más frecuente sólo exige que $f^{-1}(C)$ sea compacto para todo compacto $C \subseteq Y$.

La definición de aplicación propia queda justificada por la siguiente caracterización.

Lema 5.3.1. Una aplicación $f : X \to Y$ es propia si y sólo si su extensión $f^+ : X^+ \to Y^+$ con $f^+(\infty) = \infty$ es continua.

La subcategoría **PTop** $\subseteq$ **Top** de los espacios topológicos y la aplicaciones propias se llama *categoría propia*. El lema anterior y los resultados básicos sobre la categoría propia pueden encontrarse en el manual [7]. Nuestro interés en esta sección es introducir el estudio del infinito en la clase de los A_0-espacios (y por tanto posets) l.f. definidos en la Sección 5.2. Este aspecto de la topología de los A-espacios no parece haber sido considerado en la literatura hasta el momento.

Nota 5.3.2. La primera observación a tener en cuenta es que la compactificación de Alexandrov de un A_0-espacio no es un A_0-espacio. Por ejemplo, si $K_{\geq 0}$ es la semirrecta de Khalimsky, los entornos básicos del infinito son los complementos de cualquier conjunto finito de enteros C que contiene a los impares anterior y posterior de cada elemento par de C (éstos son los cerrados y compactos de $K_{\geq 0}$ por el Lema 5.2.3). Claramente no existe un abierto mínimo de ∞ en $K^+_{\geq 0}$. Es el mismo fenómeno que ocurre en topología simplicial donde una triangulación de la semirrecta euclídea $\mathbb{R}_{\geq 0} \cong [0, 1)$ no se puede extender a una triangulación de su compactificación $\mathbb{R}^+_{\geq 0} \cong [0, 1]$.

El interés de los A_0-espacios l.f. es que, como veremos más delante, se corresponden con los complejos simpliciales localmente finitos que son los objetos geométricos de mayor interés para la topología no compacta.

Como consecuencia inmediata del Lema 5.2.3 tenemos la siguiente caracterización de las aplicaciones propias entre A_0-espacios.

Lema 5.3.3. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua entre A_0-espacios l.f. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

1. f es propia
2. Para todo conjunto finito y cerrado $Z \subseteq Y$, $f^{-1}(Z)$ es finito.
3. Para todo conjunto finito $Z \subseteq Y$, $f^{-1}(Z)$ es finito.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) es inmediato. Igualmente, después del Lema 5.2.3 también lo es 3) $\Rightarrow$ 1). Para ver 2) $\Rightarrow$ 3), sea $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ cualquier conjunto finito. Entonces $\overline{Z} = \cup_{i=1}^n \overline{\{z_i\}}$ también es finito pues las clausuras de los conjuntos unitarios son finitos en espacios l.f.a. (Lema 5.2.2(2)). □

Nota 5.3.4. Nótese que en la demostración de 3) $\Rightarrow$ 1) en el Lema 5.3.3 sólo se ha usado que X es l.f.d., mientras que en 2) $\Rightarrow$ 3) sólo se usa que Y es l.f.a.

Ahora veremos cómo las propiedades topológicas esenciales en el estudio del infinito de un espacio se cumplen en el contexto de los A_0-espacios l.f. Comenzamos observando que, puesto que la finitud local (de hecho la finitud local descendente, ver el Lema 5.2.2(1)) implica que U_x es finito para todo $x \in X$, tenemos como consecuencia inmediata el siguiente lema.

Lema 5.3.5. Todo A_0-espacio l.f. es localmente compacto.

Un espacio X se dice *σ-compacto* si se puede descomponer como una unión numerable de subconjuntos compactos. El siguiente lema es una consecuencia directa del Lema 5.2.3.

Lema 5.3.6. Un A_0-espacio l.f. es σ-compacto si y sólo si es numerable. En particular, todo A_0-espacio conexo es σ-compacto.

Ahora la compacidad local y la σ-compacidad nos dan la existencia de sucesiones exhaustivas en la clase de los A_0-espacios l.f. numerables. Recordemos que por una *sucesión exhaustiva* de un espacio X se entiende una descomposición $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$ donde cada X_n es compacto y cerrado y $X_n \subseteq int X_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

Lema 5.3.7. Todo A_0-espacio l.f. numerable admite una sucesión exhaustiva. Además, si X es conexo entonces la sucesión exhaustiva se puede elegir formada por conjuntos compactos y conexos.

