
TEORÍA DE MORSE DISCRETA

Alejandro Ballesteros Hernández

Memoria de Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas



Índice general

Abstract	5
Introducción	6
Capítulo 1. Preliminares	8
1.1. Nociones básicas de Homotopía y Homología Simplicial	8
1.2. Teoría de Morse diferenciable	13
Capítulo 2. Teoría de Morse Discreta	17
2.1. Funciones de Morse discretas	17
2.2. Campos Gradientes Discretos	22
2.3. Funciones de Morse óptimas y perfectas.	32
Referencias bibliográficas	39

Este trabajo no podría haberse realizado sin la colaboración de muchas personas que me han brindado su ayuda, sus conocimientos y su apoyo. Quiero agradecerles a todos ellos cuanto han hecho por mí, para que este trabajo saliera adelante de la mejor forma posible.

Quedo especialmente agradecido por mi director del trabajo Don José Antonio Vilches que me ha apoyado y ayudado en todo momento. Ha corregido minuciosamente este trabajo y me ha dado la posibilidad de mejorarlo. Tengo que agradecerle sus comentarios, direcciones, sugerencias, y las correcciones con las que he podido redactar una memoria adecuada de todo el trabajo realizado en este último curso.

A todos los profesores del Departamento de Geometría y Topología que me han dado clase y me han aportado todos los conocimientos sin los cuales no me hubiera decantado por esta rama de las matemáticas.

A mis padres José Manuel y Charo, por darme la vida y apoyarme en todo lo que me he propuesto así como por introducirme en las matemáticas a una edad temprana, por ser mi ejemplo a seguir, por enseñarme a seguir aprendiendo todos los días sin importar las circunstancias y el tiempo. Vosotros sois la columna vertebral de toda la formación que tengo y la que tendré en el futuro.

Por último y lo más importante, mi más profundo agradecimiento a mi tío y mentor Don Rafael Ayala, que sin su apoyo y colaboración, especialmente en mis días más bajos, no hubiera sido posible concluir esta etapa tan importante de mi formación.

Abstract

Since it was introduced by Marston Morse in the 1920s, Morse Theory has been one of the most powerful and useful tool for the study of smooth manifolds. Basically, it allows to describe the topology of a manifold in terms of the cellular decomposition generated by the critical points of a scalar smooth map defined on it. In the 1990s Robin Forman developed a combinatorial analog to Morse theory that turned out to be a fruitful and efficient method for studying the homotopy type and homology groups of discrete objects, such as simplicial and cellular complexes.

The essential components of Forman's discrete Morse theory are the discrete Morse function and critical simplices. A discrete Morse function assigns values to simplices such that higher-dimensional simplices have higher values than lower-dimensional simplices, with at most one exception, locally, at each simplex. A critical simplex is one near which no such exception occurs. The main reason why these definitions seem to be quite different from those of differential geometry is that they correspond to a natural and easily representable notion of induced discrete vector field which includes the idea of flow lines resembling the corresponding notion for smooth vector fields.

Roughly speaking, the discrete vector field induced by a discrete Morse function describe a collapsing process, and is a pairing of the complex, formed by pairs of simplices of two consecutive dimensions on which the function inverts the order given by face inclusion. Then, those simplices that do not belong to any pair are precisely the critical simplices of the map and a combinatorial gradient path is a connected sequence of the pairs on which the function is decreasing.

In this work we present the basic notions and results of discrete Morse theory, with emphasis in two aspects: it can be interpreted under a graph-theoretical point of view as a matching in the Hasse diagram of its domain and the special role played by the optimal discrete Morse functions, that is, those with as less critical simplices as possible. For simplicity, we have omitted the proofs of the more technical results that can be found in detail in the cited references.

Introducción

Esencialmente, la teoría de Morse discreta es una adaptación combinatorial a los CW -complejos finitos de la teoría de Morse diferenciable, que permite simplificar su topología sin cambiar su tipo de homotopía.

Recordemos que la teoría de Morse diferenciable fue desarrollada por M. Morse en los años 20, y es una de las herramientas más potentes de la Topología Diferencial, pues proporciona una relación fundamental entre el Análisis y la Topología. Más precisamente, establece que el tipo de homotopía de una variedad es el de un CW -complejo, cuyas células quedan determinadas por los puntos críticos (aquellos en los que se anula el gradiente) de ciertas funciones escalares definidas sobre ellas, que son las funciones de Morse. De hecho, estas funciones pueden interpretarse como un método para construir el complejo celular por conjuntos de nivel, a medida que va creciendo el valor de la función, y los teoremas fundamentales de la teoría muestran que el tipo de homotopía de dichos conjuntos cambia solo cuando se pasa por un valor crítico de la función.

Una exposición clásica de la teoría de Morse diferenciable puede encontrarse en el libro de Milnor [9], donde se da la demostración de las desigualdades de Morse, que afirman que el número de puntos críticos de cada tipo de función de Morse es cota superior de sus distintos números de Betti.

Hacia 1995, en [5] R. Forman lleva estas ideas al contexto discreto (o combinatorio) y desarrolla una teoría de Morse para poliedros completamente discreta, es decir, utilizando solo su estructura celular o simplicial, sin necesidad de recurrir a su topología ni a ninguna noción de continuidad. Tal como aclara Forman, esto no es una teoría totalmente nueva; lo que él logró fue extraer la esencia combinatoria de la teoría clásica para variedades diferenciables, y consiguió probar los resultados análogos a los teoremas básicos de la teoría de Morse. La teoría de Morse discreta ha dado lugar a una importante cantidad de trabajos vinculados al estudio de los complejos simpliciales, posets, teoría de homología y topología computacional, y parece ir convirtiéndose en una herramienta muy útil para muchos campos de aplicación.

Las definiciones de función de Morse discreta y de punto crítico de una tal función pueden parecer un tanto extrañas y totalmente desligadas de la definición conocida para variedades diferenciables, pero cobran pleno sentido si se piensa que no son sino una consecuencia de la idea de campo vectorial discreto. Siguiendo el modelo de la teoría de Morse clásica, Forman introduce la noción de campo gradiente discreto sobre un complejo como cadenas formadas por símlices de dimensiones consecutivas, de manera

que representen “líneas de flujo” donde la función sea decreciente, y además reflejen sucesiones de deformaciones en los símlices que la forman (esencialmente colapsos) que simplifican el tipo de homotopía del complejo. Teniendo en cuenta estos principios, es claro que lo adecuado es definir función de Morse discreta asignando un número a cada símlice, de manera que se respete el orden dado por la dimensión, excepto a lo más en una (co)cara del símlice. Así se explica también la definición de símlice crítico de una función de Morse discreta, que no son sino aquellos no incluidos en el campo, es decir, no afectados por las deformaciones codificadas en el mismo, y por tanto aquellos que contienen información topológica relevante.

En este trabajo presentaremos las ideas esenciales y los resultados básicos de la teoría de Morse discreta. No se incluyen las demostraciones de aquellos teoremas y proposiciones de mayor complejidad técnica que estén expuestos detalladamente en las referencias citadas, y está organizado en dos Capítulos.

En el Capítulo 1, se presentan muy escuetamente las definiciones básicas de complejos simpliciales y celulares, teoría de homotopía y homología simplicial que pueden consultarse en cualquier texto elemental de topología algebraica. Además, se recogen los conceptos mínimos esenciales de la teoría de Morse diferenciable, y se exponen, sin demostración, los que suelen considerarse como resultados fundamentales de la teoría.

En el Capítulo 2 se introducen las ideas y definiciones fundamentales de la teoría de Morse discreta: función de Morse, símlice crítico y campo gradiente discreto. Se destaca que la teoría se puede desarrollar en términos de la teoría de grafos, pues la idea central, es decir, el concepto de campo gradiente, se puede interpretar como un tipo especial de emparejamiento en el diagrama de Hasse del complejo. Ello permite a Forman obtener una caracterización sencilla de los campos vectoriales que son gradientes de funciones de Morse. En la última Sección, se tratan las funciones de Morse perfectas sobre 2-complejos, que son aquellas en las que el número de símlices críticos de cada dimensión coincide con el correspondiente número de Betti del complejo. Se da su caracterización en términos del número de colapso, definido en [4], y se dan ejemplos de espacios que no las admiten. Por tanto, se plantea el problema de encontrar aquellas funciones de Morse con el menos número posible de símlices críticos, es decir, las funciones óptimas. Estas funciones son de gran interés, pues cuanto menos puntos críticos tenga una función de Morse, más eficaz será para describir la topología del complejo. Desgraciadamente, no se conoce un algoritmo general eficiente para obtenerlas. Concluimos el trabajo observando que una función de Morse óptima corresponde a un emparejamiento máximo en el diagrama de Hasse del complejo.

Preliminares

1.1. Nociones básicas de Homotopía y Homología Simplicial

En la primera sección se abordarán las nociones básicas de homotopía y homología de espacios topológicos. Aunque los principales teoremas de la Teoría de Morse discreta se han formulado sobre complejos celulares, en este trabajo la desarrollaremos para complejos simpliciales para dar una presentación más clara. Por tanto, empezaremos con el estudio previo de las principales propiedades de estos complejos simpliciales. En este trabajo solo trataremos con complejos simpliciales finitos.

DEFINICIÓN 1.1.1. Sean f y $g : X \rightarrow Y$ dos aplicaciones continuas entre espacios topológicos. Se dice que f y g son *homotópicas* si existe una aplicación continua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$. A H se le llama homotopía entre f y g . Se tiene que la relación de ser homotópicas es una relación de equivalencia en el conjunto de aplicaciones continuas de X a Y , estable por composición de aplicaciones continuas; es decir, si dos aplicaciones son homotópicas, sus composiciones con una aplicación continua también lo son.

DEFINICIÓN 1.1.2. Dos espacios topológicos X e Y se dicen *homotópicamente equivalentes*, o del mismo tipo de homotopía, si existen aplicaciones continuas $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$ tales que $g \circ f \simeq id_X$ y $f \circ g \simeq id_Y$, es decir, sus composiciones son homotópicas con la identidad en cada espacio. Si $i : A \hookrightarrow X$ es la inclusión canónica, se dice que A es retracto de deformación de X si existe una aplicación continua $j : X \rightarrow A$ tal que $j \circ i = id_A$, e $i \circ j \simeq id_X$. Cuando A es un punto, se dice que X es *contráctil*.

DEFINICIÓN 1.1.3. El conjunto de puntos $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \in \mathbb{R}^m$ son afinmente independientes si los vectores $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$ son linealmente independientes.

