



FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA

Trabajo Fin de Grado

## **Clasificación de grupos cristalográficos planos**

Pilar Coba Carpio

---

Dirigido por:

Marta Aguilera y Juan González-Meneses



# Abstract

Crystallographic groups are groups whose elements are isometries of a metric space. These groups are 17 in the Euclidean plane and we can find them in nature or tilings. Many scientists study these groups in fields other than Mathematics, such as Chemistry. Throughout history, some people have given the list of 17 groups, and have been interested in the study of them in higher dimensions.

In this work there are two different blocks. In the first one, we recall some concepts of group theory. Then we explain how a group acts on the elements of a set. Finally we recall some notions of Euclidean plane to explain the isometries of the plane.

The second part of this work focuses on an article of Schwarzenberger [14]. We show what is a crystallographic group and we prove that there are exactly 17 of them. To do that, we divide the groups into three types: those which contain, respectively, no reflections, exactly one or more than one.

In addition, we have included pictures for an easier understanding of the text, and examples of each group.



# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Conceptos básicos</b>	<b>7</b>
<b>3. Acción de un grupo sobre un conjunto</b>	<b>13</b>
<b>4. El plano euclídeo</b>	<b>17</b>
4.1. La longitud y la distancia euclídea . . . . .	17
4.2. Isometrías . . . . .	17
<b>5. Grupos de simetrías</b>	<b>21</b>
5.1. El retículo, $T$ . . . . .	21
5.2. El grupo puntual, $H$ . . . . .	24
5.3. Acción de $H$ en $T$ . . . . .	26
5.4. Los vectores de deslizamiento . . . . .	26
<b>6. Equivalencia de grupos planos</b>	<b>29</b>
<b>7. Teoremas de clasificación</b>	<b>31</b>
7.1. Grupos planos sin reflexiones . . . . .	31
7.1.1. El grupo plano $p1$ . . . . .	33
7.1.2. El grupo plano $p2$ . . . . .	34
7.1.3. El grupo plano $p3$ . . . . .	35
7.1.4. El grupo plano $p4$ . . . . .	36
7.1.5. El grupo plano $p6$ . . . . .	37
7.2. Grupos planos con una reflexión . . . . .	38
7.2.1. El grupo plano $cm$ . . . . .	39
7.2.2. El grupo plano $pm$ . . . . .	40
7.2.3. El grupo plano $pg$ . . . . .	41
7.3. Grupos planos con más de una reflexión . . . . .	42
7.3.1. El grupo plano $cm$ . . . . .	50
7.3.2. El grupo plano $pmm$ . . . . .	50
7.3.3. El grupo plano $pmg$ . . . . .	51
7.3.4. El grupo plano $pgg$ . . . . .	52
7.3.5. El grupo plano $p31m$ . . . . .	53
7.3.6. El grupo plano $p3m1$ . . . . .	54
7.3.7. El grupo plano $p4mm$ . . . . .	55
7.3.8. El grupo plano $p4mg$ . . . . .	56
7.3.9. El grupo plano $p6mm$ . . . . .	57
<b>8. Conclusiones</b>	<b>59</b>



# 1. Introducción

La simetría siempre ha sido asociada a la belleza. Todo aquello que presente simetría es bello. Es por ello que en muchos edificios se construyen con cierta simetría. Así mismo también aparece la simetría en arte, como en pinturas o dibujos, donde se pueden observar creaciones realizadas a base de repetir un mismo elemento. En la naturaleza también podemos encontrar simetría en animales, hojas de árboles, minerales, o elementos inorgánicos. El estudio de estas simetrías en los grupos que vamos a ver tiene aplicaciones en la mineralogía y la química inorgánica.

Esta regularidad en ciertos objetos fue lo que llevó a preguntarse al matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630), *¿por qué los copos de nieve individuales, antes de que se enreden con otros copos, siempre aparecen con seis esquinas?, ¿por qué no caen copos con cinco o siete esquinas?*. En 1611 Kepler escribió su tratado *El Copo de Nieve de Seis Esquinas*, donde explicó detalladamente la estructura cristalina de los cristales de nieve.

Además, Kepler, en 1619, fue uno de los primeros que realizó un estudio sobre los mosaicos en su libro *Harmonice Mundi*, donde afirmó que el triángulo, el cuadrado y el hexágono son los únicos polígonos regulares que pueden cubrir el plano. En el ámbito de la cristalografía plana no volvió a haber más avances significativos hasta los estudios de Fedorov doscientos años después.

Evgraf Stepanovich Fedorov (1853-1919) demostró en 1891 que hay exactamente 17 grupos cristalográficos en el plano euclídeo. Estos grupos fueron redescubiertos en 1924 por G. Pólya y P. Niggli. Más adelante, Fedorov, Schönflies y Barlow demostraron que hay 230 grupos cristalográficos espaciales. Bieberbach probó que existe un número finito de estos grupos en cualquier dimensión.

Cabe notar que los árabes ya conocían los 17 grupos planos. Pruebas de ello son los diseños decorativos de la Alhambra, único monumento construido antes del descubrimiento de la teoría de grupos en el que hay, al menos, un ejemplo de cada uno de los grupos cristalográficos planos. Rafael Pérez Gómez habla de ello en su artículo [11], ya que fue el primero en encontrarlos todos.

El artista holandés M. C. Escher (1898-1972) también se interesó por esta materia, realizando mosaicos a partir de una figura que la servía como patrón, la cual obtenía modificando cuadrados, triángulos equiláteros, paralelogramos y hexágonos. Podemos ver un ejemplo de sus creaciones en la figura 1.



Figura 1: Mosaico de Escher

En 1972, el físico y matemático británico R. Penrose descubrió que existen teselaciones del plano basadas en pentágonos regulares que no tienen traslaciones, es decir, dada una copia desplazada de una figura nunca será exactamente igual que la original. Véase figura 2.

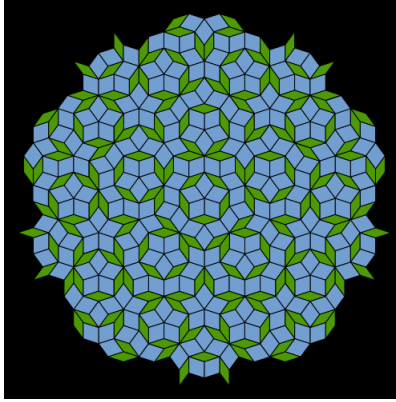


Figura 2: Mosaico de Penrose

En este trabajo trataremos de ampliar el artículo [14] de Schwarzenberger, donde da una demostración concisa de la clasificación de los 17 grupos cristalográficos.

En el primer bloque de nuestro trabajo empezaremos recordando conceptos de la teoría de grupos que hemos ido viendo a lo largo de la carrera, explicaremos la acción de un grupo sobre un conjunto y finalmente, veremos conceptos del plano euclídeo cuya finalidad es introducir las isometrías.

El segundo bloque de este trabajo es el que se centrará en el artículo [14], explicando en qué consiste un grupo cristalográfico plano y sus rasgos característicos para finalizar dando una prueba de que son exáctamente 17 y dar su clasificación junto con algunos ejemplos. La demostración la haremos de forma algebraica, igual que hicieron Fedorov, Schönflies y Barlow, combinando los posibles movimientos y estudiando caso por caso las distintas situaciones. Sin embargo, hay otras formas de realizar la demostración de manera geométrica y topológica. Este método fue el utilizado por Juan Margalef (IEM-CSIC) en el seminario, “¿Realmente hay 17 maneras de teselar un plano?”, que impartió en el Departamento de Álgebra de la Universidad de Sevilla en 2014, y se basa en los orbifold.

Cabe notar que la notación utilizada para los 17 grupos depende del método utilizado para la demostración. Cuando la demostración es de forma algebraica como la nuestra, la notación puede ser completa o abreviada. Nosotros utilizaremos la abreviada. Podemos ver todas las notaciones en [21].



## 2. Conceptos básicos

En esta sección vamos a introducir conceptos de la teoría de grupos. Algunos de estos resultados pueden encontrarse en [2] o en [3], así como en cualquier libro de teoría de grupos.

**Definición 2.1.** Un **grupo** es un par  $(G, *)$ , donde  $G$  es un conjunto no vacío, y  $*$  es una operación binaria interna

$$\begin{aligned} * : G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto a * b \end{aligned}$$

que cumple las siguientes propiedades:

**Asociatividad**  $a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in G$ .

**Existencia de elemento neutro**  $\exists e \in G$  tal que  $\forall a \in G$  se verifica  $e * a = a * e = a$ .

**Existencia de elemento simétrico**  $\forall a \in G, \exists \tilde{a} \in G$  tal que  $a * \tilde{a} = \tilde{a} * a = e$ .

El grupo se dice **abeliano** si, además, verifica la propiedad conmutativa  $a * b = b * a, \forall a, b \in G$ .

Cuando estamos trabajando con un grupo abeliano, se suele usar la *notación aditiva*. En este caso, se denota la operación con  $+$ , y se llama *suma*. El elemento neutro,  $e$ , se denota por  $0$ , y el simétrico de  $a$ ,  $\tilde{a}$ , por  $-a$ , y se denomina *opuesto*. Otra notación habitual es la *notación multiplicativa*, en la que se omite la operación, o se denota por  $\cdot, a * b = ab = a \cdot b$ . El elemento neutro se denota  $1$ , y el simétrico de  $a$  se denota  $a^{-1}$  o  $1/a$ , y se llama *elemento inverso*.

Veamos algunos ejemplos de grupos.

1.  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  son grupos abelianos con la suma. Estos tres últimos menos el  $0$ , son grupos abelianos con el producto.
2. El conjunto de las permutaciones de  $n$  elementos,  $S_n$ , es un grupo con la composición,  $(S_n, \circ)$ . Los únicos grupos de permutaciones abelianos son  $S_1$  y  $S_2$ .
3. El conjunto de matrices  $m \times n$  con coeficientes en un anillo  $A$  es un grupo abeliano con la suma,  $(M_{m \times n}(A), +)$ .
4. El conjunto de matrices invertibles  $n \times n$ , con coeficientes en un cuerpo  $K$ , es un grupo no abeliano con el producto de matrices. Este grupo se denomina *grupo lineal*  $n \times n$  sobre  $K$ , y se denota por  $GL_n(K)$ .
5. El conjunto de matrices  $n \times n$  de determinante  $1$ , con coeficientes en un cuerpo  $K$ , es un grupo no abeliano con el producto de matrices. Este grupo se llama *grupo especial lineal*  $n \times n$  sobre  $K$ , y se denota por  $SL_n(K)$ .
6. El conjunto  $R_n$  de rotaciones de un  $n$ -ágono regular, es decir, el conjunto de giros que dejan invariante un  $n$ -ágono regular, es un grupo abeliano.
7. El conjunto  $V_4$  de movimientos que dejan invariante al rectángulo es un grupo abeliano. También se llama *grupo de Klein*. Tiene cuatro elementos: la identidad (que se denota por  $0$ ), la simetría  $a$  de eje paralelo a los lados menores del rectángulo, la simetría  $b$  de eje paralelo a los lados mayores, y el giro  $c$  de  $180^\circ$ .

De aquí en adelante vamos a usar la notación multiplicativa.

**Proposición 2.2.** Para todo grupo  $G$  se tiene:

1. El elemento neutro es único.
2. El elemento inverso de cualquier elemento  $a$  es único.
3.  $\forall a, b \in G, (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .
4. Si  $ab = ac$  entonces  $b = c$ . En particular, si  $a^2 = a$ , se tiene  $a = e$ .

**Demostración:**

1. Supongamos que  $e, \bar{e} \in G$  son dos elementos neutros del grupo. Entonces por ser  $e$  elemento neutro, se tiene que  $e\bar{e} = \bar{e}e = \bar{e}$ . Igualmente, por ser  $\bar{e}$  elemento neutro  $\bar{e}e = e\bar{e} = e$ . Así, al igualar obtenemos  $e = \bar{e}$ .

2. Supongamos que  $a, \bar{a} \in G$  son dos elementos inversos de un elemento arbitrario  $b \in G$ . Se tiene

$$\bar{a} = \bar{a}e = \bar{a}ba = ea = a.$$

3. Al multiplicar  $b^{-1}a^{-1}$  a la izquierda por el elemento  $ab$  se obtiene la identidad. Como el inverso de  $ab$  es único, se tiene  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .
4. Multiplicando la igualdad  $ab = ac$  a la izquierda por el inverso de  $a$ ,  $a^{-1}$ , y usando la propiedad asociativa obtenemos  $(a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c$ . Además, como  $a^{-1}a = e \Rightarrow b = eb = ec = c$ .

*c.q.d.*

Definamos ahora el **orden de un grupo**  $G$ ,  $|G|$ , como el cardinal del conjunto  $G$ . El grupo es **finito** si lo es su orden, en caso contrario es infinito. De forma similar podemos definir el **orden de un elemento**  $a \in G$  como el ínfimo de los números enteros positivos que verifican que  $a$  operado consigo mismo  $n$  veces, es la identidad.

$$\text{ord}(a) = \inf\{n \in \mathbb{Z}^+ \mid \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^n = e\}.$$

Si no existe ningún  $n$  que lo verifique, se dice que  $a$  tiene **orden infinito**,  $\text{ord}(a) = \infty$ . En caso de que estemos trabajando con un grupo finito, es fácil ver que el orden de cualquier elemento del grupo es menor que el orden del grupo,  $\text{ord}(a) \leq |G|$ ,  $\forall a \in G$ . De hecho,  $\text{ord}(a)$  es un divisor de  $|G|$  como veremos más adelante.

**Ejemplos.** ■ Sea  $a \in \mathbb{Z}$ , y  $a \neq 0$ . Entonces  $a$  tiene orden infinito.

- $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$  es un grupo con la suma módulo 6. Este grupo tiene orden 6, ya que tiene 6 elementos. Se tiene que  $\text{ord}(\bar{0}) = 1$ ,  $\text{ord}(\bar{1}) = \text{ord}(\bar{5}) = 6$ ,  $\text{ord}(\bar{2}) = \text{ord}(\bar{4}) = 3$ ,  $\text{ord}(\bar{3}) = 2$ . Como podemos comprobar, los órdenes de todos los elementos del grupo dividen al orden del grupo.
- El grupo  $V_4$  tiene orden 4, ya que tiene 4 elementos. El orden de sus elementos es  $\text{ord}(0) = 1$ ,  $\text{ord}(a) = \text{ord}(b) = \text{ord}(c) = 2$ .

Un **subgrupo**  $H$  de un grupo  $G$  es un subconjunto que es un grupo con la operación definida en  $G$ . Se denota por  $H \leq G$ . Los subgrupos  $G$  y  $\{e\}$  son los llamados subgrupos **impropios** de  $G$ , los demás se denominan subgrupos **propios**. Por ejemplo, es fácil ver que  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{Q}, +)$  y  $(\mathbb{Z}, +)$  son subgrupos propios de  $(\mathbb{C}, +)$ , y que todos los subgrupos de  $\mathbb{Z}$  son de la forma  $\mathbb{Z}m$  donde  $m \in \mathbb{N}$ .

**Proposición 2.3.** Sea  $(G, \cdot)$  un grupo. Sea un subconjunto no vacío  $H \subset G$ .  $H$  es un subgrupo de  $G$  si y sólo si  $\forall a, b \in H$  se verifica  $a \cdot b^{-1} \in H$ .

**Demostración:**

$\Rightarrow \forall a, b \in H$ , por ser  $H$  subgrupo  $a, b^{-1} \in H$ . Entonces  $a \cdot b^{-1} \in H$ .

$\Leftarrow$  Dado  $a \in H$ , aplicando la hipótesis con  $b = a$  tenemos  $a \cdot a^{-1} = 1 \in H$ . Como  $1, a \in H$ , se tiene que  $1 \cdot a^{-1} = a^{-1} \in H$ . Por tanto, el inverso de cualquier elemento de  $H$  está en  $H$ . Por otra parte, dados  $a$  y  $b$  en  $H$ , ya sabemos que  $b^{-1} \in H$ . Por tanto  $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$ . Luego el producto de  $G$  es una operación interna de  $H$ . Como  $H$  contiene el elemento neutro, y todo elemento de  $H$  tiene inverso en  $H$ , hemos demostrado que  $H$  es subgrupo de  $G$ .

*c.q.d.*

Notemos que la intersección de subgrupos de un grupo es un subgrupo de éste. Por un lado, el elemento neutro está en todos los subgrupos luego va a estar en la intersección, lo que hace que sea no vacía. Por otro lado, si dos elementos,  $x, y$ , están en la intersección, están en cada uno de ellos. Por la definición de subgrupo, el inverso de  $y$  tiene que estar en todos ellos, y también el producto  $x \cdot y^{-1}$ , luego está en la intersección. Así, por la proposición anterior, tenemos que la intersección es subgrupo.

Si tenemos un subconjunto  $A$  de un grupo  $G$ , al subgrupo de  $G$  que verifica

$$\langle A \rangle = \cap \{H \mid H \text{ subgrupo de } G \text{ y } A \subset H\},$$

lo llamamos **subgrupo generado por**  $A$ . Notemos que  $\langle A \rangle$  es el menor subgrupo que contiene a  $A$ . Si  $A$  genera a todo  $G$ ,  $G = \langle A \rangle$ , entonces decimos que  $A$  es un **sistema de generadores** de  $G$ .

**Proposición 2.4.** Sean  $G$  un grupo y  $A \subset G$  un subconjunto. Entonces

$$\langle A \rangle = \{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \mid x_i \in A \cup A^{-1}, \forall i = 1, \dots, n, n \geq 1\}.$$

**Demostración:** Es evidente que

$$\langle A \rangle \supset \{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \mid x_i \in A \cup A^{-1}, \forall i = 1, \dots, n, n \geq 1\}.$$

Para la otra inclusión usaremos que  $\langle A \rangle$  es el menor subgrupo que contiene a  $A$ . Es fácil ver que  $A \subset \{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \mid x_i \in A \cup A^{-1}, \forall i = 1, \dots, n, n \geq 1\}$  y que  $\{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \mid x_i \in A \cup A^{-1}, \forall i = 1, \dots, n, n \geq 1\}$  es un subgrupo. De donde

$$\langle A \rangle \subset \{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \mid x_i \in A \cup A^{-1}, \forall i = 1, \dots, n, n \geq 1\}.$$

*c.q.d.*

Un grupo  $G$  se dice **cíclico** si  $\exists a \in G$  tal que  $G = \langle a \rangle = \langle \{a\} \rangle$ , es decir, si puede ser generado por un solo elemento. Veamos algunos ejemplos.

1.  $(\mathbb{Z}, +)$  es cíclico, ya que  $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ .
2.  $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n, +)$  es cíclico, ya que  $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n = \langle \bar{1} \rangle$ .
3.  $(V_4, \circ)$  no es cíclico, ya que en él no existe ningún elemento que tenga el mismo orden que  $V_4$ . Un sistema generador de  $V_4$  sería  $V_4 = \langle a, b \rangle$ .

Cojamos ahora un grupo  $G$  y un subgrupo  $H \subset G$ . Vamos a definir sobre  $G$  las relaciones  $\sim_H, H \sim$

$$x \sim_H y \Leftrightarrow x^{-1} \cdot y \in H, \quad x_H \sim y \Leftrightarrow x \cdot y^{-1} \in H.$$

No es difícil comprobar que ambas relaciones son de equivalencia.

**Proposición 2.5.** Sean  $G$  un grupo,  $y a \in G$  un elemento del grupo,

1. La clase de equivalencia de  $a$  a izquierda módulo  $H$  es

$$a \cdot H = \{a \cdot h \mid h \in H\}.$$

2. La clase de equivalencia de  $a$  a derecha módulo  $H$  es

$$H \cdot a = \{h \cdot a \mid h \in H\}.$$

**Demostración:**

Vamos a probar únicamente la clase de equivalencia a izquierda ya que a derecha es análogo. Llamemos  $[a]$  a la clase de equivalencia de  $a$  por  $\sim_H$ , es decir,

$$[a] = \{b \in G \mid a \sim_H b\} = \{b \in G \mid a^{-1} \cdot b \in H\}.$$

Veamos que  $[a] = a \cdot H$ . Si  $b \in [a]$ , entonces  $a^{-1} \cdot b \in H$ , es decir, existe  $h \in H$  tal que  $a^{-1} \cdot b = h$ , luego  $b = a \cdot h \in a \cdot H$ . De la misma forma, si cogemos un elemento  $b \in a \cdot H$ , entonces existe un  $h \in H$  tal que  $b = a \cdot h$ , luego  $a^{-1} \cdot b = h \in H$ . De donde se deduce que  $a \sim_H b$ .

*c.q.d.*

Podemos definir ahora el **índice** de un subgrupo  $H$  en un grupo  $G$ , y se denota  $(G : H)$ , como el número de clases de equivalencia para la relación  $\sim_H$ . Como todas las clases de equivalencia de  $\sim_H$  tienen el mismo orden, igual al orden de  $H$ , se deduce que si  $G$  es un grupo finito:

$$(G : H) = \frac{|G|}{|H|}.$$

En este caso, se tiene que  $(G : H)$  es un entero. Aunque no demostraremos ésto, se podría obtener igualmente utilizando la relación  $H \sim$ .

Si  $G$  es infinito, la fórmula anterior no tiene sentido, y el índice de un subgrupo puede ser infinito.

Notemos que la clase de equivalencia del elemento neutro,  $e \in G$ , tanto a izquierda como a derecha, es  $H$ , ya que  $e \cdot H = H \cdot e = H$ . Podemos ver, además, que las clases de equivalencia de un elemento a izquierda y a derecha no tienen por qué coincidir, pero ambas contienen al elemento en cuestión, ya que  $a \cdot e = e \cdot a = a$ , es decir,  $a \in a \cdot H \cap H \cdot a$ . Los subgrupos en los que las clases a izquierda y a derecha de cualquier elemento son iguales se llaman subgrupos **normales**.

**Definición 2.6.** Un subgrupo  $H \in G$  se dice **normal** en  $G$ , y se denota  $H \triangleleft G$ , si verifica alguna de las siguientes condiciones:

1. Las relaciones  $\sim_H$  y  $H \sim$  coinciden, es decir,  $x \cdot H = H \cdot x \forall x \in G$ .
2.  $\forall x \in G$  se tiene  $x \cdot H \cdot x^{-1} \subset H$ .
3.  $\forall x \in G$  se tiene  $x \cdot H \cdot x^{-1} = H$ .

**Proposición 2.7.** Las condiciones de la definición 2.6 son equivalentes.

**Demostración:**

1  $\Rightarrow$  2

Supongamos que  $x \cdot H = H \cdot x, \forall x \in G$ . Dado un elemento  $x \cdot h \cdot x^{-1} \in x \cdot H \cdot x^{-1}$ , como  $x \cdot h \in x \cdot H = H \cdot x$ , tenemos que  $\exists \tilde{h} \in H$  tal que  $x \cdot h = \tilde{h} \cdot x$ . Así,  $x \cdot h \cdot x^{-1} = \tilde{h} \cdot x \cdot x^{-1} = \tilde{h} \in H$ .

2  $\Rightarrow$  3

Supongamos que para todo  $x \in G, x \cdot H \cdot x^{-1} \subset H$ . Entonces  $H = x^{-1} \cdot x \cdot H \cdot x^{-1} \cdot x \subseteq x^{-1} \cdot H \cdot x$  para todo  $x \in G$ . Por tanto,  $x \cdot H \cdot x^{-1} = H$ .

3  $\Rightarrow$  1

Supongamos que para todo  $x \in G$  se tiene que  $x \cdot H \cdot x^{-1} = H$ . Tenemos que  $x \cdot H = x \cdot H \cdot x^{-1} \cdot x = H \cdot x$ .

c.q.d.

**Ejemplos.** 1.  $\{e\} \triangleleft G$  y  $G \triangleleft G$ .

2. Todos los subgrupos de un grupo abeliano son normales. El recíproco no es cierto ya que existen grupos, llamados Hamiltonianos que no son abelianos pero todo subgrupo es normal.
3. El conjunto de las matrices escalares  $\lambda I$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , es un subgrupo normal del grupo lineal  $GL(n, \mathbb{R})$ .