Recordemos que la conexión equivale a la conexión por caminos en la clase de los A_0-espacios (Teorema 2.2.3).

Demostración. Como X es numerable, $X = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ con F_n finito para todo $n \geq 1$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que los F_n forman una sucesión creciente. Para cada $n \geq 1$, sea $Z_n = \cup_{x \in F_n} \overline{U_x}$. Este conjunto cerrado es finito, y por tanto compacto, por serlo cada $\overline{U_x}$ (Lema 5.2.2(3)) y cada F_n. Además, $F_n \subseteq int Z_n$ para todo $n \geq 1$. Ahora para Z_1 encontramos m_1 con $Z_1 \subseteq F_{m_1} \subseteq int Z_{m_1}$. Igualmente, dado m_1, sea $m_2 > m_1$ con $Z_{m_1} \subseteq F_{m_2} \subseteq int\ Z_{m_2}$. Procediendo inductivamente obtenemos una sucesión de enteros positivos $m_1 > m_2 > \dots$ y conjuntos finitos Z_{m_k} con $Z_{m_k} \subseteq int\ Z_{m_{k+1}}$ para todo $k \geq 1$. Entonces $X_k = Z_{m_k}$ es la sucesión exhaustiva buscada.

Si además X es conexo, escogemos $x_0 \in X$ y consideramos el conjunto $F_1 = \{x \in X; x$ es comparable con $x_0\}$, e inductivamente $F_n = \{x \in X; x$ es comparable a algún $z \in F_{n-1}\}$. La finitud local de X asegura que cada F_n es finito. Más aún, la conexión de X implica que tenemos $X = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$. Ahora, por el procedimiento seguido más arriba, construimos los conjuntos $Z_n = \cup_{x \in F_n} \overline{U_x}$ que son finitos y conexos, pues es bien sabido que la clausura de un conjunto conexo es conexo y cada abierto mínimo U_x es conexo (Lema 2.2.1). Así pues, en este caso, la sucesión exhaustiva $\{X_k\}_{k \geq 1}$ definida más arriba está formada por conjuntos conexos. $\square$

A partir de las sucesiones exhaustivas se construyen los llamados finales de un espacio de acuerdo a la siguiente definición.

Definición 5.3.8. Sea X un espacio conexo, localmente compacto, σ-compacto y localmente conexo. Para cada sucesión exhaustiva $\{X_n\}_{n \geq 1}$ se considera el conjunto de sucesiones decrecientes $U_1 \supseteq U_2 \supset \dots$ donde U_n es una componente conexa de $X - X_n$ ($n \geq 1$). Dada otra sucesión exhaustiva $\{X'_n\}_{n \geq 1}$ y una sucesión $(U'_n)_{n \geq 1}$ de componentes $U'_n \subseteq X - X'_n$, decimos que $(U_n)_{n \geq 1}$ y $(U'_n)_{n \geq 1}$ son equivalentes si para todo n existen $m(n) \geq n$ y $k(n) \geq n$ tales que $U_{m(n)} \subseteq U'_n$ y $U'_{k(n)} \subseteq U_n$. El conjunto cociente por esta relación se denota por $\mathcal{F}(X)$ y cada elemento $\varepsilon \in \mathcal{F}(X)$ se denomina *final de Freudenthal* de X.

De acuerdo con los Lemas 5.3.5 y 5.3.6 y el Corolario 2.2.2, podemos definir los finales de Freudenthal de cualquier A_0-espacio conexo l.f.

Ejemplo 5.3.9. Una sucesión exhaustiva de la recta de Khalimsky K está formada por los arcos de Khalimsky $K_n = [-2n+1, 2n-1]$ ($n \geq 1$) y es inmediato deducir de ello que K tiene dos finales de Freudenthal. Análogamente, para la semirrecta de Khalimsky $K_{\geq 0}$

podemos elegir la sucesión exhaustiva de arcos $K_n^0 = [0, 2n-1]$ $(n \geq 1)$, mientras que el plano de Khalimsky K^2 tiene a los cuadrados $K_n^2 = K_n \times K_n$ como sucesión exhaustiva. Es claro que los complementos $K_{\geq 0} - K_n^0$ y $K^2 - K_n^2$ son conexos por caminos y así, tanto $K_{\geq 0}$ como K^2 (y en general K^n con $n \geq 2$) tienen un solo final de Freudenthal.