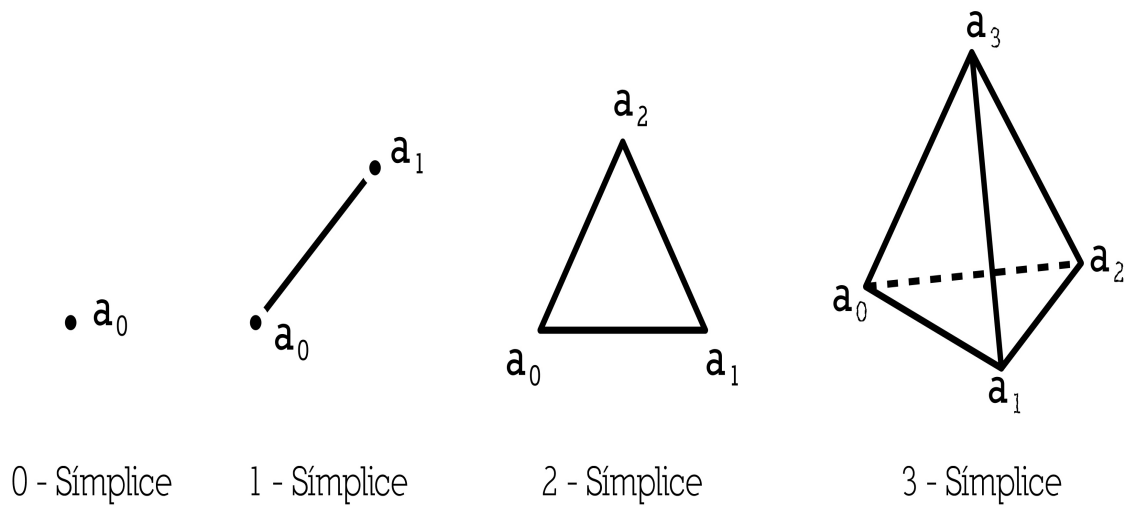
Dados $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ puntos afinmente independientes, se define el n -*simplex* generado por

a_0, a_1, \dots, a_n como el conjunto convexo

$$\sigma^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^m / x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i, \text{ con } \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

Los coeficientes λ_i son llamados las *coordenadas baricéntricas*. Llamaremos *interior* de σ a $\overset{\circ}{\sigma} = \{x \in \sigma; \lambda_i > 0\}$. Los puntos a_i se llamaran *vértices* de σ y se escribirá $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$. Así, un 0-símplice es un punto, un 1-símplice es un segmento, un 2-símplice es un triángulo, un 3-símplice es un tetraedro, etc.

Sean dos símlices σ y τ en \mathbb{R}^m . Se dirá que τ es *cara* de σ , y lo denotaremos por $\tau \leq \sigma$ si los vértices de τ son vértices de σ . Si $\tau \neq \sigma$ y $\tau \leq \sigma$ diremos que τ es una *cara propia* de σ y lo escribiremos entonces $\tau < \sigma$. La unión de caras propias de un n -símplice $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ se llamará *borde* de σ , y lo denotaremos por $\overset{\bullet}{\sigma}$. Nótese que $\overset{\bullet}{\sigma} = \left\{ x \in \sigma; x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i \text{ tal que } \lambda_j = 0 \text{ para algún } j \right\}$, y por tanto, $\overset{\circ}{\sigma} = \sigma - \overset{\bullet}{\sigma}$.



DEFINICIÓN 1.1.4. Llamaremos *complejo simplicial* a una colección finita K de símlices en algún \mathbb{R}^m verificando:

- Si $\sigma \in K$ y $\tau \leq \sigma$, entonces $\tau \in K$.
- Si $\sigma, \sigma' \in K$, y $\sigma \cap \sigma' \neq \emptyset$ entonces $\sigma \cap \sigma' \in K$ es una cara común de σ y σ' .

Un subcomplejo $L \subseteq K$ es un conjunto de símplices de K que es a su vez un complejo simplicial. La dimensión de K es el número $\dim(K) = \max \{ \dim(\sigma) / \sigma \in K \}$. Se llama *m-esqueleto* de K y se denota K^m al subcomplejo $K^m = \{ \sigma \in K; \dim(\sigma) \leq m \}$. Así, K^0 es el subcomplejo formado por los vértices de K , y K^1 el formado por las aristas y vértices de K . El espacio topológico formado por los símplices de K con la topología relativa de \mathbb{R}^n , se le denomina *poliedro subyacente* de K , y lo denotaremos por $|K|$, es decir:

$$|K| = \bigcup \{ \sigma; \sigma \in K \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Llamaremos *grafo* a todo complejo simplicial K tal que $\dim(K) \leq 1$.

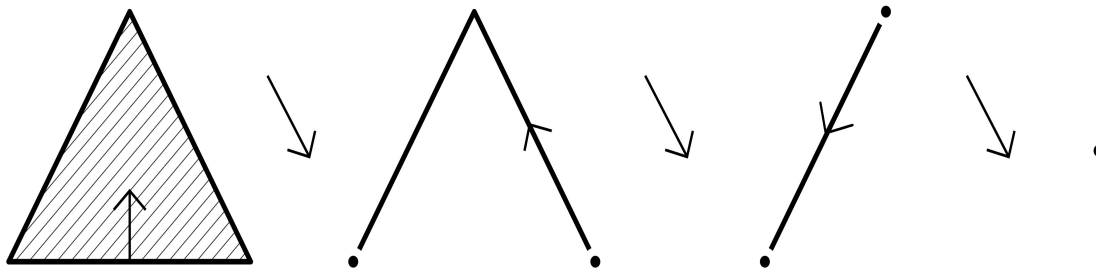
Se verifica que un complejo simplicial K es conexo si y solo si su 1-esqueleto K^1 es conexo por caminos; es decir, si dos cualesquiera de sus vértices pueden unirse por un camino formado por aristas de K .

DEFINICIÓN 1.1.5. Sean K y K' complejos simpliciales. Se dice que K' es una *subdivisión* de K si se cumple que $|K| = |K'|$ y que, si $\sigma' \in K'$ entonces existe un $\sigma \in K$ tal que $\sigma' \subseteq \sigma$. Esta última condición puede sustituirse por que todo símplex de K es unión de símplices de K' . En particular los vértices de K son vértices de K' .

DEFINICIÓN 1.1.6. Sea K un complejo simplicial. Un *símplex principal* de K es un símplex que no es cara propia de ningún símplex de K . Si $\tau < \sigma$ es una cara propia que no es cara propia de otro símplex, se dice que τ es *cara libre* de σ . Obsérvese que necesariamente $\dim \tau = \dim \sigma - 1$.

Supongamos que K tiene un símplex principal σ con cara libre τ . Entonces, el subcomplejo $K_1 = K - \{ \sigma, \tau \}$ se llama *colapso elemental* de K a través de τ , y se escribirá $K \searrow K_1$.

Una sucesión $K \searrow K_1 \searrow K_2 \searrow \dots \searrow K_n$ de colapsos elementales se llamara *colapso* de K a K_n , y se indicará mediante la notación $K \searrow K_n$. Si K_n es un vértice, se dice que K es *colapsible*, y se usa la notación $K \searrow 0$. En la siguiente figura se observa el proceso de colapso desde el complejo generado por un 2-símplex hacia uno de sus vértices.



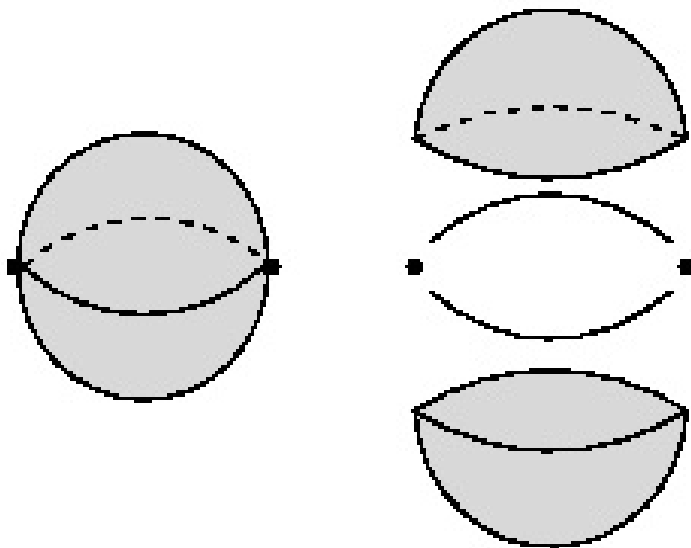
Nótese que si $K \searrow L$, entonces $|L|$ es retracto de deformación de $|K|$. En particular, si K es colapsible, entonces $|K|$ es contráctil.

DEFINICIÓN 1.1.7. Un espacio X se llama *CW-complejo* o *complejo celular* si existe una familia finita creciente de subespacios $X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n = X$ tal que :

- i) X^0 es un conjunto discreto, cuyos elementos son llamados *0-células*.
- ii) Existen aplicaciones de pegamiento $\phi_\alpha : S^{k-1} \rightarrow X^{k-1}$, tal que X^k , llamado *k-esqueleto* de X , es el espacio cociente de la unión disjunta de X^{k-1} con una colección de k -discos D_α^k bajo las identificaciones $x \sim \phi_\alpha(x)$ para todo $x \in \partial D_\alpha^k$. Es decir

$$X^k = X^{k-1} \bigcup_{\phi_\alpha} D_\alpha^k$$

En la siguiente figura se indica una estructura de CW-complejo sobre la esfera S^2 formado por dos 0-células, dos 1-células y dos 2-células.



A continuación se introducirán las nociones básicas de homología simplicial.

DEFINICIÓN 1.1.8. Sea K un complejo simplicial. Dado un símplece $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, se define la relación de equivalencia \sim sobre el conjunto de las posibles reordenaciones de los vértices de σ de la siguiente manera: $(a_0, a_1, \dots, a_n) \sim (a_{\pi_0}, a_{\pi_1}, \dots, a_{\pi_n})$ si π es una permutación par de los índices, es decir, si se puede pasar de una ordenación a otra mediante un número par de trasposiciones.

Esta relación es de equivalencia, y da lugar a dos clases de equivalencia, cada una llamada una *orientación* de σ . Fijada una orientación, σ se llama *símplece orientado*, y se denotará por $[a_{\pi_0}, a_{\pi_1}, \dots, a_{\pi_n}]$ el símplece $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ con la orientación definida por la permutación π .

DEFINICIÓN 1.1.9. Sean $q > 0$, σ^q un q -símplece, y σ_1^q y σ_2^q las dos posibles orientaciones sobre σ^q . Dado un cuerpo \mathbb{F} , sea $C_q(K; \mathbb{F})$ el \mathbb{F} -espacio vectorial generado por los q -símplices orientados de K , cociente por el subespacio generado por los elementos de la forma $\sigma_1^q + \sigma_2^q$.

Se prueba que $C_q(K; \mathbb{F})$ es un \mathbb{F} -espacio vectorial para el cual una base se obtiene al escoger en cada q -símplece $\sigma \in K$ una orientación, e identificar el elemento $-\sigma \in C_q(K; \mathbb{F})$ con σ con la orientación opuesta.

Si $q = 0$, $C_0(K; \mathbb{F})$ es el \mathbb{F} -espacio vectorial generado por los vértices de K , y si $q < 0$ se toma $C_q(K; \mathbb{F}) = 0$.

DEFINICIÓN 1.1.10. Se define el *operador borde* como el homomorfismo de \mathbb{F} -espacios vectoriales $\partial_q : C_q(K; \mathbb{F}) \rightarrow C_{q-1}(K; \mathbb{F})$ dado por la extensión lineal de $\partial_q [a_0, a_1, \dots, a_q] = \sum_{i=0}^q (-1)^i [a_0, a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_q]$, donde $(a_0, a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_q)$ es el $(q-1)$ -símplice orientado obtenido al eliminar el vértice que ocupa el lugar i .

Se verifica que $\partial_q \partial_{q+1} = 0$, por lo que $\{C_q(K; \mathbb{F}), \partial_q\} = C_*(K; \mathbb{F})$ es un complejo de cadenas, llamado *complejo de cadenas simpliciales de K* .

DEFINICIÓN 1.1.11. Los \mathbb{F} -espacios vectoriales $Z_q(K; \mathbb{F}) = \text{Ker } \partial_q$ y $B_q(K; \mathbb{F}) = \text{Im } \partial_{q+1}$ se llaman, respectivamente, q -ciclos y q -bordes simpliciales con coeficientes en \mathbb{F} , y $H_q(K; \mathbb{F}) = \frac{Z_q(K; \mathbb{F})}{B_q(K; \mathbb{F})}$ se llama el q -ésimo \mathbb{F} -espacio vectorial de homología simplicial de K .

