Universidad de Sevilla

Facultad de Matemáticas

Resultados de existencia, unicidad y regularidad para las EDPs de evolución de Navier-Stokes

Autora: Marina Esteban Pérez

Tutor: Enrique Fernández Cara

17 de junio de 2014

Índice general

Introducción

El principal objetivo de este trabajo es el análisis teórico de las EDPs de *Navier-Stokes* evolutivas para fluidos viscosos e incompresibles en $\mathbb{R}^n$, con $n = 2$ ó $n = 3$. Presentaremos resultados relativos a la existencia, unicidad y regularidad de solución en ambos casos, con especial atención al caso tridimensional.

El primer capítulo está dedicado a los resultados básicos, presentados por ejemplo por *R. Témam* en [21]. Se recuerdan teoremas de existencia y unicidad (parcial en el caso $n = 3$) y además se prueba que, bajo ciertas condiciones sobre los datos, es posible conseguir una mayor regularidad en las soluciones.

En el segundo capítulo, recordaremos los resultados obtenidos por *L. Caffarelli*, *R. Kohn* y *L. Nirenberg* en [3]. Este artículo estudia el "tamaño" del conjunto de puntos singulares de un tipo particular de soluciones llamadas "admisibles", mejorando las afirmaciones previas de *V. Scheffer* (véase [19]). Por definición, los puntos singulares son aquéllos que no poseen ningún entorno donde la solución está acotada.

Finalmente, en el tercer capítulo, se resume la historia de las EDPs de Navier-Stokes y se citan algunos de los avances recientes más importantes hasta ahora conocidos.

A continuación presentaremos las EDPs objetivo de nuestro estudio.

Ecuaciones de *Navier-Stokes*:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \nu\triangle\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ \mathbf{u} = 0, \quad x \in \partial\Omega \times (0,T) \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{N-S}$$

Estas ecuaciones surgen aplicando la segunda ley de *Newton* al movimiento del fluido e imponiendo que el fluido es homogéneo (es decir, posee densidad constante) y la condición de incompresibilidad. El coeficiente ν es positivo y se interpreta como la viscosidad cinemática del fluido y la función $f : \Omega \times (0,T) \mapsto \mathbb{R}^n$ determina un campo de fuerzas externas.

Consideramos que el fluido ocupa todo el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ó $n = 3$) y que está adherido a la frontera del mismo. Las incógnitas $\mathbf{u} : \Omega \times (0,T) \mapsto \mathbb{R}^n$ y $p : \Omega \times (0,T) \mapsto \mathbb{R}$ representan la velocidad y presión del fluido.

El término no lineal, $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i D_i \mathbf{u}$ es debido a la aceleración por convección del fluido. Como se trata de un problema evolutivo, es necesario fijar el valor inicial de la velocidad en el tiempo $t = 0$ ($\mathbf{u}_0 : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$).

Como en el caso estacionario, no tiene sentido buscar fórmulas explícitas para las soluciones. Por lo tanto, todo lo que se puede hacer es analizar la existencia, unicidad y regularidad de solución y, por otra parte, recurrir al análisis numérico para encontrar una aproximación adecuada.

Desde el siglo XX, estas ecuaciones han sido aplicadas en numerosos campos como la Hidráulica, la Meteorología y la Aeronáutica; en general, en fenómenos físicos que incluyen fluidos. Constituyen, junto con las EDPs de Lamé, de Maxwell y de Schrödinger, las ecuaciones básicas de la Física.

Sin embargo, hay muchas cuestiones abiertas entorno a ellas. Así, en el caso tridimensional, con datos regulares, ¿siempre existe solución clásica?, ¿es única? El Instituto Clay de Matemáticas incluye la primera de estas cuestiones como uno de los siete *problemas del milenio*; véase la página web `http://claymath.org/millenium-problems/navier%E2%80%93stokes-equation`

Capítulo 1

Resultados básicos de existencia, unicidad y regularidad

1.1. Notación

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto conexo con frontera Lipschitz que supondremos acotado a menos que se indique lo contrario. A continuación, recordamos la definición de algunos espacios útiles y habituales en el estudio de las EDPs de Navier-Stokes:

$$\mathcal{V} := \{\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\Omega)^n,\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\},$$

$$V := \text{la adherencia de } \mathcal{V} \text{ en } H_0^1(\Omega)^n,$$

$$H := \text{la adherencia de } \mathcal{V} \text{ en } L^2(\Omega)^n.$$

En el espacio H consideraremos el producto escalar inducido por $L^2(\Omega)^n$; y V es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$((\mathbf{u},\mathbf{v})) := \sum_{i=1}^{n}(D_i\mathbf{u}, D_i\mathbf{v})$$

Para todo $m \geq 1$, denotaremos por $(\cdot\,,\cdot)$ y $|\cdot|$ el producto escalar y la norma de $L^2(\Omega)^m$ y por $\|\cdot\|$ la norma habitual de $H_0^1(\Omega)^m$.

El espacio V está contenido en H, donde es denso y, además, la inyección $i : V \mapsto H$, es compacta (sólo es continua si Ω no es acotado). Además, si denotamos V' y H' los duales correspondientes, la inyección adjunta, i^* es lineal y compacta de H' en V'. Por el Teorema de Riesz, podemos identificar H con su dual y escribir

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V', \tag{1.1}$$

donde cada espacio es denso en el siguiente, con inyecciones continuas e incluso compactas. Como consecuencia de esto, el producto escalar en H de $\mathbf{f} \in H$ y $\mathbf{u} \in V$ se puede extender como un producto de dualidad entre V' y V, denotado $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$.

Para cada $\mathbf{u} \in V$, la aplicación

$$\mathbf{v} \in V \mapsto ((\mathbf{u},\mathbf{v})) \in \mathbb{R}$$

es lineal y continua en V, por lo que existe un único elemento en el dual, que denotamos $A\mathbf{u}$, tal que:

$$\langle A\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = ((\mathbf{u},\mathbf{v})) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \tag{1.2}$$

Cuando el dominio Ω no es acotado, debemos considerar en V el siguiente producto escalar:

$$[[\mathbf{u},\mathbf{v}]] = ((\mathbf{u},\mathbf{v})) + (\mathbf{u},\mathbf{v});$$

con el que se sigue manteniendo (1.1).

Seguidamente, recordaremos varios resultados de carácter técnico, necesarios más adelante. Para las demostraciones, véase [21].

Sean a, b tales que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ y sea X un espacio de Banach. Para α dado con $1 \leq \alpha < +\infty$, $L^\alpha(a,b;X)$ denota el espacio de las (clases de) funciones $L^\alpha-$integrables de $[a,b]$ en X (en el sentido de Böchner). Se trata de un nuevo espacio de Banach con la norma

$$\|\mathbf{f}\|_{L^\alpha(a,b;X)} = \left\{ \int_a^b \|f(t)\|_X^\alpha dt \right\}^{1/\alpha}.$$

El espacio $L^\infty(a,b;X)$ es el espacio de las (clases de) funciones medibles y c.p.d. acotadas de $[a,b]$ en X. Es un nuevo espacio de Banach con la norma

$$\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(a,b;X)} = \operatorname*{Ess\,Sup}_{[a,b]} \|f(t)\|_X.$$

El espacio $\mathcal{C}([a,b];X)$ es el espacio de las funciones continuas del intervalo $[a,b]$ en X. Si a y b son finitos, se trata de un espacio de Banach con la norma

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{C}([a,b];X)} = \sup_{[a,b]} \|f(t)\|_X.$$

Generalmente, el intervalo $[a,b]$ será sustituido por $[0,T]$, con $T > 0$, fijo.

El siguiente resultado se refiere a las derivadas de funciones con valores en espacios de Banach:

Lema 1.1. *Sean X un espacio de Banach y X' su dual. Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{f}$ dos funciones de $L^1(a,b;X)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes,*

(a) $\boldsymbol{u}$ es igual a una primitiva de $\boldsymbol{f}$ en casi todo:

$$\boldsymbol{u}(t) = \xi + \int_0^t \boldsymbol{f}(s)\, ds, \quad \xi \in X, \quad c.p.d.\ t \in [a,b]$$

(b) Para cada función "test" $\phi \in \mathcal{D}((a,b))$,

$$\int_a^b \boldsymbol{f}(t)\phi(t)\,dt = -\int_a^b \boldsymbol{u}(t)\phi'(t)\,dt \qquad \left(\phi' = \frac{d\phi}{dt}\right)$$

(c) Para cada $\eta \in X'$,

$$\frac{d}{dt} < \boldsymbol{u}, \eta > = < \boldsymbol{f}, \eta >,$$

en el sentido de las distribuciones en (a,b).

Si (a)-(c) son propiedades satisfechas por $\boldsymbol{u}$, entonces $\boldsymbol{u}$ es igual en casi todo a una función continua de $[a,b]$ en X.

Lema 1.2. *Sean X e Y espacios de Banach tales que X es reflexivo y $X \hookrightarrow Y$ con inyección continua. Entonces, si $\phi \in L^\infty(0,T;X)$ y es débilmente continua con valores en Y, es decir, $t \mapsto \langle \ell, \phi(t)\rangle_{Y',Y}$ es continua para todo $\ell \in Y'$, ϕ es débilmente continua con valores en X, es decir, $t \mapsto \langle m, \phi(t)\rangle_{X',X}$ es continua para todo $m \in X'$.*

En el siguiente resultado utilizaremos el espacio

$$\mathcal{H}^\gamma((a,b);X_0,X_1) := \{\mathbf{u} \in L^2(a,b;X_0) : \, D_t^\gamma \mathbf{u} \in L^2(a,b;X_1)\},$$

donde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $\gamma > 0$ y X_0, X_1 son espacios de Hilbert con $X_0 \hookrightarrow X_1$. Aquí, $D_t^\gamma \mathbf{u}$ es la derivada de orden γ de $\mathbf{u}$ respecto de t (definida a partir de la transformada de Fourier de la prolongación de $\mathbf{u}$ por 0). Se trata de un espacio de Hilbert para la norma natural

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}^\gamma(a,b;X_0,X_1)} := \left(\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(a,b;X_0)} + \|D_t^\gamma \mathbf{u}\|^2_{L^2(a,b;X_1)}\right)^{1/2}.$$

Teorema 1.1. *Sean X_0, X, X_1 espacios de Hilbert que satisfacen:*

$$X_0 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_1 \text{ con inyecciones continuas,} \tag{1.3}$$

la inyección de X_0 en X es compacta.

Entonces, para cualquier intervalo acotado (a,b) y cualquier $\gamma > 0$, la inyección $\mathcal{H}^\gamma((a,b);X_0,X_1) \hookrightarrow L^2(a,b;X)$ es compacta.

1.2. Teoremas de Existencia y Unicidad

Esta sección está dedicada al estudio de la existencia y unicidad de solución débil del problema (N-S).

1.2.1. Existencia

Dado que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $n < 4$, podemos definir sobre $H_0^1(\Omega)^n$, y en particular sobre V, la forma trilineal continua:

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) := \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \mathbf{u}_i D_i \mathbf{v}_j \mathbf{w}_j \, dx. \tag{1.4}$$

Si $\mathbf{u} \in V$, entonces

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n. \tag{1.5}$$

Para $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$, denotaremos por $B(\mathbf{u},\mathbf{v})$ el elemento de V' definido de la siguiente forma:

$$\langle B(\mathbf{u},\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle = b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in V, \tag{1.6}$$

A continuación formularemos el problema de valores iniciales para las EDPs de Navier-Stokes. En primer lugar, presentaremos una formulación poco rigurosa, intentando que sea suficientemente intuitiva:

Hallar funciones

$$\mathbf{u} : \Omega \times [0,T] \mapsto \mathbb{R}^n \text{ y } p : \Omega \times [0,T] \mapsto \mathbb{R},$$

tales que:

$$\mathbf{u}_t - \nu \nabla \mathbf{u} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i D_i \mathbf{u} + D_i p = \mathbf{f} \quad \text{en } Q = \Omega \times (0,T), \tag{1.7}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } Q, \tag{1.8}$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \tag{1.9}$$

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x) \quad \text{en } \Omega. \tag{1.10}$$

Las funciones $\mathbf{f}$ y $\mathbf{u}_0$ son dadas, están definidas en $\Omega \times [0,T]$ y Ω, respectivamente y toman valores en $\mathbb{R}^n$.

Diremos que $\mathbf{u}$ y p son soluciones clásicas de (1.7)–(1.10) si $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^2(\overline{Q};\mathbb{R}^n)$, $p \in \mathcal{C}^1(\overline{Q},\mathbb{R})$ y estas igualdades se verifican puntualmente.

Obviamente, en tal caso, $\mathbf{u} \in L^2(0,T;V)$ y, si $\mathbf{v}$ es un elemento de $\mathcal{V}$, se tiene:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \nu((\mathbf{u},\mathbf{v})) + b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v}) = \langle \mathbf{f},\mathbf{v}\rangle, \tag{1.11}$$

que se mantiene por continuidad para toda función $\mathbf{v} \in V$. Obsérvese que la presión p desaparece en (1.11); esto simplifica notablemente la formulación del problema (veremos después que p puede recuperarse a partir de $\mathbf{u}$).

Guiados por esta observación, presentamos a continuación la formulación del problema de forma rigurosa:

PROBLEMA 1.1. *Dadas $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{u}_0$ con*

$$\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V'), \tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{u}_0 \in H, \tag{1.13}$$

hallar $\boldsymbol{u}$ cumpliendo

$$\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V) \tag{1.14}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + \nu((\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})) + b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle, \quad \forall \boldsymbol{v} \in V \tag{1.15}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0. \tag{1.16}$$

Cuando $\mathbf{u}$ verifique (1.14)–(1.16), diremos que $\mathbf{u}$ es una solución débil de (N-S).

Observemos que, en principio, la condición (1.16) no tiene por qué tener sentido para una función que verifica (1.14). No obstante, (1.14) y (1.15) implican que $\mathbf{u}$ es igual en casi todo a una función continua y la condición (1.16) es apropiada. Esto es consecuencia del resultado siguiente:

Lema 1.3. *Si $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V)$, la función $B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})$ definida por las igualdades*

$$\langle B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})(t),\boldsymbol{v}\rangle = b(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, \quad t \in [0,T] \text{ c.p.d.},$$

pertenece a $L^1(0,T;V')$.

Demostración: Para casi todo t, tenemos $B(\mathbf{u},\mathbf{u})(t) \in V'$ y además la función

$$t \in [0,T] \mapsto B(\mathbf{u},\mathbf{u})(t) \in V'$$

es medible. Además, como $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ es una forma trilineal continua sobre V

$$\|B(\mathbf{w},\mathbf{w})\|_{V'} \leq C\|\mathbf{w}\|^2 \quad \forall \mathbf{w} \in V \tag{1.17}$$

luego, integrando en tiempo, obtenemos que

$$\int_0^T \|B(\mathbf{u},\mathbf{u})\|_{V'}\,dt \leq C\int_0^T \|\mathbf{u}\|^2\,dt < +\infty.$$

□

Si $\mathbf{u}$ satisface (1.14)-(1.15), entonces, por (1.2) y el Lema 1.3, podemos escribir la propiedad (1.15) de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{f} - \nu A\mathbf{u} - B(\mathbf{u},\mathbf{u}),\mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Y, como $A\mathbf{u} \in L^2(0,T;V')$, la función $\mathbf{f} - \nu A\mathbf{u} - B(\mathbf{u},\mathbf{u})$ pertenece a $L^1(0,T;V')$. Dado que

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{f} - \nu A\mathbf{u} - B(\mathbf{u},\mathbf{u}), \tag{1.18}$$

por el Lema 1.1, $\mathbf{u}$ es en casi todo igual a una función continua de $[0,T]$ en V'. Por todo esto, (1.16) cobra sentido.

Ahora daremos una formulación alternativa para el problema (1.14)-(1.16).

PROBLEMA 1.2. *Dadas $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{u}_0$ verificando (1.12) y (1.13), hallar $\mathbf{u}$ tal que:*

$$\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V), \quad \boldsymbol{u}_t \in L^1(0,T;V'), \tag{1.19}$$

$$\boldsymbol{u}_t + \nu A\boldsymbol{u} + B\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \text{ en } (0,T), \tag{1.20}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0. \tag{1.21}$$

Nota 1.2.1. Los problemas (1.1) y (1.2) son equivalentes.

Ambos problemas tienen garantizada la existencia de solución gracias al resultado siguiente:

Teorema 1.2. *Sean $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{u}_0$ funciones dadas con las propiedades (1.12) y (1.13). Entonces existe al menos una solución débil $\mathbf{u}$ de (N-S). Además, $\mathbf{u}$ verifica:*

$$\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \tag{1.22}$$

y es débilmente continua de $[0,T]$ en H.

La existencia de $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;H)$ se probará en la sección siguiente; $\mathbf{u}$ es débilmente continua en H debido a que es continua en V', verifica (1.22) y podemos aplicar el Lema 1.2.

Observación 1.1. (I) El Teorema 1.2 también es válido si suponemos que $\mathbf{f}$ es la suma de dos funciones $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ tales que:

$$\mathbf{f}_1 \in L^2(0,T;V'), \quad \mathbf{f}_2 \in L^1(0,T;H).$$

(II) Para Ω no acotado, el teorema se mantiene.

1.3. Prueba del Teorema 1.2

En esta sección, presentamos la prueba del teorema principal de existencia de solución para el problema de *Navier-Stokes*.

En una primera etapa, trabajaremos con aproximaciones de Galerkin. A continuación, obtendremos estimaciones *a priori* de estas aproximaciones y, finalmente, pasaremos al límite.

(I) Como el espacio $\mathcal{V}$ es denso en V y éste es separable, existe una sucesión $\{\mathbf{w}_m\}$ en $\mathcal{V}$ de funciones linealmente independientes que es total en V.

