UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Departamento de Matemática Aplicada II

VALORES REALES PARA JUEGOS COOPERATIVOS CON FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DIFUSA

Hugo Galindo Beleña

Sevilla, 2022

Valores reales para juegos cooperativos con función característica difusa

Memoria presentada por Hugo Andrea Galindo Beleña
para optar al grado de Doctor por la Universidad de Sevilla.

Fdo. Hugo Galindo Beleña

V$^{\underline{o}}$ B$^{\underline{o}}$ de los directores:

Fdo. José Manuel Gallardo

Fdo. Andrés Jiménez-Losada

A mi madre,
por todo su esfuerzo.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero dar las gracias a mis directores de tesis, José Manuel Gallardo y Andrés Jiménez-Losada, por concederme la oportunidad de trabajar a su lado. Durante estos años ha habido algunos momentos difíciles donde no se lograban avances, pero siempre han tenido una palabra de ánino para ayudarme a continuar. Ha sido todo un placer haber podido aprender de ellos durante este tiempo.

También quiero dar las gracias a mi familia, y en especial a Salvador, porque he sacrificado mucho tiempo a su lado para poder completar esta tesis, y siempre han sido enormemente comprensivos conmigo. Sin ellos todo esto no hubiese sido posible, y por ello, les estaré siempre agradecido.

Por último, no quiero terminar estas líneas sin dar las gracias a todas las personas que forma parte del IMUS, al equipo de dirección, a personal administrativo y a todos aquellos que hacen posible su buen funcionamiento. Ha sido todo un lujo poder crecer como investigador en una institución como esta. Gracias a todos por su compromiso.

Resumen

La cooperación es un comportamiento social relevante, y en algunos contextos como la economía o la ciencia política, tiene un papel fundamental. Una de las perspectivas desde las que se analizan las situaciones de cooperación es desde la teoría de juegos cooperativos. En ella se estudia el problema fundamental de cómo repartir los beneficios o costes que la cooperación en un proyecto común genera. El modelo que emplea la teoría clásica asume que se conoce con precisión el pago que cada posible coalición puede obtener. Sin embargo, hay situaciones en las que los jugadores solo tienen unas expectativas imprecisas sobre el beneficio o coste que puede lograr cada coalición. En la literatura se han propuesto distintos modelos para abordar tales situaciones. Uno de esos modelos son los juegos cooperativos con función característica difusa, en los que el pago de cada coalición viene dado por un número difuso. Al igual que en los juegos cooperativos clásicos, el principal problema que abordan estos modelos es cómo repartir entre los jugadores el beneficio o coste derivado de la cooperación. Para ello, en este trabajo se proponen reglas de asignación, basadas en los valores de Shapley y Banzhaf, para juegos cooperativos con función característica difusa. Para cada valor propuesto se proporciona una caracterización con propiedades razonables. Además, se presenta una aplicación de estos modelos a los llamados problemas de aeropuerto. Estos problemas estudian cómo repartir el coste de mantenimiento de una pista de aterrizaje en función del tamaño de las aeronaves que la utilizan. Para el modelo propuesto se presenta una regla de asignación y se proporciona además una axiomatización. También se ha desarrollado un algoritmo en PYTHON para el cálculo de esta regla de reparto.

Palabras clave: Juegos cooperativos, reglas de asignación, valor de Shapley, valor de Banzhaf, problemas de aeropuerto, conjuntos difusos, números difusos.

Abstract

Cooperation is a relevant social behaviour and in some contexts such as economics or political science, it plays a fundamental role. One of the perspectives from which cooperative situations are analyzed is from cooperative game theory. This theory studies the fundamental problem of how to distribute the benefits or costs that cooperation in a common project produces. The model that uses classical cooperative game theory states that payments obtained by each possible coalition are precisely known. However, there are situations where players only have vague expectations about the benefit or cost each coalition can attain. Different models have been proposed in the literature to address such situations. One of these models are cooperative games with fuzzy characteristic function, in which each coalition payment is represented by a fuzzy number. As in classic cooperative games, the main problem addressed by these models is how to distribute the benefit or cost derived from cooperation among players. To solve this issue, this paper proposes allocation rules for cooperative games with a fuzzy characteristic function, based on Shapley and Banzhaf values. For each proposed value, a characterization with reasonable properties is provided. In addition, these models are applied to airport runway maintenance problems. These problems study how to distribute the cost of maintaining a runway based on the size of the aircraft that use it. An assignment rule is presented for the proposed model as well as an axiomatization. An algorithm has also been developed in Python for the calculation of this distribution rule.

Keywords: Cooperative games, allocation rules, Shapley value, Banzhaf value, airport problems, fuzzy sets, fuzzy numbers.

Índice general

Lista de símbolos

$\lvert A\rvert$	Cardinal del conjunto finito A, es decir, número de elementos de dicho conjunto.
2^N	Conjunto potencia de N, es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de N.
$\emptyset$	Conjunto vacío.
$A \setminus B$	Elementos del conjunto A que no pertenecen al conjunto B.
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales.
$\mathbb{Z}$	Conjunto de los números enteros.
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales.
$\mathbb{R}_+$	Conjunto de los números reales no negativos.
$\mathbb{R}_-$	Conjunto de los números reales no positivos.
$\mathbb{R}_{++}$	Conjunto de los números reales positivos.
$\mathbb{R}^N$	Conjunto de vectores de $\mathbb{R}^{\lvert N\rvert}$ indexados por el conjunto N, es decir, $\mathbb{R}^N = \left\{(x_i)_{i\in N} : x_i \in \mathbb{R}, i \in N\right\}$.
$\square$	Fin de demostración de una proposición, un lema, un teorema o un corolario.
$\triangle$	Fin de ejemplo.

Introducción

Muchas situaciones implican interacciones entre individuos que deben tomar decisiones. Para abordar formalmente el estudio de estas situaciones, la investigación ha adoptado una perspectiva basada en la teoría de juegos. La teoría de juegos es una teoría matemática que trata acerca del estudio de problemas de decisión en los que interaccionan varios agentes (personas, empresas, instituciones, gobiernos, etc.) que compiten o cooperan para alcanzar sus objetivos. En teoría de juegos se denomina *juego* al problema de decisión donde interaccionan los agentes y *jugadores* a los individuos involucrados en tal problema.

Si bien existen aportaciones en siglos anteriores, las primeras aproximaciones relevantes a la teoría de juegos se producen a principios del siglo XX con los trabajos E. Zermelo [90], E. Borel [12], H. Steinhaus [72] y J. von Neumann [50]. Desde 1928, John von Neumman estuvo trabajando en el desarrollo de una teoría, junto al economista Oskar Morgenstern, que culminó con la publicación en 1944 del clásico libro *Theory of games and economic behavior* [51]. Tradicionalmente, la publicación de este libro suele asociarse al nacimiento de la teoría de juegos, ya que sentó las bases de una teoría matemática como tal.

La relevancia de la teoría de juegos como herramienta de análisis en ciencias sociales ha quedado puesta de manifiesto con la concesión en varias ocasiones del Premio Nobel de economía a teóricos de esta disciplina. Así, en 1994 se concedió este premio a J. C. Harsanyi, J. F. Nash y R. Selten por «sus análisis del equilibrio en la teoría de juegos». Más tarde, en 2005, el galardón fue para R. J. Aumann y T. C. Schelling por «ampliar la comprensión del conflicto y la cooperación a través de análisis basados en la teoría de juegos». Dos años más tarde, se concedió el premio a L. Hurwicz, E. S. Maskin y R. B. Myerson por «establecer las bases de la teoría del diseño de mecanismos». En 2012, el premio fue para A. E. Roth y L. S. Shapley por «su trabajo en la teoría de las asignaciones estables y el diseño de mercado».

La teoría de juegos aborda problemas de decisión y en tales problemas existe siempre un conjunto de posibles resultados. Se asume que los jugadores tienen definidas unas preferencias sobre ese conjunto de alternativas. Para poder manejar las preferencias sobre las distintas alternativas se introduce la noción de utilidad. La utilidad es una herramienta que permite asignar a cada alternativa un número real conservando el orden dado por las preferencias del jugador. A partir de este concepto, se desarrolla toda una teoría conocida como teoría de la utilidad.

En la teoría de juegos coexisten dos teorías bien diferenciadas: la teoría de juegos no cooperativos y la teoría de juegos cooperativos. La primera se centra en describir en detalle los elementos del juego y en buscar para cada jugador las mejores estrategias adaptadas a cada situación. En cambio, la segunda teoría asume que se pueden llegar a acuerdos vinculantes y que, por tanto, la cooperación se dará, centrándose en cómo deben repartise los jugadores los beneficios o costes derivados de tal cooperación. El presente trabajo se enmarca en el contexto de la teoría de juegos cooperativos.

Dentro de la teoría de juegos cooperativos se pueden adoptar dos enfoques en función de la capacidad que tengan los jugadores para compensarse mutuamente en cada uno de los distintos grupos que puedan formarse. A tales grupos se les denomina coaliciones. Si dentro de las coaliciones puede repartirse de cualquier modo la utilidad, se tienen los llamados juegos cooperativos con utilidad transferible. Por contra, si existen restricciones que limitan el reparto de utilidad, se tienen los juegos cooperativos con utilidad no transferible. Este trabajo se centra en el primer enfoque.

La teoría de juegos cooperativos se ocupa fundamentalmente de estudiar reglas de reparto. Una regla de asignación para un juego es una solución que establece cómo deben ser repartidos los beneficios o costes obtenidos de la cooperación. Dos de las reglas de asignación más empleadas en juegos cooperativos son el valor de Shapley [66] y el valor de Banzhaf [10].

Los modelos cooperativos clásicos asumen que todos los elementos involucrados en el juego se conocen con certidumbre y precisión. Sin embargo, hay situaciones donde esto puede no ser así. En la literatura se han explorado distintos enfoques para abordar la incertidumbre o la imprecisión en algunos de los elementos del juego. Así, por ejemplo, A. Charnes y D. Granot [20] asumen incertidumbre en el valor de las coaliciones y emplean herramientas de la teoría de probabilidades para abordarlo. Por su parte, autores como J. P. Aubin [7], R. Branzei, D. Dimitrov y S. Tijs [16] o M. Mareš y M. Vlach [55] abordan la imprecisión en alguno de los elementos del juego.

Uno de los elementos del juego sobre los que puede haber incertidumbre o imprecisión es sobre el valor de las distintas coaliciones. En la literatura se han empleado distintas herramientas matemáticas para abordar esta inexactitud como son las variables aleatorias, los intervalos o los números difusos. En este trabajo se utilizarán estos últimos para tratar con la información imprecisa y se empleará el modelo introducido por M. Mareš y M. Vlach [55] de juegos cooperativos con función característica difusa. Para tales juegos existe un definido un valor difuso de Shapley que ha sido recientemente caracterizado por J. M. Gallardo y A. Jiménez-Losada [35].

Recopilación de artículos científicos

Este trabajo recoge los resultado publicados en tres artículos científicos. A continuación se proporcionan los detalles de estos artículos.

Título: A real Shapley value for cooperative games with fuzzy characteristic function.
Autores: H. Galindo, J. M. Gallardo y A. Jiménez-Losada.
Revista: *Fuzzy Sets and Systems.*

Título: Banzhaf values for cooperative games with fuzzy characteristic function.
Autores: H. Galindo, J. M. Gallardo y A. Jiménez-Losada.
Revista: *International Journal of General Systems.*

Título: A random arrival rule for airport problems with fuzzy costs.
Autores: H. Galindo, J. M. Gallardo y A. Jiménez-Losada.
Revista: *(En proceso de publicación)*

Objetivos de la tesis

Este trabajo propone abordar el estudio de juegos cooperativos con imprecisión o inexactitud en el valor de las distintas coaliciones. La tesis persigue dos objetivos fundamentales: (1) proporcionar valores reales para juegos cooperativos con imprecisión en las ganancias de las distintas coaliciones, y (2) ofrecer axiomatizaciones de tales valores basadas en propiedades razonables.

Tradicionalmente, en contextos donde las ganancias de las coaliciones venían dadas por cantidades inexactas, se han propuesto soluciones también inexactas. Estos planteamientos asumían que la imprecisión en los datos del problema debía llevar a una imprecisión también en la solución. Este trabajo tratará de proponer un enfoque novedoso al buscar soluciones que vengan dadas por números reales.

Por un lado, se propondrán reglas de asignación reales, basadas en los valores clásicos de Shapley y Banzhaf, para juegos donde el valor de las coaliciones es una cantidad imprecisa. Con este fin, se buscarán herramientas que permitan tratar la imprecisión existente en los elementos del juego. Por otro lado, se pretende aportar axiomatizaciones de las diferentes reglas de asignación propuestas. Se tratará de que tales caracterizaciones estén basadas en extensiones de las axiomatizaciones más conocidas o usuales de los valores clásicos y en un conjunto de propiedades deseables.

Por último, se estudiará la aplicación de una de las soluciones propuestas, el valor real de Shapley, al caso de reparto de costes. En particular, se extenderá la regla clásica de llegada aleatoria para los llamados problemas de aeropuerto al contexto de costes difusos. Además, se desarrollará un algoritmo en PYTHON para el cálculo de dicha regla de asignación de costes.

Organización de la memoria

El trabajo se organiza del siguiente modo. En el Capítulo 1 se exponen los fundamentos de la teoría de juegos cooperativos. En él se introducen los juegos cooperativos con utilidad transferible y se analiza el problema de cómo repartir los beneficios derivados de la cooperación. Para ello, se introduce la noción de regla de asignación de un juego y se presentan dos reglas: el valor de Shapley y el valor de Banzhaf.

El Capítulo 2 introduce la herramienta matemática que se empleará a lo largo de la tesis para manejar información imprecisa, los números difusos. Para el conjunto de números difusos se define una aritmética y una topología, además de varias relaciones de orden. También se presenta un conocido índice de clasificación de números difusos.

En el Capítulo 3 se introducen los modelos que abordan la imprecisión en los valores de las coaliciones. Estos modelos son los juegos cooperativos con función característica difusa. Para estos juegos, se presentan reglas de asignación difusas que asignan cantidades difusas a los jugadores. Las reglas presentadas se basan en los valores clásicos de Shapley y Banzhaf.

El Capítulo 4 presenta la noción de regla de asignación real para juegos con función característica difusa, y en él se proponen dos valores reales, también basados en los valores clásicos de Shapley y Banzhaf. Para cada uno de los valores propuestos se proporciona una axiomatización basada en propiedades razonables y deseables.

El Capítulo 5 presenta una aplicación de las reglas de asignación reales a problemas de reparto de costes. Se proponen problemas de aeropuerto con costes difusos y una regla de reparto junto con una caracterización de la misma. Asimismo, se presenta un programa en lenguaje de programación PYTHON para el cálculo de dicha regla.

Capítulo 1

Fundamentos de la teoría de juegos cooperativos

El presente capítulo proporciona una introducción a la teoría de juegos cooperativos. En él se define la noción de juego y se estudia el problema fundamental de cómo repartir los beneficios o costes obtenidos de la cooperación. Para resolver este problema, la literatura ha propuesto múltiples conceptos de solución. Aquí se presentan dos de los más conocidos: el valor de Shapley y el valor de Banzhaf.

1.1. Juegos cooperativos

Un *juego cooperativo con utilidad transferible* es un modelo que permite representar situaciones en la que varios decisores cooperan para alcanzar un cierto objetivo. En este modelo se asume lo siguiente respecto a la situación que se trata de representar. En primer lugar, los jugadores disponen de mecanismos que les permiten alcanzar acuerdos vinculantes. En segundo lugar, los jugadores tienen acceso a un bien que es perfectamente divisible, esto es, que son capaces de compensarse mutuamente mediante la transferencia de utilidad. Y en tercer lugar, las posibilidades disponibles para un grupo de jugadores pueden evaluarse sin hacer referencia a los jugadores no incluidos en dicho grupo. En la siguiente definición se formaliza esta idea.

> **Definición 1.1.** Un juego cooperativo con utilidad transferible es un par (N, v) donde N es un conjunto finito de jugadores y $v : 2^N \to \mathbb{R}$ es una función, llamada función característica, que satisface que $v(\emptyset) = 0$.

Cada subconjunto $E \subseteq N$ se conoce como *coalición* y $v(E)$ es el *valor* de la coalición E en el juego. El valor de la coalición se interpreta como el pago colectivo que los jugadores que pertenecen a ella pueden alcanzar si cooperan entre sí, independientemente de lo que hagan el resto de jugadores que no pertenece a dicha coalición. La coalición formada por todos los jugadores, N, se denomina *gran coalición*. Siempre que no haya lugar a confusión, se identificará cada juego (N, v) con su función característica v. La familia de juegos cooperativos con conjunto de jugadores N se denotará $\mathcal{G}^N$.

Ejemplo 1.1. (Juego de beneficios) Tres compañeros están a punto de graduarse en la Universidad y tienen que decidir sobre su futuro. El primero de ellos tiene una idea para desarrollar una patente que le procurará unos beneficios de 250000€, el segundo pretende crear una empresa dedicada al marketing que le proporcionará unos beneficios de 90000€ y el tercero tratará fundar una firma dedicada a la captación de inversiones que le generará beneficios por valor de 300000€. Sin embargo, los tres amigos pueden unir sus talentos y beneficiarse del trabajo conjunto. Si los dos primeros compañeros colaboran pueden publicitar la patente y obtener unos beneficios conjuntos de 350000€. Si el joven que ha desarrollado la patente coopera con el que capta inversiones, puede conseguir fondos para mejorar la patente y así lograrán un beneficio mutuo de 550000€. Si los dos últimos compañeros se unen, el que pretende crear la firma de marketing podrá expandir su empresa y así ambos salir beneficiados con un total de 480000€. Finalmente, si los tres amigos se unen en un proyecto empresarial conjunto podrán obtener unos beneficios de 850000€. Esta situación de cooperación entre individuos se puede modelizar mediante un juego cooperativo con utilidad transferible con conjunto de jugadores $N = \{1, 2, 3\}$ y función característica $v : 2^N \to \mathbb{R}$ tal que $v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = 250, v(\{2\}) = 90, v(\{3\}) = 300, v(\{1, 2\}) = 350, v(\{1, 3\}) = 550, v(\{2, 3\}) = 480, v(N) = 850$. $\triangle$

Ejemplo 1.2. (Juego de costes) Tres instituciones planean organizar una conferencia impartida por un Premio Nobel de Economía. Dado que las instituciones estan ubicadas en ciudades distintas, el coste asociado a la preparación de la conferencia es diferente para cada una de ellas. Organizar la conferencia a la primera institución le supondría un coste de 20000€, a la segunda de 15000€ y a la tercera de 21000€. Pero las instituciones pueden aunar esfuerzos y coordinar las conferencias para que el laureado economista visite varias ciudades en un mismo viaje y así reducir los costes asociados al transporte. Si las dos primeras instituciones se coordinan pueden organizar sus conferencias con un coste total de 33000€ para ambas. En cambio, si se coordinan la primera y la tercera, el coste de acoger las dos conferencias sería de 28000€. Si el viaje es organizado conjuntamente por las dos últimas, el coste ascendería a 35000€. Por último, las tres instituciones pueden cooperar y organizar un único viaje en el que el economista visite las tres ciudades e incurrir en un coste conjunto de 38000€ para las tres. Esta situación de cooperación entre instituciones se puede representar mediante un juego cooperativo con utilidad transferible con conjunto de jugadores $N = \{1, 2, 3\}$ y función característica $c : 2^N \to \mathbb{R}$ tal que $c(\emptyset) = 0, c(\{1\}) = 20, c(\{2\}) = 15, c(\{3\}) = 21, c(\{1,2\}) = 33, c(\{1,3\}) = 28, c(\{2,3\}) = 35, c(N) = 38$. $\triangle$

Observación 1.1. Dado un juego de costes $c \in \mathcal{G}^N$, se puede definir el correspondiente juego de ahorro asociado a esa situación que representaría los beneficios que genera cada coalición. El juego de ahorro $v \in \mathcal{G}^N$ se define como

$$v(E) = \sum_{i \in E} c(\{i\}) - c(E)$$

para cada $E \subseteq N$.

Las diferentes propiedades de la función característica de un juego dan lugar a distintos tipos de juegos. Un juego v es *monótono* si, para todo par de coaliciones $E, F \in 2^N$, con $E \subseteq F$, se verifica que

$$v(E) \leqslant v(F).$$

Si, además, $v(E) = 0$ o $v(E) = 1$, para todo $E \subseteq N$, entonces el juego se dice que es *simple*. En un juego simple, una coalición E se llama *ganadora* si $v(E) = 1$, y *perdedora* si $v(E) = 0$. Una clase particular de juegos simples, y relevante por su utilidad en el estudio sistemas de representación electoral, son los juegos *de mayoría ponderada*. En estos juegos, existe una cuota $q \geqslant 0$ y un vector real no negativo de pesos $(\omega_i)_{i \in N}$, tal que el valor de una coalición cualquiera no vacía viene dado por

$$v(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega(E) \geqslant q, \\ 0 & \text{si } \omega(E) < q, \end{cases}$$

donde $\omega(E) = \sum_{i \in E} \omega_i$. Los juegos simples y los juegos de mayoría ponderada fueron introducidos por primera vez por J. von Neumann y O. Morgenstern [51].

Un juego v se dice que es *superaditivo* si, para todo par de coaliciones $E, F \in 2^N$, con $E \cap F = \emptyset$, se tiene que

$$v(E) + v(F) \leqslant v(E \cup F).$$

Un juego superaditivo es aquel en el que la unión de dos coaliciones disjuntas que deciden fusionarse no provoca una disminución de su valor. Esta propiedad hace que en este tipo de juegos existan auténticos incentivos para que se forme la gran coalición. Una clase especial de juegos superaditivos son los llamados juegos convexos, introducidos por L. S. Shapley

[67] en 1971. Un juego v se dice que es *convexo* si

$$v(E) + v(F) \leqslant v\left(E \cup F\right) + v\left(E \cap F\right)$$

para todo $E, F \in 2^N$.

1.2. Estructura de la familia de juegos cooperativos

El conjunto $\mathcal{G}^N$, que representa a la familia de juegos cooperativos con conjunto de jugadores N, es un espacio vectorial real de dimensión $2^{|N|} - 1$, respecto a las operaciones habituales de suma y productor por escalar. Dados $v, w \in \mathcal{G}^N$, el juego $v + w \in \mathcal{G}^N$ se define como

$$\left(v + w\right)(E) = v(E) + w(E)$$

para cada $E \subseteq N$. Y dados $v \in \mathcal{G}^N$ y $p \in \mathbb{R}$, el juego $p \cdot v \in \mathcal{G}^N$ se define como

$$\left(p \cdot v\right)(E) = p \cdot v(E)$$

para cada $E \subseteq N$.

Dos conocidas bases del espacio de juegos $\mathcal{G}^N$ son las formadas por los juegos de identidad y los juegos de unanimidad. Para cada coalición no vacía E, el *juego de identidad* δ_E se define como

$$\delta_E(F) = \begin{cases} 1 & \text{si } F = E, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \tag{1.1}$$

y el *juego de unanimidad* u_E como

$$u_E(F) = \begin{cases} 1 & \text{si } E \subseteq F, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Las coordenadas de un juego $v \in \mathcal{G}^N$ con respecto a ambas bases son conocidas. En el caso de los juegos de identidad

$$v = \sum_{\{E \in 2^N : E \neq \emptyset\}} v(E)\delta_E \tag{1.3}$$

y en el caso de los juegos de unanimidad

$$v = \sum_{\{E \in 2^N : E \neq \emptyset\}} \Delta_v(E) u_E \tag{1.4}$$

donde $\Delta_v(E)$ se conoce como *dividendo* de la coalición E en el juego v y viene dado por

$$\Delta_v(E) = \sum_{F \subseteq E} (-1)^{|E|-|F|} v(F) \tag{1.5}$$

para cada $E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$.

Ejemplo 1.3. Tomando el juego planteado en el Ejemplo 1.1, se puede expresar v como combinación lineal de los juegos de identidad del siguiente modo

$$v = 250\delta_{\{1\}} + 90 \cdot \delta_{\{2\}} + 300 \cdot \delta_{\{3\}} + 350 \cdot \delta_{\{1,2\}} + 550 \cdot \delta_{\{1,3\}} + 480 \cdot \delta_{\{2,3\}} + 850 \cdot \delta_N.$$

Por otro lado, utilizando los juegos de unanimidad el juego v puede expresarse como

$$v = 250 \cdot u_{\{1\}} + 90 \cdot u_{\{2\}} + 300 \cdot u_{\{3\}} + 10 \cdot u_{\{1,2\}} + 0 \cdot u_{\{1,3\}} + 90 \cdot u_{\{2,3\}} + 110 \cdot u_N.$$

$\triangle$

1.3. Conceptos de solución en juegos cooperativos

Uno de los principales temas que aborda la teoría de juegos cooperativos es, dado un juego $v \in \mathcal{G}^N$, proponer una solución para dicho juego asumiendo que la gran coalición se formará. Una *solución* para un juego es una asignación o un conjuntos de asignaciones que establece un reparto del beneficio o coste derivado de la cooperación entre los jugadores. Una asignación puede ser identificada con un vector de $\mathbb{R}^N$, donde cada componente representa la cantidad asignada a cada jugador.

Si la solución de un juego está formada por una única asignación, ésta se denomina valor. Un *valor* sobre una colección no vacía de juegos se puede entender como una aplicación ψ que asocia a cada juego v de dicha colección un vector $\psi(v)$ de $\mathbb{R}^N$. Por tanto, un valor es una regla de asignación definida sobre una colección no vacía de juegos. Si $v \in \mathcal{G}^N$ e $i \in N$, el número real $\psi_i(v)$ es la asignación del jugador i en el juego v, de acuerdo a la regla ψ. Una asignación $\psi(v)$ se dice que es *individualmente racional* si reparte a cada jugador al menos el valor que puede lograr por sí mismo, esto es, si $\psi_i(v) \geqslant v(\{i\})$ para todo $i \in N$. Si v es un juego superaditivo entonces las reglas de asignación verifican el principio de racionalidad individual.

A continuación, se enuncian algunas propiedades deseables que han sido empleadas en la literatura para caracterizar los valores que se introducen en esta sección. Cuando estas propiedades determinan una solución, es habitual referirse a ellas como *axiomas*.

Eficiencia. Para todo $v \in \mathcal{G}^N$,

$$\sum_{i \in N} \psi_i(v) = v(N).$$

$1-$**eficiencia.** Para todo $v \in \mathcal{G}^N$ con $N = \{i\}$,

$$\psi_i(v) = v(\{i\}).$$

Igual tratamiento. Si $v \in \mathcal{G}^N$, $i, j \in N$ y $v(E \cup \{i\}) = v(E \cup \{j\})$ para cada $E \subseteq N \setminus \{i, j\}$, entonces $\psi_i(v) = \psi_j(v)$.

Jugador nulo. Si $v \in \mathcal{G}^N$, $i \in N$ y $v(E \cup \{i\}) = v(E)$ para cada $E \subseteq N \setminus \{i\}$, entonces $\psi_i(v) = 0$.

Aditividad. Para todo $v, w \in \mathcal{G}^N$, entonces

$$\psi(v + w) = \psi(v) + \psi(w).$$

Amalgama. Sea $v \in \mathcal{G}^N$. Dados dos jugadores $i, j \in N$ con $i \neq j$, se llama amalgama de i y j a la fusión de ambos jugadores en un solo jugador que se denotará mediante $\overline{ij}$. Sea $N^{ij} = (N \setminus \{i, j\}) \cup \left\{\overline{ij}\right\}$ y $v^{ij} : 2^{N^{ij}} \to \mathbb{R}$ definido por

$$v^{ij}(E) = \begin{cases} v\left(\left(E \setminus \left\{\overline{ij}\right\}\right) \cup \{i, j\}\right) & \text{si } \overline{ij} \in E, \\ v(E) & \text{si } \overline{ij} \notin E. \end{cases}$$

Para todo $v \in \mathcal{G}^N$y para todo $i, j \in N$, se tiene que

$$\psi_{\overline{ij}}\left(v^{ij}\right) = \psi_i(v) + \psi_j(v).$$

Monotonía fuerte. Si $v, w \in \mathcal{G}^N$, $i \in N$ y $v(E \cup \{i\}) - v(E) \geqslant w(E \cup \{i\}) - w(E)$ para cada $E \subseteq N \setminus \{i\}$, entonces $\psi_i(v) \geqslant \psi_i(w)$.

La regla de asignación más empleada en juegos cooperativos es el *valor de Shapley*, introducida por L. Shapley [66] en 1953. Este valor asigna a cada jugador $i \in N$ en el juego $v \in \mathcal{G}^N$ una media ponderada de sus contribuciones marginales a las distintas coaliciones. A continuación, se define formalmente esta regla de reparto.

Definición 1.2. El valor de Shapley es una regla de asignación $\phi : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^N$ definida por

$$\phi_i(v) = \sum_{\{E \subseteq N : i \in E\}} \frac{(|N| - |E|)!\,(|E| - 1)!}{|N|!} \left[v\left(E\right) - v\left(E \setminus \{i\}\right)\right]$$

para todo $v \in \mathcal{G}^N$ y todo $i \in N$.

Algunas de las propiedades introducidas anteriormente permiten caracterizar el valor de Shapley. En concreto, los axiomas de eficiencia, igual tratamiento, jugador nulo y aditividad caracterizan este valor.

Teorema 1.1. *El valor de Shapley ϕ es la única regla de asignación que satisface los axiomas de eficiencia, igual tratamiento, jugador nulo y aditividad.*

H. P. Young [86] proporciona una caracterización alternativa del valor de Shapley utilizando las propiedades de eficiencia, igual tratamiento y monotonía fuerte. Se pueden encontrar otras caracterizaciones de este valor en R. B. Myerson [58], S. Hart y A. Mas-Colell [39] y V. Feltkamp [29].

Las reglas de asignación en los juegos cooperativos pueden interpretarse como funciones que determinan el poder o la influencia de los jugadores en el juego en función del poder de cada coalición. El poder de un votante dentro de una comisión o un comité representa su capacidad para influir en las decisiones de dicho órgano. En tales situaciones, la cuantificación del poder de cada miembro es un elemento clave para analizar la posición final y el diferente tratamiento de cada uno de ellos. Los juegos cooperativos son una herramienta útil para representar estas situaciones y estudiar el poder los individuos en el grupo. Cuando un valor se define sobre la clase de juegos simples se denomina *índice de poder*, siendo de gran utilidad en contextos de influencia en un sistema de votación.

En 1954, L. S. Shapley y M. Shubik [68] aplican el valor de Shapley a la clase de juegos simples, obteniendo como resultado el *índice de poder de Shapley-Shubik* que permite medir la influencia de los votantes en un sistema de votación. Más tarde, en 1965, J. F. Banzhaf III [10] propone otro índice de poder que estudia cómo el voto de un jugador afecta al resultado final de la votación. A éste índice se le conoce con el nombre de *índice de poder de Banzhaf*. P. D. Straffin [73] realiza una comparación, estudiando las analogías y diferencias, entre el índice de poder de Shapley-Shubik y el índice de poder de Banzhaf.

Posteriormente, el índice de poder de Banzhaf es extendido a juegos cooperativos en general en G. Owen [60] y en P. Dubey y L. Shapley [23], dando lugar al llamado *valor de Banzhaf*.

Definición 1.3. El valor de Banzhaf es una regla de asignación definida por

$$\beta_i(v) = \frac{1}{2^{|N|-1}} \sum_{\{E \subseteq N : i \in E\}} \left[v\left(E\right) - v\left(E \setminus \{i\}\right)\right]$$

para cada conjunto no vacío N, $v \in \mathcal{G}^N$ e $i \in N$.

En la literatura se han propuesto múltiples caracterizaciones del valor de Banzhaf. Se pueden encontrar algunas de ellas en E. Lehrer [45], V. Feltkamp [29], I. Dragan [22], A. S. Nowak [59] y O. Haimanko [38]. Una axiomatización del valor de Banzhaf es la que viene dada por las propiedades de $1-$eficiencia, igual tratamiento, jugador nulo, aditividad y amalgama.

Teorema 1.2. *El valor de Banzhaf β es la única regla de asignación que satisface los axiomas de $1-$eficiencia, igual tratamiento, jugador nulo, aditividad y amalgama.*

Ejemplo 1.4. Retomando el juego v del Ejemplo 1.1, las asignaciones de este juego de acuerdo a la regla ϕ son

$$\phi_1(v) = \frac{1}{3}(250-0) + \frac{1}{6}(350-90) + \frac{1}{6}(550-300) + \frac{1}{3}(850-480) = \frac{875}{3},$$

$$\phi_2(v) = \frac{1}{3}(90-0) + \frac{1}{6}(350-250) + \frac{1}{6}(480-300) + \frac{1}{3}(850-550) = \frac{530}{3},$$

$$\phi_3(v) = \frac{1}{3}(300-0) + \frac{1}{6}(550-250) + \frac{1}{6}(480-90) + \frac{1}{3}(850-350) = \frac{1145}{3}.$$

Por tanto, el valor de Shapley del juego v es

$$\phi(v) = \left(\frac{875}{3}, \frac{530}{3}, \frac{1145}{3}\right).$$

Por otro lado, las asignaciones del juego de acuerdo a la regla β son

$$\beta_1(v) = \frac{1}{4}(250-0) + \frac{1}{4}(350-90) + \frac{1}{4}(550-300) + \frac{1}{4}(850-480) = \frac{565}{2},$$

$$\beta_2(v) = \frac{1}{4}(90-0) + \frac{1}{4}(350-250) + \frac{1}{4}(480-300) + \frac{1}{4}(850-550) = \frac{335}{2},$$

$$\beta_3(v) = \frac{1}{4}(300-0) + \frac{1}{4}(550-250) + \frac{1}{4}(480-90) + \frac{1}{4}(850-350) = \frac{745}{2}.$$

Por tanto, el valor de Banzhaf de v es

$$\beta(v) = \left(\frac{565}{2}, \frac{335}{2}, \frac{745}{2}\right).$$

Como se puede observar, el valor de Shapley verifica la propiedad de eficiencia,

$$\phi_1(v) + \phi_2(v) + \phi_3(v) = \frac{875}{3} + \frac{530}{3} + \frac{1145}{3} = \frac{2550}{3} = 850 = v(N).$$

Sin embargo, esta propiedad no se verifica para el valor de Banzhaf

$$\beta_1(v) + \beta_2(v) + \beta_3(v) = \frac{565}{2} + \frac{335}{2} + \frac{745}{2} = \frac{1645}{2} = 822{,}5 \neq v(N).$$

$\triangle$

Capítulo 2

Teoría de números difusos

En el proceso de representar y modelizar situaciones, en ocasiones, es necesario tratar con información vaga o imprecisa. Por ello, en este capítulo se presentan los números difusos que son una herramienta que emplea la lógica difusa para manejar la imprecisión en los datos de un problema. En la primera sección se introduce la noción de conjunto difuso y conceptos relacionados. En la segunda sección se presentan los números difusos y una aritmética y topología para ellos. Finalmente, en la tercera sección se realiza una incursión a los índices de clasificación de números difusos.