Como es bien sabido esto mismo ocurre para los espacios euclídeos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathbb{R}^2$ (y, en general, $\mathbb{R}^n$) que son los poliedros subyacentes a los complejos de orden $\mathcal{O}(K)$, $\mathcal{O}(K_{\geq 0})$ y $\mathcal{O}(K^2)$.

El Ejemplo 5.3.9 lleva a preguntarnos por la propiedades de la aplicación canónica $\psi_X : |\mathcal{O}(X)| \to X$ en la categoría propia. Para ello comenzamos observando que si X es un A_0-espacio l.f. su complejo orden $\mathcal{O}(X)$ el también l.f. Así pues, el funtor $\mathcal{O} : \mathbf{Alex_0} \to \mathbf{Abstr}$ se restringe a

$$\mathcal{O} : \mathbf{PAlex_0} \to \mathbf{PAbstr}, \tag{5.2}$$

donde $\mathbf{PAlex_0} \subseteq \mathbf{Alex_0}$ y $\mathbf{PAbstr} \subseteq \mathbf{Abstr}$ son las subcategorias de A_0-espacios l.f. y aplicaciones propias y complejos abstractos l.f. y aplicaciones simpliciales propias, respectivamente. Recordemos que una *aplicación simplicial* se dice *propia* si la imagen inversa de cada vértice es finita.

Comprobaremos a continuación que la demostración de Wosfey del Teorema de McCord en [24] (ver el Corolario 5.2.17) da en realidad el resultado más fuerte establecido en el Teorema 5.3.11 más abajo.

Recordemos que dos aplicaciones propias $f, g : X \to Y$ se dicen *propiamente homotópicas* si existe una homotopía entre ellas que es una aplicación propia. Denotaremos por $[X, Y]_p$ el conjunto cociente de las aplicaciones propias de X en Y por la relación de homotopía propia. Una aplicación propia $f : X \to Y$ se dice una *equivalencia de homotopía propia* si existe una aplicación propia $g : Y \to X$ tal que las composiciones $g \circ f$ y $f \circ g$ son propiamente homotópicas a las correspondientes identidades. Si para todo complejo simplicial localmente finito de dimensión finita K, la aplicación inducida $f_* : [|K|, X]_p \to [|K|, Y]_p$ es una biyección entonces decimos que f es una *equivalencia de homotopía propia débil*. Es obvio que toda equivalencia de homotopía propia (débil) es una equivalencia de homotopía (débil).

Nota 5.3.10. En contraste con el caso clásico (ver Nota 4.2.7), en homotopía propia no toda equivalencia de homotopía propia débil $f : X \to Y$ induce una biyección $[|\mathcal{K}|, X]_p \to [|\mathcal{K}|, Y]_p$ para cualquier complejo abstracto localmente finito $\mathcal{K}$ ([6], Ejemplo 5.5.10(d)). Cuando se cumpla esta condición diremos que f es una *equivalencia de homotopía propia débil en sentido amplio.*

Teorema 5.3.11. Sea X un A_0-espacio l. f. Entonces la aplicación $\psi = \psi_X : |\mathcal{O}(X)| \to X$ es una equivalencia de homotopía propia débil.

Demostración. Probemos en primer lugar que ψ es una aplicación propia. Para ello, sea $Z \subseteq X$ un conjunto cerrado y compacto. Entonces $Z = \{z_1, \ldots, z_m\}$ es finito por el Lema 5.2.3 y $Z = \overline{Z} = \cup_{i=1}^m \overline{\{z_i\}}$. Entonces bastará ver que cada preimagen $A_i = \psi^{-1}(\overline{\{z_i\}})$ es compacta. Como $\overline{\{z_i\}} = \uparrow z_i$ (Lema 3.2.12), tenemos $A_i = \{x \in \mathcal{O}(X); x \in \overset{\circ}{|s|}$ con $\min s \geq z_i\} = \cup\{|t|; t \in \mathcal{O}(X)$ con $\min t = z_i\}$. Como la última unión es una unión finita de compactos, se sigue que ψ es propia. Aquí usamos que X es l.f.

Para ver que ψ es una equivalencia de homotopía propia débil primero comprobaremos que la elevación $\widetilde{f}$ en el diagrama 5.1 es propia si suponemos que la aplicación f en el mismo es propia, y entonces se concluirá como en el Corolario 5.2.17.