Para cada m, definimos una solución aproximada de (1.15):

$$\mathbf{u}_m = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\mathbf{w}_i, \tag{1.23}$$

con

$$(\mathbf{u}'_m(t),\mathbf{w}_j) + \nu((\mathbf{u}_m(t),\mathbf{w}_j)) + b(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m(t),\mathbf{w}_j) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j\rangle, \tag{1.24}$$

$$t \in [0,T], \quad j = 1,\dots,m, \tag{1.25}$$

$$\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{0m}, \tag{1.26}$$

donde $\mathbf{u}_{0m}$ no es más que la proyección del dato inicial $\mathbf{u}_0 \in H$ sobre el espacio generado por $\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m\}$ (de hecho, podríamos tomar como $\mathbf{u}_{0m}$ cualquier elemento de este espacio que tienda a $\mathbf{u}_0$ en H).

Observamos que (1.24) es un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales para las g_{im}:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}(\mathbf{w}_i,\mathbf{w}_j)g'_{im}(t) + \nu\sum_{i=1}^{m}((\mathbf{w}_i,\mathbf{w}_j))g_{im}(t)&\\ + \sum_{i,l=1}^{m} b(\mathbf{w}_i,\mathbf{w}_l,\mathbf{w}_j)g_{im}(t)g_{lm}(t) = \langle \mathbf{f}(t),\mathbf{w}_j\rangle,&\end{aligned} \tag{1.27}$$

que puede reescribirse como sigue:

$$\begin{aligned}g'_{im}(t) + \sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}g_{im}(t)&\\ + \sum_{j,k=1}^{m}\alpha_{ijk}g_{jm}(t)g_{km}(t) = \sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}\langle \mathbf{f}(t),\mathbf{w}_j\rangle&\end{aligned} \tag{1.28}$$

donde los $\alpha_{ij}, \alpha_{ijk}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$.

De la misma manera, la condición (1.26) es equivalente a m condiciones iniciales para las g_{im}:

$$g_{im}(0) = g^0_{im} \quad \text{(componente i-ésima de } \mathbf{u}_{0m}), i = 1, \ldots, m. \tag{1.29}$$

El sistema (no lineal) junto con la condición inicial tiene una solución maximal a la derecha de $t = 0$, definida en un intervalo $[0, t_m)$, para cada m. Además para cada m, si $t_m < T$, entonces

$$\limsup_{t \to t_m} |\mathbf{u}_m(t)| = +\infty.$$

Las estimaciones *a priori* que veremos posteriormente, demostrarán que esto no puede ocurrir y, por tanto, $t_m = T$ para todo m.

(II) Para obtener la primera cota, multiplicaremos (1.24) por $g_{jm}(t)$ y sumaremos en $j = 1, \ldots, m$. Como $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ para todo $\mathbf{v} \in V$, resulta fácilmente que:

$$(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}_m(t)) + \nu \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t) \rangle, \tag{1.30}$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m(t)|^2 + 2\nu \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 &= 2\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t) \rangle \\ &\leq 2\|\mathbf{f}(t)\|_{V'} \|\mathbf{u}_m(t)\| \\ &\leq \nu \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 + \frac{1}{\nu}\|\mathbf{f}(t)\|^2_{V'} \end{aligned}$$

así,

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m(t)|^2 + \nu \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 \leq \frac{1}{\nu}\|\mathbf{f}(t)\|^2_{V'} \tag{1.31}$$

Si ahora integramos con respecto al tiempo en el intervalo $[0, s]$, resulta:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_m(s)|^2 &\leq |\mathbf{u}_{0m}|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^s \|\mathbf{f}(t)\|_{V'}^2\, dt \\ &\leq |\mathbf{u}_0|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|_{V'}^2\, dt \end{aligned}$$

y finalmente

$$\sup_{s\in[0,T]} |\mathbf{u}_m(s)|^2 \leq |\mathbf{u}_0|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|_{V'}^2\, dt \tag{1.32}$$

Con esta última desigualdad concluimos que

$$\{\mathbf{u}_m\} \textit{ está uniformemente acotada en } L^\infty(0, T; H). \tag{1.33}$$

Ahora, integrando (1.31) en el intervalo $[0, T]$, también tenemos que

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_m(T)|^2 + \nu\int_0^T \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 dt &\leq |\mathbf{u}_{0m}|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|_{V'}^2\, dt \\ &\leq |\mathbf{u}_0|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|_{V'}^2\, dt \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\{\mathbf{u}_m\} \textit{ está uniformemente acotada en } L^2(0, T; V). \tag{1.34}$$

(iii) Denotaremos $\widetilde{\mathbf{u}}_m$ la función extensión por 0 de $\mathbf{u}_m$ a todo $\mathbb{R}$. La transformada de Fourier de esta función será representada por $\widehat{\mathbf{u}}_m$.
Entonces se puede demostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} |\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2\, dt \leq C, \quad \text{para algún } \gamma > 0. \tag{1.35}$$

Una consecuencia de (1.34), es que

$$\{\mathbf{u}_m\} \textit{ está uniformemente acotada en } \mathcal{H}^\gamma(0, T; V, H). \tag{1.36}$$

Esto permitirá aplicar después el Teorema 1.1 y deducir la existencia de subsucesiones fuertemente convergentes.

Para probar (1.35), observemos que podemos escribir (1.24) como sigue:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\widetilde{\mathbf{u}}_m, \mathbf{w}_j) = \langle \widetilde{\mathbf{f}}_m, \mathbf{w}_j \rangle + (\mathbf{u}_{0m}, \mathbf{w}_j)\delta_0 - (\mathbf{u}_m(T), \mathbf{w}_j)\delta_T, \\ j = 1, \dots, m \end{cases} \tag{1.37}$$

donde δ_0 y δ_T son las distribuciones de Dirac en 0 y T respectivamente,

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{f} - \nu A\mathbf{u}_m - B(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) \tag{1.38}$$

y $\widetilde{\mathbf{f}}_m$ es la extensión por 0 de $\mathbf{f}$ a todo $\mathbb{R}$.

Aplicando la transformada de Fourier, obtenemos de (1.37) que

$$2\pi i\tau(\widehat{\mathbf{u}}_m, \mathbf{w}_j) = \langle \widehat{\mathbf{f}}_m, \mathbf{w}_j \rangle + (\mathbf{u}_{0m}, \mathbf{w}_j) - (\mathbf{u}_m(T), \mathbf{w}_j)\mathrm{e}^{-2\pi i T} \tag{1.39}$$

Multiplicamos (1.38) por $\widehat{g}_{im}(\tau)$ (transformada de Fourier de $\widetilde{g}_{im}(\tau)$) y sumamos en j, resultando que

$$\begin{aligned} 2\pi i\tau|\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2 &= \langle \widehat{\mathbf{f}}(\tau), \widehat{\mathbf{u}}_m(\tau) \rangle + (\mathbf{u}_{0m}, \widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)) \\ &\quad -(\mathbf{u}_m(T), \widehat{\mathbf{u}}_m(\tau))\mathrm{e}^{-2i\pi T}. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Por (1.17), sabemos que

$$\int_0^T \|\mathbf{f}_m(t)\|_{V'}\, dt \le \int_0^T (\|\mathbf{f}(t)\|_{V'} + \nu\|\mathbf{u}_m(t)\| + C\|\mathbf{u}_m(t)\|^2)\, dt,$$

que está uniformemente acotado por (1.34). Así,

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|\widehat{\mathbf{f}}_m(\tau)\|_{V'} \le C.$$

Teniendo en cuenta (1.32),

$$|\mathbf{u}_m(0)| \le C, \quad |\mathbf{u}_m(T)| \le C$$

y se deduce de (1.40) que

$$|\tau||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2 \leq C\|\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)\| + C|\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)|,$$

es decir,

$$|\tau||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2 \leq C\|\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|. \tag{1.41}$$

Si fijamos γ en $(0, 1/4)$, vemos que

$$|\tau|^{2\gamma} \leq C_\gamma \frac{1 + |\tau|}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

Así, tenemos por (1.41) que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma}|\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2 \, d\tau \quad &\leq \quad C_\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + |\tau|}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} |\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2 \, d\tau \\ &\leq \quad C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)\| \, d\tau}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} + C \int_{-\infty}^{+\infty} \|\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|^2 \, d\tau. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Parseval y (1.34), al tomar límite la última integral está acotada, así que (1.35) estará probada si demostramos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)\| \, d\tau}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} \leq C. \tag{1.42}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y, de nuevo, la desigualdad de Parseval, podemos acotar las integrales en (1.42) por

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{(1 + |\tau|^{1-2\gamma})^2} \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 \, dt \right)^{1/2},$$

que es finita y está uniformemente acotada si $\gamma < 1/4$ por (1.34).

(iv) Las estimaciones (1.33) y (1.34) nos permiten afirmar la existencia de un elemento $\mathbf{u} \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ y una sucesión de funciones $\mathbf{u}_{m'}$ tal que:

$$\mathbf{u}_{m'} \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{débilmente en } L^2(0,T;V); \tag{1.43}$$

$$\mathbf{u}_{m'} \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{débil-}* \text{ en } L^\infty(0,T;H). \tag{1.44}$$

$$\tag{1.45}$$

Por (1.36) y el Teorema 1.1, sabemos también que

$$\mathbf{u}_{m'} \to \mathbf{u} \quad \text{fuertemente en } L^2(0,T;H). \tag{1.46}$$

Sea $\psi \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$ tal que $\psi(T) = 0$. Multiplicamos (1.24) por $\psi(t)$ e integramos por partes, quedando que

$$\begin{aligned} -\int_0^T (\mathbf{u}_m(t), \psi'(t)\mathbf{w}_j)\,dt + \nu \int_0^T ((\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j\psi(t)))\,dt \\ + \int_0^T b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j\psi(t))\,dt = (\mathbf{u}_{0m}, \mathbf{w}_j)\psi(0) + \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j\psi(t)\rangle\,dt. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Para pasar al límite necesitamos un resultado adicional:

Lema 1.4. *Si $\boldsymbol{u}_\mu$ converge a $\boldsymbol{u}$ débilmente en $L^2(0,T;V)$ y fuertemente en $L^2(0,T;H)$, entonces, para cualquier función $\boldsymbol{w}$ con componentes en $\mathcal{C}^1(\overline{Q})$, se tiene:*

$$\int_0^T b(\boldsymbol{u}_\mu(t), \boldsymbol{u}_\mu(t), \boldsymbol{w}(t))\,dt \to \int_0^T b(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{w}(t))\,dt \tag{1.48}$$

Con este resultado, estamos ya en condiciones de pasar al límite en (1.47) con m cambiado por m' cuando $m' \to +\infty$ y obtener que:

$$\begin{aligned} &-\int_0^T (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}\psi'(t))\,dt + \nu \int_0^T ((\mathbf{u}(t), \mathbf{v}\psi(t)))\,dt \\ &+ \int_0^T b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}\psi(t))\,dt = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v})\psi(0) + \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}\psi(t)\rangle\,dt, \end{aligned} \tag{1.49}$$

igualdad que resulta válida para $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots$. Por lo tanto, (1.49) es cierta para cualquier combinación lineal de las $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots$ y, por densidad, para toda función $\mathbf{v} \in V$.

Queda demostrar que $\mathbf{u}$ cumple (1.16). Para ello, multiplicaremos (1.15) por ψ e integramos por partes:

$$\begin{aligned} &-\int_0^T (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}\psi(t))\,dt + \nu \int_0^T ((\mathbf{u}_m(t), \mathbf{v}\psi(t)))\,dt \\ &+ \int_0^T b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}\psi(t))\,dt = (\mathbf{u}(0), \mathbf{v})\psi(0) + \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}\psi(t)\rangle\,dt. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Luego, necesariamente

$$(\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v})\psi(0) = 0.$$

Si elegimos ψ tal que $\psi(0) = 1$, vemos que

$$(\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

de lo que sigue (1.16).

Observación 1.2. (I) Cuando el dominio Ω es no acotado, la prueba de (1.35) y (1.36) es análoga. La diferencia está en que la inyección de V en H no es compacta. Sin embargo, podemos extraer una subsucesión $\mathbf{u}_{m'}$ que satisfaga (1.43). Entonces, para cualquier bola $\mathcal{B} \subset \Omega$, la inyección de $H^1(\mathcal{B}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{B})$ es compacta.

De modo análogo a como se hace en la demostración precedente, obtenemos una sucesión $\{u_{m'}\}$ que converge a $\mathbf{u}$ fuertemente en $L^2(0,T;L^2(\mathcal{B})^n)$ para cada $\mathcal{B}$.

En particular, si denotamos F_j el soporte de $\mathbf{w}_j$ para cada j, se tiene que

$$\mathbf{u}_{m'}\,|_{F_j} \to \mathbf{u}\,|_{F_j} \qquad \text{fuertemente en } L^2(0,T;L^2(F_j)^n), \tag{1.51}$$

que es suficiente para pasar al límite en (1.47).

(II) *Desigualdad de Energía*

Sea $t \in [0,T]$. Integrando (1.30) observamos que

$$|\mathbf{u}_m(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|\mathbf{u}_m(s)\|^2\, ds = |\mathbf{u}_{0m}|^2 + 2\int_0^t \langle \mathbf{f}(s), \mathbf{u}_m(s)\rangle\, ds.$$

De (1.43) y (1.35) se puede probar que, para cada $t \in [0,T]$,

$$\mathbf{u}_m(t) \rightharpoonup \mathbf{u}(t) \quad \text{débilmente en } H. \tag{1.52}$$

Una consecuencia es que

$$|\mathbf{u}(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|^2\, ds \le \liminf_{m\to+\infty} \left(|\mathbf{u}_m(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|\mathbf{u}_m(t)\|^2\, ds \right).$$

Por tanto, dado que $\mathbf{u}_{0m} \to \mathbf{u}_0$ en H,

$$|\mathbf{u}(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|^2\, ds \le |\mathbf{u}_0|^2 + \int_0^t \langle \mathbf{f}(s), \mathbf{u}(s)\rangle\, ds \tag{1.53}$$

para $t \in [0,T]$ c.p.d.

Esta última desigualdad, conocida como desigualdad de energía, es satisfecha por la solución $\mathbf{u}$ que proporciona el Teorema 1.2. Es una cuestión abierta saber si todas las soluciones débiles de (N-S) verifican la igualdad de energía, i.e. (1.53) con el primer miembro igual al segundo.

1.4. Unicidad ($n = 2$)

Cuando la dimensión del espacio es 2, la solución de (1.19)-(1.21) existe por el Teorema 1.2 y además es única.

Para probar esto, necesitamos algunos resultados previos.

Lema 1.5. *Supongamos* $n = 2$. *Entonces*

$$\|\boldsymbol{v}\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/4} |\boldsymbol{v}|^{1/2} \|\boldsymbol{v}\|^{1/2} \quad \forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^2. \tag{1.54}$$

Demostración:
Basta probar la desigualdad para $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)$. Prolongando $\mathbf{v}$ por 0 fuera de Ω, podemos escribir,

$$|\mathbf{v}(x)|^2 = 2 \int_{-\infty}^{x_1} \mathbf{v}(\xi_1, x_2) D_1 \mathbf{v}(\xi_1, x_2)\, d\xi_1$$

y así

$$|\mathbf{v}(x)|^2 \leq 2 w_1(x_2), \tag{1.55}$$

donde

$$w_1(x_2) := \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{v}(\xi_1, x_2)||D_1 \mathbf{v}(\xi_1, x_2)|\, d\xi_1. \tag{1.56}$$

De la misma manera,

$$|\mathbf{v}(x)|^2 \leq 2 w_2(x_1), \tag{1.57}$$

donde

$$w_2(x_1) := \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{v}(x_1, \xi_2)||D_2\mathbf{v}(x_1, \xi_2)|\, d\xi_2. \tag{1.58}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{v}(x)|^4\, dx &\leq 4\int_{\mathbb{R}^2} w_1(x_2)w_2(x_1)\, dx \\
&\leq 4\left(\int_{-\infty}^{+\infty} w_1(x_2)\, dx_2\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} w_2(x_1)\, dx_1\right) \\
&\leq 4|\mathbf{v}|^2|D_1\mathbf{v}||D_2\mathbf{v}| \\
&\leq 2|\mathbf{v}|^2\|\mathbf{v}\|^2.
\end{aligned}$$

□

Lema 1.6. *Supongamos que $n = 2$. Entonces*

$$|b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leq 2^{1/2}|\boldsymbol{u}|^{1/2}\|\boldsymbol{u}\|^{1/2}\|\boldsymbol{v}\||\boldsymbol{w}|^{1/2}\|\boldsymbol{w}\|^{1/2}, \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in H_0^1(\Omega)^2. \tag{1.59}$$

Por otra parte, si $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)$, tenemos que $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \in L^2(0,T;V')$ y

$$\|B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})\|_{L^2(0,T;V')} \leq 2^{1/2}\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(0,T;H)}\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(0,T;V)}. \tag{1.60}$$

Demostración:

Aplicando la desigualdad de Hölder con tres factores, encontramos:

$$\begin{aligned}
|b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| &\leq \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega |u_i(D_i v_j)w_j|\, dx \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{2} \|u_i\|_{L^4(\Omega)}|D_i v_j|\|w_j\|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq \left(\sum_{i,j=1}^{2} |D_i v_j|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{2} \|u_i\|^2_{L^4(\Omega)}\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{2} \|w_j\|^2_{L^4(\Omega)}\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Por (1.54),

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{L^4(\Omega)}^2 &\leq 2^{1/2} \sum_{i=1}^{2} (|u_i| \|u_i\|) \\ &\leq 2^{1/2} |\mathbf{u}| \|\mathbf{u}\|.\end{aligned}$$

Con una desigualdad similar para $\mathbf{w}$, conseguimos (1.59).

Por otra parte, si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ están en el espacio V, se cumple que

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})$$

Luego, se tiene la siguiente estimación:

$$|b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq 2^{1/2} |\mathbf{u}|^{1/2} \|\mathbf{u}\|^{1/2} |\mathbf{v}|^{1/2} \|\mathbf{v}\|^{1/2} \|\mathbf{w}\| \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V. \tag{1.61}$$

En particular, tomando $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, vemos que

$$|b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq 2^{1/2} |\mathbf{u}| \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \tag{1.62}$$

y así,

$$\|B(\mathbf{u}, \mathbf{u})\|_{V'} \leq 2^{1/2} |\mathbf{u}| \|\mathbf{u}\| \quad \forall \mathbf{u} \in V. \tag{1.63}$$

Si ahora $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; H)$, $B(\mathbf{u}, \mathbf{u})(t)$ pertenece a V' para casi todo t y deducimos (1.60).