2.1. Conjuntos difusos

En teoría clásica de conjuntos, la pertenencia de un elemento a un conjunto se evalúa en términos de una lógica binaria, donde un elemento pertenece o no al conjunto. Sin embargo, en muchas situaciones es necesario analizar información en una escala entre lo verdadero y lo falso que permita manipular conceptos vagos o imprecisos. De ello se encarga la lógica difusa introducida por L. A. Zadeh [88] en 1965. A continuación se recogen algunas definiciones básicas relativas a conjuntos difusos.

> **Definición 2.1.** Dado un conjunto X, un subconjunto difuso a de X se define mediante su función de pertenencia $\mu_a : X \to [0,1]$. Para cada $x \in X$, el número $\mu_a(x)$ denota el grado de pertenencia de x a a.

Tres conceptos fundamentales en teoría de conjuntos difusos son el soporte, el $t-$corte y el core. Sea μ_a la función de pertenencia del subconjunto a sobre X. El *soporte* de a se define como

$$supp(a) = \{x \in X : \mu_a(x) > 0\}. \tag{2.1}$$

Para cada $t \in (0,1]$, se define el *corte a nivel* t de a o $t-$*corte* de a como

$$[a]_t = \{x \in X : \mu_a(x) \geq t\} . \tag{2.2}$$

Mediante el enfoque de los cortes a nivel t, es posible definir una representación paramétrica de los conjuntos difusos. Obsérvese, además, que la familia de cortes a nivel t determina a. El *core* de a se define como

$$core(a) = [a]_1 . \tag{2.3}$$

Si a es un subconjunto difuso de X y suponemos una topología dada, el corte a nivel 0 de a se define como

$$[a]_0 = \overline{\{x \in X : \mu_a(x) > 0\}}.$$

Si a, b son subconjuntos difusos de X, se dice que a está contenido en b, y se denota mediante $a \subseteq b$, si $\mu_a(x) \leqslant \mu_b(x)$ para cada $x \in X$.

Un conjunto clásico X puede ser visto como un conjunto difuso cuya función de pertenencia es

$$\mu_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X, \\ 0 & \text{si } x \notin X. \end{cases}$$

Dado este paralelismo entre los conjuntos clásicos y los conjuntos difusos, surge la necesidad de extender conceptos de la teoría clásica a los conjuntos difusos. Con este fin, L. A. Zadeh [89] introdujo un método, conocido como *principio de extensión*, que induce la extensión de conceptos matemáticos no difusos a conceptos difusos. A continuación se formaliza esta idea.

Definición 2.2. Sea $f : X_1 \times \ldots \times X_n \to Z$. La extensión de Zadeh de f es la función $\widetilde{f}$ que aplicada a $(a_1, \ldots, a_n)$, donde $a_1, \ldots, a_n$ son subconjuntos difusos de los conjuntos $X_1, \ldots, X_n$, da el subconjunto difuso $\widetilde{f}(a_1, \ldots, a_n)$ de Z cuya función de pertenencia viene dada por

$$\mu_{\widetilde{f}(a_1,\ldots,a_n)}(z) = \sup\left\{\text{mín}\left\{\mu_{a_1}(x_1), \ldots, \mu_{a_n}(x_n)\right\} : (x_1, \ldots, x_n) \in f^{-1}(z)\right\}$$

donde $f^{-1}(z) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n : f(x_1, \ldots, x_n) = z\}$ es la preimagen de z.

R. R. Yager [85] propone una derivación alternativa del principio de extensión de Zadeh que, además, puede ser vista como una justificación o prueba de este método.

2.2. Números difusos

En este trabajo se centra la atención en los llamados números difusos, que son subconjuntos difusos sobre el conjunto $\mathbb{R}$. En la literatura, el término número difuso se ha empleado con significados ligeramente diferentes. Aquí se empleará el concepto de número difuso definido en [71].

Definición 2.3. Un número difuso es un subconjunto difuso a de $\mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $core(a) \neq \emptyset$.
2. $[a]_t$ es un intervalo cerrado y acotado para todo $t \in [0, 1]$.

Para cada $x \in \mathbb{R}$, el número $\mu_a(x)$ representa cómo de adecuado o posible es x para a. Al conjunto de todos los números difusos se le denotará mediante $\mathbb{F}$. Por su parte, $\mathbb{F}^n$ será el conjunto de números difusos $n-$dimensionales. Asimismo, la familia de números difusos con $supp(a) \subseteq \mathbb{R}_+$ será representada mediante $\mathbb{F}_+$ y la familia de números difusos con $supp(a) \subseteq \mathbb{R}_-$ será representada mediante $\mathbb{F}_-$.

A continuación se muestran algunos ejemplos de números difusos y sus correspondientes funciones de pertenencia. La representación de tales funciones vienen recogidas en la Figura 2.1.

Ejemplo 2.1. (Números reales) Obsérvese que $\mathbb{R} \subset \mathbb{F}$, ya que se puede identificar un $p \in \mathbb{R}$ con un número difuso cuya función de pertenencia viene dada por

$$\mu_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = p, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. △

Ejemplo 2.2. (Intervalos) Un intervalo $a = [a_1, a_2]$, con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ y $a_1 \leqslant a_2$, se puede identificar como un número difuso mediante la función de pertenencia

$$\mu_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a_1, a_2], \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. △

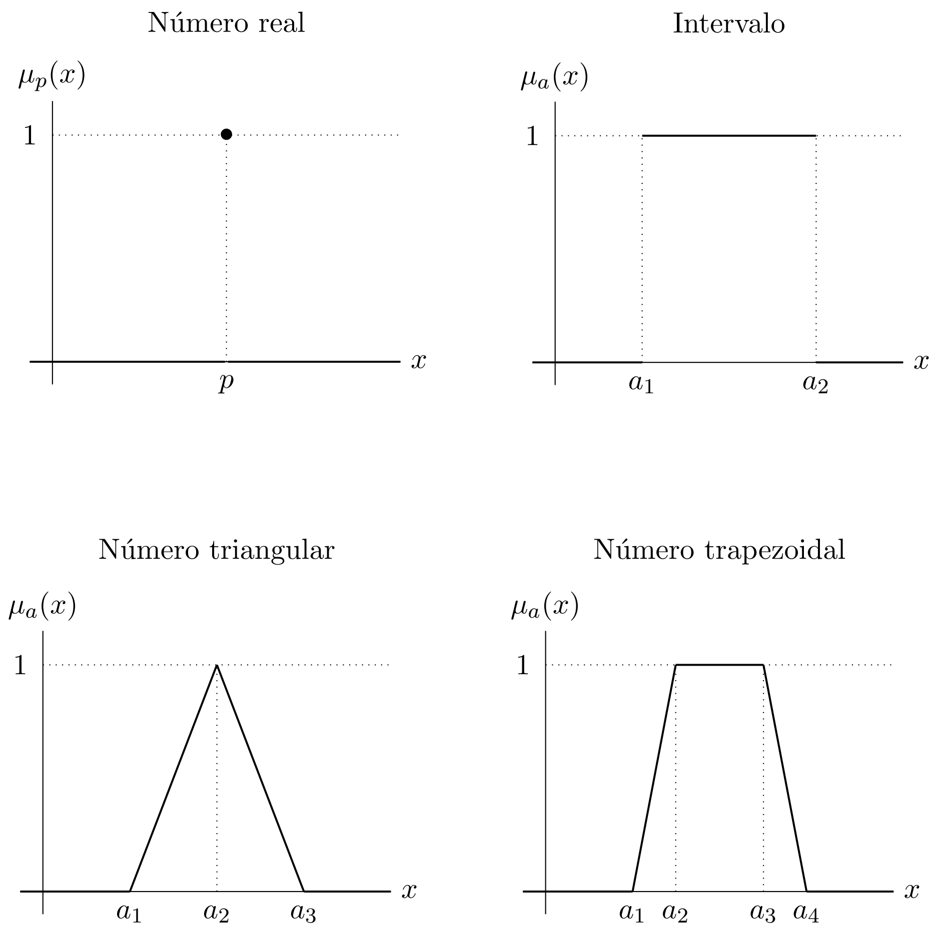

Figura 2.1.

Ejemplo 2.3. (Números difusos triangulares) Un número difuso $a \in \mathbb{F}$ se denomina triangular si existen números $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, con $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$, tal que la función de pertenencia de a viene dada por

$$\mu_a(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & \text{si } a_1 \leqslant x \leqslant a_2, \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2} & \text{si } a_2 \leqslant x \leqslant a_3, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. $\triangle$

Ejemplo 2.4. (Números difusos trapezoidales) Un número difuso $a \in \mathbb{F}$ se denomina trapezoidal si existen números $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$, con $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$, tal que la función de pertenencia de a viene dada por

$$\mu_a(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & \text{si } a_1 \leqslant x \leqslant a_2, \\ 1 & \text{si } a_2 \leqslant x \leqslant a_3, \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3} & \text{si } a_3 \leqslant x \leqslant a_4, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. △

En la literatura se pueden encontrar otros muchos tipos de números difusos a parte de los considerados en los ejemplos previos. Sin embargo, no todos estos números satisfacen las condiciones introducidas en la Definición 2.3, por lo que no serán considerados en esta tesis. Dos de estos números son los números de Cauchy y los números gaussianos, que se presentan en el siguiente ejemplo, y que no son consistentes con la definición de número difuso dada al no tener un soporte acotado.

Ejemplo 2.5. Un número a se denomina de Cauchy si existen unos $p, q \in \mathbb{R}$, con $q > 0$, tal que la función de pertenencia del número viene dada por

$$\mu_a(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-p}{q}\right)^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Por otro lado, un número a se denomina gaussiano si existen unos $p, q \in \mathbb{R}$, con $q > 0$, tal que la función de pertenencia del número es la función gaussiana

$$\mu_a(x) = e^{-\left(\frac{x-p}{q}\right)^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Como se puede apreciar en la Figura 2.2, el soporte de estos dos números no es un conjunto acotado. △

Sea $a \in \mathbb{F}$ y $t \in [0,1]$, se define $a_t^+ = \text{máx}\,[a]_t$ y $a_t^- = \text{mín}\,[a]_t$, por lo que $[a]_t = \left[a_t^-, a_t^+\right]$. Un número difuso $a \in \mathbb{F}$ se dice que es $0-$*simétrico* si $a_t^- = -a_t^+$ para cada $t \in (0,1]$. Esta condición equivale a que la función de pertenencia de a sea una función simétrica par. Al conjunto de números difusos $0-$simétricos se le denotará mediante $\mathbb{F}_0$.

Utilizando el principio de extensión de Zadeh introducido en la Definición 2.2, se puede definir una aritmética de números difusos. Sean $a, b \in \mathbb{F}$.

- La suma $a \oplus b \in \mathbb{F}$ se define como

$$\mu_{a\oplus b}(x) = \sup\left\{\text{mín}\left\{\mu_a(y), \mu_b(z)\right\} : y, z \in \mathbb{R}, y + z = x\right\}$$

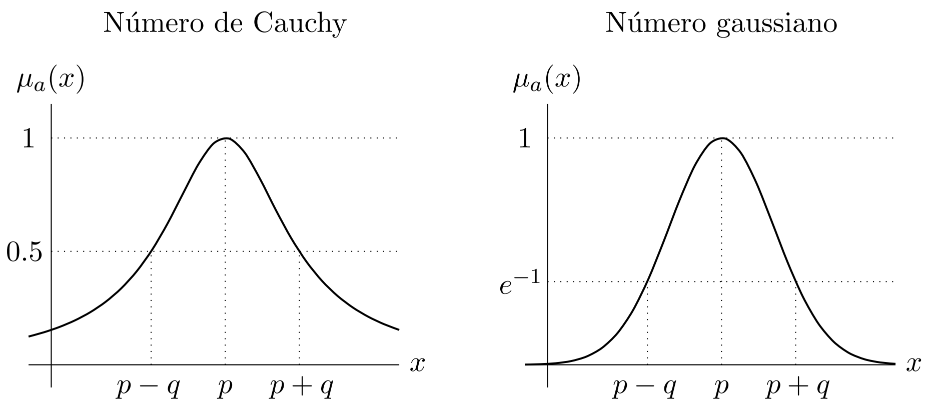

Figura 2.2.

para todo $x \in \mathbb{R}$. Equivalentemente,

$$[a \oplus b]_t = \left[a_t^- + b_t^-, a_t^+ + b_t^+\right]$$

para todo $t \in [0,1]$.

- La resta $a \ominus b \in \mathbb{F}$ se define como

$$\mu_{a \ominus b}(x) = \sup \{\text{mín} \{\mu_a(y), \mu_b(z)\} : y, z \in \mathbb{R}, y - z = x\}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Equivalentemente,

$$[a \ominus b]_t = \left[a_t^- - b_t^+, a_t^+ - b_t^-\right]$$

para todo $t \in [0,1]$.

- El producto $a \odot b \in \mathbb{F}$ se define como

$$\mu_{a \odot b}(x) = \sup \{\text{mín} \{\mu_a(y), \mu_b(z)\} : y, z \in \mathbb{R}, yz = x\}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Equivalentemente,

$$[a \odot b]_t = \left[\text{mín}\left\{a_t^- b_t^-, a_t^- b_t^+, a_t^+ b_t^-, a_t^+ b_t^+\right\}, \text{máx}\left\{a_t^- b_t^-, a_t^- b_t^+, a_t^+ b_t^-, a_t^+ b_t^+\right\}\right]$$

para todo $t \in [0,1]$.

Tal y como se ha mostrado en el Ejemplo 2.1, un número real se puede identificar con un número difuso. Teniendo en cuenta esta identificación, se puede comprobar que las operaciones aritméticas con números difusos $\oplus, \ominus, \odot$ son una extensión de las operaciones aritméticas $+, -, \cdot$ con números reales. Nótese que si $a \in \mathbb{F}$ y $p \in \mathbb{R}$, entonces $\mu_{p\oplus a}(x) = \mu_a(x-p)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Equivalentemente,

$$[p \oplus a]_t = \left[p + a_t^-, p + a_t^+\right]$$

para todo $t \in [0,1]$. Y si $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces $\mu_{p\odot a}(x) = \mu_a\left(\frac{x}{p}\right)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Equivalentemente,

$$[p \odot a]_t = \begin{cases} \left[pa_t^-, pa_t^+\right] & \text{si } p > 0, \\ \left[pa_t^+, pa_t^-\right] & \text{si } p < 0, \end{cases}$$

para todo $t \in [0,1]$.

A continuación, se recogen propiedades conocidas de la suma difusa sobre el conjunto $\mathbb{F}$. La operación $\oplus$ preserva algunas propiedades presentes en la suma sobre el conjunto $\mathbb{R}$ como son la propiedad conmutativa y la propiedad asociativa.

Proposición 2.1. *Sean $a, b, c \in \mathbb{F}$.*

(i) $a \oplus b = b \oplus a$.

(ii) $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$.

(iii) $a \oplus 0 = a$.

(iv) Si $a \oplus b \in \mathbb{R}$, *entonces* $a, b \in \mathbb{R}$.

La operación $\odot$ también verifica las propiedades conmutativa y asociativa presentes en el producto de números reales. La siguiente proposición recoge algunas propiedades conocidas del producto difuso sobre el conjunto $\mathbb{F}$.

Proposición 2.2. *Sean $a, b, c \in \mathbb{F}$.*

(i) $a \odot b = b \odot a$.

(ii) $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$.

(iii) $a \odot 1 = a$.

(iv) $a \odot 0 = 0$.

La propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma y la resta que se observa sobre el conjunto $\mathbb{R}$ no se verifica en general cuando se emplea una aritmética difusa, pero sí que se conocen las siguientes propiedades.

Proposición 2.3. *Sean $a, b, c \in \mathbb{F}$.*

(i) $a \ominus b = a \oplus ((-1) \odot b)$.

(ii) Si $p \in \mathbb{R}$,

$$p \odot (a \oplus b) = (p \odot a) \oplus (p \odot b)\,,$$

$$p \odot (a \ominus b) = (p \odot a) \ominus (p \odot b)\,.$$

(iii) Si $b, c \in \mathbb{F}_+$ *(o si* $b, c \in \mathbb{F}_-$*),*

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)\,.$$

(iv) Si $p \in \mathbb{R}$*, entonces* $p \odot (a \ominus a)$ *es* $0-$*simétrico.*

Una de las principales dificultades que enfrenta la aritmética difusa es que la resta de un número difuso menos sí mismo no es cero. A continuación se muestra el problema de la resta de números difusos con un ejemplo.

Ejemplo 2.6. Sea $a \in \mathbb{F}$ cuya función de pertenencia viene dada por

$$\mu_a(x) = \begin{cases} \frac{5.5-x}{3} & \text{si } 2.5 \leqslant x \leqslant 5.5, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

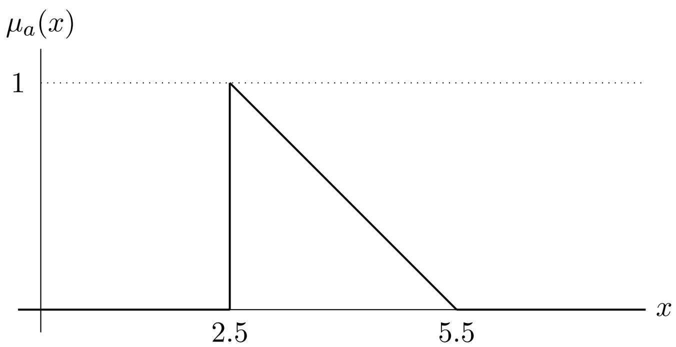

Figura 2.3.

En la Figura 2.3 se ha representado la función de pertenencia de a. Empleando los cortes a nivel t, este número difuso se puede expresar como

$$[a]_t = [2.5, 5.5 - 3t]$$

para cada $t \in [0,1]$. Haciendo uso la aritmética difusa introducida anteriormente se tiene que

$$[a \ominus a]_t = [-(3-3t),(3-3t)]$$

para cada $t \in [0,1]$.

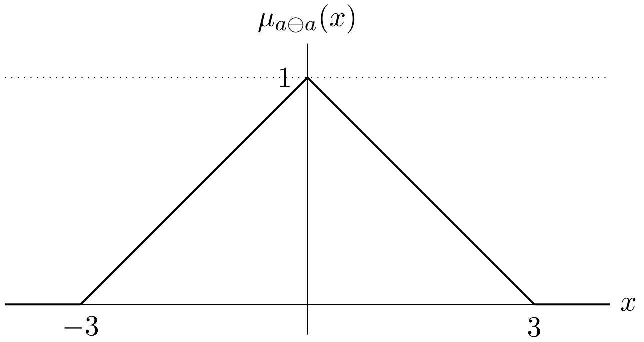

Figura 2.4.

Como se muestra en la Figura 2.4 la resta difusa $a \ominus a$ no da como resultado cero, sino un número difuso 0−simétrico. △

A continuación, se presenta una proposición que recoge algunas propiedades conocidas que relacionan la contención con las operaciones aritméticas introducidas anteriormente.

Proposición 2.4. *Sean $a,b,c,d \in \mathbb{F}$ con $a \subseteq c$ y $b \subseteq d$, entonces*

$$a \oplus b \subseteq c \oplus d,$$

$$a \ominus b \subseteq c \ominus d,$$

$$a \odot b \subseteq c \odot d.$$

Debido a la dificultad que presenta la aritmética difusa, la ecuación $x \oplus a = b$, donde $a,b \in \mathbb{F}$, no es equivalente a la ecuación $x = b \ominus a$. Esto motiva el siguiente resultado.

Proposición 2.5. *Sean $a,b \in \mathbb{F}$. La ecuación $x \oplus a = b$ o no tiene solución en $\mathbb{F}$ o tiene solución única en $\mathbb{F}$.*

La comparación y ordenación de números difusos es un tema recurrente en la literatura difusa. Los primeros en considerar este problema fueron R. Jain [41] y D. Dubois y H. Prade [27]. Desde entonces, se han propuesto múltiples relaciones de orden sobre $\mathbb{F}$. Se pueden encontrar algunas de ellas en G. Bortolan y R. Degani [15], J. J. Buckley [19], M. Detyniecki y R. R. Yager [21] e I. Skalna et al. [70]. Una posible ordenación de los números difusos viene dada por el siguiente *orden parcial*. Dados $a, b \in \mathbb{F}$, se dice que $a \geqslant b$ si y solo si $a_t^- \geqslant b_t^-$ y $a_t^+ \geqslant b_t^+$ para todo $t \in [0, 1]$. De lo anterior se sigue que $a \in \mathbb{F}_+$ si y solo si $a \geqslant 0$ y que $a \in \mathbb{F}_-$ si y solo si $a \leqslant 0$.

Otro enfoque para ordenar números difusos es el introducido por D. Dubois y H. Prade [28], y discutido ampliamente en M. Mareš [53]. Este enfoque se basa en suponer que la relación de orden entre números difusos debe ser también difusa. Dados $a, b \in \mathbb{F}$, la posibilidad de que $a \geqslant b$ viene dada por la función de pertenencia $\nu_{\geqslant} : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to [0, 1]$ donde

$$\nu_{\geqslant}(a, b) = \sup \{\text{mín} \{\mu_a(x), \mu_b(y)\} : x \geqslant y\} \tag{2.4}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Por su parte, dados $a, b \in \mathbb{F}$, la posibilidad de que $a = b$ viene dada por la función de pertenencia $\nu_= : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to [0, 1]$ donde

$$\nu_=(a, b) = \sup \{\text{mín} \{\mu_a(x), \mu_b(x)\}\} \tag{2.5}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

La siguiente proposición recoge algunas propiedades presentes en la literarura sobre la relación de orden difuso introducida.

Proposición 2.6. *Sean* $a, b \in \mathbb{F}$.

(i) $\nu_{\geqslant}(a, a) = \nu_=(a, a) = 1$.

(ii) Si $\nu_{\geqslant}(a, b) = \nu_{\geqslant}(b, a) = 1$, *entonces* $\nu_=(a, a) = 1$.

(iii) Si $p \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\nu_{\geqslant}(a, p) = \sup \{\mu_a(x) : x \in \mathbb{R}, x \geqslant p\},$$

$$\nu_{\geqslant}(p, a) = \sup \{\mu_a(x) : x \in \mathbb{R}, x \leqslant p\}.$$

(iv) Si $p \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\nu_=(a, p) = \nu_=(p, a) = \mu_a(p).$$

Una vez que se ha definido una aritmética sobre el conjunto de números difusos y se han establecido relaciones de orden, surge la necesidad de fijar una topología. La métrica que se emplea habitualmente en $\mathbb{F}$ es la distancia del supremo, que se define a partir de la distancia de Hausdorff. Sean A y B subconjuntos no vacíos y acotados de $\mathbb{R}$, entonces

$$d^*(A,B) = \sup\{\text{ínf}\{|x-y| : y \in B\} : x \in A\}.$$

La distancia de Hausdorff entre A y B se define como

$$d_H(A,B) = \text{máx}\{d^*(A,B), d^*(B,A)\}.$$

Si $a, b \in \mathbb{F}$, la *distancia del supremo* entre a y b se define como

$$d_\infty(a,b) = \sup\{d_H([a]_t, [b]_t) : t \in [0,1]\}. \tag{2.6}$$

A continuación se introduce un primer resultado que se empleará en las demostraciones de los siguientes capítulos.

Teorema 2.1. *El conjunto de los números difusos con función de pertenencia de imagen finita es denso en* $\mathbb{F}$.

Demostración. Sea $a \in \mathbb{F}$ tal que $\{\mu_a(z) : z \in \mathbb{R}\}$ es no finito y sea $\epsilon > 0$. Se probará que existe un $b \in \mathbb{F}$ con $\{\mu_b(z) : z \in \mathbb{R}\}$ finito tal que $d_\infty(a,b) \leqslant \epsilon$. Llamando $[a]_0 = [r,s]$ se toman puntos $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tales que:

1. $r = x_1 < \ldots < x_n = s$.
2. $x_i - x_{i-1} < \epsilon$ para cada $i = 2, \ldots, n$.
3. $x_k \in core(a)$ para algún $k \in \{1, \ldots, n\}$.

La existencia de una cantidad finita de tales números está garantizada por la propiedad arquimediana de los números reales. Considere $b \in \mathbb{F}$ definido por

$$\mu_b(z) = \begin{cases} \mu_a(x_i) & \text{si } z \in [x_i, x_{i+1}) \text{ con } i < k, \\ 1 & \text{si } z = x_k, \\ \mu_a(x_i) & \text{si } z \in (x_{i-1}, x_i] \text{ con } i > k, \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R} \setminus [r,s]. \end{cases}$$

La Figura 2.5 representa la relación entre las funciones de pertenencia de los números difusos a y b.

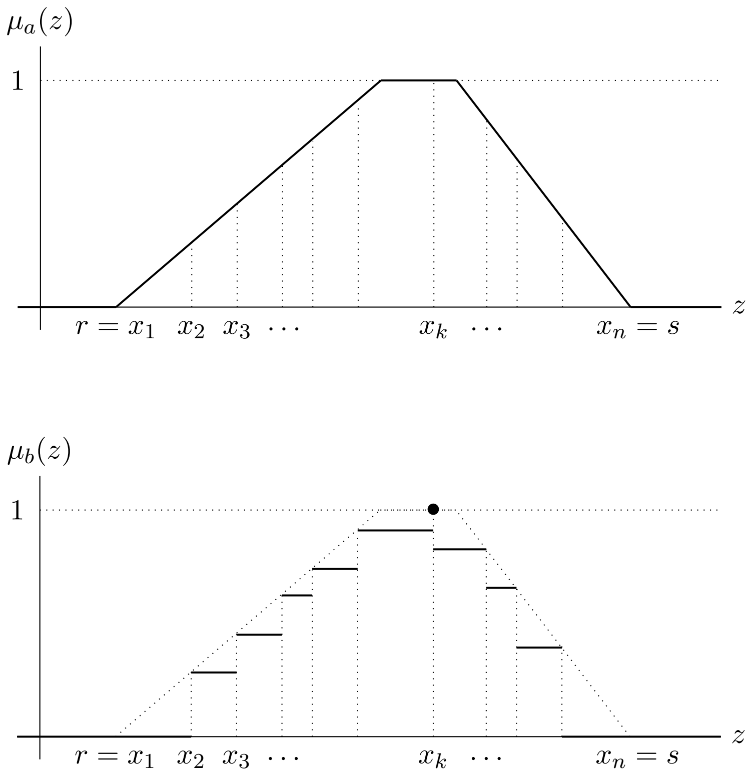

Figura 2.5.

Se debe probar que $d_\infty(a,b) \leqslant \epsilon$. Para este fin, es suficiente mostrar que $d_H([a]_t, [b]_t) < \epsilon$ para cada $t \in (0,1]$. Dado $t \in (0,1]$ se denota $[a]_t = [p,q]$. Está claro que $p \leqslant x_k \leqslant q$. Deben existir $h \in \{1, \ldots, k-1\}$ y $l \in \{k+1, \ldots, n\}$ tal que $p \in (x_h, x_{h+1}]$ y $q \in [x_{l-1}, x_l)$. Se tiene que

$$[x_{h+1}, x_{l-1}] \subseteq [a]_t \subset (x_h, x_l)\,. \tag{2.7}$$

Es fácil de verificar que

$$\mu_b(x_h) = \mu_a(x_h) < t,$$

$$\mu_b(x_{h+1}) = \mu_a(x_{h+1}) \geqslant t,$$

$$\mu_b(x_{l+1}) = \mu_a(x_{l+1}) \geqslant t,$$

$$\mu_b(x_l) = \mu_a(x_l) < t.$$

Por consiguiente,

$$[x_{h+1}, x_{l-1}] \subseteq [b]_t \subset (x_h, x_l)\,. \tag{2.8}$$

De (2.7), (2.8) y las inecuaciones $x_{h+1} - x_h < \epsilon$ y $x_l - x_{l-1} < \epsilon$ se sigue que $d_H([a]_t, [b]_t) < \epsilon$.

Lo que verifica que $d_\infty(a,b) \leqslant \epsilon$. □

2.3. Índices de clasificación de números difusos

En ocasiones, los modelos matemáticos que emplean números difusos se encuentran con la necesidad de clasificar dichos números. En la literatura, se han propuesto un gran número de *métodos o índices de clasificación* de números difusos. X. Wang y E. E. Kerre (ver [81] y [82]) recopilaron la existencia de más de 35 métodos de clasificación que organizaron en tres categorías:

1. Métodos de defuzzificación: consisten en asociar a cada elemento del conjunto de números difusos $\mathbb{F}$ un elemento del conjunto de números reales $\mathbb{R}$.

2. Métodos de conjunto de referencia: consisten en configurar un conjunto difuso como referencia y todos los números difusos se comparan con el conjunto de referencia.

3. Métodos de relación difusa: consisten en construir un relación difusa para hacer comparaciones entre pares de números difusos.

Los índices de clasificación son una herramienta importante en muchas aplicaciones y en este trabajo van a desempeñar un papel esencial. De entre todos ellos, se utilizará la función introducida por R. R. Yager [84] en 1981 que se enmarca dentro de la primera categoría de métodos de defuzzificación. La elección de este método se ve justificada por las buenas propiedades que exhibe.

Definición 2.4. El índice de Yager se define como la función $\mathrm{Y} : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ que hace corresponder a cada $a \in \mathbb{F}$ el valor real

$$\mathrm{Y}(a) = \int_0^1 \frac{a_t^- + a_t^+}{2} dt.$$

A continuación se enumeran algunas propiedades conocidas del índice de clasificación presentado en la definición anterior.

Proposición 2.7. *Sean $a, b \in \mathbb{F}$ y sea $p \in \mathbb{R}$.*

(i) $\mathrm{Y}(p) = p$.

(ii) Si a es un número $0-$simétrico, entonces $\mathrm{Y}(a) = 0$.

(iii) $\mathrm{Y}(p \odot a) = p \cdot \mathrm{Y}(a)$.

(iv) $\mathrm{Y}(a \oplus b) = \mathrm{Y}(a) + \mathrm{Y}(b)$.

(v) $\mathrm{Y}(a \ominus b) = \mathrm{Y}(a) - \mathrm{Y}(b)$.

El índice de Yager es una función continua sobre el conjunto de números difusos. Este resultado se formaliza en el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *El índice de Yager* $\mathrm{Y} : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ *es una función continua usando la distancia del supremo* d_∞ *sobre* $\mathbb{F}$.

Demostración. Sean $\mathrm{Y}^+, \mathrm{Y}^- : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ definidas como

$$\mathrm{Y}^+(a) = \int_0^1 a_t^+ dt,$$

$$\mathrm{Y}^-(a) = \int_0^1 a_t^- dt,$$

para cada $a \in \mathbb{F}$. Dado que $\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{Y}^+ + \mathrm{Y}^-}{2}$, para probar que Y es continua es suficiente probar que Y^+ y Y^- son continuas. Se probará para Y^+, y el razonamiento es análogo para Y^-. Para ello se empleará la distancia del supremo, que es la métrica habitual en $\mathbb{F}$. Sea $a \in \mathbb{F}$ y sea $\epsilon > 0$. Sea $b \in \mathbb{F}^N$ tal que $d_\infty(a, b) < \epsilon$. Se tiene que

$$\left|\mathrm{Y}^+(a) - \mathrm{Y}^+(b)\right| = \left|\int_0^1 a_t^+ dt - \int_0^1 b_t^+ dt\right| = \left|\int_0^1 \left(a_t^+ - b_t^+\right) dt\right|. \tag{2.9}$$

Empleando la generalización de la desigualdad triangular para integrales se tiene que

$$\left|\int_0^1 \left(a_t^+ - b_t^+\right) dt\right| \leqslant \int_0^1 \left|a_t^+ - b_t^+\right| dt. \tag{2.10}$$

De (2.9) y (2.10), se sigue que

$$\left|\mathrm{Y}^+(a) - \mathrm{Y}^+(b)\right| \leqslant \int_0^1 \left|a_t^+ - b_t^+\right| dt. \tag{2.11}$$

Por otro lado, tómese un $t_0 \in [0, 1]$. Se va a probar que $\left|a_{t_0}^+ - b_{t_0}^+\right| \leqslant d_H\left([a]_{t_0}, [b]_{t_0}\right)$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $a_{t_0}^+ \geqslant b_{t_0}^+$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\left|a_{t_0}^+ - b_{t_0}^+\right| &= a_{t_0}^+ - b_{t_0}^+ \\ &= \min\left\{\left|a_{t_0}^+ - y\right| : y \in [b]_{t_0}\right\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \max\left\{\min\left\{|x-y| : y \in [b]_{t_0}\right\} : x \in [a]_{t_0}\right\} \\
&= d^*\left([a]_{t_0}, [b]_{t_0}\right) \\
&\leqslant d_H\left([a]_{t_0}, [b]_{t_0}\right).
\end{aligned}
$$

Se ha probado, por tanto, que

$$\left|a_t^+ - b_t^+\right| \leqslant d_H\left([a]_t, [b]_t\right) \tag{2.12}$$

para todo $t \in [0,1]$.

De (2.11) y (2.12), se tiene que

$$
\begin{aligned}
\left|\mathrm{Y}^+(a) - \mathrm{Y}^+(b)\right| &\leqslant \int_0^1 d_H\left([a]_t, [b]_t\right) dt \\
&\leqslant \int_0^1 d_\infty(a,b)\, dt \\
&= d_\infty(a,b) < \epsilon.
\end{aligned}
$$

□

El siguiente resultado establece que, dados dos números difusos cuyos cores tienen intersección no vacía, el índice de Yager de la combinación convexa de las funciones de pertenencia de ambos números es igual a la combinación convexa de sus índices de Yager.

Teorema 2.3. *Sean $b, c \in \mathbb{F}$ tales que $core(b) \cap core(c) \neq \emptyset$. Sea $\alpha \in (0,1)$. Se define $a \in \mathbb{F}$ mediante*

$$\mu_a(x) = \alpha\mu_b(x) + (1-\alpha)\mu_c(x)$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Entonces se verifica que

$$\mathrm{Y}(a) = \alpha\mathrm{Y}(b) + (1-\alpha)\mathrm{Y}(c),$$

lo que se denomina propiedad de comonotonía.