Si f es propia y $Z \subseteq |\mathcal{O}(X)|$ es compacto (y, por tanto, cerrado por ser $|\mathcal{O}(X)|$ Hausdorff), tenemos que $\psi(Z)$ es compacto en X y por tanto finito. Aquí usamos que ψ

es continua. Ahora, la finitud local de X nos dice que $W = \overline{\psi(Z)}$ también es finito (Lema 5.2.2). Como f es propia $f^{-1}(W)$ es entonces compacto (y cerrado). Por la conmutatividad del triángulo inferior del diagrama 5.1 se sigue $\widetilde{f}^{-1}(Z) \subseteq f^{-1}(\psi(Z)) \subseteq f^{-1}(W)$. De esta manera el cerrado $\widetilde{f}^{-1}(Z)$ hereda la compacidad de $f^{-1}(W)$. □

Nota 5.3.12. La misma definición en el pie de página de la demostración del Corolario 5.2.17 es válida para definir el complejo producto $\mathcal{K} \times I$ de cualquier complejo abstracto $\mathcal{K}$, teniéndose también un homeomorfismo canónico $|\mathcal{K} \times I| \cong |\mathcal{K}| \times I$. Por tanto, en el caso propio, el mismo razonamiento del Corolario 5.2.17 nos lleva a que ψ en el Teorema 5.3.11 es de hecho una equivalencia de homotopía propia débil en sentido amplio.

Terminamos la sección y el trabajo con la extensión del teorema de Clader (Teorema 5.1.6) que establecemos en el Teorema 5.3.13 más abajo. Para enunciarlo necesitamos alguna terminología extra. Empezamos recordando que la topología sobre un producto arbitrario de espacios topológicos $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es la que tiene por base los productos $\prod_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$ donde U_α es un abierto de X_α y $U_\alpha = X_\alpha$ salvo una cantidad finita de índices. Para esta topología las proyecciones naturales $\pi_\alpha : \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to X_\alpha$ son continuas.

Dada una sucesión de aplicaciones continuas

$$X_0 \xleftarrow{f_1} X_1 \xleftarrow{f_2} X_2 \xleftarrow{f_3} \ldots\ldots \tag{5.3}$$

se llama *límite inverso* de esta sucesión al subespacio $\widetilde{X} \subseteq \prod_{n=0}^{\infty} X_n$ que consiste en los puntos $(x_n)_{n\geq 0}$ tales que $f_i(x_i) = x_{i-1}$ para todo $i \geq 1$. Obsérvese que un producto numerable de A_0-espacios ya no es un A_0-espacio en contraste con los productos finitos (Proposición 2.1.10) y por tanto un límite inverso de A_0-espacios no es en general un A_0-espacio.

Teorema 5.3.13. Todo poliedro localmente compacto y de dimensión finita $|K|$ es del mismo tipo de homotopía propia que el límite inverso de una sucesión de A_0-espacios localmente finitos.

$$X_0 \xleftarrow{f_1} X_1 \xleftarrow{f_2} X_2 \xleftarrow{f_3} \ldots \tag{5.4}$$

donde las aplicaciones f_i son propias. Si $|K|$ es compacto entonces los X_i son finitos.

En la demostración usaremos el hecho de que el funtor $A : \mathbf{Simp} \subseteq \mathbf{Abstr} \to \mathbf{Alex}_0$ en 4.4, similarmente al funtor $\mathcal{O}$, se restringe a las correspondientes categorías propias

$$A : \mathbf{PSimp} \to \mathbf{PAlex}_0. \tag{5.5}$$

Demostración. Para cada $n \geq 0$ el espacio $X_n = A(sd^n K)^{op}$ es el opuesto del modelo de la n-ésima subdivisión baricéntrica de K en 4.4 y por tanto X_0 es el opuesto del A-modelo del propio K. Nótese que el A_0-espacio opuesto de uno l.f. también es l.f.

Para cada $n \geq 1$ definimos la aplicación $f_n : X_n \to X_{n-1}$ tomando, para cada símplice $\sigma \in sd^n K$, como $f_n(\sigma)$ el símplice soporte de $b(\sigma)$ en $sd^{n-1}K$, en otras palabras, el único símplice $\tau \in sd^{n-1}K$ con $\mathring{\sigma} \subseteq \mathring{\tau}$. También podemos definir para cada $n \geq 0$ la aplicación $p_n : |K| \to X_n$ que envía $x \in |K| = |sd^n K|$ a su símplice soporte en $sd^n K$ denotado aquí por σ_n^x, esto es, $p_n(x) = \sigma_n^x$. De la definición de subdivisión se sigue inmediatamente que $\sigma_n^x \subseteq \sigma_{n-1}^x$.