$\square$

Ahora podemos presentar el resultado principal de esta sección:

Teorema 1.3. *Si $n = 2$, la solución débil de (N-S) que proporciona el Teorema 1.2 es única. Además, dicha solución es igual c.p.d. a una función continua de $[0, T]$ en H y*

$$\boldsymbol{u}(t) \to \boldsymbol{u}_0 \quad \text{en } H, \ \text{cuando } t \to 0^+. \tag{1.64}$$

Demostración:

(I) Probaremos primero la continuidad de $\mathbf{u} : [0,T] \mapsto H$.

Por (1.20) y el Lema 1.6,

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{f} - \nu A\mathbf{u} - B(\mathbf{u},\mathbf{u})$$

y como cada término de la derecha pertenece a $L^2(0,T;V')$, $\mathbf{u}_t$ pertenece al mismo espacio. Esta afirmación mejora (1.19):

$$\mathbf{u}_t \in L^2(0,T;V'). \tag{1.65}$$

Por el Lema 1.2 del Capítulo III de [21], se tiene directamente que

$$\mathbf{u} \in \mathcal{C}^0([0,T];H). \tag{1.66}$$

De hecho, este resultado afirma que toda función $\mathbf{u} \in L^2(0,T;V)$ que verifica (1.65) es absolutamente continua de $[0,T]$ en H y

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)|^2 = 2\langle \mathbf{u}_t(t), \mathbf{u}(t)\rangle \quad \textit{c.p.d.} \text{ en } [0,T]. \tag{1.67}$$

(II) Unicidad.

Supongamos $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ soluciones de (1.19)-(1.21), y sea $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$. Sabemos que $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}$ satisfacen (1.65). Además,

$$\mathbf{u}_t + \nu A\mathbf{u} = -B(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1) + B(\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2), \tag{1.68}$$

$$\mathbf{u}(0) = 0. \tag{1.69}$$

Multiplicamos ahora (1.68) por $\mathbf{u}(t)$ en casi todo t. Usando (1.67), vemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)|^2 + 2\nu\|\mathbf{u}(t)\|^2 &= 2b(\mathbf{u}_2(t),\mathbf{u}_2(t),\mathbf{u}(t)) - 2b(\mathbf{u}_1(t),\mathbf{u}_1(t),\mathbf{u}(t)) \\ &= -2b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}_2(t),\mathbf{u}(t)). \end{aligned} \tag{1.70}$$

Por (1.59), podemos acotar el miembro de la derecha como sigue:

$$2^{3/2}|\mathbf{u}(t)|\|\mathbf{u}(t)\|\|\mathbf{u}_2(t)\| \leq 2\nu\|\mathbf{u}(t)\|^2 + \frac{1}{\nu}|\mathbf{u}_2(t)|^2\|\mathbf{u}_2(t)\|^2.$$

Luego

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)|^2 \leq \frac{1}{\nu}|\mathbf{u}(t)|^2\|\mathbf{u}_2(t)\|^2.$$

Ahora, como la función $t \mapsto \|\mathbf{u}_2(t)\|^2$ es integrable, obtenemos que

$$\frac{d}{dt}\left\{\exp\left(-\frac{1}{\nu}\int_0^t \|\mathbf{u}_2(s)\|^2\,ds\right)\cdot|\mathbf{u}(t)|^2\right\} \leq 0.$$

Integrando y aplicando (1.69), encontramos que

$$|\mathbf{u}(t)|^2 \leq 0 \quad \forall t \in [0,T],$$

de donde $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$.

□

Como consecuencia de (1.54), obtenemos:

Corolario 1.1. *Supongamos que $n = 2$, Entonces la única solución débil de (N-S) satisface*

$$\boldsymbol{u} \in L^4(Q)^2 \tag{1.71}$$

Observación 1.3. (I) Los argumentos utilizados en el Teorema y el Corolario 1.1 también son válidos cuando el abierto Ω no es acotado.

(II) Cuando $n = 2$, las soluciones débiles verifican la igualdad de energía. En efecto, basta tener en cuenta (1.67) y la igualdad $\mathbf{u}_t = \mathbf{f} - A\mathbf{u} - B(\mathbf{u},\mathbf{u})$ e integrar en tiempo.

1.5. Unicidad ($n = 3$)

En el caso tridimensional, sólo es posible demostrar algunos resultados parciales de unicidad que por otra parte muestran la relación existente entre regularidad y unicidad de solución.

En vez del Lema 1.5, tenemos ahora:

Lema 1.7. *Supongamos que $n = 3$. Entonces*

$$\|\boldsymbol{v}\|_{L^4(\Omega)} \leq C|\boldsymbol{v}|^{1/4}\|\boldsymbol{v}\|^{3/4} \quad \forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^3. \tag{1.72}$$

Demostración:

Dado que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ con inyección continua, tenemos que, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{L^4(\Omega)}^4 &= \int_\Omega |\varphi|^4\,dx = \int_\Omega |\varphi|^3 \cdot |\varphi|\,dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |\varphi|^6\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\varphi|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\|\nabla\varphi\|^3|\varphi|.
\end{aligned}$$

Por densidad, conseguimos entonces (1.72).

□

Teorema 1.4. *Sea $n = 3$. La solución débil de (N-S) que proporciona el Teorema 1.2 satisface las siguientes propiedades:*

$$\boldsymbol{u} \in L^{8/3}(0, T; L^4(\Omega)), \tag{1.73}$$

$$\boldsymbol{u}_t \in L^{4/3}(0, T; V'). \tag{1.74}$$

Demostración: Por el Lema 1.7, para casi todo $t \in (0, T)$ tenemos

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L^4(\Omega)} \leq C|\mathbf{u}(t)|^{1/4}\|\mathbf{u}(t)\|^{3/4}. \tag{1.75}$$

La función que aparece a la derecha de (1.75) pertenece a $L^{8/3}(0, T)$. Por lo tanto, también le ocurre esto a $\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)}$.

Por la desigualdad de Hölder y las propiedades de la forma trilineal, observamos que

$$|b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v})| = |b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u})| \leq c_1 \|\mathbf{u}\|^2_{L^4(\Omega)} \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V. \tag{1.76}$$

Luego, si $\mathbf{u} \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T,H)$, entonces $B(\mathbf{u},\mathbf{u}) \in L^{4/3}(0,T;V')$ y, además,

$$\|B(\mathbf{u},\mathbf{u})(t)\|_{V'} \leq C \|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^4(\Omega)}, \tag{1.77}$$

$$\|B(\mathbf{u},\mathbf{u})(t)\|_{V'} \leq C |\mathbf{u}(t)|^{1/2} \|\mathbf{u}(t)\|^{3/2} \tag{1.78}$$

para t c.p.d. en $[0,T]$.

□

Ahora enunciaremos un resultado de unicidad de solución débil regular, es decir, dentro de una clase de funciones más pequeña que aquélla en la que obteníamos existencia:

Teorema 1.5. *Supongamos $n = 3$. Hay a lo más una solución débil de (N-S) que verifica:*

$$\boldsymbol{u} \in L^8(0,T;L^4(\Omega)^3). \tag{1.79}$$

Tal solución es, además continua, de $[0,T]$ en H.

Demostración:

(i) Sea $\mathbf{u}$ una solución débil de (N-S). Sabemos que $\mathbf{u} \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$. De las desigualdades (1.76),(1.77) sabemos también que si $\mathbf{u}$ satisface (1.79), entonces

$$B(\mathbf{u},\mathbf{u}) \in L^2(0,T;V') \quad \text{(al menos)}, \tag{1.80}$$

de donde

$$\mathbf{u}_t \in L^2(0,T;V'). \tag{1.81}$$

Luego, $\mathbf{u}$ es en casi todo igual a una función de $\mathcal{C}^0(0,T;H)$ por el Lema 1.2 del Capítulo III de [21].

(II) Por la desigualdad de Hölder y por (1.72), vemos ahora que

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v})| &\leq C\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)}\|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)}\|\mathbf{u}\| \\ &\leq C|\mathbf{u}|^{1/4}\|\mathbf{u}\|^{7/4}\|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.82}$$

(III) Veamos ahora la unicidad. Supongamos la existencia de dos soluciones débiles $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, que satisfacen además (1.79). Sea $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$.
Como $\mathbf{u}_t \in L^2(0,T;V')$

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)|^2 + 2\nu\|\mathbf{u}(t)\|^2 = 2b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{u}_2(t)). \tag{1.83}$$

Ahora podemos acotar el lado derecho de la igualdad utilizando (1.82):

$$2C|\mathbf{u}(t)|^{1/4}\|\mathbf{u}(t)\|^{7/4}\|\mathbf{u}_2(t)\|_{L^4(\Omega)} \leq \nu\|\mathbf{u}(t)\|^2 + C|\mathbf{u}(t)|^2\|\mathbf{u}_2(t)\|^8_{L^4(\Omega)}.$$

De esta manera conseguimos que

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)|^2 \leq C\|\mathbf{u}_2(t)\|^4_{L^4(\Omega)}|\mathbf{u}(t)|^2.$$

Como la función $t \mapsto |\mathbf{u}(t)|^8_{L^4(\Omega)}$ es integrable,

$$\frac{d}{dt}\left\{\exp\left(-c_2\int_0^t \|\mathbf{u}_2(s)\|^4_{L^4(\Omega)}\,ds\right)\cdot|\mathbf{u}(t)|^2\right\} \leq 0$$

y,

$$|\mathbf{u}(t)|^2 \leq 0 \quad \forall t \in [0,T],$$

de donde $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$.

$\square$

La prueba anterior también es válida para dominios $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ no acotados.

Observación 1.4. Se puede generalizar el Teorema 1.5: hay a lo más una solución débil de (N-S)

$$\mathbf{u} \in L^r(0,T;L^s(\Omega)) \quad \text{con } \frac{2}{r} + \frac{3}{s} \leq 1,\ s > 3.$$

Para la demostración, véase [16].

1.6. Soluciones más regulares

Bajo condiciones adicionales de los datos, es posible conseguir una mayor regularidad en las soluciones. En el caso tridimensional, debemos suponer además que los datos son suficientemente "pequeños" en un cierto sentido.

1.6.1. El caso $n = 2$

Teorema 1.6. *Supongamos que $n = 2$,*

$$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_t \in L^2(0,T;V'), \quad \boldsymbol{f}(0) \in H, \tag{1.84}$$

$$\boldsymbol{u}_0 \in H^2(\Omega)^2 \cap V. \tag{1.85}$$

Entonces la única solución débil de (N-S) que proporciona el Teorema 1.2 satisface

$$\boldsymbol{u}_t \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \tag{1.86}$$

(y,por tanto, $\boldsymbol{u} \in C^0([0,T];V)$).

Demostración:

(I) Volveremos de nuevo a las aproximaciones de Galerkin y probaremos nuevas estimaciones *a priori*:

$$\mathbf{u}_m' \text{ está acotada en } L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H). \tag{1.87}$$

Pasando al límite, conseguimos (1.86).

Como $\mathbf{u}_0 \in V \cap H^2(\Omega)$, podemos elegir $\mathbf{u}_{0m}$ como imagen de $\mathbf{u}_0$ mediante la proyección de $V \cap H^2(\Omega)$ sobre el espacio generado por la base de la aproximación de Galerkin $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$. Entonces,

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{0m} \to \mathbf{u}_0 \text{ en } H^2(\Omega), \\ \|\mathbf{u}_{0m}\|_{H^2(\Omega)} \le \|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\Omega)}. \end{cases} \tag{1.88}$$

(ii) Multiplicamos (1.24) por $g'_{jm}(t)$ y sumamos desde $j = 1$ hasta m:

$$|\mathbf{u}'_m(t)|^2 + \nu((\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}'_m(t))) + b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}'_m(t)) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}'_m(t)\rangle.$$

En particular, para el tiempo inicial $t = 0$, tenemos

$$|\mathbf{u}'_m(0)|^2 = (\mathbf{f}(0), \mathbf{u}'_m(0)) + \nu(\Delta \mathbf{u}_{0m}, \mathbf{u}'_m(0)) - b(\mathbf{u}_{0m}, \mathbf{u}_{0m}, \mathbf{u}'_m(0)). \quad (1.89)$$

Así que

$$|\mathbf{u}'_m(0)| \leq |\mathbf{f}(0)| + \nu|\Delta \mathbf{u}_{0m}| + |B(\mathbf{u}_{0m}, \mathbf{u}_{0m})|. \quad (1.90)$$

De (1.88) se deduce que

$$|\Delta \mathbf{u}_{0m}| \leq C_0 \|\mathbf{u}_{0m}\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\Omega)}. \quad (1.91)$$

Por otra parte, tenemos por la desigualdad de Hölder que

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq C\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)} |\nabla \mathbf{u}|_{L^4(\Omega)} |\mathbf{v}| \\ &\leq C\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)} |\mathbf{v}| \text{ (por (1.54) y la desigualdad de Sobolev)} \\ &\quad \forall \mathbf{u} \in H^2(\Omega)^2,\ \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2. \end{aligned}$$

En particular,

$$\begin{aligned} |B(\mathbf{u}_{0m}, \mathbf{u}_{0m})| &\leq C\|\mathbf{u}_{0m}\| \|\mathbf{u}_{0m}\|_{H^2(\Omega)} && (1.92) \\ &\leq C\|\mathbf{u}_0\|^2_{H^2(\Omega)} \quad \text{por (1.110)} && (1.93) \end{aligned}$$

Con esto y (1.91), vemos que

$$\mathbf{u}'_m(0) \text{ está uniformemente acotada en } H. \quad (1.94)$$

(III) Ahora podemos derivar (1.24) respecto de t. Utilizando la hipótesis (1.84) sobre $\mathbf{f}$, conseguimos

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_m'', \mathbf{w}_j) + \nu((\mathbf{u}_m', \mathbf{w}_j)) + b(\mathbf{u}_m', \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_j) + b(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m', \mathbf{w}_j)& \\ = \langle \mathbf{f}_t, \mathbf{w}_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, m.& \end{aligned} \tag{1.95}$$

Multiplicamos ahora por $g_{jm}'(t)$ y sumamos de nuevo en j:

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}|\mathbf{u}_m'(t)|^2 + 2\nu\|\mathbf{u}_m'(t)\|^2 + 2b(\mathbf{u}_m'(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m'(t))& \\ = \langle \mathbf{f}_t, \mathbf{w}_j \rangle.&\end{aligned} \tag{1.96}$$

Por el Lema 1.6,

$$\begin{aligned}2|b(\mathbf{u}_m'(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m'(t))| &\leq 2^{3/2}|\mathbf{u}_m'(t)|\|\mathbf{u}_m'(t)\|\|\mathbf{u}_m(t)\| \\ &\leq \nu\|\mathbf{u}_m'(t)\|^2 + \frac{2}{\nu}\|\mathbf{u}_m(t)\|^2|\mathbf{u}_m'(t)|^2.\end{aligned}$$

Sustituyendo en (1.96), vemos que

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m'(t)|^2 + \frac{\nu}{2}\|\mathbf{u}_m'(t)\|^2 \leq \frac{2}{\nu}|\mathbf{f}_t(t)|_{V'}^2 + \phi_m(t)|\mathbf{u}_m'(t)|^2 \tag{1.97}$$

donde

$$\phi_m(t) := \frac{2}{\nu}\|\mathbf{u}_m(t)\|^2.$$

Entonces, por la desigualdad de Gronwall,

$$\frac{d}{dt}\left\{|\mathbf{u}_m'(t)|^2 \exp\left(-\int_0^t \phi_m(s)\, ds\right)\right\} \leq \frac{2}{\nu}|\mathbf{f}_t(t)|_{V'}^2.$$

Luego, sin más que integrar,

$$|\mathbf{u}_m'(t)|^2 \leq \{|\mathbf{u}_m'(0)|^2 + \frac{2}{\nu}\int_0^t |\mathbf{f}_t(s)|_{V'}^2\, ds\} \exp\int_0^t \phi_m(s)\, ds. \tag{1.98}$$

Como $\mathbf{u}_m$ está acotada en $L^2(0,T;V)$, por (1.94), el lado derecho de (1.98) también está uniformemente acotado y

$$\mathbf{u}_m' \text{ está uniformemente acotada en } L^\infty(0,T;H). \tag{1.99}$$

Ahora se deduce usando de nuevo (1.97), que $\mathbf{u}'_m$ está también acotada en $L^2(0,T;V)$, lo que completa la prueba.

$\square$

Teorema 1.7. *Bajo las hipótesis del Teorema 1.6, si, además, Ω es de clase $\mathcal{C}^2$ y*

$$\boldsymbol{f} \in L^\infty(0,T;H), \tag{1.100}$$

entonces

$$\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)^2). \tag{1.101}$$

Demostración:

(I) Podemos escribir que

$$\nu((\mathbf{u}(t),\mathbf{v})) = (\mathbf{g}(t),\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \tag{1.102}$$

donde

$$\mathbf{g}(t) := \mathbf{f}(t) - \mathbf{u}_t(t) - B(\mathbf{u},\mathbf{u})(t). \tag{1.103}$$

La prueba ahora se basa en los resultados de regularidad para el problema de *Stokes* estacionario (véase la Proposición 1.2.2 de [21]).