Demostración. Sean $b, c \in \mathbb{F}$ tales que $core(b) \cap core(c) \neq \emptyset$. Sea $\alpha \in (0,1)$. Se define $a \in \mathbb{F}$ mediante

$$\mu_a(x) = \alpha\mu_b(x) + (1-\alpha)\mu_c(x). \tag{2.13}$$

Tómese $p \in core(b) \cap core(c)$. Se denota mediante λ a la medida de Lebesgue. Si $K \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces $\mathbb{1}_K : \mathbb{R}^2 \to \{0,1\}$ es la función indicatriz de K, la cual se define como

$$\mathbb{1}_K(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,t) \in K, \\ 0 & \text{si } (x,t) \notin K. \end{cases}$$

Por la Definición 2.4 se tiene que

$$\mathrm{Y}(a) = \int_0^1 \frac{a_t^- + a_t^+}{2} dt = \frac{1}{2}\int_0^1 a_t^- dt + \frac{1}{2}\int_0^1 a_t^+ dt. \tag{2.14}$$

Por otro lado, sea $p \in \mathbb{R}$. Para el siguiente razonamiento puede utilizarse la Figura 2.6 como apoyo. Considerando el intervalo $\left[a_t^-, p\right]$, para cada $t \in [0,1]$, cuya medida de Lebesgue es $p - a_t^-$, se tiene que

$$a_t^- = p - \lambda\left(\{x \in \mathbb{R} : x \leqslant p, \mu_a(x) \geqslant t\}\right).$$

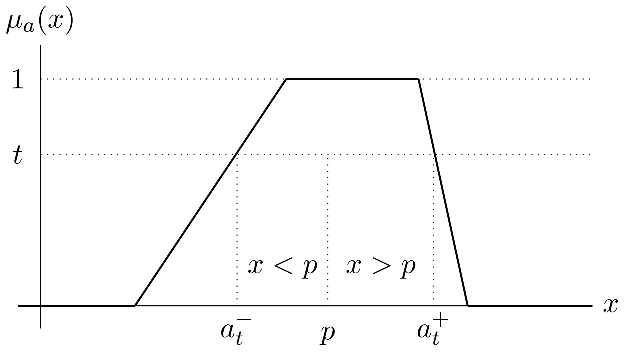

Figura 2.6.

Asimismo, considerando el intervalo $\left[p, a_t^+\right]$, para cada $t \in [0,1]$, por un razonamiento similar, se tiene que

$$a_t^+ = p + \lambda\left(\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant p, \mu_a(x) \geqslant t\}\right).$$

De lo anterior, junto con (2.14), se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}(a) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(p - \lambda\left(\{x \in \mathbb{R} : x \leqslant p, \mu_a(x) \geqslant t\}\right)\right) dt \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(p + \lambda\left(\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant p, \mu_a(x) \geqslant t\}\right)\right) dt. \end{aligned}$$

Dado que p es una constante,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Y}(a) &= \frac{p}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \lambda\left(\{x \in \mathbb{R} : x \leqslant p, \mu_a(x) \geqslant t\}\right) dt \\
&\quad + \frac{p}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \lambda\left(\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant p, \mu_a(x) \geqslant t\}\right) dt \\
&= p - \frac{1}{2}\int_0^1 \lambda\left(\{x \in \mathbb{R} : x \leqslant p, \mu_a(x) \geqslant t\}\right) dt \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 \lambda\left(\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant p, \mu_a(x) \geqslant t\}\right) dt.
\end{aligned}$$

Considerando el plano (x,t), la integral

$$\int_0^1 \lambda\left(\{x \in \mathbb{R} : x \leqslant p, \mu_a(x) \geqslant t\}\right) dt,$$

cuyo área viene representada en la Figura 2.7, puede ser reescrita como

$$\int_0^1 \left(\int_{-\infty}^{p} \mathbb{1}_{\{(x,t)\in(-\infty,p]\times[0,1]:\mu_a(x)\geqslant t\}}(x,t)dx\right) dt.$$

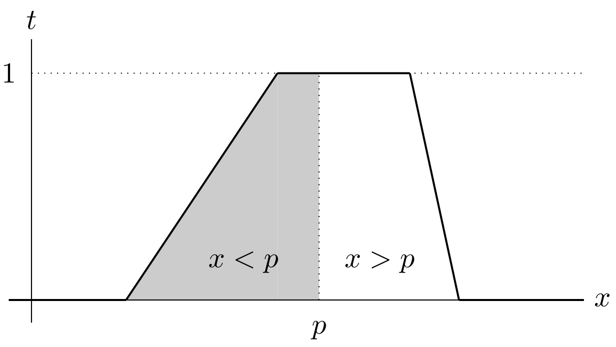

Figura 2.7.

Asimismo, la integral

$$\int_0^1 \lambda\left(\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant p, \mu_a(x) \geqslant t\}\right) dt,$$

cuyo área viene representada en la Figura 2.8, puede ser reescrita como

$$\int_0^1 \left(\int_{p}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{(x,t)\in[p,+\infty)\times[0,1]:\mu_a(x)\geqslant t\}}(x,t)dx\right) dt.$$

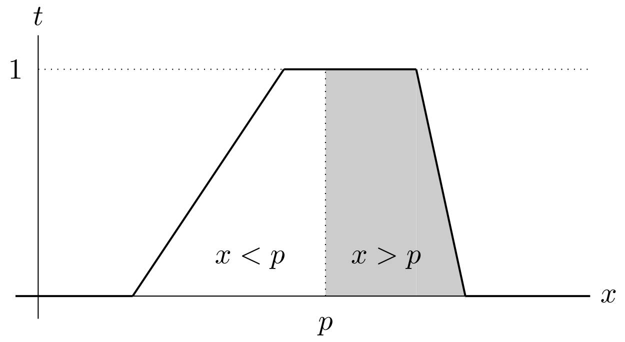

Figura 2.8.

De lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(a) &= p-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_{-\infty}^{p}\mathbb{1}_{\{(x,t)\in(-\infty,p]\times[0,1]:\mu_a(x)\geqslant t\}}(x,t)dx\right)dt\\ &+\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_{p}^{+\infty}\mathbb{1}_{\{(x,t)\in[p,+\infty)\times[0,1]:\mu_a(x)\geqslant t\}}(x,t)dx\right)dt.\end{aligned}$$

Empleando el teorema de Fubini se tiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(a) &= p-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{p}\left(\int_0^1\mathbb{1}_{\{(x,t)\in(-\infty,p]\times[0,1]:\mu_a(x)\geqslant t\}}(x,t)dt\right)dx\\ &+\frac{1}{2}\int_{p}^{+\infty}\left(\int_0^1\mathbb{1}_{\{(x,t)\in[p,+\infty)\times[0,1]:\mu_a(x)\geqslant t\}}(x,t)dt\right)dx.\end{aligned}$$

Utilizando de nuevo la medida de Lebesgue, lo anterior puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(a) &= p-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{p}\lambda\left(\{t\in[0,1]:\mu_a(x)\geqslant t\}\right)dx\\ &+\frac{1}{2}\int_{p}^{+\infty}\lambda\left(\{t\in[0,1]:\mu_a(x)\geqslant t\}\right)dx.\end{aligned}$$

Sin embargo, puede observarse que $\lambda\left(\{t\in[0,1]:\mu_a(x)\geqslant t\}\right)$ es precisamente $\mu_a(x)$. Por tanto, acaba de probarse que

$$\mathrm{Y}(a)=p-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{p}\mu_a(x)dx+\frac{1}{2}\int_{p}^{+\infty}\mu_a(x)dx. \tag{2.15}$$

De manera similar, se prueba que

$$\mathrm{Y}(b)=p-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{p}\mu_b(x)dx+\frac{1}{2}\int_{p}^{+\infty}\mu_b(x)dx \tag{2.16}$$

y que

$$\mathrm{Y}(c) = p - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{p} \mu_c(x)dx + \frac{1}{2}\int_{p}^{+\infty} \mu_c(x)dx. \qquad (2.17)$$

De los resultado (2.15), (2.16) y (2.17), junto con (2.13), se sigue

$$\begin{aligned}
\mathrm{Y}(a) &= p - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{p} \mu_a(x)dx + \frac{1}{2}\int_{p}^{+\infty} \mu_a(x)dx \\
&= p - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{p} \left[\alpha\mu_b(x) + (1-\alpha)\mu_c(x)\right] dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{p}^{+\infty} \left[\alpha\mu_b(x) + (1-\alpha)\mu_c(x)\right] dx \\
&= p - \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{p} \mu_b(x)dx - \frac{1-\alpha}{2}\int_{-\infty}^{p} \mu_c(x)dx \\
&\quad + \frac{\alpha}{2}\int_{p}^{\infty} \mu_b(x)dx + \frac{1-\alpha}{2}\int_{p}^{\infty} \mu_c(x)dx \\
&= \alpha p - \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{p} \mu_b(x)dx + \frac{\alpha}{2}\int_{p}^{\infty} \mu_b(x)dx \\
&\quad + (1-\alpha)p - \frac{1-\alpha}{2}\int_{-\infty}^{p} \mu_c(x)dx + \frac{1-\alpha}{2}\int_{p}^{\infty} \mu_c(x)dx \\
&= \alpha\left(p - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{p} \mu_b(x)dx + \frac{1}{2}\int_{p}^{\infty} \mu_b(x)dx\right) \\
&\quad + (1-\alpha)\left(p - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{p} \mu_c(x)dx + \frac{1}{2}\int_{p}^{\infty} \mu_c(x)dx\right) \\
&= \alpha\mathrm{Y}(b) + (1-\alpha)\mathrm{Y}(c)
\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 3

Juegos cooperativos con función característica difusa

En los modelos presentados en el Capítulo 1, se asume que los jugadores conocen con certeza el valor de cada coalición. Sin embargo, esto puede no ser siempre así. Hay situaciones en las que solo se tienen unas expectativas imprecisas sobre estos pagos. En este capítulo se emplearán los números difusos como herramienta para tratar con la imprecisión en los datos. Se asume que la imprecisión en el valor de cada coalición implica imprecisión en la asignación de cada jugador, por ello, se introducen los valores difusos como solución para estos modelos.

3.1. Juegos cooperativos con función característica difusa

En la literatura se han empleado diferentes tipos de juegos cooperativos para representar situaciones en las que los jugadores solo tienen unas expectativas imprecisas sobre el valor de cada coalición. Para construir estos modelos, se han utilizado diferentes herramientas matemáticas que permiten abordar la incertidumbre y la imprecisión en los pagos de cada coalición. Por ejemplo, A. Charnes y D. Granot [20] hacen uso de la teoría de la probabilidad e introducen juegos cooperativos en los que los pagos de cada coalición vienen dados por variables aleatorias. Por su parte, R. Branzei, D. Dimitrov y S. Tijs [16] emplean intervalos reales para modelar situaciones cooperativas en las que los jugadores solo conocen un límite inferior y un límite superior de la ganancia que puede obtener cada coalición.

En 2001, M. Mareš y M. Vlach [55] proponen como herramienta matemática para manejar información imprecisa los números difusos e introducen los llamados *juegos cooperativos con función característica difusa*. En estos modelos, el valor de cada coalición viene dado por un número difuso que establece el grado de adecuación de cada posible beneficio que puede lograr la coalición.

Definición 3.1. Un juego cooperativo con función característica difusa es un par (N, v) donde N es un conjunto finito de jugadores y $v : 2^N \to \mathbb{F}$ es una función, llamada función característica difusa, que cumple que $v(\emptyset) = 0$.

Para cada coalición $E \subseteq N$, el número difuso $v(E)$ representa una expectativa imprecisa acerca del pago colectivo que puede ser obtenido por los jugadores de la coalición E cuando ellos cooperan entre sí. Por simplicidad, en general se identificará el juego cooperativo con función característica difusa (N, v) mediante la función v.

Ejemplo 3.1. Dos compañías se unen en un proyecto empresarial para desarrollar un nuevo producto. Dado que el proyecto aún no se ha puesto en marcha, sólo se tienen unas expectativas imprecisas sobre los beneficios que se pueden lograr. Esta situación puede ser representada mediante un juego cooperativo con función característica difusa con conjunto de jugadores $N = \{1, 2\}$ y donde los pagos de cada coalición vienen dado por

$$\mu_{v(\{1\})}(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{2} & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\mu_{v(\{2\})}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 4, \\ 5 - x & \text{si } 4 \leqslant x \leqslant 5, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\mu_{v(N)}(x) = \begin{cases} x - 8 & \text{si } 8 \leqslant x \leqslant 9, \\ 10 - x & \text{si } 9 \leqslant x \leqslant 10, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

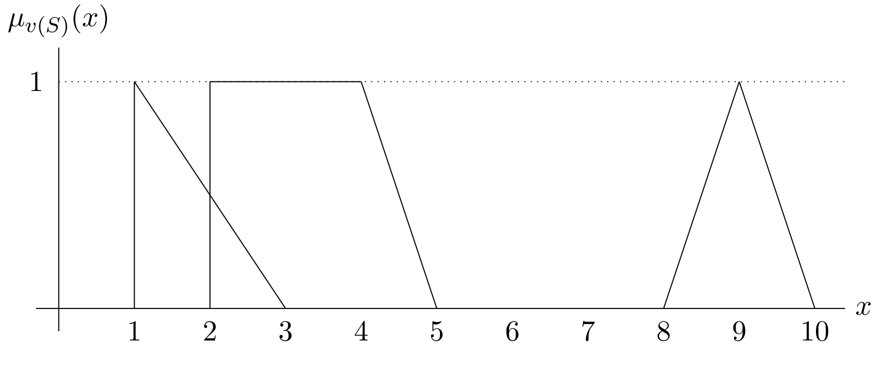

Figura 3.1.

△

La propiedad de superaditividad introducida para funciones características reales en el Capítulo 1 fue extendida por M. Mareš [54] a funciones características difusas. Este autor define la *posibilidad de superaditividad débil* de un juego $v \in \mathcal{FG}^N$ como

$$\nu_{\text{super}}(v) = \text{mín}\,\{\nu_{\geqslant}\,(v(E \cup F), v(E) \oplus v(F)) : E, F \subseteq N, E \cap F = \emptyset\}\,. \tag{3.1}$$

La propiedad de convexidad también puede extenderse para juegos con función característica difusa. Así, la *posibilidad de convexidad débil* de un juego se define como

$$\nu_{\text{convex}}(v) = \text{mín}\,\{\nu_{\geqslant}\,(v(E \cup F) \oplus v(E \cap F), v(E) \oplus v(F)) : E, F \subseteq N\}\,. \tag{3.2}$$

Ejemplo 3.2. Tomando el juego del Ejemplo 3.1, a continuación se estudia la posibilidad de superaditividad débil del juego. La función de pertenencia de $v(\{1\}) \oplus v(\{2\})$ es

$$\mu_{v(\{1\}) \oplus v(\{2\})}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 3 \leqslant x \leqslant 5, \\ \frac{8-x}{3} & \text{si } 5 \leqslant x \leqslant 8, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por tanto, la posibilidad de que $v(N) \geqslant v(\{1\}) \oplus v(\{2\})$ es

$$\nu_{\geqslant}\,(v(N), v(\{1\}) \oplus v(\{2\})) = 1$$

como se puede observar en la Figura 3.2. Por tanto, la posibilidad de superaditividad débil del juego v es $\nu_{\text{super}}(v) = 1$. $\triangle$

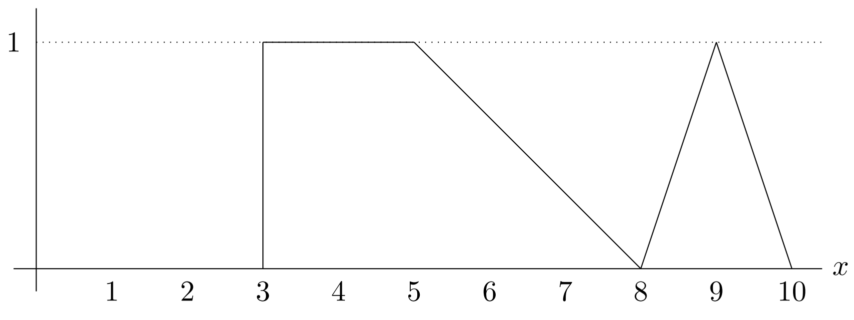

Figura 3.2.

El conjunto de todos los juegos cooperativos con función característica difusa y conjunto de jugadores N será denotado mediante $\mathcal{FG}^N$. Dado que $\mathbb{R} \subset \mathbb{F}$, tenemos que $\mathcal{G}^N \subset \mathcal{FG}^N$. Sean $v, w \in \mathcal{FG}^N$, el juego $v \oplus w \in \mathcal{FG}^N$ se define como

$$(v \oplus w)(E) = v(E) \oplus w(E)$$

para cada $E \subseteq N$. Y sean $v \in \mathcal{FG}^N$ y $a \in \mathbb{F}$, el juego $a \odot v \in \mathcal{FG}^N$ se define como

$$(a \odot v)(E) = a \odot v(E)$$

para cada $E \subseteq N$. Un aspecto importante en este punto, que genera dificultades en las demostraciones, es que el conjunto $\mathcal{FG}^N$ no constituye un espacio vectorial.

Como ocurre con los juegos cooperativos clásicos, el principal problema que surge cuando se trata con juegos cooperativos con función característica difusa es cómo repartir el beneficio o coste derivado de la cooperación asumiendo que se formará la gran coalición. Una primera aproximación a este problema consiste en suponer que la imprecisión de los pagos de las coaliciones implica imprecisión en las asignaciones de los jugadores. Esto lleva al concepto de valor difuso de un juego. Un *valor difuso* sobre $\mathcal{FG}^N$ es una regla de asignación que consiste en una aplicación $\Psi^{fuzzy} : \mathcal{FG}^N \rightarrow \mathbb{F}^N$. Si $v \in \mathcal{FG}^N$ e $i \in N$, el número difuso $\Psi_i^{fuzzy}(v)$ representa las expectativas sobre la asignación al jugador i en el juego v, de acuerdo con la regla Ψ^{fuzzy}.

3.2. El valor difuso de Shapley

En 2001, M. Mareš [54] introduce el *valor difuso de Shapley* para juegos cooperativos con función característica difusa. A continuación se define esta regla de asignación.

Definición 3.2. El valor difuso de Shapley es una regla de asignación difusa $\Phi^{fuzzy} : \mathcal{FG}^N \rightarrow \mathbb{F}^N$ definida por

$$\Phi_i^{fuzzy}(v) = \bigoplus_{\{E \subseteq N : i \in E\}} \frac{(|N| - |E|)!\,(|E| - 1)!}{|N|!} \odot [v\,(E) \ominus v\,(E \setminus \{i\})]$$

para todo $v \in \mathcal{G}^N$ y todo $i \in N$.

Ejemplo 3.3. Volviendo al juego v del Ejemplo 3.1, las asignaciones de los jugadores de acuerdo a la regla Φ^{fuzzy} vienen dadas por

$$\Phi_1^{fuzzy}(v) = \frac{1}{2} \odot [v(\{1\}) \ominus v(\emptyset)] \oplus \frac{1}{2} \odot [v(N) \ominus v(\{2\})]\,,$$

$$\Phi_2^{fuzzy}(v) = \frac{1}{2} \odot [v(\{2\}) \ominus v(\emptyset)] \oplus \frac{1}{2} \odot [v(N) \ominus v(\{1\})]\,.$$

Para calcular estas asignaciones se expresarán las ganancias de las coaliciones a través de sus cortes a nivel t. Se puede comprobar fácilmente que

$$[v(\{1\})]_t = [1, 3 - 2t]\,,$$

$$[v(\{2\})]_t = [2, 5-t]\,,$$
$$[v(N)]_t = [t+8, 10-t]\,.$$

Por tanto, las asignaciones de los jugadores son

$$\begin{aligned}
\Phi_1^{fuzzy}(v) &= \frac{1}{2} \odot [1, 3-2t] \oplus \frac{1}{2} \odot [3+2t, 8-t] \\
&= \left[\frac{1}{2}, \frac{3-2t}{2}\right] \oplus \left[\frac{3+2t}{2}, \frac{8-t}{2}\right] \\
&= \left[2+t, \frac{11-3t}{2}\right]
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\Phi_2^{fuzzy}(v) &= \frac{1}{2} \odot [2, 5-t] \oplus \frac{1}{2} \odot [5+3t, 9-t] \\
&= \left[1, \frac{5-t}{2}\right] \oplus \left[\frac{5+3t}{2}, \frac{9-t}{2}\right] \\
&= \left[\frac{7+3t}{2}, \frac{14-2t}{2}\right].
\end{aligned}$$

En consecuencia, el valor difuso de Shapley del juego v es

$$\Phi^{fuzzy}(v) = \left(\Phi_1^{fuzzy}(v), \Phi_2^{fuzzy}(v)\right)$$

donde

$$\mu_{\Phi_1^{fuzzy}(v)}(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3, \\ 1 & \text{si } 3 \leqslant x \leqslant 4, \\ \frac{11-2x}{3} & \text{si } 4 \leqslant x \leqslant 5.5, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\mu_{\Phi_2^{fuzzy}(v)}(x) = \begin{cases} \frac{2x-7}{3} & \text{si } 3.5 \leqslant x \leqslant 5, \\ 1 & \text{si } 5 \leqslant x \leqslant 6, \\ 7-x & \text{si } 6 \leqslant x \leqslant 7, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$\triangle$

La primera caracterización de este valor difuso se debe a J. M. Gallardo y A. Jiménez-Losada [35] en 2020. A continuación se presentan los axiomas introducidos por estos autores.

Eficiencia central. Para todo $v \in \mathcal{FG}^N$ existe un $d_v \in \mathbb{F}_0$ tal que

$$\bigoplus_{i \in N} \Psi_i^{fuzzy}(v) = v(N) \oplus d_v.$$

Esta propiedad trata de generalizar el axioma de eficiencia de los juegos cooperativos con función característica real. Sin embargo, en este contexto de incertidumbre, no es razonable exigir que las asignaciones de los jugadores sumen extactamente $v(N)$. Supóngase que $v \in \mathcal{FG}^N \setminus \mathcal{G}^N$ y $v(N) \in \mathbb{R}$. Si un valor Ψ^{fuzzy} sobre $\mathcal{FG}^N$ satisface eficiencia, entonces $\bigoplus_{i \in N} \Psi_i^{fuzzy}(v) = v(N) \in \mathbb{R}$. Pero, por la propiedad (iv) de la Proposición 2.1, $\Psi_i^{fuzzy}(v) \in \mathbb{R}$ para cada $i \in N$. Ya que se había supuesto que $v \in \mathcal{FG}^N \setminus \mathcal{G}^N$, tiene que existir al menos una coalición $E \subset N$ tal que $v(E) \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{R}$. Si $\Psi_i^{fuzzy}(v) \in \mathbb{R}$ para cada $i \in N$, entonces este valor ignoraría la imprecisión en el valor de la coalición E. Por ello, se requiere una propiedad más débil como es la eficiencia central.

Igual tratamiento. Si $v \in \mathcal{FG}^N$, $i, j \in N$ y $v(E \cup \{i\}) = v(E \cup \{j\})$ para cada $E \subseteq N \setminus \{i, j\}$, entonces $\Psi_i^{fuzzy}(v) = \Psi_j^{fuzzy}(v)$.

Obsérvese que la igualdad $v(E \cup \{i\}) = v(E \cup \{j\})$ no implica que si las coaliciones $E \cup \{i\}$ y $E \cup \{j\}$ se llegaran realmente a formar, el pago de ambas tuviese que ser el mismo. Lo que esa igualdad significa es que las expectativas sobre los pagos que pueden lograr esas coaliciones son las mismas.

Jugador nulo. Si $v \in \mathcal{FG}^N$, $i \in N$ y $v(E \cup \{i\}) = v(E)$ para cada $E \subseteq N \setminus \{i\}$, entonces $\Psi_i^{fuzzy}(v)$ es un número difuso $0-$simétrico.

Debido al problema de la resta de números difusos mostrada en el Ejemplo 2.6, la expresión $v(E \cup \{i\}) = v(E)$ no implica que $v(E \cup \{i\}) \ominus v(E) = 0$, sino que únicamente implica que $v(E \cup \{i\}) \ominus v(E)$ es un número difuso $0-$simétrico. Por ello, en el contexto difuso, no es razonable exigir que una regla de reparto asigne un valor de cero a un jugador nulo, sino que se le asigne un número difuso $0-$simétrico.

Aditividad. Para todo $v, w \in \mathcal{FG}^N$, entonces

$$\Psi^{fuzzy}(v \oplus w) = \Psi^{fuzzy}(v) \oplus \Psi^{fuzzy}(w).$$

Esta propiedad es una extensión natural al contexto difuso de la propiedad de aditividad del valor de Shapley para juegos cooperativos con función característica real.

Contribuciones marginales de igual signo. Si $v \in \mathcal{FG}^N$, $i \in N$ y $v(E \cup \{i\}) \ominus v(E) \geqslant 0$ (respectivamente, $v(E \cup \{i\}) \ominus v(E) \leqslant 0$) para cada $E \subseteq N \setminus \{i\}$, entonces $\Psi_i^{fuzzy}(v) \geqslant 0$ (respectivamente, $\Psi_i^{fuzzy}(v) \leqslant 0$).

Una relajación del axioma de monotonía fuerte introducido por H. P. Young [86] consiste en afirmar que $v \in \mathcal{G}^N$, $i \in N$ y $v(E \cup \{i\}) - v(E) \geqslant 0$ (respectivamente, $v(E \cup \{i\}) - v(E) \leqslant 0$) para cada $E \subseteq N \setminus \{i\}$, entonces $\psi_i(v) \geqslant 0$ (respectivamente, $\psi_i(v) \leqslant 0$). La extensión de esta propiedad al caso difuso da como resultado el axioma de contribuciones marginales de igual signo.

Solución cero. Si $v \in \mathcal{FG}^N$ y $0 \subseteq v(E)$ para cada $E \in 2^N$, entonces $0 \subseteq \Psi_i^{fuzzy}(v)$ para cada $i \in N$.

Esta propiedad establece que si es posible que los valores de todas las coaliciones en un juego sean iguales a cero, entonces es posible que la regla de reparto asigne a todos los jugadores un valor de cero. Debido a la definición de contención que se dio en el Capítulo 2 para conjuntos difusos, $0 \subseteq v(E)$ implica que el cero es un posible valor de $v(E)$ y está en el nivel de máxima posibilidad, esto es, en el core de $v(E)$. Y por tanto, $0 \subseteq \Psi_i^{fuzzy}(v)$, implica que el cero está también en el core de $\Psi_i^{fuzzy}(v)$. Para juegos cooperativos con función característica real, este axioma es una condición trivial, ya que si $0 \subseteq v(E)$ y $v(E) \in \mathbb{R}$, para cada $E \in 2^N$, entonces $v(E) = 0$. En consecuencia, $\Psi_i^{fuzzy}(v) = 0$, para todo $i \in N$.

Teorema 3.1. (Gallardo y Jiménez-Losada, 2020) *El valor de Shapley difuso Φ^{fuzzy} es el único valor que satisface las propiedades de eficiencia central, igual tratamiento, jugador nulo, aditividad, contribuciones marginales de igual signo y solución cero.*

3.3. El valor difuso de Banzhaf

En esta sección se propone un nuevo valor difuso para juegos cooperativos con función característica difusa. Esta regla de asignación está basada en el valor de Banzhaf introducido en la Definición 1.3.

Definición 3.3. El valor difuso de Banzhaf para juegos cooperativos con función característica difusa se define como

$$\mathrm{B}_i^{fuzzy}(v) = \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \bigoplus_{\{E \subseteq N : i \in E\}} [v(E) \ominus v(E \setminus \{i\})]$$

para cada conjunto no vacío N, $v \in \mathcal{FG}^N$ e $i \in N$.

Ejemplo 3.4. El valor difuso de Banzhaf del juego del Ejemplo 3.1 es

$$\mathrm{B}^{fuzzy}(v) = \left(\mathrm{B}_1^{fuzzy}(v), \mathrm{B}_2^{fuzzy}(v)\right)$$

donde

$$\mu_{\mathrm{B}_1^{fuzzy}(v)}(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3, \\ 1 & \text{si } 3 \leqslant x \leqslant 4, \\ \frac{11-2x}{3} & \text{si } 4 \leqslant x \leqslant 5.5, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\mu_{\mathrm{B}_2^{fuzzy}(v)}(x) = \begin{cases} \frac{2x-7}{3} & \text{si } 3.5 \leqslant x \leqslant 5, \\ 1 & \text{si } 5 \leqslant x \leqslant 6, \\ 7-x & \text{si } 6 \leqslant x \leqslant 7, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Igual que sucede en los juegos cooperativos clásicos, donde el valor de Shapley y el valor de Banzhaf coinciden cuando hay únicamente dos jugadores, en los juegos cooperativos con función característica difusa también ocurre lo mismo. $\triangle$

A continuación, se propone una axiomatización para el valor difuso de Banzhaf para juegos con función característica difusa. Esta caracterización está basada en la axiomatización del valor difuso de Shapley introducida en la sección anterior, donde la propiedad de eficiencia central es sustituida por dos nuevos axiomas: $1-$eficiencia y amalgama.

En primer lugar, se muestra que el valor difuso de Banzhaf verifica las propiedades de igual tratamiento, jugador nulo, aditividad, contribuciones marginales de igual signo y solución cero, que han sido presentadas en la caracterización del valor difuso de Shapley.

Proposición 3.1. *El valor difuso de Banzhaf B^{fuzzy} satisface la propiedad de igual tratamiento.*

Demostración. Sea $v \in \mathcal{FG}^N$ e $i, j \in N$ tal que $v(E \cup \{i\}) = v(E \cup \{j\})$ para cada $E \subseteq N \setminus \{i,j\}$. Entonces, por la propiedad (ii) de la Proposición 2.3, y como $\frac{1}{2^{|N|-1}}$ es un número real, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_i^{fuzzy}(v) &= \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E\subseteq N: i\in E\}} [v(E) \ominus v(E\setminus\{i\})] \right) \\ &= \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E\subseteq N: i\in E, j\in E\}} [v(E) \ominus v(E\setminus\{i\})] \right) \\ &\quad \oplus \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E\subseteq N: i\in E, j\notin E\}} [v(E) \ominus v(E\setminus\{i\})] \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E\subseteq N: i\in E, j\in E\}} [v(E) \ominus v(E\setminus\{j\})] \right) \\
&\quad \oplus \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E\subseteq N: i\notin E, j\in E\}} [v(E) \ominus v(E\setminus\{j\})] \right) \\
&= \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E\subseteq N: j\in E\}} [v(E) \ominus v(E\setminus\{j\})] \right) \\
&= \mathrm{B}_j^{fuzzy}(v).
\end{aligned}
$$

□

Proposición 3.2. *El valor difuso de Banzhaf B^{fuzzy} satisface la propiedad de jugador nulo.*

Demostración. Si $v \in \mathcal{FG}^N$, $i \in N$ y $v(E\cup\{i\}) = v(E)$ para cada $E \subseteq N\setminus\{i\}$, entonces

$$
\mathrm{B}_i^{fuzzy}(v) = \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E\subseteq N: i\in E\}} [v(E) \ominus v(E)] \right),
$$

que es un número 0−simétrico, ya que es la multiplicación de un número real y un número 0−simétrico (dado que la adición de números difusos 0−simétricos es un número difuso 0−simétrico por la propiedad (iv) de la Proposición 2.3). □

Proposición 3.3. *El valor difuso de Banzhaf B^{fuzzy} satisface la propiedad de aditividad.*

Demostración. Sea $v, w \in \mathcal{FG}^N$ y sea $i \in N$. Entonces,

$$
\mathrm{B}_i^{fuzzy}(v\oplus w) = \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \bigoplus_{\{E\subseteq N: i\in E\}} [(v\oplus w)(E) \ominus (v\oplus w)(E\setminus\{i\})], \tag{3.3}
$$

lo cual, por la distributividad de la multiplicación de un número real sobre la suma y resta difusas, recogidas en la propiedad (ii) de la Proposición 2.3, es igual a

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E\subseteq N: i\in E\}} [v(E) \ominus v(E\setminus\{i\})] \right) \\
&\oplus \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E\subseteq N: i\in E\}} [w(E) \ominus w(E\setminus\{i\})] \right),
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

lo cual, por definición, es $\mathrm{B}_i^{fuzzy}(v) \oplus \mathrm{B}_i^{fuzzy}(w)$. □

Proposición 3.4. *El valor difuso de Banzhaf B^{fuzzy} satisface la propiedad de contribuciones marginales de igual signo.*

Demostración. Se sigue de la definición de B^{fuzzy} y el hecho de que si $a, b \in \mathbb{F}_+$, entonces $a \oplus b \geqslant 0$ y $a \odot b \geqslant 0$. □

Proposición 3.5. *El valor difuso de Banzhaf B^{fuzzy} satisface la propiedad de solución cero.*

Demostración. Sea $v \in \mathcal{FG}^N$ tal que $0 \subseteq v(E)$ para cada $E \in 2^N$. Sea $i \in N$. Entonces, por las propiedades relativas a la contención y la aritmética difusa presentadas en la Proposición 2.4, se tiene que

$$0 \subseteq \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E \subseteq N : i \in E\}} [v(E) \ominus v(E \setminus \{i\})] \right)$$

esto es, $0 \subseteq \mathrm{B}_i^{fuzzy}(v)$. □

Además, el valor difuso de Banzhaf verifica dos propiedades adicionales que son una extensión de las propiedades presentes en la axiomatización del valor de Banzhaf introducida en la Sección 1.3.

$1-$**eficiencia.** Para todo $v \in \mathcal{FG}^N$ con $N = \{i\}$,

$$\Psi_i^{fuzzy}(v) = v(\{i\}).$$

El axioma de $1-$eficiencia para juegos cooperativos clásicos representa una condición trivial. En tales modelos, esta propiedad se interpreta como que si el juego estuviera formado por un único jugador, la asignación que le correspondería debería ser igual al pago que sería capaz de garantizarse por sí mismo. En el contexto de los juegos con función característica difusa, siendo igualmente trivial la condición, ésta se interpreta de manera ligeramente diferente. Dado que $v(\{i\})$ representa las expectativas imprecisas acerca del pago que puede lograr el jugador i, este axioma establece que, la asignación para ese jugador debe recoger la misma imprecisión que hay sobre el pago que puede alcanzar por sí mismo.

Proposición 3.6. *El valor difuso de Banzhaf B^{fuzzy} satisface la propiedad de $1-$eficiencia.*

Demostración. Si $v \in \mathcal{FG}^N$ y $N = \{i\}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_i^{fuzzy}(v) &= \frac{1}{2^{|1|-1}} \odot [v(\{i\}) \ominus v(\emptyset)] \\ &= 1 \odot [v(\{i\}) \ominus 0] \\ &= v(\{i\}). \end{aligned}$$

□

Amalgama. Sea $v \in \mathcal{FG}^N$. Dados dos jugadores $i, j \in N$ con $i \neq j$, llamamos amalgama de i y j a la fusión de ambos jugadores en un solo jugador que denotaremos por $\overline{ij}$. Sea $N^{ij} = (N \setminus \{i, j\}) \cup \left\{\overline{ij}\right\}$ y $v^{ij} : 2^{N^{ij}} \to \mathbb{F}$ definido por

$$v^{ij}(E) = \begin{cases} v\left(\left(E \setminus \left\{\overline{ij}\right\}\right) \cup \{i, j\}\right) & \text{si } \overline{ij} \in E, \\ v(E) & \text{si } \overline{ij} \notin E. \end{cases}$$

Entonces, para cada $v \in \mathcal{FG}^N$ y para cada $i, j \in N$, existe un número difuso $0-$simétrico d (el cual depende de v, i y j) tal que

$$\Psi_{\overline{ij}}^{fuzzy}\left(v^{ij}\right) \oplus d = \Psi_i^{fuzzy}(v) \oplus \Psi_j^{fuzzy}(v).$$

El axioma clásico de amalgama establece que la regla de asignación que lo satisface es inmune a la fusión o división artificial de jugadores. En el contexto difuso esta propiedad establece que las expectativas que hay acerca de la asignación que obtendrán los jugadores si se fusionan, debe ser igual a la suma de las expectativas de las asignaciones que obtendrían si actuasen por separado, salvo por una cierta cantidad $0-$simétrica.