Se define el i -ésimo número de Betti $b_i(K; \mathbb{F})$ de un complejo simplicial K con coeficientes en \mathbb{F} como $b_i(K) = \dim H_i(K; \mathbb{F})$. La característica de Euler-Poincaré de K se define como $\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i(K; \mathbb{F})$.

EJEMPLO.

- i)* Si K es colapsible, entonces $b_0(K, \mathbb{F}) = 1$ y $b_i(K, \mathbb{F}) = 0 \forall i \geq 1$.
- ii)* Si K es un grafo conexo, entonces $b_0(K, \mathbb{F}) = 1$, y $b_1(K, \mathbb{F})$ es el número de aristas que quedan fuera de un árbol maximal de K .
- iii)* Si K es una superficie compacta y conexa, entonces $b_2(K, \mathbb{Q}) = 1$ si K es orientable y 0 si no lo es.

1.2. Teoría de Morse diferenciable

Recordemos algunas definiciones básicas de la Teoría de Morse clásica para posteriormente compararla con las nociones de la Teoría de Morse discreta. En dicho tema, la noción básica es la de punto crítico de una función, que permitirá estudiar la topología de la variedad según sea la naturaleza de éstos.

DEFINICIÓN 1.2.1. Sea M una n -variedad diferenciable y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, un punto $p \in M$ se llama *punto crítico* de f si $(df)_p = 0$.

En términos de una carta $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde U es un entorno abierto de p en M y $\Phi(p) = 0$, $(df)_p$ se representa por la matriz

$$\left(\frac{\partial(f \circ \Phi^{-1})}{\partial x_1}(0), \dots, \frac{\partial(f \circ \Phi^{-1})}{\partial x_n}(0) \right)$$

Si, por abuso de notación, se escribe f en vez de $f \circ \Phi^{-1}$, el teorema de Taylor proporciona la igualdad:

$$f(x) - f(0) = \sum a_i x_i + \frac{1}{2} \sum a_{ij} x_i x_j + \text{resto}$$

donde

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \quad a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$$

Si p es un punto crítico, es decir, si $\sum a_i x_i = 0$, se tiene que la matriz (a_{ij}) es una forma bilineal simétrica en el espacio tangente $T_p(M)$ llamada hessiano de f en p . El número de autovalores negativos del hessiano de f en p se llama índice de p , y se denota por $\lambda(f, p)$ ó $\lambda(p)$. Se dice que un punto crítico es no degenerado si el hessiano de f en p es de rango máximo.

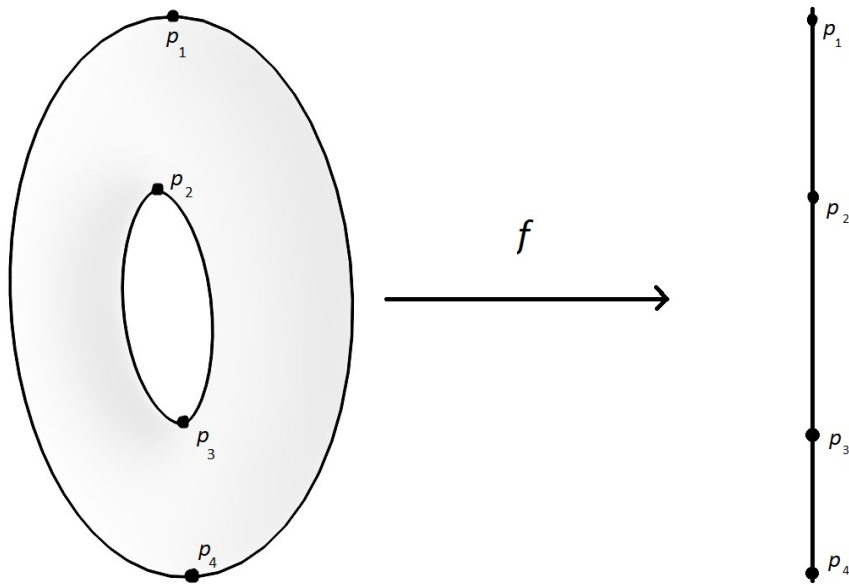
La función f se llama *función de Morse* si todos sus puntos críticos son no degenerados. El *Lema de Morse* establece que existe una carta local Φ en p tal que:

$$f(x) - f(0) = -\sum_{i=0}^{\lambda(p)} x_i^2 + \sum_{i=\lambda(p)+1}^n x_i^2$$

Es conocido que toda aplicación diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ puede aproximarse por una función de Morse y que los puntos críticos de este tipo de funciones son aislados, por lo que si M es compacta, su número es finito. De hecho al menos tiene dos, que son el máximo y el mínimo globales de f . Se verifica que si una función de Morse definida sobre M tiene exactamente dos puntos críticos, entonces M es homeomorfo a S^n . A este resultado se le conoce como el *Teorema de la Esfera* (8.2 [6]).

La teoría de Morse es una herramienta muy útil en el estudio de la topología de variedades diferenciables debido, en último término, a que permitió demostrar que la topología del espacio subyacente se refleja en la naturaleza de los puntos críticos de las funciones reales definidas sobre él. Para establecer con precisión qué significa esto, usaremos un ejemplo ilustrativo, que también nos será de utilidad para aclarar otros

puntos de nuestra exposición.



Sea M la inmersión del toro en \mathbb{R}^3 que se indica en la figura y f la proyección sobre el eje OZ . Éste es el ejemplo mas típico de función altura sobre una variedad inmersa en un espacio euclídeo, cuyos puntos críticos son aquellos en los que el plano tangente a la variedad es perpendicular a dicho eje. En nuestro caso, f tiene cuatro puntos críticos: el máximo p_1 , el mínimo p_4 , y dos puntos de silla, p_2 y p_3 .

Así, en el ejemplo de la función altura sobre el toro, se observa que el índice de cada punto crítico es el número de direcciones principales a lo largo de las que una partícula situada en él puede descender. Consideremos los conjuntos $M^a = \{x \in M / f(x) \leq a\}$ llamados conjuntos de subnivel. Se observan que se producen los siguientes cambios geométricos en los mismos:

1. Si $a < 0 < f(p_4)$, $M^a = \emptyset$.
2. Si $f(p_4) < a < f(p_3)$, M^a es homeomorfo al disco bidimensional cerrado, D^2 .
3. Si $f(p_3) < a < f(p_2)$, M^a es homeomorfo al cilindro.
4. Si $f(p_2) < a < f(p_1)$, M^a es una superficie de género 1 con borde S^1 .
5. Si $f(p_1) < a$, M^a es el toro.

Así pues, el tipo de homotopía de un conjunto de subnivel cambia cuando supera la altura de un punto crítico. Pero, además, se observa la siguiente relación topológica entre dichos conjuntos:

- El subnivel 2 es del mismo tipo de homotopía que una 0-célula.
- El subnivel 3 es del mismo tipo de homotopía que el 1 con una 1-célula pegada.
- El subnivel 4 es homotópicamente equivalente al 3 tras pegarle una 1-célula.
- El subnivel 5 es homotópicamente equivalente al 4 con una 2-célula pegada.

En resumen, M puede obtenerse, salvo tipo de homotopía, pegando células a los conjuntos M^a determinados por los puntos críticos. Este ejemplo ilustra los siguientes teoremas que caracterizan el tipo de homotopía de una variedad compacta en términos de puntos críticos de funciones de Morse, y cuya demostración detallada puede verse en [9].

TEOREMA 1.2.2. *Sean M una variedad diferenciable compacta, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, y $a, b \in \mathbb{R}$. Si $f^{-1}[a, b] = \{p \in M / a \leq f(p) \leq b\}$ no contiene puntos críticos, entonces M^a es difeomorfo a M^b .*

TEOREMA 1.2.3. *Sean M una variedad diferenciable, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ función diferenciable, y p un punto crítico no degenerado de f de índice λ , con $f(p) = c$. Dado $\epsilon > 0$, si $f^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$ no contiene puntos críticos además de p , entonces $M^{c+\epsilon}$ tiene el mismo tipo de homotopía de $M^{c-\epsilon}$ con una λ -célula pegada.*

Como consecuencia de ambos resultados, se obtiene el llamado Teorema fundamental de la teoría de Morse.

TEOREMA 1.2.4. *Sean M una variedad diferenciable compacta y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ función de Morse. Entonces M tiene el tipo de homotopía de un CW-complejo, con una célula de dimensión λ por cada punto crítico de índice λ .*

Teoría de Morse Discreta

2.1. Funciones de Morse discretas

Abordaremos ahora el estudio de las funciones de Morse discretas. Se trata de aplicaciones que asignan valores reales a los i -símplices de un complejo, siguiendo una serie de reglas que respetan de manera casi compatible la estructura simplicial. Esencialmente, puede decirse que una función de Morse discreta f es aquella que asigna a toda cara de un símplex σ un valor estrictamente menor que $f(\sigma)$ con a lo más una excepción y, a todo símplex del que σ es cara un valor estrictamente mayor que $f(\sigma)$ con a lo más una excepción. De forma más precisa, Forman introduce la siguiente definición, que aunque pueda parecer muy distinta de la noción de función de Morse en el caso diferenciable, es una consecuencia natural de la noción de campo gradiente adaptada al contexto combinatorio.

DEFINICIÓN 2.1.1. Una *función de Morse discreta* definida sobre K es una función $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para todo n -símplex $\sigma^{(n)}$

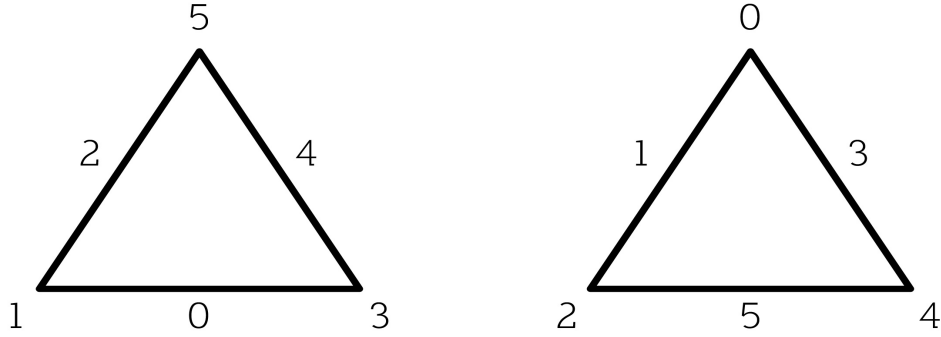
(i) Si $\tau^{(n+1)}$ es un $(n+1)$ -símplex de K , se tiene que

$$\text{card} \left\{ \tau^{(n+1)} > \sigma \mid f(\tau) \leq f(\sigma) \right\} \leq 1$$

(ii) Si $\nu^{(n-1)}$ es un $(n-1)$ -símplex de K , se tiene que

$$\text{card} \left\{ \nu^{(n-1)} < \sigma \mid f(\nu) \geq f(\sigma) \right\} \leq 1$$

En el ejemplo siguiente, la función de la izquierda no es de Morse, mientras que la de la derecha sí lo es.



La idea de la definición es que si $\sigma < \tau$ y $f(\sigma) \geq f(\tau)$, la función decrece desde σ hacia τ , por lo que se podrá empujar τ desde la cara σ . En cierto sentido, f indica los símlices que se pueden eliminar sin alterar el tipo de homotopía del complejo.