Por las definiciones de las aplicaciones p_n y f_n cada uno de los triángulos

$$\begin{tikzcd} {|K|} \arrow[d, "p_{n-1}"'] \arrow[dr, "p_n"] & \\ X_{n-1} & X_n \arrow[l, "f_n"] \end{tikzcd} \tag{5.6}$$

es conmutativo. Además, las aplicaciones p_n son propias (ver Lema 5.3.15 más bajo). Sea $p = \prod_{n=0}^{\infty} p_n : |K| \to \prod_{n=0}^{\infty} X_n$ la aplicación continua natural definida como

$$p(x) = (p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x), \dots) = (\sigma_0^x, \sigma_1^x, \sigma_2^x, \dots, \sigma_n^x, \dots). \tag{5.7}$$

La conmutatividad del diagrama 5.6 implica que la imagen de p queda en $\widetilde{X}$, y p se restringe a $p : |K| \to \widetilde{X}$. Para comprobar que p es una aplicación propia, sea $Q \subseteq \widetilde{X}$ un conjunto cerrado y compacto. Para las proyecciones naturales $\pi_n : \prod_{n=0}^{\infty} X_n \to X_n$, las imágenes $\pi_n(Q) \subseteq X_n$ son compactas y por tanto finitas (Lema 5.2.3). Entonces $p^{-1}(Q) = \{x \in |K|; \sigma_n^x \in \pi_n(Q) \text{ para todo } n \geq 0\} \subseteq \{x \in |K|; \sigma_0^x \in \pi_0(Q)\}$. Como este último conjunto es compacto por estar contenido en la unión de todos los símplices de $\pi_0(Q)$, su subconjunto cerrado $p^{-1}(Q)$ hereda la compacidad.

Mostraremos a continuación que la aplicación p es una equivalencia de homotopía propia, esto es, $\widetilde{X}$ y $|K|$ son del mismo tipo de homotopía propia. Para ello definimos

$$q : \widetilde{X} \to |K| \tag{5.8}$$

como sigue. Dado $\boldsymbol{\tau} = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots) \in \widetilde{X}$, esto es, $f_n(\tau_n) = \tau_{n-1}$ para todo $n \geq 1$, la definición de f_n nos dice que estos símplices forman una sucesión decreciente $\tau_0 \supseteq \tau_1 \supseteq \tau_2 \supseteq \dots \supseteq \tau_n \supseteq \dots$ cuyos diámetros tienden a 0 (ver Nota 4.1.7(3)), de donde se sigue que la intersección $\cap_{n=0}^{\infty} \tau_n$ es exactamente un punto. Llamamos a ese punto $q(\boldsymbol{\tau})$. La aplicación q es propia (Lema 5.3.16). De las definiciones se sigue que $\cap_{n=0}^{\infty} \sigma_n^x = \{x\}$, esto es, $q \circ p = id_{|K|}$. Más aún, veamos que la composición $p \circ q : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ es homotópica a la identidad. Para encontrar la homotopía, observamos que para todo $\boldsymbol{\tau} = (\tau_0, \tau_1, \dots, \dots)$ con $q(\boldsymbol{\tau}) = x$ tenemos $\{x\} = \cap_{n=0}^{\infty} \tau_n$, de donde $(\pi_n \circ p \circ q)(\boldsymbol{\tau}) = \sigma_n^x \leq \tau_n = \pi_n(\boldsymbol{\tau})$ siendo $\pi_n : \widetilde{X} \to X_n$ la restricción de n-ésima proyección ($n \geq 0$). Por tanto, el Lema 2.3.1 nos da la homotopía $h_n : \widetilde{X} \times I \to X_n$ entre π_n y $\pi_n \circ (p \circ q)$ definida por $h_n(\boldsymbol{\tau}, t) = (\pi_n \circ p \circ q)(\boldsymbol{\tau})$ si $0 \leq t < 1$ y $h_n(\boldsymbol{\tau}, 1) = \pi_n(\boldsymbol{\tau})$. Por definición tenemos que para cada $n \geq 1$ se cumple $f_n \circ h_n = h_{n-1}$ y entonces la aplicación producto $h = \prod_{n=0}^{\infty} h_n : \widetilde{X} \times I \to \prod_{n=0}^{\infty} X_n$ es continua y tiene su imagen en $\widetilde{X}$. De hecho