(II) Como $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;V)$ y

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v})| &\leq C\|\mathbf{u}(t)\|_{L^4(\Omega)}\|\mathbf{u}(t)\|\|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq C_1\|\mathbf{u}(t)\|^2\|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)}, \end{aligned} \tag{1.104}$$

se tiene que $B(\mathbf{u},\mathbf{u}) \in L^\infty(0,T;L^{4/3}(\Omega)^2)$. Como, $\mathbf{f} - \mathbf{u}_t \in L^\infty(0,T;H)$, obtenemos que

$$\mathbf{g} \in L^\infty(0,T;L^{4/3}(\Omega)^2). \tag{1.105}$$

El resultado en [21] implica que

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;W^{2,4/3}(\Omega)^2).$$

Por el Teorema de Inyección de Sobolev, $W^{2,4/3}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ (con inyección compacta) y, por lo tanto,

$$\mathbf{u} \in L^\infty(Q)^2.$$

(En realidad, tenemos $W^{2,p} \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ con inyección compacta para todo $p > 1$).

(iii) El resultado (1.105) puede mejorarse. Reemplazamos ahora (1.104) por la siguiente desigualdad

$$|b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v})| \leq C_2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(Q)} \|\mathbf{u}(t)\| |\mathbf{v}|.$$

De esta manera, $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \in L^\infty(0, T; H)$, lo que implica $\mathbf{g} \in L^\infty(0, T; H)$ y, aplicando de nuevo el resultado de [21],

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)^2).$$

□

Observación 1.5. Aplicando sucesivamente la Proposición ya citada de [21], puede probarse que, si Ω es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^\infty(Q)$, entonces $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega} \times (0, T])^2$. Efectivamente, cuanto más exigentes sean las hipótesis sobre los datos, mayor será la regularidad obtenida para $\mathbf{u}$.

1.6.2. El caso $n = 3$

Probaremos para $n = 3$ resultados similares al caso bidimensional, aunque siempre con hipótesis adicionales de "datos pequeños".

Teorema 1.8. *Supongamos $n = 3$. Sean $\boldsymbol{u}_0$ y $\boldsymbol{f}$ tales que*

$$\boldsymbol{u}_0 \in H^2(\Omega)^3 \cap V, \tag{1.106}$$

$$\boldsymbol{f} \in L^\infty(0,T;H), \quad \boldsymbol{f}_t \in L^1(0,T;H) \tag{1.107}$$

y $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{f}_t$ son suficientemente pequeñas en $H^2(\Omega)^3$, $L^\infty(0,T;H)$ y $L^1(0,T;H)$, respectivamente.

Entonces existe una única solución débil de (N-S), que además verifica

$$\boldsymbol{u}_t \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H). \tag{1.108}$$

Demostración:

(I) La unicidad es una consecuencia directa del Teorema 1.5, puesto que $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;V)$. Como $V \hookrightarrow L^4(\Omega)^3$ (con inyección compacta), esto implica

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;L^4(\Omega)^3). \tag{1.109}$$

(II) De nuevo, nos apoyamos en el método de aproximación de Galerkin, eligiendo las $\mathbf{u}_{0m}$ tales que

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{0m} \to \mathbf{u}_0, & \text{en } H^2(\Omega)^3, \\ \|\mathbf{u}_{0m}\|_{H^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\Omega)}. \end{cases} \tag{1.110}$$

De (1.24) se deducen las siguientes estimaciones:

$$|\nabla \mathbf{u}_{0m}| \leq C\|\mathbf{u}_{0m}\|_{H^2} \leq C\|\mathbf{u}_0\|_{H^2}$$

$$\mathbf{u}'_m(0) \text{ está uniformemente acotada en } H.$$

Luego

$$|\mathbf{u}'_m(0)| \leq d_1 := |\mathbf{f}(0)| + \nu C\|\mathbf{u}_0\|_{H^2} + C\|\mathbf{u}_0\|^2_{H^2}. \tag{1.111}$$

Si derivamos respecto de t las igualdades (1.24), multiplicamos por $g'_{jm}(t)$ y sumamos en j, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\mathbf{u}'_m(t)|^2 + 2\nu\|\mathbf{u}'_m(t)\|^2 + 2b(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}'_m(t)) \\ = 2\langle \mathbf{f}_t(t), \mathbf{u}'_m(t)\rangle. \end{aligned} \tag{1.112}$$

Luego,

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}'_m(t)|^2 + 2(\nu - C\|\mathbf{u}_m(t)\|)\|\mathbf{u}'_m(t)\|^2 \leq 2|\mathbf{f}_t(t)||\mathbf{u}'_m(t)|. \tag{1.113}$$

(III) Ahora, resulta de (1.31) y (1.32) que

$$\begin{aligned} \nu\|\mathbf{u}_m(t)\|^2 &\leq \frac{1}{\nu}\|\mathbf{f}(t)\|^2_{V'} - 2(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}'_m(t)) \qquad (1.114) \\ &\leq \frac{1}{\nu}\|\mathbf{f}(t)\|^2_{V'} + 2|\mathbf{u}_m(t)||\mathbf{u}'_m(t)| \\ &\leq \frac{\|\mathbf{f}\|^2_{L^\infty(0,T;V')}}{\nu} + 2\left(|\mathbf{u}_0|^2 + \frac{T\|\mathbf{f}\|^2_{L^\infty(0,T;V')}}{\nu}\right)^{1/2} |\mathbf{u}'_m(t)| \end{aligned}$$

Por (1.111) y usando (1.114) en el tiempo $t = 0$,

$$\nu\|\mathbf{u}_m(0)\|^2 \leq \frac{d_2}{\nu} + 2d_1\left(|\mathbf{u}_0|^2 + \frac{Td_2}{\nu}\right)^{1/2} = d_3. \tag{1.115}$$

donde

$$d_2 := \|\mathbf{f}\|^2_{L^\infty(0,T;V')}.$$

La condición que necesitamos ahora y que fue mencionada en las hipótesis del teorema es que se tenga

$$d_4 := \frac{d_2}{\nu} + (1+d_1^2)\left(|\mathbf{u}_0|^2 + \frac{Td_2}{v}\right)^{1/2} \cdot \exp\left(\int_0^T |\mathbf{f}_t(t)|\, ds\right) < \frac{\nu^3}{c^2}. \quad (1.116)$$

Como $d_3 \le d_4$, de las dos últimas desigualdades obtenemos que:

$$\nu\|\mathbf{u}_m(0)\|^2 \le d_3 \le d_4 < \frac{\nu^3}{c^2}$$

y, por lo tanto,

$$\nu - c\|\mathbf{u}_m(0)\| > 0.$$

De esto último podemos deducir que la cantidad $\nu - c\|\mathbf{u}_m(t)\|$ es positiva en algún intervalo de la forma $[0, t^*]$.

Denotaremos por T_m el primer tiempo (menor que T), en el que la diferencia se hace cero, y si eso no ocurre, tomaremos $T_m = T$. Entonces

$$\nu - c\|\mathbf{u}_m(t)\| \ge 0, \quad 0 \le t \le T_m. \quad (1.117)$$

(IV) Con (1.117), podemos deducir de (1.113) que

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}'_m(t)|^2 \le 2|\mathbf{f}_t(t)||\mathbf{u}'_m(t)|,$$
$$\frac{d}{dt}(1 + |\mathbf{u}'_m(t)|^2) \le |\mathbf{f}_t(t)|(1 + |\mathbf{u}'_m(t)|^2).$$

Luego

$$\frac{d}{dt}\left\{(1 + |\mathbf{u}'_m(t)|^2)\exp\left(-\int_0^t |\mathbf{f}_t(s)|\, ds\right)\right\} \le 0,$$
$$1 + |\mathbf{u}'_m(t)|^2 \le (1 + |\mathbf{u}'(0)|^2)\exp\left(\int_0^t |\mathbf{f}_t(s)|\, ds\right),$$

y, por la desigualdad en (1.111),

$$1 + |\mathbf{u}_m'(t)|^2 \leq (1 + d_1^2) \exp\left(\int_0^T |\mathbf{f}_t(s)|\, ds \right), \quad t \in [0, T_m]. \tag{1.118}$$

De (1.114), (1.116), (1.118), conseguimos:

$$\begin{aligned} \nu \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 \leq d_4, \quad 0 \leq t \leq T_m, \\ \nu - c\|\mathbf{u}_m(t)\| \geq \nu - c\sqrt{\tfrac{d_4}{\nu}} > 0, \quad 0 \leq t \leq T_m. \end{aligned} \tag{1.119}$$

Luego $T = T_m$ y (1.113) implica que

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m'(t)|^2 + 2\left(\nu - c\sqrt{\frac{d_4}{\nu}}\right)\|\mathbf{u}_m'(t)\|^2 \leq 2|\mathbf{f}_t(t)||\mathbf{u}_m'(t)|, \quad 0 \leq t \leq T.$$

De esto se deduce que

$$\mathbf{u}_m' \text{ está uniformemente acotada de } L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H). \tag{1.120}$$

Y se tiene finalmente la regularidad deseada de $\mathbf{u}$.

$\square$

Como en el caso bidimensional, también se obtiene lo siguiente:

Teorema 1.9. *Bajo las hipótesis del Teorema 1.8, si además Ω es un abierto de clase $\mathcal{C}^2$, entonces:*

$$\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)^3). \tag{1.121}$$

Demostración: Partimos de nuevo de las igualdades

$$\nu((\mathbf{u}(t), \mathbf{v})) = (\mathbf{g}(t), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u} \in V,$$

donde $\mathbf{g}(t) := \mathbf{f}(t) - \mathbf{u}_t(t) - B(\mathbf{u}, \mathbf{u})(t)$.

Como $\mathbf{f} - \mathbf{u}_t$ pertenece a $L^\infty(0,T;H)$, por la Proposición 1.2.2 de [21] se tiene (1.121) siempre que $B(\mathbf{u},\mathbf{u}) \in L^\infty(0,T;H)$. Y, por lo tanto, $\mathbf{g}$ también está en ese espacio de funciones.

Por la desigualdad de Hölder,

$$|b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v})| \leq C\|\mathbf{u}(t)\|_{L^6}\|\mathbf{u}(t)\||\mathbf{v}|_{L^3}$$

$$|b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v})| \leq C\|\mathbf{u}(t)\|^2|\mathbf{v}|_{L^3} \tag{1.122}$$

Como $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;V)$, se deduce de (1.122) que

$$B(\mathbf{u},\mathbf{u}) \in L^\infty(0,T;L^{3/2}(\Omega)^3), \quad \mathbf{g} \in L^\infty(0,T;L^{3/2}(\Omega)^3).$$

De nuevo, por el mismo resultado utilizado en el caso bilineal, $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;W^{2,3/2}(\Omega)^3)$ y por tanto $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;L^r(\Omega)^3)$ para todo $r \in [1,+\infty)$ ($W^{2,3/2}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, con inyección continua para $n=3$).

En particular, $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;L^8(\Omega)^3)$ y, usando nuevamente la desigualdad de Hölder,

$$|b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v})| \leq C\|\mathbf{u}(t)\|_{L^8}\|\mathbf{u}(t)\|\|\mathbf{v}\|_{L^{8/3}}$$

de donde,

$$B(\mathbf{u},\mathbf{u}), \mathbf{g} \in L^\infty(0,T;L^{8/3}(\Omega)^3),$$

y la Proposición 1.2.2 muestra que

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;W^{2,8/5}(\Omega)^3) \hookrightarrow L^\infty(Q)^3 \tag{1.123}$$

(con inyección continua). $\square$

Es el momento de introducir de nuevo la presión p. Para ello, definimos

$$\mathbf{U}(t) := \int_0^t \mathbf{u}(s)\,ds, \quad \beta(t) := \int_0^t B(\mathbf{u},\mathbf{u})(s)\,ds, \quad \mathbf{F}(t) := \int_0^t \mathbf{f}(s)\,ds.$$

Si $\mathbf{u}$ es una solución del problema (1.2) entonces,

$$\mathbf{U}, \beta, \mathbf{F} \in \mathcal{C}^0([0,T];V'). \tag{1.124}$$

Integrando ahora (1.20),

$$\nu((\mathbf{U}(t),\mathbf{v})) = \langle \mathbf{g}(t), \mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in V,\ \forall t \in [0,T], \tag{1.125}$$

donde

$$\mathbf{g}(t) := \mathbf{F}(t) - \beta(t) - \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{g} \in \mathcal{C}^0([0,T];V').$$

A continuación, se presentan dos resultados importantes cuyas demostraciones pueden consultarse por ejemplo en [21]:

Proposición 1.1 (De Rham)**.** *Sea* $\boldsymbol{f} = \{f_1,\ldots,f_n\}$*, con* $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *para todo* i*. Entonces:*

$$< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} >= 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V} \Leftrightarrow \boldsymbol{f} = \nabla p, \quad p \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Proposición 1.2. *Sea* $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$*.*

(I) *Si* $\partial_i p \in L^2(\Omega)$ *para todo* i*, entonces* $p \in H^1(\Omega)$ *y*

$$\|p\|_{H^1/\mathbb{R}} \leq C|\nabla p|_{L^2}.$$

(II) *Si* $\partial_i p \in H^{-1}(\Omega)$ *para todo* i*, entonces* $p \in L^2(\Omega)$ *y*

$$|p|_{L^2/\mathbb{R}} \leq C\|\nabla p\|_{H^{-1}}.$$

(III) *El operador gradiente* $p \mapsto \nabla p$ *es un isomorfismo de* $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ *sobre* $H^{-1}(\Omega)^n$*.*

Deducimos que, para cada $t \in [0,T]$, existe una función $P(t) \in L^2(\Omega)$ tal que:

$$-\nu \Delta \mathbf{U}(t) + \nabla P(t) = \mathbf{g}(t)$$

o, equivalentemente,

$$\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0(t) - \nu \Delta \mathbf{U}(t) + \beta(t) + \nabla P(t) = \mathbf{F}(t) \tag{1.126}$$

Luego $\nabla P = \mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{u}$ y por tanto $\nabla P \in \mathcal{C}^0([0,T]; H^{-1}(\Omega))$. Esto implica

$$P \in \mathcal{C}^0([0,T]; L^2(\Omega)). \tag{1.127}$$

Esto nos permite derivar la identidad (1.126) en el sentido de las distribuciones en $Q = \Omega \times (0,T)$. Denotando

$$p = \frac{\partial P}{\partial t},$$

obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i D_i \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \qquad \text{en } Q. \tag{1.128}$$

Como hemos visto, la presión aparece en el sistema como una distribución en Q. En general, sólo puede afirmarse que $p = \frac{\partial P}{\partial t}$, con $P \in \mathcal{C}^0([0,T]; L^2(\Omega))$. En las condiciones de los Teoremas 1.7 y 1.9, puede demostrarse que

$$p \in L^\infty(0,T; H^1(\Omega)). \tag{1.129}$$

1.7. Relación entre la existencia y la unicidad

En las anteriores secciones hemos encontrado las dos cuestiones más importantes que aparecen en el análisis teórico de las ecuaciones de *Navier-Stokes*:

- Unicidad de solución débil, cuya existencia está garantizada por el Teorema 1.2.
- Existencia de solución regular para datos más regulares. Por ejemplo, soluciones cuya existencia es tratada en el Teorema 1.5, o casos particulares en el Teorema 1.8.

Supongamos que $n = 3$.

De acuerdo con lo que hemos visto, toda solución débil de (N-S) verifica

$$\mathbf{u} \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H). \tag{1.130}$$

Así, cuando $n = 3$,

$$\mathbf{u} \in L^{8/3}(0,T;L^4(\Omega)^3), \quad \mathbf{u}_t \in L^{4/3}(0,T;V') \tag{1.131}$$

En lo que sigue, llamaremos solución fuerte de (N-S) a toda solución débil que además verifica

$$\mathbf{v} \in L^8(0,T;L^4(\Omega)^3). \tag{1.132}$$

La existencia de solución débil es conocida, pero la unicidad de la misma es un problema aún sin resolver. En cuanto a las soluciones fuertes, su existencia para datos no necesariamente pequeños es un problema abierto salvo en algunos casos muy concretos.

Las soluciones débiles tratadas en el Teorema 1.2 satisfacen la siguiente desigualdad de energía,

$$|\mathbf{u}(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|^2 \, ds \le |\mathbf{u}_0|^2 + 2\int_0^t \langle \mathbf{f}(s), \mathbf{u}(s)\rangle \, ds, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{1.133}$$

Por el Teorema 1.5, (1.81), y el Lema 1.2 de [21], las soluciones fuertes, caso de existir, satisfacen en lugar de (1.133) la identidad:

$$|\mathbf{v}(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|\mathbf{v}(s)\|^2 \, ds = |\mathbf{u}_0|^2 + 2 \int_0^t \langle \mathbf{f}(s), \mathbf{v}(s) \rangle \, ds \quad \forall t \in [0,T]. \tag{1.134}$$

Un resultado parcial de unicidad de solución débil y existencia de solución fuerte puede formularse como sigue:

Teorema 1.10. *Supongamos que $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;H)$ y $\boldsymbol{u}_0 \in H$ son dadas. Entonces, si existe una solución fuerte (N-S) no existe ninguna otra solución débil de (N-S) que cumpla (1.133).*

Demostración: Sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$ las dos soluciones mencionadas anteriormente: $\mathbf{v}$ es solución débil y cumple (1.132) y (1.134); $\mathbf{u}$ es solución débil y por tanto verifica (1.130), (1.131) y (1.133).
Puede probarse lo siguiente:

Lema 1.8. *Para cada $t \in [0,T]$*

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)) + 2\nu \int_0^t ((\boldsymbol{u}(s), \boldsymbol{v}(s))) \, ds \\ = |\boldsymbol{u}_0|^2 + \int_0^t \langle \boldsymbol{f}(s), \boldsymbol{u}(s) + \boldsymbol{v}(s) \rangle \, ds - \int_0^t b(\boldsymbol{w}(s), \boldsymbol{w}(s), \boldsymbol{v}(s)) \, ds, \end{aligned} \tag{1.135}$$

donde $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$.