Cuando tenemos un grupo normal, podemos dotar al conjunto de sus clases de equivalencia de estructura de grupo. Este grupo se llama **grupo cociente**  $G$  sobre  $H$ , y se denota  $G/H$ ,

$$G/H = \{a * H \mid a \in G\}.$$

La operación viene definida como sigue

$$(a * H) * (b * H) = (a * b) * H.$$

**Definición 2.8.** Una función  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  es un **homomorfismo de grupos** si verifica

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \star \varphi(b) \quad \forall a, b \in G_1,$$

siendo  $*$  la operación en  $G_1$  y  $\star$  la operación en  $G_2$ .

El **núcleo** de  $\varphi$  es  $\ker(\varphi) := \{a \in G_1 : \varphi(a) = 1_{G_2}\}$ , donde  $1_{G_2}$  es el elemento neutro de  $G_2$ .

La **imagen** de  $\varphi$  es  $\text{Im}(\varphi) := \{b \in G_2 : \exists a \in G_1 \text{ con } \varphi(a) = b\}$ .

Si  $\varphi$  es inyectiva, se denomina **monomorfismo**, si es sobreyectiva, se denomina **epimorfismo**, y si es biyectiva, se denomina **isomorfismo**. Si existe un isomorfismo entre dos grupos se dice que son **isomorfos**.

A partir de ahora, usaremos que si  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  es morfismo, entonces  $\varphi(1_{G_1}) = 1_{G_2}$ , pues  $\varphi(1_{G_1}) = \varphi(1_{G_1} \cdot 1_{G_1}) = \varphi(1_{G_1}) \cdot \varphi(1_{G_1})$ . Además,  $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$  ya que  $\varphi(1_{G_1}) = \varphi(a \cdot a^{-1}) = \varphi(a) \cdot \varphi(a^{-1}) = 1_{G_2}$ .

**Ejemplos.** 1. La aplicación constante  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ ,  $\varphi(x) = 1_{G_2}$ ,  $\forall x \in G_1$ , es un homomorfismo.

2. Sean  $G$  un grupo,  $x \in G$ . La aplicación  $i_x : G \rightarrow G$ ,  $i_x(y) = x \cdot y \cdot x^{-1}$ ,  $\forall y \in G$  es un homomorfismo. Además  $i_x$  es biyectiva e  $(i_x)^{-1} = i_{x^{-1}}$ . Llamamos **automorfismos** a los homomorfismos biyectivos de  $G$  en  $G$ .

3. Si  $H \subset G$  es un subgrupo, la inclusión de  $H$  en  $G$  es un monomorfismo.

**Proposición 2.9.** Sea  $f : G_1 \rightarrow G_2$  un homomorfismo de grupos.

1. Si  $H \subset G_1$  es un subgrupo,  $f(H)$  es un subgrupo de  $G_2$ . En particular, la imagen de  $f$ ,  $\text{Im} f$ , es un subgrupo de  $G_2$ .

2. Si  $T \subset G_2$  es un subgrupo (normal),  $f^{-1}(T)$  es un subgrupo (normal) de  $G_1$ . En particular, el núcleo de  $f$ ,  $\ker(f)$ , es un subgrupo (normal) de  $G_1$ .

3.  $f$  es un monomorfismo si y sólo si  $\ker(f) = \{1_{G_1}\}$ .

**Demostración:**

1.  $f(H) = \{s \in G_2 \mid \exists x \in H \text{ tal que } f(x) = s\}$ .  $f(H)$  es no vacío ya que  $1_{G_2} = f(1_{G_1}) \in f(H)$ . Cojamos  $s, t \in f(H)$ , y sean  $x, y \in H$  tales que  $f(x) = s$  y  $f(y) = t$ . Entonces, por ser  $H$  subgrupo,  $x * y^{-1} \in H$ ,  $s * t^{-1} = f(x) * (f(y))^{-1} = f(x) * f(y^{-1}) = f(x * y^{-1}) \in f(H)$ .

2. Ver que  $f^{-1}(T)$  es un subgrupo de  $G_1$  es análogo al apartado 1. Veamos que si  $T \triangleleft G_2$  entonces  $f^{-1}(T) \triangleleft G_1$ . Sea  $x * y * x^{-1} \in x * f^{-1}(T) * x$  con  $f(y) \in T$ . Tenemos, por ser  $T \triangleleft G_2$ , que

$$f(x * y * x^{-1}) = f(x) * f(y) * f(x)^{-1} \in f(x) * T * f(x)^{-1} \subset T.$$

Luego,  $x * y * x^{-1} \in f^{-1}(T)$  y  $f^{-1}(T) \triangleleft G_1$ .

3. Supongamos que  $f$  es inyectiva, es decir, si  $f(y) = f(x)$  entonces  $x = y$ . Sea  $x \in \ker f$ , entonces  $f(x) = 1_{G_2} = f(1_{G_1})$ , luego  $x = 1_{G_1}$  y  $\ker(f) = \{1_{G_1}\}$ .

Supongamos ahora que  $\ker(f) = \{1_{G_1}\}$  y sean  $x, y \in G_1$  tales que  $f(x) = f(y)$ , entonces,  $1_{G_2} = f(x) * f(y)^{-1} = f(x * y^{-1})$ , por tanto,  $x * y^{-1} \in \ker(f) = \{1_{G_1}\}$ , luego  $x = y$ .

*c.q.d.*

El núcleo de un homomorfismo cualquiera,  $f : G_1 \rightarrow G_2$ , es un subgrupo normal. Por tanto, siempre podemos considerar el grupo cociente  $G_1 / \ker f$ .

**Teorema 2.10** (Primer Teorema de Isomorfía). Dado un morfismo de grupos  $f : G \rightarrow G'$  se tiene  $G / \ker(f) \cong \text{Im}(f)$ .

**Demostración:**

Para demostrar este resultado sólo es necesario comprobar que la aplicación  $\varphi : G / \ker(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ , donde  $\varphi(a \cdot \ker(f)) = f(a)$ , es un isomorfismo de grupos bien definido.

Es evidente que  $f(a) \in \text{Im}(f)$  para todo  $a \in G$ . Como hemos definido  $\varphi$  usando representantes de las clases de equivalencia, debemos ver que esta definición no depende del representante escogido, es decir, tenemos que probar que si  $a \cdot \ker(f) = a' \cdot \ker(f)$  entonces  $f(a) = f(a')$ . De esta manera, si tenemos  $a \cdot \ker(f) = a' \cdot \ker(f)$ , entonces  $a^{-1} \cdot a' \in \ker(f)$ , luego  $e = f(a^{-1} \cdot a') = f(a^{-1}) \cdot f(a') = f(a)^{-1} \cdot f(a')$ , y por tanto  $f(a) = f(a')$ . Luego  $f$  está bien definida.

Es fácil ver que  $\varphi$  es un homomorfismo ya que  $\varphi((a \cdot \ker(f)) \cdot (b \cdot \ker(f))) = \varphi((a \cdot b) \cdot \ker(f)) = f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) = \varphi(a \cdot \ker(f)) \cdot \varphi(b \cdot \ker(f))$ .

Además,  $\varphi$  es inyectiva ya que si  $\varphi(a \cdot \ker(f)) = \varphi(b \cdot \ker(f))$ , entonces  $f(a) = f(b)$ , luego  $f(a^{-1} \cdot b) = e$ , de donde deducimos que  $a^{-1} \cdot b \in \ker(f)$  lo que significa que  $a \cdot \ker(f) = b \cdot \ker(f)$ . Vemos también que  $\varphi$  es sobreyectiva ya que para todo elemento  $c \in \text{Im}(f)$ , existe  $a \in G$  tal que  $f(a) = c$ , luego  $\varphi(a \cdot \ker(f)) = f(a) = c$ . Como es inyectiva y sobreyectiva, entonces es biyectiva.

*c.q.d.*



### 3. Acción de un grupo sobre un conjunto

La idea general de lo que vamos a tratar en este apartado es cómo pueden actuar los elementos de un grupo sobre los elementos de un conjunto.

**Definición 3.1.** Sean  $G$  un grupo, y  $A$  un conjunto. Una acción de un grupo en un conjunto es una aplicación de la forma

$$\begin{aligned}\varphi: G \times A &\longrightarrow A \\ (g, a) &\longmapsto \varphi_g(a)\end{aligned}$$

tal que

1.  $\varphi_e(a) = a$ ,  $\forall a \in A$ , donde  $e$  es el elemento neutro de  $G$ .
2.  $\varphi_g(\varphi_h(a)) = \varphi_{gh}(a)$ , para cualesquiera  $g, h \in G$ ,  $a \in A$ .

Diremos que  $G$  actúa sobre  $A$  por medio de  $\varphi$ .

Veamos que, si fijamos un  $g \in G$ , la aplicación

$$\begin{aligned}\varphi_g: A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto \varphi_g(a)\end{aligned}$$

es biyectiva.

De esta manera, será más fácil comprender una acción de un grupo ya que, ésta, está completamente determinada por las aplicaciones  $\varphi_g$ .

**Lema 3.2.**  $\varphi_g$  es biyectiva.

**Demostración:**

Veamos la inyectividad. Hay que comprobar que si  $\varphi_g(a) = \varphi_g(b)$  entonces  $a = b$ . Por las propiedades de la definición de una acción, tenemos

$$a = \varphi_e(a) = \varphi_{g^{-1}g}(a) = \varphi_{g^{-1}}(\varphi_g(a)) = \varphi_{g^{-1}}(\varphi_g(b)) = \varphi_{g^{-1}g}(b) = \varphi_e(b) = b.$$

Luego  $\varphi_g$  es inyectiva.

Veamos la sobreyectividad. Dado  $a \in A$ , sea  $b = \varphi_{g^{-1}}(a)$ . Se tiene

$$\varphi_g(b) = \varphi_g(\varphi_{g^{-1}}(a)) = \varphi_{gg^{-1}}(a) = \varphi_e(a) = a.$$

Entonces  $\varphi_g$  es biyectiva para cada  $g \in G$ .

*c.q.d.*

**Nota.** Esto nos permite dar una definición equivalente de la acción de un grupo como una aplicación  $\varphi: G \rightarrow \text{Biy}(A)$  que hace corresponder a cada  $g \in G$  el elemento  $\varphi_g \in \text{Biy}(A)$ , de modo que  $\varphi_e(a) = a$ ,  $\forall a \in A$ , y  $\varphi_g(\varphi_h(a)) = \varphi_{gh}(a)$ , para cualesquiera  $g, h \in G$ ,  $a \in A$ .

Siempre que tengamos un grupo y un conjunto cualesquiera podemos formar una acción entre ellos, la acción trivial o identidad, aunque el estudio de esta acción carece de interés. Veamos otros ejemplos no triviales.

1. Sea  $G = \{e, \sigma\}$  grupo cíclico de dos elementos. Sea el conjunto  $A = \mathbb{R}^2$ . Una acción de  $G$  en  $\mathbb{R}^2$  viene dada por  $\varphi_\sigma((x, y)) = (-x, -y)$ .
2. Sea  $G = \{I, R, R^2, R^3, T_1, T_2, T_3, T_4\}$  un grupo donde  $I$  es la identidad,  $R$  es la rotación en sentido horario de ángulo  $\frac{\pi}{2}$  en torno al centro de un cuadrado,  $T_1, T_2, T_3$ , y  $T_4$  son las reflexiones respecto a la recta horizontal que pasa por el centro del cuadrado, diagonal que pasa por los vértices superior izquierdo e inferior derecho, la vertical que pasa por el centro del cuadrado, y la otra diagonal respectivamente.  $G$  se corresponde con el grupo de simetrías de un cuadrado. Sea  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  el conjunto de los vértices del cuadrado etiquetados en sentido horario.  $G$  actúa sobre  $A$ . La acción viene dada por la permutación inducida en los vértices del cuadrado por cada elemento de  $G$ .

Las permutaciones de los vértices dadas por  $R$  y  $T_2$  son

$$\varphi_R = (1234), \varphi_{T_2} = (24).$$

Comprobemos que la composición de estos dos elementos de  $G$  corresponde a la composición de las dos permutaciones:

$$\varphi_{T_2 R} = \varphi_{T_2} \circ \varphi_R = (24)(1234) = (14)(23).$$

3. Todo grupo puede actuar sobre sí mismo por traslación. Así, cada  $\varphi_g$  manda a cada elemento  $h \in G$  a un elemento  $gh \in G$  utilizando la operación que dota de estructura de grupo a  $G$ . Denominaremos a esta acción traslación a la izquierda. De forma equivalente tendríamos la traslación a la derecha. Ambas acciones están relacionadas de manera que si  $\varphi_g(h) = gh$  es una traslación a la izquierda, entonces  $\phi_g(h) = hg^{-1}$  es una traslación a la derecha.
4. Todo grupo  $G$  actúa sobre sí mismo por conjugación,  $\varphi_g(h) = ghg^{-1}$ . Sin embargo,  $\varphi_g(h) = hgh^{-1}$  no es acción, ya que no verifica la primera propiedad de una acción, es decir,  $\varphi_e(h) \neq h, \forall h \in G, h \neq e$ ,

$$\varphi_e(h) = heh^{-1} = hh^{-1} = e \neq h.$$

**Nota.** Si  $A$  es finito y su cardinal es  $n$ , para todo grupo  $G$  que actúe sobre  $A$ , existe un homomorfismo que lleva  $G$  en el grupo de permutaciones  $S_n$ . Esto se muestra en el ejemplo 2) que acabamos de ver.

En una acción de un grupo sobre un conjunto, como en toda aplicación, podemos definir el núcleo como los elementos del grupo cuya biyección correspondiente es la identidad en  $A$ .

$$\ker \varphi = \{g \in G \mid \varphi_g(a) = a, \forall a \in A\} \subseteq G.$$

### Tipos de acciones

Sea  $\varphi$  una acción de un grupo  $G$  sobre un conjunto  $A$ .

- Decimos que la acción es **fiel** si su núcleo es la identidad.

$$\ker \varphi = \{e\}.$$

- Decimos que la acción es **transitiva** si, dados dos elementos  $x, y \in A$  cualesquiera, existe un elemento  $g \in G$  tal que  $\varphi_g(x) = y$ .
- Decimos que la acción es **libre** si la imagen de cualquier elemento de  $A$  por un elemento de  $G$  determina al elemento de  $G$ . Equivalentemente, si para todo elemento no trivial  $g \in G$  se tiene que  $\varphi_g(a) \neq a$  para todo  $a \in A$ .

**Ejemplos.** 1. La acción del ejemplo 2) anterior es fiel ya que el único elemento del núcleo es el elemento neutro del grupo, que es el único que deja invariantes los cuatro vértices al actuar sobre ellos.

Comprobamos también que la acción es transitiva ya que la identidad lleva cada elemento en sí mismo,  $R$  lleva cada vértice en el siguiente en sentido horario,  $R^2$  lleva cada vértice en el vértice con el que forma una diagonal, y  $R^3$  lleva cada vértice en el siguiente en sentido antihorario, de manera que siempre podemos obtener todos los vértices del cuadrado a partir de cualquiera de ellos.

Por último, no es una acción libre ya que, por ejemplo, se tiene

$$\sigma_R(1) = 2 = \sigma_{T_3}(1),$$

y sin embargo,  $R \neq T_3$ .

Como ya hemos visto, los  $g \in G$  que dejan fijos a todos los elementos de  $A$  pertenecen al núcleo. Pero ahora vamos a plantearnos esto, visto desde el punto de vista de los elementos de  $A$ ; es decir, nos interesa saber qué elementos de  $G$  hacen que un elemento de  $A$  no varíe. Este concepto es lo que se conoce como estabilizador de un elemento del conjunto.

**Definición 3.3.** Sea  $\varphi$  una acción de un grupo  $G$  sobre un conjunto  $A$ . Sea  $a \in A$ . El estabilizador de  $a$  en  $G$  es el conjunto

$$G_a = \{g \in G \mid \varphi_g(a) = a\} \text{ para cada } a \in A.$$



El conjunto de elementos del grupo que obtendríamos, no necesariamente tiene que ser igual que el núcleo. Este nuevo conjunto tendrá, al menos, el mismo número de elementos que  $\ker\varphi$ , ya que, como todos los elementos del núcleo tienen que dejar invariantes a todos los elementos de  $A$ , en particular, dejan invariante al elemento de  $A$  que hemos seleccionado. Pero puede haber elementos del grupo que dejen fijos a un conjunto distinto del total en  $A$ , en el que se encuentra el elemento del que partimos, por lo que estos elementos de  $G$  sí pertenecerían al conjunto que estamos creando pero no al núcleo.

**Ejemplos.** 1. El estabilizador de cualquier elemento  $g$  de  $G$  en una acción por traslación a la izquierda es el elemento neutro ya que es el único que verifica que  $eg = g$ .

2. Sea el grupo  $G = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ . Consideremos el conjunto  $A = \mathbb{R}^2$ .  $G$  actúa sobre  $\mathbb{R}^2$  como una homotecia, es decir,

$$\varphi_q((x, y)) = q \cdot (x, y) = (qx, qy) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Veamos quién es el núcleo de la acción.

El único elemento  $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  del grupo que hace que  $\varphi_q = id$ , es el elemento neutro del grupo.

$$\varphi_1((x, y)) = (x, y), \quad \text{para cualquier } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Por tanto, la acción es fiel.

Además, notemos que cogiendo  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  y  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , no existe ningún  $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  con el que el  $(0, 0)$  vaya a  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Luego la acción no es transitiva. Si nuestro conjunto fuese  $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$  la acción seguiría sin ser transitiva, ya que, por ejemplo, a partir del  $(1, 1) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$  nunca podríamos obtener  $(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ .

Esta acción tampoco es libre ya que

$$\varphi_q((0, 0)) = q \cdot (0, 0) = (0, 0) = p \cdot (0, 0) = \varphi_p((0, 0)), \quad \forall p, q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$

Notemos que si el conjunto fuese  $A = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$  la acción sí sería libre, ya que a partir de la imagen de un elemento cualquiera de  $A$ , obtendríamos la razón de la homotecia.

Veamos los estabilizadores de los elementos del plano para entender mejor este concepto.

$$G_{(0,0)} = \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ pues } \forall q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ se tiene } \varphi_q((0, 0)) = q \cdot (0, 0) = (0, 0).$$

Para cualquier  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $(x, y) \neq (0, 0)$ , es  $G_{(x,y)} = \{1\}$ .

**Proposición 3.4.** El estabilizador de  $a$  en  $G$ ,  $G_a$ , es un subgrupo de  $G$ .

**Demostración:**

$G_a$  no es vacío porque el elemento neutro de  $G$  está en  $G_a$ .

Sean  $g, h \in G_a$ , es decir,  $\varphi_g(a) = a = \varphi_h(a)$ , veamos que  $gh^{-1} \in G_a$  :

$$\varphi_{gh^{-1}}(a) = \varphi_g(\varphi_{h^{-1}}(a)) = \varphi_g(\varphi_{h^{-1}}(\varphi_h(a))) = \varphi_g(\varphi_{h^{-1}h}(a)) = \varphi_g(\varphi_e(a)) = \varphi_{ge}(a) = \varphi_g(a) = a.$$

Luego  $gh^{-1} \in G_a$ .

*c.q.d.*

**Proposición 3.5.** El núcleo de una acción es igual a la intersección de los estabilizadores de todos los elementos del conjunto.

$$\ker \varphi = \bigcap_{a \in A} G_a$$

**Demostración:**

Lo probaremos por doble inclusión.

$\subseteq$  Sea  $g \in \ker \varphi$ , es decir,  $\varphi_g = id$ .

Como  $\varphi_g(a) = id(a) = a$ , entonces  $g \in G_a \quad \forall a \in A$ . Luego  $g \in \bigcap_{a \in A} G_a$ .

$\supseteq$  Sea  $g \in \bigcap_{a \in A} G_a$ , entonces  $\forall a \in A \quad \varphi_g(a) = a$ . Esto es  $\varphi_g = id$  y, por tanto,  $g \in \ker \varphi$ .

c.q.d.

Gracias a esta proposición podemos saber cuándo una acción es fiel sin necesidad de calcular el núcleo, sólo tendríamos que encontrar un elemento del conjunto cuyo estabilizador fuese igual a la identidad. Así, como la identidad pertenece a todos los estabilizadores y tenemos, al menos, uno que es exactamente igual a la identidad, entonces la intersección es la identidad.

**Definición 3.6.** Sea  $\varphi$  una acción de un grupo  $G$  en un conjunto  $A$ . Se llama órbita de un elemento  $a \in A$  al conjunto

$$Orb_a = \{b \in A \mid b = \varphi_g(a) \forall g \in G\}.$$

Es decir, la órbita de un elemento  $a \in A$  se obtiene al hacer actuar todos los elementos de  $G$  sobre  $a$ . Además es no vacía pues siempre se tiene  $a \in Orb_a$ .

Notemos que la órbita de un elemento es todo el conjunto  $A$  si y sólo si la acción es transitiva. Por el contrario, si  $\{a\} = Orb_a$  para todo  $a \in A$  entonces el núcleo de la acción es todo  $G$ , lo que significa que la acción es trivial. En el caso en el que encontremos, al menos, un elemento cuya órbita sólo contiene un número menor de elementos que los que hay en  $A$ , eso implica que la acción no es transitiva.

**Proposición 3.7.** El conjunto  $A$  es la unión disjunta de las órbitas.

**Demostración:**

Cada  $a \in A$  cumple que  $a = \varphi_e(a) \in Orb_a$ , luego la unión de las órbitas es  $A$ .

Veamos que si dos órbitas se cortan, entonces son iguales. Supongamos que las órbitas  $Orb_a$  y  $Orb_b$  contienen ambas a  $z \in A$ .

Como  $z \in Orb_a$ , existe un  $g \in G$  tal que  $\varphi_g(a) = z$ . Análogamente, como  $z \in Orb_b$ , existe un  $h \in G$  tal que  $\varphi_h(b) = z$ . Entonces  $\varphi_g(a) = z = \varphi_h(b)$ .

Sea  $f = h^{-1}g \in G$ , se tiene  $\varphi_f(a) = \varphi_{h^{-1}g}(a) = \varphi_{h^{-1}}(\varphi_g(a)) = \varphi_{h^{-1}}(\varphi_h(b)) = \varphi_{h^{-1}h}(b) = b$  y  $a = \varphi_{f^{-1}}(b)$ .

Veamos que  $Orb_a = Orb_b$  por doble inclusión.

$\subseteq$

Si  $x \in Orb_a \Rightarrow \exists g_1 \in G$  con  $x = \varphi_{g_1}(a) = \varphi_{g_1}(\varphi_{f^{-1}}(b)) = \varphi_{g_1 f^{-1}}(b) \in Orb_b$ .

Luego  $Orb_a \subseteq Orb_b$ .

$\supseteq$

Si  $y \in Orb_b \Rightarrow \exists g_2 \in G$  con  $y = \varphi_{g_2}(b) = \varphi_{g_2}(\varphi_f(a)) = \varphi_{g_2 f}(a) \in Orb_a$ .

Luego  $Orb_b \subseteq Orb_a$ .

c.q.d.

**Proposición 3.8.** Sea  $\varphi$  una acción de un grupo  $G$  sobre un conjunto  $A$ . Si dos elementos del conjunto  $A$  están en la misma órbita, entonces tienen estabilizadores conjugados.

**Demostración:**

Sean  $x, y \in A$  dos elementos pertenecientes a la misma órbita  $Orb_x$ . Entonces  $\exists g \in G$  tal que  $\varphi_g(x) = y$ .

Veamos que  $G_x$  y  $G_y$  son conjugados,  $G_x = gG_yg^{-1}$ .

$\subseteq$  Sea  $h \in G_x$ , entonces se tiene  $\varphi_h(x) = x = \varphi_{g^{-1}}(y)$  y, además,  $\varphi_h(x) = \varphi_h(\varphi_{g^{-1}}(y)) = \varphi_{hg^{-1}}(y)$ .

Entonces  $\varphi_{hg^{-1}}(y) = \varphi_{g^{-1}}(y)$ , luego  $\varphi_{ghg^{-1}}(y) = y \Rightarrow ghg^{-1} \in G_y$ .