Proposición 3.7. *El valor difuso de Banzhaf B^{fuzzy} satisface la propiedad de amalgama.*

Demostración. Si $v \in \mathcal{FG}^N$, y sean $i, j \in N$ tales que $i \neq j$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_i^{fuzzy}(v) \oplus \mathrm{B}_j^{fuzzy}(v) &= \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E \subseteq N : i \in E\}} [v(E) \ominus v(E \setminus \{i\})] \right) \\ &\quad \oplus \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E \subseteq N : j \in E\}} [v(E) \ominus v(E \setminus \{j\})] \right). \end{aligned}$$

Por la propiedad (ii) de la Proposición 2.3, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_i^{fuzzy}(v) \oplus \mathrm{B}_j^{fuzzy}(v) &= \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E \subseteq N : i \in E, j \in E\}} [v(E) \ominus v(E \setminus \{i\})] \right) \\
&\oplus \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E \subseteq N : i \in E, j \notin E\}} [v(E) \ominus v(E \setminus \{i\})] \right) \\
&\oplus \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E \subseteq N : i \in E, j \in E\}} [v(E) \ominus v(E \setminus \{j\})] \right) \\
&\oplus \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E \subseteq N : i \notin E, j \in E\}} [v(E) \ominus v(E \setminus \{j\})] \right).
\end{aligned}$$

Empleando nuevamente propiedad (ii) de la Proposición 2.3, se puede unir el primer y tercer sumando y obtener que

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_i^{fuzzy}(v) \oplus \mathrm{B}_j^{fuzzy}(v) &= \frac{1}{2^{|N|-2}} \odot \left(\bigoplus_{\{E \subseteq N : i \in E, j \in E\}} [v(E) \ominus v(E \setminus \{i, j\})] \right) \\
&\oplus \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E \subseteq N : i \in E, j \notin E\}} [v(E) \ominus v(E)] \right) \\
&\oplus \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E \subseteq N : i \notin E, j \in E\}} [v(E) \ominus v(E)] \right).
\end{aligned}$$

Obsérvese que el cardinal del conjunto N^{ij} difiere únicamente en una unidad respecto al cardinal del conjunto N, esto es, $\left|N^{ij}\right| = |N| - 1$. Identificando uno a uno los elementos del conjunto $\{E \subseteq N : i \in E, j \in E\}$ con los elementos del conjunto $\left\{H \subseteq N^{ij} : \overline{ij} \in H\right\}$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_i^{fuzzy}(v) \oplus \mathrm{B}_j^{fuzzy}(v) &= \frac{1}{2^{|N^{ij}|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\left\{H \subseteq N^{ij} : \overline{ij} \in H\right\}} \left[v^{ij}(H) \ominus v^{ij}\left(H \setminus \{\overline{ij}\}\right)\right] \right) \\
&\oplus \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E \subseteq N : i \in E, j \notin E\}} [v(E) \ominus v(E)] \right) \\
&\oplus \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E \subseteq N : i \notin E, j \in E\}} [v(E) \ominus v(E)] \right)
\end{aligned}$$

Empleando la definición de v^{ij} se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_i^{fuzzy}(v) \oplus \mathrm{B}_j^{fuzzy}(v) &= \mathrm{B}_{\overline{ij}}^{fuzzy}\left(v^{ij}\right) \oplus \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E \subseteq N : i \in E, j \notin E\}} [v(E) \ominus v(E)] \right) \\
& \oplus \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E \subseteq N : i \notin E, j \in E\}} [v(E) \ominus v(E)] \right).
\end{aligned}$$

Tomando

$$\begin{aligned}
d &= \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E \subseteq N : i \in E, j \notin E\}} [v(E) \ominus v(E)] \right) \\
& \oplus \frac{1}{2^{|N|-1}} \odot \left(\bigoplus_{\{E \subseteq N : i \notin E, j \in E\}} [v(E) \ominus v(E)] \right),
\end{aligned}$$

por la propiedad (iv) de la Proposición 2.3, se verifica el resultado buscado. □

Ahora, se probará que si una regla de asignación para juegos con función característica difusa satisface las siete propiedades anteriores, entonces este valor es igual al valor difuso de Banzhaf para juegos cooperativos con función característica difusa. Para ello, se necesitan dos lemas.

Lema 3.1. *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{F}$ tales que*

(i) $a, c \geqslant 0$ *(resp. $a, c \leqslant 0$),*

(ii) $0 \subseteq a, c$*,*

(iii) b, d *son* $0-$*simétricos,*

(iv) $a \oplus b = c \oplus d$*.*

Entonces, $a = c$ y $b = d$.

Demostración. Sea $t \in [0,1]$. De (i) y (ii), $a_t^- = c_t^- = 0$. Por (iii), $b_t^- = -b_t^+$ y $c_t^- = -c_t^+$. Se tiene que

$$[a \oplus b]_t = \left[a_t^- + b_t^-, a_t^+ + b_t^+\right] = \left[-b_t^+, a_t^+ + b_t^+\right] \tag{3.5}$$

y

$$[c \oplus d]_t = \left[c_t^- + d_t^-, c_t^+ + d_t^+\right] = \left[-d_t^+, c_t^+ + d_t^+\right]. \tag{3.6}$$

De (3.5), (3.6) y (iv), se sigue que $b_t^+ = d_t^+$ y $a_t^+ = a_t^+$. Por tanto, $[a]_t = [c]_t$ y $[b]_t = [d]_t$.

Ya que estas igualdades se verifican para todo $t \in [0,1]$, entonces se sigue que $a = c$ y $b = d$. $\square$

Lema 3.2. *Sean $a, b \in \mathbb{F}$ tales que*

(i) $a \geqslant 0$ *(resp.* $a \leqslant 0$*),*

(ii) $0 \subseteq a$*,*

(iii) $a \subseteq b$*,*

(iv) $b \leqslant a$ *(resp.* $b \geqslant a$*),*

(v) b *es* $0-$*simétrico.*

Entonces, $b = a \ominus a$*.*

Demostración. Sea $x \in [0, +\infty)$. En primer lugar, se va a probar por contradicción que $\mu_b(x) \leqslant \mu_a(x)$. Supóngase que $\mu_b(x) > \mu_a(x)$. Si se toma $t \in (\mu_a(x), \mu_b(x))$, entonces $x \in [b]_t$ y $x \notin [a]_t$. De (i) y (ii), se sigue que $[a]_t = \left[0, a_t^+\right]$. Se tiene que $x \in [0, +\infty)$, $x \in \left[b_t^-, b_t^+\right]$ y $x \notin \left[0, a_t^+\right]$. Se sigue que $b_t^+ > a_t^+$, lo cual contradice la condición (iv). Por tanto, se tiene que $\mu_b(x) \leqslant \mu_a(x)$ para cada $x \in [0, +\infty)$. Por la condición (iii), se sabe que $\mu_b(x) \geqslant \mu_a(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, de lo que que se concluye que $\mu_b(x) = \mu_a(x)$ para cada $x \in [0, +\infty)$. De esto y de la condición (v), se sigue que $[b]_t = \left[-a_t^+, a_t^+\right]$ para cada $t \in [0,1]$. Y ello es suficiente para observar que, por (i) y (ii), $[a \ominus a]_t = \left[-a_t^+, a_t^+\right]$ para cada $t \in [0,1]$. $\square$

Teorema 3.2. *Si un valor difuso Ψ^{fuzzy} para juegos cooperativos con función característica difusa satisface las propiedades de $1-$eficiencia, amalgama, igual tratamiento, jugador nulo, aditividad, contribuciones marginales de igual signo y solución cero, entonces ese valor es igual al valor difuso de Banzhaf para juegos cooperativos con función característica difusa.*

Demostración. Supóngase que Ψ^{fuzzy} satisface las propiedades indicadas en el teorema. El objetivo es probar que $\Psi^{fuzzy} = \mathrm{B}^{fuzzy}$. Como ya se indicó, $\mathcal{FG}^N$ no es un espacio vectorial por lo que no es posible replicar una prueba clásica. En este caso, se realizará una demostración en varios pasos. En cada paso se probará que $\Psi^{fuzzy}(v) = \mathrm{B}^{fuzzy}(v)$ para cada v en una cierta clase de juegos. En el primer paso se probará para juegos cooperativos con función característica real. En los pasos 2, 3 y 4 se probará para juegos de la forma $a \odot u_E$ donde $a \in \mathbb{F}$ con distintas características. El paso 5 emplea la relación entre δ_E y u_E para probarlo en juegos de la forma $a \odot \delta_E$. Y finalmente en el paso 6 se emplearán los resultados de los pasos previos para probarlo en cualquier juego $v \in \mathcal{FG}^N$.

Paso 1. El objetivo en este paso es probar que

$$\Psi^{fuzzy}(v) = \mathrm{B}^{fuzzy}(v) \tag{3.7}$$

para cada conjunto finito y no vacío N y para cada $\mathcal{G}^N$.

Si $\mathbf{0}$ denota el juego que asigna cero a todas las coaliciones $E \in 2^N$, se sigue, por la propiedad de contribuciones marginales del mismo signo, que $\Psi_i^{fuzzy}(\mathbf{0}) = 0$ para cada $i \in N$. Sea $v \in \mathcal{G}^N$. Por la propiedad de aditividad,

$$\Psi_i^{fuzzy}(v) \oplus \Psi_i^{fuzzy}(-v) = \Psi_i^{fuzzy}(\mathbf{0}) = 0, \tag{3.8}$$

para cada $i \in N$. De (3.8) y la propiedad (iv) de la Proposición 2.1, que establece que si la suma de dos números difusos es un número real, entonces ambos números deben ser reales, se sigue que $\Psi_i^{fuzzy}(v) \in \mathbb{R}$ para cada $i \in N$. Por tanto, la restricción de Ψ^{fuzzy} para la familia de juegos con función característica real, denotada por $\Psi_{|\mathcal{G}}^{fuzzy}$, es un valor para juegos cooperativos clásicos. Dado que Ψ^{fuzzy} satisface la propiedades de $1-$eficiencia, aditividad, igual tratamiento, jugador nulo y amalgama, y el hecho de que $\Psi^{fuzzy}(v) \in \mathbb{R}^N$ para cada conjunto finito y no vacío N y para cada $v \in \mathcal{G}^N$, se puede verificar fácilmente que $\Psi_{|\mathcal{G}}^{fuzzy}$ satisface las propiedades (para valores sobre juegos con función característica real) de $1-$eficiencia, aditividad, igual tratamiento, jugador nulo y amalgama. Ya que estas propiedades caracterizan el valor de Banzhaf, se concluye que $\Psi_{|\mathcal{G}}^{fuzzy} = \beta$. Por la misma razón, $\mathrm{B}_{|\mathcal{G}}^{fuzzy} = \beta$. Esto demuestra (3.7).

Paso 2. El objetivo en este paso es probar que

$$\Psi^{fuzzy}(a \odot u_E) = \mathrm{B}^{fuzzy}(a \odot u_E) \tag{3.9}$$

para cada conjunto finito y no vacío N, cada $E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ y cada $a \in \mathbb{F}$ con $a \geqslant 0$ y $0 \subseteq a$.

Sea $a \in \mathbb{F}$ tal que $a \geqslant 0$ y $0 \subseteq a$. La Figura 3.3 ilustra un ejemplo de número difuso con estas características.

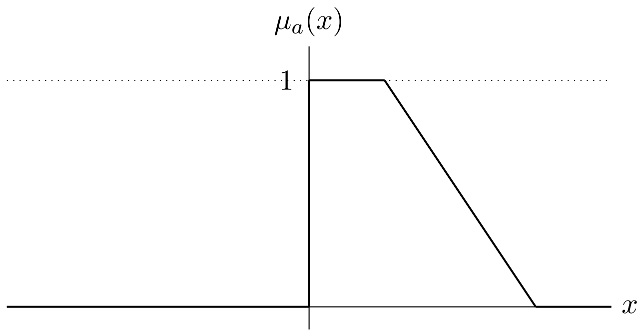

Figura 3.3.

En primer lugar, se probará que

$$\Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_E) = \frac{1}{2^{|E|-1}} \odot a \tag{3.10}$$

para cada conjunto finito y no vacío N, cada $E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ y cada $i \in E$. Se probará (3.10) por inducción sobre $|N|$.

Caso base. $|N| = 1$. Se tiene que $E = N$. Sea $N = \{i\}$. Por la propiedad de $1-$eficiencia, $\Psi^{fuzzy}\left(a \odot u_{\{i\}}\right) = a$. Por tanto, (3.10) se verifica.

Paso inductivo. Sea N un conjunto finito con $|N| > 1$ y sea $E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$. Se toma un $i \in E$. Ya que $|N| > 1$, se puede tomar un $j \in N \setminus \{i\}$. Se pueden distinguir dos casos:

- $j \in E$. Por la propiedad de amalgama, se sigue que existe un número difuso $0-$simétrico $d \in \mathbb{F}$ tal que

$$\begin{aligned} \Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_E) \quad &\oplus \quad \Psi_j^{fuzzy}(a \odot u_E) \\ &= \quad \Psi_{\overline{ij}}^{fuzzy}\left(a \odot u_{(E\setminus\{i,j\})\cup\{\overline{ij}\}}\right) \oplus d. \end{aligned} \tag{3.11}$$

  Por la hipótesis de inducción,

$$\Psi_{\overline{ij}}^{fuzzy}\left(a \odot u_{(E\setminus\{i,j\})\cup\{\overline{ij}\}}\right) = \frac{1}{2^{|N|-2}} \odot a. \tag{3.12}$$

  Por la propiedad de igual tratamiento,

$$\Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_E) = \Psi_j^{fuzzy}(a \odot u_E). \tag{3.13}$$

De (3.11), (3.12) y (3.13), se obtiene

$$2 \odot \Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_E) = \frac{1}{2^{|E|-2}} \odot a \oplus d.$$

Si $i \in E$ y $F \subseteq N \setminus \{i\}$, entonces $(a \odot u_E)(F \cup \{i\}) \ominus (a \odot u_E)(F) \geqslant 0$. Por la propiedad de contribuciones marginales de igual signo, se sigue que $\Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_E) \geqslant 0$. Ya que $0 \subseteq (a \odot u_E)(F)$ para cada $F \in 2^N$, se tiene, por la propiedad de solución cero, que $0 \subseteq \Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_E)$ para cada $i \in N$. Por tanto, las siguientes condiciones se cumplen:

(i) $2 \odot \Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_E) \geqslant 0$, $\frac{1}{2^{|E|-2}} \odot a \geqslant 0$,

(ii) $0 \subseteq 2 \odot \Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_E)$, $0 \subseteq \frac{1}{2^{|E|-2}} \odot a$,

(iii) 0 y d son $0-$simétricos,

(iv) $2 \odot \Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_E) \oplus 0 = \frac{1}{2^{|E|-2}} \odot a \oplus d$.

Aplicando el Lema 3.1, se obtiene que $2 \odot \Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_E) = \frac{1}{2^{|E|-2}} \odot a$. De lo cual, se sigue que $\Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_E) = \frac{1}{2^{|E|-1}} \odot a$.

- $j \in N \setminus E$. Por la propiedad de amalgama, se sigue que existe un número difuso $0-$simétrico $d \in \mathbb{F}$ tal que

$$\begin{aligned} \Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_E) &\oplus \Psi_j^{fuzzy}(a \odot u_E) \\ &= \Psi_{\overline{ij}}^{fuzzy}\left(a \odot u_{(E\setminus\{i\})\cup\{\overline{ij}\}}\right) \oplus d. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Por la hipótesis de inducción,

$$\Psi_{\overline{ij}}^{fuzzy}\left(a \odot u_{(E\setminus\{i\})\cup\{\overline{ij}\}}\right) = \frac{1}{2^{|E|-1}} \odot a. \quad (3.15)$$

De (3.14) y (3.15), se obtiene

$$\Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_E) \oplus \Psi_j^{fuzzy}(a \odot u_E) = \frac{1}{2^{|E|-1}} \odot a \oplus d.$$

Si $i \in E$ y $F \subseteq N \setminus \{i\}$, entonces $(a \odot u_E)(F \cup \{i\}) \ominus (a \odot u_E)(F) \geqslant 0$. Por la propiedad de contribuciones marginales de igual signo, se sigue que $\Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_E) \geqslant 0$. Puesto que $0 \subseteq (a \odot u_E)(F)$ para cada $F \in 2^N$, se tiene, por la propiedad de solución cero, que $0 \subseteq \Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_E)$ para cada $i \in N$. Además, por la propiedad de jugador nulo, $\Psi_j^{fuzzy}(a \odot u_E)$ es $0-$simétrico. Por tanto, las siguientes condiciones se cumplen:

(i) $\Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_E) \geqslant 0$, $\frac{1}{2^{|E|-1}} \odot a \geqslant 0$,

(ii) $0 \subseteq \Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_E)$, $0 \subseteq \frac{1}{2^{|E|-1}} \odot a$,

(iii) $\Psi_j^{fuzzy}(a \odot u_E)$ y d son $0-$simétricos,

(iv) $\Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_E) \oplus \Psi_j^{fuzzy}(a \odot u_E) = \frac{1}{2^{|E|-1}} \odot a \oplus d$.

Aplicando el Lema 3.1, se obtiene que $\Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_E) = \frac{1}{2^{|E|-1}} \odot a$.

Por tanto, se ha probado (3.10).

Ahora, se probará que

$$\Psi_j^{fuzzy}(a \odot u_E) = \frac{1}{2^{|E|}} \odot (a \ominus a) \tag{3.16}$$

para cada conjunto finito y no vacío N, cada $E \in 2^N \setminus \{N, \emptyset\}$ y cada $j \in N \setminus E$.

Sea N un conjunto finito y no vacío, sea $E \in 2^N \setminus \{N, \emptyset\}$ y sea $j \in N \setminus E$. Por (3.10) se sabe que

$$\Psi_j^{fuzzy}\left(a \odot u_{E \cup \{j\}}\right) = \frac{1}{2^{|E|}} \odot a. \tag{3.17}$$

Sea $w \in \mathcal{FG}^N$ definido por

$$w(F) = \begin{cases} a & \text{si } E \subseteq F \text{ y } j \notin F, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para cada $F \in 2^N$. Se tiene que $a \odot u_E = \left(a \odot u_{E \cup \{j\}}\right) \oplus w$. Por la propiedad de aditividad,

$$\Psi_j^{fuzzy}(a \odot u_E) = \Psi_j^{fuzzy}\left(a \odot u_{E \cup \{j\}}\right) \oplus \Psi_j^{fuzzy}(w). \tag{3.18}$$

Puesto que $0 \subseteq a$, se tiene que $0 \subseteq w(F)$ para cada $F \in 2^N$. Por la propiedad de solución cero,

$$0 \subseteq \Psi_j^{fuzzy}(w). \tag{3.19}$$

De la propiedad (i) de la Proposición 2.4, junto con (3.17), (3.18) y (3.19), se sigue

$$\frac{1}{2^{|E|}} \odot a \subseteq \Psi_j^{fuzzy}(a \odot u_E). \tag{3.20}$$

Obsérvese que $w(F \cup \{j\}) \ominus w(F) \leqslant 0$ para cada $F \subseteq N \setminus \{j\}$. Por la propiedad de contribuciones marginales del igual signo,

$$\Psi_j^{fuzzy}(w) \leqslant 0. \tag{3.21}$$

De (3.17), (3.18) y (3.21) se sigue que

$$\Psi_j^{fuzzy}(a \odot u_E) \leqslant \frac{1}{2^{|E|}} \odot a. \tag{3.22}$$

Obsérvese que j es un jugador nulo en $a \odot u_E$. Por la propiedad de jugador nulo, $\Psi_j^{fuzzy}(a \odot u_E)$ es $0-$simétrico. De este hecho, junto con $a \geqslant 0$, $0 \subseteq a$, (3.20) y (3.22), se obtiene que se verifican las siguientes condiciones:

(i) $\frac{1}{2^{|E|}} \odot a \geqslant 0$,

(ii) $0 \subseteq \frac{1}{2^{|E|}} \odot a$,

(iii) $\frac{1}{2^{|E|}} \odot a \subseteq \Psi_j^{fuzzy}(a \odot u_E)$,

(iv) $\Psi_j^{fuzzy}(a \odot u_E) \leqslant \frac{1}{2^{|E|}} \odot a$,

(v) $\Psi_j^{fuzzy}(a \odot u_E)$ es $0-$simétrico.

Por el Lema 3.2 y la propiedad distributiva de la multiplicación de un número real sobre la resta de números difusos presentada en el punto (ii) de la Proposición 2.3, se tiene que

$$\Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_E) = \frac{1}{2^{|E|}} \odot (a \ominus a). \tag{3.23}$$

De (3.10) y (3.23), se sigue que

$$\Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_E) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{|E|-1}} \odot a & \text{si } i \in E, \\ \dfrac{1}{2^{|E|}} \odot (a \ominus a) & \text{si } i \in N \setminus E. \end{cases}$$

Ya que se han empleado solo las propiedades indicadas en el teorema, se ha probado (3.9).

Paso 3. El objetivo en este paso es probar que

$$\Psi^{fuzzy}(a \odot u_E) = \mathrm{B}^{fuzzy}(a \odot u_E) \tag{3.24}$$

para cada $E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ y cada $a \in \mathbb{F}$ con $a \leqslant 0$ y $0 \subseteq a$. La Figura 3.4 ilustra un número difuso como los considerados en este paso.

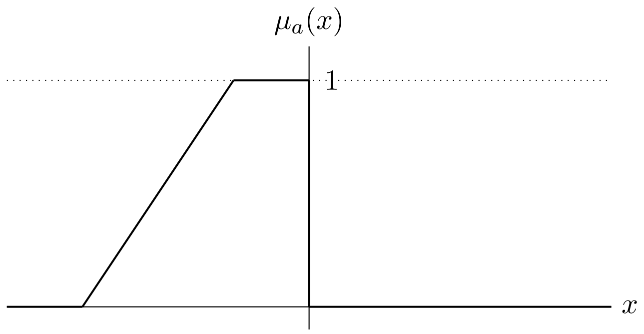

Figura 3.4

La prueba es similar a (3.9). La única diferencia radica en las versiones utilizadas del Lema 3.1, Lema 3.2 y la propiedad de contribuciones marginales de igual signo.

Paso 4. El objetivo en este paso es probar que

$$\Psi^{fuzzy}(a \odot u_E) = \mathrm{B}^{fuzzy}(a \odot u_E) \tag{3.25}$$

para cada $E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ y cada $a \in \mathbb{F}$. En este paso se consideran números difusos en general y se realizará una traslación de la función de pertenencia con el fin de conseguir que el cero este contenido en el core del número. Una vez logrado esto, el número se podrá descomponer como la suma de números difusos como los considerados en los dos pasos previos.

Sea $E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ y sea $a \in \mathbb{F}$. Se toma un $z \in core(a)$ como se ilustra en la Figura 3.5.

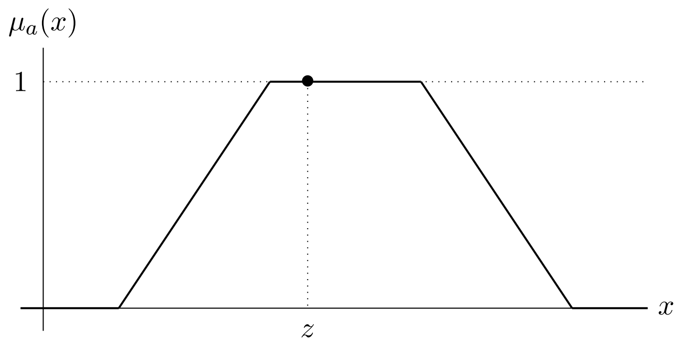

Figura 3.5

Sea $a' \in \mathbb{F}$ tal que $\mu_{a'}(x) = \mu_a(z+x)$. Obsérvese que a' es un número que resulta de la traslación horizontal de la función de pertenencia de a como se muestra en la Figura 3.6. Además, como $z \in core(a)$, entonces se verifica que $0 \in core(a')$. Este es un hecho clave para poder descomponer a' como suma de dos números difusos como los de los dos pasos previos.

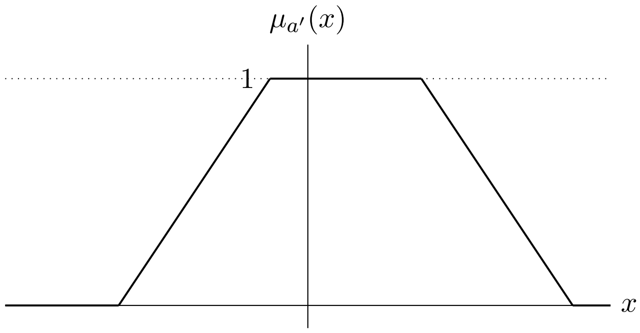

Figura 3.6

Sean $b, c \in \mathbb{F}$ definidos por

$$\mu_b(x) = \begin{cases} \mu_{a'}(x) & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

$$\mu_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0, \\ \mu_{a'}(x) & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Como se puede observar en la Figura 3.7, $b \geqslant 0$, $c \leqslant 0$ y $0 \subseteq b, c$. Se puede verificar fácilmente que $[b]_t = \left[0, a_t^+ - z\right]$ y $[c]_t = \left[a_t^- - z, 0\right]$ para cada $t \in [0,1]$. Se sigue que $a = z \oplus b \oplus c$. Por tanto, $a \odot u_E = zu_E \oplus (b \odot u_E) \oplus (c \odot u_E)$. Por la propiedad de aditividad, (3.7), (3.9) y (3.24), se obtiene que

$$\begin{aligned} \Psi^{fuzzy}(a \odot u_E) &= \Psi^{fuzzy}(zu_E) \oplus \Psi^{fuzzy}(b \odot u_E) \oplus \Psi^{fuzzy}(c \odot u_E) \\ &= \mathrm{B}^{fuzzy}(zu_E) \oplus \mathrm{B}^{fuzzy}(b \odot u_E) \oplus \mathrm{B}^{fuzzy}(c \odot u_E) \\ &= \mathrm{B}^{fuzzy}(a \odot u_E), \end{aligned}$$

con lo que se ha probado (3.25).

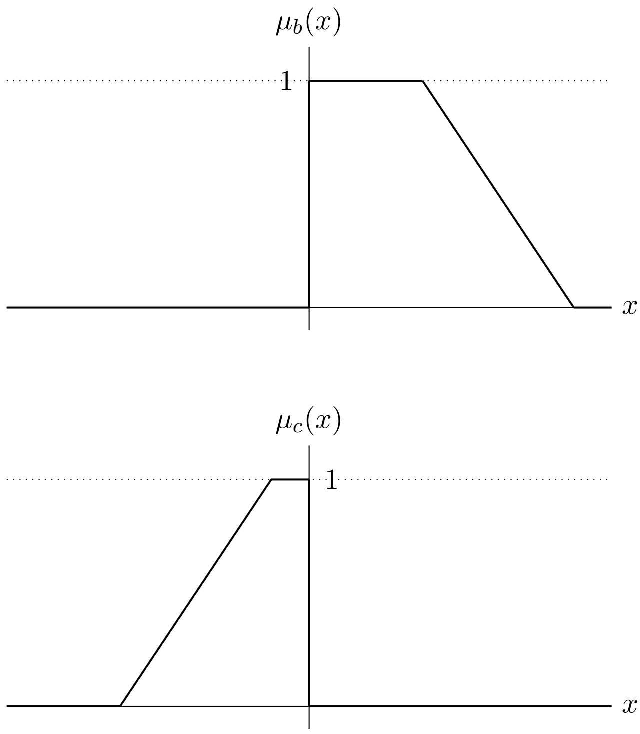

Figura 3.7

Paso 5. El objetivo en este paso es probar que

$$\Psi^{fuzzy}(a \odot \delta_E) = \mathrm{B}^{fuzzy}(a \odot \delta_E) \tag{3.26}$$

para cada $E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ y cada $a \in \mathbb{F}$.

Para ello se expresará un vector cualquiera de la base $\left\{\delta_E : E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}\right\}$ como combinación lineal de vectores de la base $\left\{u_E : E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}\right\}$. A partir de esa relación, se derivará una expresión que permita expresar los juegos de la forma $a \odot \delta_E$ en términos de los juegos de considerados en el paso 4. Empleando tal relación y el resultado (3.25), se concluirá (3.26).

De (1.4) y (1.5) se tiene

$$\delta_E = \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} (-1)^{|F|-|E|} u_F.$$

Si en esta expresión se suma en ambos lados $\sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} u_F$, se obtiene

$$\delta_E + \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} u_F = \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F, |F|-|E| \in 2\mathbb{Z}\}} 2u_F.$$

Como ya se indicó en la Sección 1.2., los juegos cooperativos con función característica real tienen estructura de espacio vectorial de dimensión $\mathbb{R}^N - 1$ y, en particular, los juegos de identidad y los juegos de unanimidad son vectores de ese espacio. Por ello, lo anterior es una expresión vectorial, y, en consecuencia, se puede escribir en términos de cada componente de los vectores, esto es,

$$\delta_E(H) + \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} u_F(H) = \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F, |F| - |E| \in 2\mathbb{Z}\}} 2u_F(H),$$

para cada $H \subseteq N$.

Dado que la aritmética difusa coincide con la aritmética sobre los números reales (si se ve a estos como números difusos), entonces lo anterior se puede escribir también como

$$\delta_E(H) \oplus \bigoplus_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} u_F(H) = \bigoplus_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F, |F| - |E| \in 2\mathbb{Z}\}} 2u_F(H). \quad (3.27)$$

Si se multiplica por a y se aplica la propiedad distributiva recogida en el punto (iii) de la Proposición 2.3, se tiene

$$\begin{aligned} (a \odot \delta_E)(H) \quad &\oplus \bigoplus_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} (a \odot u_F)(H) \\ &= \bigoplus_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F, |F| - |E| \in 2\mathbb{Z}\}} ((2 \odot a) \odot u_F)(H), \end{aligned}$$

para cada $H \subseteq N$. Por tanto,

$$\begin{aligned} (a \odot \delta_E) \quad &\oplus \bigoplus_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} (a \odot u_F) \\ &= \bigoplus_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F, |F| - |E| \in 2\mathbb{Z}\}} ((2 \odot a) \odot u_F). \end{aligned}$$

De esta expresión, y por axioma de aditividad, se tiene que

$$\begin{aligned} \Psi_i^{fuzzy}(a \odot \delta_E) \quad &\oplus \bigoplus_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} \Psi_i^{fuzzy}(a \odot u_F) \\ &= \bigoplus_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F, |F| - |E| \in 2\mathbb{Z}\}} \Psi_i^{fuzzy}((2 \odot a) \odot u_F) \quad (3.28) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_i^{fuzzy}(a \odot \delta_E) \quad &\oplus \bigoplus_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\}: E \subseteq F\}} \mathrm{B}_i^{fuzzy}(a \odot u_F) \\ &= \bigoplus_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\}: E \subseteq F, |F|-|E| \in 2\mathbb{Z}\}} \mathrm{B}_i^{fuzzy}((2 \odot a) \odot u_F) \end{aligned} \tag{3.29}$$

para cada $i \in N$. Del resultado del paso anterior (3.25), junto con (3.28), (3.29), y por la Proposición 2.5 se concluye que $\Psi_i^{fuzzy}(a \odot \delta_E) = \mathrm{B}_i^{fuzzy}(a \odot \delta_E)$ para cada $i \in N$. Con lo que se ha probado (3.26).

Paso 6. El objetivo en este paso es probar que

$$\Psi^{fuzzy}(v) = \mathrm{B}^{fuzzy}(v) \tag{3.30}$$

para cada $v \in \mathcal{FG}^N$.

Sea $v \in \mathcal{FG}^N$. Nótese que

$$v = \bigoplus_{E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} (v(E) \odot \delta_E)\,.$$

Por la propiedad de aditividad y (3.26),

$$\begin{aligned} \Psi^{fuzzy}(v) &= \Psi^{fuzzy}\left(\bigoplus_{E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} (v(E) \odot \delta_E)\right) \\ &= \bigoplus_{E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \Psi^{fuzzy}\left(v(E) \odot \delta_E\right) \\ &= \bigoplus_{E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \mathrm{B}^{fuzzy}\left(v(E) \odot \delta_E\right) \\ &= \mathrm{B}^{fuzzy}\left(\bigoplus_{E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} (v(E) \odot \delta_E)\right) \\ &= \mathrm{B}^{fuzzy}(v), \end{aligned}$$

lo que completa la demostración.

□

Los primeros cinco axiomas utilizados en el teorema anterior ($1-$eficiencia, amalgama, igual tratamiento, jugador nulo y aditividad) constituyen la axiomatización del valor clásico de Banzhaf introducida en el Capítulo 1 cuando los aplicamos solo sobre el conjunto de juegos cooperativos con función característica real. El último axioma (solución cero) no es necesario para juegos con pagos reales, ya que si $0 \subseteq v(E)$ para cada coalición y $v(E) \in \mathbb{R}$, entonces $v(E) = 0$, y el axioma de jugador nulo implica que la recompensa será cero para todos los jugadores. Sin embargo, el axioma de solución cero es necesario en el caso difuso por el problema que plantea la diferencia de números difusos. El sexto axioma (contribuciones marginales de igual signo) es quizás más sorprendente porque en el caso de juegos con pagos reales este axioma no es independiente de los anteriores pero en juegos con pagos difusos sí. A continuación se muestra que el axioma de contribuciones marginales de igual signo es independiente de los demás para juegos con función característica difusa. Supóngase que $v \in \mathcal{FG}^N$, se denotará mediante $a^v \in \mathbb{F}$ al intervalo $a^v = \left[-\left(v(N)_1^+ - v(N)_1^-\right), \left(v(N)_1^+ - v(N)_1^-\right)\right]$. El número difuso a^v es $0-$simétrico. Se propone otra solución para los juegos cooperativos con función característica difusa. Sea $v \in \mathcal{FG}^N$ y sea $i \in N$, entonces

$$\mathrm{D}_i^{fuzzy}(v) = \mathrm{B}_i^{fuzzy}(v) \oplus \left[(|N| - 1) \odot a^v\right].$$

Obsérvese que $\mathrm{D}_i^{fuzzy} = \mathrm{B}_i^{fuzzy}$ sobre juegos clásicos ya que $a^v = 0$. Se puede comprobar fácilmente que D_i^{fuzzy} satisface $1-$eficiencia, aditividad, jugador nulo, igual tratamiento, amalgama y solución cero, pero no satisface contribuciones marginales de igual signo.