Por tanto, si como en el caso diferenciable se pretende disponer de una noción de elemento crítico de una función de Morse que refleje la información relevante sobre la topología del complejo, es lógico considerar que dichos elementos críticos correspondan a los símlices que no sufran deformaciones. Esta idea intuitiva es la que está detrás de la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.1.2. Dada una función de Morse discreta $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que un n -símlice $\sigma \in K$ es crítico para f si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- (i) $\text{card} \{ \tau^{(n+1)} > \sigma \mid f(\tau) \leq f(\sigma) \} = 0$
- (ii) $\text{card} \{ \nu^{(n-1)} < \sigma \mid f(\nu) \geq f(\sigma) \} = 0$

De las condiciones (i) e (ii) de la definición anterior, se deduce inmediatamente que σ es un n -símlice no crítico si y sólo si se verifica una de las siguientes condiciones:

- (i') Existe $\tau^{(n+1)} > \sigma$ tal que $f(\tau^{(n+1)}) \leq f(\sigma)$
- (ii') Existe $\nu^{(n-1)} < \sigma$ tal que $f(\nu^{(n-1)}) \geq f(\sigma)$

Éstas dos condiciones no pueden darse simultáneamente en virtud del Lema 2.5 de [5].

Es interesante señalar que no siempre los símlices críticos de una función de Morse discreta indican propiedades topológicas de interés, ya que su número puede ser innecesariamente elevado o corresponder a funciones de Morse, en cierto modo, triviales. Por ejemplo, si K es un complejo cualquiera y $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f(\sigma) = \dim(\sigma)$, todos los símlices de K serían críticos respecto a f . De hecho, como se

estudia en la Sección 2.3, una función de Morse discreta será tanto más adecuada para indicar cómo es la topología de un complejo cuanto menos simplices críticos tenga.

Los siguientes resultados prueban que, al igual que en el caso diferenciable, y en condiciones relativamente generales, los valores máximos y mínimos de una función de Morse discreta se alcanzan sobre simplices críticos.

PROPOSICIÓN 2.1.3. *Sea f una función de Morse discreta definida sobre un complejo simplicial K . Se verifica que todo mínimo de f se alcanza sobre un 0-símplice de K que además es vértice crítico de f en K .*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, probemos que todo mínimo de f debe alcanzarse necesariamente sobre un 0-símplice. En efecto, si se alcanzara en un símplice de dimensión $p \geq 1$, éste tiene $p + 1$ simplices en su borde y, por tanto, no se cumpliría la segunda condición de la definición de función de Morse discreta.

Veamos ahora que los 0-simplices sobre los que se alcanzan los mínimos de f han de ser críticos. Dado que los mínimos se alcanzan sobre simplices de dimensión 0, sólo tiene sentido plantearse para éstos la primera condición de la definición de símplice crítico, y ésta se tiene precisamente por ser mínimos. \square

PROPOSICIÓN 2.1.4. *Sea f una función de Morse discreta definida sobre un complejo simplicial K tal que ningún símplice de dimensión menor que la máxima tiene caras libres. Se verifica que todo máximo de f se alcanza sobre un símplice de dimensión máxima de K que es, además, punto crítico de f en K .*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, recordemos que en un complejo simplicial de dimensión n en las condiciones anteriores, todo p -símplice tal que $p \leq n - 1$ es cara de al menos dos $(p + 1)$ -simplices. Sea σ un símplice de dicho complejo sobre el cual f alcanza un máximo y supongamos que su dimensión es $p \leq n - 1$. Sabemos que han de existir al menos dos $(p + 1)$ -simplices τ_1 y τ_2 tales que σ es cara de ambos. Dado que f alcanza un máximo sobre σ , en particular se verifica que $f(\sigma) > f(\tau_i)$, con $i = 1, 2$. Esta última afirmación está en contradicción con la primera condición de la definición de función de Morse discreta. Por tanto, σ ha de ser un símplice de dimensión máxima. Para concluir, probemos que σ es símplice crítico de f . Dado que σ es de dimensión máxima, no existen simplices que lo tengan como cara y por tanto, sólo tiene sentido comprobar la segunda condición de la definición de símplice crítico, pero ésta se verifica directamente ya que equivale a afirmar f alcanza sobre σ un máximo. \square

Como en el caso diferenciable, en la teoría de Morse discreta se dispone de una versión de las desigualdades de Morse, que relacionan los números de Betti y la característica de Euler de un complejo simplicial con la cantidad de simplices críticos de una función de Morse definida sobre él.

Si $m_p(f)$ denota el número de p -simplices críticos de f , se tienen los siguientes resultados, cuyas demostraciones detalladas pueden verse en 1.7 y 1.8 de [6] o en 4.5.1 y 4.5.3 de [10]:

TEOREMA 2.1.5. (*Desigualdades fuertes de Morse*). Sea K un complejo simplicial finito sobre el que esta definida una función de Morse discreta f . Para todo $p \geq 0$ se tiene que

$$m_p(f) - m_{p-1}(f) + \cdots \pm m_0(f) \geq b_p - b_{p-1} + \cdots \pm b_0$$

Donde $m_p(f)$ es el número de p -simplices críticos de f . Dicho número se llama número de Morse de f de índice p .

TEOREMA 2.1.6. (*Desigualdades débiles de Morse*). Sea K un complejo simplicial finito sobre el que está definida una función de Morse discreta f . Entonces:

- (i) Para todo $p \geq 0$ se tiene que $m_p(f) \geq b_p$.
- (ii) $m_0(f) - m_1(f) + m_2(f) - \cdots \pm m_{\dim(K)}(f) = b_0 - b_1 + b_2 - \cdots \pm b_{\dim(K)}$

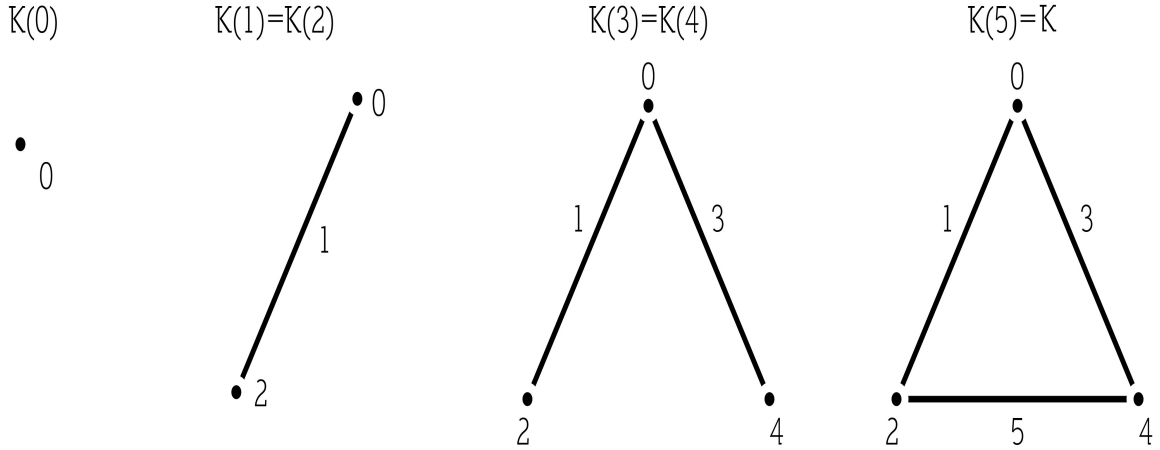
Obsérvese que de la desigualdad (i) se deduce que los números de Betti establecen una cota inferior al número de simplices críticos de cada dimensión, y por tanto siempre existen 0-simplices críticos para funciones de Morse sobre complejos finitos.

También pueden interpretarse las desigualdades de Morse como cotas superiores de los números de Betti de un complejo, aunque desde luego son de escaso interés si el número de simplices es elevado. En ese caso, se presentan dos dificultades: por un lado, no es fácil definir explícitamente funciones de Morse sobre él, y por otro, el número de sus simplices críticos, incluso el de los de dimensión 0, puede ser tan grande que la información proporcionada sea irrelevante. Esta posibilidad refuerza el interés por desarrollar la teoría de Morse discreta sobre CW -complejos, aunque los detalles técnicos resulten más complicados.

DEFINICIÓN 2.1.7. Sea $c \in \mathbb{R}$, f una función de Morse discreta definida sobre un complejo simplicial K , se define el *subcomplejo de nivel c* como el subcomplejo de K :

$$K(c) = \bigcup_{f(\sigma) \leq c} \bigcup_{\tau \leq \sigma} \tau$$

La siguiente figura representa los subcomplejos de nivel de la función de Morse definida en la figura que sigue a la Definición 2.1.1.



Los siguientes resultados son análogos a los ya mencionados para la teoría de Morse diferenciable, y una demostración detallada de los mismos pueden verse en 4.3.1, 4.3.3 y 4.3.5 de [2].

PROPOSICIÓN 2.1.8. Sean $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse discreta, y $a, b \in \mathbb{R}$ tales que no hay simplices críticos en $f^{-1}(a, b]$. Entonces $K(b)$ es homotópicamente equivalente a $K(a)$. De hecho, $K(b)$ colapsa a $K(a)$.

PROPOSICIÓN 2.1.9. Sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse discreta, y $a, b \in \mathbb{R}$ tales que hay un único simplex crítico $\sigma^p \in f^{-1}(a, b]$. Entonces existe una aplicación $F : S^{(p-1)} \rightarrow K(a)$, tal que $K(b)$ es homotópicamente equivalente a $K(a) \cup_F B^p$.

TEOREMA 2.1.10. (Teorema fundamental de la teoría de Morse discreta) Sea K un complejo simplicial, y f una función de Morse discreta sobre K . Se tiene que K es homotópicamente equivalente a un CW complejo con exactamente una célula de dimensión p por cada simplex crítico de dimensión p .

Este resultado es interesante pues significa que mientras menor sea el número de simplices críticos de las funciones de Morse sobre un complejo, más sencilla será la estructura celular que podemos definir sobre él. Ahora bien, salvo en los casos particulares que se indican en la Sección 2.3, no es posible dar un método general eficiente para obtener para obtener una función de Morse óptima, ni siquiera en dimensión dos.

2.2. Campos Gradientes Discretos

En realidad, la noción básica de la teoría de Morse discreta es la de campo gradiente discreto, que está a su vez basada en la noción de campo vectorial en una variedad diferenciable. Suelen éstos representarse gráficamente como una sucesión de flechas, que corresponden a vectores tangentes a ciertos puntos de una trayectoria en la variedad. Por tanto, parece natural trasladar esta noción a los complejos simpliciales partiendo del concepto de trayectoria en un complejo simplicial, entendida, no solo como una sucesión de vértices y aristas, sino en general, para cualquier dimensión k , como una sucesión o una cadena de símlices k -dimensionales de manera que dos consecutivos comparten una cara $k - 1$ -dimensional. Entonces el papel de las flechas en la visualización de un campo vectorial diferenciable lo desempeñarían las flechas dibujadas entrando en el k -símplice en el que nos situamos en nuestro recorrido, partiendo de su intersección con el anterior.