Ahora, sumaremos (1.133) y (1.134) y restaremos dos veces la cantidad que hay en (1.135). Así, conseguimos:

$$|\mathbf{w}(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|\mathbf{w}(s)\|^2 \, ds \leq 2 \int_0^t b(\mathbf{w}(s), \mathbf{w}(s), \mathbf{v}(s)) \, ds. \tag{1.136}$$

Usando la desigualdad de Hölder, y el Lema 1.7,

$$|b(\mathbf{w}(s), \mathbf{w}(s), \mathbf{v}(s))| \leq \nu |\mathbf{w}(s)|^2 + C|\mathbf{w}(s)|^2 \|\mathbf{v}(s)\|_{L^4}^8.$$

De (1.136), deducimos que

$$|\mathbf{w}(t)|^2 \leq C \int_0^t |\mathbf{w}(s)|^2 \|\mathbf{v}(s)\|_{L^4}^8 \, dx.$$

Como la función que a cada t le asocia $\|\mathbf{v}(t)\|_{L^4}^8$ es integrable, aplicando la desigualdad de Gronwall, resulta que

$$|\mathbf{w}(t)|^2 \leq C \int_0^t |\mathbf{w}(s)|^2 \|\mathbf{v}(s)\|_{L^4}^8 \, dx \leq 0,$$

por lo que $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$.

□

1.8. Sobre las bases del método de Galerkin

Es posible (y útil) usar una "base especial" de autofunciones $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots\}$. Esto permite obtener fácilmente algunas estimaciones "a priori" de la solución y deducir resultados de existencia de soluciones regulares.

En primer lugar, tenemos los resultados técnicos siguientes:

Lema 1.9. *Supongamos que Ω es un abierto de clase $\mathcal{C}^2$. Entonces $\boldsymbol{u} \mapsto |A\boldsymbol{u}|$ es una norma en $V \cap H^2(\Omega)^n$ equivalente a la norma inducida por $H^2(\Omega)^n$.*

Lema 1.10. *Con las mismas hipótesis, si $\boldsymbol{u} \in V \cap H^2(\Omega)^n$, entonces*

$$B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \in \; H \subset \; L^2(\Omega)^n$$

y se tiene que

$$|B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})| \leq C \|\boldsymbol{u}\|^{3/2} |A\boldsymbol{u}|^{1/2}. \tag{1.137}$$

En consecuencia, obtenemos:

Teorema 1.11 ($n = 2$)**.** *Supongamos que $n = 2$ y Ω es un abierto de clase $\mathcal{C}^2$. Sean $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_0$ verificando*

$$\boldsymbol{u}_0 \in H, \tag{1.138}$$

$$\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;H). \tag{1.139}$$

Entonces existe una única solución débil de (N-S) que además verifica

$$\sqrt{t}\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;H^2(\Omega)^2) \cap L^\infty(0,T;V), \quad \sqrt{t}\boldsymbol{u}_t \in L^2(0,T;H). \tag{1.140}$$

Si $\boldsymbol{u}_0 \in V$, entonces

$$\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;H^2(\Omega)^2) \cap L^\infty(0,T;V), \quad \boldsymbol{u}_t \in L^2(0,T;H). \tag{1.141}$$

Teorema 1.12 ($n = 3$)**.** *Supongamos que $n = 3$ y Ω es un abierto de clase $\mathcal{C}^2$. Supongamos también que $\boldsymbol{u}_0 \in V$ y $\boldsymbol{f} \in L^\infty(0,T;H)$. Entonces, existe $T^* = \min\{T, T_1\}$, con*

$$T_1 = \frac{3}{4C_3\mu^2}, \tag{1.142}$$

$$\mu = 4\max\left(\|\boldsymbol{u}_0\|^2, \frac{2}{C_4\nu^2}N(\boldsymbol{f})\right), \quad N(\boldsymbol{f}) := \|\boldsymbol{f}\|_{L^\infty(0,T;H)} \tag{1.143}$$

y una única solución del problema fuerte de (N-S) en $(0,T^*)$. Además, $\boldsymbol{u}$ satisface:

$$\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T^*;V) \cap L^2(0,T^*;H^2(\Omega)^3), \tag{1.144}$$

$$\boldsymbol{u}_t \in L^2(0,T^*;H). \tag{1.145}$$

En el caso especial $\mathbf{f} = 0$, el fluido tiende al equilibrio cuando el tiempo va a infinito. Esto queda patente en el resultado siguiente:

Teorema 1.13. *Supongamos que $n = 3$ y Ω es un abierto de clase $\mathcal{C}^2$. Supongamos también que $\boldsymbol{u}_0 \in V$ y $\boldsymbol{f} = 0$. Entonces, existen T_2 y T_3 con $0 < T_2 \leq T_3 < +\infty$ tales que*

$$\boldsymbol{u} \in L^\infty(0, T_2; V), \quad \boldsymbol{u} \in L^\infty(T_3, +\infty; V).$$

Además, $\mathbf{u}(\cdot, t) \to 0$ en V cuando $t \to +\infty$.

Para las demostraciones de estos resultados, véase [21, 23].

Capítulo 2

Los resultados de Caffarelli, Kohn y Nirenberg

En el capítulo anterior se ha estudiado la existencia, unicidad y regularidad de las soluciones débiles del problema (N-S). Quedan varias cuestiones importantes sin resolver. Así, a pesar de los numerosos trabajos posteriores a *Hopf* y *Leray*, es desconocido si la solución débil puede desarrollar algún tipo de singularidad incluso si los datos iniciales son $\mathcal{C}^\infty$.

Son muchos los autores que han indagado en esta dirección. Entre otros, *Scheffer* y después *Caffarelli*, *Kohn* y *Nirenberg* estudiaron la regularidad parcial de las soluciones del sistema basándose en estimaciones del "tamaño" del conjunto de los puntos singulares, véase [3, 15, 19],

En este capítulo, recordaremos los resultados más importantes de estas referencias.

Consideraremos dos situaciones distintas:

(I) $\Omega = \mathbb{R}^3$.

(II) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto conexo acotado, con $\partial\Omega$ suficientemente regular.

Definición 2.1. Diremos que un punto (x, t) es singular si $\mathbf{u}$ no pertenece a L^∞ en ningún entorno de (x, t). El resto de puntos, donde la velocidad es localmente esencialmente acotada, serán llamados puntos regulares.

Denotaremos S el conjunto de puntos singulares.

En [19], *Scheffer*, fue capaz de probar una estimación de una medida de Hausdorff de S. Su resultado principal es el siguiente:

Teorema 2.1. *Para $f = 0$, existe una solución débil de (N-S) tal que el conjunto asociado de puntos singulares S satisface:*

$$\mathcal{H}^{5/3}(S) < +\infty, \tag{2.1}$$

$$\mathcal{H}^1(S \cap (\Omega \times \{t\})) < +\infty \quad \textit{uniformemente en } t, \tag{2.2}$$

donde $\mathcal{H}^k$ es la medida de Hausdorff $k-$dimensional en $\mathbb{R}^4$.

El objetivo principal de este capítulo es mostrar una mejora de este teorema. Para ello, es necesario definir un nuevo concepto de solución débil: *solución débil admisible.*

Definición 2.2. Sea $D \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ un abierto y sea $\mathbf{f} \in L^q(D)$ con $q > 5/2$ tal que $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$. Diremos que $(\mathbf{u}, p)$ es una solución débil admisible de (N-S) en D si:

1. $\mathbf{u}$ y p son medibles en D y verifican:

   (a) $p \in L^{5/4}(D)$,

   (b) Para alguna constante E_0 y para casi todo s tal que el conjunto $D_s := D \cap (\{t = s\}) \neq \emptyset$,

   $$\int_{D_s} |\mathbf{u}|^2 \, dx \leq E_0. \tag{2.3}$$

   (c) Para alguna constante E_1,

   $$\iint_D |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx \, dt \leq E_1. \tag{2.4}$$

2. *Ecuaciones:* $\mathbf{u}$ y p satisfacen las EDPs de (N-S) en el sentido de las distribuciones en D.

3. *Desigualdad de energía local:* Para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ con $\phi \geq 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} &2 \iint |\nabla \mathbf{u}|^2 \phi \, dx \, dt \\ \leq &\iint \left[|\mathbf{u}|^2 (\phi_t + \Delta\phi) + (|\mathbf{u}|^2 + 2p)\mathbf{u} \cdot \nabla\phi + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{f})\phi \right] \, dx \, dt \end{aligned} \tag{2.5}$$

La regularidad precedente de p es la mejor estimación conocida (como dato curioso, indiquemos que esta propiedad era desconocida por *Scheffer* y también por *Caffarelli*, *Kohn* y *Nirenberg* cuando publicaron sus resultados).

Scheffer probó que el problema de valores iniciales en $\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)$ tiene una solución débil admisible cuando $\mathbf{f} = 0$, $\mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ y $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$. En la sección siguiente, veremos que la existencia está garantizada en un caso aún más general.

2.1. Existencia de solución débil admisible

Haremos la construcción de las soluciones mediante "semi-discretización". La desigualdad de energía será obtenida a partir de las soluciones aproximadas, tomando límites adecuados. La mayor dificultad se encuentra a la hora de acotar la presión. Cuando el dominio es todo el espacio $\mathbb{R}^3$, basta usar una expresión de Δp. Pero si Ω no ocupa todo el espacio, hay que usar estimaciones de las soluciones de sistemas de *Stokes*:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \Delta\mathbf{u} + \nabla p = F, & \Omega \times (0,T), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \Omega \times (0,T), \\ \mathbf{u} = 0, & \partial\Omega \times (0,T), \\ \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x), & \Omega \end{cases} \tag{2.6}$$

Pondremos

$$D = \Omega \times (0,T),$$
$$E_0(\mathbf{u}) := \operatorname*{Ess\,Sup}_{0<t<T} \int_\Omega |\mathbf{u}|^2 \, dx \, dt,$$
$$E_1(\mathbf{u}) := \int_0^T \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx \, dt.$$

Cuando $\Omega = \mathbb{R}^3$, las hipótesis de los datos serán las siguientes:

$$\Omega = \mathbb{R}^3, \tag{2.7}$$
$$\mathbf{f} \in L^2(0,T; H^{-1}(\mathbb{R}^3)), \quad \nabla \cdot \mathbf{f} = 0, \tag{2.8}$$
$$\mathbf{u}_0 \in H. \tag{2.9}$$

Para Ω acotado, exigimos:

$$\begin{gathered} \Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ abierto conexo acotado localizado a un lado de la frontera,} \\ \partial\Omega \text{ suficientemente regular,} \end{gathered} \tag{2.10}$$

$$\mathbf{f} \in L^2(\Omega \times (0,T))^3, \quad \nabla \cdot \mathbf{f} = 0, \tag{2.11}$$
$$\mathbf{u}_0 \in H \cap W^{2/5,5/4}(\Omega)^3. \tag{2.12}$$

Con estas hipótesis, el resultado de existencia es el siguiente:

Teorema 2.2. *Supongamos que Ω, $\boldsymbol{u}_0$ y $\boldsymbol{f}$ verifican (2.7)-(2.9) o (2.10)-(2.12). Entonces existe al menos una solución débil admisible $(\boldsymbol{u}, p)$ del sistema de Navier-Stokes en D, con:*

$$\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H), \tag{2.13}$$
$$\boldsymbol{u}(t) \rightharpoonup \boldsymbol{u}_0 \text{ en } H, \text{ cuando } t \to 0, \tag{2.14}$$

$$\begin{gathered} p \in L^{5/3}(D) \text{ en el caso } \Omega = \mathbb{R}^3 \\ p \in L^{5/4}(D) \text{ en el caso } \Omega \text{ acotado} \end{gathered} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\{t\}} |\boldsymbol{u}|^2\phi\,dx + 2\int_0^t\!\!\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2\phi\,dx\,dt \leq \int_\Omega |\boldsymbol{u}_0|^2\phi(x,0)\,dx \\ + \int_0^t\!\!\int_\Omega \left[|\boldsymbol{u}|^2(\phi_t+\Delta\phi) + (|\boldsymbol{u}|^2+2p)\boldsymbol{u}\cdot\nabla\phi + 2(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u})\phi\right]\,dx\,dt\end{aligned} \tag{2.16}$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(\overline{D})$ *con* $\phi \geq 0$ *y* $\phi = 0$ *cerca de* $\partial\Omega \times (0,T)$.

Observación 2.1. 1. El caso $\mathbf{f} = 0$, $\Omega = \mathbb{R}^3$ fue probado por *Scheffer* en [19] usando un método parecido al que presentaremos a continuación.

2. Como no se sabe si la solución débil de (N-S) es única, tiene sentido preguntarse si se pueden construir soluciones débiles de (N-S) de modo distinto al que sigue de forma que se verifique la desigualdad local de energía (2.16). No se sabe, por ejemplo, si (2.16) se verifica para una solución obtenida a partir del método de *Galerkin*.

Para la demostración del Teorema 2.2, los pasos a seguir son los siguientes. Para un N suficientemente grande, definimos $\delta = T/N$, y encontramos $\mathbf{u} = \mathbf{u}_N$ y $p = P_N$ verificando

$$\mathbf{u}_t + (\Psi_\delta(\mathbf{u})\cdot\nabla)\,\mathbf{u} - \Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \quad \text{en } D \tag{2.17}$$

donde $\Psi_\delta(\mathbf{u})$ es una función que "regulariza" $\mathbf{u}$, cuya expresión se indicará más adelante; en particular, se verá que el valor de $\Psi_\delta(\mathbf{u})$ en el tiempo $t = \bar{t}$ dependerá sólo de los valores de $\mathbf{u}$ para $t \leq \bar{t} - \delta$.

Para cada N y cada $m = 0, 1, \ldots, N-1$, (2.17) es una ecuación lineal en $\Omega \times (m\delta, (m+1)\delta)$. Veremos que la solución de (2.17) satisface una desigualdad del tipo (2.16) y así podremos acotar $\mathbf{u}_N$ y p_N independientemente de N. Estas estimaciones asegurarán la existencia de una subsucesión convergente cuyo límite tiene las propiedades deseadas.

Necesitaremos los siguientes resultados preliminares:

Lema 2.1. *Supongamos* $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V')$, $\boldsymbol{u}_0 \in H$ *y* $\boldsymbol{w} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{D};\mathbb{R}^3)$, *con* $\nabla\cdot\ \boldsymbol{w} = 0$. *Entonces existe un único par* $(\boldsymbol{u},p)$ *verificando:*

$$\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}^0([0,T],H) \cap L^2(0,T;V), \quad p \in \mathcal{D}'(\Omega) \tag{2.18}$$

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{w}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \Delta\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{2.19}$$

en el sentido de las distribuciones en D, *y*

$$\boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0. \tag{2.20}$$

Lema 2.2. *Supongamos que* Ω, $\boldsymbol{f}$ *y* $\boldsymbol{u}_0$ *verifican (2.7)-(2.9). Entonces, bajo las hipótesis del Lema 2.1, la presión* p *satisface*

$$\Delta p = -\sum_{i,j} \nabla_{ij}(\boldsymbol{w}^i\boldsymbol{u}^j), \tag{2.21}$$

de donde

$$\iint_D |p|^{5/3}\,dx\,dt \leq C\iint_D |\boldsymbol{w}|^{5/3}\cdot|\boldsymbol{u}|^{5/3}\,dx\,dt. \tag{2.22}$$

Lema 2.3. *Supongamos ahora que* Ω, $\boldsymbol{f}$ *y* $\boldsymbol{u}_0$ *verifican (2.10)-(2.12). Entonces, bajo las hipótesis del Lema 2.1, tenemos:*

$$\|\nabla p\|_{L^{5/4}(D)} + \|\boldsymbol{u}_t\|_{L^{5/4}(D)} + \|\Delta\boldsymbol{u}\|_{L^{5/4}(D)} \leq C(\Omega,T)K, \tag{2.23}$$

donde $K := \|\boldsymbol{u}_0\|_{W^{2/5,5/4}} + \|\boldsymbol{w}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^{5/4}(D)} + \|\boldsymbol{f}\|_{L^{5/4}(D)}$.

Además, si normalizamos p *de tal manera que* $\int_\Omega p\,dx = 0$ *en todo tiempo* t, *obtenemos*

$$\|p\|_{L^{5/4}(0,T;L^{5/3}(\Omega_1))} \leq C(\Omega_1)\{\|\nabla p\|_{L^{5/4}(D)} + \||\boldsymbol{w}||\boldsymbol{u}|\|_{L^{5/3}(D)}\} \tag{2.24}$$

para cada abierto Ω_1 *con* $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$.

Usando desigualdades de tipo interpolación, se deducen las siguientes estimaciones:

Lema 2.4. *Para* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))$,

$$\|\boldsymbol{w}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^{5/4}} \leq CE_1(\boldsymbol{u})^{1/2}E_1(\boldsymbol{w})^{3/10}E_0(\boldsymbol{w})^{1/5}, \tag{2.25}$$

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^{10/3}} \leq CE_1(\boldsymbol{u})^{3/10}E_0(\boldsymbol{u})^{1/5}, \tag{2.26}$$

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^5(0,T;L^{5/2})} \leq CT^{1/20}E_0(\boldsymbol{u})^{7/20}E_1(\boldsymbol{u})^{3/20}. \tag{2.27}$$

Lema 2.5. *Sean* $\Omega, \boldsymbol{u}_0$ *y* $\boldsymbol{f}$ *satisfaciendo las condiciones (2.7)-(2.9) ó (2.10)-(2.12), y sea* $\boldsymbol{w} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{D},\mathbb{R}^3)$ *con divergencia nula. Sea* $(\boldsymbol{u},p)$ *el par solución de (2.18)-(2.20). Entonces, para cada* $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{D})$ *tal que* $\phi = 0$ *cerca de* $\partial\Omega\times(0,T)$ *se cumple que*

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\{t\}}|\boldsymbol{u}|^2\phi + 2\iint_D|\nabla\boldsymbol{u}|^2\phi = \int_\Omega|\boldsymbol{u}_0|^2\phi(x,0) + \iint_D|\boldsymbol{u}|^2(\phi_t+\Delta\phi)\\ + \iint_D(|\boldsymbol{u}|^2\boldsymbol{w}+2p\boldsymbol{u})\cdot\nabla\phi + 2\iint(\boldsymbol{u}\cdot f)\phi,\end{aligned} \tag{2.28}$$

para todo $t \in (0,T]$.