Capítulo 4

Valores reales para juegos con función característica difusa

En el capítulo anterior se introdujo un modelo para representar situaciones cooperativas donde existe imprecisión en las ganancias de cada posible coalición. En ese capítulo se presentó un enfoque para hallar la solución de un juego que consistía en suponer que la imprecisión de los pagos de cada coalición implicaba imprecisión en las ganancias de los jugadores. Sin embargo, en este capítulo se propone otro enfoque consistente en suponer que, incluso si hay imprecisión en los pagos de cada coalición, se necesitan asignar cantidades precisas a los jugadores.

4.1. El valor real de Shapley

En esta sección, se introduce la noción de valor real de un juego cooperativo con función característica difusa. Un valor real sobre $\mathcal{FG}^N$ es una aplicación $\Psi^{crisp} : \mathcal{FG}^N \to \mathbb{R}^N$. Si $v \in \mathcal{FG}^N$ e $i \in N$, el número real $\Psi_i^{crisp}(v)$ representa la asignación del jugador i en el juego v, acorde con la regla Ψ^{crisp}.

El objetivo es definir un valor real $\Phi^{crisp} : \mathcal{FG}^N \to \mathbb{R}^N$ con buenas propiedades, basado en el valor de Shapley. El modelo planteado consiste en asociar a cada juego con función característica difusa un juego cooperativo clásico mediante el uso de un índice de clasificación de números difusos. Así, el valor de cada coalición se tomará como el índice de clasificación del valor que le asigna la función característica a dicha coalición. Con este fin, se empleará el índice de Yager introducido en la Definición 2.4. Si $v \in \mathcal{FG}^N$, se denotará mediante v_{Y} a la composición de la función característica con el índice de Yager, es decir, $v_{\mathrm{Y}} = \mathrm{Y} \circ v$. Nótese que v_{Y} pertenece a la familia de juegos cooperativos clásicos, esto es, $v_{\mathrm{Y}} \in \mathcal{G}^N$.

A continuación, se define una regla de asignación real para juegos cooperativos con función característica difusa basada en el valor de Shapley.

Definición 4.1. El valor real de Shapley para juegos cooperativos con función característica difusa es una regla de asignación $\Phi^{crisp} : \mathcal{FG}^N \to \mathbb{R}^N$ definida como

$$\Phi^{crisp}(v) = \phi(v_{\mathrm{Y}})$$

para cada $v \in \mathcal{FG}^N$.

Observación 4.1. Es posible introducir el valor real de Shapley a partir del valor difuso de Shapley propuesto por M. Mareš [54], ver Definición 4.2. De hecho, empleando las propiedades (iii), (iv) y (v) recogidas en la Proposición 2.7 se tiene que

$$\begin{aligned}
\Phi^{crisp}(v) &= \phi(v_{\mathrm{Y}}) \\
&= \sum_{\{E \subseteq N : i \in E\}} \frac{(|N| - |E|)!\,(|E| - 1)!}{|N|!} \left[v_{\mathrm{Y}}(E) - v_{\mathrm{Y}}(E \setminus \{i\})\right] \\
&= \mathrm{Y}\left(\bigoplus_{\{E \subseteq N : i \in E\}} \frac{(|N| - |E|)!\,(|E| - 1)!}{|N|!} \left[v(E) \ominus v(E \setminus \{i\})\right] \right) \\
&= \mathrm{Y}\left(\Phi^{fuzzy}(v)\right).
\end{aligned}$$

para cada $v \in \mathcal{FG}^N$.

En el siguiente ejemplo se presenta una aplicación del valor real de Shapley propuesto en la definición anterior.

Ejemplo 4.1. Tres empresas se unen en un proyecto para fabricar un nuevo producto. Cuando finaliza el proyecto tienen que compartir el beneficio obtenido por la venta del producto que supongamos es de 12 millones de euros. Para ello, la situación se representa mediante un juego cooperativo con conjunto de jugadores $N = \{1, 2, 3\}$. Supóngase que la ganancia que puede obtener cada coalición propiamente dicha no puede conocerse con precisión. Esto no es extraño si se tiene en cuenta que la única coalición que realmente se formará es N. La formación de cualquier otra coalición es solo una suposición utilizada para modelar esta situación y obtener una asignación justa del beneficio. Por tanto, parece razonable que solo existan expectativas sobre el beneficio que podría obtener cada coalición propiamente dicha. A continuación, se describen estas expectativas mediante números difusos cuyas funciones de pertenencia se han representado en la Figura 4.1.

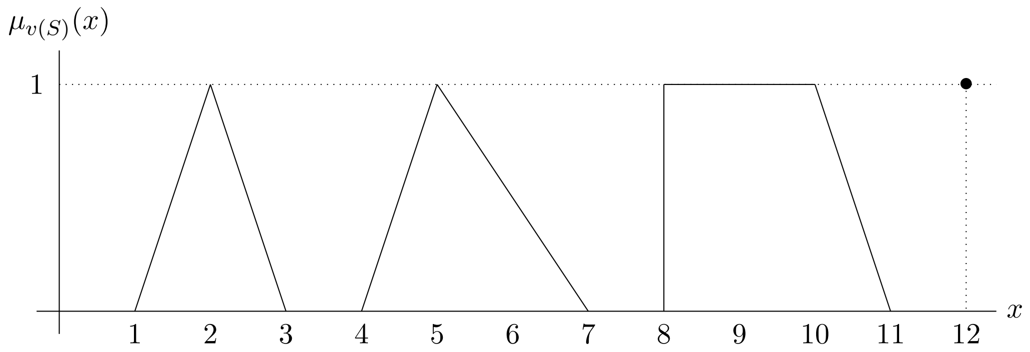

Figura 4.1.

$$\mu_{v(\{1\})}(x) = \mu_{v(\{2\})}(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 3-x & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$v(\{3\}) = 0,$$

$$\mu_{v(\{1,2\})}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 8 \leqslant x \leqslant 10, \\ 11-x & \text{si } 10 \leqslant x \leqslant 11, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\mu_{v(\{1,3\})}(x) = \mu_{v(\{2,3\})}(x) = \begin{cases} x-4 & \text{si } 4 \leqslant x \leqslant 5, \\ \frac{7-x}{2} & \text{si } 5 \leqslant x \leqslant 7, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$v(N) = 12.$$

A partir de ello, se obtiene el juego v_{Y} usando el índice de Yager.

$$v_{\mathrm{Y}}(\emptyset) = 0,$$

$$v_{\mathrm{Y}}(\{1\}) = 2,$$

$$v_{\mathrm{Y}}(\{2\}) = 2,$$

$$v_{\mathrm{Y}}(\{3\}) = 0,$$

$$v_{\mathrm{Y}}(\{1,2\}) = \frac{37}{4},$$

$$v_{\mathrm{Y}}(\{1,3\}) = \frac{21}{4},$$

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{Y}}\left(\{2,3\}\right) &= \frac{21}{4}, \\ v_{\mathrm{Y}}\left(N\right) &= 12. \end{aligned}$$

Y finalmente, se calcula el valor de Shapley del juego v_{Y}.

$$\Phi^{crisp}\left(v\right) = \phi\left(v_{\mathrm{Y}}\right) = \left(5,5,2\right).$$

$\triangle$

En lo que sigue se van a extender algunas propiedades presentes en los juegos cooperativos clásicos al contexto de juegos con pagos difusos. Sea v un juego cooperativo con función característica difusa superaditivo con posibilidad 1, es decir,

$$v\left(E \cup F\right) \geqslant v(E) \oplus v(F)$$

para todo $E, F \subseteq N$ con $E \cap F = \emptyset$. Esto implica que el juego $v_{\mathrm{Y}} \in \mathcal{G}^N$ es superaditivo, es decir,

$$v_{\mathrm{Y}}\left(E \cup F\right) \geqslant v_{\mathrm{Y}}(E) + v_{\mathrm{Y}}(F)$$

para todo $E, F \subseteq N$ con $E \cap F = \emptyset$. Como v_{Y} es superaditivo, ϕ verifica el *principio de racionalidad individual*. Por tanto, se tiene que

$$\Phi_i^{crisp}(v) = \phi_i(v_{\mathrm{Y}}) \geqslant v_{\mathrm{Y}}\left(\{i\}\right)$$

para todo $i \in N$. Por otro lado, se puede observar que

$$\begin{aligned} \nu_{\geqslant}\left(\Phi_i^{crisp}(v), v\left(\{i\}\right)\right) &= \sup\left\{\mu_{v(\{i\})}(x) : x \leqslant \Phi_i^{crisp}(v)\right\} \\ &\leqslant \mu_{v(\{i\})}\left(\Phi_i^{crisp}(v)\right). \end{aligned}$$

En particular, si $v\left(\{i\}\right)$ es un número triangular con función de pertenencia

$$\mu_a(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & \text{si } a_1 \leqslant x \leqslant a_2, \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2} & \text{si } a_2 \leqslant x \leqslant a_3, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\nu_{\geqslant}\left(\Phi_i^{crisp}(v), v\left(\{i\}\right)\right) = 1$$

cuando $a_2 \leqslant \frac{a_1+a_3}{2}$. Los siguientes ejemplos tratan de ilustrar esta propiedad.

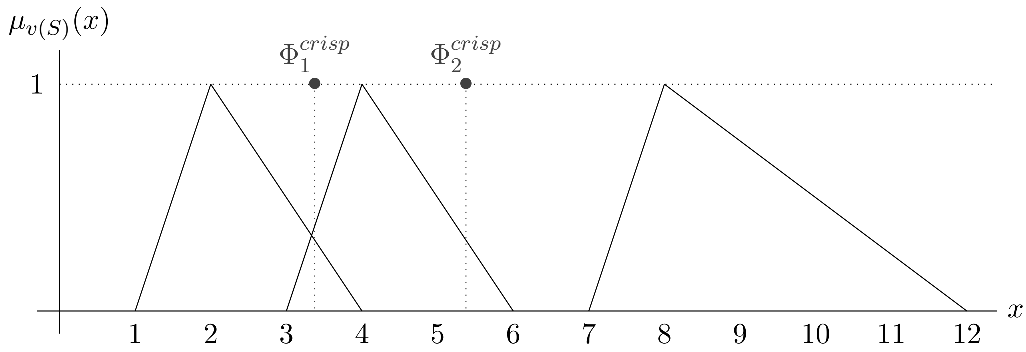

Figura 4.2.

Ejemplo 4.2. Sea el juego $v \in \mathcal{FG}^N$ con $N = \{1, 2\}$ tal que

$$\mu_{v(\{1\})}(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ \frac{4-x}{2} & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 4, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\mu_{v(\{2\})}(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } 3 \leqslant x \leqslant 4, \\ \frac{6-x}{2} & \text{si } 4 \leqslant x \leqslant 6, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\mu_{v(N)}(x) = \begin{cases} x - 7 & \text{si } 7 \leqslant x \leqslant 8, \\ \frac{12-x}{4} & \text{si } 8 \leqslant x \leqslant 12, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil comprobar que $\nu_{\geqslant}\left(v\left(E \cup F\right), v(E) \oplus v(F)\right) = 1$. El juego $v_{\mathrm{Y}} \in \mathcal{G}^N$ asociado es

$$v_{\mathrm{Y}}(\{1\}) = 2.25,$$

$$v_{\mathrm{Y}}(\{2\}) = 4.25,$$

$$v_{\mathrm{Y}}(N) = 8.75.$$

El valor real de Shapley de v es

$$\Phi^{crisp}(v) = \left(\Phi_1^{crisp}(v), \Phi_2^{crisp}(v)\right) = (3.375, 5.375).$$

Como se puede comprobar fácilmente en la Figura 4.2, $\nu_{\geqslant}\left(\Phi_1^{crisp}(v), v(\{1\})\right) = 1$ y $\nu_{\geqslant}\left(\Phi_2^{crisp}(v), v(\{2\})\right) = 1$. $\triangle$

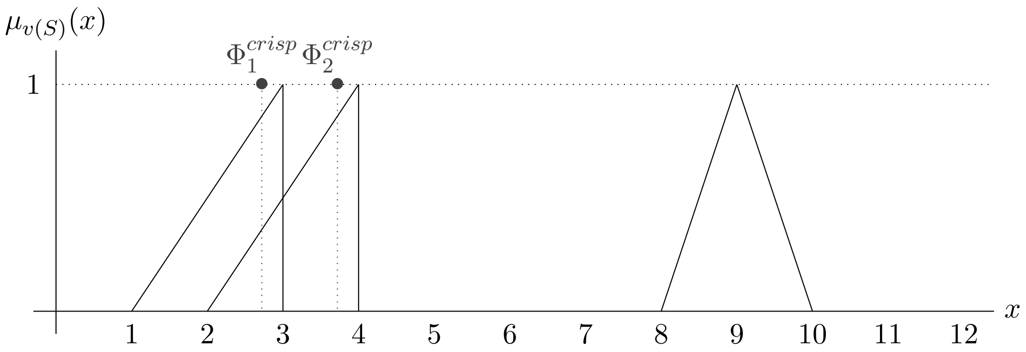

Figura 4.3.

Ejemplo 4.3. Sea ahora el juego $v \in \mathcal{FG}^N$ con $N = \{1, 2\}$ tal que

$$\mu_{v(\{1\})}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\mu_{v(\{2\})}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 4, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\mu_{v(N)}(x) = \begin{cases} x-8 & \text{si } 8 \leqslant x \leqslant 9, \\ 10-x & \text{si } 9 \leqslant x \leqslant 10, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil comprobar que $\nu_{\geqslant}\left(v\left(E \cup F\right), v(E) \oplus v(F)\right) = 1$. El juego $v_{\mathrm{Y}} \in \mathcal{G}^N$ asociado es

$$v_{\mathrm{Y}}(\{1\}) = 2.5,$$

$$v_{\mathrm{Y}}(\{2\}) = 3.5,$$

$$v_{\mathrm{Y}}(N) = 6.5.$$

El valor real de Shapley de v es

$$\Phi^{crisp}(v) = \left(\Phi_1^{crisp}(v), \Phi_2^{crisp}(v)\right) = (2.75, 3.75).$$

Observando la Figura 4.3, se puede ver fácilmente que $\nu_{\geqslant}\left(\Phi_1^{crisp}(v), v(\{1\})\right) < 1$ y $\nu_{\geqslant}\left(\Phi_2^{crisp}(v), v(\{2\})\right) < 1$. △

Se pretende caracterizar el valor real de Shapley para juegos cooperativos con pagos difusos mediante una axiomatización basada en propiedades razonables y comprobables en los datos del problema, es decir, que se describan desde la función característica difusa de éste.

Fijado un conjunto finito y no vacío de jugadores N, a continuación se introducen algunas propiedades que el valor real $\Psi^{crisp} : \mathcal{FG}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ debería satisfacer.

Eficiencia para el beneficio total simétrico. Si $v \in \mathcal{FG}^N$ y $v(N)$ es un número difuso simétrico, es decir, existe un $p \in \mathbb{R}$ tal que $v(N) \ominus p \in \mathbb{F}_0$, entonces

$$\sum_{i \in N} \Psi_i^{crisp}(v) = p.$$

Una situación clara de aplicación de las reglas de asignación reales para juegos con función característica difusa es aquella en la que se pretende repartir el beneficio obtenido de la cooperación entre un grupo de jugadores a partir de los beneficios de las distintas coaliciones, pero estos últimos no se conocen con exactitud. Esto es razonable porque la formación de una coalición distinta de la gran coalición es solo un escenario hipotético y, por lo tanto, es posible que no se conozca con precisión el beneficio que puede lograr. Sin embargo, en un escenario como este, es de esperar que el beneficio de la gran coalición sea conocido con exactitud y, por tanto, vendrá dado por un número real. Obsérvese que axioma anterior garantiza un reparto exacto del número real $v(N)$ en estas situaciones, esto es,

$$\sum_{i \in N} \Psi_i^{crisp}(v) = v(N).$$

Proposición 4.1. *El valor real de Shapley Φ^{crisp} satisface la propiedad de eficiencia para el beneficio total simétrico.*

Demostración. Sea $v \in \mathcal{FG}^N$ con $v(N)$ un número difuso simétrico. Sea $p \in \mathbb{R}$ tal que $v(N) \ominus p$ es un número difuso $0-$simétrico. Ya que $v(N)$ es un número simétrico, el punto medio de cada corte a nivel t, para cada $t \in [0, 1]$, es el mismo e igual a p, esto es,

$$\frac{v(N)_t^- + v(N)_t^+}{2} = p$$

para cada $t \in [0, 1]$. De la definición de Φ^{crisp} y de la propiedad de eficiencia del valor de Shapley, se sigue

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \Phi_i^{crisp}(v) &= \sum_{i \in N} \phi_i(v_{\mathrm{Y}}) \\ &= v_{\mathrm{Y}}(N) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{Y}\left(v(N)\right) \\
&= \int_0^1 \frac{v(N)_t^- + v(N)_t^+}{2} dt \\
&= p.
\end{aligned}
$$

En particular, si $v(N) \in \mathbb{R}$, por la propiedad (i) de la Proposición 2.7, se tiene que $\mathrm{Y}\left(v(N)\right) = v(N)$, y en consecuencia,

$$\sum_{i \in N} \Phi_i^{crisp}(v) = v(N).$$

□

Igual tratamiento. Si $v \in \mathcal{FG}^N$, $i, j \in N$ y $v(E \cup \{i\}) = v(E \cup \{j\})$ para cada $E \subseteq N \setminus \{i, j\}$, entonces

$$\Psi_i^{crisp}(v) = \Psi_j^{crisp}(v).$$

Como ya se ha señalado, la igualdad $v\left(E \cup \{i\}\right) = v\left(E \cup \{j\}\right)$ no implica que si las coaliciones $E \cup \{i\}$ y $E \cup \{j\}$ se llegaran a formar, el pago de ambas tuviese que ser el mismo. Esto únicamente significa que las expectativas sobre los pagos que pueden lograr esas coaliciones son las mismas. Por tanto, lo que la propiedad anterior establece es que si dos jugadores, al unirse a las coaliciones de las que no forman parte, generan las mismas expectativas en los pagos, entonces la asignación debe ser la misma para ambos.

Proposición 4.2. *El valor real de Shapley Φ^{crisp} satisface la propiedad de igual tratamiento.*

Demostración. Sea $v \in \mathcal{FG}^N$ y sean $i, j \in N$ tales que $v(E \cup \{i\}) = v(E \cup \{j\})$ para cada $E \subseteq N \setminus \{i, j\}$. De lo anterior se sigue que $v_{\mathrm{Y}}(E \cup \{i\}) = v_{\mathrm{Y}}(E \cup \{j\})$ para cada $E \subseteq N \setminus \{i, j\}$. Por la propiedad de igual tratamiento del valor de Shapley, se tiene que $\phi_i\left(v_{\mathrm{Y}}\right) = \phi_j\left(v_{\mathrm{Y}}\right)$. El hecho anterior implica que $\Phi_i^{crisp}\left(v\right) = \Phi_j^{crisp}\left(v\right)$. □

Jugador nulo. Si $v \in \mathcal{FG}^N$ y $i \in N$ verifica que $v(E \cup \{i\}) = v(E)$ para cada $E \subseteq N \setminus \{i\}$, entonces

$$\Psi_i^{crisp}(v) = 0.$$

Este axioma establece que si un jugador, al unirse a las coaliciones de las que no forma parte, no cambia las expectativas de pago de esas coaliciones, entonces a ese jugador le debe corresponder una asignación de cero.

Proposición 4.3. *El valor real de Shapley Φ^{crisp} satisface la propiedad de jugador nulo.*

Demostración. Sea $v \in \mathcal{FG}^N$ y sea $i \in N$ tal que $v(E \cup \{i\}) = v(E)$ para cada $E \subseteq N \setminus \{i\}$. De lo anterior se desprende que i es un jugador nulo en v_{Y}. Por tanto, por la propiedad de jugador nulo del valor de Shapley se tiene que $\phi_i(v_{\mathrm{Y}}) = 0$. Este hecho implica que $\Phi_i^{crisp}(v) = 0$. □

Aditividad. Si $v, w \in \mathcal{FG}^N$, entonces

$$\Psi^{crisp}(v \oplus w) = \Psi^{crisp}(v) + \Psi^{crisp}(w).$$

La anterior propiedad es una adaptación del axioma clásico de aditividad a la suma de juegos cooperativos con función característica difusa.

Proposición 4.4. *El valor real de Shapley Φ^{crisp} satisface la propiedad de aditividad.*

Demostración. Sean $v, w \in \mathcal{FG}^N$ y sea $E \in 2^N$. Por la propiedad (iv) de la Proposición 2.7, se tiene que $(v \oplus w)_{\mathrm{Y}}(E) = v_{\mathrm{Y}}(E) + w_{\mathrm{Y}}(E)$. Y de esto se concluye que $(v \oplus w)_{\mathrm{Y}} = v_{\mathrm{Y}} + w_{\mathrm{Y}}$. De este hecho, junto con el axioma clásico de aditividad del valor de Shapley se sigue que

$$\begin{aligned}
\Phi^{crisp}(v \oplus w) &= \phi\left((v \oplus w)_{\mathrm{Y}}\right) \\
&= \phi\left(v_{\mathrm{Y}} + w_{\mathrm{Y}}\right) \\
&= \phi\left(v_{\mathrm{Y}}\right) + \phi\left(w_{\mathrm{Y}}\right) \\
&= \Phi^{crisp}(v) + \Phi^{crisp}(w).
\end{aligned}$$

□

Continuidad. El valor Ψ^{crisp} es una función continua usando la distancia del supremo d_∞ sobre $\mathbb{F}$.

El axioma de continuidad asegura pequeños cambios en la asignación cuando se consideran cambios suficientemente pequeños en los pagos. Normalmente se considera que éste es un requerimiento técnico, pero tiene mucho sentido dado que pequeños errores en los valores de las coaliciones no tendrían que repercutir en gran medida en los repartos obtenidos. Las reglas de asignación clásicas presentadas en el Capítulo 1 verifican esta propiedad.

Proposición 4.5. *El valor real de Shapley Φ^{crisp} satisface la propiedad de continuidad.*

Demostración. El valor de Shapley en $\mathcal{G}^N$ es un operador lineal de $\mathbb{R}^{2^N\setminus\{\emptyset\}}$ en $\mathbb{R}^N$. Esto implica que $\phi : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^N$ es continuo. Por otro lado, se ha probado en el Teorema 2.2 que el índice de Yager es una función continua empleando la distancia del supremo d_∞ sobre $\mathbb{F}$. Por tanto, dado que $\Phi^{crisp} = \phi \circ \mathrm{Y}$, y sabiendo que la composición de funciones conserva la continuidad, entonces se sigue que Φ^{crisp} es continua. $\square$

Comonotonía. Sean $v, w \in \mathcal{FG}^N$ con $core(v(E)) \cap core(w(E)) \neq \emptyset$ para cada $E \in 2^N$. Y sea $\alpha \in (0,1)$. Se define $h \in \mathcal{FG}^N$ mediante

$$\mu_{h(E)}(x) = \alpha\mu_{v(E)}(x) + (1-\alpha)\mu_{w(E)}(x)$$

para cada $E \in 2^N$ y $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\Psi^{crisp}(h) = \alpha\Psi^{crisp}(v) + (1-\alpha)\Psi^{crisp}(w).$$

La propiedad de comonotonía puede interpretarse en el siguiente sentido. Dada una situación cooperativa, se pueden considerar, dependiendo del análisis de estimaciones, juegos con pagos difusos ligeramente diferentes para representar esta situación (por lo que, por lo general, los cores de los pagos asignados a la misma coalición tendrán intersección no vacía). La propiedad de comonotonía establece que la asignación de un promedio ponderado de estos juegos es el promedio ponderado de las asignaciones de los juegos. Esta propiedad se puede entender como una aditividad para los distintos niveles de adecuación o posibilidad.

Proposición 4.6. *El valor real de Shapley Φ^{crisp} satisface la propiedad de comonotonía.*

Demostración. Sean $v, w \in \mathcal{FG}^N$ tales que $core(v(E)) \cap core(w(E)) \neq \emptyset$ para cada $E \in 2^N$. Sea $\alpha \in (0,1)$. Se define $h \in \mathcal{FG}^N$ mediante

$$\mu_{h(E)}(x) = \alpha\mu_{v(E)}(x) + (1-\alpha)\mu_{w(E)}(x)$$

para cada $E \in 2^N$ y cada $x \in \mathbb{R}$. Dado que se verifican las condiciones del Teorema 2.3 entonces se sigue que

$$h_{\mathrm{Y}}(E) = \alpha v_{\mathrm{Y}}(E) + (1-\alpha)w_{\mathrm{Y}}(E)$$

para cada $E \in 2^N$. De ello se sigue que

$$h_{\mathrm{Y}} = \alpha v_{\mathrm{Y}} + (1-\alpha)w_{\mathrm{Y}}.$$

De este resultado, junto con la propiedad de linealidad de ϕ, se tiene que

$$\phi\left(h_{\mathrm{Y}}\right)=\alpha\phi\left(v_{\mathrm{Y}}\right)+(1-\alpha)\phi\left(w_{\mathrm{Y}}\right),$$

lo que implica

$$\Phi^{crisp}(h)=\alpha\Phi^{crisp}(v)+(1-\alpha)\Phi^{crisp}(w).$$

□

El siguiente resultado establece que el valor real de Shapley para juegos cooperativos con función característica difusa es el único valor que satisface los seis axiomas previos.

Teorema 4.1. *Si una regla de asignación real Ψ^{crisp} sobre $\mathcal{FG}^N$ satisface las propiedades de eficiencia para el beneficio total simétrico, igual tratamiento, jugador nulo, aditividad, continuidad y comonotonía, entonces ese valor es igual al valor real de Shapley para juegos cooperativos con función característica difusa.*

Demostración. Supóngase que $\Psi^{crisp}:\mathcal{FG}^N\to\mathbb{R}^N$ satisface las propiedades indicadas en el teorema. El objetivo es probar que $\Psi^{crisp}=\Phi^{crisp}$. Para ello se realizará una demostración en varios pasos. En cada paso se probará que $\Psi^{crisp}(v)=\Phi^{crisp}(v)$ para cada v en una cierta clase de juegos. En los cuatro primeros pasos se probará para juegos de la forma $a\odot u_E$ donde $a\in\mathbb{F}$ y se irá demostrando para distintos tipos de números difusos a, hasta probarlo para cualquier número difuso. El paso 5 emplea la relación entre δ_E y u_E para probarlo en juegos de la forma $a\odot\delta_E$. Debido a la limitación que supone que $\mathcal{FG}^N$ no sea un espacio vectorial, es necesario emplear tanto los juegos de unanimidad como los juegos de identidad. Por último, en el paso 6 se emplearán los resultados de los pasos previos para probarlo en cualquier juego $v\in\mathcal{FG}^N$.

Paso 1. Sea $E\in 2^N\setminus\{\emptyset\}$ y sea $a\in\mathbb{F}$ tal que $|\{\mu_a(z):z\in\mathbb{R}\}|=2$. El objetivo en este paso es probar que

$$\Psi^{crisp}(a\odot u_E)=\Phi^{crisp}(a\odot u_E). \tag{4.1}$$

Nótese que en este caso a es un intervalo. Dado que a es un intervalo, existen $x,y\in\mathbb{R}$ con $x\leqslant y$ tales que

$$\mu_a(z)=\begin{cases}1 & \text{si } z\in[x,y],\\ 0 & \text{si } z\in\mathbb{R}\setminus[x,y].\end{cases}$$

Para ilustrar esto, se ha representado en la Figura 4.4 la función de pertenencia de un número difuso con tales características.

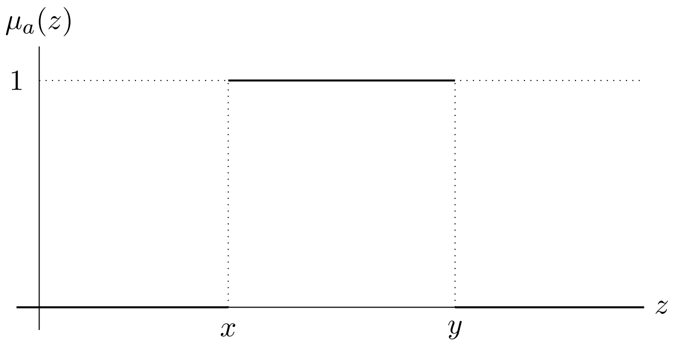

Figura 4.4.

Los jugadores de $N \setminus E$ son jugadores nulos en $a \odot u_E$. Por tanto, por el axioma de jugador nulo se tiene que

$$\Psi_i^{crisp}(a \odot u_E) = 0 \tag{4.2}$$

para cada $i \in N \setminus E$. Por otro lado, por el axioma de igual tratamiento, existirá un $p \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Psi_i^{crisp}(a \odot u_E) = p \tag{4.3}$$

para cada $i \in E$. Al ser $\frac{x+y}{2}$ el punto medio del intervalo, el número $a \ominus \frac{x+y}{2}$ será un número difuso $0-$simétrico como se muestra en la Figura 4.5.

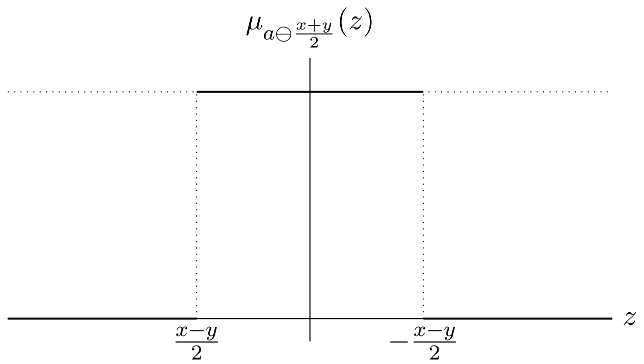

Figura 4.5.

De (4.2), (4.3) y por el axioma de eficiencia para el beneficio total simétrico se sigue que

$$\Psi_i^{crisp}(a \odot u_E) = \begin{cases} \frac{x+y}{2|E|} & \text{si } i \in E, \\ 0 & \text{si } i \in E \setminus N. \end{cases}$$

Ya que se han empleado únicamente las propiedades del teorema, entonces se concluye (4.1).

Paso 2. Sea $E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ y sea $a \in \mathbb{F}$ tal que $|\{\mu_a(z) : z \in \mathbb{R}\}| = 3$. El objetivo en este paso es probar que

$$\Psi^{crisp}(a \odot u_E) = \Phi^{crisp}(a \odot u_E). \tag{4.4}$$

Para ello, se va a expresar la función de pertenencia de a como una combinación convexa de dos funciones de pertenencia como las consideradas en el paso 1.

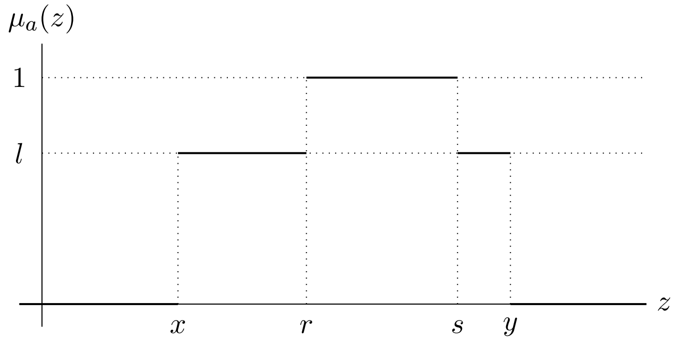

Figura 4.6.

Está claro que existe un $l \in (0,1)$ y $x, y, r, s \in \mathbb{R}$ con $x \leqslant r \leqslant s \leqslant y$ y $s-r < y-x$ tales que

$$\mu_a(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in [r,s], \\ l & \text{si } z \in [x,y] \setminus [r,s], \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R} \setminus [x,y]. \end{cases}$$

En la Figura 4.6 se ha representado la función de pertenencia de un número difuso con tales características.

Sean $b, c \in \mathbb{F}$ definidos mediante

$$\mu_b(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in [x,y], \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R} \setminus [x,y], \end{cases}$$

$$\mu_c(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in [r,s], \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R} \setminus [r,s]. \end{cases}$$

Nótese que la función de pertenencia de a se puede expresar como una combinación convexa de las funciones de pertenencia de b y c, esto es,

$$\mu_a(z) = l\mu_b(z) + (1-l)\mu_c(z)$$

para cada $z \in \mathbb{R}$. Esto es fácil de ver si se observa la Figura 4.7, donde se pueden combinar las funciones de pertenencia de b y c para obtener a.

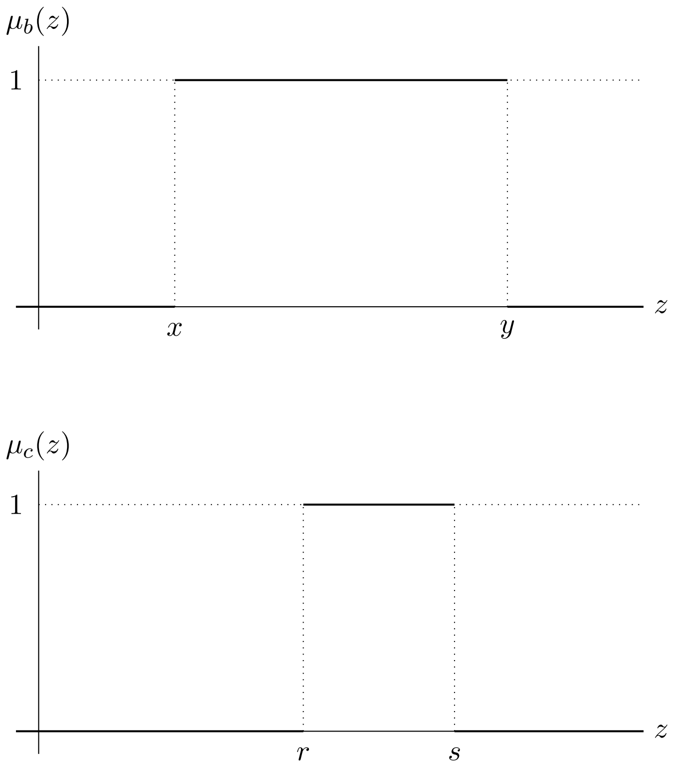

Figura 4.7.

En consecuencia,

$$\mu_{(a \odot u_E)(F)}(z) = l\mu_{(b \odot u_E)(F)}(z) + (1-l)\mu_{(c \odot u_E)(F)}(z) \tag{4.5}$$

para cada $F \in 2^N$ y cada $z \in \mathbb{R}$.