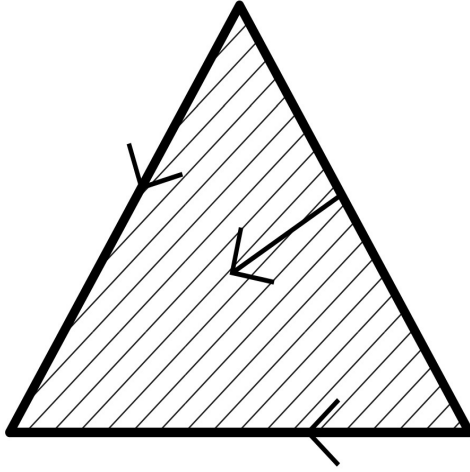
Pero como ya indicamos en la Introducción, la teoría de Morse discreta se propone simplificar el tipo de homotopía de un complejo llevando a cabo operaciones de eliminación o deformación en algunos símlices, y para codificar este procedimiento se hace lo mismo que para expresar gráficamente un colapso elemental; dibujaremos una flecha que entre en el símplice que estamos colapsando y que salga de la cara libre a lo largo de la cual estamos haciendo el colapso. Por tanto, en la teoría de Morse discreta juegan un papel esencial los campos vectoriales discretos en los que las flechas reflejen las operaciones indicadas, y por ello deben cumplir unas restricciones mínimas, como son que de un símplice no puede salir más de una flecha, en un símplice no puede entrar más de una flecha, y que en un símplice no puede entrar y salir a la vez una flecha de él, y estas ideas intuitivas quedan formalizadas en la siguiente:

DEFINICIÓN 2.2.1. Sea K un complejo simplicial. Un *campo vectorial discreto* sobre K es una colección V de pares de símlices de K de dimensiones consecutivas,

$$V = \left\{ \left(\alpha^{(p)}, \beta^{(p+1)} \right) / \alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)} \right\},$$

tales que cada símplice de K está a lo más en un par de V .

En el siguiente dibujo se indica un campo vectorial discreto definido sobre un 2-símplice, donde las flechas representan los pares de símlices que lo forman.



Sea K un complejo simplicial y V un campo vectorial discreto definido sobre K . Un V -camino es una sucesión de símlices,

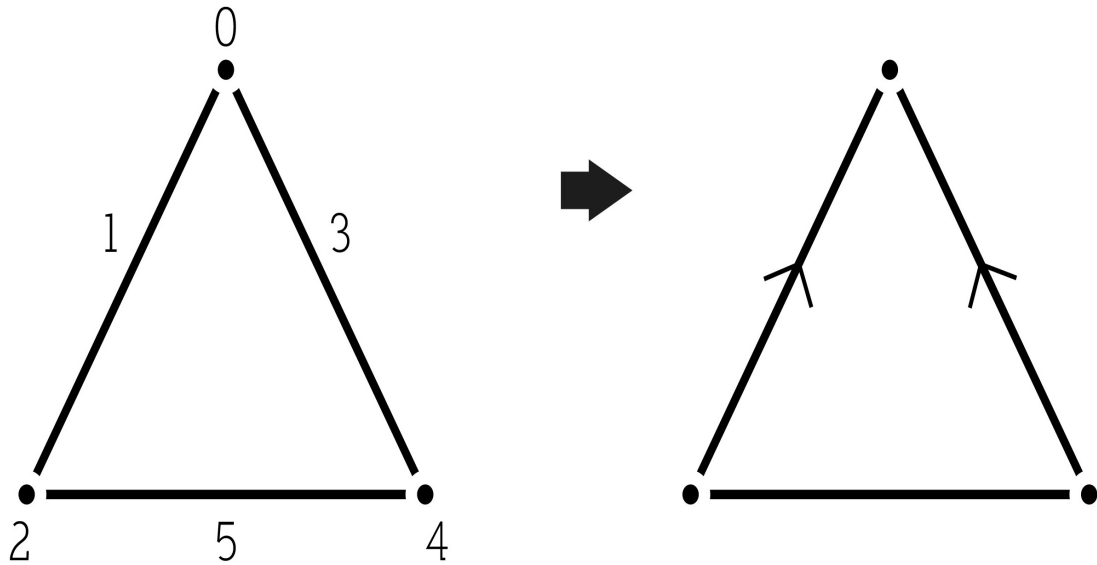
$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \dots, \alpha_r^{(p)}, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)}$$

tal que para todo $i = 0, \dots, r$ se tiene $\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)}$, $(\alpha_i^{(p)}, \beta_i^{(p+1)}) \in V$ y $\beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)} \neq \alpha_i^{(p)}$. Se dirá que un V -camino es *cerrado* si $r \geq 0$ y $\alpha_0 = \alpha_{r+1}$.

A continuación se introduce el concepto de campo gradiente asociado a una función de Morse discreta, que consiste en seleccionar las parejas de símlices (σ, τ) con $f(\tau) < f(\sigma)$. Procediendo de esta forma se puede decir que un campo gradiente es aquel en cuyas trayectorias la función es decreciente.

DEFINICIÓN 2.2.2. Sea K un complejo simplicial sobre el que está definida una función de Morse discreta f . Se define el *campo gradiente asociado a f* , V_f , como la colección de pares de símlices de K , $(\alpha^{(p)}, \beta^{(p+1)})$, con $\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}$, tales que $(\alpha^{(p)}, \beta^{(p+1)}) \in V_f$ si y sólo si $f(\beta) \leq f(\alpha)$.

En la siguiente figura, en el dibujo de la derecha se indica el campo gradiente asociado a la función de Morse f definida sobre el 1-complejo de la izquierda.



Se puede comprobar que el campo gradiente inducido por una función de Morse verifica la definición de campo vectorial discreto.

PROPOSICIÓN 2.2.3. *Todo campo gradiente V_f es un campo vectorial discreto.*

Nótese que el campo gradiente contiene toda la información relativa a los símplices críticos de la función. En efecto, los símplices críticos de V_f son aquellos que no cumplen ninguna de las condiciones de la Definición 2.1.2. Como es evidente que es más cómodo representar V_f que indicar los valores de f , en la teoría de Morse discreta suele trabajarse con los gradientes de las funciones en vez de con las propias funciones, salvo en las cuestiones relacionadas con los complejos de nivel. Por tanto, un problema interesante desde el punto de vista práctico es cómo poder asegurar que cuando representamos un campo discreto sobre un complejo simplicial es el gradiente de una función de Morse.

La definición de campo gradiente permite aclarar las condiciones dadas en la definición de función de Morse discreta. En efecto, la noción básica de la teoría es la de campo vectorial discreto, y en su definición se pretende que queden reflejadas las propiedades que ya indicamos. Por tanto, el primer requisito que ha de verificar una definición adecuada de función de Morse discreta es que se adapte bien a la idea geométrica de campo gradiente. Desde este punto de vista, es claro que tal tipo de función debe estar definida sobre los elementos de K , es decir, sobre sus símplices, y tomar valores en \mathbb{R} . Por otra parte, si un par de símplices aparece en el gradiente, los valores de la función en ellos deben expresar

dos condiciones: por un lado el primer elemento del par es una cara libre del segundo, por el cual se produce un colapso elemental a través de dicho par, y por tanto la función debe ser decreciente al ir recorriendo la trayectoria de dicho gradiente. Todo ello se satisface exigiendo a la función las condiciones de la Definición 2.2.1.

Trataremos a continuación el problema de caracterizar los campos vectoriales discretos que son campos gradientes. Veremos que son aquellos en los que no existen V -caminos cerrados de dimensión 1. Comencemos por formalizar el concepto de camino gradiente.

DEFINICIÓN 2.2.4. Sea K un complejo simplicial sobre el que está definida una función de Morse discreta f y sea V_f el campo gradiente asociado a f . Un *camino gradiente* ó V_f -camino es una sucesión de simplices:

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \dots, \alpha_r^{(p)}, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)},$$

tal que para todo $i = 0, \dots, r$, el par $(\alpha_i^{(p)}, \beta_i^{(p+1)})$, con $\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)}$, está en V_f .

A partir de esta definición se obtiene el siguiente resultado, que caracteriza los caminos gradientes de una función de Morse como aquellos a lo largo de los cuales es decreciente.

TEOREMA 2.2.5. Si V_f es el campo gradiente de una función de Morse discreta f definida sobre un complejo simplicial K , una sucesión de simplices

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \dots, \alpha_r^{(p)}, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)}$$

es un V_f -camino si y sólo si $\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)}$, para cada $i = 0, \dots, r$ y

$$f(\alpha_0) \geq f(\beta_0) > f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) > \dots \geq f(\beta_r) > f(\alpha_{r+1})$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la sucesión de simplices

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \dots, \alpha_r^{(p)}, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)}$$

es un V -camino asociado al campo gradiente V , es decir, es una camino gradiente de f en M . Por definición de V -camino se verifica que $\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)}$ con $i = 0, \dots, r$. Por otro lado, al ser V campo gradiente y dado que $(\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)}) \in V$, se tiene que $f(\beta_i^{(p+1)}) \leq f(\alpha_i^{(p)})$ y $f(\alpha_{i+1}^{(p)}) < f(\beta_i^{(p+1)})$

con $i = 0, \dots, r$. Por ello, si consideramos estas desigualdades a lo largo de todo el V -camino se tiene

$$f(\alpha_0^{(p)}) \geq f(\beta_0^{(p+1)}) > f(\alpha_1^{(p)}) \geq f(\beta_1^{(p+1)}) > \dots \geq f(\beta_r^{(p+1)}) > f(\alpha_{r+1}^{(p)})$$

Recíprocamente, supongamos que la sucesión de simplices

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \dots, \alpha_r^{(p)}, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)}$$

verifica que $\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)}$, para cada $i = 0, \dots, r$ y que

$$f(\alpha_0) \geq f(\beta_0) > f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) > \dots \geq f(\beta_r) > f(\alpha_{r+1}).$$

Entonces, $f(\alpha_i^{(p)}) \geq f(\beta_i^{(p+1)})$, con $i = 0, \dots, r$. En virtud de la definición de campo gradiente, los pares $(\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)})$ están en V . Por otra parte, dado que $f(\alpha_i^{(p)}) \geq f(\beta_i^{(p+1)}) > f(\alpha_{i+1}^{(p)})$, se deduce que $\alpha_{i+1}^{(p)} \neq \alpha_i^{(p)}$. \square

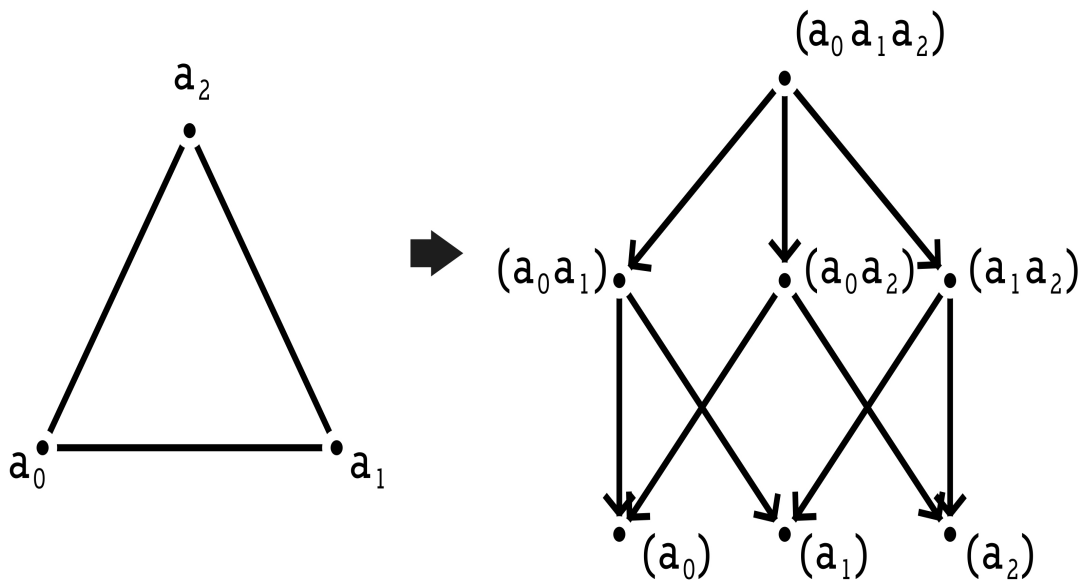
COROLARIO 2.2.6. *Si un campo vectorial discreto V es el campo gradiente de una función de Morse discreta f , entonces no existen V -camino cerrados.*

Más adelante se verá que también se tiene el recíproco, teniéndose una caracterización total de los campos gradientes en términos de la no existencia de caminos cerrados. La demostración detallada y directa del recíproco de éste resultado, que completará la caracterización de los campos gradientes discretos, puede verse en 4.4.3 de [2]. No obstante, Forman [6] dio una demostración usando una técnica totalmente distinta, basándose en la naturaleza puramente combinatorial de la teoría de Morse discreta, que queda claramente puesta de manifiesto cuando se desarrolla dentro del marco de la teoría de grafos. Al fin y al cabo, una función de Morse discreta es una asignación numérica a los simplices de un complejo, que ha de cumplir unas condiciones relativas a las relaciones de incidencia de los mismos, y estas se representan mediante un grafo orientado que se llama diagrama de Hasse del complejo. Por otra parte, ya se ha visto que el gradiente de una función está formado por ciertas parejas de simplices incidentes, así que, como comprobaremos a continuación, los campos gradientes discretos pueden interpretarse como emparejamientos (matchings) en una modificación del diagrama de Hasse.