$$h : \widetilde{X} \to \widetilde{X} \tag{5.9}$$

es propia (Lema 5.3.17), con lo que h es la homotopía buscada. □

Nota 5.3.14. El Teorema 5.1.6 se puede generalizar a todo poliedro $|\mathcal{K}|$ con $\mathcal{K}$ cualquier complejo abstracto localmente finito, de dimensión posiblemente, infinita. No lo hacemos aquí para usar directamente las subdivisiones baricéntricas y no el funtor reiterado de cadenas $chain^m$ en la Definición 4.3.1, evitando así las complicaciones técnicas necesarias para justificar que $|\mathcal{K}|$ es homeomorfo a $|chain(\mathcal{K})|$.

Lema 5.3.15. Las aplicaciones p_n en el diagrama 5.6 son propias sobreyectivas y abiertas. Igualmente las aplicaciones f_n son propias y abiertas.

Demostración. Probemos que cada p_n es una sobreyección continua y abierta lo que implica, por la conmutatividad del diagrama, que cada f_n también es continua y abierta ya que se cumplen las igualdades $f_n^{-1}(A) = p_n(p_{n-1}^{-1}(A))$ y $f_n(B) = p_{n-1}(p_n^{-1}(B))$ para todo $A \subseteq X_{n-1}$ y $B \subseteq X_n$.

La continuidad de p_n sigue de que para el abierto mínimo de σ en X_n, $U_\sigma = \{\tau \in sd^n K; \sigma \leq \tau\}$ (recordar que usamos el opuesto al A-modelo), una comprobación directa nos da $p_n^{-1}(U_\sigma) = \overset{\circ}{st}(x, sd^n K)$ para cualquier $x \in \overset{\circ}{\sigma}$ (recordemos que las estrellas abiertas son conjuntos abiertos, por la Definición 4.1.4). Para ver que p_n es abierta, sea $U \subseteq |K|$ un abierto cualquiera y $\sigma \in p_n(U)$. Por definición, existe $x \in U$ tal que $\sigma_n^x = \sigma$. Si $\sigma \leq \tau$

entonces, $\emptyset \neq U \cap \sigma \subseteq U \cap \tau$ y por la definición de la topología débil, $U \cap \tau$ es un abierto no vacío de τ y necesariamente existe algún $y \in U \cap \mathring{\tau}$, para el cual $p_n(y) = \sigma_n^y = \tau$. Tenemos así que $U_\sigma \subseteq p_n(U)$, es decir, $p_n(U)$ es abierto.

Veamos que tanto f_n como p_n son aplicaciones propias. Esto es trivial para f_n pues para todo $\tau \in X_{n-1}$, $f^{-1}(\tau) = \{\sigma \in X^n; \tau \text{ es el símplice soporte de } b(\sigma)\}$, y este último conjunto es obviamente finito, lo que nos dice que f_n es propia por el Lema 5.2.2. Para ver que p_n es propia, tomamos $Z \subseteq X_n$ compacto y cerrado. Como $Z = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ es finito (Lema 5.2.3) entonces $Z = \overline{Z} = \cup_{i=1}^m \overline{\sigma_i}$ y podemos suponer que Z es una sola clausura $Z = \overline{\sigma} = \uparrow\sigma$ en X_n, que por ser el opuesto de $A(sd^n K)$, nos da $Z = \{\tau \in sd^n K; \tau \leq \sigma\}$. Por tanto $p_n^{-1}(Z) = \{x \in |K|; \sigma_n^x \leq \sigma\}$ coincide con σ como subconjunto de $|K|$. $\square$

Lema 5.3.16. La aplicación q en 5.8 es propia.