Además, como se ha supuesto que $x \leqslant r \leqslant s \leqslant y$ y $s - r < y - x$, entonces

$$core(b) \cap core(c) = core(c) = [r, s] \neq \emptyset.$$

Por ello,

$$core((b \odot u_E)\,(F)) \cap core((c \odot u_E)\,(F)) \neq \emptyset \tag{4.6}$$

para cada $F \in 2^N$.

Dado (4.5) y ya que se cumple la condición (4.6), se puede aplicar el axioma de comonotonía. De esta propiedad, junto con el resultado del paso previo (4.1), se tiene que

$$\begin{aligned}\Psi^{crisp}(a \odot u_E) &= l\Psi^{crisp}(b \odot u_E) + (1-l)\Psi^{crisp}(c \odot u_E)\\ &= l\Phi^{crisp}(b \odot u_E) + (1-l)\Phi^{crisp}(c \odot u_E)\\ &= \Phi^{crisp}(a \odot u_E)\end{aligned}$$

de donde se concluye (4.4).

Paso 3. Sea $E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ y sea $a \in \mathbb{F}$ tal que $\{\mu_a(z) : z \in \mathbb{R}\}$ es un conjunto finito. El objetivo en este paso es probar que

$$\Psi^{crisp}(a \odot u_E) = \Phi^{crisp}(a \odot u_E). \tag{4.7}$$

Con este fin, se expresará el número a como suma de múltiples números difusos como los considerados en el paso previo.

Está claro que existen $l_1, \ldots, l_{n-1} \in (0,1)$ con $l_1 < \ldots < l_{n-1} < 1$ y $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ con $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant y_n \leqslant \ldots \leqslant y_1$ tal que

$$\mu_a(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in [x_n, y_n],\\ l_i & \text{si } z \in [x_i, y_i] \setminus [x_{i+1}, y_{i+1}],\\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R} \setminus [x_1, y_1].\end{cases}$$

Para ilustrar este tipo de números difusos, se ha tomado $n = 4$ y se ha representado en la Figura 4.8 una función de pertenencia con las propiedades descritas anteriormente.

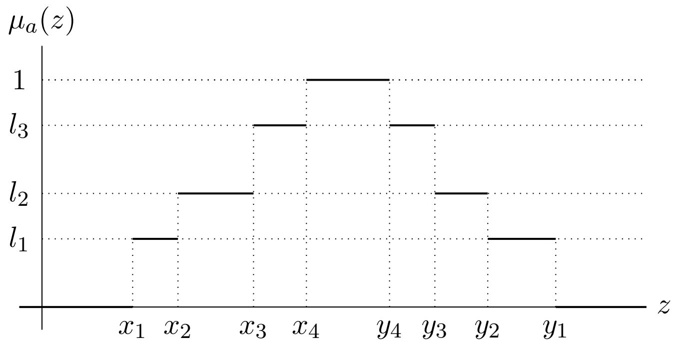

Figura 4.8.

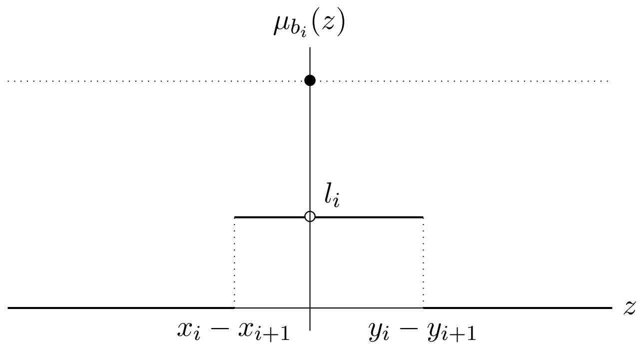

Figura 4.9.

Sean $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{F}$ definidos por

$$\mu_{b_n}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in [x_n, y_n], \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R} \setminus [x_n, y_n], \end{cases}$$

$$\mu_{b_i}(z) = \begin{cases} 1 & \text{if } z = 0, \\ l_i & \text{si } z \in [x_i - x_{i+1}, y_i - y_{i+1}] \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R} \setminus [x_i - x_{i+1}, y_i - y_{i+1}], \end{cases}$$

para $i = 1, \ldots, n-1$. Se puede verificar fácilmente que

$$a = \bigoplus_{i=1}^{n} b_i.$$

Por tanto,

$$a \odot u_E = \bigoplus_{i=1}^{n} b_i \odot u_E.$$

Por el axioma de aditividad y los resultados de los pasos previos (4.4) y (4.1), se tiene

$$\begin{aligned} \Psi^{crisp}(a \odot u_E) &= \Psi^{crisp}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} b_i \odot u_E\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Psi^{crisp}\left(b_i \odot u_E\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Phi^{crisp}\left(b_i \odot u_E\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Phi^{crisp}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} b_i \odot u_E\right) \\
&= \Phi^{crisp}(a \odot u_E),
\end{aligned}
$$

de donde se sigue (4.7).

Paso 4. Sea $E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ y sea $a \in \mathbb{F}$. El objetivo en este paso es probar que

$$\Psi^{crisp}(a \odot u_E) = \Phi^{crisp}(a \odot u_E). \tag{4.8}$$

Una vez que se ha probado (4.7) en el paso previo, se puede suponer que $\{\mu_a(z) : z \in \mathbb{R}\}$ no es finito. Por la propiedad de continuidad y el resultado de (4.7), para probar (4.8) es suficiente probar que hay juegos de la forma $b \odot u_E$, donde $\{\mu_b(z) : z \in \mathbb{R}\}$ es finito y arbitrariamente cercano del juego $a \odot u_E$. Pero esto se sigue del Teorema 2.1, donde se probó que los números difusos con una cantidad finita de niveles son densos.

Paso 5. Sea $E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ y sea $a \in \mathbb{F}$. El objetivo en este paso es probar que

$$\Psi^{crisp}(a \odot \delta_E) = \Phi^{crisp}(a \odot \delta_E). \tag{4.9}$$

Para ello se expresará un vector cualquiera de la base $\left\{\delta_E : E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}\right\}$ como combinación lineal de vectores de la base $\left\{u_E : E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}\right\}$. A partir de esa relación, se derivará una expresión que permita expresar los juegos de la forma $a \odot \delta_E$ en términos de los juegos de considerados en el paso 4. Empleando tal relación y el resultado (4.8), se concluirá (4.9).

De (1.4) y (1.5) se tiene

$$\delta_E = \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} (-1)^{|F|-|E|} u_F.$$

Si en esta expresión se suma en ambos lados $\sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} u_F$, se obtiene

$$\delta_E + \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} u_F = \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F, |F|-|E| \in 2\mathbb{Z}\}} 2u_F.$$

Dado que lo anterior es una expresión vectorial, se puede escribir en términos de cada componente de los vectores, esto es,

$$\delta_E(H) + \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} u_F(H) = \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F, |F|-|E| \in 2\mathbb{Z}\}} 2u_F(H),$$

para cada $H \subseteq N$. Multiplicando por a y aplicando la propiedad (iii) de la Proposición 2.3 se tiene

$$\begin{aligned}(a \odot \delta_E)(H) \quad &\oplus \bigoplus_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} (a \odot u_F)(H) \\ &= \bigoplus_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F, |F|-|E| \in 2\mathbb{Z}\}} ((2 \odot a) \odot u_F)(H),\end{aligned}$$

para cada $H \subseteq N$. Por tanto,

$$\begin{aligned}(a \odot \delta_E) \quad &\oplus \bigoplus_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} (a \odot u_F) \\ &= \bigoplus_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F, |F|-|E| \in 2\mathbb{Z}\}} ((2 \odot a) \odot u_F).\end{aligned}$$

De esta expresión, y por la propiedad de aditividad, se tiene que

$$\begin{aligned}\Psi_i^{crisp}(a \odot \delta_E) \quad &+ \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} \Psi_i^{crisp}(a \odot u_F) \\ &= \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F, |F|-|E| \in 2\mathbb{Z}\}} \Psi_i^{crisp}((2 \odot a) \odot u_F), \qquad (4.10)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\Phi_i^{crisp}(a \odot \delta_E) \quad &+ \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} \Phi_i^{crisp}(a \odot u_F) \\ &= \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F, |F|-|E| \in 2\mathbb{Z}\}} \Phi_i^{crisp}((2 \odot a) \odot u_F), \qquad (4.11)\end{aligned}$$

para todo $i \in N$. Despejando en las ecuaciones (4.10) y (4.11), se obtiene

$$\begin{aligned}\Psi_i^{crisp}(a \odot \delta_E) \quad &= \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F, |F|-|E| \in 2\mathbb{Z}\}} \Psi_i^{crisp}((2 \odot a) \odot u_F) \\ &- \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} \Psi_i^{crisp}(a \odot u_F), \qquad (4.12)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\Phi_i^{crisp}(a \odot \delta_E) \quad &= \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F, |F|-|E| \in 2\mathbb{Z}\}} \Phi_i^{crisp}((2 \odot a) \odot u_F) \\ &- \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} \Phi_i^{crisp}(a \odot u_F), \qquad (4.13)\end{aligned}$$

para todo $i \in N$.

De (4.12) y (4.13) y del resultado del paso anterior (4.8), se tiene

$$\begin{aligned}
\Psi_i^{crisp}(a \odot \delta_E) &= \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F, |F|-|E| \in 2\mathbb{Z}\}} \Psi_i^{crisp}((2 \odot a) \odot u_F) \\
&\quad - \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} \Psi_i^{crisp}(a \odot u_F) \\
&= \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F, |F|-|E| \in 2\mathbb{Z}\}} \Phi_i^{crisp}((2 \odot a) \odot u_F) \\
&\quad - \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} \Phi_i^{crisp}(a \odot u_F) \\
&= \Phi_i^{crisp}(a \odot \delta_E),
\end{aligned}$$

de donde se concluye (4.9).

Paso 6. El objetivo en este paso es probar que

$$\Psi^{crisp}(v) = \Phi^{crisp}(v) \tag{4.14}$$

para cada $v \in \mathcal{FG}^N$.

Sea $v \in \mathcal{FG}^N$. Obsérvese que

$$v = \bigoplus_{E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} (v(E) \odot \delta_E).$$

Por la propiedad de aditividad y el resultado de (4.9), se tiene que

$$\begin{aligned}
\Psi^{crisp}(v) &= \Psi^{crisp}\left(\bigoplus_{E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} (v(E) \odot \delta_E)\right) \\
&= \sum_{E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \Psi^{crisp}(v(E) \odot \delta_E) \\
&= \sum_{E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \Phi^{crisp}(v(E) \odot \delta_E) \\
&= \Phi^{crisp}\left(\bigoplus_{E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} (v(E) \odot \delta_E)\right) \\
&= \Phi^{crisp}(v),
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración, ya que se ha probado que para todo $v \in \mathcal{FG}^N$

se cumple (4.14).

□

Los axiomas de eficiencia para el beneficio total simétrico, igual tratamiento, jugador nulo y aditividad forman la axiomatización clásica del valor de Shapley cuando se aplican solo sobre la familia de juegos cooperativos con función característica real. La propiedad de continuidad, pese a ser un axioma técnico, es una condición normal para extender funciones discretas al caso continuo como mostró J. P. Aubin [7]. El axioma de comonotonía, como ya se ha dicho, se puede entender como una aditividad para los distintos niveles de adecuación. A pesar de ello, este axioma es independiente del resto. Para mostrar esto se empleará un índice de clasificación de números difusos denominado *media de los máximos* [44]. Sea $\mathrm{M} : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ definido como $\mathrm{M}(a) = \frac{a_1^- + a_1^+}{2}$ para cada $a \in \mathbb{F}$. Para cada $v \in \mathcal{FG}^N$, se define $v_{\mathrm{M}} \in \mathcal{G}^N$ como $v_{\mathrm{M}} = \mathrm{M} \circ v$. Sea

$$\Lambda^{crisp}(v) = \phi\left(v_{\mathrm{M}}\right)$$

para cada $v \in \mathcal{FG}^N$. Es fácil comprobar que Λ^{crisp} satisface 1−eficiencia para el beneficio simétrico, igual tratamiento, jugador nulo, aditividad, amalgama, continuidad, pero no satisface comonotonía.

4.2. El valor real de Banzhaf

En esta sección se propone una nueva regla de asignación real para juegos con función característica difusa. Para definir un valor con buenas propiedades, se empleará de nuevo el índice de clasificación de Yager introducido en la Definición 2.4. A continuación, se define este nuevo valor real basado en el valor de Banzhaf.

Definición 4.2. El valor real de Banzhaf para juegos cooperativos con función característica difusa se define mediante

$$\mathrm{B}_i^{crisp}(v) = \beta_i\left(v_{\mathrm{Y}}\right)$$

para cada conjunto finito y no vacío N, $v \in \mathcal{FG}^N$ e $i \in N$.

Observación 4.2. Es posible introducir el valor real de Banzhaf a partir del valor clásico de Banzhaf. De las propiedades (iii), (iv) y (v) de la Proposición 2.7 y de las definiciones de B^{fuzzy} y B^{crisp}, se sigue que

$$\mathrm{B}_i^{crisp}(v) = \mathrm{Y}\left(\mathrm{B}_i^{fuzzy}(v)\right)$$

para cada conjunto finito y no vacío N, $v \in \mathcal{FG}^N$ e $i \in N$.

A continuación, se presenta un ejemplo del valor real de Banzhaf propuesto en la Definición 4.2.

Ejemplo 4.4. Una empresa anuncia sus productos en tres sitios web a, b, c. Los gerentes quieren mantener esta publicidad, pero su objetivo es reasignar los montos gastados en estos sitios web, de acuerdo con la efectividad de la publicidad de la empresa en cada uno de ellos. Para ello, se propone calcular un índice cuantificando el interés de cada web para la empresa. Sea $N = \{a, b, c\}$. Supóngase que se sabe, para cada cliente que compró un producto de la empresa, qué sitios web visitó (dentro de N). La siguiente tabla muestra estos datos, donde $s(E)$ es el número de compradores que visitaron los sitios web en E (todos y solo ellos) antes de la compra. Por ejemplo, $s(\{a, b\})$ significa el número de compradores que visitaron ambos sitios, a y b, antes de la compra. Tenga en cuenta que no sabemos si compraron como resultado de su visita a a, b o ambas.

	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	N
$s(E)$	250	150	50	50	100	150	250

Esta situación puede ser representada mediante un juego cooperativo (N, v) con función característica difusa. Para cada coalición E, $v(E)$ es el número de compradores para cuya compra fue esencial visitar todos los sitios web en E. Observe que los compradores que visitaron solo los sitios web en E se encuentran entre ellos, $\sum_{F\subseteq E} s(F) \leqslant v(E)$. Pero también algunos clientes contabilizados por $s(F)$, con $F \cap E \neq \emptyset$ y $F \setminus E \neq \emptyset$ podrán haber comprado en base a su visita a sitios web en E exclusivamente. Por tanto, no conocemos $v(E)$ con exactitud, pero podemos considerar una descripción mediante números difusos de la siguiente manera.

$$\mu_{v(\{a\})}(x) = \begin{cases} \dfrac{650 - x}{400} & \text{si } 250 \leqslant x \leqslant 650, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\mu_{v(\{b\})}(x) = \begin{cases} \dfrac{600 - x}{450} & \text{si } 150 \leqslant x \leqslant 600, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

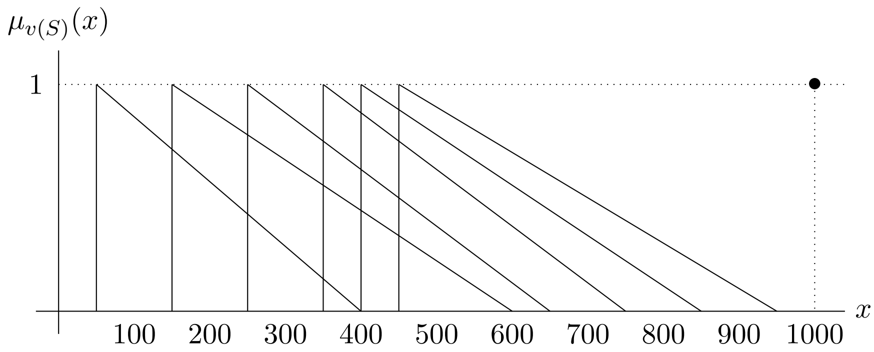

Figura 4.10.

$$\mu_{v(\{c\})}(x) = \begin{cases} \dfrac{450-x}{400} & \text{si } 50 \leqslant x \leqslant 450, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\mu_{v(\{a,b\})}(x) = \begin{cases} \dfrac{950-x}{500} & \text{si } 450 \leqslant x \leqslant 950, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\mu_{v(\{a,c\})}(x) = \begin{cases} \dfrac{850-x}{450} & \text{si } 400 \leqslant x \leqslant 850, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\mu_{v(\{b,c\})}(x) = \begin{cases} \dfrac{750-x}{400} & \text{si } 350 \leqslant x \leqslant 750, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$v(N) = 1000.$$

A partir de ello, se obtiene el juego v_{Y} usando el índice de Yager.

$$v_{\mathrm{Y}}(\{a\}) = 350,$$

$$v_{\mathrm{Y}}(\{b\}) = 237{,}5,$$

$$v_{\mathrm{Y}}(\{c\}) = 150,$$

$$v_{\mathrm{Y}}(\{a,b\}) = 575,$$

$$v_{\mathrm{Y}}(\{a,c\}) = 512{,}5,$$

$$v_{\mathrm{Y}}(\{b,c\}) = 450,$$

$$v_{\mathrm{Y}}(N) = 1000.$$

Y finalmente, se calcula el valor de Banzhaf del juego v_{Y},

$$\mathrm{B}^{crisp}(v) = \beta(v_{\mathrm{Y}}) = \left(400, \frac{625}{2}, \frac{475}{2}\right).$$

$\triangle$

A continuación, se propone una axiomatización del valor real de Banzhaf para juegos cooperativos con función característica difusa. Esta caracterización está basada en la axiomatización del valor real de Shapley introducido en la sección anterior, donde la propiedad de eficiencia para el beneficio total simétrico es sustituida por dos nuevos axiomas: $1-$eficiencia para el beneficio total simétrico y amalgama.

Primeramente, se mostrará que el valor real de Banzhaf verifica las propiedades de igual tratamiento, jugador nulo, aditividad, continuidad y comonotonía, que han sido presentadas en la caracterización del valor real de Shapley.

Proposición 4.7. *El valor real de Banzhaf B^{crisp} satisface la propiedad de igual tratamiento.*

Demostración. Sea $v \in \mathcal{FG}^N$ y sean $i, j \in N$ tales que $v(E \cup \{i\}) = v(E \cup \{j\})$ para cada $E \subseteq N \setminus \{i, j\}$. Ya que B^{fuzzy} satisface la propiedad de igual tratamiento, $\mathrm{B}_i^{fuzzy}(v) = \mathrm{B}_j^{fuzzy}(v)$, entonces,

$$\mathrm{B}_i^{crisp}(v) = \mathrm{Y}\left(\mathrm{B}_i^{fuzzy}(v)\right) = \mathrm{Y}\left(\mathrm{B}_j^{fuzzy}(v)\right) = \mathrm{B}_j^{crisp}(v).$$

$\square$

Proposición 4.8. *El valor real de Banzhaf B^{crisp} satisface la propiedad de jugador nulo.*

Demostración. Sea $v \in \mathcal{FG}^N$ y sea $i \in N$ tal que $v(E \cap \{i\}) = v(E)$ para cada $E \in 2^N$. Ya que B^{fuzzy} satisface la propiedad de jugador nulo, entonces $\mathrm{B}_i^{fuzzy}(v)$ es un número difuso $0-$simétrico. Por tanto, ya que por la propiedad (ii) de la Proposición 2.7 se sabe que el índice de Yager de un número $0-$simétrico es cero, entonces

$$\mathrm{B}_i^{crisp}(v) = \mathrm{Y}\left(\mathrm{B}_i^{fuzzy}(v)\right) = 0.$$

$\square$

Proposición 4.9. *El valor real de Banzhaf B^{crisp} satisface la propiedad de aditividad.*

Demostración. Sean $v, w \in \mathcal{FG}^N$, $E \in 2^N$ y $i \in N$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_i^{crisp}(v \oplus w) &= \mathrm{Y}\left(\mathrm{B}_i^{fuzzy}(v \oplus w)\right) \\
&= \mathrm{Y}\left(\mathrm{B}_i^{fuzzy}(v) \oplus \mathrm{B}_i^{fuzzy}(w)\right) \\
&= \mathrm{Y}\left(\mathrm{B}_i^{fuzzy}(v)\right) + \mathrm{Y}\left(\mathrm{B}_i^{fuzzy}(w)\right) \\
&= \mathrm{B}_i^{crisp}(v) + \mathrm{B}_i^{crisp}(w),
\end{aligned}$$

donde se ha usado la aditividad de B_i^{fuzzy} y la propiedad (v) de la Proposición 2.7. □

Proposición 4.10. *El valor real de Banzhaf B^{crisp} satisface la propiedad de continuidad.*

Demostración. El valor de Banzhaf en $\mathcal{G}^N$ es un operador lineal de $\mathbb{R}^{2^N\setminus\{\emptyset\}}$ en $\mathbb{R}^N$. Esto implica que $\beta : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^N$ es continuo. Por otro lado, se sabe que el índice de Yager es una función continua sobre $\mathbb{F}$ por el Teorema 2.2. Por tanto, ya que $\mathrm{B}^{crisp} = \beta \circ \mathrm{Y}$, y dado que la composición de funciones conserva la continuidad, entonces se sigue que B^{crisp} es continua. □

Proposición 4.11. *El valor real de Banzhaf B^{crisp} satisface la propiedad de comonotonía.*

Demostración. Sean $v, w \in \mathcal{FG}^N$ tales que $core(v(E)) \cap core(w(E)) \neq \emptyset$ para cada $E \in 2^N$. Sea $\alpha \in (0,1)$. Se define $h \in \mathcal{FG}^N$ mediante

$$\mu_{h(E)}(x) = \alpha\mu_{v(E)}(x) + (1-\alpha)\mu_{w(E)}(x)$$

para cada $E \in 2^N$ y cada $x \in \mathbb{R}$. Dado que se verifican las condiciones del Teorema 2.3 entonces se sigue que

$$h_{\mathrm{Y}}(E) = \alpha v_{\mathrm{Y}}(E) + (1-\alpha) w_{\mathrm{Y}}(E)$$

para cada $E \in 2^N$. De ello se sigue que

$$h_{\mathrm{Y}} = \alpha v_{\mathrm{Y}} + (1-\alpha) w_{\mathrm{Y}}.$$

De este resultado, junto con la propiedad de linealidad de β, se tiene que

$$\beta(h_{\mathrm{Y}}) = \alpha\beta(v_{\mathrm{Y}}) + (1-\alpha)\beta(w_{\mathrm{Y}}),$$

lo que implica

$$\mathrm{B}^{crisp}(h) = \alpha\mathrm{B}^{crisp}(v) + (1-\alpha)\mathrm{B}^{crisp}(w),$$

y completa la demostración. □

El valor real de Banzhaf para juegos cooperativos con función característica difusa verifica dos propiedades adicionales que se presentan a continuación, y que son una extensión de las propiedades de la axiomatización del valor clásico de Banzhaf introducida en el Capítulo 1.

1−eficiencia para el beneficio simétrico. Sea $v \in \mathcal{FG}^N$ con $N = \{i\}$. Si $v(\{i\})$ es un número difuso simétrico, es decir, existe un $p \in \mathbb{R}$ tal que $v(\{i\}) \ominus p$ es 0−simétrico, entonces

$$\Psi_i^{crisp}(v) = p.$$

Este axioma es una adaptación del axioma clásico de 1−eficiencia para juegos con pagos difusos. Se puede comprobar fácilmente que si $v(\{i\}) \in \mathbb{R}$, entonces

$$\Psi_i^{crisp}(v) = v(\{i\})$$

como indica el axioma clásico.

Proposición 4.12. *El valor real de Banzhaf B^{crisp} satisface la propiedad de 1−eficiencia para el beneficio simétrico.*

Demostración. Sea $v \in \mathcal{FG}^{\{i\}}$ y $v(\{i\})$ un número difuso simétrico. Ya que B^{fuzzy} satisface la propiedad de 1−eficiencia, $\mathrm{B}_i^{fuzzy}(v) = v(\{i\})$ entonces, $\mathrm{B}_i^{crisp}(v) = \mathrm{Y}\left(\mathrm{B}_i^{fuzzy}(v)\right)$. Sea $p \in \mathbb{R}$ tal que $v(\{i\}) \ominus p$ es un número difuso 0−simétrico. Dado que $v(N)$ es un número simétrico, el punto medio de cada corte a nivel t, para cada $t \in [0,1]$, es el mismo e igual a p, esto es,

$$\frac{v(\{i\})_t^- + v(\{i\})_t^+}{2} = p$$

para cada $t \in [0,1]$.

Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_i^{crisp}(v) &= \mathrm{Y}(v(\{i\})) \\ &= \int_0^1 \frac{v(\{i\})_t^- + v(\{i\})_t^+}{2} dt \\ &= p. \end{aligned}$$

□

Amalgama. Sea $v \in \mathcal{FG}^N$. Dados dos jugados $i, j \in N$ con $i \neq j$, entonces

$$\Psi_{\overline{ij}}^{crisp}\left(v^{ij}\right) = \Psi_i^{crisp}(v) + \Psi_j^{crisp}(v).$$

El anterior axioma establece que, en un juego con expectativas imprecisas, la regla de asignación que satisface esta propiedad es inmune a las fusiones no reales de jugadores.

Proposición 4.13. *El valor real de Banzhaf B^{crisp} satisface la propiedad de amalgama.*

Demostración. Sea $v \in \mathcal{FG}^N$ e $i, j \in N$ con $i \neq j$. Ya que B^{fuzzy} satisface la propiedad de amalgama, entonces existe un número $0-$simétrico d tal que

$$\mathrm{B}_i^{fuzzy}(v) \oplus \mathrm{B}_j^{fuzzy}(v) = \mathrm{B}_{\overline{ij}}^{fuzzy}\left(v^{ij}\right) \oplus d.$$

Aplicando la función Y en ambos lados, se tiene

$$\mathrm{Y}\left(\mathrm{B}_i^{fuzzy}(v) \oplus \mathrm{B}_j^{fuzzy}(v)\right) = \mathrm{Y}\left(\mathrm{B}_{\overline{ij}}^{fuzzy}\left(v^{ij}\right) \oplus d\right).$$

Y por la aditividad de la función Y (propiedad (v) de la Proposición 2.7), se obtiene

$$\mathrm{Y}\left(\mathrm{B}_i^{fuzzy}(v)\right) + \mathrm{Y}\left(\mathrm{B}_j^{fuzzy}(v)\right) = \mathrm{Y}\left(\mathrm{B}_{\overline{ij}}^{fuzzy}\left(v^{ij}\right)\right),$$

ya que $\mathrm{Y}(d) = 0$ por ser d un número $0-$simétrico (propiedad (ii) de la Proposición 2.7). Por tanto, se concluye que

$$\mathrm{B}_i^{crisp}(v) + \mathrm{B}_j^{crisp}(v) = \mathrm{B}_{\overline{ij}}^{crisp}\left(v^{ij}\right).$$

□

El siguiente resultado establece que el valor real de Banzhaf para juegos cooperativos con función característica difusa es la única una regla de asignación real satisface los axiomas introducidos anteriormente.

Teorema 4.2. *Si una regla de asignación real Ψ^{crisp} para juegos con función característica difusa satisface las propiedades de $1-$eficiencia para el beneficio simétrico, igual tratamiento, jugador nulo, aditividad, amalgama, continuidad y comonotonía, entonces ese valor es igual al valor real de Banzhaf para juegos cooperativos con función característica difusa.*

Demostración. Supóngase que Ψ^{crisp} satisface las propiedades mencionadas en el teorema. El objetivo es probar que $\Psi^{crisp} = \mathrm{B}^{crisp}$. La demostración se realizará en varios pasos. En cada paso se probará que $\Psi^{crisp}(v) = \mathrm{B}^{crisp}(v)$ para cada v en una cierta clase de juegos. La demostración es similar a la del Teorema 4.1. En los cuatro primeros pasos se probará para juegos de la forma $a \odot u_E$, donde se irán considerando distintos tipos de números difusos a. El paso 5 emplea la relación entre δ_E y u_E para probarlo en juegos de la forma

$a \odot \delta_E$. Y por último, en el paso 6 se emplearán los resultados de los pasos previos para probarlo para cualquier juego cooperativo con función característica difusa. La principal diferencia entre la demostración de este teorema y la del Teorema 4.1 radica en el paso 1. Dado que no se dispone de la propiedad de eficiencia para el beneficio total simétrico, se tendrán que emplear los axiomas de $1-$eficiencia para el beneficio simétrico y amalgama para probar el resultado por inducción. El primero de estos axiomas permitirá iniciar el proceso inductivo.

Paso 1. Sea $E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ y sea $a \in \mathbb{F}$ tal que $|\{\mu_a(z) : z \in \mathbb{R}\}| = 2$. El objetivo en este paso es probar que

$$\Psi^{crisp}(a \odot u_E) = \mathrm{B}^{crisp}(a \odot u_E). \tag{4.15}$$

Se probará (4.15) por inducción sobre $|N|$.

Caso base. $|N| = 1$.

Se tiene que $E = N$. Sea $N = \{i\}$. Ya que $|\{\mu_a(z) : z \in \mathbb{R}\}| = 2$, existen $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \leqslant y$ tales que

$$\mu_a(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in [x, y], \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R} \setminus [x, y]. \end{cases}$$

Nótese que a es un intervalo y, por tanto, un número difuso simétrico. Al ser $\frac{x+y}{2}$ el punto medio del intervalo, el número $a \ominus \frac{x+y}{2}$ será un número difuso $0-$simétrico. Por la propiedad de $1-$eficiencia para el beneficio simétrico, se tiene que $\Psi_i^{crisp}\left(a \odot u_{\{i\}}\right) = \frac{x+y}{2}$. De lo que se concluye que $\Psi^{crisp}\left(a \odot u_{\{i\}}\right) = \mathrm{B}^{crisp}\left(a \odot u_{\{i\}}\right)$.

Paso inductivo. Sea N un conjunto finito con $|N| > 1$ y sea $E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$. Se toma un $i \in E$. Ya que $|N| > 1$, se puede tomar un $j \in N \setminus \{i\}$. Se pueden distinguir dos casos:

- $j \in E$. Por la propiedad de amalgama, se sigue que

$$\Psi_i^{crisp}(a \odot u_E) + \Psi_j^{crisp}(a \odot u_E) = \Psi_{\overline{ij}}^{crisp}\left(a \odot u_{(E \setminus \{i,j\}) \cup \{\overline{ij}\}}\right). \tag{4.16}$$

Por otro lado, por la propiedad de igual tratamiento, se tiene que

$$\Psi_i^{crisp}(a \odot u_E) = \Psi_j^{crisp}(a \odot u_E). \tag{4.17}$$

De (4.16) y (4.17), se sigue

$$\Psi_i^{crisp}\left(a \odot u_E\right) = \frac{1}{2}\Psi_{\overline{ij}}^{crisp}\left(a \odot u_{(E\setminus\{i,j\})\cup\left\{\overline{ij}\right\}}\right). \tag{4.18}$$

De manera similar, se puede ver que

$$\mathrm{B}_i^{crisp}\left(a \odot u_E\right) = \frac{1}{2}\mathrm{B}_{\overline{ij}}^{crisp}\left(a \odot u_{(E\setminus\{i,j\})\cup\left\{\overline{ij}\right\}}\right). \tag{4.19}$$

Por la hipótesis de inducción, se tiene que

$$\Psi_{\overline{ij}}^{crisp}\left(a \odot u_{(E\setminus\{i,j\})\cup\left\{\overline{ij}\right\}}\right) = \mathrm{B}_{\overline{ij}}^{crisp}\left(a \odot u_{(E\setminus\{i,j\})\cup\left\{\overline{ij}\right\}}\right). \tag{4.20}$$

Por tanto, de (4.21), (4.19) y (4.20), se tiene que

$$\Psi_i^{crisp}\left(a \odot u_E\right) = \mathrm{B}_i^{crisp}\left(a \odot u_E\right). \tag{4.21}$$

- $j \in N \setminus E$. Por la propiedad de amalgama, se sigue que

$$\Psi_i^{crisp}\left(a \odot u_E\right) + \Psi_j^{crisp}\left(a \odot u_E\right) = \Psi_{\overline{ij}}^{crisp}\left(a \odot u_{(E\setminus\{i,j\})\cup\left\{\overline{ij}\right\}}\right). \tag{4.22}$$

Por otro lado, por la propiedad de jugador nulo, se tiene que

$$\Psi_j^{crisp}\left(a \odot u_E\right) = 0. \tag{4.23}$$

(4.22) y (4.23) implican que

$$\Psi_i^{crisp}\left(a \odot u_E\right) = \Psi_{\overline{ij}}^{crisp}\left(a \odot u_{(E\setminus\{i,j\})\cup\left\{\overline{ij}\right\}}\right). \tag{4.24}$$

De manera similar, se puede ver que

$$\mathrm{B}_i^{crisp}\left(a \odot u_E\right) = \mathrm{B}_{\overline{ij}}^{crisp}\left(a \odot u_{(E\setminus\{i,j\})\cup\left\{\overline{ij}\right\}}\right). \tag{4.25}$$

Por la hipótesis de inducción, se tiene que

$$\Psi_{\overline{ij}}^{crisp}\left(a \odot u_{(E\setminus\{i,j\})\cup\left\{\overline{ij}\right\}}\right) = \mathrm{B}_{\overline{ij}}^{crisp}\left(a \odot u_{(E\setminus\{i,j\})\cup\left\{\overline{ij}\right\}}\right). \tag{4.26}$$

De (4.24), (4.25) y (4.26), se tiene que

$$\Psi_i^{crisp}\left(a \odot u_E\right) = \mathrm{B}_i^{crisp}\left(a \odot u_E\right).$$

Por tanto, se concluye que

$$\Psi_i^{crisp}(a \odot u_E) = \mathrm{B}_i^{crisp}(a \odot u_E). \tag{4.27}$$

para cada $i \in E$.