$\supseteq$  Sea  $f \in G_y$ , entonces se tiene  $\varphi_f(y) = y = \varphi_g(x)$  y, además,  $\varphi_f(y) = \varphi_f(\varphi_g(x)) = \varphi_{fg}(x)$ .

Entonces  $\varphi_{fg}(x) = \varphi_g(x)$ , luego  $\varphi_{g^{-1}fg}(x) = x \Rightarrow g^{-1}fg \in G_x$ .

c.q.d.

## 4. El plano euclídeo

### 4.1. La longitud y la distancia euclídea

El **plano euclídeo** es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales  $x$  e  $y$ ,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$$

A continuación vamos a definir la **distancia euclídea**.

**Definición 4.1.** La distancia  $d_{euc}(P, Q)$  es igual que la longitud euclídea del segmento que va de  $P$  a  $Q$ . Es decir, la distancia euclídea de  $P = (x_0, y_0)$  a  $Q = (x_1, y_1)$  es igual a

$$d_{euc}(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

**Definición 4.2.** Un **espacio métrico** es un par  $(X, d)$  donde  $X$  es un conjunto, y  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

1.  $d(P, Q) \geq 0$  para cada  $P, Q \in X$ ;
2.  $d(P, Q) = 0$  sí y sólo si  $P = Q$ ;
3.  $d(Q, P) = d(P, Q)$  para cada  $P, Q \in X$ ;
4. **Desigualdad triangular:**  $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$  para cada  $P, Q, R \in X$ .

La función  $d$  se conoce como la **función distancia**, la **función métrica**, o la **métrica** del espacio métrico  $X$ .

Si la función  $d$  sólo verifica las condiciones 1), 3) y 4), entonces es llamada **función pseudodistancia** o **pseudométrica**.

Nótese que  $(\mathbb{R}^2, d_{euc})$  es un espacio métrico, y es fácil ver que  $d_{euc}$  es una función distancia.

Una sucesión de puntos  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $P_n \in X$  **converge** al punto  $P_\infty$  si, para cada  $\epsilon > 0$ , existe un entero  $n_0$  tal que  $d(P_n, P_\infty) < \epsilon$  para cada  $n \geq n_0$ . El punto  $P_\infty$  se denomina **límite** de la sucesión. De esta forma, la sucesión  $\{d(P_n, P_\infty)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a 0 como una sucesión de números reales.

Una función  $\varphi : X \rightarrow X'$  de un espacio métrico  $(X, d)$  a un espacio métrico  $(X', d')$  es **continua** en  $P_0 \in X$  si, para cada número  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que  $d'(\varphi(P), \varphi(P_0)) < \epsilon$  para cada  $P \in X$  con  $d(P, P_0) < \delta$ . La función es continua si es continua en cada  $P_0 \in X$ .

En un espacio métrico  $(X, d)$  podemos definir la bola abierta de centro  $P_0 \in X$  y radio  $r > 0$  como el subconjunto

$$B_d(P_0, r) = \{P \in X; d(P, P_0) < r\}.$$

Cuando estamos trabajando en el plano euclídeo,  $(\mathbb{R}^2, d_{euc})$ , una bola abierta es un disco de radio  $r$  centrada en  $P_0$ . En el caso en el que el espacio métrico es  $(\mathbb{R}, d)$  con  $d(x, y) = |x - y|$ , la bola  $B_d(x_0, r)$  es el intervalo abierto  $(x_0 - r, x_0 + r)$ .

No debemos confundir la bola abierta de centro  $P_0$  y radio  $r$  con el círculo de centro y radio los mismos,  $\{P \in \mathbb{R}^2; d_{euc}(P, P_0) = r\}$ , ya que el círculo es la frontera de la bola. De forma similar tenemos la diferencia entre la bola abierta tridimensional y la esfera.

### 4.2. Isometrías

Una **isometría** entre dos espacios métricos,  $(X, d)$  y  $(X', d')$ , es una biyección  $\varphi : X \rightarrow X'$  tal que, para cada  $P, Q \in X$ , se tiene

$$d'(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q).$$

Nótese que al ser  $\varphi$  una biyección, tiene inversa bien definida,  $\varphi^{-1} : X' \rightarrow X$ . Además  $\varphi^{-1}$  también es una isometría.

Es también inmediato ver que una isometría es continua.

Cuando existe una isometría entre dos espacios métricos, entonces ambos tienen las mismas propiedades. De hecho,  $\varphi$  puede usarse para trasladar cualquier propiedad de  $(X, d)$  a la misma en  $(X', d')$ .

El caso con el que trabajaremos es en el que ambos espacios métricos son  $(\mathbb{R}^2, d_{euc})$ . En estas isometrías encontramos:

**Traslaciones** de un vector  $(x_0, y_0)$ . Son transformaciones que mueven todos los puntos en la dirección del vector,

$$\varphi(x, y) = (x + x_0, y + y_0)$$

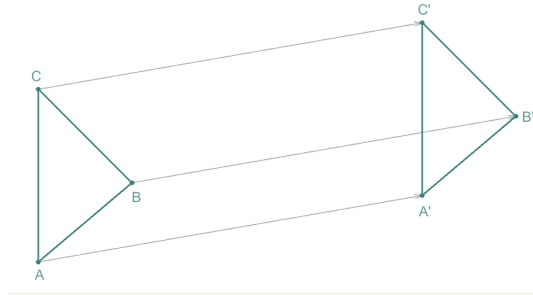


Figura 3: Traslación

**Rotaciones** de ángulo  $\theta$  centradas en el origen son transformaciones que hacen girar los puntos del plano de manera que cada punto  $P$  del plano es enviado a un punto  $Q$ , tal que  $P$  y  $Q$  están sobre la circunferencia de centro el origen y radio igual a la distancia desde  $P$  al origen, y las semirrectas  $OP$  y  $OQ$  (donde  $O=(0,0)$ ) forman un ángulo  $\theta$ . Así, el único punto del plano que se mantiene fijo es el origen.

$$\varphi(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

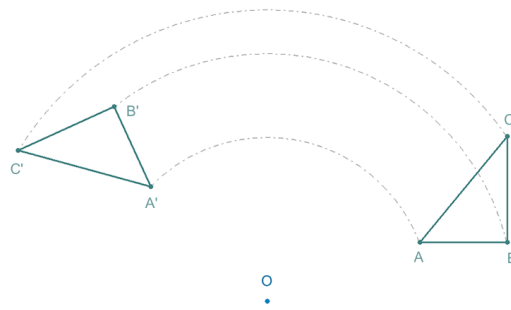


Figura 4: Rotación

**Reflexiones** a través de una recta,  $L$ , que pasa por el origen y forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$ ,

$$\varphi(x, y) = (x \cos 2\theta + y \sin 2\theta, x \sin 2\theta - y \cos 2\theta)$$

Las reflexiones envían cada punto  $P$  del plano a otro punto  $Q$  tal que existe un único punto sobre la recta, que denotaremos  $P_0$ , de manera que la recta que une  $P$  y  $Q$  es perpendicular a la recta  $L$  en  $P_0$ . Además, se tiene la siguiente igualdad  $d(P; P_0) = d(P_0, Q)$ . Vemos que los puntos que se quedan fijos son los puntos de la recta  $L$ .

Notemos que la composición de dos aplicaciones  $\varphi : X \rightarrow Y$  y  $\psi : Y \rightarrow Z$  es la aplicación  $\psi \circ \varphi : X \rightarrow Z$  dada por  $\psi \circ \varphi(P) = \psi(\varphi(P))$  para cada  $P \in X$ . De esta manera podemos considerar cualquier composición de las isometrías anteriores, por ejemplo cualquier aplicación de la forma

$$\varphi(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta + x_0, x \sin \theta + y \cos \theta + y_0)$$

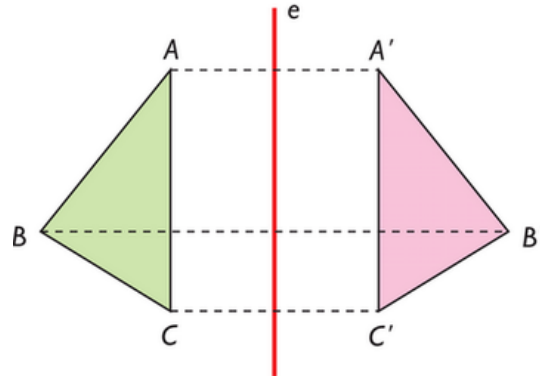


Figura 5: Reflexión

o

$$\varphi(x, y) = (x \cos 2\theta + y \sin 2\theta + x_0, x \sin 2\theta - y \cos 2\theta + y_0).$$

Por último, un espacio métrico  $(X, d)$  es **homogéneo** si, para dos puntos cualesquiera  $P, Q \in X$ , existe una isometría  $\varphi : X \rightarrow X$  tal que  $\varphi(P) = Q$ .

El espacio métrico  $(\mathbb{R}^2, d_{euc})$  no es sólo homogéneo, es **isotrópico**, es decir, para dos puntos cualesquiera  $P_1$  y  $P_2 \in \mathbb{R}^2$ , y dos vectores unitarios cualesquiera  $\vec{v}_1$  en  $P_1$  y  $\vec{v}_2$  en  $P_2$ , hay una isometría  $\varphi$  de  $(\mathbb{R}^2, d_{euc})$  que envía  $P_1$  a  $P_2$  y  $\vec{v}_1$  a  $\vec{v}_2$ . Como consecuencia, el plano euclídeo parece el mismo en cada punto y en cada dirección.



## 5. Grupos de simetrías

La simetría es un rasgo característico de formas geométricas relacionada con su invarianza bajo ciertas transformaciones, movimientos o intercambios. Es decir, un elemento presenta simetría cuando no cambia al aplicarle un conjunto de transformaciones. Este conjunto es lo que se conoce como grupo de simetría. A través de él obtenemos una gran información sobre las simetrías de una figura, ya que, cuantas más simetrías presente una figura, mayor será el grupo asociado a ella.

Podemos dividir los grupos de simetrías en tres, dependiendo del tipo de traslaciones que se encuentren en ellos. En primer lugar encontramos los grupos de Leonardo que se caracterizan por la ausencia de traslaciones y, deben su nombre a Leonardo Da Vinci, quien los utilizó en el diseño de las capillas dentro de las iglesias. Los grupos de simetrías en los que sólo hay una traslación se conocen como el grupo de los frisos. Podemos encontrarlos en las decoraciones que vemos en los frisos de la fachada de los templos o en las paredes de viejas casas coloniales, para embellecer los zaguanes y las salas. Por último están los grupos cristalográficos planos que parten de dos traslaciones no paralelas, de manera que la pieza fundamental se repite infinitamente en todo el plano. En 1891, E. S. Feodorov demostró que sólo existen 17 grupos cristalográficos. Será en estos en los que vamos a centrar nuestro estudio.

De ahora en adelante vamos a determinar cada elemento de un grupo de simetrías,  $G$ , por un par  $(v, \varphi)$  donde  $v \in \mathbb{R}^2$  es un vector traslación, y  $\varphi$  es una isometría de  $\mathbb{R}^2$  que deja fijo el origen. Notemos que  $\varphi$  puede verse como una aplicación lineal del espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$ .

$G$  actúa sobre el plano  $\mathbb{R}^2$ , donde el elemento  $(v, \varphi)$  manda un punto  $x \in \mathbb{R}^2$  a otro punto  $v + \varphi x \in \mathbb{R}^2$ ,

$$(v, \varphi)x = v + \varphi x.$$

El elemento  $(v, \varphi)$  tiene asociada la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_1 & a_{11} & a_{12} \\ v_2 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

donde

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada al automorfismo lineal  $\varphi$ , y

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

La operación en  $G$  es la composición de simetrías. Así, si  $(v, \varphi)$  y  $(w, \phi)$  son dos elementos de  $G$ , y  $x \in \mathbb{R}^2$  se tiene

$$(v, \varphi)((w, \phi)x) = (v, \varphi)(w + \phi x) = v + \varphi(w + \phi x) = v + \varphi w + \varphi \phi x = (v + \varphi w, \varphi \phi)x.$$

Por lo que  $(v, \varphi)(w, \phi) = (v + \varphi w, \varphi \phi)$ , y es fácil comprobar que  $(v, \varphi)^{-1} = (-\varphi^{-1}v, \varphi^{-1})$  ya que componiendo ambos elementos obtenemos el elemento neutro en  $G$ ,  $(0, id)$ .

**Definición 5.1.** Un grupo de isometrías  $G$  es **cristalográfico** o **plano** si el conjunto de las traslaciones de  $G$  es de la forma

$$T = \{n_1 t_1 + n_2 t_2; n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\},$$

donde  $t_1$  y  $t_2$  son dos vectores de  $\mathbb{R}^2$  linealmente independientes. Y si, además, el conjunto de isometrías de  $\mathbb{R}^2$  que dejan fijo el origen en  $G$  es finito.

Vamos a describir cuatro estructuras dentro del grupo  $G$  que, como veremos más adelante, son invariantes por una equivalencia de grupos que definiremos en su momento.

### 5.1. El retículo, $T$

Llamamos retículo de  $G$  al conjunto  $T$  de los vectores de  $\mathbb{R}^2$  correspondientes a traslaciones de  $G$ , es decir,

$$T = \{t \in \mathbb{R}^2 : (t, id) \in G\}.$$

Si  $(t, id), (t', id) \in G$ , entonces  $(t, id)(t', id) = (t + t', id) \in G$ , luego  $T$  es un subgrupo de  $\mathbb{R}^2$  con la suma. Por tanto,  $T$  se puede inyectar en  $G$  y su imagen es el conjunto de las traslaciones de  $G$ .

El retículo de los grupos cristalográficos planos está generado por dos vectores traslación linealmente independientes de la siguiente forma

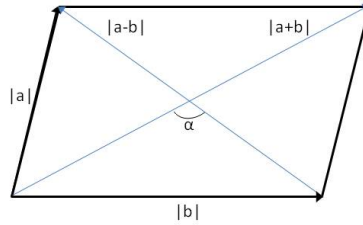
$$T = \{n_1 a + n_2 b : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} = \langle a, b \rangle.$$

En el retículo hay al menos un vector no nulo cuya longitud es mínima. Esto se tiene porque  $T$  es discreto, y por tanto, para cualquier  $c > 0$  sólo hay un número finito de pares de enteros  $n_1, n_2$  tal que  $|n_1 a + n_2 b| < c$ . Sea este vector no nulo,  $t$ . Notemos que no tiene por qué ser único.

Cuando hacemos actuar  $T$  sobre el origen, generando así la órbita de éste, lo que obtenemos es el retículo.

Los retículos pueden clasificarse dependiendo de la posición relativa de los generadores  $a, b$ . Dado un retículo  $T$  podemos elegir unos generadores tales que  $\|a\| \leq \|b\| \leq \|a - b\| \leq \|a + b\|$ . Veamos que esto es cierto. En primer lugar se puede elegir el orden de los generadores de manera que  $\|a\| \leq \|b\|$ . La desigualdad  $\|a - b\| \leq \|a + b\|$  se puede obtener cambiando  $b$  por  $-b$ . Por último, si  $\|a - b\| < \|b\|$  bastaría tomar como generadores  $a - b$ , y  $a$ .

El caso en el que  $\|b\| = \|a - b\| = \|a + b\|$  no puede darse pues, si suponemos que es posible, dado que las diagonales de un paralelogramo se bisecan formando un ángulo  $\alpha$  y aplicando la fórmula del coseno tenemos que  $\alpha = 180^\circ$ . Esto implica que  $a$  es nulo, luego ese caso no es posible.



Por tanto, podemos distinguir cinco tipos de retículo distintos.

**Oblicuo:**  $\|a\| < \|b\| < \|a - b\| < \|a + b\|$ .

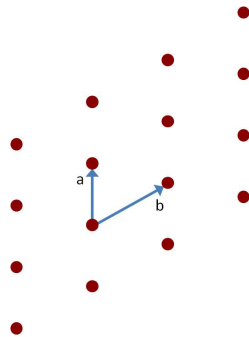


Figura 6: Retículo oblicuo



**Rectangular:**  $\|a\| < \|b\| < \|a - b\| = \|a + b\|$ .

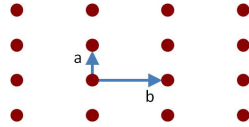


Figura 7: Retículo rectangular

**Rectangular centrado:**  $\|a\| < \|b\| = \|a - b\| < \|a + b\|$ .

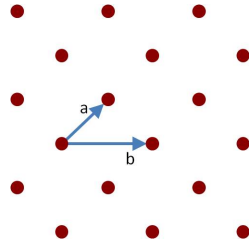


Figura 8: Retículo rectangular centrado

**Cuadrado:**  $\|a\| = \|b\| < \|a - b\| = \|a + b\|$ .

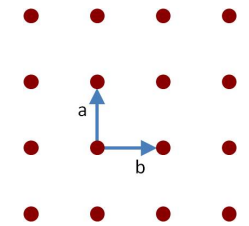


Figura 9: Retículo cuadrado

**Hexagonal:**  $\|a\| = \|b\| = \|a - b\| < \|a + b\|$ .

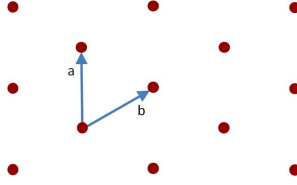


Figura 10: Retículo hexagonal

## 5.2. El grupo puntual, $H$

Consideremos el conjunto  $H = \{\varphi : (v, \varphi) \in G \text{ para algún } v \in \mathbb{R}^2\}$  de las transformaciones lineales de  $G$ . Dado que  $(v_1, \varphi)(v_2, \psi) = (v_1 + \varphi(v_2), \varphi\psi)$  y  $(v, \varphi)^{-1} = (-\varphi^{-1}(v), \varphi^{-1})$ ,  $H$  tiene estructura de grupo junto con la composición, y lo llamaremos grupo puntual de  $G$ .

Si profundizamos un poco en el grupo puntual nos damos cuenta de que al coger el conjunto de todas las rotaciones dentro de  $H$  obtenemos un subgrupo,  $H_0 \leq H$ . Sin lugar a dudas es un subgrupo ya que la composición de rotaciones es una rotación. Sin embargo, con las reflexiones no podemos hacer lo mismo, ya que el conjunto de las reflexiones de  $H$  no sería un subgrupo de éste.

El grupo puntual de un grupo plano se caracteriza por ser de orden finito, y por tanto, sólo contiene elementos de orden finito.

**Lema 5.2.** *El subgrupo  $H_0$  es cíclico, es decir, está generado por una rotación,  $R_{\frac{2\pi}{q}}$ , de ángulo mínimo  $\frac{2\pi}{q}$  y orden de rotación  $q \in \mathbb{Z}^+$ .*

**Demostración:**

Asumimos primero que el ángulo mínimo de las rotaciones de  $H_0$  tiene la forma  $\frac{2\pi}{q}$ , con  $q \in \mathbb{Z}^+$ .

Supongamos que  $R_{\frac{2\pi}{q}}$  no genera todos los elementos de  $H_0$ . Entonces existe una rotación con ángulo  $\frac{2\pi}{q}j + \beta$  con  $j \in \mathbb{Z}$  y  $0 < \beta < \frac{2\pi}{q}$  que está en  $H_0$ ,  $R_{\frac{2\pi}{q}j + \beta} \in H_0$ . Como  $H_0$  es subgrupo  $R_{\frac{2\pi}{q}j} = R_{\frac{2\pi}{q}}^j \in H_0$ . Componiendo la rotación  $R_{\frac{2\pi}{q}j + \beta}$  y la inversa de  $R_{\frac{2\pi}{q}j}$ ,  $R_{\frac{2\pi}{q}j + \beta}R_{\frac{2\pi}{q}j}^{-1}$ , obtenemos una rotación de ángulo  $\beta$ , luego  $R_\beta$  sería una rotación con ángulo menor que  $\frac{2\pi}{q}$ , y éste era mínimo. Por tanto, no existe ninguna rotación en  $H_0$  que no esté generada por  $R_{\frac{2\pi}{q}}$ .

Veamos ahora por qué podemos considerar la rotación de ángulo mínimo  $\frac{2\pi}{q}$  con orden de rotación  $q \in \mathbb{Z}^+$ .

Sabemos que  $H_0$  es finito por ser  $H$  finito, por tanto,  $q = \frac{n}{d} \in \mathbb{Q}$  fracción reducida.

Si  $q < 1$  entonces  $\frac{n}{d} < 1$ , luego  $n < d$ . Añadiendo ésto al hecho de que  $n \wedge d = 1$ , podemos considerar  $kn + n' = d$  con  $k \in \mathbb{N}$  y  $0 < n' < n$ . Notemos que  $n'$  no es nulo pues, si lo fuese,  $q$  no sería una fracción reducida. De esta modo, obtenemos

$$\frac{2\pi}{q} = \frac{2\pi}{\frac{n}{kn+n'}} = \frac{2\pi(kn+n')}{n} = 2\pi k + \frac{2\pi n'}{n} = 2\pi k + \frac{2\pi}{\tilde{q}},$$

donde  $\tilde{q} = \frac{n}{n'} > 1$  ya que  $0 < n' < n$ . Por tanto se tiene que

$$R_{\frac{2\pi}{q}} = R_{2\pi k} R_{\frac{2\pi}{\tilde{q}}} = R_{2\pi}^k R_{\frac{2\pi}{\tilde{q}}} = R_{\frac{2\pi}{\tilde{q}}}.$$

De esta manera hemos visto que basta considerar el caso en el que  $q > 1$ .

Cuando  $q > 1$  tenemos  $H_0 = \langle R_{\frac{2\pi}{q}} \rangle = \langle R_{\frac{2\pi d}{n}} \rangle$ , por lo que el número de elementos de  $H_0$  es, a lo sumo, igual a  $n$ .

Como  $n \wedge d = 1$ , por la identidad de Bézout existen  $D, N \in \mathbb{Z}$  tales que  $Dd + Nn = 1$ . Sean  $\alpha = \frac{2\pi}{d}$  y  $\beta = \frac{2\pi}{n}$ . Observamos que  $(R_\alpha)^D = R_\beta$ , pues

$$(R_{\frac{2\pi}{d}})^D = R_{\frac{2\pi d D}{n}} = R_{\frac{2\pi(1-Nn)}{n}} = R_{\frac{2\pi}{n} - \frac{Nn2\pi}{n}} = R_{\frac{2\pi}{n}}.$$

Por tanto,  $\langle R_\beta \rangle \subseteq \langle R_\alpha \rangle$ . Pero sabemos que el orden de  $R_\beta$  es  $n$  y el orden de  $R_\alpha$  es menor o igual que  $n$ , luego tienen que ser ambas del mismo orden. Por tanto  $\langle R_\alpha \rangle = \langle R_\beta \rangle$ .

Podemos concluir que estas rotaciones que generan  $H_0$  tienen ángulo  $\frac{2\pi}{q}$  con  $q \in \mathbb{Z}^+$ .

*c.q.d.*

**Lema 5.3.** *El subgrupo  $H_0$  sólo puede ser de orden  $q = 1, 2, 3, 4$  o  $6$ .*

**Demostración:**

Consideremos  $t \in T$  un vector no nulo de longitud mínima, y sea  $R_{\frac{2\pi}{q}}$ , como antes, el generador de  $H_0$ . El vector obtenido haciendo actuar esa rotación sobre  $t$ ,  $R_{\frac{2\pi}{q}}(t)$ , pertenece al retículo y tiene la misma longitud que  $t$ . Además, notemos que el ángulo que hay entre ambos es  $\frac{2\pi}{q}$ . Sabemos que el vector que forma un triángulo con  $t$  y  $R_{\frac{2\pi}{q}}(t)$  pertenece al retículo, y que, por el teorema del coseno, este vector tiene longitud

$$|t|^2 + |t|^2 - 2|t||t| \cos \frac{2\pi}{q} = 2|t|^2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{q}\right).$$

Si  $q > 6$  se tiene  $0 \leq 1 - \cos \frac{2\pi}{q} \leq \frac{1}{2}$ . Entonces este vector del retículo tiene longitud menor que  $t$ , pero éste era de longitud mínima, luego  $q \leq 6$ .