Demostración. Para ver la continuidad de q, sea Ω un abierto de $|K|$ con $q(\boldsymbol{\tau}) = z \in \Omega$. Como las estrellas forman una base de entornos de z (ver Nota 4.1.7 (3)), existe un n_0 tal que $|st(z, sd^n K)| \subseteq \Omega$ para todo $n \geq n_0$. Afirmamos que $\boldsymbol{\tau} \in \widetilde{V} \subseteq q^{-1}(\Omega)$ para el abierto de $\widetilde{X}$, $\widetilde{V} = \widetilde{X} \cap V$ donde $V = \prod_{n=0}^\infty V_n$ siendo $V_n = U_{\sigma_n^z}$ el abierto mínimo de σ_n^z si $n \leq n_0$ y $V_i = X_i$ si $n \geq n_0 + 1$. En efecto, si $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \dots) \in \widetilde{V}$, entonces $\sigma_n^z \leq \mu_n$ para todo $n \leq n_0$ (de nuevo, recordar que trabajamos con los opuestos de los A-modelos). En particular $\mu_{n_0} \subseteq |st(z; sd^{n_0} K)| \subseteq \Omega$, y por tanto para todo $n \geq n_0$, $\mu_n \subseteq \mu_{n_0} \subseteq \Omega$, esto es, $q(\boldsymbol{\mu}) \in \Omega$ para todo $\boldsymbol{\mu} \in \widetilde{V}$.

Ahora sea $Z \subseteq |K|$cualquier compacto. Como las estrellas abiertas de los vértices de K forman un recubrimiento abierto de $|K|$, Z está contenido en una cantidad finita de ellas y, en consecuencia, en una unión finita de símplices de K por ser éste l.f. Así pues para ver que q es propia bastará comprobar que $q^{-1}(\sigma)$ es compacto para todo símplice de K visto como subconjunto de $|K|$.

Si tomamos la proyección $\pi_0 : \prod_{n=0}^\infty X_n \to X_0$, se tiene $\pi_0(q^{-1}(\sigma)) \subseteq \{\tau \in K; \tau \cap \sigma \neq \emptyset\} \subseteq \cup_{\rho \leq \sigma} st(\rho, K)$. En efecto, si $\boldsymbol{\tau} = (\tau_0, \dots, \tau_n, \dots) \in q^{-1}(\sigma)$, entonces $q(\boldsymbol{\tau}) = \cap_{n=0}^\infty \tau_n \in \sigma$ y $\tau_0 = \pi_0(\boldsymbol{\tau})$ corta a σ. Si escribimos $A = \pi_0(q^{-1}(\sigma))$, la definición de $\widetilde{X}$ como límite inverso nos dice que $q^{-1}(\sigma) \subseteq \prod_{n=0}^\infty A_n$ donde $A_n = (f_1 \circ \cdots \circ f_n)^{-1}(A_0)$ $(n \geq 1)$. Por tanto $q^{-1}(\sigma) \subseteq \prod_{n=0}^\infty S_n$ donde $S_0 = \cup_{\rho \leq \sigma} st(\rho, K)$ y $S_n = (f_1 \circ \cdots \circ f_n)^{-1}(S_0)$ $(n \geq 1)$. Ahora bien, S_0 es compacto (y cerrado) en X_0 ya que en la topología de X_0 tenemos $st(\rho, K) = \cup_{\mu \geq \rho} \uparrow \mu = \cup_{\mu \geq \rho} \overline{\{\mu\}}$ (recuérdese que X_n tiene el orden opuesto de $A(K)$ y que K es l.f.). Finalmente, como las f_n son propias, los S_i son compactos y por el teorema de Tychonov ([18]; Teorema 37.3) lo es el producto $\prod_{n=0}^\infty S_i$ y, en consecuencia, su subconjunto cerrado $q^{-1}(\sigma)$. $\square$

Lema 5.3.17. La homotopía en 5.9 es propia.

Demostración. Si $Z \subseteq \widetilde{X}$ es compacto y cerrado, veamos que el conjunto

$$h^{-1}(Z) = \{(\boldsymbol{\tau}, t) \in \widetilde{X} \times I; h(\boldsymbol{\tau}, t) = (h_n(\boldsymbol{\tau}, t))_{n \geq 0} \in Z\}$$