Además, por la propiedad de jugador nulo se tiene que

$$\Psi_i^{crisp}(a \odot u_E) = \mathrm{B}_i^{crisp}(a \odot u_E). \tag{4.28}$$

para cada $i \in N \setminus E$. De (4.27) y (4.28), se concluye que

$$\Psi^{crisp}(a \odot u_E) = \mathrm{B}^{crisp}(a \odot u_E).$$

Paso 2. Sea $E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ y sea $a \in \mathbb{F}$ tal que $|\{\mu_a(z) : z \in \mathbb{R}\}| = 3$. El objetivo en este paso es probar que

$$\Psi^{crisp}(a \odot u_E) = \mathrm{B}^{crisp}(a \odot u_E). \tag{4.29}$$

Está claro que existe un $l \in (0,1)$ y $x, y, r, s \in \mathbb{R}$ con $x \leqslant r \leqslant s \leqslant y$ y $s-r < y-x$ tales que

$$\mu_a(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in [r,s], \\ l & \text{si } z \in [x,y] \setminus [r,s], \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R} \setminus [x,y]. \end{cases}$$

Sean $b, c \in \mathbb{F}$ definidas por

$$\mu_b(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in [x,y], \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R} \setminus [x,y], \end{cases}$$

$$\mu_c(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in [r,s], \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R} \setminus [r,s]. \end{cases}$$

Se puede observar que

$$\mu_a(z) = l\mu_b(z) + (1-l)\mu_c(z)$$

para cada $z \in \mathbb{R}$. En consecuencia,

$$\mu_{(a \odot u_E)(F)}(z) = l\mu_{(b \odot u_E)(F)}(z) + (1-l)\mu_{(c \odot u_E)(F)}(z)$$

para cada $F \in 2^N$ y cada $z \in \mathbb{R}$. Además,

$$core((b \odot u_E)\,(F)) \cap core((c \odot u_E)\,(F)) \neq \emptyset$$

para cada $F \in 2^N$. Por el axioma de comonotonía y el resultado del paso previo (4.15) se tiene que

$$\begin{aligned}\Psi^{crisp}(a \odot u_E) &= l\Psi^{crisp}(b \odot u_E) + (1-l)\Psi^{crisp}(c \odot u_E)\\ &= l\mathrm{B}^{crisp}(b \odot u_E) + (1-l)\mathrm{B}^{crisp}(c \odot u_E)\\ &= \mathrm{B}^{crisp}(a \odot u_E).\end{aligned}$$

Paso 3. Sea $E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ y sea $a \in \mathbb{F}$ tal que $\{\mu_a(z) : z \in \mathbb{R}\}$ es un conjunto finito. El objetivo en este paso es probar que

$$\Psi^{crisp}(a \odot u_E) = \mathrm{B}^{crisp}(a \odot u_E). \tag{4.30}$$

Está claro que existen $l_1, \ldots, l_{n-1} \in (0,1)$ con $l_1 < \ldots < l_{n-1} < 1$ y $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ con $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant y_n \leqslant \ldots \leqslant y_1$ tal que

$$\mu_a(z) = \begin{cases} 1 & \text{if } z \in [x_n, y_n],\\ l_i & \text{if } z \in [x_i, y_i] \setminus [x_{i+1}, y_{i+1}],\\ 0 & \text{if } z \in \mathbb{R} \setminus [x_1, y_1].\end{cases}$$

Sean $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{F}$ definidos por

$$\mu_{b_n}(z) = \begin{cases} 1 & \text{if } z \in [x_n, y_n],\\ 0 & \text{if } z \in \mathbb{R} \setminus [x_n, y_n],\end{cases}$$

$$\mu_{b_i}(z) = \begin{cases} 1 & \text{if } z = 0,\\ l_i & \text{if } z \in [x_i - x_{i+1}, y_i - y_{i+1}] \setminus \{0\},\\ 0 & \text{if } z \in \mathbb{R} \setminus [x_i - x_{i+1}, y_i - y_{i+1}],\end{cases}$$

para $i = 1, \ldots, n-2$. Es fácil de verificar que

$$a = \bigoplus_{i=1}^{n} b_i.$$

Por tanto,

$$a \odot u_E = \bigoplus_{i=1}^{n} b_i \odot u_E.$$

Por la propiedad de aditividad y los resultados de los pasos previos (4.29) y (4.15), se tiene

$$\begin{aligned}
\Psi^{crisp}(a \odot u_E) &= \Psi^{crisp}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} b_i \odot u_E\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Psi^{crisp}\left(b_i \odot u_E\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{B}^{crisp}\left(b_i \odot u_E\right) \\
&= \mathrm{B}^{crisp}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} b_i \odot u_E\right) \\
&= \mathrm{B}^{crisp}(a \odot u_E).
\end{aligned}$$

Paso 4. Sea $E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ y sea $a \in \mathbb{F}$. El objetivo en este paso es probar que

$$\Psi^{crisp}(a \odot u_E) = \mathrm{B}^{crisp}(a \odot u_E). \tag{4.31}$$

Una vez que se ha probado (4.30) en el paso previo, se puede suponer que $\{\mu_a(z) : z \in \mathbb{R}\}$ no es finito. Por la propiedad de continuidad y el resultado de (4.30), para probar (4.31) es suficiente probar que hay juegos de la forma $b \odot u_E$, donde $\{\mu_b(z) : z \in \mathbb{R}\}$ es finito y arbitrariamente cercano del juego $a \odot u_E$. Lo anterior se sigue del Teorema 2.1, donde se probó que los números difusos con una cantidad finita de niveles son densos.

Paso 5. Sea $E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ y sea $a \in \mathbb{F}$. El objetivo en este paso es probar que

$$\Psi^{crisp}(a \odot \delta_E) = \mathrm{B}^{crisp}(a \odot \delta_E). \tag{4.32}$$

De (1.4) y (1.5) se tiene

$$\delta_E = \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} (-1)^{|F|-|E|} u_F,$$

de donde

$$\delta_E + \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F\}} u_F = \sum_{\{F \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : E \subseteq F, |F|-|E| \in 2\mathbb{Z}\}} 2u_F,$$

esto es,

$$\delta_E(H) + \sum_{\{F\in 2^N\setminus\{\emptyset\}: E\subseteq F\}} u_F(H) = \sum_{\{F\in 2^N\setminus\{\emptyset\}: E\subseteq F, |F|-|E|\in 2\mathbb{Z}\}} 2u_F(H),$$

para cada $H \subseteq N$. Multiplicando por a y aplicando la propiedad (iii) de la Proposición 2.3 se tiene

$$\begin{aligned}(a\odot\delta_E)(H) \quad &\oplus \bigoplus_{\{F\in 2^N\setminus\{\emptyset\}: E\subseteq F\}} (a\odot u_F)(H) \\ &= \bigoplus_{\{F\in 2^N\setminus\{\emptyset\}: E\subseteq F, |F|-|E|\in 2\mathbb{Z}\}} ((2\odot a)\odot u_F)(H),\end{aligned}$$

para cada $H \subseteq N$. Por tanto,

$$\begin{aligned}(a\odot\delta_E) \quad &\oplus \bigoplus_{\{F\in 2^N\setminus\{\emptyset\}: E\subseteq F\}} (a\odot u_F) \\ &= \bigoplus_{\{F\in 2^N\setminus\{\emptyset\}: E\subseteq F, |F|-|E|\in 2\mathbb{Z}\}} ((2\odot a)\odot u_F),\end{aligned}$$

lo que, por la propiedad de aditividad, lleva a

$$\begin{aligned}\Psi_i^{crisp}(a\odot\delta_E) \quad &+ \sum_{\{F\in 2^N\setminus\{\emptyset\}: E\subseteq F\}} \Psi_i^{crisp}(a\odot u_F) \\ &= \sum_{\{F\in 2^N\setminus\{\emptyset\}: E\subseteq F, |F|-|E|\in 2\mathbb{Z}\}} \Psi_i^{crisp}((2\odot a)\odot u_F), \qquad (4.33)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_i^{crisp}(a\odot\delta_E) \quad &+ \sum_{\{F\in 2^N\setminus\{\emptyset\}: E\subseteq F\}} \mathrm{B}_i^{crisp}(a\odot u_F) \\ &= \sum_{\{F\in 2^N\setminus\{\emptyset\}: E\subseteq F, |F|-|E|\in 2\mathbb{Z}\}} \mathrm{B}_i^{crisp}((2\odot a)\odot u_F), \qquad (4.34)\end{aligned}$$

para todo $i \in N$. Del resultado del paso anterior (4.31) y de (4.33) y (4.34), se concluye que (4.32).

Paso 6. El objetivo en este paso es probar que

$$\Psi^{crisp}(v) = \mathrm{B}^{crisp}(v)$$

para cada $v \in \mathcal{FG}^N$.

Sea $v \in \mathcal{FG}^N$. Obsérvese que

$$v = \bigoplus_{E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} (v(E) \odot \delta_E).$$

Por la propiedad de aditividad y el resultado del paso previo (4.32), se tiene que

$$\begin{aligned}
\Psi^{crisp}(v) &= \Psi^{crisp}\left(\bigoplus_{E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} (v(E) \odot \delta_E)\right) \\
&= \sum_{E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \Psi^{crisp}(v(E) \odot \delta_E) \\
&= \sum_{E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \mathrm{B}^{crisp}(v(E) \odot \delta_E) \\
&= \mathrm{B}^{crisp}\left(\bigoplus_{E \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} (v(E) \odot \delta_E)\right) \\
&= \mathrm{B}^{crisp}(v),
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración.

$\square$

Los cinco primeros axiomas mencionados en el teorema anterior constituyen la axiomatización del valor clásico de Banzhaf que se introdujo en el Capítulo 1 cuando se aplican sobre $\mathcal{G}^N$. La propiedad de continuidad, como ya se ha indicado, es una condición natural y necesaria cuando se pretende extender funciones discretas al caso continuo. Por otro lado, aunque se tenga el axioma de aditividad, también se necesita el de comonotonía. Para mostrar esto se empleará de nuevo el índice de clasificación $\mathrm{M} : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ que se introdujo en la sección anterior y que se definió como $\mathrm{M}(a) = \frac{a_1^- + a_1^+}{2}$ para cada $a \in \mathbb{F}$. Sea

$$\mathrm{D}^{crisp}(v) = \beta(v_{\mathrm{M}})$$

para cada $v \in \mathcal{FG}^N$. Es fácil comprobar que D^{crisp} satisface 1$-$eficiencia para el beneficio simétrico, igual tratamiento, jugador nulo, aditividad, amalgama, continuidad, pero no satisface comonotonía.

Capítulo 5

Aplicación: problemas de aeropuerto con costes difusos

En este capítulo se explora una aplicación de los juegos cooperativos para problemas de reparto de costes. En muchas situaciones, la cooperación en un proyecto común genera costes que deben distribuirse entre los participantes. Este es el caso de los problemas de aeropuerto. Se proponen problemas de aeropuerto en los que solo hay unas expectativas inexactas sobre los costes parciales. Para modelar esta imprecisión, se utilizán números difusos y aritmética difusa. Se propone una regla de asignación de costes real para problemas de aeropuerto con costes difusos. Además, se proporciona una caracterización basada en propiedades razonables para esta regla de asignación.

5.1. Problemas de aeropuerto

Los problemas de aeropuerto son problemas de asignación de costes en los que se debe decidir cómo distribuir los costes de operación de una pista entre los diferentes tipos de aviones que la utilizan. En tales problemas, se entiende por coste de operación un aterrizaje o un despegue. Estos problemas surgen de los trabajos de M. J. Baker [9] y G. F. Thompson [77] sobre el establecimiento de tasas de aterrizaje en aeropuerto para diferentes tipos de aviones.

Definición 5.1. Sea $N = \{1, \ldots, n\}$ un conjunto finito de agentes. Un *problema de aeropuerto* sobre N se define por un vector de costes $c = (c_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$ donde

1. $c_i \in \mathbb{R}_+$ para cada $i \in N$.

2. $c_i \geqslant c_j$ para cada $i, j \in N$ con $i \geqslant j$.

El vector c recopila los costes asociados a cada agente en N, es decir, cada c_i representa el coste individual del agente i. Los problemas de aeropuerto representan entonces situaciones en las que se lleva a cabo un proyecto común y se reparten los costes teniendo en cuenta los costes de proyectos parciales. El coste de cada agente se asume como el mayor coste parcial que enfrenta. El conjunto de problemas de aeropuerto se denotará $\mathcal{AP}^N$. Nótese que $\mathcal{AP}^N$ se define con un subconjunto del ortante no negativo de $\mathbb{R}^N$.

Una *regla de asignación de costes* en $\mathcal{AP}^N$ es una aplicación $\psi : \mathcal{AP}^N \to \mathbb{R}^N$ que determina una asignación eficiente, es decir,

$$\sum_{i \in N} \psi_i(c) = c_n$$

donde $\psi_i(c)$ se entiende como la parte del coste c_n a pagar por el agente $i \in N$. M. J. Baker [9] y G. F. Thompson [77] introdujeron la regla secuencial, que fue estudiada para problemas de aeropuerto en S. C. Littlechild y G. Owen [47] como la regla de llegada aleatoria. La *regla de llegada aleatoria* $\phi : \mathcal{AP}^N \to \mathbb{R}^N$ se define, para cada $c \in \mathcal{AP}^N$ e $i \in N$, por

$$\phi_i(c) = \frac{1}{n!} \sum_{\theta \in \Theta^N} \max\{c_i - \max_{j \leqslant_\theta i} c_j, 0\},$$

donde Θ^N es el conjunto de permutaciones de N y $\leqslant_\theta$ es el orden total dado por la permutación θ. S. C. Littlechild y G. Owen [47] demostraron que esta regla coincide con la regla de contribuciones secuenciales iguales, y en particular con la aplicación del valor de Shapley a un determinado juego cooperativo. Esta regla de reparto viene dada por

$$\phi_i(c) = \sum_{k=1}^{i} \frac{c_k - c_{k-1}}{n - k + 1}, \tag{5.1}$$

donde $c_0 = 0$. La anterior regla satisface las siguientes propiedades.

Igual tratamiento. Si $c \in \mathcal{AP}^N$, $i, j \in N$ y $c_i = c_j$, entonces $\phi_i(c) = \phi_j(c)$.

Agente nulo. Si $c \in \mathcal{AP}^N$, $i \in N$ y $c_i = 0$, entonces $\phi_i(c) = 0$.

Aditividad. Si $c, c' \in \mathcal{AP}^N$, entonces $\phi(c + c') = \phi(c) + \phi(c')$.

Se pueden encontrar diferentes axiomatizaciones de la regla de llegada aleatoria en P. Dubey [24], H. Moulin y S. Shenker [57], D. Aadland y V. Kolpin [1] y J. Márkus et al. [56].

5.2. Problemas de aeropuerto con costes difusos y regla de asignación real

Hay situaciones en las que se puede conocer el coste operativo de una pista, pero puede haber imprecisión sobre los costes asociados con las operaciones de aeronaves más pequeñas, es decir, aeronaves que no necesitan usar toda la pista para realizar un aterrizaje o despegue. Por ejemplo, una aeronave pequeña puede emplear una pista de gravilla, lo cual tiene un coste claramente menor que una reforzada y pavimentada. Si se construye la pista de pavimentada, evidentemente el coste de la pista de gravilla puede considerarse parte del coste de la construida. Sin embargo, no es exactamente una obra parcial ya que en ningún momento se construirá dicha pista de gravilla. Por tanto, del coste de ese proyecto considerado parcial se tendrá solamente una vaga expectativa, mientras que el coste de la pista construida será un valor real. Para modelar estas situaciones, se presentan los problemas de aeropuerto con costes difusos.

Definición 5.2. Un *problema de aeropuerto con costes difusos* se define mediante un vector de costes $c = (c_i)_{i \in N}$ sobre $N = \{1, \dots, n\}$ donde

1. $c_i \in \mathbb{F}_+$ para cada $i \in N \setminus \{n\}$.
2. $c_i \geqslant c_j$ para cada $i, j \in N$ con $i \geqslant j$.
3. $c_n \in \mathbb{R}_+$.

El conjunto de problemas del aeropuerto con costes difusos sobre N se denota $\mathcal{FAP}^N$.

Incluso si hay imprecisión en los datos del problema del aeropuerto, es necesario obtener una asignación precisa del coste de la pista común. Con este fin, se consideran reglas de asignación reales para problemas de aeropuerto con costes difusos.

Una regla de asignación de costes real en $\mathcal{FAP}^N$ es una correspondencia Ψ^{crisp} : $\mathcal{FAP}^N \to \mathbb{R}^N$ que satisface

$$\sum_{i \in N} \Psi_i^{crisp}(c) = c_n.$$

Si $c \in \mathcal{FAP}^N$ e $i \in N$, el número real $\Psi_i^{crisp}(c)$ es el coste que se asignará al agente $i \in N$. Se pretende definir una regla de asignación con propiedades razonables. Con este propósito, se emplea, de nuevo, el índice de clasificación de Yager para números difusos presentado en la Definición 2.4.

Definición 5.3. Sea $c = (c_i)_{i \in N} \in \mathcal{FAP}^N$. La regla de llegada aleatoria para problemas de aeropuerto con costes difusos $\Phi^{crisp} : \mathcal{FAP}^N \to \mathbb{R}^N$ se define, para cada $i \in N$, por

$$\Phi^{crisp}(c) = \phi\left(\mathrm{Y}\left(c\right)\right),$$

donde $Y(c) = (Y(c_i))_{i \in N} \in \mathcal{AP}^N$.

La regla de llegada aleatoria para problemas de aeropuerto con costes difusos es una regla de asignación de costes en $\mathcal{FAP}^N$. De la Definición 2.4 y el hecho de que la regla clásica (5.1) es eficiente, se obtiene que, para todo $c \in \mathcal{FAP}^N$,

$$\sum_{i \in N} \Phi_i^{crisp}(c) = \mathrm{Y}(c_n) = c_n$$

ya que c_n es un número real.

Ejemplo 5.1. Considérese una pista de aterrizaje que es utilizada por 5 diferentes tipos de aeronaves. El coste de mantenimiento de la pista es 50 unidades monetarias. Dado que hay aeronaves de diferentes tamaños, algunas necesitan solo parte de la pista de aterrizaje y otras en cambio la pista entera. Esta situación puede ser modelizada mediante un problema de aeropuerto donde los diferentes tipos de aviones son representados por los elementos del conjunto $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Los costes operativos de cada tramo de la pista solo se pueden estimar vagamente. Estas estimaciones vienen dadas por números difusos c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, donde

$$\mu_{c_1}(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{2} & \text{si } 5 \leqslant x \leqslant 7, \\ 8 - x & \text{si } 7 \leqslant x \leqslant 8, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\mu_{c_2}(x) = \begin{cases} \frac{x-15}{5} & \text{si } 15 \leqslant x \leqslant 20, \\ \frac{23-x}{3} & \text{si } 20 \leqslant x \leqslant 23, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\mu_{c_3}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{3} & \text{si } 22 \leqslant x \leqslant 25, \\ 1 & \text{si } 25 \leqslant x \leqslant 30, \\ \frac{32-x}{2} & \text{si } 30 \leqslant x \leqslant 32, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\mu_{c_4}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 39 \leqslant x \leqslant 45, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\mu_{c_5}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 50, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

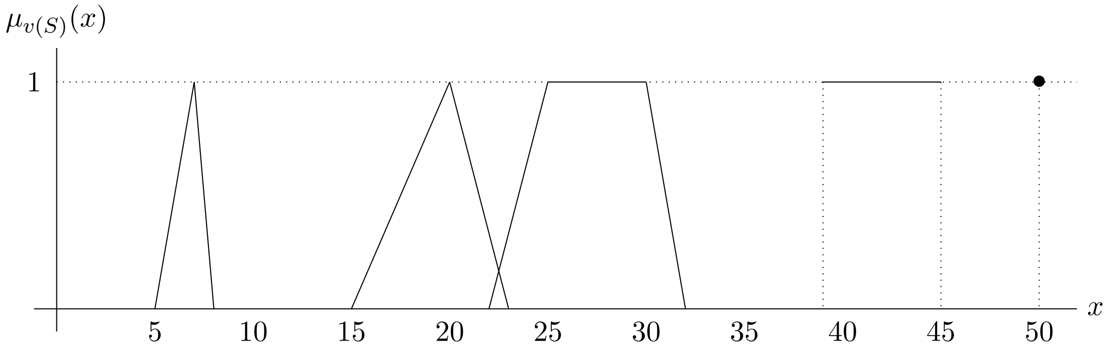

Figura 5.1.

La Figura 5.1 representa las funciones de pertenencia de los diferentes costes asociados con el problema del aeropuerto difuso. Nótese que $c_5 \in \mathbb{R}_+$. Empleando el índice de Yager se obtiene

$$\mathrm{Y}\,(c) = \left(\frac{27}{4}, \frac{39}{2}, \frac{109}{4}, 42, 50\right).$$

La distribución de costes de acuerdo con la regla de llegada aleatoria para problemas de aeropuerto con costes difusos es

$$\Phi^{crisp}(c) = \phi\,(\mathrm{Y}\,(c)) = \left(\frac{27}{20}, \frac{363}{80}, \frac{1709}{240}, \frac{3479}{240}, \frac{5399}{240}\right).$$

$\triangle$

5.3. Axiomatización de la regla de asignación real

En esta sección se presenta una caracterización de la regla de asignación Φ^{crisp}. Los tres primeros axiomas son una extensión de las propiedades de la regla de llegada aleatoria para problemas de aeropuerto con costes reales.

Igual tratamiento. Si $c \in \mathcal{FAP}^N$, $i, j \in N$ y $c_i = c_j$, entonces $\Psi_i^{crisp}(c) = \Psi_j^{crisp}(c)$.

Proposición 5.1. *La regla de llegada aleatoria Φ^{crisp} satisface la propiedad de igual tratamiento.*

Demostración. Sea $c \in \mathcal{FAP}^N$ y sean $i, j \in N$ tales que $c_i = c_j$. Ya que ϕ satisface la propiedad de igual tratamiento, se tiene que $\phi_i(\mathrm{Y}(c)) = \phi_j(\mathrm{Y}(c))$, o, equivalentemente, $\Phi_i^{crisp}(c) = \Phi_j^{crisp}(c)$. □

Agente nulo. Si $c \in \mathcal{FAP}^N$, $i \in N$ y $c_i = 0$, entonces $\Psi_i^{crisp}(c) = 0$.

Proposición 5.2. *La regla de llegada aleatoria Φ^{crisp} satisface la propiedad de agente nulo.*

Demostración. Sea $c \in \mathcal{FAP}^N$ y sea $i \in N$ tal que $c_i = 0$. Está claro que $\mathrm{Y}(c_i) = 0$. Ya que ϕ satisface la propiedad de agente nulo, tenemos que $\phi_i(\mathrm{Y}(c)) = 0$. De ello se sigue que $\Phi_i^{crisp}(c) = 0$. □

Aditividad. Si $c, c' \in \mathcal{FAP}^N$, entonces $\Psi^{crisp}(c \oplus c') = \Psi^{crisp}(c) + \Psi^{crisp}(c')$.

Proposición 5.3. *La regla de llegada aleatoria Φ^{crisp} satisface la propiedad de aditividad.*

Demostración. Sean $c, c' \in \mathcal{FAP}^N$. De la propiedad (iv) de la Proposición 2.7, se tiene que

$$\mathrm{Y}\left((c \oplus c')_i\right) = \mathrm{Y}(c_i) + \mathrm{Y}\left(c'_i\right),$$

para cada $i \in N$. De lo anterior se sigue que

$$\mathrm{Y}\left(c \oplus c'\right) = \mathrm{Y}(c) + \mathrm{Y}\left(c'\right). \tag{5.2}$$

De (5.2), junto con la propiedad de aditividad de ϕ, se concluye que

$$\begin{aligned} \Phi^{crisp}(c \oplus c') &= \phi\left(\mathrm{Y}\left(c \oplus c'\right)\right) \\ &= \phi\left(\mathrm{Y}(c) + \mathrm{Y}\left(c'\right)\right) \\ &= \phi(\mathrm{Y}(c)) + \phi\left(\mathrm{Y}\left(c'\right)\right) \\ &= \Phi^{crisp}(c) + \Phi^{crisp}(c'). \end{aligned}$$

□

Continuidad. El valor Ψ^{crisp} es una aplicación continua usando la distancia del supremo d_∞ sobre $\mathbb{F}$.

La propiedad de continuidad garantiza pequeños cambios en la asignación cuando consideramos cambios suficientemente pequeños en los costes.

Proposición 5.4. *La regla de llegada aleatoria Φ^{crisp} satisface la propiedad de continuidad.*

Demostración. La regla de asignación $\phi : \mathcal{AP}^N \to \mathbb{R}^N$ es la restricción de una aplicación lineal (ver (5.1)) y, en consecuencia, es continua. Por tanto, está claro que para probar que Φ^{crisp} es continua, es suficiente con mostrar que la función $\mathrm{Y} : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ es continua. Por otro lado, se ha probado en el Teorema 2.2 que el índice de Yager es una función continua empleando la distancia del supremo d_∞ sobre $\mathbb{F}$. Por tanto, dado que $\Phi^{crisp} = \phi \circ \mathrm{Y}$, y sabiendo que la composición de funciones conserva la continuidad, entonces se sigue que Φ^{crisp} es continua. □

Comonotonía. Sean $c, c' \in \mathcal{FAP}^N$ tales que, para cada $i \in N$, $core(c_i) \cap core(c'_i) \neq \emptyset$. Sea $\alpha \in (0,1)$. Se considera $c'' \in \mathcal{FAP}^N$ definido por

$$\mu_{c''_i}(x) = \alpha\mu_{c_i}(x) + (1-\alpha)\mu_{c'_i}(x)$$

para cada $i \in N$ y cada $x \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\Psi^{crisp}(c'') = \alpha\Psi^{crisp}(c) + (1-\alpha)\Psi^{crisp}(c').$$

Supóngase que, para cada coste en un problema de aeropuerto, se tienen dos estimaciones diferentes, es decir, dos números difusos distintos. Es lógico asumir que en ese caso los cores de ambos números tengan intersección no vacía. Se pueden considerar una combinación convexa de los grados de pertenencia de cada número. De esa forma se obtendría una nueva estimación de los costes. La propiedad de comonotonía establece que la asignación de la combinación convexa de las funciones de pertenencia de las estimaciones originales, debe ser igual a la combinación convexa de las asignaciones de tales estimaciones.

Proposición 5.5. *La regla de llegada aleatoria Φ^{crisp} satisface la propiedad de comonotonía.*

Demostración. Sean $c, c' \in \mathcal{FAP}^N$ tales que, para cada $i \in N$, $core(c_i) \cap core(c'_i) \neq \emptyset$. Sea $\alpha \in (0,1)$. Se define $c'' \in \mathcal{FAP}^N$ mediante

$$\mu_{c''_i}(x) = \alpha\mu_{c_i}(x) + (1-\alpha)\mu_{c'_i}(x)$$

para cada $i \in N$ y cada $x \in \mathbb{R}$. Ya que se verifican las condiciones del Teorema 2.3, se sigue que

$$\mathrm{Y}\left(c''_i\right) = \alpha\mathrm{Y}\left(c_i\right) + (1-\alpha)\mathrm{Y}\left(c'_i\right)$$

para cada $i \in N$. De lo anterior se sigue que

$$\mathrm{Y}\left(c''\right) = \alpha \mathrm{Y}\left(c\right) + (1-\alpha)\mathrm{Y}\left(c'\right).$$

De este resultado, junto con la propiedad de linealidad de la regla de llegada aleatoria clásica, se tiene que

$$\phi\left(\mathrm{Y}\left(c''\right)\right) = \alpha\phi\left(\mathrm{Y}\left(c\right)\right) + (1-\alpha)\,\phi\left(\mathrm{Y}\left(c'\right)\right),$$

lo que, por definición, es igual a

$$\Phi^{crisp}(c'') = \alpha\Phi^{crisp}(c) + (1-\alpha)\Phi^{crisp}(c').$$

□

Invarianza. Sean $c, c' \in \mathcal{FAP}^N$ tales que $c_i \ominus c_i' \in \mathbb{F}_0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces $\Psi^{crisp}(c) = \Psi^{crisp}(c')$.

Este axioma establece que modificaciones de los costes por números difusos $0-$simétricos no afectan al reparto del coste común.

Proposición 5.6. *La regla de llegada aleatoria Φ^{crisp} satisface la propiedad de invarianza.*

Demostración. Sean $c, c' \in \mathcal{FAP}^N$ tales que $c_n = c_n'$ y $c_i \ominus c_i' \in \mathbb{F}_0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Sea $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Dado que $c_i \ominus c_i'$ es un número $0-$simétrico, por la propiedad (ii) de la Proposición 2.7, se sigue que

$$\mathrm{Y}\left(c_i \ominus c_i'\right) = 0. \tag{5.3}$$

Por otro lado, de la propiedad (v) de la Proposición 2.7, se tiene que

$$\mathrm{Y}\left(c_i \ominus c_i'\right) = \mathrm{Y}\left(c_i\right) - \mathrm{Y}\left(c_i'\right), \tag{5.4}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. De (5.3) y (5.4) se sigue que $\mathrm{Y}\left(c_i\right) = \mathrm{Y}\left(c_i'\right)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Por otro lado, como $c_n = c_n'$, se sigue que $\mathrm{Y}\left(c_n\right) = \mathrm{Y}\left(c_n'\right)$. De lo anterior, se concluye que $\mathrm{Y}(c) = \mathrm{Y}(c')$. Y aplicando el operador ϕ, se tiene

$$\phi\left(\mathrm{Y}(c)\right) = \phi\left(\mathrm{Y}(c')\right).$$

Lo anterior, por definición, es equivalente a

$$\Phi^{crisp}(c) = \Phi^{crisp}(c'),$$

lo que concluye la demostración. □

A continuación, se tratará de probar que si una regla de asignación en $\mathcal{FAP}^N$ satisface las seis propiedades mencionadas en el teorema previo, entonces este valor es igual a la regla de llegada aleatoria para problemas de aeropuerto con costes difusos.

Teorema 5.1. *Si una regla de asignación de costes Ψ^{crisp} en $\mathcal{FAP}^N$ satisface las propiedades de igual tratamiento, agente nulo, aditividad, continuidad, comonotonía e invarianza, entonces Ψ^{crisp} es la regla de llegada aleatoria para problemas de aeropuerto con costes difusos.*

Demostración. Suponga que la regla de asignación $\Psi^{crisp} : \mathcal{FAP}^N \to \mathbb{R}^N$ satisface las propiedades mencionadas en el teorema. El objetivo es probar que

$$\Psi^{crisp}(c) = \Phi^{crisp}(c) \tag{5.5}$$

para cada $c \in \mathcal{FAP}^N$. Se probará (5.5) por inducción fuerte sobre

$$w(c) = |\{a \in \mathbb{F}_+ : \exists\, k \in N \text{ con } c_k = a\} \setminus \{0, c_n\}|\,.$$

Para el caso base se realizará una demostración por pasos, similar a la demostración del Teorema 4.1. La primera diferencia entre ambas demostraciones radica en el paso 1. Al definir un modelo con $c_n \in \mathbb{R}$, surge la necesidad de hacer la demostración para números reales. La segunda diferencia está en el paso 4, donde no se puede emplear la misma descomposición que se uso en la demostración de aquel teorema, ya que necesitamos garantizar que se trate de un problema de aeropuerto.

Caso base. $w(c) \in \{0, 1\}$.
Supóngase que $w(c) = 0$. Está claro que existe un $r \in \mathbb{R}_+$ y un $k \in \{1, \ldots, n\}$ tales que

$$c_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant i < k, \\ r & \text{si } k \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Usando las propiedades de jugador nulo e igual tratamiento, se obtiene

$$\Phi_i^{crisp}(c) = \Psi_i^{crisp}(c) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant i < k, \\ \frac{r}{n-k+1} & \text{si } k \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Supóngase que $w(c) = 1$. Existe un $a \in \mathbb{F}_+$, un $r \in \mathbb{R}_+$, un $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ y un

$l \in \{k+1, \ldots, n\}$ tales que

$$c_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant i < k, \\ a & \text{si } k \leqslant i < l, \\ r & \text{si } l \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Paso 1. Supóngase que $a \in \mathbb{R}_{++}$. Sea $c' = (c'_1, c'_2, \ldots, c'_n)$ tal que

$$c'_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant i < k, \\ a & \text{si } k \leqslant i \leqslant n, \end{cases}$$

y sea $c'' = (c''_1, c''_2, \ldots, c''_n)$ tal que

$$c''_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant i < l, \\ r - a & \text{si } l \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Obsérvese que $c = c' \oplus c''$. Por tanto, usando el caso $w(c) = 0$ y la propiedad de aditividad, se tiene que

$$\begin{aligned} \Psi^{crisp}(c) &= \Psi^{crisp}\left(c' \oplus c''\right) \\ &= \Psi^{crisp}\left(c'\right) + \Psi^{crisp}\left(c''\right) \\ &= \Phi^{crisp}\left(c'\right) + \Phi^{crisp}\left(c''\right) \\ &= \Phi^{crisp}\left(c' \oplus c''\right) \\ &= \Phi^{crisp}(c). \end{aligned}$$

Paso 2. Supóngase que $a \in \mathbb{F}_+ \setminus \mathbb{R}$ y $|\{\mu_a(z) : z \in \mathbb{R}\}| = 2$. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $0 \leqslant x < y$ tales que

$$\mu_a(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in [x, y], \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R} \setminus [x, y]. \end{cases}$$

Obsérvese que a es un intervalo cuyo centro es $\frac{x+y}{2}$. La función de pertenencia de un número difuso con estas características ha sido representado en la Figura 5.2.

Sea $c' = (c'_1, \ldots, c'_n)$ definido por

$$c'_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant i < k, \\ \frac{x+y}{2} & \text{si } k \leqslant i < l, \\ r & \text{si } l \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Se tiene que

$$c_i \ominus c'_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant i < k, \\ a \ominus \frac{x+y}{2} & \text{si } k \leqslant i < l, \\ 0 & \text{si } l \leqslant i \leqslant n, \end{cases}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como a es un intervalo, y en consecuencia, un número difuso simétrico, entonces $a \ominus \frac{x+y}{2}$ es un número difuso $0-$simétrico (como se muestra en la Figura 5.3). Por tanto, se tiene que $c_i \ominus c'_i \in \mathbb{F}_0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

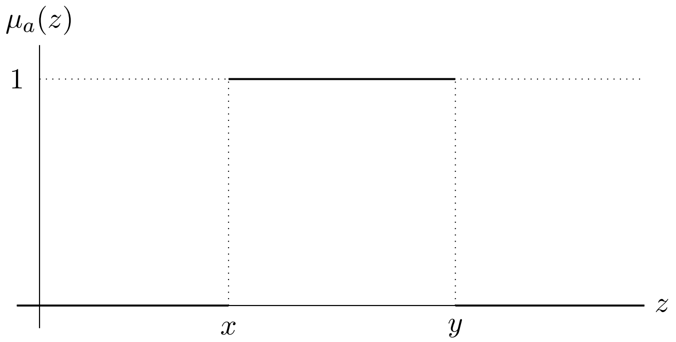

Figura 5.2.

Usando la propiedad de invarianza y el resultado del paso 1, se sigue que

$$\Psi^{crisp}(c) = \Psi^{crisp}(c') = \Phi^{crisp}(c') = \Phi^{crisp}(c).$$

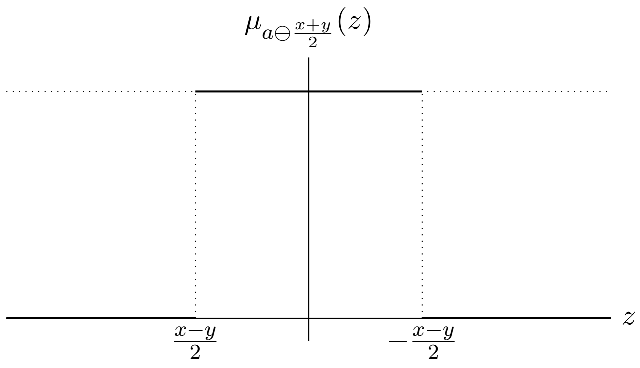

Figura 5.3.

Paso 3. Supóngase que $a \in \mathbb{F}_+ \setminus \mathbb{R}$ y $|\{\mu_a(z) : z \in \mathbb{R}\}| = 3$. Existe un $p \in (0, 1)$ y

$x, y, u, v \in \mathbb{R}$ con $0 \leqslant x \leqslant u \leqslant v \leqslant y$ y $v - u < y - x$ tales que

$$\mu_a(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in [u, v], \\ p & \text{si } z \in [x, y] \setminus [u, v], \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R} \setminus [x, y]. \end{cases}$$

Un función de pertenencia con las características de la anterior se ha recogido en la Figura 5.4.

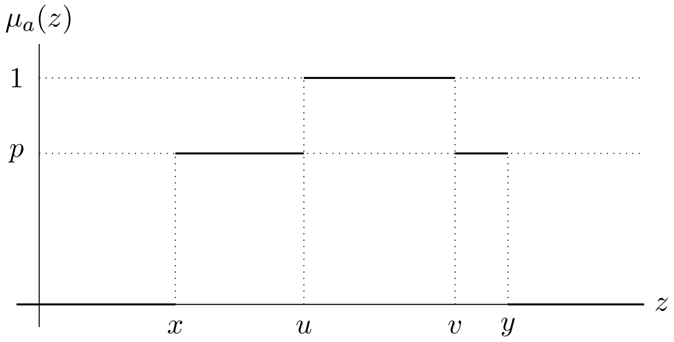

Figura 5.4.

Sea $a', a'' \in \mathbb{F}$ definido mediante

$$\mu_{a'}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in [x, y], \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R} \setminus [x, y], \end{cases}$$

$$\mu_{a''}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in [u, v], \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R} \setminus [u, v]. \end{cases}$$

Obsérvese que

$$\mu_a(z) = p\mu_{a'}(z) + (1 - p)\mu_{a''}(z)$$

para cada $z \in \mathbb{R}$.

Además, como se ha supuesto que $x \leqslant u \leqslant v \leqslant y$ y $v - u < y - x$, entonces

$$core\left(a'\right) \cap core\left(a''\right) = core\left(a''\right) = [u, v] \neq \emptyset. \tag{5.6}$$

Sean $c' = (c'_1, c'_2, \ldots, c'_n)$ y $c'' = (c''_1, c''_2, \ldots, c''_n)$ definidos por

$$c'_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant i < k, \\ a' & \text{si } k \leqslant i < l, \\ r & \text{si } l \leqslant i \leqslant n, \end{cases}$$

y

$$c_i'' = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant i < k, \\ a'' & \text{si } k \leqslant i < l, \\ r & \text{si } l \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

De (5.6), se sigue

$$core\left(c_i'\right) \cap core\left(c_i''\right) \neq \emptyset \tag{5.7}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Como se verifica (5.7), se puede aplicar la propiedad de comonotonía. De esta propiedad, junto con el resultado del paso 2, se tiene que

$$\begin{aligned} \Psi^{crisp}(c) &= p\Psi^{crisp}\left(c'\right) + (1-p)\Psi^{crisp}\left(c''\right) \\ &= p\Phi^{crisp}\left(c'\right) + (1-p)\Phi^{crisp}\left(c''\right) \\ &= \Phi^{crisp}(c). \end{aligned}$$

Paso 4. Supóngase que $a \in \mathbb{F}_+ \setminus \mathbb{R}$ y $|\{\mu_a(z) : z \in \mathbb{R}\}|$ es finito. Está claro que existen $p_1, \ldots, p_{m-1} \in (0,1)$ con $p_1 < \ldots < p_{m-1} < 1$ y $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$ con $0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_m \leqslant y_m \leqslant \ldots \leqslant y_1$ tales que

$$\mu_a(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in [x_m, y_m], \\ p_i & \text{si } z \in [x_i, y_i] \setminus [x_{i+1}, y_{i+1}], \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R} \setminus [x_1, y_1]. \end{cases}$$

Sean $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{F}$ definidos por

$$\mu_{b_m}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in [x_1, x_1 + y_m - x_m], \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R} \setminus [x_1, x_1 + y_m - x_m], \end{cases}$$

y

$$\mu_{b_j}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = x_{j+1} - x_j, \\ p_i & \text{si } z \in [0, x_{j+1} - x_j + y_j - y_{j+1}] \setminus \{x_{j+1} - x_j\}, \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{R} \setminus [0, x_{j+1} - x_j + y_j - y_{j+1}], \end{cases}$$

para $j = 1, \ldots, m-1$. Es sencillo comprobar que

$$a = \bigoplus_{j=1}^{m} b_j.$$

Sean $c^1, \ldots, c^m \in \mathbb{F}^N$ definidos por

$$c_i^m = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant i < k, \\ b_m & \text{si } k \leqslant i < l, \\ r - x_m + x_1 + y_m - y_1 & \text{si } l \leqslant i \leqslant n, \end{cases}$$

y

$$c_i^j = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant i < k, \\ b_j & \text{si } k \leqslant i < l, \\ x_{j+1} - x_j + y_j - y_{j+1} & \text{si } l \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

para $j = 1, \ldots, m-1$. Se tiene que

$$c = \bigoplus_{j=1}^{m} c^j.$$

Por la propiedad de aditividad y por el resultado del paso 4, se tiene que

$$\begin{aligned} \Psi^{crisp}(c) &= \Psi^{crisp}\left(\bigoplus_{j=1}^{m} c^j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \Psi^{crisp}\left(c^j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \Phi^{crisp}\left(c^j\right) \\ &= \Phi^{crisp}\left(\bigoplus_{j=1}^{m} c^j\right) \\ &= \Phi^{crisp}(c) \end{aligned}$$

Paso 5. Supóngase que $a \in \mathbb{F}_+ \setminus \mathbb{R}$ y $|\{\mu_a(z) : z \in \mathbb{R}\}|$ no es finito. Por la propiedad de continuidad y el resultado del paso previo, para probar que $\Psi^{crisp}(c) = \Phi^{crisp}(c)$ es suficiente con encontrar números difusos $b \in \mathbb{F}_+$, con $|\{\mu_b(z) : z \in \mathbb{R}\}|$ finito, y arbitrariamente cercanos a a. Pero esto se sigue del Teorema 2.1, donde se probó que los números difusos con una cantidad finita de niveles son densos.

Paso inductivo. Sea $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathcal{FAP}^N$ tal que $w(c) \geqslant 2$. Sea $k = \min\{i \in \{1, \ldots, n-1\} : c_i \neq 0\}$ y $l = \min\{i \in \{k+1, \ldots, n-1\} : c_i \neq c_k\}$. Sean $c' = (c'_1, \ldots, c'_n)$,

$d = (d_1, \ldots, d_n)$ y $d' = (d'_1, \ldots, d'_n)$ definidos por

$$c'_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant i < k, \\ (c_k)_0^+ \ominus c_k & \text{si } k \leqslant i < l, \\ (c_k)_0^+ & \text{si } l \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

$$d_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant i < l, \\ c_i & \text{si } l \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

$$d'_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant i < k, \\ (c_k)_0^+ & \text{si } k \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

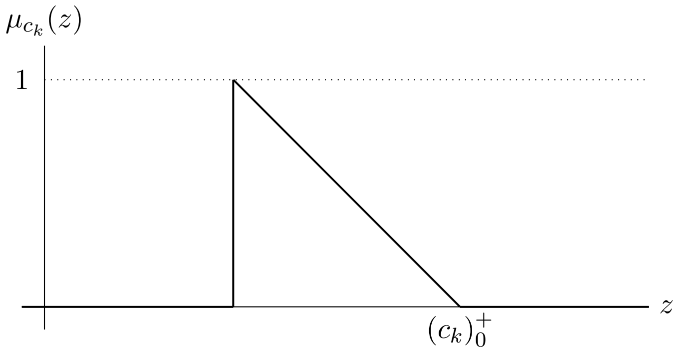

Figura 5.5.

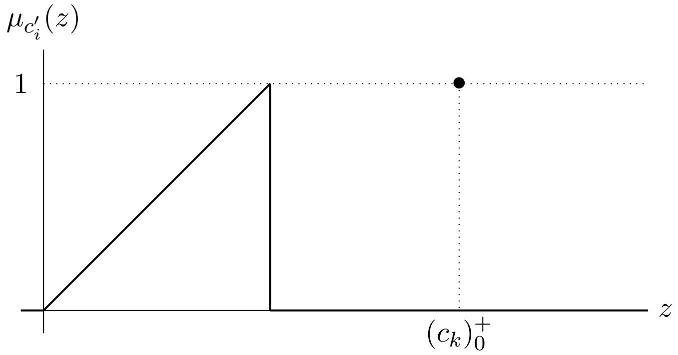

Figura 5.6.

Es fácil comprobar que $c', d, d' \in \mathcal{FAP}^N$. Obsérvese que

$$(c \oplus c')_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant i < k, \\ (c_k)_0^+ \oplus c_k \ominus c_k & \text{si } k \leqslant i < l, \\ (c_k)_0^+ \oplus c_i & \text{si } l \leqslant i \leqslant n, \end{cases}$$

y

$$(d \oplus d')_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant i < k, \\ (c_k)_0^+ & \text{si } k \leqslant i < l, \\ (c_k)_0^+ \oplus c_i & \text{si } l \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Está claro que $(c \oplus c')_i \ominus (d \oplus d')_i \in \mathbb{F}_0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ya que Φ^{crisp} y Ψ^{crisp} satisfacen la propiedad de invarianza, se tiene que

$$\begin{aligned} \Phi^{crisp}(c \oplus c') &= \Phi^{crisp}(d \oplus d'), \\ \Psi^{crisp}(c \oplus c') &= \Psi^{crisp}(d \oplus d'), \end{aligned}$$

de donde, por la propiedad de aditividad,

$$\Phi^{crisp}(c) + \Phi^{crisp}(c') = \Phi^{crisp}(d) + \Phi^{crisp}(d'), \tag{5.8}$$

$$\Psi^{crisp}(c) + \Psi^{crisp}(c') = \Psi^{crisp}(d) + \Psi^{crisp}(d'). \tag{5.9}$$

Observe que $w(c') = 1$, $w(d') = 0$ y $w(d) = w(c) - 1$. Por la hipótesis de inducción,

$$\Phi^{crisp}(c') = \Psi^{crisp}(c') \tag{5.10}$$

$$\Phi^{crisp}(d) = \Psi^{crisp}(d) \tag{5.11}$$

$$\Phi^{crisp}(d') = \Psi^{crisp}(d') \tag{5.12}$$

De (5.8), (5.9), (5.10), (5.11) y (5.12) se concluye que $\Phi^{crisp}(c) = \Psi^{crisp}(c)$.

□

5.4. Algoritmo para el cálculo de la regla de asignación real con PYTHON

En esta sección se presenta un programa desarrollado en lenguaje PYTHON que permite el cálculo de la regla de llegada aleatoria para problemas de aeropuerto con costes difusos. El programa permite introducir un número arbitrario de agentes y, para cada agente, introducir el correspondientes coste difuso. Los costes deben ser números difusos dentro del siguiente conjunto: número real, intervalo, número triangular o número trapezoidal.

El programa calcula el vector de costes $\mathrm{Y}(c)$ y proporciona la regla de llegada aleatoria. A continuación se incluye el código para el cálculo de tal regla.

```
def tipo_de_parametro (N,tipo_de_numero,i):
    while True:
        tipo_c_i = input(f'Ingrese el tipo de numero que tomar c{i+1}: (real [R], \
intervalo [I], triangular[TRI], trapezoidal [TRA]) ')
        if tipo_c_i in tipo_de_numero:
            x = 0
            if tipo_c_i == 'R':
                while True:
                    c_i = float(input(f'Introduzca el valor c{i+1} = '))
                    print("")
                    x = 0
                    try:
                        prueba = float(c_i)
                    except:
                        print('dato incorrecto')
                        x = 1
                    if x != 1:
                        break
            elif tipo_c_i == 'I':
                while True:
                    l_c_i = float(input(f'Introduzca el extremo inferior de c{i+1} = '))
                    u_c_i = float(input(f'Introduzca el extremo superior de c{i+1} = '))
                    print("")
                    c_i=(l_c_i+u_c_i)/2
                    x = 0
                    try:
                        prueba = float(c_i)
                    except:
                        print('dato incorrecto')
                        x = 1
                    if x != 1:
                        break
            elif tipo_c_i == 'TRI':
                while True:
```

```
                a1_c_i = float(input(f'Introduzca el primer parametro de c{i+1} = '))
                a2_c_i = float(input(f'Introduzca el segundo parametro de c{i+1} = '))
                a3_c_i = float(input(f'Introduzca el tercer parametro de c{i+1} = '))
                print("")
                c_i=(a1_c_i+2*a2_c_i+a3_c_i)/4
                x = 0
                try:
                    prueba = float(c_i)
                except:
                    print('dato incorrecto')
                    x = 1
                if x != 1:
                    break
        elif tipo_c_i == 'TRA':
            while True:
                b1_c_i = float(input(f'Introduzca el primer parametro de c{i+1}= '))
                b2_c_i = float(input(f'Introduzca el segundo parametro de c{i+1}= '))
                b3_c_i = float(input(f'Introduzca el tercer parametro de c{i+1}= '))
                b4_c_i = float(input(f'Introduzca el cuarto parametro de c{i+1}= '))
                print("")
                c_i=(b1_c_i+b2_c_i+b3_c_i+b4_c_i)/4
                x = 0
                try:
                    prueba = float(c_i)
                except:
                    print('dato incorrecto')
                    x = 1
                if x != 1:
                    break
    else:
        print('El tipo de numero introducido no es correcto')
        x = 2

    if x != 2:
        break
return(c_i)
```

```
while True:
    print("")
    N = input('Ingrese el numero de aeronaves: ')
    z = 0
    try:
        N = int(N)
    except:
        N = 'dato incorrecto'
        print('El dato introducido no es correcto. Introduzca un numero natural.')
        z = 1

    if z == 0 and N>0:
        print("")
        break

tipo_de_numero = ['R', 'I', 'TRI', 'TRA']

vector_costes = []

for i in range(N):
    c_i = tipo_de_parametro (3,tipo_de_numero,i)
    vector_costes.append(c_i)

print('El vector de costes una vez aplicado el indice de Yager es:')
print(vector_costes)
print("")

rar = []

for i in range(len(vector_costes)):
    if i == 0:
        rar.append((vector_costes[i])/(N-(i+1)+1))

    else:
        rar.append(((vector_costes[i]-vector_costes[i-1])/(N-(i+1)+1))+rar[i-1])

print("La asignacion de costes es ", rar)
```

Conclusiones

El presente trabajo ha tratado de aportar nuevas herramientas al estudio de situaciones de cooperación en ambiente de incertidumbre o imprecisión. Los modelos clásicos asumen que todos los elementos de un juego cooperativo se conocen con exactitud. Sin embargo, existen muchas situaciones en las que solo se tienen unas expectativas vagas sobre algunos de los elementos involucrados en el problema de decisión. Para abordar la imprecisión, en este trabajo se han empleado los juegos cooperativos con función característica difusa introducidos por M. Mareš y M. Vlach [55]. Estos modelos emplean números difusos como medio para abordar tal imprecisión.

La literatura que ha utilizado modelos con incertidumbre o imprecisión ha propuesto soluciones que venían dadas por cantidades que también eran inexactas. Por tanto, se ha asumido que la falta de certidumbre o precisión en los datos se debía trasladar también a la solución del problema. Sin embargo, no se ha tratado de proponer reglas de asignación que proporcionasen cantidades exactas en tales situaciones. Esta tesis presenta un planteamiento novedoso en el sentido de que propone métodos para proporcionar valores reales para juegos cooperativos cuya función característica viene determinada por números difusos.

Para lograr este fin, se han empleado herramientas de defuzzificación de números difusos que han permitido dar el paso de lo difuso a lo nítido, esto es, pasar de trabajar con números difusos a tener números reales. La herramienta empleada para ello ha sido un índice de clasificación de números difusos introducido por R. R. Yager [84]. A través de este método se ha podido eliminar la imprecisión del problema y así proporcionar una solución dada por números reales. Los números difusos constituyen una excelente herramienta para tratar la imprecisión en problemas de toma de decisiones. Sin embargo, también han supuesto todo un reto, ya que la aritmética y la topología con ellos son mucho más complejas, lo que ha dificultado enormemente las demostraciones.

En el presente trabajo se han proporcionado reglas de reparto para juegos con función característica difusa que vienen dadas por vectores de números reales y que están basadas en los valores clásicos de Shapley y Banzhaf. Así, se ha definido el valor real de Shapley y el valor real de Banzhaf para estos modelos. Los valores propuestos son una herramienta útil para problemas que manejan datos imprecisos pero que buscan aportar un reparto exacto. En el camino del desarrollo del objetivo principal se ha introducido, siguiendo el camino marcado por M. Mareš [54], un valor difuso de Banzhaf para juegos con pagos difusos. Se ha obtenido también una caracterización para dicho valor, adaptando los axiomas propuestos por J. M. Gallardo y A. Jiménez-Losada [35] para el valor difuso de Shapley. Para los valores reales propuestos se han aportado también sendas axiomatizaciones que extienden los axiomas clásicos de los valores de Shapley y Banzhaf. Las caracterizaciones fueron combinadas con un grupo de propiedades razonables para juegos cooperativos con función característica difusa.

Además, siguiendo la metodología propuesta, se ha aplicado el valor real de Shapley propuesto a un problema de reparto de costes. Se han extendido los problemas de aeropuerto clásicos al caso en el que los costes parciales sean cantidades difusas. En ese sentido, se han propuesto los problemas de aeropuerto con costes difusos y se ha proporcionado una regla de asignación real para ellos. Para esta regla se han presentado un conjunto de propiedades que han permitido caracterizarla. Además, se ha desarrollado un programa en lenguaje de programación PYTHON que permite calcular la regla de reparto de costes para problemas con costes difusos.

Una de las principales limitaciones del método propuesto es la dificultad de trabajar con juegos con un gran número de jugadores. Para juegos con muchos jugadores el coste computacional es grande. Si bien esta limitación ya la presentan los valores clásicos de Shapley y Banzhaf, el método propuesto añade el coste computacional del proceso de defuzzificación de la función característica. Otra de las limitaciones que presenta este trabajo es la dificultad de probar la independencia de los axiomas propuestos. Se ha tratado de demostrar, sin éxito, que las caracterizaciones dadas están formadas por axiomas independientes. Como ya se ha dicho, la complejidad de la aritmética difusa complica cualquier demostración.

Como futura línea de investigación se encuentra el tratar de proponer caracterizaciones alternativas para los valores propuestos. Y en esta línea tratar de encontrar caracterizaciones formadas por axiomas independientes. Otra posible línea de estudio es tratar de emplear otros métodos de defuzzificación alternativos al índice de Yager, estudiando también cómo se comporta la solución en función del método empleado. Se podrían plantear en el futuro estudios comparativos de diferentes soluciones para una amplia gama de índices de clasificación de números difusos. Otro aspecto a tener en cuenta en la elección del índice de clasificación es el coste computacional que agregue al problema, pues no todos los índices de clasificación tienen el mismo coste.

Con todo, el objetivo fijado al inicio de esta tesis, que consistía en proporcionar reglas de asignación reales para juegos cooperativos cuya función característica se construya a partir de datos imprecisos, se ha logrado. Se han propuesto dos valores reales para juegos cooperativos con función característica difusa y se ha dado una axiomatización para cada uno de ellos. Además, esta metodología se ha aplicado a problemas de reparto de costes y se ha propuesto la regla de llegada aleatoria para problemas de aeropuerto con costes difusos. En el proceso de construcción de estos valores se ha introducido también un valor difuso para estos juegos con función característica difusa. Finalmente, cabe decir que las reglas de asignación propuestas en este trabajo constituyen una excelente herramienta de ánalisis, ya que permiten proporcionar una solución exacta para problemas donde los datos no se conocen con precisión.

Bibliografía

[1] Aadland, D. y Kolpin, V. (1998). Shared irrigation costs: and empirical and axiomatic analysis. *Mathematical Social Sciences, 35*, 203-218.

[2] Abbasbandy, S. (2009). Ranking of Fuzzy Numbers, Some Recent and New Formulas. En IFSA/EUSFLAT Conf. (pp. 642-646).

[3] Albizuri, M., Santos, J.C. y Zarzuelo, J.M. (2003). On the serial cost sharing rule. *International Journal of Game Theory, 31*(3), 437-446.

[4] Albizuri, M. (2010). The $\alpha-$serial cost sharing rule. *Mathematical Social Sciences, 60*, 24-29.

[5] Alparslan Gök, S. Z., Brânzei, R. y Tijs, S. H. (2009). Airport interval games and their Shapley value. *Operations Research and Decisions, 2*(19), 9-18.

[6] Alparslan Gök, S. Z., Qasim, E., Palanci, O. y Weber, G. W. (2019). Airport Situations and Games with Grey Uncertainty. *International Journal of Industrial Engineering and Operational Research, 1*(1), 51-59.

[7] Aubin, J. P. (1981). Cooperative fuzzy games. *Mathematics of Operations Research, 6*(1), 1-13.

[8] Aumann, R. J. y Maschler, M. (1964). The bargaining set for cooperative games. En M. Dresher, L. S. Shapley y A. Tucker (Eds.), *Advances in Game Theory*, (443-476). Princeton University Press.

[9] Baker, M. J. (1965). Runway cost impact study. *Report presented to the Association of Local Transport Airlines, Jackson, Miss.*

[10] Banzhaf III, J. F. (1965). Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis. *Rutgers Law Review, 19*, 317-343.

[11] de Barros, L. C., Bassanezi, R. C. y Lodwick, W. A. (2017). *First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics.* (Studies in Fuzziness and Soft Computing, Vol. 347). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[12] Borel, E. (1924). Sur les jeux où interviennent l'hasard et l'habilité des joueurs. *Théorie des probabilités*, 101-15.

[13] Borkotokey, S. (2008). Cooperative games with fuzzy coalitions and fuzzy characteristic functions. *Fuzzy Sets and Systems, 159*(2), 138-151.

[14] Borkotokey, S. y Mesiar, R. (2014). The Shapley value of cooperative games under fuzzy settings: a survey. *International Journal of General Systems, 43*(1), 75-95.

[15] Bortolan, G. y Degani, R. (1985). A review of some methods for ranking fuzzy subsets. *Fuzzy sets and Systems, 15*(1), 1-19.

[16] Branzei, R., Dimitrov, D. y Tijs, S. (2003). Shapley-like values for interval bankruptcy games. *Economics Bulletin, 3*(9), 1-8.

[17] Branzei, R., Branzei, O., Alparslan Gök, S. Z. y Tijs, S. (2010). Cooperative interval games: a survey. Central *European Journal of Operations Research, 18*(3), 397-411.

[18] Brunelli, M. y Mezei, J. (2013). How different are ranking methods for fuzzy numbers? A numerical study. *International Journal of Approximate Reasoning, 54*(5), 627-639.

[19] Buckley, J. J. (1985). Ranking alternatives using fuzzy numbers. *Fuzzy sets and systems, 15*(1), 21-31.

[20] Charnes, A. y Granot, D. (1973). *Prior Solutions: Extensions of Convex Nucleus Solutions to Chance-Constrained Games.* Texas Univ Austin Center For Cybernetic Studies.

[21] Detyniecki, M. y Yager, R. R. (2000). Ranking fuzzy numbers using $\alpha-$weighted valuations. *International Journal of uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based systems, 8*(5), 573-591.

[22] Dragan, I. (1996). New mathematical properties of the Banzhaf value. *European Journal of Operational Research, 95*(2), 451-463.

[23] Dubey, P. y Shapley, L. S. (1979). Mathematical properties of the Banzhaf power index. *Mathematics of Operations Research, 4*(2), 99-131.

[24] Dubey, P. (1982). The Shapley value as aircraft landing fees-revisited. *Management Science, 28*, 869-874.

[25] Dubois, D. y Prade, H. (1978). Operations on fuzzy numbers. *International Journal of systems science, 9*(6), 613-626.

[26] Dubois, D. y Prade, H. (1979). Fuzzy real algebra: some results. *Fuzzy sets and systems, 2*(4), 327-348.

[27] Dubois, D. y Prade, H. (1983). Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory. *Information sciences, 30*(3), 183-224.

[28] Dubois, D. y Prade, H. (1988). Fuzzy numbers: an overview. En J. C. Bezdek (Ed.), *Analysis of Fuzzy Information* (3-39), CRC-Press.

[29] Feltkamp, V. (1995). Alternative axiomatic characterizations of the Shapley and Banzhaf values. *International Journal of Game Theory, 24*(2), 179-186.

[30] Galindo, H., Gallardo, J. M. y Jiménez-Losada, A. (2020). A real Shapley value for cooperative games with fuzzy characteristic function. *Fuzzy Sets and Systems*, 409, 1-14.

[31] Galindo, H., Gallardo, J. M. y Jiménez-Losada, A. (2021). Banzhaf values for cooperative games with fuzzy characteristic function. *International Journal of General Systems, 50*(2), 182-210.

[32] Gallardo Morilla, J. M. (2015). *Values for games with authorization structure* [Tesis doctoral, Universidad de Sevilla]. idUS. https://hdl.handle.net/11441/70583

[33] Gallardo, J. M., Jiménez, N. y Jiménez-Losada, A. (2017). Fuzzy restrictions and an application to cooperative games with restricted cooperation. *International Journal of General Systems, 46*(7), 772-790.

[34] Gallego Sánchez, I. M. (2016). *Cooperative games restricted by fuzzy graphs* [Tesis doctoral, Universidad de Sevilla]. idUS. http://hdl.handle.net/11441/44330

[35] Gallardo, J. M. y Jiménez-Losada, A. (2020). A characterization of the Shapley value for cooperative games with fuzzy characteristic function. *Fuzzy Sets and Systems*, 398, 98-111.

[36] Gillies, D. B. (1953). *Some theorems on n-person games*, PhD thesis, Princeton University.

[37] González-Díaz, J., García-Jurado, I. y Fiestras-Janeiro, M. G. (2010). *An introductory course on mathematical game theory.* (Graduate studies in mathematics, Vol. 115). American Mathematical Society.

[38] Haimanko, O. (2019). Composition independence in compound games: a characterization of the Banzhaf power index and the Banzhaf value. *International Journal of Game Theory, 48*(3), 755-768.

[39] Hart S. y Mas-Colell A. (1989). Potential, value, and consistency. *Econometrica, 57*(3), 589-614.

[40] Hougaard, J. L. (2009). *An introduction to allocation rules.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[41] Jain, R. (1976). Decision making in the presence of fuzzy variables. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 6*(10), 698â703.

[42] Kaufmann, A. y Gupta, M. M. (1991). *Introduction to fuzzy arithmetic: Theory and applications.* Van Nostrand Reinhold Company.

[43] Kerre, E., Mareš, M. y Mesiar, R. (6-10 de Julio, 1998). *On the orderings of generated fuzzy quantities.* Proceedings 7th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems, Paris, La Sorbonne, 250-254.

[44] Klir, G. y Yuan, B. (1995). *Fuzzy sets and fuzzy logic.* Prentice hall.

[45] Lehrer, E. (1988). An axiomatization of the Banzhaf value. *International Journal of Game Theory, 17*(2), 89-99.

[46] Liang, K. y Li, D. (2019). A direct method of interval Banzhaf values of interval cooperative games. *Journal of Systems Science and Systems Engineering, 28*(3), 382-391.

[47] Littlechild, S. C. y Owen, G. (1973). A simple expression for the Shapley value in a special case. *Management Science, 20*(3), 370-372.

[48] Littlechild, S. C. y Thompson G. F. (1977). Aircraft landing fees: a game theory approach. *The Bell Journal of Economics, 8*(1), 186-204.

[49] Liu, J., Liu, X., Huang, Y. y Yang, W. (2018). Existence of an Aumann-Maschler fuzzy bargaining set and fuzzy kernels in TU fuzzy games. *Fuzzy Sets and Systems, 349*, 53-63.

[50] von Neumann, J. (1928). Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen, 100*, 295-300.

[51] von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1944). *Theory of games and economic behavior.* Princeton University Press.

[52] Maschler, M., Solan, E. y Zamir, S. (2020). *Game Theory.* Cambridge University Press.

[53] Mareš, M. (1997). Weak arithmetics of fuzzy numbers. *Fuzzy sets and Systems, 91*(2), 143-153.

[54] Mareš, M. (2001). *Fuzzy cooperative games: cooperation with vague expectations.* (Studies in fuzziness and soft computing, Vol. 72). Physica-Verlag.

[55] Mareš, M. y Vlach, M. (2001). Linear coalitional games and their fuzzy extensions. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 9*(3), 341-354.

[56] Márkus, J., Pintér, P. M. y Radványi, A. (2012). *The Shapley value for airport and irrigation games.* (No. MT-DP-2012/7). IEHAS Discussion Papers.

[57] Moulin, H. y Shenker, S. (1992). Serial cost sharing. *Econometrica, 60*, 1009-1037.

[58] Myerson, R. B. (1980). Conference structures and fair allocation rules. *International Journal of Game Theory, 9*(3), 169-182.

[59] Nowak, A. S. (1997). On an axiomatization of the Banzhaf value without the additivity axiom. *International Journal of Game Theory, 26*(1), 137-141.

[60] Owen, G. (1975). Multilinear extensions and the Banzhaf value. *Naval research logistics quarterly, 22*(4), 741-750.

[61] Palanci, O., Alparslan Gök, S. Z., Ergün, S. y Weber, G. W. (2015). Cooperative grey games and the grey Shapley value. *Optimization , 64*(8), 1657-1668.

[62] Penrose, L. S. (1946). The elementary statistics of majority voting. *Journal of the Royal Statistical Society, 109*(1), 53-57.

[63] POTTERS, J. Y SUDHÖLTER, P. (1999). Airport problems and consistent allocation rules. *Mathematical Social Sciences, 38*, 83-102.

[64] PUSILLO, L. (2013). Banzhaf like value for games with interval uncertainty. *Czech Economic Review, 7*(1), 5-14.

[65] ROTH, A. E. (ED.). (1988). *The Shapley value: essays in honor of Lloyd S. Shapley.* Cambridge University Press.

[66] SHAPLEY, L. S. (1953). A value for n-person games, *Annals of Mathematics Studies, 28*, 307-317.

[67] SHAPLEY, L. S. (1971). Cores of convex games, *International journal of game theory, 1*(1), 11-26.

[68] SHAPLEY, L. S. Y SHUBIK, M. (1954). A method for evaluating the distribution of power in a committee system. *American political science review, 48*(3), 787-792.

[69] SHUBIK, M. (1962). Incentives, decentralized control, the assignment of joint costs and internal pricing. *Management science, 8*(3), 325-343.

[70] SKALNA, I., REBIASZ, B., GAWEL, B., BASIURA, B., DUDA, J., OPILA, J., PELECH-PILICHOWSKI, T. (2015). *Advances in fuzzy decision making.* (Studies in Fuzziness and Soft Computing, Vol. 333). Springer.

[71] STEFANINI, L., SORINI, L. Y GUERRA, M. L. (2008). Fuzzy numbers and fuzzy arithmetic. En W. Pedrycz, A. Skowron y V. Kreinovich (Eds.), *Handbook of granular computing*, (249-284). John Wiley & Sons.

[72] STEINHAUS, H. (1925). Definicje potrzebne do teorii gry i pościgu. *Mysl Akademika, Lwow* 1, 13-14.

[73] STRAFFIN JR., P. D. (1988). The Shapley-Shubik and Banzhaf power indices as probabilities. En A. E. Roth (Ed.), *The Shapley value: essays in honor of Lloyd S. Shapley*, (71-82). Cambridge University Press.

[74] SUIJS, J., BORM, P., DE WAEGENAERE, A. Y TIJS, S. (1999). Cooperative games with stochastic payoffs. *European Journal of Operational Research, 113*(1), 193-205.

[75] SYAU, Y. R., SUGIANTO, L. F. Y LEE, E. S. (2011). Continuity and semicontinuity of fuzzy mappings. *Mathematics with Applications, 61*(4), 1122-1128.

[76] TAN, C., JIANG, Z. Z., CHEN, X. Y IP, W. H. (2014). A Banzhaf function for a fuzzy game. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 22*(6), 1489-1502.

[77] Thompson, G. F. (1971). *Airport costs and pricing*, PhD thesis, University of Birmingham.

[78] Thomson, W. (2007). Cost allocation and airport problems. *Working paper 538*, University of Rochester.

[79] Tijs, S. (1981). Bounds for the core of a game and the $\tau-$value. En O. Moeschlin y D. Pallaschke (Eds.), *Game Theory and Mathematical Economics* (123-132). North-Holland Publishing Company.

[80] Timmer, J. B. (2001). *Cooperative behaviour, uncertainty and operations research.* CentER, Center for Economic Research.

[81] Wang, X. y Kerre, E. E. (2001). Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I). *Fuzzy sets and systems, 118*(3), 375-385.

[82] Wang, X. y Kerre, E. E. (2001). Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (II). *Fuzzy sets and systems, 118*(3), 387-405.

[83] Weber, R. J. (1988). Probabilistic values for games. En A. Roth (Ed.), *The Shapley value: essays in honor of Lloyd S. Shapley* (101-119). Cambridge University Press.

[84] Yager, R. R. (1981). A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval. *Information sciences, 24*(2), 143-161.

[85] Yager, R. R. (1986). A characterization of the extension principle. *Fuzzy sets and systems, 18*(3), 205-217.

[86] Young, H. P. (1985). Monotonic solutions of cooperative games. *International Journal of Game Theory, 14*(2), 65-72.

[87] Yu, X. y Zhang, Q. (2010). An extension of cooperative fuzzy games. *Fuzzy Sets and Systems, 161*(11), 1614-1634.

[88] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control, 8*(3), 338-353.

[89] Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning−I. *Information sciences, 8*(3), 199-249.

[90] Zermelo, E. (1913). Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. En *Proceedings of the fifth international congress of mathematicians* (Vol. 2, pp. 501-504). Cambridge University Press.