Supongamos ahora que  $q = 5$ .

Si componemos la rotación  $R_{\frac{2\pi}{5}}$  consigo misma, obtenemos una rotación de ángulo  $\frac{4\pi}{5}$ . Cuando hacemos actuar  $R_{\frac{4\pi}{5}}$  sobre  $t$ , obtenemos un vector  $R_{\frac{4\pi}{5}}(t)$  que forma un ángulo de  $\frac{4\pi}{5}$  con el vector  $t$ . Además, notemos que  $t$  y  $-t$  forman un ángulo  $\pi$ . Entonces el ángulo que forman los vectores  $R_{\frac{4\pi}{5}}(t)$  y  $-t$  es  $\frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{10}$ , y hemos visto que dos vectores del retículo, de longitud mínima, no pueden formar un ángulo menor que  $\frac{2\pi}{6}$ , luego  $q \neq 5$ .

Por tanto, hemos probado que  $q \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ . Esto se conoce como “restricción cristalográfica”.

*c.q.d.*

**Proposición 5.4.**  *$T = \{n_1t + n_2R(t) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$  cuando  $q = 3, 4$ , o  $6$ , donde  $t$  es un vector en  $T$  de longitud mínima, y  $R$  es la rotación que genera  $H_0$ .*

**Demostración:**

Vamos a llamar  $\tilde{T} = \{n_1t + n_2R(t) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ , y sea  $n_1t + n_2R(t) \in \tilde{T}$ . El vector  $t$  está en el retículo, y también está  $R(t)$  al ser obtenido mediante la acción de  $R$  en  $t$ . Ambos son linealmente independientes ya que los casos en los que no lo son, serían  $q = 1$  y  $q = 2$ , y estos no se incluyen para esta propiedad. Además,  $n_1t + n_2R(t) \in T$  al ser  $T$  un grupo aditivo.

Consideremos ahora un vector de  $T$ ,  $x \in T$ . Al ser  $t$  y  $R(t)$  vectores linealmente independientes de  $T$ , podemos considerar  $x = x_1t + x_2R(t)$  con  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ . Sabemos que existe una traslación de  $\tilde{T}$  mediante la cual podemos llevar  $x$  a un punto cercano al origen, de manera que  $x = x_1t + x_2R(t) \in \tilde{T}$  si y sólo si  $x' = (x_1 - \lfloor x_1 \rfloor)t + (x_2 - \lfloor x_2 \rfloor)R(t) = x'_1t + x'_2R(t) \in \tilde{T}$ , donde  $0 \leq |x'_1| \leq \frac{1}{2}$ , y  $0 \leq |x'_2| \leq \frac{1}{2}$ . Pero ese vector no pertenece a  $\tilde{T}$  ya que su longitud es menor que la de  $t$  que era de longitud mínima.

$$|x'|^2 = |x'_1|^2|t|^2 + |x'_2|^2|t|^2 - 2|x'_1||x'_2||t|^2 \cos \frac{2\pi}{q} = \left(|x'_1|^2 + |x'_2|^2 - 2|x'_1||x'_2| \cos \frac{2\pi}{q}\right) |t|^2 \leq \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) |t|^2 < |t|^2.$$

La igualdad sólo sería posible cuando  $x'_1 = x'_2 = \frac{1}{2}$  y  $q = 2$ . Por tanto, al ser un vector del retículo menor que  $t$ , debe ser el vector nulo. Luego  $x = x_1t + x_2R(t)$  con  $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$  y está en  $\tilde{T}$ . Esto prueba que  $T = \{n_1t + n_2R(t); n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$  para  $q = 3, 4$  o  $6$ .

*c.q.d.*

### 5.3. Acción de $H$ en $T$

En la sección 3 vimos la acción de un grupo sobre un conjunto. En este caso el grupo es  $H$ , y el conjunto,  $T$ . De esta manera se tiene la aplicación

$$\begin{aligned} \chi: H &\rightarrow \text{Biy}(T) \\ \varphi &\mapsto \chi_\varphi \end{aligned}$$

donde  $\chi_\varphi(t) = \varphi(t)$ .

Así dado  $\varphi \in H$  y  $t \in T$ ,  $\varphi(t) \in T$  ya que

$$(\varphi(t), id) = (v + \varphi(t) - v, id) = (v + \varphi(t), \varphi)(-\varphi^{-1}v, \varphi^{-1}) = (v, \varphi)(t, id)(v, \varphi)^{-1},$$

para cualquier vector  $v$  tal que  $(v, \varphi) \in G$ .

La idea general consiste en generar toda la celosía del plano al hacer actuar los elementos del grupo puntual sobre los elementos del retículo.

La acción de  $H$  en  $T$  en un grupo plano es siempre fiel, ya que el núcleo es siempre la identidad, que es la única que deja invariantes todos los vectores del retículo pues las rotaciones sólo dejan invariante el origen, y las reflexiones sólo dejan invariantes los puntos que se encuentran en la recta de reflexión.

Por otro lado, la acción nunca es transitiva pues una traslación no puede ser llevada a  $n$  veces ella misma para ningún  $n \neq \pm 1$ , ni mediante rotaciones, ni mediante reflexiones, ya que ambas mantienen las longitudes de los vectores.

La acción tampoco es libre si  $H \neq id$  pues, para todo  $\varphi \in H$ ,  $\varphi \neq id$ , se tiene  $\varphi(0) = 0$ .

Para explicar los estabilizadores de un elemento del retículo, vamos a considerar sólo los casos en los que  $H$  contiene reflexiones y rotaciones, ya que los estabilizadores de un elemento cuando  $H$  sólo tiene una reflexión, o cuando  $H$  sólo contiene rotaciones se asemejan a algunos de los que vamos a ver. El único elemento del retículo cuyo estabilizador es todo el grupo puntual es el vector nulo. Notemos que las rotaciones sólo dejan invariante al  $(0, 0)$ , luego, en los grupos cristalográficos en los que se encuentren, están en  $G_{(0,0)}$ , y no existe ningún otro  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  de manera que las rotaciones pertenezcan a  $G_{(x,y)}$ . Los elementos del retículo que pertenezcan a una línea de reflexión tendrán como estabilizador esa reflexión y la identidad. El estabilizador de cualquier otro elemento del retículo es sólo la identidad.

Consideremos ahora un grupo puntual en el que sólo hay una reflexión. Entonces la órbita de un elemento que esté en la línea de reflexión es ese mismo elemento. Si el elemento no está en la línea de reflexión tendría una órbita de dos elementos, él mismo y el resultante de actuar sobre él la reflexión. Si el grupo puntual sólo tiene rotaciones, la órbita de cualquier elemento estará compuesta de tantos elementos como el orden de la rotación generadora del grupo, excepto la órbita del vector nulo, que sería únicamente él mismo. Si el grupo puntual tiene tanto reflexiones como rotaciones, la órbita de un vector del retículo se obtiene de forma similar a los anteriores y, tiene, al menos, tantos elementos como el orden de la rotación que genera  $H_0$ , dependerá de si está en una línea de reflexión o no para determinar el número exacto, a excepción, como en los casos anteriores, del vector nulo, cuya órbita es él mismo.

### 5.4. Los vectores de deslizamiento

Vamos a tomar un elemento del grupo puntual con orden finito  $q$ ,  $\varphi \in H$ . Así se tiene que existe  $(v, \varphi) \in G$  para algún vector  $v \in \mathbb{R}^2$ . Además, como  $\varphi$  tiene orden finito  $q$ ,  $\varphi^q = id$  y,

$$(v, \varphi)^q = (v + \varphi(v) + \dots + \varphi^{q-1}(v), \varphi^q) = (v + \varphi(v) + \dots + \varphi^{q-1}(v), id.)$$

El vector  $a = v + \varphi v + \dots + \varphi^{q-1}v$  está en el retículo y lo llamaremos vector de deslizamiento de  $\varphi$ .

Notemos que el elemento  $a$  del retículo permanece invariante bajo la acción de  $\varphi$ ,

$$\varphi(a) = \varphi(v) + \varphi^2(v) + \dots + \varphi^{q-1}(v) + \varphi^q(v) = \varphi(v) + \dots + \varphi^{q-1}(v) + v = a.$$

Todos los vectores del retículo son vectores de deslizamiento de la identidad. Si  $\varphi$  es una rotación, el único vector de deslizamiento de  $\varphi$  es el origen. Si  $\varphi$  es una reflexión en una recta  $l$  entonces sus vectores de deslizamiento se encuentran en  $l$ .

De ahora en adelante, sólo consideraremos que  $\varphi$  es una reflexión, ya que el estudio de los vectores deslizamiento en los otros casos carece de interés.

Observemos que si podemos tomar otro vector  $v' \in \mathbb{R}^2$  tal que  $(v', \varphi) \in G$ , este vector  $v'$  no es cualquiera, sino que está relacionado con  $v$ . Concretamente tenemos que  $v - v' \in T$ , pues:

$$(v, \varphi)(v', \varphi)^{-1} = (v, \varphi)(-\varphi^{-1}(v'), \varphi^{-1}) = (v - \varphi\varphi^{-1}(v'), \varphi\varphi^{-1}) = (v - v', id).$$

Los vectores deslizamiento  $a = v + \varphi(v)$  y  $a' = v' + \varphi(v')$ , ambos de  $\varphi$ , también guardan cierta relación:

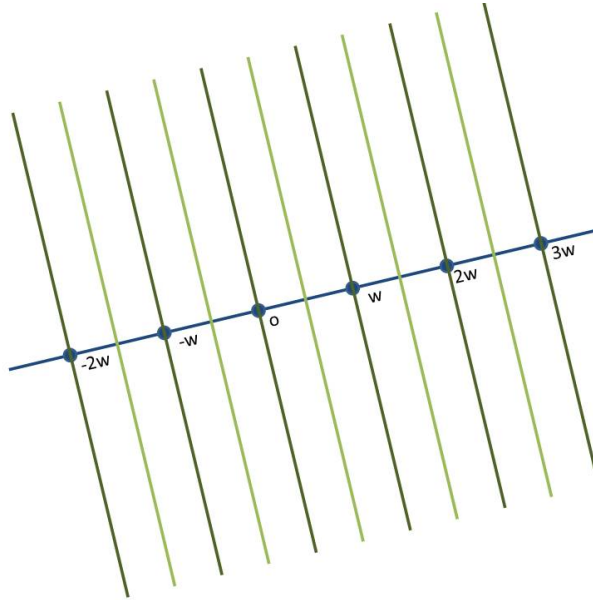
$$a - a' = (v - v') + \varphi(v - v'),$$

es decir, la diferencia de dos vectores deslizamiento de una misma reflexión no es necesariamente vector deslizamiento, pero es de la forma  $t + \varphi(t) \in T$ . Podemos decir también que  $t + \varphi(t) \in l$  ya que  $\varphi(t + \varphi(t)) = t + \varphi(t)$ .

A continuación vamos a ver los distintos vectores de deslizamiento de una reflexión  $\varphi$  que nos podemos encontrar. Para ello, consideremos un vector no nulo  $w \in T$  que esté en  $l$  y que sea de longitud mínima. Por estar  $w$  en  $l$  y al ser  $T$  un subgrupo de  $\mathbb{R}^2$ , hay más vectores del retículo en esa recta.

Observemos que los vectores  $v$  asociados a  $\varphi$ , (es decir, tales que  $(v, \varphi) \in G$ ), sólo pueden estar en las rectas perpendiculares a  $l$  que pasan por  $\{\frac{n}{2}w \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Llamemos a este conjunto  $Z^\varphi$  y veamos por qué es cierto.

Dado un  $v$  asociado a  $\varphi$ ,  $v + \varphi(v) \in T$  y, además,  $v + \varphi(v) \in l$ . Por tanto,  $v + \varphi(v) = nw$  para algún  $n \in \mathbb{Z}$ , y como sabemos que  $v + \varphi(v) = 2pr_l(v)$ , donde  $pr_l(v)$  es la proyección perpendicular de  $v$  sobre  $l$ , se sigue que está en  $\{\frac{n}{2}w \mid n \in \mathbb{Z}\}$ , lo que implica que  $v \in Z^\varphi$ .



Vemos que  $kw$  es vector de deslizamiento de  $\varphi$  si y sólo si existe un  $v$  asociado a  $\varphi$  tal que  $v + \varphi(v) = kw$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , si y sólo si existe un  $v$  asociado a  $\varphi$  en alguna de las rectas perpendiculares a  $l$  que pasan por  $\frac{k}{2}w, r_{\frac{k}{2}}$ . Además, si existe  $v$  asociado a  $\varphi$  en alguna recta perpendicular a  $l$  pasado por  $kw$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $r_k$ , también existen  $v$  asociados a  $\varphi$  en todas las rectas  $r_m$  con  $m \in \mathbb{Z}$ . De igual forma si  $v$  se encuentra en alguna recta  $r_{\frac{2k+1}{2}}$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$  también existen  $v$  asociados a  $\varphi$  en todas las rectas  $r_{\frac{2m+1}{2}}$  con  $m \in \mathbb{Z}$ . De esta manera, si  $kw$  es vector de deslizamiento de  $\varphi$  entonces  $(k + 2m)w$  es vector de deslizamiento de  $\varphi$  para todo  $m \in \mathbb{Z}$ .

Llamemos  $Z_1^\varphi$  a los vectores que se encuentran en las rectas perpendiculares a  $l$  que pasan por  $\{nw \mid n \in \mathbb{Z}\}$ , y  $Z_{\frac{1}{2}}^\varphi$  a los vectores que se encuentran en las rectas perpendiculares a  $l$  que pasan por  $\{\frac{2n+1}{2}w \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . El razonamiento anterior demuestra el siguiente resultado:

**Proposición 5.5.** ■ *Existen vectores asociados a  $\varphi$  en  $Z_1^\varphi$  si y sólo si*

$$A = \{2nw, \forall n \in \mathbb{Z}\} \subset \{\text{vectores de deslizamiento de } \varphi \text{ en } l\}.$$

■ *Existen vectores asociados a  $\varphi$  en  $Z_{\frac{1}{2}}^\varphi$  si y sólo si*

$$B = \{(2n+1)w, \forall n \in \mathbb{Z}\} \subset \{\text{vectores de deslizamiento de } \varphi \text{ en } l\}.$$

Veamos a continuación las posibles situaciones que nos pueden surgir.

**Situación 1.** Existen  $v$  asociados a  $\varphi$  en  $Z_1^\varphi$  y en  $Z_{\frac{1}{2}}^\varphi$ , por tanto todos los vectores en  $l$  de la forma  $nw$  con  $n \in \mathbb{Z}$  son vectores de deslizamiento en  $l$ .

$$\{nw, \forall n \in \mathbb{Z}\} = \{\text{vectores de deslizamiento de } \varphi \text{ en } l\}.$$

Además hay vectores del retículo en todas las rectas de  $Z_1^\varphi$ , pues se encuentran los múltiplos de  $w$ , y también en todas las rectas de  $Z_{\frac{1}{2}}^\varphi$  pues la diferencia de dos vectores asociados a  $\varphi$ , uno en  $Z_1^\varphi$  y otro en  $Z_{\frac{1}{2}}^\varphi$ , es un vector del retículo en  $Z_{\frac{1}{2}}^\varphi$ .

En cristalografía llamamos a esta situación *centrada*, (cm).

**Situación 2.** En este caso, o existen vectores  $v$  asociados a  $\varphi$  en  $Z_1^\varphi$  o existen  $v$  asociados a  $\varphi$  en  $Z_{\frac{1}{2}}^\varphi$ .

**Situación 2(m).** Existen vectores  $v$  asociados a  $\varphi$  en  $Z_1^\varphi$  y no existen en  $Z_{\frac{1}{2}}^\varphi$ . Por tanto,

$$A = \{\text{vectores de deslizamiento de } \varphi \text{ en } l\}.$$

En esta situación tenemos simetrías del plano afín, de eje paralelo a la recta  $l$ .

Observamos que sólo hay vectores del retículo en  $Z_1^\varphi$  pues la diferencia de dos vectores asociados a  $\varphi$  es un vector, cuya longitud es igual a la de algún múltiplo de  $w$ , y todo vector del retículo se puede ver como la diferencia de dos vectores asociados a  $\varphi$ .

Esta situación se denomina *primitiva con espejo*, (pm).

**Situación 2(g).** Existen vectores  $v$  asociados a  $\varphi$  en  $Z_{\frac{1}{2}}^\varphi$  y no existen en  $Z_1^\varphi$ . Por tanto,

$$B = \{\text{vectores de deslizamiento de } \varphi \text{ en } l\}.$$

Todos los vectores del retículo se encuentran, al igual que en la situación 2m, en  $Z_1^\varphi$ .

Esta situación es conocida como *primitiva con deslizamientos*, (pg).

## 6. Equivalencia de grupos planos

Antes de probar la clasificación de los grupos planos, debemos precisar cuándo son equivalentes.

**Definición 6.1.** *Dos grupos planos  $G, G'$  con retículos  $T, T'$  respectivamente, son equivalentes si hay un isomorfismo  $f : G \rightarrow G'$  tal que  $f(T) = T'$ .*

De esta definición podemos deducir que dos grupos planos  $G$  y  $G'$  son equivalentes sí y sólo si los invariantes de  $G$  y  $G'$  están relacionados.

- Restringiendo  $f$  al subgrupo  $T$  de  $G$  obtenemos un isomorfismo,  $f|_T : T \rightarrow T'$ . Como  $T$  y  $T'$  son retículos del plano, podemos identificar  $f|_T$  con la aplicación lineal invertible de  $\mathbb{R}^2$  que llamaremos  $\lambda$ .
- Veamos la relación existente entre los grupos puntuales de  $G$  y  $G'$ ;  $H$  y  $H'$  respectivamente.

Sea  $(v, \varphi) \in G$  tal que su imagen a través de  $f$  es  $f(v, \varphi) = (v', \varphi') \in G'$ . En la sección 5.3 vimos que

$$(\varphi(t), id) = (v, \varphi)(t, id)(v, \varphi)^{-1}, \forall t \in T.$$

Si aplicamos  $f$  a este elemento de  $T$  obtenemos el elemento de  $T'$

$$(\lambda(\varphi(t)), id) = (v', \varphi')(\lambda(t), id)(v', \varphi')^{-1}, \forall t \in T.$$

Por otro lado, también por 5.3 tenemos que

$$(v', \varphi')(\lambda(t), id)(v', \varphi')^{-1} = (\varphi'(\lambda(t)), id), \forall t \in T.$$

Por tanto,  $(\lambda(\varphi(t)), id) = (\varphi'(\lambda(t)), id), \forall t \in T$ , de lo que se deduce que  $\lambda\varphi = \varphi'\lambda$ , y  $\varphi' = \lambda\varphi\lambda^{-1}$ . De esta manera,  $f(v, \varphi) = (v', \varphi') = (v', \lambda\varphi\lambda^{-1})$ , es decir,  $H' = \lambda H \lambda^{-1}$ . De igual forma podemos establecer la relación entre los subgrupos de todas las rotaciones de  $H$  y  $H'$  de manera que  $H'_0 = \lambda H_0 \lambda^{-1}$ , pues si  $\varphi$  es una rotación,  $\lambda\varphi\lambda^{-1} = \varphi'$  también lo es.

- Veamos las relaciones entre la acción de  $H$  en  $T$  y la de  $H'$  en  $T'$ .

Sea  $\varphi' \in H'$ . Como acabamos de ver,  $\varphi' = \lambda\varphi\lambda^{-1}$ . Veamos cómo actúa  $\varphi'$  en el retículo  $T' = \lambda(T)$ . Sea  $t \in T$  cualquiera y  $t' \in T'$  tal que  $t' = \lambda(t)$ ,

$$\varphi'(t') = \varphi'(\lambda(t)) = \lambda\varphi\lambda^{-1}(\lambda(t)) = \lambda(\varphi(t)).$$

Luego la acción de  $\varphi'$  en  $T'$  está definida por composición de  $\lambda$  con la acción de  $\varphi$  en  $T$ ,  $\varphi'(T') = \lambda(\varphi(T))$ .

- Supongamos que  $\varphi$  es de orden  $q$ . Vamos a coger un elemento  $(v, \varphi) \in G$ , que mediante el isomorfismo  $f$  es enviado a  $(v', \varphi') \in G'$ . De esta manera,  $(a, id) = (v, \varphi)^q$  implica que  $(\lambda(a), id) = (v', \varphi')^q$ . Si  $a \in T$  es un vector de deslizamiento de  $\varphi$  entonces  $\lambda(a)$  es un vector de deslizamiento de  $\varphi'$ .





## 7. Teoremas de clasificación

En esta sección vamos a dar una clasificación de grupos planos. Para ello nos fijaremos en los grupos puntuales de manera que dividiremos los grupos planos en bloques dependiendo de si sus grupos puntuales no contienen reflexiones, si sólo contienen una, o si contienen más.

Recordemos la noción de equivalencia de grupos planos dada en la sección 6. Veremos que cualquier grupo plano es equivalente a alguno de los que vamos a ver.

### 7.1. Grupos planos sin reflexiones

**Teorema 7.1.** *Hay 5 clases de equivalencia de grupos planos  $G$  cuyos grupos puntuales no contienen reflexiones.*

**Demostración:**

El grupo puntual está formado únicamente por rotaciones. Por esto  $H$  coincide con  $H_0$  y está generado por una rotación  $R$  de ángulo  $\frac{2\pi}{q}$ , con  $q = 1, 2, 3, 4$  o  $6$ ,  $R = \langle R \rangle$ .

Supongamos que  $G$  y  $G'$  son dos grupos planos distintos, con el mismo grupo puntual  $H$ . Veamos que existe un isomorfismo entre ellos, de manera que  $G$  y  $G'$  son equivalentes.

Definimos la aplicación  $\lambda : T \rightarrow T'$  tal que  $R\lambda = \lambda R$ .

Veamos que se verifica  $R\lambda = \lambda R$  para cada  $q$ .

- Cuando  $q = 1$ ,  $R = id$ . Por tanto si tiene  $R(\lambda(t)) = \lambda(R(t))$  para cualquier  $\lambda$  que definamos.
- Cuando  $q = 2$  se tiene que  $R(\bar{t}) = -\bar{t}$  para todo  $\bar{t} \in T$  ya que  $R(\bar{t}) + \bar{t}$  es un punto fijo de la rotación  $R$ . Luego  $R = -id$ , por lo que se verifica que  $R(\lambda(\bar{t})) = \lambda(R(\bar{t}))$  para cualquier  $\lambda$  que definamos.
- Para ver qué ocurre cuando  $q = 3, 4$  o  $6$ , recordemos que en la proposición 5.4 vimos que  $T = \{n_1 t + n_2 R(t) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$  donde  $t$  es un vector en  $T$  de longitud mínima.

Tenemos que comprobar que para todo  $\tilde{t} \in T$ ,  $\tilde{t} = n_1 t + n_2 R(t)$ , se verifica que  $R(\lambda(\tilde{t})) = \lambda(R(\tilde{t}))$ . Sea  $t'$  tal que  $t'$  y  $R(t')$  generan  $T'$ . Definimos  $\lambda$  como

$$\begin{aligned} \lambda : \quad T &\xrightarrow{\sim} T' \\ t &\mapsto t' \\ R(t) &\mapsto R(t'), \end{aligned}$$

y lo extendemos por linealidad.

Por un lado tenemos,

$$\lambda(R(\tilde{t})) = \lambda(n_1 R(t) + n_2 R^2(t)) = n_1 \lambda(R(t)) + n_2 \lambda(R^2(t)) = n_1 R(t') + n_2 \lambda(R^2(t)).$$

Por otro lado,

$$R(\lambda(\tilde{t})) = n_1 R(\lambda(t)) + n_2 R(\lambda(R(t))) = n_1 R(t') + n_2 R(\lambda(R(t))).$$

Luego  $R(\lambda(\tilde{t})) = \lambda(R(\tilde{t}))$  se verifica para  $q = 3, 4, 6$  si y sólo si  $\lambda(R^2(t)) = R(\lambda(R(t)))$ .

Como sólo sabemos a dónde manda  $\lambda$  los generadores, tenemos que expresar  $R^2(t)$  en función de ellos en cada caso.

- Cuando  $q = 3$ ,  $R^2(t) + R(t) + t$  es un punto fijo de la rotación ya que

$$R(R^2(t) + R(t) + t) = R^2(t) + R(t) + t.$$

Luego  $R^2(t) = -t - R(t)$ .

Así, como  $\lambda(R^2(t)) = \lambda(-t - R(t)) = -\lambda(t) - \lambda(R(t)) = -t' - R(t')$ , y  $R(\lambda(R(t))) = R(R(t')) = R^2(t') = -t' - R(t')$ , se verifica la ecuación.

- Cuando  $q = 4$ ,  $R^2 \neq id$  y  $R^2(R^2(t) + t) = R^2(t) + t$ . Luego  $R^2(t) = -t$ .

Vemos que se cumple la ecuación ya que

$$\lambda(R^2(t)) = \lambda(-t) = -t',$$

$$R(\lambda(R(t))) = R^2(t') = -t'.$$

- Por último, cuando  $q = 6$ , como  $R^4 \neq id$  y  $R^4(R^2(t) - R(t) + t) = R^2(t) - R(t) + t$ , entonces  $R^2(t) = -t + R(t)$ . Por tanto, se verifica la ecuación ya que

$$\lambda(R^2(t)) = \lambda(-t + R(t)) = -t' + R(t'),$$

$$R(\lambda(R(t))) = R^2(t') = -t' + R(t').$$

Luego hemos definido un isomorfismo

$$\begin{aligned} \lambda: \quad T &\rightarrow T' \\ t &\mapsto t' \\ R(t) &\mapsto R(t') \end{aligned}$$

tal que  $R\lambda = \lambda R$ . Esto implica que  $\lambda R^i = R^i \lambda$  para  $i = 0, 1, \dots, q-1$ .

Por otro lado, observamos que  $T$  es un subgrupo normal de  $\mathbb{R}^2$  luego  $vTv^{-1} = T$  para cualquier  $v \in \mathbb{R}^2$  tal que existe un  $\varphi \in H$  de manera que  $(v, \varphi) \in G$ . Así, podemos escribir los grupos  $G$  y  $G'$  como una unión de  $q$  clases.

$$\begin{aligned} G &= T.(0, id) \sqcup T.(v, R) \sqcup \dots \sqcup T.(v, R)^{q-1}, \\ G' &= T'.(0, id) \sqcup T'.(v', R) \sqcup \dots \sqcup T'.(v', R)^{q-1}. \end{aligned}$$

Para cualquier  $(w, R) \in G$ , éste se puede expresar como un elemento de  $T.(v, R)$  pues

$$(w, R) = (w - v, id)(v, R),$$

y vimos que  $w - v \in T$ .

Ésto se puede hacer para cualquier  $(w, R)^{q-1} \in G$  y para cualquier  $(w', R)^{q-1} \in G'$ , luego las expresiones  $G, G'$  como unión disjunta de clases son correctas.

Ahora, vamos a definir la aplicación  $f : G \rightarrow G'$  tal que  $f((t, id)(v, R)^i) = (\lambda(t), id)(v', R)^i$  para  $i = 0, 1, 2, 3, 4, q-1$ .

Observemos que  $(v, R)^i(t, id) = (v + R(v) + \dots + R^{i-1}(v), R^i)(t, id) = (v + R(v) + \dots + R^{i-1}(v) + R^i(t), R^i) = (R^i(t), id)(v + R(v) + \dots + R^{i-1}(v), R^i) = (R^i(t), id)(v, R)^i$ , luego

$$(v, R)^i(t, id) = (R^i(t), id)(v, R)^i.$$

Utilizando esta ecuación y que  $R^i \lambda = \lambda R^i$ , obtenemos

$$(v', R)^i(\lambda(t), id) = (R^i(\lambda(t)), id)(v', R)^i = (\lambda(R^i(t)), id)(v', R)^i.$$

Veamos que  $f$  es un homomorfismo, es decir, que verifica

$$f((t, id)(v, R)^i(\tilde{t}, id)(v, R)^j) = f((t, id)(v, R)^i)f((\tilde{t}, id)(v, R)^j), \quad 0 \leq i, j \leq q-1.$$

Veamos que se verifica,

$$f((t, id)(v, R)^i(\tilde{t}, id)(v, R)^j) = f((t, id)(R^i(\tilde{t}), id)(v, R)^i(v, R)^j) = (\lambda(t + R^i(\tilde{t})), id)(v', R)^{i+j}$$

$$\begin{aligned} f((t, id)(v, R)^i)f((\tilde{t}, id)(v, R)^j) &= (\lambda(t), id)(v', R)^i(\lambda(\tilde{t}), id)(v', R)^j = \\ &= (\lambda(t), id)(\lambda(R^i(\tilde{t})), id)(v', R)^i(v', R)^j = (\lambda(t + R^i(\tilde{t})), id)(v', R)^{i+j} \end{aligned}$$

Por otro lado, definimos  $g : G' \rightarrow G$  tal que  $g((\lambda(t), id)(v', R)^i) = (t, id)(v, R)^i$ . Como  $f \circ g = id_{G'}$  y  $g \circ f = id_G$ , entonces  $f$  es biyectiva y  $g = f^{-1}$  es su inversa.

Finalmente, como  $f$  es un homomorfismo tal que  $f(T) = T'$ , y tiene una inversa  $f^{-1}$ , entonces  $f$  es un isomorfismo y,  $G$  y  $G'$  son equivalentes.

*c.q.d.*

En este bloque obtenemos 5 clases de equivalencia, una para cada valor de  $q$ . Estas clases se denominan  $p1$ ,  $p2$ ,  $p3$ ,  $p4$ ,  $p6$  para  $q = 1, 2, 3, 4, 6$  respectivamente.

Los figuras de los ejemplos de los grupos a continuación y del resto de los 17 han sido realizados por mí con el programa *morenament*, que puede ser descargado en [18].

### 7.1.1. El grupo plano $p1$

El grupo plano  $p1$  es el más sencillo de todos, pues su grupo puntual no contiene reflexiones ni rotaciones, es decir, sólo lo compone la identidad. Sus elementos, todos ellos traslaciones, se corresponden con los elementos del retículo, ya que todos son de la forma  $(mr + ns, id)$  con  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Los vectores  $r$  y  $s$  que forman la base del retículo pueden formar cualquier ángulo entre ellos mientras que sean linealmente independientes y de longitud mínima.

En este caso el retículo puede ser de cualquier tipo, porque el grupo es precisamente el retículo, y no tiene ninguna restricción.



Figura 11:  $p1$



Figura 12:  $p1$

Observamos que las figuras 11 y 12 tienen grupo de simetrías  $p1$ .

### 7.1.2. El grupo plano $p2$

El grupo puntual de este grupo coincide con el subgrupo  $H_0$ , ya que no contiene reflexiones. Está generado por una rotación de orden 2, es decir, rotaciones de ángulo  $\pi$ .

Observemos que, en este grupo, tenemos rotaciones de orden 2 sobre los puntos de la forma  $\frac{1}{2}m|r| + \frac{1}{2}n|s|$ , donde  $m, n \in \mathbb{Z}$  y  $r, s$  son los vectores que forman la base del retículo.

Al igual que ocurre con  $p1$ , el grupos coincide con el retículo, luego el retículo puede ser de cualquier tipo.



Figura 13:  $p2$



Figura 14:  $p_2$

Las figuras 13 y 14 tienen grupo de simetrías  $p_2$ .

### 7.1.3. El grupo plano $p_3$

Su grupo puntual no contiene reflexiones, por tanto coincide con el subgrupo de todas las rotaciones de  $H$ . Está generado por una rotación de orden 3, es decir, de ángulo  $\frac{2\pi}{3}$ . El retículo de este grupo es hexagonal.



Figura 15:  $p_3$



Figura 16:  $p3$

Las figuras 15 y 16 tienen grupo de simetrías  $p3$ .

#### 7.1.4. El grupo plano $p4$

Su grupo puntual no contiene reflexiones, y está generado por una rotación de orden 4, es decir, de ángulo  $\frac{\pi}{2}$ . Contiene rotaciones de orden 2 y 4. El retículo de este grupo es cuadrado.

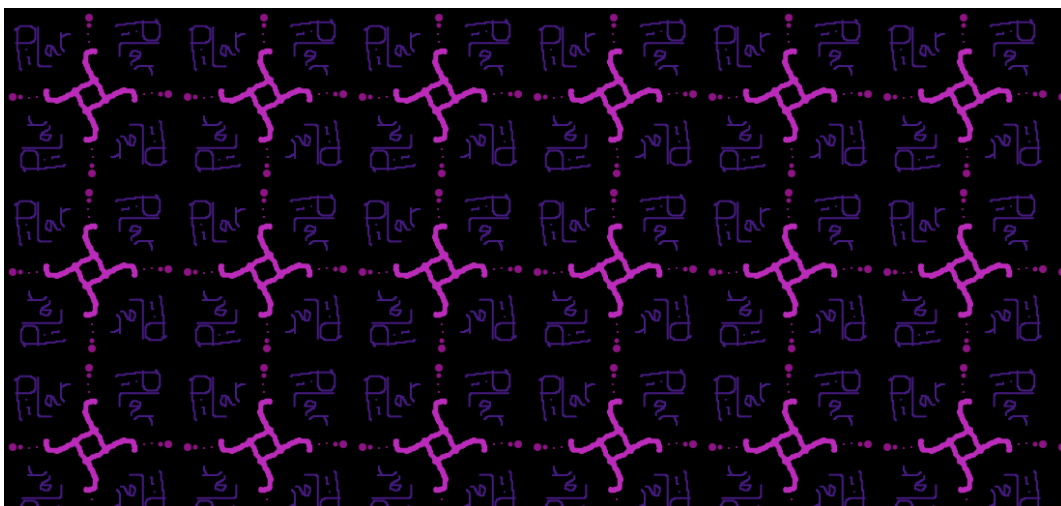


Figura 17:  $p4$

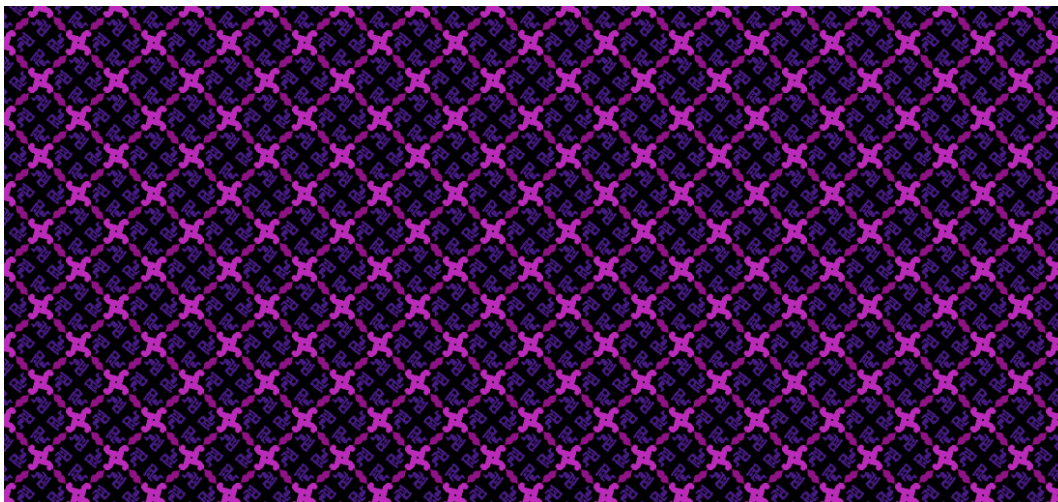


Figura 18:  $p4$

Las figuras 17 y 18 tienen grupo de simetrías  $p4$ .

#### 7.1.5. El grupo plano $p6$

El grupo puntual de  $p6$  no contiene reflexiones, luego está generado por una rotación de orden 6, es decir, de ángulo  $\frac{\pi}{3}$ . Contiene rotaciones de orden 2, 3 y 6.

El retículo de este grupo es hexagonal.

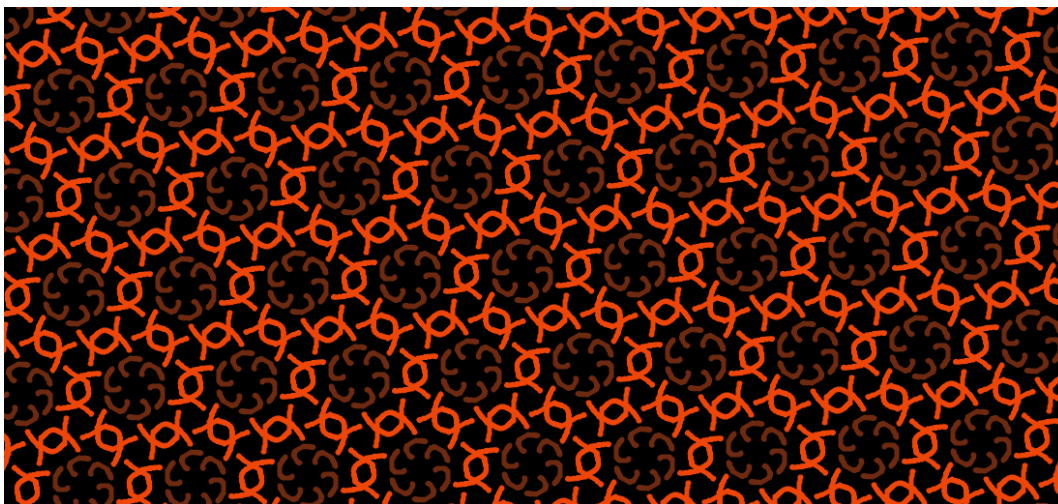


Figura 19:  $p6$

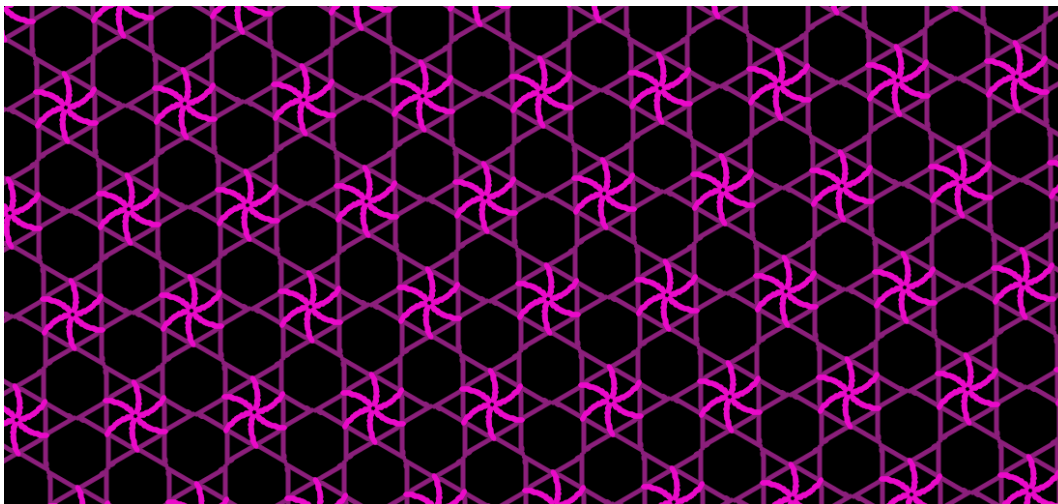


Figura 20:  $p6$

Las figuras 19 y 20 tienen grupo de simetrías  $p6$ .

## 7.2. Grupos planos con una reflexión

**Teorema 7.2.** *Hay 3 clases de equivalencia de grupos planos  $G$  cuyos grupos puntuales contienen una sola reflexión.*

### Demostración:

El grupo puntual contiene una única reflexión,  $\rho$ , en una recta  $l$ .

Supongamos que contiene una rotación  $R$ . Entonces la reflexión  $\rho R \in H$ . Pero al haber sólo una reflexión,  $\rho R$  tiene que coincidir con  $\rho$ , luego  $R$  es la identidad. Por tanto, en  $H$  no hay rotaciones y  $H = \langle \rho \rangle$  tiene orden 2.

En 5.4 vimos que los vectores de deslizamiento de la reflexión son vectores del retículo que se encuentran en la recta  $l$ , aunque no todos los vectores del retículo que se encuentran en  $l$  tienen por qué ser vectores de deslizamiento. Sea  $r \in T$  un vector de deslizamiento de  $\rho$  en  $l$ , que es de longitud mínima.

Observamos que existen vectores perpendiculares a  $l$ , pues, para un  $t \in T$  que no esté en  $l$ , si tomamos  $t - \rho(t)$  se tiene  $\rho(t - \rho(t)) = \rho(t) - \rho^2(t) = -(t - \rho(t))$ .

Tomamos  $s$  perpendicular a  $l$  de longitud mínima.

**Situación 1** Hay un vector  $t \in T$  tal que  $t + \rho(t) = r$ . Expresemos  $t$  en función de  $r$  y  $s$ . Sea  $t = mr + ns$  con  $m, n \in \mathbb{R}$ .

Como  $t + \rho(t) = r$ , entonces  $t + \rho(t) = mr + ns + m\rho(r) + n\rho(s) = mr + ns + mr - ns = 2mr = r$ . Luego  $m = \frac{1}{2}$ .

Observamos que el vector  $t - \rho(t)$  es perpendicular a  $r$  y, por tanto, a  $l$ , entonces es de la forma  $t - \rho(t) = ks$ , donde  $k \in \mathbb{Z}$ . Por tanto,  $t = \frac{1}{2}r + \frac{k}{2}s$ . Si  $k$  es par, entonces  $\frac{1}{2}r \in T$  y existiría un vector en  $l$  de longitud menor que la de  $r$ , luego  $\frac{k}{2}$  no pertenece a  $\mathbb{Z}$ . Entonces  $k$  es impar y  $\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}s + qs \in T$  con  $q \in \mathbb{Z}$ . Luego  $\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}s \in T$ . Consideremos que  $t$  es ese vector.

El par  $r, t$  puede ser elegido como la base del retículo.

En esta situación tenemos simetrías del espacio afín en rectas paralelas a la recta  $l$ .

**Situación 2(m)** En esta situación  $r, s$  son la base del retículo  $T$  ya que son linealmente independientes y de longitud mínima (recordemos que en 5.4 vimos que sólo hay vectores del retículo en  $Z_1^0$ ).

Como vimos en 5.4 existe un vector  $v \in \mathbb{R}^2$  tal que  $(v, \rho) \in G$  y  $a = v + \rho(v) = 0$  es un vector de deslizamiento de  $\rho$ .



Observamos que, en esta situación, tenemos simetrías del espacio afín en rectas paralelas a la recta  $l$ .

**Situación 2(g)** En este caso, al igual que en la situación 2m, la base del retículo son los vectores  $r, s$ .

En 5.4 vimos que en esta situación existe un  $v \in \mathbb{R}^2$  tal que  $(v, \rho) \in G$  y  $a = v + \rho(v) = r$  es vector de deslizamiento de  $\rho$ .

En esta situación no tenemos simetrías del espacio afín, lo que encontramos son simetrías con deslizamiento en rectas paralelas a la recta  $l$ .

Suponemos que  $G$  y  $G'$  están en la misma situación (1, 2(m) o 2(g)). Sean  $T$  y  $T'$  los retículos respectivos de  $G$  y  $G'$ .  $H$  y  $H'$  son sus grupos puntuales generados por las reflexiones  $\rho$  y  $\rho'$  en las rectas  $l$  y  $l'$  respectivamente. Sean los vectores  $r, s, a \in T$  y  $r', s', a' \in T'$ .

Buscamos un isomorfismo entre  $G$  y  $G'$ .

Sea la aplicación

$$\begin{aligned} \lambda: T &\rightarrow T' \\ r &\mapsto r' \\ s &\mapsto s' \end{aligned}$$

extendida a todo  $T$  por linealidad.

Observamos que se tiene  $\rho'\lambda = \lambda\rho$ , ya que se verifica para  $r$  y  $s$ .

Además,  $\lambda$  manda los vectores de deslizamiento de  $\rho$  a los vectores de deslizamiento de  $\rho'$ ,  $\lambda(a) = a'$ .

Vemos que esto se verifica en la situación 2(m), cuando  $a = 0$  y  $a' = 0$ , pues  $\lambda(0) = 0$ ; y en la situación 2(g), cuando  $a = r$  y  $a' = r'$ , pues  $\lambda(r) = r'$ .

Al igual que en el teorema anterior, expresamos  $G$  y  $G'$  como unión de clases disjuntas,

$$G = T.(0, id) \sqcup T.(v, \rho),$$

$$G' = T'.(0, id) \sqcup T'.(v', \rho').$$

Definimos

$$f: \begin{aligned} G &\rightarrow G' \\ (t, id)(v, \rho)^i &\mapsto (\lambda(t), id)(v', \rho')^i, \quad i = 0, 1. \end{aligned}$$

Utilizando las ecuaciones

$$(v, \rho)(t, id) = (\rho(t), id)(v, \rho),$$

$$(v, \rho)^2 = (a, id),$$

$$(v', \rho')(\lambda(t), id) = (\lambda(\rho(t)), id)(v', \rho'),$$

$$(v', \rho')^2 = (a', id),$$

se demuestra que  $f$  es un homomorfismo biyectivo tal que  $f(T) = (T')$ .

Por tanto,  $G$  y  $G'$  son equivalentes.

*c.q.d.*

De este bloque, hemos obtenido tres clases de equivalencia, una por cada situación descrita en la demostración. Las denominaremos  $cm$ ,  $pm$  y  $pg$  respectivamente.

### 7.2.1. El grupo plano $cm$

El grupo puntual de este grupo plano contiene una reflexión y ninguna rotación.

El retículo de este grupo es rectangular o cuadrado.

En las figuras 21 y 22 podemos ver ejemplos con grupo de simetrías  $cm$ .



Figura 21: *cm*

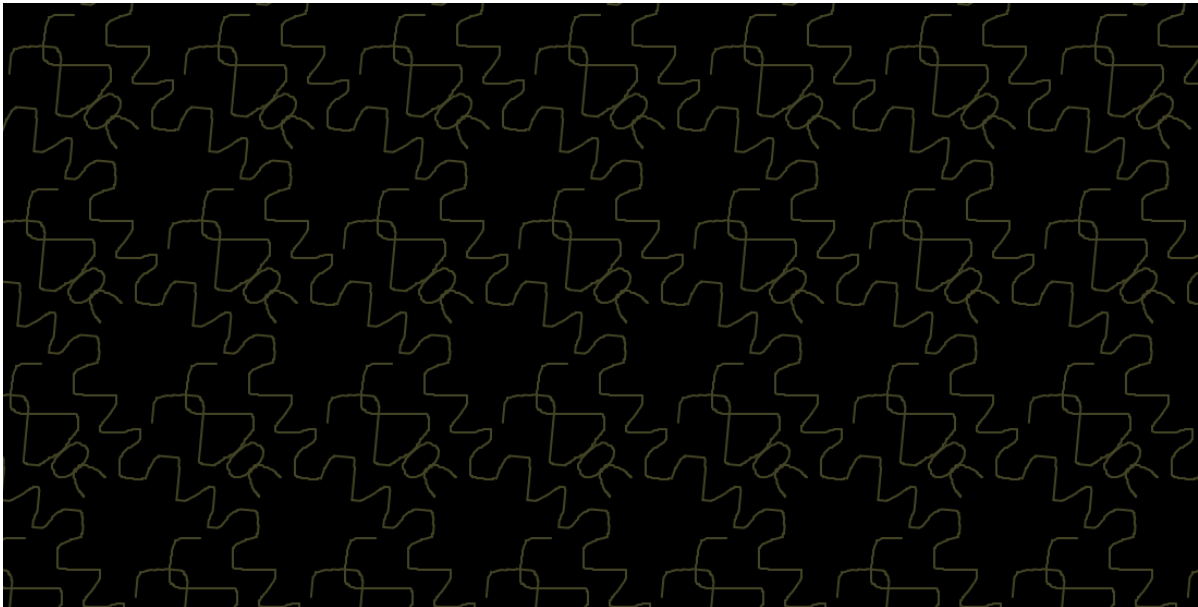


Figura 22: *cm*

### 7.2.2. El grupo plano $pm$

Su grupo puntual está generado por una reflexión, luego no contiene rotaciones. Los vectores que forman la base del retículo son perpendiculares, siendo uno de ellos perteneciente a la recta de reflexión. El retículo de este grupo es rectangular o cuadrado.