es compacto (ya sabemos que es cerrado, pues h es continua). Por definición, si $(\boldsymbol{\tau}, t) \in h^{-1}(Z)$ entonces $h_0(\boldsymbol{\tau}, t) \in \pi_0(Z)$. Nótese que $\pi_0(Z)$ es compacto por la continuidad de π_0. Más aún, por la definición de h_0, si $\boldsymbol{\tau} = (\tau_n)_{\geq 0}$ y $t < 1$, para $x = q(\boldsymbol{\tau}) = \cap_{n=0}^\infty \tau_n$ $h_0(\boldsymbol{\tau}, t) = \pi_0(p(x)) = p_0(x) = \sigma_0^x \in \pi_0(Z)$. Como $x \in \tau_0$ y σ_0^x es el símplice soporte de x en K, se sigue $\sigma_0^x \leq \tau_0$, y, en consecuencia, $\tau_0 \in B_0 = \cup\{st(\sigma, K); \sigma \in \pi_0(Z)\}$, siendo esta unión un conjunto finito por ser $\pi_0(Z)$ finito por compacidad (Lema 5.2.3) y K l.f. Por otro lado, si $t = 1$ entonces $h_0(\boldsymbol{\tau}, 1) = \tau_0 \in \pi_0(Z)$. Si escribimos $C_0 = B_0 \cup \pi_0(Z)$, entonces $(\tau_0, t) \in C_0 \times I$ para todo t y, como $h_{n-1} = f_n \circ h_n$, de la definición de h obtenemos la inclusión $h^{-1}(Z) \subseteq (\prod_{n=0}^\infty C_n) \times I$, donde $C_n = (f_1 \circ \cdots \circ f_n)^{-1}(C_0)$ $(n \geq 1)$. Por ser las f_n propias, los conjuntos C_n son todos compactos y, de nuevo por el teorema de Tychonov, el producto de los C_n es compacto y también lo es su subconjunto cerrado $h^{-1}(Z)$. $\square$

Bibliografía

[1] P.S. Alexandroff. Diskrete Raume. *Math. Sbornik*, 2(1937), 501-519.

[2] J.A. Barmak. *Algebraic topology of finite topological spaces and applications*, Lecture Notes Math., vol. 2032. Springer, 2011.

[3] G. Brinkmann, B.D. McKay. Posets on up to 16 points. *Order*, 19(2002), 147-179.

[4] R.A. Brualdi. *Combinatorial matrix classes.* Cambridge University Press, 2006.

[5] E. Clader. Inverse limits of finite topological spaces. *Homology, Homotopy & Applications*, 11(2009), 223-227.

[6] D.A. Edwards, H.M. Hastings. *Čech and Steenrod homotopy theories with applications to geometric topology.* Lecture Notes Math., vol. 542. Springer, 1976.

[7] R. Engelking. General Topology. *Heldermann*, 1989.

[8] M. Erné. Minimal bases, ideal extensions, and basic dualities. *Topology Proc,* 29(2005), 445-489.

[9] A. Fix, S. Patrias. Enumeration of homotopy classes of finite T_0 topological spaces. *Preprint*, 2008. `http://math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2008/REUPapers/Fix.pdf`.

[10] K.A. Hardie, J.J.C. Vermeulen. Homotopy theory of finite and locally finite T_0 spaces. *Expo. Math.,* 11(1993), 331-341.

[11] D. Kleitman, B. Rothschild. The number of finite topologies. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 25(1970), 276-282.

[12] T.Y. Kong, R.D. Kopperman, P.R. Meyer. A topological approach to digital topology. *Amer. Math. Monthly*, 98(1991), 901-917.

[13] M.J. Kukiela. On homotopy types of Alexandroff spaces. *Order*, 27(2010), 9-21.

[14] J.P. May. Finite topological spaces. Notes for REU, 2003. `http://www.math.uchicago.edu/~may/MISC/FiniteSpaces.pdf`.

[15] J.P. May. *Finite spaces and larger contexts. Preliminary draft submitted to the AMS*, 2014. `http://math.uchicago.edu/~may/FINITE/FINITEBOOK/FiniteAugBOOK.pdf`.

[16] M. McCord. Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces. *Duke Math.*, 33(1966), 465-474.

[17] J.R. Munkres. *Elements of algebraic topology.* Addison-Wesley, 1984.

[18] J.R. Munkres. *Topología.* Pearson Educación, 2001.

[19] G.N. Rubiano. Sobre el número de topologías en un conjunto finito. *Boletín de Matemáticas*, 13(2006), 136-158.

[20] E.H. Spanier. *Algebraic topology*. Springer, 1994.

[21] R.E. Stong. Finite topological spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 123(1966), 325-340.

[22] A.W. Tucker. Cell spaces. *Ann. of Math.*, 37(1936), 92-100.

[23] M.L. Wachs. Poset topology: tools and applications. Geometric Combinatorics. *IAS/Park City Math. Ser*, 13(págs, 497-615). *Amer. Math. Soc.*, 2007.

[24] E. Wofsey. On the algebraic topology of finite spaces. *Preprint*, 2008. `http://www.math.harvard.edu/~waffle/finitespaces.pdf`.