DEFINICIÓN 2.2.7. Sea K un complejo simplicial. El *diagrama de Hasse asociado a K* es el grafo dirigido H_K , que tiene un vértice por cada simplex de K , y una arista dirigida entre dos vértices si éstos corresponden a dos simplices incidentes de dimensiones consecutivas.

Obsérvese que, por definición, los vértices del diagrama de Hasse de un complejo simplicial se agrupan por niveles correspondientes a la dimensión de los símplex que representan. De este modo, un vértice correspondiente a un p -símplex σ , solo podrá unirse mediante una arista con vértices de los niveles inmediatamente superior o inferior, que representan a aquellos $(p+1)$ -símplex que tienen como cara a σ ó a los $(p-1)$ -símplex que son cara de σ . Por tanto el diagrama de Hasse es un grafo n -partito, en el sentido de que existe una partición de sus vértices, siendo cada conjunto de dicha partición el formado por todos los vértices correspondientes a símplex de la misma dimensión. Por ello dos vértices de un mismo nivel no pueden ser adyacentes.

La figura de la derecha es el diagrama de Hasse asociado a un 2-símplex.



Es inmediato verificar la siguiente propiedad.

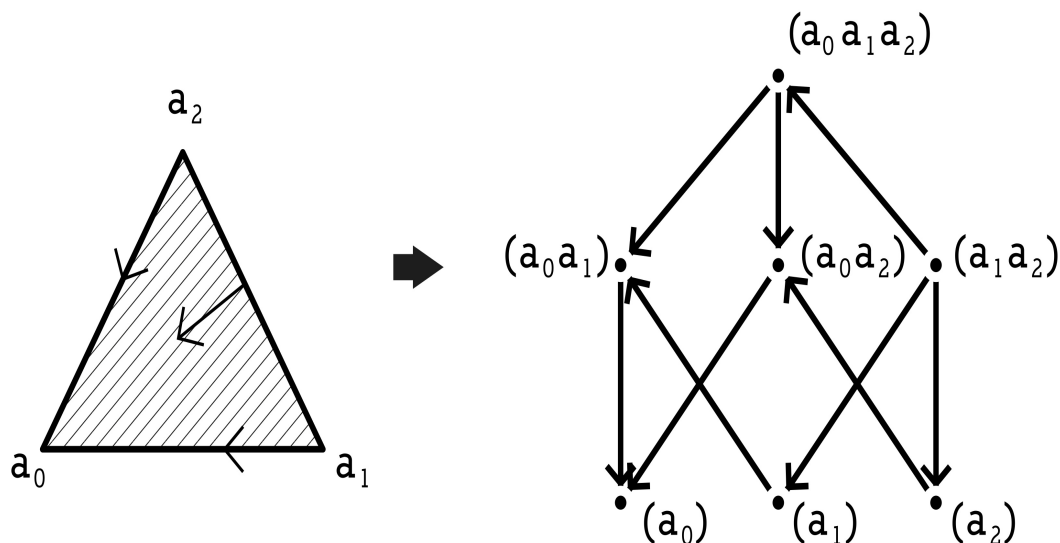
PROPOSICIÓN 2.2.8. *El diagrama de Hasse H_K asociado a un 1-complejo K es una subdivisión de K obtenido al introducir un nuevo vértice en cada arista, y por tanto, topológicamente equivalente al propio K .*

Cuando sobre el complejo simplicial K está definido un campo vectorial discreto, éste induce una modificación sobre el diagrama de Hasse asociado a K del siguiente modo.

DEFINICIÓN 2.2.9. Sea K un complejo simplicial sobre el que está definido un campo vectorial discreto V . Se define el *diagrama de Hasse asociado a K y modificado por V* , $H_V(K)$, como el diagrama

de Hasse asociado a K en el que se cambia la orientación de cada arista si los simplices correspondientes a sus vértices, $\sigma^{(p)}$ y $\nu^{(p+1)}$, constituyen un par de V . Al diagrama de Hasse modificado inducido por el campo gradiente de una función de Morse discreta f definida sobre un complejo K se le llamará *diagrama de Hasse de K modificado por f* y se le denotará por $H_f(K)$.

En la siguiente figura se representa el diagrama de Hasse asociado a un 2-símplice y modificado por el campo gradiente que se indica sobre él.



El siguiente resultado proporciona una interpretación de los campos vectoriales discretos sobre un complejo en términos de ciertos emparejamientos del diagrama de Hasse del complejo.

PROPOSICIÓN 2.2.10. *Si K es un complejo simplicial y V un campo vectorial discreto definido sobre K , las aristas de $H_V(K)$ a las que se les cambia la orientación constituyen un emparejamiento en $H_V(K)$, es decir, son un conjunto de aristas no adyacentes entre sí.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A el conjunto de las aristas de H_K a las que se les cambia la orientación. Se trata de probar que las aristas de A son disjuntas dos a dos. En efecto, supongamos que existen dos aristas de A que son incidentes. Se plantean dos posibilidades.

En primer lugar, supongamos que las dos aristas incidentes de A unen vértices correspondientes a dimensiones $p-1$, p y $p+1$, es decir, existen simplices $\nu^{(p-1)} < \sigma^{(p)} < \tau^{(p+1)}$ en K tales que $(\nu^{(p-1)}, \sigma^{(p)})$ y $(\sigma^{(p)}, \tau^{(p+1)})$ son dos pares de V . Sabemos, por definición de V , que un mismo simplece de K no puede estar en dos o más pares distintos de V . Por tanto, esta primera posibilidad no puede darse.

Por otra parte, supongamos ahora que las dos aristas incidentes de A unen vértices correspondientes a dimensiones $p-1$ y p , es decir, existen símlices $\sigma^{(p-1)}$, $\tau^{(p)}$ y $\nu^{(p)}$ en K tales que $\sigma^{(p-1)}$ es cara común de $\tau^{(p)}$ y $\nu^{(p)}$ y, además, $(\sigma^{(p-1)}, \nu^{(p)})$ y $(\sigma^{(p-1)}, \tau^{(p)})$ son pares de V . Por la misma razón que antes, esta posibilidad no puede darse, ya que implica que $\sigma^{(p-1)}$ está en dos pares de V . \square

Otro concepto básico de la teoría de Morse discreta que puede traducirse a la teoría de grafos mediante la noción del diagrama de Hasse es el de V -camino de un campo vectorial. El siguiente resultado prueba cómo el concepto de V -camino en un complejo puede interpretarse como una propiedad de su diagrama de Hasse.

PROPOSICIÓN 2.2.11. *Sea K un complejo simplicial sobre el que está definido un campo vectorial discreto V . Se verifica que todo V -camino en K induce un 1-camino dirigido en el diagrama de Hasse de K modificado por V , $H_V(K)$.*

DEMOSTRACIÓN. Considérese el siguiente V - camino definido sobre K :

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \dots, \alpha_r^{(p)}, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)}$$

donde $(\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)}) \in V$, $\beta_i^{(p+1)} > \alpha_i^{(p)}$ y $\beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)}$. En virtud de la proposición anterior, al pasar al diagrama de Hasse, cada arista de dicho V - camino se subdivide en un par de aristas incidentes, transformándose así la sucesión de p - símlices y $(p-1)$ - símlices, en una sucesión de vértices y aristas.

Respecto a la orientación, sabemos por la definición de V - camino que cada par de símlices está en V y, por tanto, la arista que une los vértices correspondientes a dichos símlices está orientada de $\alpha_i^{(p)}$ a $\beta_i^{(p+1)}$. Además, y dado que $\alpha_{i+1}^{(p)} < \beta_i^{(p+1)}$ no es un par de V , la arista que une los vértices correspondientes a dichos símlices está orientada de $\beta_i^{(p+1)}$ a $\alpha_{i+1}^{(p)}$. \square

A través del siguiente resultado de teoría de grafos, se formulará una caracterización de los campos vectoriales discretos que son el campo gradiente de una función de Morse discreta.

PROPOSICIÓN 2.2.12. *Si G es un grafo dirigido, existe una función con valores reales definida sobre los vértices de G que es estrictamente decreciente a lo largo de cada camino dirigido si y sólo si no existen lazos dirigidos.*

Por tanto, se tiene el siguiente teorema de caracterización (3.5 de [6]).

TEOREMA 2.2.13. *Un campo vectorial discreto V es el campo gradiente de una función de Morse discreta f si y sólo si no existen V -caminos cerrados*

De esta forma, un campo gradiente V queda caracterizado como aquél que no contiene V - caminos cerrados en K o, de manera equivalente, como aquél que no induce 1-caminos cerrados (ciclos) orientados en el diagrama de Hasse modificado correspondiente.

Conviene destacar que no todo camino orientado en el diagrama de Hasse está inducido por un V -camino definido sobre el complejo simplicial de partida. En realidad, los caminos inducidos por un V -camino en el diagrama de Hasse modificado son de un tipo especial: son los caminos alternados, en el sentido que se precisará a continuación, tales que sus vértices consecutivos están en niveles distintos, correspondientes a dimensiones consecutivas del diagrama de Hasse.

DEFINICIÓN 2.2.14. Sea E un emparejamiento definido sobre un grafo G . Un *camino alternado* en G es un 1-camino cuyas aristas estan alternativamente en E y fuera de E .

Veamos la relación existente entre un campo vectorial discreto definido sobre un complejo simplicial y los caminos alternados sobre el diagrama de Hasse modificado por dicho campo.

PROPOSICIÓN 2.2.15. *Si K es un complejo simplicial sobre el que está definido un campo vectorial discreto V , entonces todo V -camino discreto definido sobre K induce un camino alternado en $H_V(K)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos, en virtud de la Proposición 2.2.10, que todo V - camino en K induce un 1-camino orientado en $H_V(K)$. Sea un V - camino en K dado por la sucesión de símlices,

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \dots, \alpha_r^{(p)}, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)}$$

donde $(\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)}) \in V$, $\beta_i^{(p+1)} > \alpha_i^{(p)}$ y $\beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)}$.

Al considerar el diagrama de Hasse modificado por V , $H_V(K)$, debemos cambiar de orientación aquellas aristas de $H(K)$ que unen vértices cuyos símlices correspondientes $\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)}$ verifican que el par está en V . Por el contrario, las aristas que unen los vértices correspondientes a los símlices $\beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)}$ tales que no están en V , mantienen su orientación inicial. En virtud de la Proposición 2.2.10, las aristas del primer tipo son exactamente las que forman un emparejamiento E inducido por el campo vectorial discreto V . Por ello, las aristas que en $H_V(K)$ unen los vértices correspondientes a los símlices de la sucesión dad están alternativamente en E y fuera de él y, en conclusión, el 1-camino que determinan en $H_V(K)$ es alternado. \square

Conviene destacar que otra característica de los caminos del diagrama de Hasse que están inducidos por un V -camino definido sobre el complejo original es que vértices consecutivos están en niveles distintos y consecutivos del diagrama de Hasse y que, además, dichos niveles son sólo dos para un mismo V -camino.