Figura 23:  $pm$

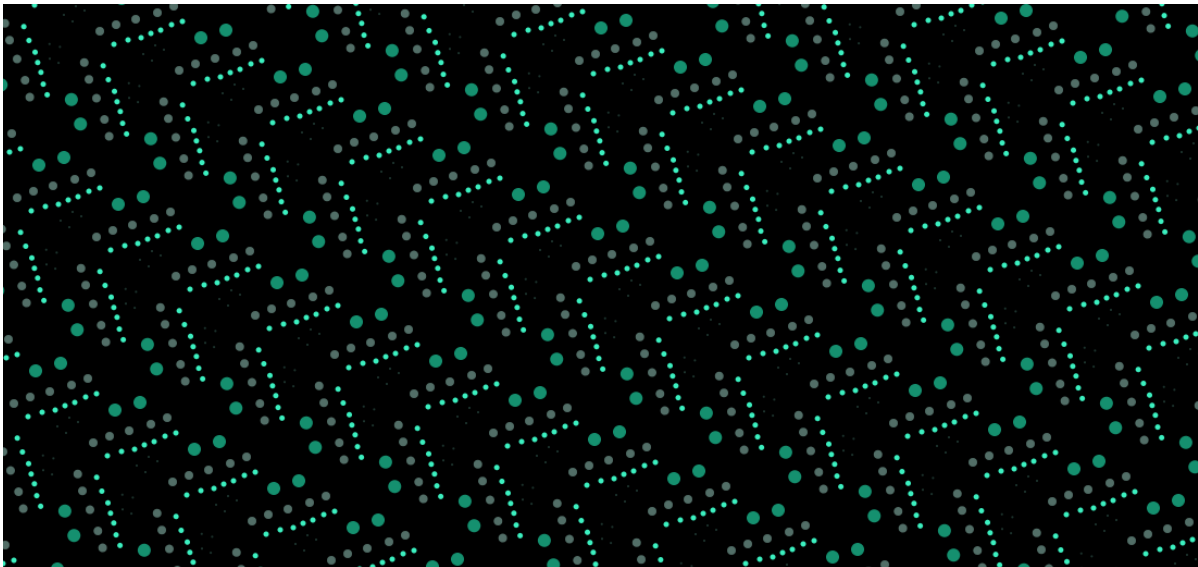


Figura 24:  $pm$

Las figuras 23 y 24 tienen grupo de simetrías  $pm$ .

### 7.2.3. El grupo plano $pg$

Su grupo puntual está generado por una reflexión. Al igual que en el grupo anterior, los vectores que forman la base del retículo son perpendiculares, siendo uno de ellos perteneciente a la recta de reflexión. El retículo de este grupo es rectangular o cuadrado.

Los vectores de deslizamiento de la reflexión  $\rho$  son de la forma  $a = v + \rho v = r$ , siendo  $(v, \rho) \in G$ .



Figura 25:  $pg$

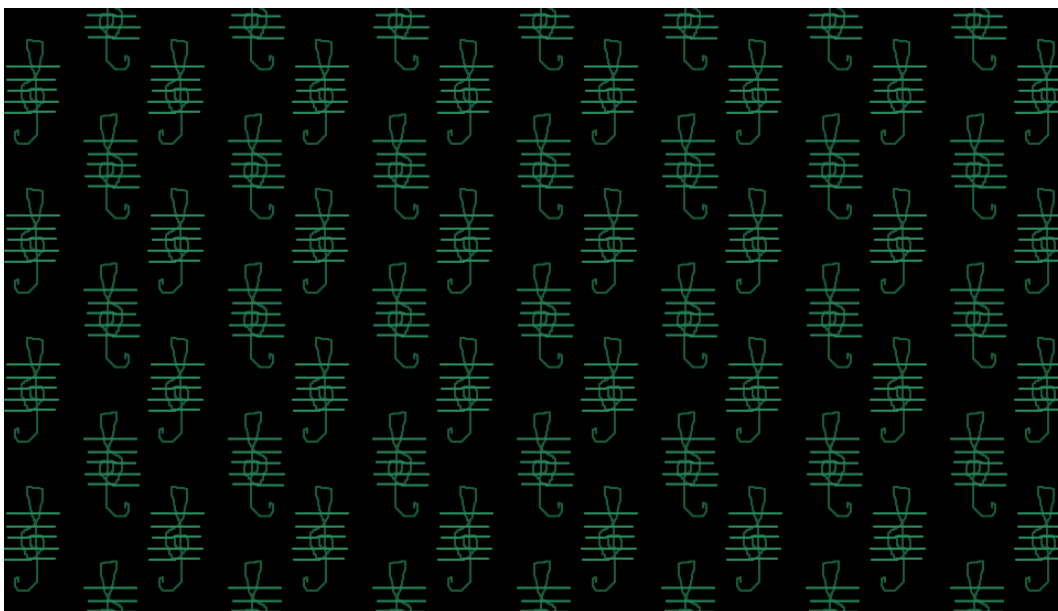


Figura 26:  $pg$

Las figuras 25 y 26 tienen grupo de simetrías  $pg$ .

### 7.3. Grupos planos con más de una reflexión

**Teorema 7.3.** *Hay 9 clases de equivalencia de grupo plano  $G$  cuyo grupo puntual contiene más de una reflexión.*

**Demostración:**

$H$  contiene más de una reflexión, por tanto, contiene rotaciones. Supongamos que  $\rho$  y  $\sigma$  son dos reflexiones en  $H$  en las rectas  $l$  y  $m$  respectivamente tales que  $\rho\sigma$  es la rotación que genera  $H_0$ . Sea  $R = \rho\sigma$  esa rotación de ángulo  $\frac{2\pi}{q}$ . Así, las rectas  $l$  y  $m$  forman un ángulo de  $\frac{\pi}{q}$ , y cada reflexión nos determinará unos vectores de deslizamiento.

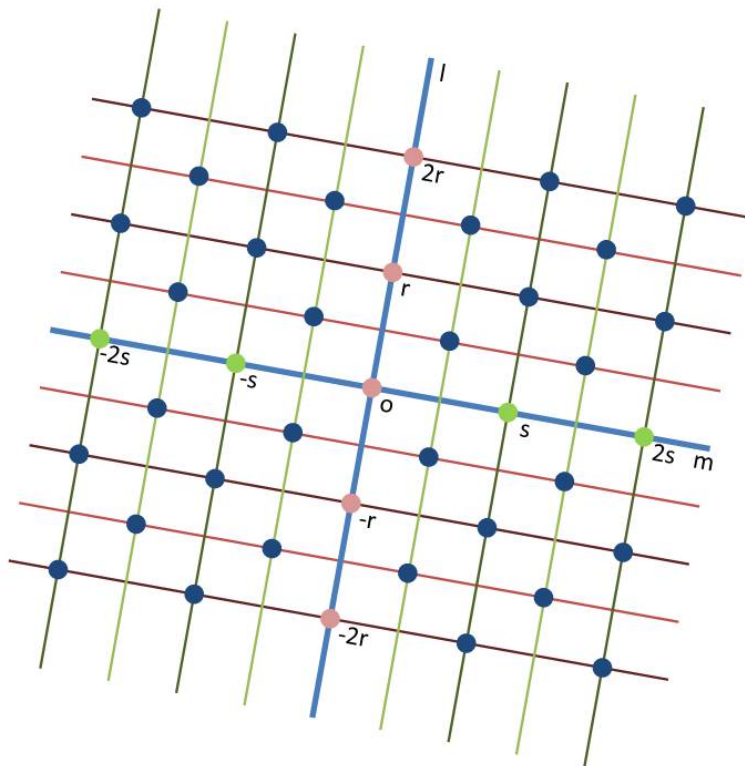
La prueba consiste en ir combinando las posibles situaciones vistas en 5.4 para cada reflexión  $\rho$  y  $\sigma$  dependiendo de  $q$ .

Sean  $r, s \in T$  vectores no nulos, de longitud mínima, en las rectas  $l$  y  $m$  respectivamente.

Llamemos  $Z_1^\rho$  a los vectores  $v$  que se encuentran en las rectas perpendiculares a  $l$  que pasan por  $\{nr \mid n \in \mathbb{Z}\}$ , y  $Z_{\frac{1}{2}}^\rho$  a los vectores  $v$  que se encuentran en las rectas perpendiculares a  $l$  que pasan por  $\{\frac{2n+1}{2}r \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Igualmente llamemos  $Z_1^\sigma$  a los vectores  $v'$  que se encuentran en las rectas perpendiculares a  $m$  que pasan por  $\{n's \mid n' \in \mathbb{Z}\}$ , y  $Z_{\frac{1}{2}}^\sigma$  a los vectores  $v'$  que se encuentran en las rectas perpendiculares a  $m$  que pasan por  $\{\frac{2n'+1}{2}s \mid n' \in \mathbb{Z}\}$ .

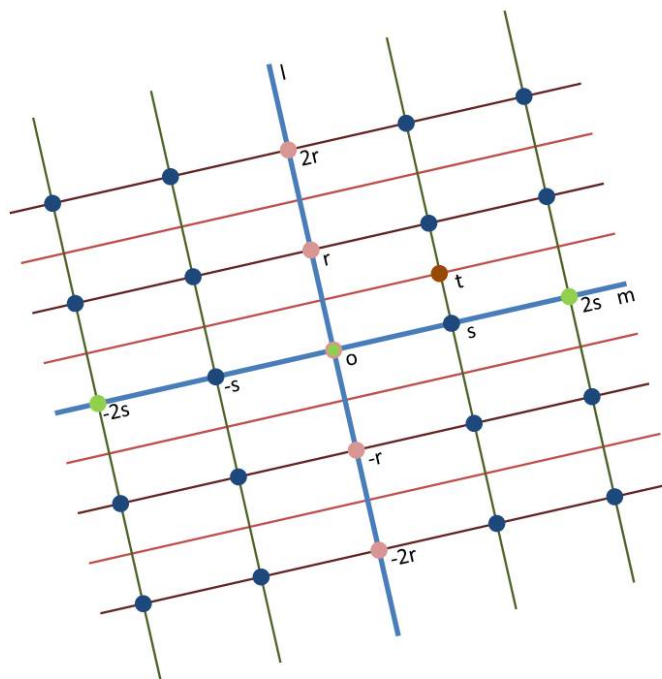
- Sea  $q = 2$ , luego el ángulo entre  $l$  y  $m$  es  $\frac{\pi}{2}$ .
- Si ambas reflexiones se encuentran en la situación 1, existen  $v$  asociados a  $\rho$  en  $Z_1^\rho$  y en  $Z_{\frac{1}{2}}^\rho$ , y existen  $v'$  asociados a  $\sigma$  en  $Z_1^\sigma$  y en  $Z_{\frac{1}{2}}^\sigma$ . Luego todos los vectores del retículo en  $l$  y  $m$  son vectores de deslizamiento de  $\rho$  y  $\sigma$  respectivamente.

Como calculamos en la demostración del teorema previo, existe  $t = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}s \in T$ , y, dado que la diferencia de dos vectores  $v$  asociados a una reflexión son vectores del retículo, podemos formar el retículo como en la figura siguiente.

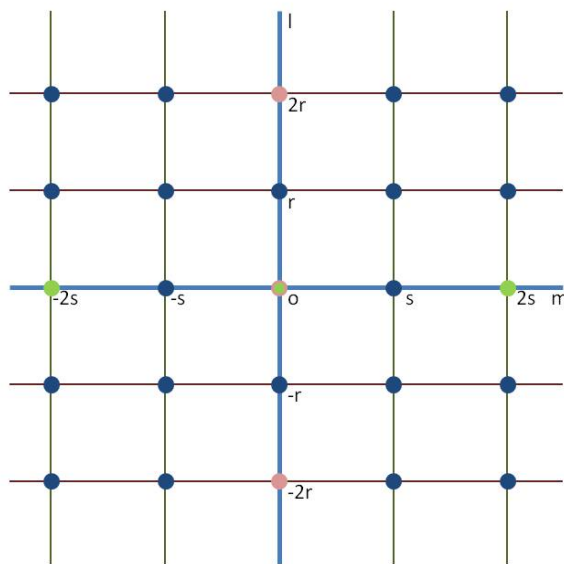


El grupo obtenido en este caso se denomina cmm.

- Si  $\rho$  pertenece a la situación 1 y  $\sigma$  a la 2 (independientemente de que sea la 2m o la 2g) no podemos formar un retículo ya que tendríamos un vector  $t - s \in T$  en  $l$  de longitud menor que la de  $r$ .



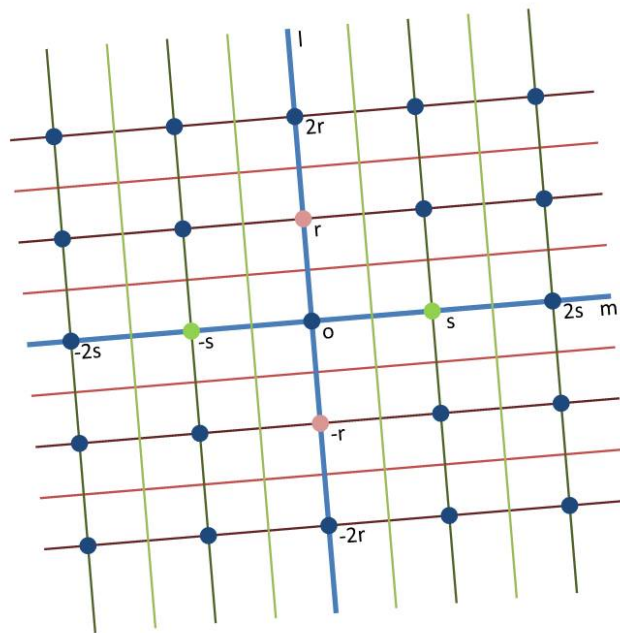
- Si tanto  $\rho$  como  $\sigma$  están en la situación  $2m$ , entonces existen  $v$  asociados a  $\rho$  en  $Z_1^\rho$ , y existen  $v'$  asociados a  $\sigma$  en  $Z_1^\sigma$ . Todos los vectores de la forma  $\{2nr, n \in \mathbb{Z}\}$  y  $\{2n's, n' \in \mathbb{Z}\}$  son vectores de deslizamiento de  $\rho$  y  $\sigma$  respectivamente.



En este caso la base de  $T$  está formada por los vectores  $r, s$ .

El grupo obtenido en este caso se denomina pmm.

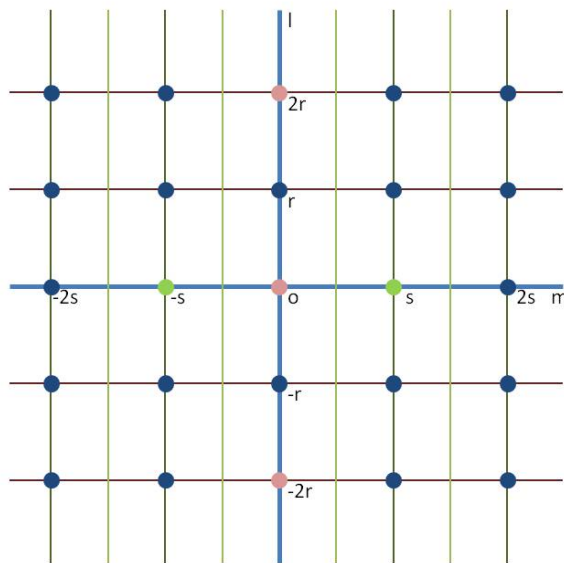
- Si tanto  $\rho$  como  $\sigma$  están en la situación  $2g$ , entonces existen  $v$  asociados a  $\rho$  en  $Z_{\frac{1}{2}}^\rho$ , y existen  $v'$  asociados a  $\sigma$  en  $Z_{\frac{1}{2}}^\sigma$ . Todos los vectores de la forma  $\{(2n + 1)r, n \in \mathbb{Z}\}$  y  $\{(2n' + 1)s, n' \in \mathbb{Z}\}$  son vectores de deslizamiento de  $\rho$  y  $\sigma$  respectivamente.



En este caso la base de  $T$  está formada por los vectores  $r, s$ .

El grupo obtenido en este caso se denomina pgg.

- Cuando  $\rho$  está en la situación  $2m$  y  $\sigma$  en la  $2g$ , existen  $v$  asociados a  $\rho$  en  $Z_1^\rho$ , y existen  $v'$  asociados a  $\sigma$  en  $Z_{\frac{1}{2}}^\sigma$ . Todos los vectores de la forma  $\{2nr, n \in \mathbb{Z}\}$  y  $\{(2n' + 1)s, n' \in \mathbb{Z}\}$  son vectores de deslizamiento de  $\rho$  y  $\sigma$  respectivamente.



En este caso la base de  $T$  está formada por los vectores  $r, s$ .

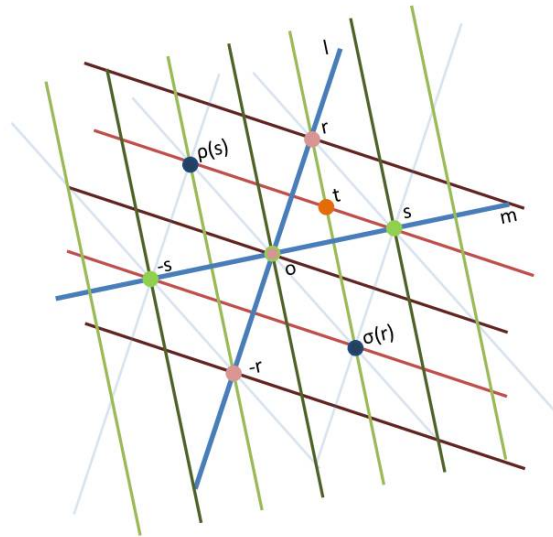
El grupo obtenido en este caso se denomina pmg.

- Sea  $q = 3$ . Las rectas  $l$  y  $m$  forman un ángulo  $\frac{\pi}{3}$ .

Como el vector  $s \in T$  está en  $m$  y es de longitud mínima, todos los vectores del retículo en esa recta son

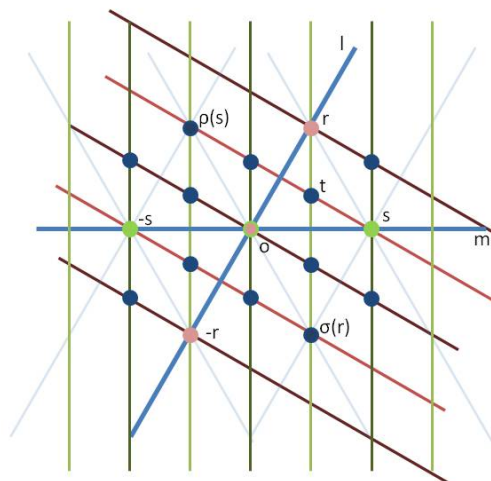
múltiplos de  $s$ . El vector  $r + \sigma(r) \in T$  está en  $m$ . Por otro lado, puesto que el ángulo que forman las rectas es de  $60^\circ$ , la longitud de  $r + \sigma(r)$  y la de  $r$  coinciden, luego  $|r| \geq |s|$ . De la misma manera,  $s + \rho(s) \in T$  está en  $l$  y su longitud coincide con la de  $s$ . Como en  $l$  todos los vectores del retículo son múltiplos de  $r$ , entonces  $|s| \geq |r|$ . Por tanto,  $|r| = |s|$ , y  $s = r + \sigma(r)$ .

- Si ambas reflexiones se encuentran en la situación 1, existen  $v$  asociados a  $\rho$  en  $Z_1^0$  y en  $Z_{\frac{1}{2}}^0$ , y existen  $v'$  asociados a  $\sigma$  en  $Z_1^\sigma$  y en  $Z_{\frac{1}{2}}^\sigma$ . Luego todos los vectores del retículo en  $l$  y  $m$  son vectores de deslizamiento de  $\rho$  y  $\sigma$  respectivamente.



Observamos que el vector  $t = \frac{1}{3}r + \frac{1}{3}s$  puede estar o no en el retículo.

Si existen dos vectores asociados a alguna de las dos reflexiones cuya diferencia sea  $t$ , entonces  $t$  sería un vector del retículo, dando lugar al retículo de la figura siguiente.



En este caso, la base del retículo está formada por los vectores  $r$  y  $t$ . El grupo se denomina  $p3m1$ .



Si no existen dos vectores asociados a alguna de las dos reflexiones cuya diferencia sea  $t$ , el grupo se denomina  $p31m$ . La base del retículo está formada por los vectores  $r$  y  $s$ .

- Cuando  $\rho$  está en la situación 1 y  $\sigma$  en la 2m, existen  $v$  asociados a  $\rho$  en  $Z_1^\rho$  y en  $Z_{\frac{1}{2}}^\rho$ , y existen  $v'$  asociados a  $\sigma$  en  $Z_1^\sigma$ . Todos los vectores de la forma  $\{nr, n \in \mathbb{Z}\}$  y  $\{2n's, n' \in \mathbb{Z}\}$  son vectores de deslizamiento de  $\rho$  y  $\sigma$  respectivamente.

Vemos que esta situación no es posible ya que hay vectores del retículo que no deberían formar parte de él. Por ejemplo,  $r$  es un vector del retículo, luego dado  $v$  asociado a  $\sigma$ ,  $v + kr$  también estará asociado a  $\sigma$  para cualquier  $k \in \mathbb{Z}$ . Pero alguno de ellos estaría en la recta perpendicular a  $m$  que pasa por  $\frac{1}{2}s$ . Sin embargo, como  $\sigma$  está en la situación 2m, esto no puede ocurrir.

Cuando  $\sigma$  está en la situación 2g, un razonamiento análogo nos lleva a descartar también este caso.

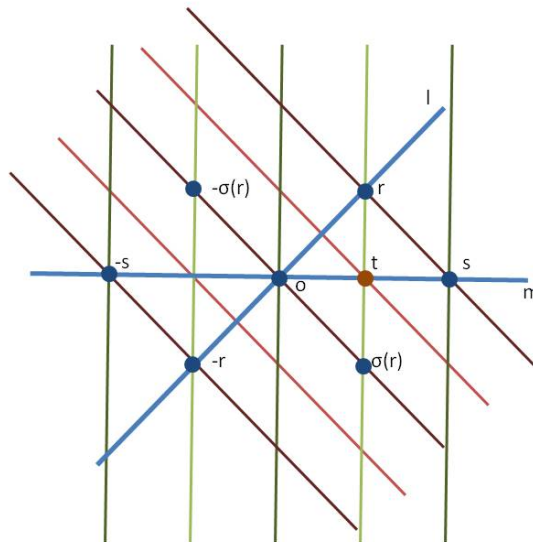
- Si, tanto  $\rho$  como  $\sigma$  están en la situación 2m, entonces existen  $v$  asociados a  $\rho$  en  $Z_1^\rho$ , y existen  $v'$  asociados a  $\sigma$  en  $Z_1^\sigma$ . Todos los vectores de la forma  $\{2nr, n \in \mathbb{Z}\}$  y  $\{2n's, n' \in \mathbb{Z}\}$  son vectores de deslizamiento de  $\rho$  y  $\sigma$  respectivamente. El mismo razonamiento anterior nos sirve para descartar este caso pues, si fuese posible, el vector  $r$ , entre otros, no pertenecería al retículo.

Descartamos también el caso en el que  $\rho$  y  $\sigma$  están en la situación 2g, pues entonces  $s$  no estaría en el retículo. Lo mismo ocurre cuando una es de la situación 2m y la otra de la 2g.

- Sea  $q = 4$ . Las rectas  $l$  y  $m$  forman un ángulo de  $\frac{\pi}{4}$ .

Podemos suponer que  $|r| \leq |s|$ . Si no, tomamos las rectas  $R(m)$  y  $l$  en vez de  $l$  y  $m$ . Sabemos que  $r + \sigma(r) \in T$  está en  $m$ , por tanto,  $r + \sigma(r) = ks$  con  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ . Además,  $|r + \sigma(r)| = \sqrt{2}|r| \leq \sqrt{2}|s| < 2|s|$ . Luego  $k = 1$  y  $s = r + \sigma(r)$ .

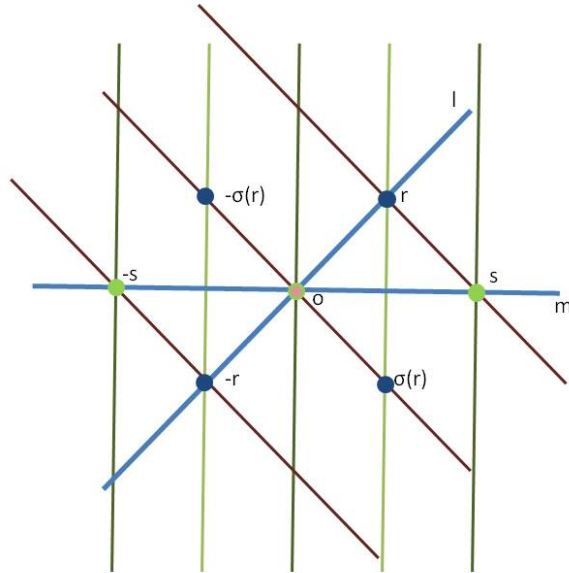
- Si ambas reflexiones están en la situación 1, entonces debería existir un vector del retículo  $t$  como en la figura siguiente.



Sim embargo, como se puede apreciar en la figura,  $t$  sería de longitud menor que la de  $s$ , que era de longitud mínima. Por tanto, este caso no es posible.

- Fijemonos en que  $\sigma$  sólo puede pertenecer a la situación 1 pues, si perteneciera a cualquiera de la 2, entonces algunos vectores que sí se encuentran en el retículo que no deberían pertenecer a él. De esta manera, existen  $v'$  asociados a  $\sigma$  en  $Z_1^\sigma$  y en  $Z_{\frac{1}{2}}^\sigma$  y todos los vectores de la forma  $\{n's, n' \in \mathbb{Z}\}$  son vectores de deslizamiento de  $\sigma$ .

Supongamos que  $\rho$  está en la situación 2m. Por tanto, existen  $v$  asociados a  $\rho$  en  $Z_1^\rho$  y  $\{2nr, n \in \mathbb{Z}\}$  son los vectores de deslizamiento de  $\rho$ .



La base del retículo en este caso serían los vectores  $r$  y  $s$ . Este grupo se denomina  $p4mm$ .

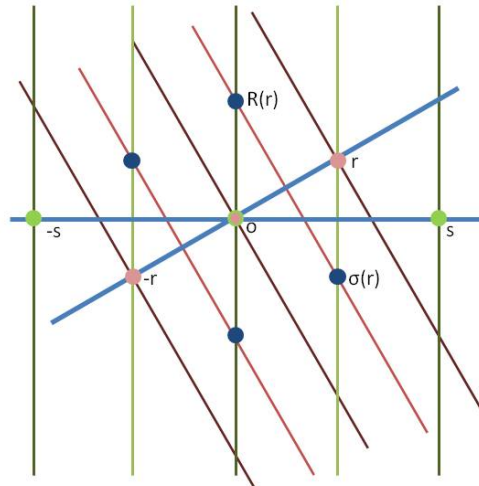
Cuando  $\rho$  está en la situación 2g existen  $v$  asociados a  $\rho$  en  $Z_{\frac{1}{2}}^\rho$  y  $\{(2n+1)r, n \in \mathbb{Z}\}$  son todos los vectores de deslizamiento de  $\rho$ . En este caso la base de  $T$  son los vectores  $r$  y  $s$  y el grupo se denomina  $p4mg$ .

- Sea  $q = 6$ , luego las rectas  $l$  y  $m$  forman un ángulo de  $\frac{\pi}{6}$ .

Podemos suponer que  $|r| \leq |s|$  pues, en caso contrario, tomamos las rectas  $R(m)$  y  $l$  en vez de  $l$  y  $m$ .

Como los vectores del retículo están en  $Z^\rho$  y  $r + \sigma(r) \in T$ , entonces, o bien  $r + \sigma(r) = s$ , o bien  $r + \sigma(r) = 3s$ . Pero  $|r + \sigma(r)| = \frac{\sqrt{5}}{2}|r| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}|s| < 3|s|$ . Por tanto,  $s = r + \sigma(r)$ .

Descartando casos de manera análoga a como hemos hecho hasta ahora, vemos que la única posibilidad es que ambas reflexiones estén en la situación 1. Entonces existen  $v$  asociados a  $\rho$  en  $Z_1^\rho$  y en  $Z_{\frac{1}{2}}^\rho$ , y existen  $v'$  asociados a  $\sigma$  en  $Z_1^\sigma$  y en  $Z_{\frac{1}{2}}^\sigma$  y todos los vectores del retículo en  $l$  y  $m$  son vectores de deslizamiento de  $\rho$  y  $\sigma$  respectivamente.



La base de  $T$  son los vectores  $r$  y  $s$ . Este grupo se denomina  $p6mm$ .

Por tanto, en este bloque obtenemos 9 grupos planos. Veamos que si existe otro con más de una reflexión en su grupo puntual es equivalente a alguno de los nueve.

Sean  $G$  y  $G'$  dos grupos planos distintos con retículos  $T$  y  $T'$  respectivamente. Sean  $r, s \in T$  y  $r', s' \in T'$  como en alguno de los anteriores casos.

Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \lambda: T &\rightarrow T' \\ r &\mapsto r' \\ s &\mapsto s' \end{aligned}$$

Vemos que cumple que  $\rho'\lambda = \lambda\rho$  y  $\sigma'\lambda = \lambda\sigma$  ya que se cumple para los generadores  $r$  y  $s$ . Además,  $\lambda$  manda cada vector de deslizamiento de cada una de las reflexiones de  $G$ , a un vector de deslizamiento de la respectiva reflexión de  $G'$ .

Ahora, definimos una aplicación  $f$  de  $G$  en  $G'$  de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} f: G &\rightarrow G' \\ (t, id) &\mapsto (\lambda(t), id) \\ (v, \rho) &\mapsto (v', \rho') \\ (w, \sigma) &\mapsto (w', \sigma') \end{aligned}$$

De la misma forma que en los teoremas previos, se demuestra que  $f$  es un isomorfismo tal que  $f(T) = T'$ , luego  $G$  y  $G'$  son equivalentes.

*c.q.d.*

### 7.3.1. El grupo plano $cmm$

Su grupo puntual contiene dos reflexiones y, por tanto, rotaciones. Las rectas de reflexión forman un ángulo de  $\frac{\pi}{2}$ . La rotación generadora de  $H_0$  es la obtenida de componer ambas reflexiones. Los vectores que forman la base del retículo son de la forma  $\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}s \in T$ , siendo  $r$  un vector de longitud mínima del retículo que pertenece a una recta de reflexión y  $s$  otro vector de longitud mínima del retículo de la otra recta. El retículo de este grupo es rectangular. Además, los vectores de deslizamiento mínimos de las reflexiones,  $a, b$ , son ambos nulos.

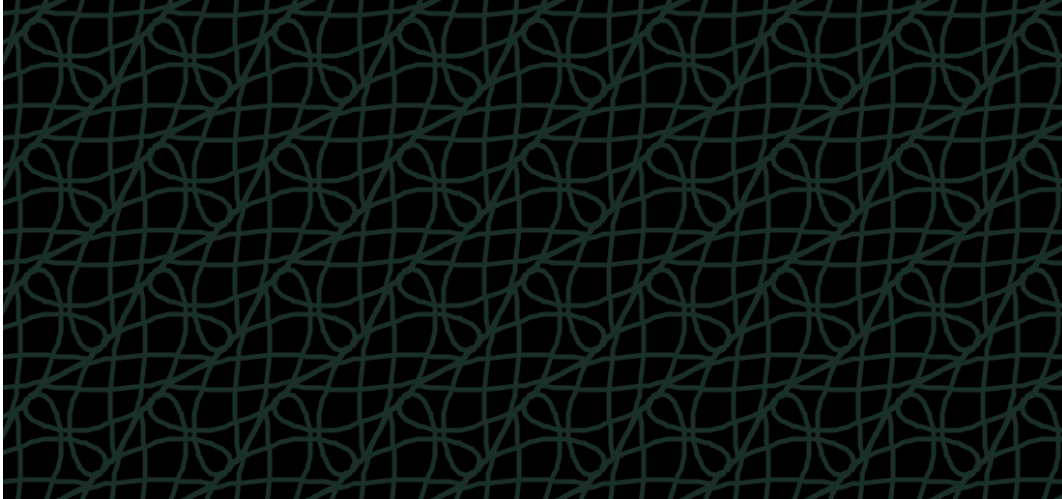


Figura 27:  $cmm$

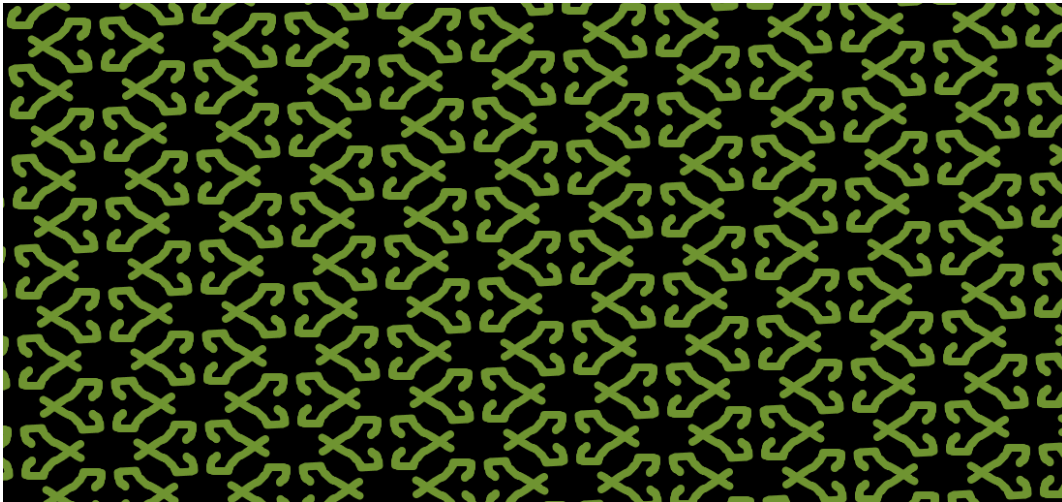


Figura 28:  $cmm$

Las figuras 27 y 28 tienen grupo de simetrías  $cmm$ .

### 7.3.2. El grupo plano $pmm$

Su grupo puntual contiene dos reflexiones y, por tanto, rotaciones. Las rectas de reflexión forman un ángulo de  $\frac{\pi}{2}$ . La rotación generadora de  $H_0$  es la obtenida de componer ambas reflexiones. Los vectores que forman la base del retículo son  $r$  y  $s$ , siendo  $r$  un vector de longitud mínima del retículo que pertenece a una recta de reflexión y  $s$  otro vector de longitud mínima del retículo de la otra recta. El retículo de este grupo es rectangular. Además, los vectores de deslizamiento mínimos de las reflexiones,  $a, b$ , son ambos nulos.

Las figuras 29 y 30 tienen grupo de simetrías  $pmm$ .

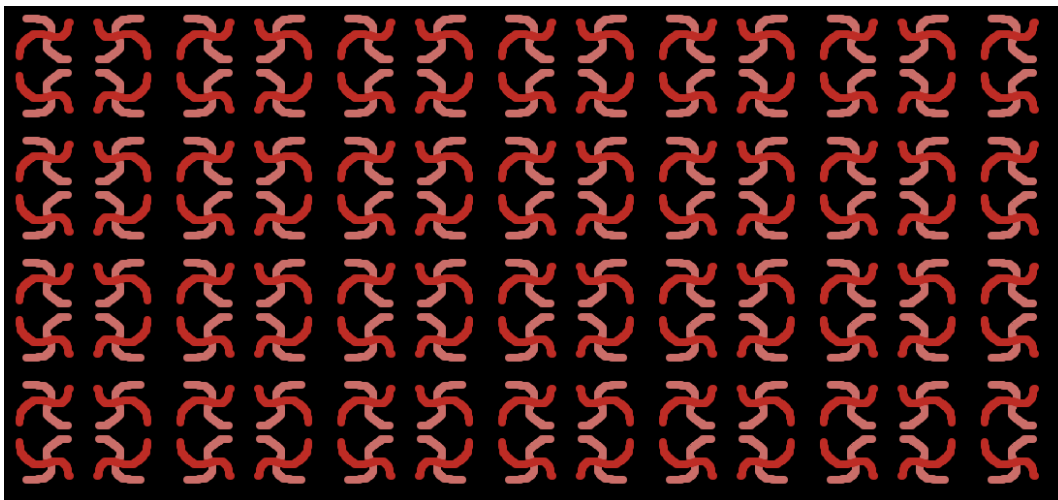


Figura 29:  $pmm$



Figura 30:  $pmm$

### 7.3.3. El grupo plano $pmg$

Su grupo puntual contiene dos reflexiones y, por tanto, rotaciones. Las rectas de reflexión forman un ángulo de  $\frac{\pi}{2}$ . La rotación generadora de  $H_0$  es la obtenida de componer ambas reflexiones. Los vectores que forman la base del retículo son  $r$  y  $s$ , siendo  $r$  un vector de longitud mínima del retículo que pertenece a una recta de reflexión y  $s$  otro vector de longitud mínima del retículo de la otra recta. El retículo de este grupo es rectangular. Además, los vectores de deslizamiento mínimos de las reflexiones,  $a$ ,  $b$ , son o bien,  $a = r$  y  $b = 0$ , o bien  $a = 0$  y  $b = s$ .



Figura 31:  $pmg$

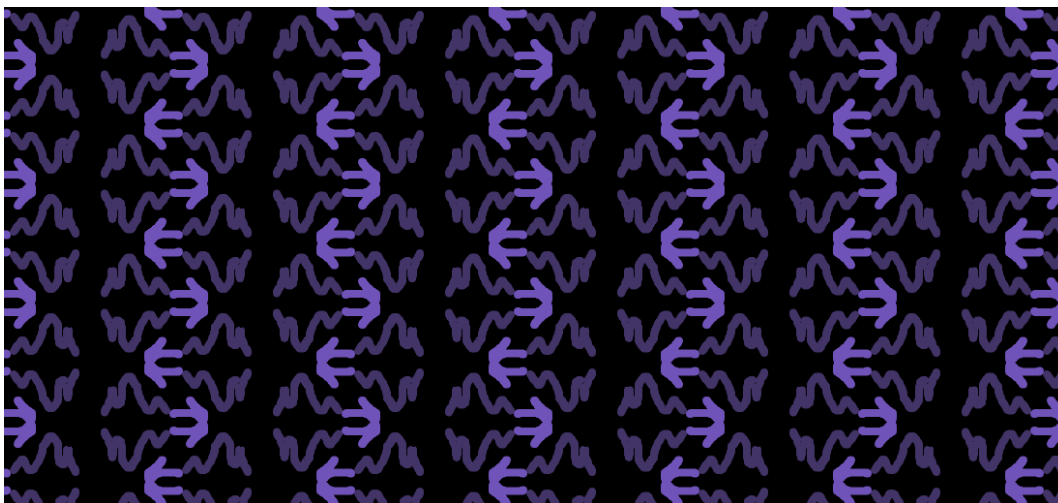


Figura 32:  $pmg$

Las figuras 31 y 32 tienen grupo de simetrías  $pmg$ .

#### 7.3.4. El grupo plano $pgg$

Su grupo puntual contiene dos reflexiones y, por tanto, rotaciones. Las rectas de reflexión forman un ángulo de  $\frac{\pi}{2}$ . La rotación generadora de  $H_0$  es la obtenida de componer ambas reflexiones. Los vectores que forman la base del retículo son  $r$  y  $s$ , siendo  $r$  un vector de longitud mínima del retículo que pertenece a una recta de reflexión y  $s$  otro vector de longitud mínima del retículo de la otra recta. El retículo de este grupo es rectangular. Además, los vectores de deslizamiento mínimos de las reflexiones,  $a$ ,  $b$ , son  $a = r$  y  $b = s$ .

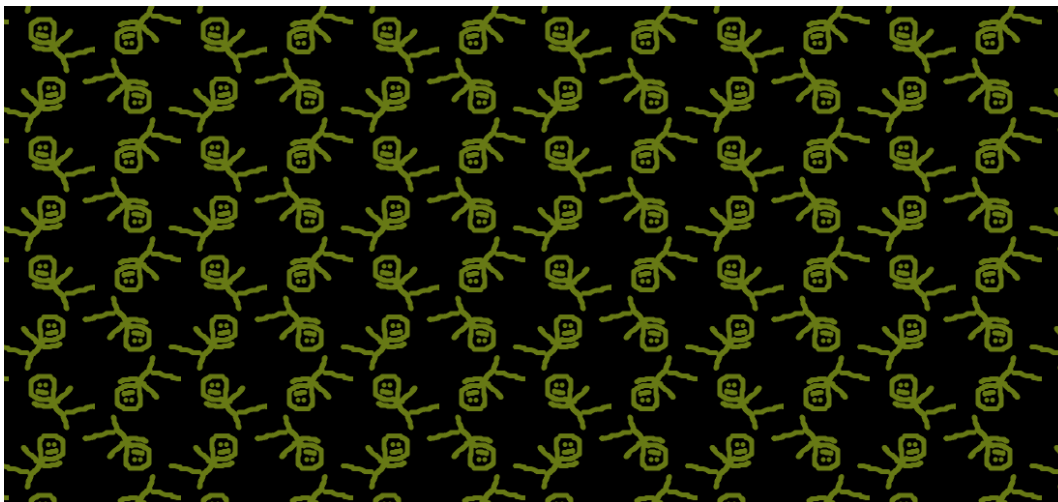


Figura 33:  $pgg$

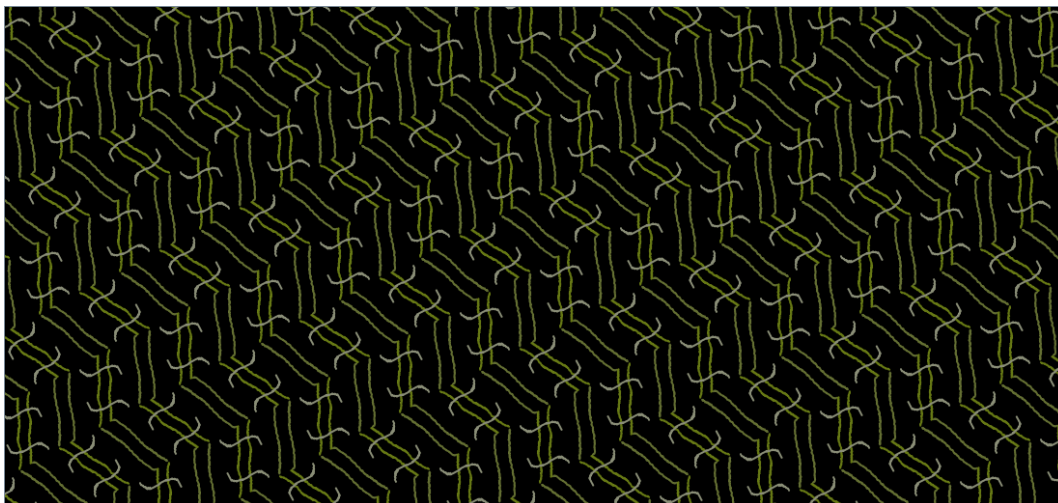


Figura 34:  $pgg$

Las figuras 33 y 34 tienen grupo de simetrías  $pgg$ .

### 7.3.5. El grupo plano $p31m$

Su grupo puntual contiene tres reflexiones y, por tanto, rotaciones. Las rectas de reflexión forman un ángulo de  $\frac{\pi}{3}$ .  $H_0$  está generado por la rotación,  $R$ , que se obtiene de componer dos reflexiones. Los vectores que forman la base del retículo son  $r$  y  $s$ , siendo  $r$  un vector de longitud mínima del retículo que pertenece a una recta de reflexión,  $\rho$ , y  $s$  otro vector de longitud mínima del retículo de la otra recta,  $\sigma$ , tales que  $s = r + \sigma(r)$ . El retículo de este grupo es hexagonal. Además, los vectores de deslizamiento mínimos de las reflexiones,  $a$ ,  $b$ , son ambos nulos.

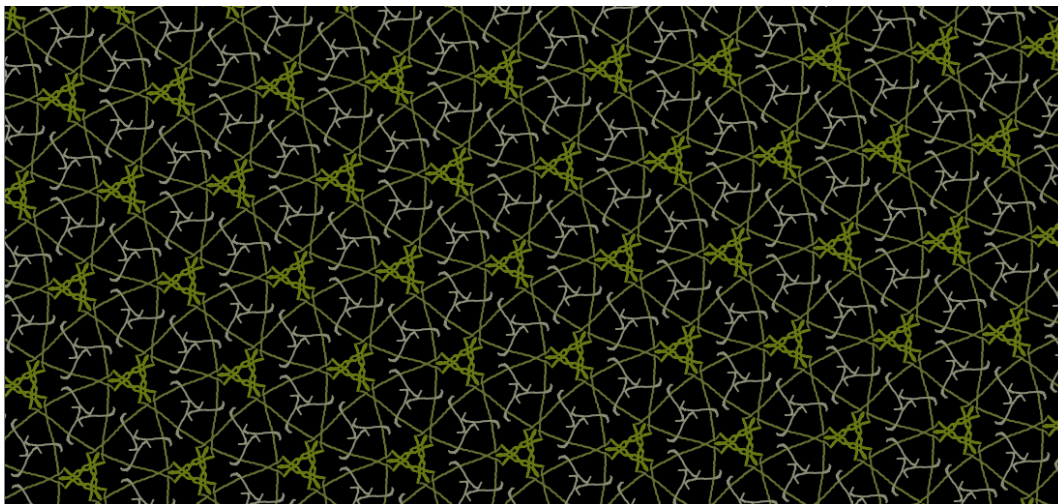


Figura 35:  $p31m$

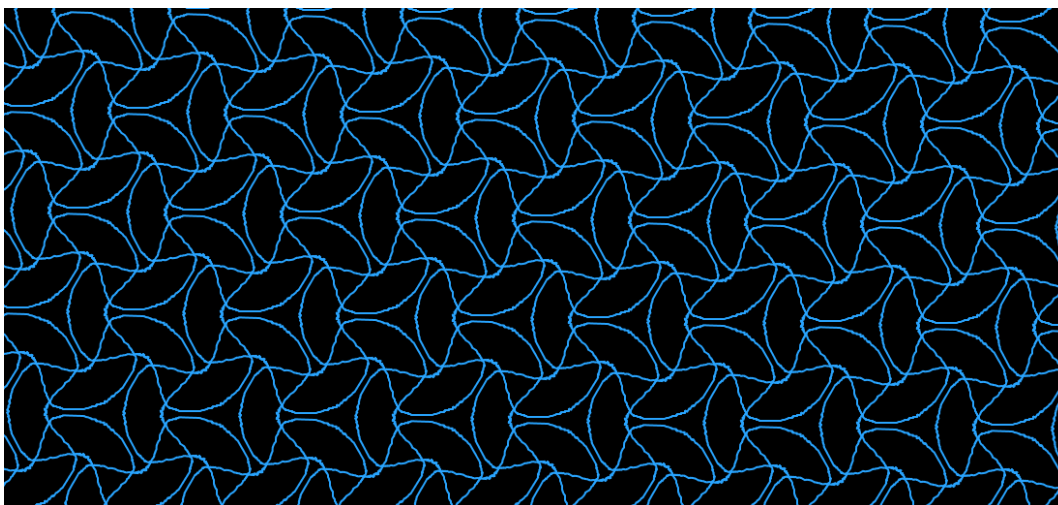


Figura 36:  $p31m$

Las figuras 35 y 36 tienen grupo de simetrías  $p31m$ .

### 7.3.6. El grupo plano $p3m1$

Su grupo puntual contiene tres reflexiones y, por tanto, rotaciones. Las rectas de reflexión forman un ángulo de  $\frac{\pi}{3}$ .  $H_0$  está generado por la rotación que se obtiene de componer dos reflexiones. Los vectores que forman la base del retículo son de la forma  $\frac{1}{3}r + \frac{1}{3}s \in T$ , siendo  $r$  un vector de longitud mínima del retículo que pertenece a una recta de reflexión y  $s$  otro vector de longitud mínima del retículo de la otra recta. El retículo de este grupo es hexagonal. Además, los vectores de deslizamiento mínimos de las reflexiones,  $a$ ,  $b$ , son ambos nulos.



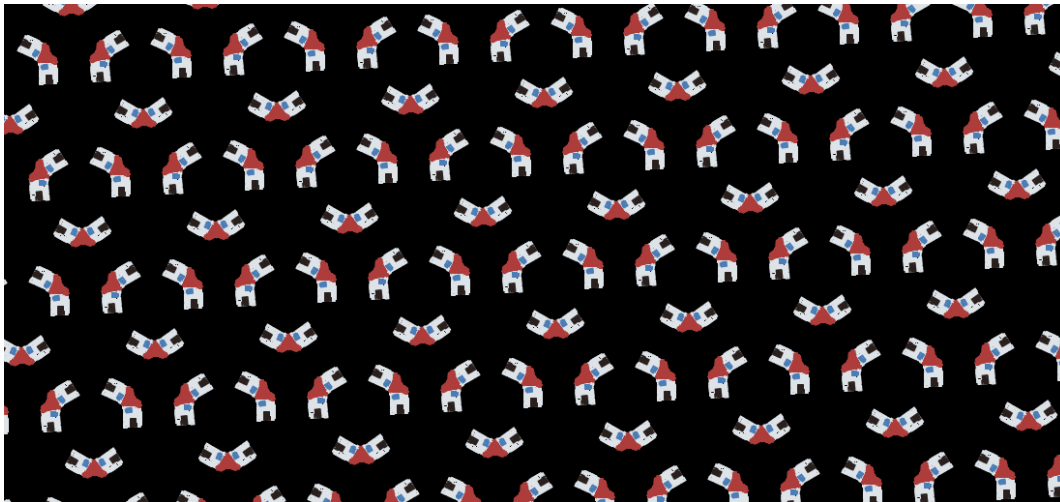


Figura 37:  $p3m1$

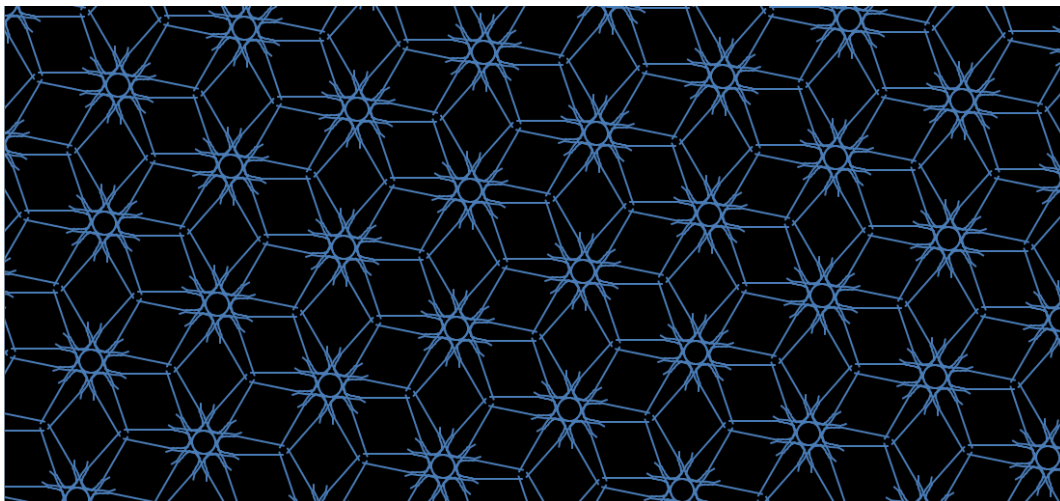


Figura 38:  $p3m1$

Las figuras 37 y 38 tienen grupo de simetrías  $p3m1$ .

### 7.3.7. El grupo plano $p4mm$

Su grupo puntual contiene cuatro reflexiones y, por tanto, rotaciones. Las rectas de reflexión forman un ángulo de  $\frac{\pi}{4}$ .  $H_0$  está generado por la rotación,  $R$ , que se obtiene de componer dos reflexiones. Los vectores que forman la base del retículo son  $r$  y  $s$ , siendo  $r$  un vector de longitud mínima del retículo que pertenece a una recta de reflexión,  $\rho$ , y  $s$  otro vector de longitud mínima del retículo de la otra recta,  $\sigma$ , tales que  $s = r + \sigma(r)$ . El retículo de este grupo es cuadrado. Además, los vectores de deslizamiento mínimos de las reflexiones son ambos nulos.

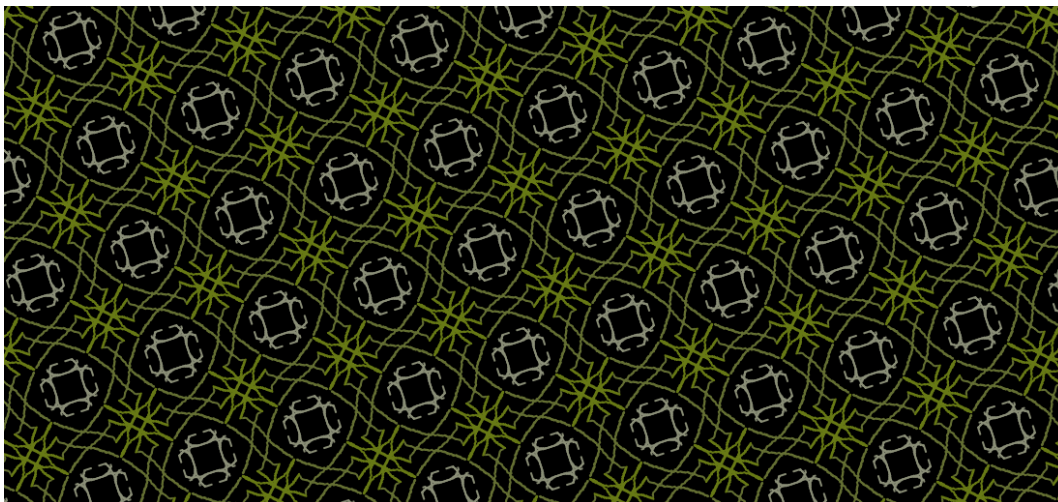


Figura 39:  $p4mm$

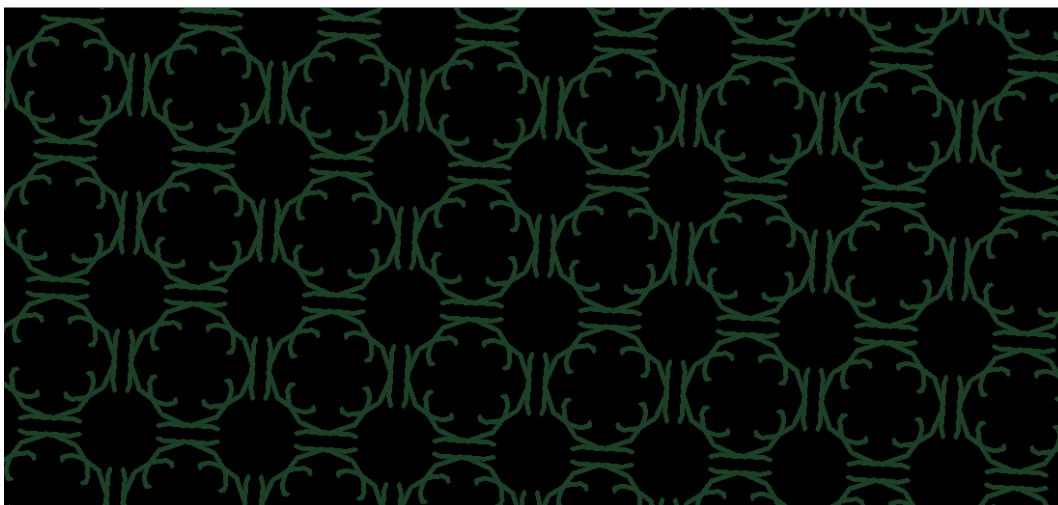


Figura 40:  $p4mm$

Las figuras 39 y 40 tienen grupo de simetrías  $p4mm$ .

### 7.3.8. El grupo plano $p4mg$

Su grupo puntual contiene cuatro reflexiones y, por tanto, rotaciones. Las rectas de reflexión forman un ángulo de  $\frac{\pi}{4}$ .  $H_0$  está generado por la rotación,  $R$ , que se obtiene de componer dos reflexiones. Los vectores que forman la base del retículo son  $r$  y  $s$ , siendo  $r$  un vector de longitud mínima del retículo que pertenece a una recta de reflexión,  $\rho$ , y  $s$  otro vector de longitud mínima del retículo de la otra recta,  $\sigma$ , tales que  $s = r + \sigma(r)$ . El retículo de este grupo es cuadrado. Además, los vectores de deslizamiento mínimos de las reflexiones son  $a = r$  y  $b = 0$ .

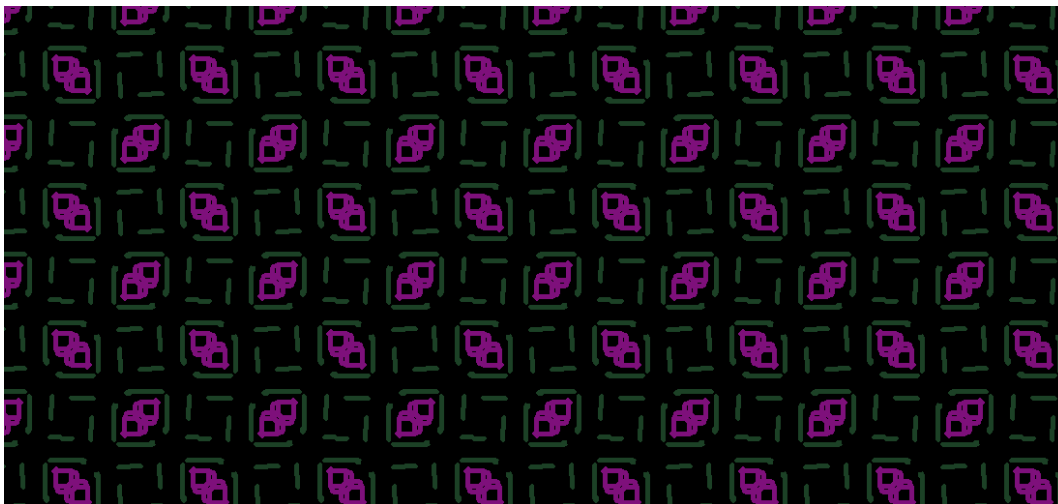


Figura 41:  $p4mg$

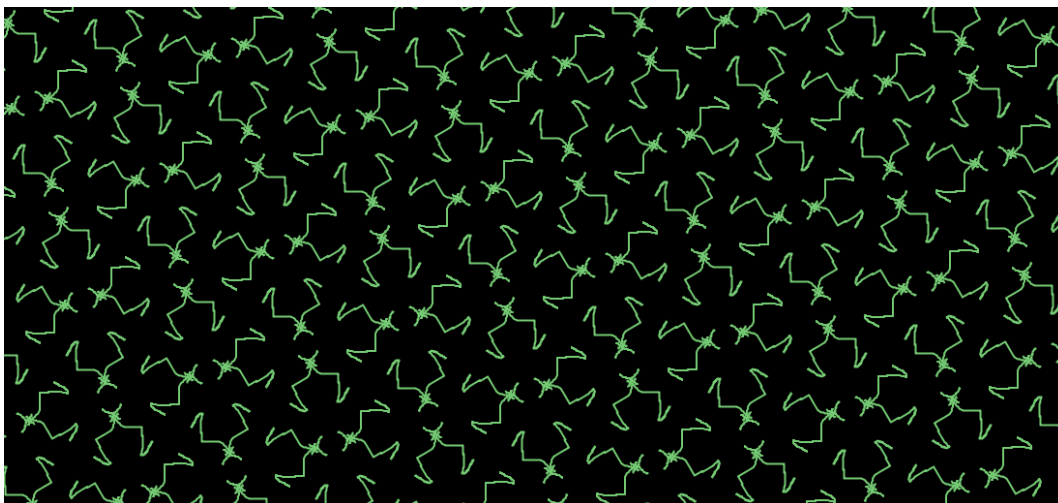


Figura 42:  $p4mg$

Las figuras 41 y 42 tienen grupo de simetrías  $p4mg$ .

### 7.3.9. El grupo plano $p6mm$

Su grupo puntual contiene seis reflexiones y, por tanto, rotaciones. Las rectas de reflexión forman un ángulo de  $\frac{\pi}{6}$ .  $H_0$  está generado por la rotación,  $R$ , que se obtiene de componer dos reflexiones. Los vectores que forman la base del retículo son  $r$  y  $s$ , siendo  $r$  un vector de longitud mínima del retículo que pertenece a una recta de reflexión,  $\rho$ , y  $s$  otro vector de longitud mínima del retículo de la otra recta,  $\sigma$ , tales que  $s = r + \sigma(r)$ . El retículo de este grupo es hexagonal. Además, los vectores de deslizamiento mínimos de las reflexiones son ambos nulos.

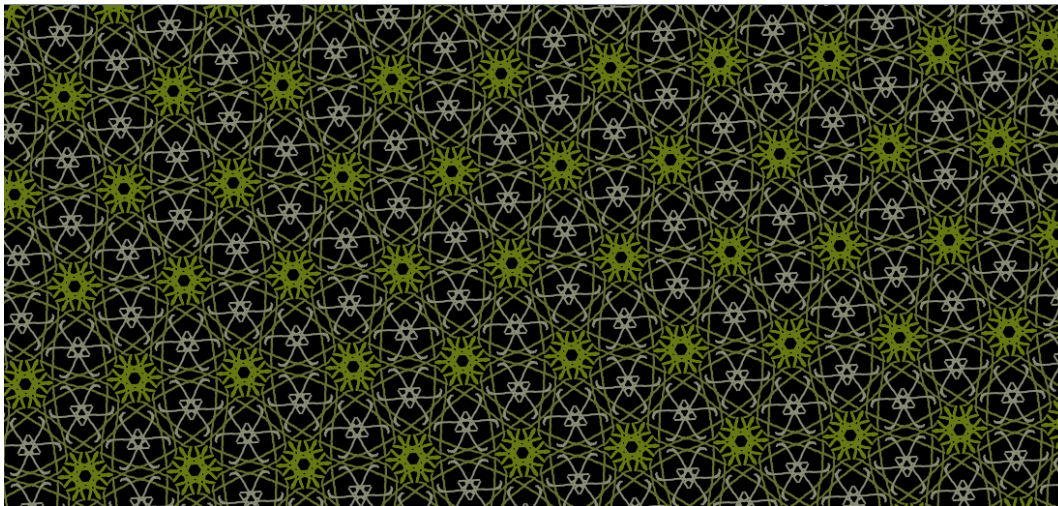


Figura 43:  $p6mm$

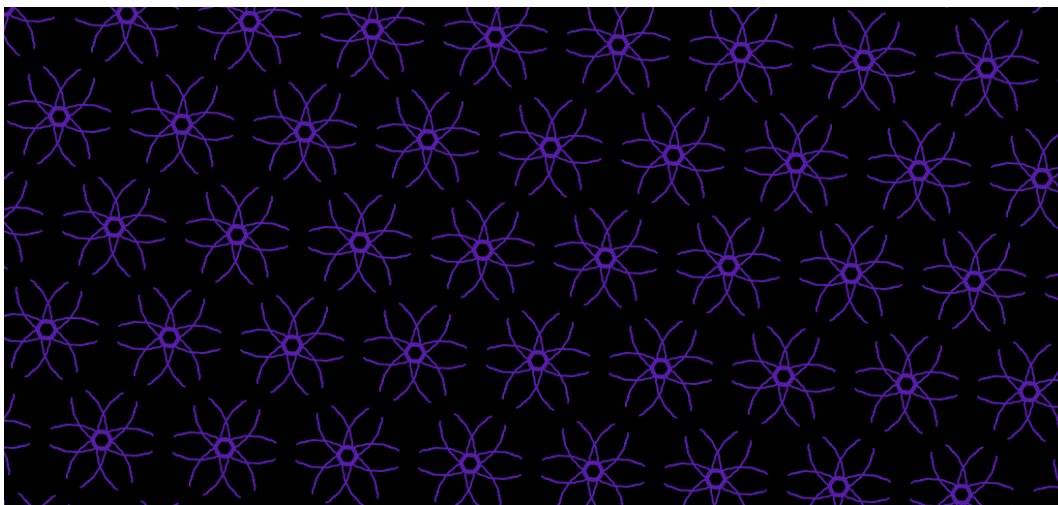


Figura 44:  $p6mm$

Las figuras 43 y 44 tienen grupo de simetrías  $p6mm$ .

## 8. Conclusiones

Como consecuencia de todo lo visto en este trabajo, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 8.1.** *Todo grupo cristalográfico es equivalente a uno de los siguientes 17 tipos:*

- Grupo puntual  $H$  sin reflexiones:

- p1.**  $H = H_0$  es trivial. Es igual al retículo.
- p2.**  $H = H_0$  está generado por una rotación de orden 2.
- p3.**  $H = H_0$  está generado por una rotación de orden 3.
- p4.**  $H = H_0$  está generado por una rotación de orden 4.
- p6.**  $H = H_0$  está generado por una rotación de orden 6.

- Grupo puntual  $H$  con una sola reflexión:

- cm.**  $H_0$  es trivial. Tiene ejes de simetría que admiten deslizamiento 0, y ejes de simetría que no lo admiten.
- pm.**  $H_0$  es trivial. Todos sus ejes de simetría admiten deslizamiento 0.
- pg.**  $H_0$  es trivial. Sus ejes de simetrías no admiten deslizamiento 0.

- Grupo puntual  $H$  con más de una reflexión:

- cmm.**  $H_0$  está generado por una rotación de orden 2. Tiene ejes de simetría en dos direcciones perpendiculares. En ambas direcciones hay ejes que admiten deslizamiento 0 y ejes que no.
- pmm.**  $H_0$  está generado por una rotación de orden 2. Tiene ejes de simetría en dos direcciones perpendiculares. En ambas direcciones, todos los ejes de simetría admiten deslizamiento 0.
- pmg.**  $H_0$  está generado por una rotación de orden 2. Tiene ejes de simetría en dos direcciones perpendiculares. En una dirección, todos los ejes de simetría admiten deslizamiento 0. En la otra, ningún eje admite deslizamiento 0.
- pgg.**  $H_0$  está generado por una rotación de orden 2. Tiene ejes de simetría en dos direcciones perpendiculares. En ambas direcciones, ningún eje admite deslizamiento 0.
- p3m1.**  $H_0$  generado por una rotación de orden 3. Tiene ejes de simetría en tres direcciones separadas por ángulos de  $\frac{\pi}{3}$ . En las tres direcciones, hay ejes que admiten deslizamiento 0 y ejes que no. Los vectores del retículo de tamaño mínimo no son paralelos a los ejes de simetría.
- p31m.**  $H_0$  generado por una rotación de orden 3. Tiene ejes de simetría en tres direcciones separadas por ángulos de  $\frac{\pi}{3}$ . En las tres direcciones, hay ejes que admiten deslizamiento 0 y ejes que no. Los vectores del retículo de tamaño mínimo son paralelos a los ejes de simetría.
- p4mm.**  $H_0$  generado por una rotación de orden 4. Tiene ejes de simetría en cuatro direcciones separadas por ángulos de  $\frac{\pi}{4}$ . En las cuatro direcciones, todos los ejes admiten deslizamiento 0.
- p4mg.**  $H_0$  generado por una rotación de orden 4. Tiene ejes de simetría en cuatro direcciones separadas por ángulos de  $\frac{\pi}{4}$ . En dos de ellas, todos los ejes admiten deslizamiento 0. En las otras dos (que se alternan con las anteriores), ningún eje admite deslizamiento 0.
- p6mm.**  $H_0$  generado por una rotación de orden 6. Tiene ejes de simetría en seis direcciones separadas por ángulos de  $\frac{\pi}{6}$ . En las seis direcciones, todos los ejes admiten deslizamiento 0.



## Referencias

- [1] Alegría, P., *Las simetrías y el teorema enorme*. <http://www.ehu.es/~mtpalezp/lassimetrias.pdf>
- [2] Apuntes de Álgebra Básica. Primer curso del Grado en Matemáticas. Universidad de Sevilla.
- [3] Apuntes de Estructura Algebraica. Tercer curso del Grado en Matemáticas. Universidad de Sevilla.
- [4] Armstrong, M. A., *Groups and Symmetry*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [5] Barrera Mora, F., *Una introducción a la teoría de grupos*. Noviembre de 2003. <http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/docums/barrera-grupos.pdf>
- [6] Bonahon, F., *Low-Dimensional Geometry: From Euclidean Surfaces to Hyperbolic Knots*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island. Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey, 1955.
- [7] Bujalance, E., Etayo, J. J., Gamboa, J. M., *Teoría elemental de grupos*. Octubre de 1987.
- [8] Dummit, D. S., Foote, R. M., *Abstract Algebra*. New York : J. Wiley, cop. 2004.
- [9] Hilbert, D., Cohn-Vossen, S., *Geometry and the imagination*. Chelsea Publishing Company, New York, 1952. Translated by P. Nemenyi.
- [10] Montesinos Amilibia, J. M., *Grupos cristalográficos y topología en Escher*. Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat. (Esp). Vol. 104, N°. 1, pp 27-47, 2010.
- [11] Pérez Gómez, R., *Un matemático pasea por la Alhambra*. Dpto. de Matemática Aplicada. Universidad de Granada. <http://divulgammath.ehu.es>
- [12] Rivero Mendoza, F., *Grupos Cristalográficos Planos*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. VI, No. 1, 1999.
- [13] Rodríguez Silvestre, M., *Generación de teselaciones periódicas: Grupos cristalográficos*. Trabajo fin de carrera. Universidad politécnica de Madrid, Facultad de informática. [http://www.dma.fi.upm.es/mabellanas/mosaicos/MemoriaGruposCristalograficos\\_Marina%20Rodriguez.pdf](http://www.dma.fi.upm.es/mabellanas/mosaicos/MemoriaGruposCristalograficos_Marina%20Rodriguez.pdf)
- [14] Schwarzenberger, R. L. E., *The 17 Plane Symmetry Groups*. Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry CV4 7 AL.
- [15] Weyl, H., *Symmetry*. Princeton University Press, 1952.
- [16] Wieting, T. W., *The mathematical theory of chromatic plane ornaments*. Marcel Dekker, 1982.
- [17] Willard Miller, Jr., *Symmetry groups and their applications*. School of Mathematics, University of Minnesota. Minneapolis, Minnesota, 1972.
- [18] <http://www.imaginary.org/es/program/morenaments>
- [19] <http://www.morenaments.de/gallery/exampleDiagrams/#wallpaper> . Parque de las ciencias, Granada. Imaginary, una mirada matemática. Morenaments.
- [20] <http://www.pagina12.com.ar/diario/suplementos/futuro/13-2973-2014-02-11.html>
- [21] [http://www.ugr.es/~anillos/verano2009/090709\\_cla.pdf](http://www.ugr.es/~anillos/verano2009/090709_cla.pdf)
- [22] [http://www.xtal.iqfr.csic.es/Cristalografia/parte\\_01\\_1.html](http://www.xtal.iqfr.csic.es/Cristalografia/parte_01_1.html)