La prueba no es excesivamente complicada y puede realizarse a partir de un procedimiento de aproximación por regularización y paso al límite.

Para el siguiente resultado necesitamos definir la función $\Psi_\delta(\mathbf{u})$ que aparece en (2.17). Sea $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$ satisfaciendo

$$\psi \geq 0, \qquad \iint_D \psi\, dx\, dt = 1, \tag{2.29}$$

$$\text{Sop } \psi \subset \{(x,t) : |x|^2 < t,\ 1 < t < 2\}. \tag{2.30}$$

Dada $\mathbf{u} \in L^2(0,T;V)$, denotamos $\widetilde{\mathbf{u}}$ la prolongación de $\mathbf{u}$ por 0 a todo $\mathbb{R}^4$.

Sea finalmente,

$$\Psi_\delta(\mathbf{u})(x,t) := \delta^{-4}\iint_{\mathbb{R}^4}\psi\left(\frac{y}{\delta},\frac{\tau}{\delta}\right)\widetilde{\mathbf{u}}(x-y,t-\tau)\,dy\,d\tau. \tag{2.31}$$

Entonces $\Psi_\delta(\mathbf{u})$ está bien definida, posee soporte compacto, es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y observamos que los valores de $\Psi_\delta(\mathbf{u})$ en el tiempo $t = \bar{t}$ dependen únicamente de los valores de $\mathbf{u}$ en tiempos $t \in (\bar{t} - 2\delta, \bar{t} - \delta)$.

Lema 2.6. *Si $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$, la función "regularizadora" Ψ_δ tiene las siguientes propiedades*

$$\nabla \cdot \Psi_\delta(\boldsymbol{u}) = 0, \tag{2.32}$$

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_\Omega |\Psi_\delta(\boldsymbol{u})|^2(x,t)\, dx \le C E_0(\boldsymbol{u}), \tag{2.33}$$

$$\iint_D |\nabla \Psi_\delta|^2 \le C E_1(\boldsymbol{u}). \tag{2.34}$$

Con todos estos resultados, estamos ya en condiciones de probar el Teorema 2.2.

Por simplicidad, consideraremos sólo el caso en que $\Omega = \mathbb{R}^3$.

Para cualquier entero suficientemente grande N, sea $\delta = T/N$, y consideramos el siguiente problema a resolver:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}_N + (\Psi_\delta(\mathbf{u}_N) \cdot \nabla)\mathbf{u}_N - \Delta \mathbf{u}_N + \nabla p_N = \mathbf{f}, \tag{2.35}$$

$$\mathbf{u}_N \in L^2(0,T;V) \cap \mathcal{C}^0([0,T], H), \tag{2.36}$$

$$\mathbf{u}_N(0) = \mathbf{u}_0, \tag{2.37}$$

donde $\mathbf{u}_N$ y p_N existen gracias al Lema 2.1 aplicándolo inductivamente en cada intervalo $(m\delta, (m+1)\delta)$, con $0 \le m \le N-1$.
Se tiene en primer lugar,

$$\int_{\Omega \times \{t\}} |\mathbf{u}_N|^2\, dx + 2\int_0^t\!\!\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}_N|^2\, dx\, ds = \int_\Omega |\mathbf{u}_0|^2\, dx + 2\int_0^t\!\!\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_N\, dx\, ds$$

para todo $t \in (0,T)$, de donde podemos deducir que

$$\int_{\Omega\times\{t\}} |\mathbf{u}_N|^2\,dx + \int_0^t\!\!\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}_N|^2\,dx\,ds \le \int_\Omega |\mathbf{u}_0|^2\,dx + \int_0^t \|\mathbf{f}\|_{V'}^2\,dx\,ds.$$

En particular, vemos que

$$\mathbf{u}_N \text{ está uniformemente acotada en } L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V). \tag{2.38}$$

Denotamos ahora por V_2 la adherencia de $\mathcal{V}$ en $H^2(\Omega)^3$, y V_2' su dual. Por el Lema 4.2 de [21] junto con las condiciones (2.35) y (2.38), se tiene que

$$\frac{\partial \mathbf{u}_N}{\partial t} \text{ está uniformemente acotada en } L^2(0,T;V_2'). \tag{2.39}$$

Por (2.38) y los Lemas 2.2, 2.4 y 2.6, deducimos que

$$\{p_N\} \text{ está uniformemente acotada en } L^{5/3}(D). \tag{2.40}$$

Por todo ello podemos decir que existen subsucesiones convergentes a $\mathbf{u}_*$, p_* (que volveremos a denotar de la misma forma), tales que:

$$\mathbf{u}_N \to \mathbf{u}_* \begin{cases} \text{fuertemente en } L^2_{loc}(D), \\ \text{débilmente en } L^2(0,T;V), \\ \text{débil-}*\ \text{ en } L^\infty(0,T;H), \end{cases} \tag{2.41}$$

$$p_N \to p_* \ \text{ débilmente en } L^{5/3}(D). \tag{2.42}$$

Por otro lado, la siguiente afirmación es un resultado conocido

Teorema 2.3. *Si $1 \le q < r$, $\boldsymbol{u}_N \to \boldsymbol{u}_*$ fuertemente en $L^q_{loc}(D)$ y $\{\boldsymbol{u}_N\}$ está acotada en $L^r(D)$, entonces*

$$\boldsymbol{u}_N \to \boldsymbol{u}_* \text{ fuertemente en } L^s_{loc}(D) \quad \forall s \in (q,r).$$

Aplicando este resultado a $q = 2$ y $r = \frac{10}{3}$, concluimos que

$$\mathbf{u}_N \to \mathbf{u}_* \text{ fuertemente en } L^s(D), \quad 2 \leq s < \frac{10}{3}. \tag{2.43}$$

Por la definición de Ψ_δ,

$$\Psi_\delta(\mathbf{u}_N) \to \mathbf{u}_* \text{ fuertemente en } L^s(D), \quad 2 \leq s < \frac{10}{3}. \tag{2.44}$$

Puede comprobarse sin mucha dificultad que $\mathbf{u}_*$ es, junto con alguna p, solución débil del problema de *Navier-Stokes* usando (2.41)-(2.44). Por (2.39), la sucesión $\{\mathbf{u}_N\}$ converge también débilmente en $C^0([0,T];V_2')$, de donde

$$\mathbf{u}_*(0) = \lim_{N\to+\infty} \mathbf{u}_N(0) = \mathbf{u}_0.$$

Como las soluciones débiles son necesariamente débilmente continuas en H, queda demostrado (2.14).

Para probar (2.16), es suficiente considerar el caso en que $t = T$, con $\phi = 0$ en $\Omega \times \{T\}$; pues el caso general se obtiene basándose en la prueba de la desigualdad de energía.
Supondremos por tanto que ϕ es una función regular y positiva que se anula en $\{|x| > R\} \cup \{t = T\}$. Así,

$$\begin{aligned} 2\iint_D |\nabla \mathbf{u}_N|^2\phi &= \int_\Omega |\mathbf{u}_0|^2\phi + \iint_D |\mathbf{u}_N|^2(\phi_t + \Delta\phi) \\ +2\iint_D p_N(\mathbf{u}_N\cdot\nabla\phi) &+ \iint_D |\mathbf{u}_N|^2\Psi_\delta(\mathbf{u}_N)\cdot\nabla\phi + 2\iint_D (\mathbf{u}_N\cdot\mathbf{f})\phi. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Cuando $N \to +\infty$, el término $\iint_D |\nabla \mathbf{u}_N|^2\phi$ es semicontinuo inferior, mientras que, por (2.41)-(2.44), cada sumando de la derecha de (2.45) converge a un término análogo con $\mathbf{u}_N$ y p_N respectivamente cambiados por $\mathbf{u}_*$ y p_*. Esto prueba la igualdad (2.16) y por lo tanto completa la demostración del teorema.

2.2. Estimación del tamaño del conjunto de puntos singulares

Una vez definidas las soluciones débiles admisibles, y demostrada la existencia de las mismas, podemos seguir en la dirección de los puntos singulares y mejorar el resultado expuesto en el teorema 2.1.

Mostraremos que cualquier solución débil admisible tiene un conjunto de puntos singulares de medida uni-dimensional de Hausdorff en $\mathbb{R}^4$ igual a cero. Es más, veremos que el conjunto S es despreciable para una medida de Hausdorff uni-dimensional de tipo parabólico $\mathcal{P}^1$, lo cual es una propiedad aún más fuerte, pues $\mathcal{H}^1 \leq C\mathcal{P}^1$.
El principal resultado de regularidad local es el siguiente:

Teorema 2.4. *Para cualquier solución débil admisible de (N-S) en D, el correspondiente conjunto de puntos singulares S verifica*

$$\mathcal{P}^1(S) = 0.$$

Este teorema mejora el de *Scheffer* por su carácter local, porque se afina la medida de *Hausdorff* y porque es válido para cualquier segundo miembro.

La definición precisa de $\mathcal{P}^1$ es la siguiente.

Definición 2.3. Para cualquier $X \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ y $k \geq 0$ definimos

$$\mathcal{P}^k(X) := \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{P}^k_\delta(X),$$

donde

$$\mathcal{P}^k_\delta(X) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r_i^k \ : \ X \subset \bigcup_i Q_{r_i},\, r_i < \delta \right\}.$$

Aquí, Q_r representa un cilindro parabólico, es decir, con radio r en espacio y r^2 en tiempo.

Es fácil demostrar, como se ha dicho, que para alguna constante $C > 0$ tenemos $\mathcal{H}^1 \leq C\mathcal{P}^1$.

Combinando la existencia de las soluciones débiles admisibles con este último resultado, obtenemos:

Teorema 2.5. *Supongamos que, para algún $q > \frac{5}{2}$,*

$$\boldsymbol{f} \in L^2(D)^3 \cap L^q_{loc}(D)^3,\ \nabla \cdot \boldsymbol{f} = 0$$

y

$$\boldsymbol{u}_0 \in L^2(\Omega)^3,\ \nabla \cdot \boldsymbol{u}_0 = 0,\ \boldsymbol{u}_0 \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0.$$

En el caso en que Ω es acotado, necesitaremos además que $\boldsymbol{u}_0 \in W^{2/5,5/4}(\Omega)^3$. Entonces el sistema de Navier-Stokes posee al menos una solución débil admisible en D cuyo conjunto de puntos singulares S satisface

$$\mathcal{P}^1(S) = 0.$$

Para la demostración del Teorema 2.4 conviene introducir los “cilindros parabólicos”

$$Q_r(x,t) = \{(y,\tau) : |y-x| < r,\ t - r^2 < \tau < t\} \tag{2.46}$$

y

$$Q^*_r(x,t) = \{(y,\tau) : |y-x| < r,\ t - \frac{7}{8}r^2 < \tau < t + \frac{1}{8}r^2\} \tag{2.47}$$

Recordemos que, si $\mathbf{f}$ y $\mathbf{u}_0$ son “pequeños” en una norma adecuada, entonces la solución débil de (N-S) existe, es única y es regular en un (pequeño) intervalo de tiempo inicial; véase la Sección 1.6.2. Por tanto, la dificultad está en el caso en que $\mathbf{f}$ y/o $\mathbf{u}_0$ son “grandes”. Esto explica la utilidad que pueden tener estimaciones lo más independientes posible del tamaño de los datos.

La primera herramienta fundamental para la prueba del Teorema 2.4 es la proposición que sigue:

Proposición 2.1. *Existen dos constantes absolutas ϵ_1 y $C_1 > 0$ y una constante $\epsilon_2(q) > 0$ que depende sólo de q, con la siguiente propiedad: si $(\boldsymbol{u}, p)$ es una* *solución débil admisible de (N-S) en* Q_1 *con segundo miembro* $\boldsymbol{f} \in L^q(Q_1)^3$*, con* $q > \frac{5}{2}$ *y se tiene*

$$\iint_{Q_1} (|\boldsymbol{u}|^3 + |\boldsymbol{u}||p|)\,dx\,dt + \int_{-1}^{0} \left(\int_{|x|<1} |p|\,dx \right)^{5/4} dt \leq \epsilon_1 \tag{2.48}$$

y

$$\iint_{Q_1} |\boldsymbol{f}|^q\,dx\,dt \leq \epsilon_2, \tag{2.49}$$

entonces,

$$|\boldsymbol{u}(x,t)| \leq C_1 \quad \textit{para } (x,t) \textit{ c.p.d. en } Q_{1/2}.$$

En particular, $\boldsymbol{u}$ *es regular en* $Q_{1/2}$*.*

Dicho de otro modo: si $\mathbf{u}$, p y $\mathbf{f}$ son "suficientemente pequeños" en el cilindro normalizado $Q_1 = Q_1(0,0)$, entonces $\mathbf{u}$ es regular en el cilindro más pequeño $Q_{1/2}$. Queda por tanto claro que existe una relación entre el tamaño de datos y soluciones normalizadas y su regularidad.

Una versión dimensional del resultado anterior es la siguiente:

Corolario 2.1. *Supongamos que* $(\boldsymbol{u}, p)$ *es una solución débil admisible en* $Q_r = Q_r(x,t)$*. Si* $\boldsymbol{f} \in L^q(Q_r)^3$ $(q > \frac{5}{2})$*,*

$$M(r) \leq \epsilon_1 \ \textit{y} \ F_q(r) \leq \epsilon_2, \tag{2.50}$$

entonces

$$|\boldsymbol{u}| \leq C_1 r^{-1} \quad \textit{para } (x,t) \textit{ c.p.d. en } Q_{r/2}(x,t). \tag{2.51}$$

En particular, $\boldsymbol{u}$ *es regular en* $Q_{r/2}(x,t)$*. Aquí, hemos usado la notación siguiente:*

$$M(r) = r^{-2} \iint_{Q_r} (|\boldsymbol{u}|^3 + |\boldsymbol{u}||p|)\,dy\,ds + r^{-13/4} \int_{t-r^2}^{t} \left(\int_{|y-x|<r} |p|\,dy \right)^{5/4} ds \tag{2.52}$$

y

$$F_q(r) = r^{3q-5} \iint_{Q_r} |\boldsymbol{f}|^q\,dy\,ds. \tag{2.53}$$

Este corolario puede ser mirado como una estimación del mínimo nivel de energía en el que puede desarrollarse una singularidad.

Es decir, supongamos que $(x_0, t_0) \in S$. Entonces (2.50) no se cumple en $Q_r(x,t)$ cuando $(x_0, t_0) \in Q_{r/2}(x,t)$. Como $q > \frac{5}{2}$, $F_q(r) \to 0$ cuando $r \to 0$; así, $M(r) > \epsilon_1$ para una familia de cilindros parabólicos $Q_r(x,t)$ que contienen al punto singular.

Esto sugiere que

$$\begin{gathered} |\mathbf{u}| \geq \frac{C}{r} \text{ ó } |p| \geq \frac{C}{r^2} \\ \text{cuando } r = (|x - x_0|^2 + |t - t_0|)^{1/2} \to 0. \end{gathered} \tag{2.54}$$

Por tanto, es natural preguntarse si

$$|\nabla \mathbf{u}|(x,t) \geq \frac{C}{r^2} \text{ cuando } (x,t) \to (x_0, t_0) \tag{2.55}$$

si $(x_0, t_0) \in S$.

La segunda herramienta fundamental para la prueba del Teorema 2.4 tiene que ver con esta última cuestión:

Proposición 2.2. *Existe una constante absoluta $\epsilon_3 > 0$ con la siguiente propiedad: si $(\boldsymbol{u}, p)$ es una solución débil admisible de (N-S) en un entorno de (x,t) y*

$$\limsup_{r \to 0} r^{-1} \iint_{Q_r^*(x,t)} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \, dy \, ds \leq \epsilon_3, \tag{2.56}$$

entonces (x,t) es un punto regular.

El Teorema 2.4 es consecuencia de esta última proposición y el Corolario 2.1 sin más que utilizar un argumento de recubrimiento.

A continuación, mostraremos otros resultados interesantes sobre la regularidad parcial de las soluciones, también demostrado en [3]:

Teorema 2.6. *Supongamos que* $\Omega = \mathbb{R}^3$*,* $\boldsymbol{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$*,* $\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0 = 0$ *en* $\mathbb{R}^3$ *y*

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{u}_0|^2 |x|\, dx < +\infty. \tag{2.57}$$

Entonces existe al menos una solución débil de (N-S) con $\boldsymbol{f} = 0$ *que es regular en la región*

$$\{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ : |x|^2 t > K\},$$

donde K *es una constante que sólo depende de* $\boldsymbol{u}_0$*.*

Teorema 2.7. *Sea* $\Omega = \mathbb{R}^3$*. Existe una constante universal* $L_0 > 0$ *con la siguiente propiedad: si* $\boldsymbol{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$*,* $\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0 = 0$ *en* $\mathbb{R}^3$ *y*

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{u}_0|^2 |x|^{-1}\, dx < L_0, \tag{2.58}$$

entonces existe al menos una solución débil de (N-S) con $\boldsymbol{f} = 0$ *que es regular en la región*

$$\{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ : |x|^2 < t(L_0 - L)\}.$$

donde L *es por definición la integral que aparece en (2.58).*

Es natural plantearse si el argumento que prueba el Teorema 2.4 a partir del Corolario 2.1 y la Proposición 2.2 puede perfeccionarse para probar mejores cotas sobre la dimensión del conjunto S. Pero, para conseguir $\mathcal{P}^k(S) = 0$ para algún $k < 1$ usando estos métodos, es necesaria alguna estimación global "de dimensión k" de la que no se dispone. El Teorema 2.7 apunta en esta dirección: usando la hipótesis (2.58) puede probarse la regularidad.

Capítulo 3

Otros resultados recientes y perspectivas

En este capítulo, se hará un repaso a la historia de las ecuaciones de *Navier-Stokes* y se comentarán algunos avances conseguidos hasta el momento.

Es interesante recordar cómo se ha ido desarrollando la teoría y cuáles han sido en particular las aportaciones de *Leray*, *Ladyzhenskaya* y otros.

3.1. Los resultados de Leray

Seguiremos en esta sección el desarrollo histórico presentado por *J.-Y. Chemin* en [5].

Al comienzo del siglo XX, la existencia de solución global y la regularidad de la misma era aún una incógnita. Otra ecuación rodeada por la misma cuestión, fue la ecuación de Euler. El trabajo sobre estos problemas fue paralelo: mientras *Lichtenstein* demostró la existencia y unicidad de solución en tiempos pequeños para la ecuación de Euler, *Oseen* siguió trabajando en las de Navier-Stokes. En ambos casos, los trabajos de *J. Leray* fueron importantes en gran medida.

El artículo [14] de *Jean Leray* comienza con una introducción llena de símbolos matemáticos en la que se expresa claramente el fin: intentar verificar matemáticamente la teoría de *Navier* (el nombre de *Stokes* no aparece jamás en el trabajo) para un fluido viscoso. El objetivo principal es demostrar o refutar la existencia y unicidad de solución global. Además, se anuncian resultados importantes como la existencia de soluciones globales llamadas "turbulentas", es decir, muy irregulares.

Los problemas de la regularidad y la unicidad fueron resueltos positivamente en un caso cercano al reposo. El problema de la unicidad global y la posibilidad de aparición de singularidades quedan sin respuesta.

En el primer capítulo se encuentra la demostración de una desigualdad de tipo Hardy, basada en integración por partes, para funciones $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1$ con derivadas parciales en L^2:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|^2} |\mathbf{u}(x)|^2 \, dx \leq 4\|\mathbf{u}\|^2.$$

Después se define el espacio de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^3)$. Y se motiva esta definición: dada $\{\mathbf{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, suponiendo que $\left\{\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial y_i}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a $u_{,i}$ en $L^2(\mathbb{R}^3)$ y se escribe

$$\mathbf{u}(x) := -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^3} u_{,i}(y) \, dy,$$

entonces la sucesión $\{\mathbf{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ y además, para toda función $\mathbf{v}$ de clase $\mathcal{C}^1$ de cuadrado sumable así como sus derivadas primeras, se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}(y) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y_i} \, dy = -\int_{\mathbb{R}^3} u_{,i}(y) \mathbf{v}(y) \, dy. \tag{3.1}$$

Se dice entonces que $\mathbf{u}$ pertenece a $H^1(\mathbb{R}^3)$ y que $u_{,i}$ es la quasi-derivada de $\mathbf{u}$.

Cuando *Leray* presentó la definición, demostró que la inyección del espacio $H^1(\mathbb{R}^3)$ en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ es compacta, que era crucial en lo que seguía.

El segundo capítulo se titula “*Movimientos infinitamente lentos*”. En él se estudia la ecuación linealizada:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = X \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

El hecho de trabajar en todo el espacio $\mathbb{R}^3$ simplifica considerablemente el estudio en esta sección, que se apoya sobre todo en los trabajos de *Oseen* de 1911 y utiliza: (a) la representación explícita de la solución de la ecuación del calor y (b) la proyección sobre el campo de los vectores de divergencia nula, definida mediante una convolución.

En este capítulo también se demuestran varias desigualdades que serán útiles en apartados posteriores.

El tercer capítulo se titula “*Movimientos regulares*”, y estudia las soluciones clásicas de sistema de Navier-Stokes $(\mathbf{u}, p)$, con $\mathbf{u}$ y p respectivamente de clase $\mathcal{C}^2$ y $\mathcal{C}^1$. Se trata también el efecto regularizante del sistema, es decir, el hecho de que una solución clásica es de hecho de clase $\mathcal{C}^\infty$ justo después del instante inicial. *Jean Leray* demostró el siguiente resultado:

Teorema 3.1. *Sea $\boldsymbol{u}_0$ un dato inicial tal que él y sus derivadas parciales son continuas y de cuadrado sumable en $\mathbb{R}^3$. Se supone además que $\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0 = 0$ y $\boldsymbol{u}_0$ está acotada. Entonces, existe un único tiempo maximal $T > 0$ tal que existe una solución clásica sobre el intervalo $[0, T)$ que cumple*

$$|\boldsymbol{u}(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|\boldsymbol{u}(s)\|^2 \, ds = |\boldsymbol{u}_0|^2.$$

La demostración se basa en un esquema iterado cuya convergencia se demuestra en espacios adecuados.

La clave de este capítulo son los “criterios de no-regularidad”: ¿Qué tiene que ocurrir para que el tiempo maximal T sea finito?

Dicho de otro modo, ¿cuándo las soluciones regulares son globales? Cuando esto ocurre el concepto de solución turbulenta pierde evidentemente interés.
Los resultados obtenidos son los siguientes:

Si el tiempo maximal T es finito, entonces

- Existe una constante C tal que para todo $t \leq T$,

$$\|\mathbf{u}(t)\| \geq \frac{C\nu^{3/4}}{(T-t)^{1/4}}. \tag{3.2}$$

- Para todo $p \in (3, +\infty)$, existe una constante C_p tal que para $t \leq T$,

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L^p} \geq \frac{C_p \nu^{\frac{1}{2}(1+\frac{3}{p})}}{(T-t)^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{p})}}. \tag{3.3}$$

Estos criterios de no-regularidad son obtenidos estimando con cuidado inferiormente el tiempo de existencia de soluciones regulares.

Jean Leray pensaba que esta ruptura de la regularidad efectivamente se produce para datos no pequeños y propuso un método para construir soluciones irregulares: las soluciones autosimilares, es decir, del tipo

$$\mathbf{u}(x,t) := \frac{1}{\sqrt{T-t}} V\left(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\right).$$

Sencillos cálculos muestran que si $\mathbf{u}$ tiene esta forma, entonces verifica las condiciones necesarias de aparición de singularidades; por otra parte, $\mathbf{u}$ es, junto con alguna p, solución del sistema de Navier-Stokes en $\mathbb{R}^3 \times (0,T)$ (con segundo miembro nulo) si y sólo si V resuelve, junto con alguna P, el sistema

$$-\nu\Delta V + V + x \cdot \nabla V + V \cdot \nabla V + \nabla P, \quad \nabla \cdot V = 0. \tag{3.4}$$

Leray dijo, a propósito de este sistema, que quedaba pendiente la cuestión de si una singularidad puede desarrollarse o no.

Mucho más tarde, en 1996, *Neças*, *Ruczicka* y *Sverák* demostraron en [18] que el sistema (3.4), no tiene ninguna solución no trivial. Así, se vuelve imposible construir soluciones singulares por este método. La cuestión de la aparición de una singularidad quedó por tanto más abierta que nunca.

Una pregunta natural que surge de la técnica utilizada por *Neças*, *Ruczicka* y *Sverák* es la siguiente: ¿puede aparecer una singularidad aunque la norma $L^3(\mathbb{R}^3)$ de la solución esté acotada uniformemente en t?

La respuesta fue dada recientemente por *Escauriaza*, *Seregin* y *V. Sverák* en [6], donde se demuestra que, si aparece una singularidad en el tiempo T, necesariamente

$$\limsup_{t\to T} \|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} = +\infty.$$

Dicho de otro modo, una estimación en $L^\infty(0,T;L^3(\mathbb{R}^3)^3)$ de una solución débil es incompatible con la aparición de singularidades cuando $t \to T$.

Paralelamente a estos criterios de no-regularidad, *Leray* estudió condiciones suficientes de existencia global. Así, probó que existe una constante C tal que, si el dato inicial $\mathbf{u}_0$ cumple

$$|\mathbf{u}_0|^2\|\mathbf{u}_0\|_{L^\infty} \leq C\nu^3 \quad \text{ó} \quad |\mathbf{u}_0|\|\mathbf{u}_0\| \leq C\nu^2,$$

entonces la solución es regular allá donde está definida.

El cuarto capítulo comienza considerando los datos iniciales menos regulares y el resultado principal del mismo es el siguiente:

Teorema 3.2. *Si $\boldsymbol{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)^3$ y $\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0 = 0$, entonces existe un único tiempo maximal $T > 0$ tal que existe una única solución $\boldsymbol{u}$, continua en tiempo con valores en $L^2(\mathbb{R}^3)^3$, tal que $\boldsymbol{u} \in L^2_{loc}(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^3)^3)$ y*

$$|\boldsymbol{u}(t)|^2 + 2\nu\int_0^t \|\boldsymbol{u}(s)\|^2\,ds = |\boldsymbol{u}_0|^2.$$

El método utilizado consiste en reemplazar el sistema original por otro donde el término de transporte se regulariza mediante una convolución, es decir, con un término del tipo $((\chi_n \star \mathbf{u}) \cdot \nabla)\, \mathbf{u}$, donde χ es una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ con soporte compacto, positiva y con integral la unidad y $\chi_n(x) := n^3\chi(nx)$.

El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} + ((\chi_n \star \mathbf{u}_n) \cdot \nabla)\, \mathbf{u}_n - \nu \Delta \mathbf{u}_n + \nabla p_n = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_n = 0, \\ \mathbf{u}_n|_{t=0} = \chi_n \star \mathbf{u}_0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Se prueba que existe $C > 0$ tal que

$$\|\chi_n \star \mathbf{u}_n\|_{L^\infty} \leq C n^{3/2} |\mathbf{u}_n(t)|.$$

Esta estimación, junto a la conservación de energía, permiten afirmar que

$$\|\mathbf{u}_n(t)\|_{L^\infty} \leq C n^{3/2} |\mathbf{u}_0|_{L^2} \int_0^t \frac{\|\mathbf{u}_n(s)\|_{L^\infty}}{\sqrt{\nu(t-s)}}\, ds$$

para todo t, lo que implica que, para cada n, la solución del sistema (3.5) está acotada y esto contradice (3.3). Entonces el problema regularizado admite soluciones globales regulares.

Con lenguaje moderno, diremos que es posible pasar al límite débil en el problema (3.5) cuando $n \to +\infty$. Obsérvese que esto es trivial en los términos lineales, pero está lejos de serlo en los no lineales.

El sexto y último capítulo está dedicado al estudio de las soluciones turbulentas, es decir, no necesariamente regulares.

Primero se enuncia el teorema de unicidad "fuerte-débil": si existe una solución turbulenta y otra regular asociadas al mismo dato inicial, estas dos soluciones coinciden. La demostración consiste en estimar la distancia entre estas dos soluciones para la norma de energía, esto es,

$$|\widetilde{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{u}(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|\widetilde{\mathbf{u}}(s) - \mathbf{u}(s)\|^2 \, ds, \tag{3.6}$$

donde $\widetilde{\mathbf{u}}$ y $\mathbf{u}$ son las soluciones turbulenta y regular, respectivamente.
Utilizando las propiedades de regularidad para ambas soluciones, *Leray* demostró que

$$\begin{aligned}|\widetilde{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{u}(t)|^2 &+ 2\nu \int_0^t \|\widetilde{\mathbf{u}}(s) - \mathbf{u}(s)\|^2 \, ds \\ \leq |\widetilde{\mathbf{u}}(0) - \mathbf{u}(0)|^2 &\cdot \exp\left(\frac{1}{2\nu} \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|^2 \, ds\right),\end{aligned}$$

(más que la unicidad, esta desigualdad prueba la dependencia continua respecto de los datos iniciales).

Este método de demostración proporciona uno de los mejores resultados de unicidad "fuerte-débil" actualmente conocidos, como refleja *Von Wahl* en uno de sus trabajos (donde se demuestra que si una solución es continua en tiempo, con valores en $L^3(\mathbb{R}^3)^3 \cap L^2(\mathbb{R}^3)^3$, entonces coincide con la solución turbulenta; véase [22]).

A continuación, se prueba que las soluciones turbulentas son infinitamente diferenciables en $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^3$ donde $\mathcal{O}$ es el complemento de un conjunto de medida nula.

Un gran número de autores han trabajado en esta cuestión. Hasta la fecha, la aportación más relevante es la que realizaron *Caffarelli*, *Kohn*, y *Nirenberg* en [3]; véase el Capítulo 2.

En [3], los autores dejaron abierta a cuestión siguiente: si $(\mathbf{u}, p)$ es solución débil admisible de (N-S) con $\mathbf{f} = 0$, ¿se tiene $\|\mathbf{u}(t)\| \to 0$ cuando $t \to +\infty$?

La respuesta es que sí, el problema del decrecimiento de la energía está resuelto por *M. Wiegner* en [23]. Bajo la hipótesis de pertenencia a un espacio de Sobolev de índice negativo para el dato inicial, *Wiegner* demostró, utilizando técnicas del análisis de Fourier, que la norma en $L^2(\mathbb{R}^3)$ decrece como $t^{-\frac{5}{4}}$ en el infinito y que este resultado es óptimo (la dificultad viene de que en todo el espacio no se cumple la desigualdad de Poincaré y, por lo tanto, las soluciones de la ecuación del calor no son necesariamente decrecientes en tiempo).

Los recientes resultados de *L. Brandolese* [2] muestran de hecho que, bajo estas restricciones sobre los datos iniciales, es posible mejorar la tasa de decrecimiento en tiempo.

El artículo de *Leray* fue pionero en varios sentidos. La definición de quasiderivada, la introducción de campos de vectores en L^2 con divergencia nula y la definición de solución turbulenta son grandes avances en el análisis de las EDPs. Desde entonces sabemos que en general, las soluciones de una EDP de evolución no lineal no son necesariamente funciones de clase $\mathcal{C}^2$, ni $\mathcal{C}^1$, ni siquiera acotadas. Uno percibe claramente la fuerza de la aportación de *Leray* que muestra la existencia de soluciones turbulentas, no-regulares sólo en un conjunto de medida nula.

3.2. Principales aportaciones de Ladyzhenskaya

En esta sección comentaremos la aportación de *O. A. Ladyzhenskaya* a las ecuaciones de Navier-Stokes. Para ella, más que la existencia de solución, la cuestión verdaderamente importante es la unicidad. Si un conjunto de ecuaciones posee a lo más una solución, podemos afirmar que el sistema tiene toda la información necesaria sobre el fenómeno (por supuesto, podría ocurrir que hubiera más información de la cuenta). En [10] se enuncia y demuestra un teorema de unicidad fuerte que tiene de hecho como consecuencia la existencia de solución.

Ladyzhenskaya describió en [11] los resultados de *Hopf*, quien probó la existencia global de solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes. Ella llamó solución de Hopf a toda solución débil. Junto con la definición de la clase de Hopf, también se incluyen las principales propiedades. *Ladyzhenskaya* creyó desde el primer momento que la clase de Hopf era un ámbito demasiado amplio para buscar soluciones, en el sentido de que en esta clase no cabe esperar unicidad.

En [11] se demuestra el siguiente resultado: supongamos que $\Omega = \mathbb{R}^3$; entonces cualquier solución de Hopf con $\mathbf{f}$ suficientemente regular tiene derivadas $\partial_t \mathbf{u}$ y $\Delta \mathbf{u}$ en $L^{5/4}(Q)^3$ y verifica las ecuaciones c.p.d. La prueba de este resultado está basada en estimaciones de tipo L^p para las soluciones del problema evolutivo de Stokes. Sin embargo, este resultado incondicional es demasiado débil y no permite deducir la unicidad en la clase de soluciones de Hopf.

¿Por qué aparece el exponente 5/4?

Para las soluciones de Hopf, tenemos

$$\|\mathbf{u}\|_* := \operatorname*{Ess\,Sup}_{[0,T]} |\mathbf{u}(t)| + \|\mathbf{u}\| < +\infty$$

Por otra parte, para cualquier función de $H_0^1(\Omega)$ o de $H^1(\Omega)$ de media nula, se tiene que

$$\|\mathbf{u}\|_{L^q} \leq \beta(q) |\nabla \mathbf{u}|^{\alpha} |\mathbf{u}|^{1-\alpha} \tag{3.7}$$

para todo $q \in [2, 6]$, con y $\alpha = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$. Una consecuencia es que

$$\|\mathbf{u}\|_{L^q(B(x_0;R))} \leq \beta_1(q) \left(\|\nabla \mathbf{u}\|^{\alpha}_{L^2(B(x_0;R))} \|\mathbf{u}\|^{1-\alpha}_{L^2(B(x_0;R))} + \frac{1}{R^{\alpha}} \|\mathbf{u}\|_{L^2(B(x_0;R))} \right), \tag{3.8}$$

desigualdad que es cierta para los mismos valores de q y α y para toda $\mathbf{u} \in H^1(B(x_0; R))$.

Gracias a (3.7), se prueba que, para funciones $\mathbf{u}$ que se anulan sobre $\partial\Omega \times (0, T)$ o satisfacen

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}(x, t)\, dx = 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

se cumple

$$\|\mathbf{u}\|_{L^r(0,T;L^q(\Omega))} \leq C_1 |\mathbf{u}| \tag{3.9}$$

siempre que

$$\frac{1}{r} + \frac{3}{2q} \geq \frac{3}{4}, \quad r \in [2, \infty], \quad q \in [2, 6].$$

Así, se puede estimar el término no lineal de la siguiente forma

$$\|(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\|_{L^\ell(0,T;L^s(\Omega))} \leq C_2 |\nabla \mathbf{u}| \|\mathbf{u}\|_{L^{\frac{2\ell}{2-l}}(0,T;L^{\frac{2s}{2-s}}(\Omega))} \leq C_3 \|\mathbf{u}\|_*^2, \qquad (3.10)$$

si ℓ, s satisfacen

$$\frac{1}{\ell} + \frac{3}{2s} \geq 2, \quad \ell \in [1, 2], \quad s \in [1, 3/2]. \qquad (3.11)$$

En particular, los exponentes $s = \ell = \frac{5}{4}$ satisfacen las últimas condiciones.

En [8], *Giga*, *Shor* y en [17], *Maremonti* y *V. A. Solonnikov* aportaron un teorema de unicidad para el problema de Stokes que, junto con (2.1) y razonando como en [11], permiten concluir lo siguiente:

Teorema 3.3. *Supongamos que Ω es un abierto conexo acotado de clase $\mathcal{C}^2$ y que, además, $f \in L^\ell(0, T; L^s(\Omega)^3)$ para s, ℓ satisfaciendo (3.11). Entonces, cualquier solución de la clase de Hopf cumple que $\partial_t \boldsymbol{u}$, $\Delta \boldsymbol{u}$ pertenecen a $L^\ell(\delta, T; L^s(\Omega))$, para todo $\delta \in (0, T)$. Además, existe una presión p tal que $\nabla p \in L^\ell(\delta, T; L^s(\Omega))$ para todo $\delta \in (0, T)$. Finalmente, $p \in L^\ell(\delta, T; L^{\frac{3s}{3-s}}(\Omega))$, siempre que impongamos*

$$\int_\Omega p(x, t) dx = 0, \quad t \in (0, T).$$

Aun imponiendo propiedades adicionales a las soluciones de Hopf, no se sabe demostrar la unicidad de solución, aunque se puede decir algo más sobre la regularidad parcial.

Scheffer [19] empezó estudiando esta regularidad para algunas clases de soluciones débiles, asumiendo propiedades adicionales sobre ellas. Su principal resultado es la llamada desigualdad de energía local. Suponiendo que $\Omega = \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{f} = 0$, probó que, para cualquier solución $(\mathbf{u}, p)$ que satisfaga estas condiciones, se tiene que (2.1) y (2.2). También demostró que, de entre todas las soluciones débiles, existe al menos una que verifica las propiedades requeridas.

En otro de sus trabajos, *Scheffer* consideró otro tipo de soluciones débiles, para las cuales demostró, con Ω acotado, que existe al menos una tal que $\nabla \times \mathbf{u}$ (la vorticidad) es continua en un subconjunto abierto de $D = \Omega \times \mathbb{R}_+$; véase [20]. Además, la dimensión de Hausdorff del conjunto donde la propiedad anterior no se verifica es menor que $\frac{5}{3}$.

Estas investigaciones fueron continuadas por *Caffarelli*, *Kohn* y *Nirenberg* en [3], como vimos en el capítulo anterior. En dicho artículo se introducen las "soluciones débiles admisibles".

Para $\mathbf{f} = 0$, *F. H. Lin* definió en [15] las soluciones débiles admisibles de modo ligeramente distinto suponiendo que $p \in L^{3/2}(D)$, lo que corresponde a $s = \frac{9}{8}$ y $\ell = \frac{3}{2}$ en el Teorema 3.3.

Mostró que existen soluciones con esta propiedad con ayuda de una regularización del problema inicial, como en [3].

Ladyzhenskaya utiliza en [11] la misma clase de soluciones que *Lin*, es decir, asume que $p \in L^{3/2}(D)$. El resultado principal de su artículo muestra que, para cualquier solución débil admisible $(\mathbf{u}, p)$, existe un subconjunto abierto de D, donde la velocidad es Hölder-continua y el complementario tiene medida de Hausdorff unidimensional cero (a diferencia de *Caffarelli*, *Kohn* y *Nirenberg*, *Ladyzhenskaya* define un punto regular ($z = (x,t)$) como aquél en el que existe un entorno donde $\mathbf{u}$ es Hölder-continua).

Más precisamente, para cada abierto $G \subset \mathbb{R}^4$ consideremos la clase

$$M_{2,\gamma}(G;\mathbb{R}^3) := \{\mathbf{f} \in L^2_{loc}(G;\mathbb{R}^3) \ : \ c_\gamma(\mathbf{f}, G) < +\infty\}$$

donde

$$c_\gamma(f;G) := \sup\left\{\frac{1}{R^{\gamma-2}}\left(\frac{1}{|Q((x_0,t_0);R)|}\int_{Q((x_0,t_0);R)} |\mathbf{f}|^2\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\right. \\ \left. : \ Q((x_0,t_0);R) \subset\subset G, \ R > 0\right\}$$

Definición 3.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto conexo y sea $T > 0$. Supongamos que $\mathbf{f} \in M_{2,\gamma}(D; \mathbb{R}^3)$ para algún $\gamma > 0$ donde $D = \Omega \times \mathbb{R}_+$. Diremos que $(\mathbf{u}, p)$ es una solución débil admisible en D (en el sentido de Lin y Ladyzhenskaya) si las siguientes tres condiciones se satisfacen:

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H), \\ p \in L^{3/2}(D), \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f} - \nabla p & \text{en } D, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } D \end{cases} \tag{3.13}$$

(en el sentido de las distribuciones) y

$$\begin{gathered} \int_{\Omega \times \{t\}} |\mathbf{u}|^2 \phi \, dx + 2 \iint_{\Omega \times (0,t)} |\nabla \mathbf{u}|^2 \phi \, dx \, ds \leq \\ \iint_{\Omega \times (0,t)} \left[|\mathbf{u}|^2 (\partial_t \phi + \Delta \phi) + (|\mathbf{u}|^2 + 2p)\mathbf{u} \cdot \nabla \phi + 2\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}\phi \right] dx \, ds \end{gathered} \tag{3.14}$$

para casi todo $t \in [0,T]$ y $\phi \in \mathcal{D}(Q)$.

Teorema 3.4. *Sea γ una constante positiva y arbitraria. Supongamos que Ω, T, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{u}$ y p son como en la Definición 3.1, con $\gamma > 0$. Entonces, si existe $\epsilon_* > 0$ (que depende sólo de γ) tal que*

$$\limsup_{R \to 0} \frac{1}{R} \iint_{Q((x_0,t_0);R)} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \, dx \, dt < \epsilon_*(\gamma), \quad z_0 \in Q, \tag{3.15}$$

entonces el punto (x_0, t_0) es regular. En otras palabras, en un entorno de (x_0, t_0), la función $\boldsymbol{u}$ es Hölder-continua.

Veamos a continuación una idea esquemática de la prueba. Ésta se divide en tres partes. En la primera se da un criterio de Hölder-continuidad local para $\mathbf{u}$ usando un procedimiento "*blow-up*". Esta parte es parecida a la aproximación desarrollada para investigaciones de regularidad parcial en ecuaciones elípticas y parabólicas, con la diferencia de la incompresibilidad, que necesita algunas correcciones del método. En la segunda parte se trata de mejorar el criterio preliminar escalando, técnica que se usa también en [3] de diferente manera.

En la última parte, se consigue un criterio final de regularidad local para las soluciones débiles admisibles, donde se usan algunas observaciones realizadas por *Caffarelli*, *Kohn* y *Nirenberg*.

Otra de las aportaciones de *Ladyzhenskaya* [12] fue el resultado siguiente, basado en el comportamiento uniforme de las soluciones de problemas de tipo Navier-Stokes respecto de los términos de transporte:

Teorema 3.5. *Supongamos que* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{f} \in L^2(Q;\mathbb{R}^3)$ *y* $\boldsymbol{u}_0 \in V$. *Supongamos que existe una constante* $M > 0$ *tal que, para todo* $\lambda \in [0,1]$ *y toda solución fuerte de*

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t - \nu\Delta\boldsymbol{u} + (\lambda\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}, & (x,t) \in Q, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, & (x,t) \in Q, \\ \boldsymbol{u} = 0 & (x,t) \in \Sigma, \\ \boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{u}_0(x) & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.16}$$

se tiene

$$\|\boldsymbol{u}^\lambda\|_{L^\ell(0,T;L^s(\Omega)^3)} \leq M, \tag{3.17}$$

donde

$$\frac{3}{s} + \frac{2}{\ell} = 1, \quad s \in (3,+\infty], \quad \ell \in [2,+\infty)$$

o

$$s = 3 + \epsilon, \quad \epsilon > 0, \quad \ell = +\infty.$$

Entonces (N-S) posee una única solución fuerte, que verifica

$$\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;H^2(\Omega)^3) \cap \mathcal{C}([0,T];V), \quad \boldsymbol{u}_t, \nabla p \in L^2(Q;\mathbb{R}^3). \tag{3.18}$$

3.3. Contribuciones de Cannone, Fujita y Kato

Terminaremos este Capítulo mencionando brevemente algunas contribuciones de *H. Fujita*, *T. Kato* y *M. Cannone*, entre otros. En este apartado tendremos que utilizar la transformada de Fourier y algunos espacios muy particulares de funciones y distribuciones.

Fujita y *Kato* demostraron en [7] que existe una constante C tal que, si el dato inicial verifica

$$\|\mathbf{u}_0\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} := \int_{\mathbb{R}^3} |\xi||\widehat{\mathbf{u}}_0(\xi)|^2 \, d\xi \leq C\nu^2,$$

entonces, la solución fuerte es global. Aquí, $\widehat{f}$ denota la transformada de Fourier de f. La norma $\|\cdot\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}$ determina el espacio de Sobolev homogéneo de índice $\frac{1}{2}$ y verifica,

$$\|\mathbf{u}_0\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq |\mathbf{u}_0||\nabla \mathbf{u}_0|.$$

En 1983, *T. Kato* generalizó este resultado y demostró la existencia de una constante C tal que, si

$$\|\mathbf{u}_0\|^3_{L^3} \leq C\nu^3,$$

entonces la solución fuerte es global. Recordemos que $\|\mathbf{u}_0\|^3_{L^3} \leq |\mathbf{u}_0|^2 \|\mathbf{u}_0\|_{L^\infty}$ y existe C tal que $\|\mathbf{u}_0\|_{L^3} \leq C\|\mathbf{u}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}$.

Para demostrar esto, siguió los pasos de *Leray*, basados en la teoría de punto fijo. El punto clave es que la norma en L^2 en tiempo con valores en L^∞ que introdujo *Leray*, es reemplazada ahora por el supremo de $\sqrt{t}\|\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty}$.

Unos años más tarde, en 1994, *Cannone*, *Planchon* y *Meyer* volvieron a generalizar este resultado en [4]. Consideraron para cada $s \in \mathbb{R}_+$, el espacio de Besov B_p^{-s}. Sea χ una función positiva cuya transformada de Fourier pertenece a $\mathcal{D}(\Omega)$ y pongamos,

$$\chi_\lambda(x) := \lambda^{-3}\chi(\lambda^{-1}x), \quad \|\mathbf{u}\|_{B_p^{-s}} := \sup_{\lambda>0} \lambda^{-s}\|\chi_\lambda \star \mathbf{u}\|_{L^p}. \tag{3.19}$$

Obviamente, existe una constante C tal que, para todo $p \in (3, \infty)$ se tiene

$$\|\mathbf{u}\|_{B_p^{-1+\frac{3}{p}}} \leq C\|\mathbf{u}\|_{L^3}.$$

Además, los espacios de Besov $B_p^{\frac{3}{p}-1}$ forman una sucesión creciente en p.

Cannone, *Planchon* y *Meyer* probaron que, para todo p, existe una constante C_p tal que, si $\|\mathbf{u}\|_{B_p^{\frac{3}{p}-1}} \leq C_p\nu$, entonces la solución fuerte es global. La importancia de este resultado reside en el índice negativo de regularidad, que implica la disminución de la norma en presencia de oscilaciones.

En efecto, sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ tal que su respecto a la tercera variable es nula. Pongamos,

$$\phi(x_1, x_2, x_3) := \int_{-\infty}^{x_3} \varphi(x_1, x_2, y_3)\, dy_3.$$

Sea $\alpha \in (-\infty, 1)$, consideramos la familia de vectores $\mathbf{u}_{0,\epsilon}$ con divergencia nula, definidos por

$$\mathbf{u}_{0,\epsilon}(x){:=}\epsilon^{-\alpha}\left(\cos\left(\frac{x_2}{\epsilon}\right)\varphi,\ \cos\left(\frac{x_1}{\epsilon}\right)\varphi),\ -\cos\left(\frac{x_2}{\epsilon}\right)\partial_1\phi - \cos\left(\frac{x_1}{\epsilon}\right)\partial_2\phi\right).$$

La norma de $\mathbf{u}_{0,\epsilon}$ en $L^3(\mathbb{R}^3)^3$ está minorada por $\epsilon^{-\alpha}$, mientras que una integración por partes, permite mayorar la norma en $B_4^{-1/4}$ por una constante por $\epsilon^{1-\alpha}$. Aquí se observan fuertes oscilaciones de amplitud $\epsilon^{-\alpha}$, pero de frecuencia ϵ^{-1}, en el dato inicial y vemos que, lejos de ser un obstáculo para la regularidad global, estas oscilaciones de hecho la implican.

Chemin en [5] presentó una versión modificada de este teorema. Los espacios que utiliza están mejor adaptados al problema de existencia de trayectorias. La demostración exige el conocimiento de la teoría de Littlewood-Paley. La idea consiste en escalonar las frecuencias con ayuda de una descomposición en coronas de talla 2^q y una partición de la unidad de forma diádica.

En 1998 *Koch* y *Tataru* en [9] dieron otra versión. Consideraron el espacio BMO de las funciones localmente integrables tales que

$$\|\mathbf{u}\|_{BMO} \equiv \sup_B |B|^{-\frac{1}{2}} \left(\int_B |\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}}_B|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

Definimos entonces ∂BMO como el espacio de las distribuciones $\mathbf{u}$ tales que existe una familia $\{\mathbf{u}_j\}_{1 \leq j \leq 3}$ de funciones en BMO tales que

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}.$$

La norma que se utiliza en ∂BMO es, por definición,

$$\|\mathbf{u}\|_{\partial BMO} := \inf \left\{ \max_j \|\mathbf{u}_j\|_{BMO} \;:\; \mathbf{u}_j \in BMO, \sum_j \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x_j} = \mathbf{u} \right\}$$

El teorema de *Koch-Tataru* afirma que, si la norma del dato inicial en ∂BMO es suficientemente pequeña, entonces la solución fuerte es global. Recordemos también que se tiene

$$\dot{B}_p^{\frac{3}{p}-1} \hookrightarrow \partial BMO, \quad \text{para } p > 3$$

donde $\dot{B}_p^{\frac{3}{p}-1}$ es el espacio de Besov homogéneo.

Parece además razonable pensar que este resultado es óptimo, por una estimación de tipo Carleson; véase [9] para más detalles.

Recientemente, *Gallagher*, *Iftimie* y *Planchon* probaron que toda solución global continua con valores en $\dot{B}_p^{\frac{3}{p}-1}$ se vuelve pequeña en la norma de ese espacio, a partir de un cierto tiempo. Contrariamente a los resultados de *Cannone*, *Planchon* y *Meyer* y los de *Koch* y *Tataru*, utilizaron de manera crucial la estuctura particular de las ecuaciones. Este resultado fue generalizado posteriormente por *Ausher*, *Dubois* y *Tchamitchian* el caso de las soluciones continuas con valores en ∂BMO, véase [1].

Bibliografía

[1] P. Auscher, S.Dubois, P. Tchamitchain, *On the stability of global solutions to Navier-Stokes equations in the space.* à paraître au Journal de Mathématiques Pures et Apliquées.

[2] L. Brandolese, *Thèse de l'ENS de Cachan.* 2001.

[3] L. Caffarelli, R. V. Kohn y L. Nirenberg, *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations.* Comm. Pure Appl. Math. XXXV 1982.

[4] M. Cannonne, Y. Meyer, F. Planchon, *Solutions autosimilaires des équations de Navier-Stokes.* Séminaire "Équations aux Dérivées Partielles de l'École Polytechnique, Exposé VIII, 1993–1994.

[5] J. Y. Chemin, *Le système de Navier-Stokes incompressible soixante dix ans après Jean Leray.* Soc. Math. France, Paris, 2004.

[6] L. Escauriaza, G. Seregin, V. Sverák , *On the $L_{3,\infty}$ solutions to the Navier-Stokes equations and backward uniqueness.* Russian Mathematical Survey, Vol. 58. 2003.

[7] H. Fujita, T. Kato, *On the Navier-Stokes initial value problem I.* Archiv for Rationnal Mechanic Analysis, 16, 1964.

[8] Y. Giga, H. Sohr, *Abstract L^p-estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier-Stokes equations in exterior domains.* J. Funct. Anal. 102. 1991.

[9] H. Koch, D. Tataru, *Well-posedness for the Navier-Stokes equations.* Advances in Mathematics, 157. 2001.

[10] O. A. Ladyzhenskaya, *On solubility of the basic boundary value problems for equations of parabolic an hyperbolic types.* Dokl. Akad. Nauk SSSR 97, 1954.

[11] O. A. Ladyzhenskaya, *Mathematical problems of the dynamics of viscous incompressible fluids.* Fizmatgiz, Moscow 1961.

[12] O. A. Ladyzhenskaya, *Sixth problem of the millennium: Navier-Stokes equations, existence and smoothness.* Russian Math. Surveys, 58. 2003.

[13] O. A. Ladyzhenskaya, G. A. Seregin, *On partial regularity of suitable weak solutions to three-dimensional Navier-Stokes equations.* J. Math. Fluid Mech., 1999.

[14] J. Leray, *Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace.* Acta Mathematica, 63, 1933.

[15] F. H. Lin, *A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem.* Comm. Pure Appl. Math. 51. 1998.

[16] J. L. Lions, *Quelques methodes de resolution des problémes aux limites non linéaires.* Dunod, Paris, Montreal, 1965.

[17] P. Maremonti, V. Solonnikov, *On the estimates of solutions of evolution Stokes problem in anisotropic Sobolev spaces with a mixed norm.* Zap. Nauchn. Sem. LOMI 223. 1994.

[18] J. Neças, M. Ruczicka, V. Sverák , *On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations.* Acta Mathematica, Vol. 176. 1996.

[19] V. Scheffer, *Hausdorff measure and the Navier-Stokes equations.* Comm. Math. Phys. 55, 1977.

[20] V. Scheffer, *The Navier-Stokes equations in a bounded domain.* Comm. Math. Phys. 73, 1980.

[21] R. Témam, *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis.* Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 2. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1977.

[22] W. von Wahl, *The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations.* Aspect der Mathematik, Wieweg & Sohn, Wiesbaden, 1985.

[23] M. Wiegner , *Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on* $\mathbb{R}^n$. Journal of the London Mathematical Society, Vol. 35. 1987.