Es interesante estudiar bajo qué condiciones un subconjunto de símlices de un complejo dado puede ser el conjunto de símlices críticos de una función de Morse discreta definida sobre dicho complejo. Para ello resulta útil trasladar dicho problema al diagrama de Hasse.

TEOREMA 2.2.16. *Un subconjunto C de símlices de un complejo simplicial K es el conjunto de los símlices críticos de una función de Morse discreta definida sobre K si y sólo si existe un emparejamiento E sobre H_K tal que $H_K(E)$ es acíclico, donde $H_K(E)$ denota al diagrama de Hasse de K modificado por el emparejamiento E , y C es el conjunto de vértices de H_K no incidentes con ninguna arista de E .*

Una demostración puede encontrarse en [4].

Veamos cómo sobre el diagrama de Hasse modificado es posible obtener una caracterización de los símlices críticos de f en K estudiando la orientación definida en las aristas que inciden en el vértice correspondiente a un símlice dado.

PROPOSICIÓN 2.2.17. *Sea f una función de Morse discreta definida sobre un complejo simplicial K y $H_f(K)$ el diagrama de Hasse de K modificado por f . Sea σ un p -símlice de K cuyo vértice correspondiente en $H_f(K)$ es v_σ . Se verifica que σ es crítico para f si y sólo si se cumplen las condiciones siguientes:*

(i) *Todas las aristas e_i de $H_f(K)$ incidentes en v_σ y que lo conectan con algún vértice del nivel inmediatamente superior, v_τ , están orientadas de modo que $\partial e_i = v_\sigma - v_\tau$.*

(ii) *Todas las aristas e_j de $H_f(K)$ incidentes en v_σ y que lo conectan con algún vértice del nivel inmediatamente inferior, v_ν , están orientadas de modo que $\partial e_j = v_\nu - v_\sigma$.*

DEMOSTRACIÓN. Usando la definición de símlice crítico, se verifican simultáneamente las dos condiciones siguientes:

(a) Para todo $(p+1)$ -símlice τ del que σ es cara, se tiene que $f(\sigma) < f(\tau)$.

(b) Para todo $(p-1)$ -símlice ν que es cara de σ , se tiene que $f(\sigma) > f(\nu)$.

De (a) y (b) se deduce que al pasar por el diagrama de Hasse, todas las aristas incidentes con ν_σ y que lo unen con vértices del nivel inmediatamente superior (correspondientes a símlices de dimensión $p+1$ que tienen a σ como cara) o con vértices del mismo nivel inmediatamente inferior (correspondientes

a simplices de dimensión $p - 1$ que son caras de σ) están orientadas en sentido “descendente”, es decir, van desde vértices del nivel superior a los de nivel inmediatamente inferior y, por tanto, dichas aristas no modifican su orientación al construir $H_f(K)$. \square

A la vista de la proposición anterior, puede afirmarse que los simplices críticos de una función de Morse discreta f definida sobre un complejo simplicial K son aquellos en los que f y el orden inducido en la estructura simplicial de K por la relación “ser cara de” son compatibles.

COROLARIO 2.2.18. *Bajo las hipótesis de la proposición anterior se verifican las siguientes propiedades :*

(i) σ es un vértice crítico de f en K si y sólo si todas las aristas e_i incidentes en v_σ cumplen que $\partial e_i = v_\sigma - v_\tau$.

(ii) σ es un simplex crítico de dimensión máxima si y solo si todas las aristas e_j incidentes en v_σ cumplen que $\partial e_j = v_\nu - v_\sigma$.

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar la proposición anterior y tener en cuenta que en el diagrama de Hasse los vértices correspondientes a simplices de dimensión máxima únicamente están conectados a los del nivel inmediatamente inferior y, por otro lado, los vértices correspondientes a simplices de dimensión mínima sólo están conectados a los del nivel inmediatamente superior. \square

2.3. Funciones de Morse óptimas y perfectas.

Por las desigualdades débiles de Morse, sabemos que el número de i -simplices críticos de una función de Morse discreta sobre un complejo simplicial es una cota superior del i -ésimo número de Betti del complejo. Resulta entonces que si tenemos una función en las que se cumplen las igualdades, dicha función tendrá el mínimo número posible de simplices críticos, y por la Proposición 2.1.9 nos indicará el mínimo número de células que admite K .

Por otro lado, saber que una función de Morse tiene el mínimo número de simplices críticos es también interesante porque simplifica el cálculo de la homología del complejo, ya que se demuestra que el complejo de cadenas simpliciales de K es isomorfo al complejo de cadenas generado por los simplices críticos, llamado complejo de Morse. Así pues, merece la pena destacar y estudiar las propiedades de las funciones de Morse para las que las desigualdades de Morse débiles son igualdades.

DEFINICIÓN 2.3.1. Una función de Morse discreta f definida sobre K se dice \mathbb{F} -perfecta si $m_i(f) = b_i(K; \mathbb{F})$, $1 \leq i \leq n$. Obsérvese que dichas funciones tienen el menor número posible de simplices críticos sobre K . Veremos a continuación que los grafos y las superficies admiten este tipo de funciones.

PROPOSICIÓN 2.3.2. *Todo grafo K admite al menos una función \mathbb{F} -perfecta.*

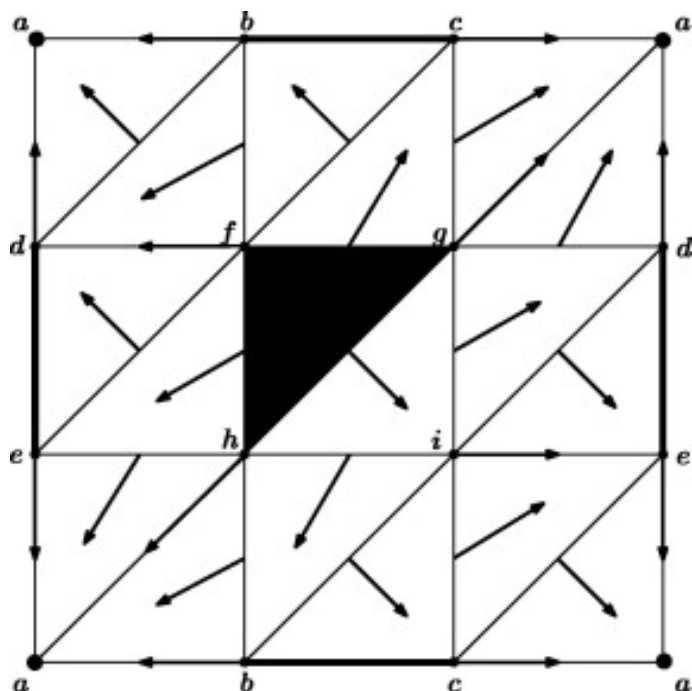
DEMOSTRACIÓN. Por simplificar, supondremos que K es conexo; si no lo es, se aplica los razonamientos siguientes a cada una de sus componentes. Si T es un árbol maximal de K con vértice raíz v , por el Lema 4.3 de [6] existe una función de Morse discreta f sobre T cuyo único simplex crítico es v . Si extendemos f a todo K definiendo $g(e) = \max\{f(v), f(w)\}$, donde e es una arista fuera de T cuyos vértices son v y w , es evidente que $m_0(g) = 1$ y $m_1(g) = b_1(K, \mathbb{F})$. \square

COROLARIO 2.3.3. *Si $\dim K = 2$ y K colapsa a un grafo conexo, entonces K admite funciones \mathbb{F} -perfectas. En particular toda triangulación de K de una superficie compacta, conexa y con borde admite tales funciones pues colapsa a un subgrafo de su 1-esqueleto. (ver p.52 [7]).*

PROPOSICIÓN 2.3.4. *Si K es una triangulación de una superficie compacta cerrada orientable, existe una función de Morse discreta \mathbb{F} -perfecta $f : K \rightarrow \mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. Si τ es un triángulo de K , por el Corolario anterior, existe una función \mathbb{F} -perfecta g sobre $K - \tau$. Pero si f es la extensión de g a K dada por $f(\tau) = \max\{g(\sigma); \sigma \text{ arista de } \tau\}$, f es \mathbb{F} -perfecta. En efecto, $m_0(f) = m_0(g) = 1$, y $m_2(f) = 1$ ya que τ es el único triángulo crítico de f . Además, es inmediato comprobar, aplicando la sucesión de Mayer-Vietoris al par $(\sigma, K - \sigma)$, que $b_1(K; \mathbb{F}) = b_1(K - \sigma, \mathbb{F})$, luego $m_1(f) = m_1(g) = b_1(K, \mathbb{F})$. \square

EJEMPLO. Función de Morse \mathbb{F} -perfecta sobre una triangulación del toro T^2 , donde los vértices y aristas críticos son los señalados en grueso, y el triángulo negro es el único 2-símplex crítico.

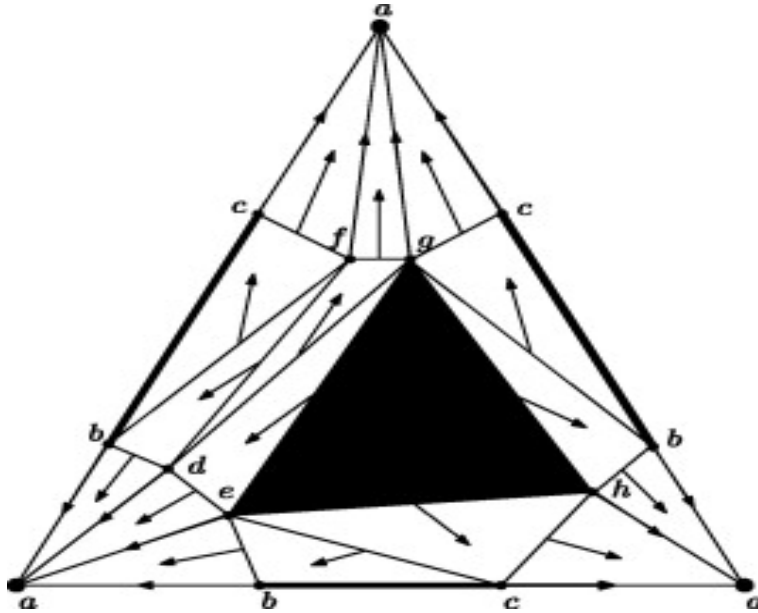


OBSERVACIÓN. Ninguna triangulación K de una superficie cerrada no orientable admite funciones \mathbb{Q} -perfectas. En efecto, en caso contrario, como $b_2(K, \mathbb{Q}) = 0$, aplicando la Proposición 2.1.10 se tendría que K es del mismo tipo de homotopía que un grafo, lo cual no es cierto, pues $b_2(K, \mathbb{Z}_2) = 1$. Ahora bien, como $K - \tau$ colapsa a un grafo G con $b_1(G, \mathbb{Z}_2) = b_1(K, \mathbb{Z}_2)$, razonando como antes se llega al siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.3.5. *Cualquier triangulación K de una superficie cerrada no orientable admite una función \mathbb{Z}_2 - perfecta.*

OBSERVACIÓN. Los ejemplos anteriores parecen indicar que el número máximo de símplices críticos de una función de Morse discreta sobre un complejo coinciden con la suma de los números de Betti de K con coeficientes en un cuerpo adecuado \mathbb{F} , de manera que cada i -símplice crítico está ligado a un generador de $H_i(K, \mathbb{F})$. Sin embargo ello no es cierto en general, y el ejemplo típico es la triangulación del sombrero bobo indicada en la figura que viene a continuación. Por ser K contráctil se tiene que para cualquier cuerpo \mathbb{F} , $b_i(K, \mathbb{F}) = 0$ si $i = 1, 2$ y $b_0(K, \mathbb{F}) = 1$. Luego si K admitiese una función \mathbb{F} -perfecta f , se tendría que $m_0(f) = 1$, $m_1(f) = 0$ y $m_2(f) = 0$. Sin embargo, como veremos más adelante, toda función de Morse sobre el sombrero bobo tiene al menos 3 símplices críticos.

EJEMPLO. Función de Morse discreta óptima (no perfecta) sobre el sombrero bobo



Se plantea así el problema de caracterizar aquellos complejos que admiten funciones \mathbb{F} -perfectas. Para el caso de 2-complejos, ello se consigue mediante el concepto de número de colapso de K , definido por [4].

DEFINICIÓN 2.3.6. Si K es un 2-complejo, se define el número de colapso de K , y se denota por $co(K)$, como el mínimo número de 2-símplices $\tau_1, \dots, \tau_{co(K)}$ tal que $K - \{\tau_1, \dots, \tau_{co(K)}\}$ colapsa a un grafo.

EJEMPLO. Si K es una superficie con borde no vacío, entonces $co(K) = 0$. Si K es una superficie cerrada, entonces $co(K) = 1$. Si K es el sombrero bobo, entonces $co(K) = 1$.

TEOREMA 2.3.7. *Sea K un 2-complejo conexo. Entonces, K admite una función \mathbb{F} - perfecta si y sólo si $co(K) = b_2(K, \mathbb{F})$*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que K admite una función de Morse discreta \mathbb{F} -perfecta f . Por tanto $m_i(f) = b_i(K, \mathbb{F})$, $i = 0, 1, 2$. Quitando los $m_2(f)$ 2-símplices críticos, obtenemos un subcomplejo K' con $b_2(K', \mathbb{F}) = 0$. Obsérvese que la restricción de f a K' es una función de Morse discreta \mathbb{F} -perfecta, y, por tanto, se tiene que K' tiene el mismo tipo de homotopía que un grafo. Consiguientemente K' colapsa a un

grafo, luego $co(K) \leq b_2(K, \mathbb{F})$. En el caso de quitar $m < m_2(f)$ 2-símplices de K , el subcomplejo resultante K'' satisface que $b_2(K'', \mathbb{F}) \geq 1$ y por tanto no colapsaría a un grafo. A continuación, supongamos que $co(K) = b_2(K, \mathbb{F})$. Sea G el grafo resultante del colapso de K' al quitarle $co(K)$ triángulos. Tomando una función \mathbb{F} -perfecta g en G , ésta se puede extender a una función de Morse discreta \mathbb{F} -perfecta f' en K' . Finalmente, se extiende f' a K asignando a cada 2-símplice restante un valor mayor que el resto de valores que tienen sus 1-caras, y se obtendría una función de Morse discreta \mathbb{F} -perfecta. \square

La existencia de ejemplos de 2-complejos en los que no es posible definir funciones de Morse \mathbb{F} -perfectas plantea dos problemas; por una parte, averiguar el mínimo número de símplices críticos que debe tener una función de Morse sobre tales complejos, y, por otra, establecer un método general para obtener funciones de Morse que alcancen ese número. Pero éste es un problema computacionalmente complejo, por lo cual sólo cabe esperar proporcionar algoritmos eficientes en ciertos tipos particulares de 2-complejos, como las superficies o las pseudovariedades (ver [8]).

DEFINICIÓN 2.3.8. Si $\mathcal{F}_M(K)$ es el conjunto de funciones de Morse discreta sobre K , y $f \in \mathcal{F}_M(K)$. Sea $\mu(f) = \sum_{i=0}^n m_i(f)$. Se define la característica de Morse-Smale como

$$\gamma(K) = \min \{ \mu(f) / f \in \mathcal{F}_M(K) \}$$

Una función de Morse se llama óptima si $\gamma(K) = \mu(f)$. Nótese que las funciones de Morse discretas perfectas son óptimas, pero no recíprocamente. Estas funciones son de gran interés, pues de acuerdo con el Teorema 2.1.10, permiten simplificar la estructura celular del complejo, y por tanto, el cálculo de su homología.

OBSERVACIÓN. Sobre un complejo K pueden existir mas de una función óptima, incluso satisfaciendo que su número de i -símplices críticos coincide. Ahora bien, el campo inducido por todos ellos tiene el mismo número de símplices críticos. Entonces, por abuso de lenguaje, diremos que una función de Morse es óptima si su campo asociado tiene el menor número posible de símplices críticos.

Es obvio, por las desigualdades de Morse que si f es de Morse, entonces $m_0(f) \geq 1$. Pero no es evidente que si f es óptima, $m_0(f)$ deba ser 1, pues el exceso de vértices críticos pudiera compensarse con un menor número de símplices críticos de dimensión superior. Pero, en efecto, como cabría esperar, se tiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.3.9. Si $\phi : K \rightarrow \mathbb{R}$ es función de Morse discreta óptima, siendo K un 2-complejo simplicial conexo, entonces $m_0(\phi) = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Veamos, en primer lugar que sobre todo 2-complejo es posible construir una función de Morse discreta tal que $m_0(g) = 1$, $m_1(g) = b_1(K, \mathbb{F})$ y para la cual todos los triángulos de K son críticos. En efecto, si g es una función \mathbb{F} -perfecta sobre el 1-esqueleto de K , para todo 2-símplice $\tau \in K$, se define $f(\tau) = \max \{g(\sigma); \sigma \text{ es arista de } \tau\}$. Supongamos ahora que ϕ es óptima sobre K . Entonces tendríamos:

$$(i) \quad m_0(\phi) + m_1(\phi) + m_2(\phi) \leq 1 + m_1(f) + m_2(f) = 1 + b_1(K) + m_2(f)$$

Pero por las desigualdades de Morse, se cumple

$$m_0(\phi) - m_1(\phi) + m_2(\phi) = \chi(K) = 1 - b_1(K, \mathbb{F}) + m_2(f)$$

Es decir, se verifica

$$(ii) \quad -m_0(\phi) + m_1(\phi) - m_2(\phi) = -1 + b_1(K, \mathbb{F}) - m_2(f)$$

Luego sumando (i) y (ii), se llega a $2m_i(\phi) \leq 2b_i(K, \mathbb{F})$, y de nuevo por las desigualdades de Morse, se tendría $m_1(\phi) = b_1(K, \mathbb{F})$. Por tanto $m_0(\phi) = m_2(\phi) = 1 + b_2(K)$, pero como $m_2(\phi) \geq b_2(K, \mathbb{F})$, ha de ser $m_0(\phi) \leq 1$; es decir, $m_0(\phi) = 1$ □

TEOREMA 2.3.10. Una función de Morse discreta $\phi : K \rightarrow \mathbb{R}$ es óptima si y solo si $m_i(\phi) \leq m_i(f)$ para cualquier función de Morse discreta f .

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición anterior, $m_0(\phi) = 1 = b_0(K) \leq m_0(f)$. Además, $m_1(\phi) = b_1(K, \mathbb{F}) \leq m_1(K)$, y de nuevo por las desigualdades de Morse, tendríamos

$$m_2(f) = m_1(f) + m_0(f) - \chi(K) \geq m_1(\phi) + 1 - \chi(K) = m_2(\phi)$$

□

El siguiente resultado caracteriza a los complejos que admiten funciones óptimas con un solo símlice crítico:

PROPOSICIÓN 2.3.11. K es colapsible si y solo si $\gamma(K) = 1$, es decir, si admite una función óptima con un solo símlice crítico.

DEMOSTRACIÓN. Si K es colapsible a un vértice v , aplicando 4.3 de [6], hay una función de Morse discreta definida sobre K tal que v es el único símplice crítico. Recíprocamente, dada una función de Morse discreta f en K con un solo símplice crítico, por las desigualdades de Morse se tiene que $m_0(f) = 1$. Si v es el único vértice crítico de f en K , entonces $a = f(v)$ es el mínimo valor de f en K . Para ϵ suficientemente pequeño, se tiene que $K(a + \epsilon) = K(a)$. Sea b el máximo de f en K . Entonces, $K(b) = K$, y como el intervalo $[a + \epsilon, b]$ no contiene ningún valor crítico, aplicando la Proposición 2.18 se tiene que $K(b) \searrow K(a)$, y, por tanto, K es colapsible. \square

Este resultado permite comprobar que si K es el sombrero bobo y f es óptima sobre K , entonces $m_0(f) = m_1(f) = m_2(f) = 1$. En efecto como $m_0(f) = 1$ y K es contractible, por las desigualdades de Morse se tiene que $1 - m_1(f) + m_2(f) = 1$. Luego $m_1(f) = m_2(f)$. Ahora bien, como K no es colapsible, por la proposición anterior $m_1(f) \geq 1$ por tanto $\gamma(K) \geq 3$, y en la figura se indica una función de Morse sobre K con $\gamma(K) = 3$.

Teniendo en cuenta que la teoría de Morse puede interpretarse en términos de ciertos emparejamientos en un diagramas de Hasse, veremos cómo es posible expresar la idea de función óptima de una forma mucho más visual e intuitiva.

DEFINICIÓN 2.3.12. Sea E un emparejamiento definido sobre un grafo G . Se dirá que E es un emparejamiento máximo si no existe ningún otro emparejamiento definido sobre G que tenga mas aristas que E .

OBSERVACIÓN. El estudio de las funciones de Morse óptimas sobre un complejo se puede abordar desde el punto de vista de la teoría de emparejamientos. Para ello, basta tener en cuenta la relación que existe entre el cardinal de un emparejamiento acíclico en $H_f(K)$ y el número de símplices críticos de una función de Morse discreta, ya que por el Teorema 2.2.16, cada símplice crítico corresponde a un vértice no contenido en ninguna arista de dicho emparejamiento. Por tanto, el problema de obtener una función de Morse óptima es equivalente a encontrar un emparejamiento máximo en $H_f(K)$, en el sentido de que no exista otro con más aristas que él.

Referencias bibliográficas

1. Ayala R, Fernández-Ternero D, Vilches JA. (2012). Perfect discrete Morse functions on 2-complexes, *Pattern Recogn. Lett.* 33:1495–1500.
2. Capitelli NA. (2009). Colapsabilidad en Variedades Combinatorias y Espacios de Deformaciones. Tesis de Licenciatura, UBA.
3. Chari MK. (2000) On discrete Morse functions and combinatorial decompositions. *Discrete Mathematics* 217:101-113.
4. Egeiöglu Ö, Gonzalez T. (1996) A computationally intractable problem on simplicial complexes. *Comput. Geom.* 6:85–98
5. Forman R. (1998) Morse theory for cell complexes. *Advances in Mathematics* 134: 90-135.
6. Forman R. (2002) A user’s guide to discrete Morse theory. *Sém. Lothar. Combin.* 48Art. B48, 35p.
7. Glaser LC. (1970) Geometrical combinatorial topology I. Van Nostrand.
8. Lewiner T, Lopes H, Tavares G. (2003). Optimal discrete Morse functions for 2-manifolds. *Comput. Geom.* 26 (3):221–233
9. Milnor J. (1963) Morse theory. Princeton University Press.
10. Sirolli NM. (2007). Teoría de Morse discreta. Tesis de Licenciatura, UBA.
11. Vilches Alarcón, JA. (2003). Funciones de Morse discretas sobre complejos infinitos. Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla.