



UNIVERSIDAD DE SEVILLA

TRABAJO DE FIN DE GRADO

El fenómeno de la Sonoluminiscencia

Antonio de la Misericordia Sojo López

Tutora:

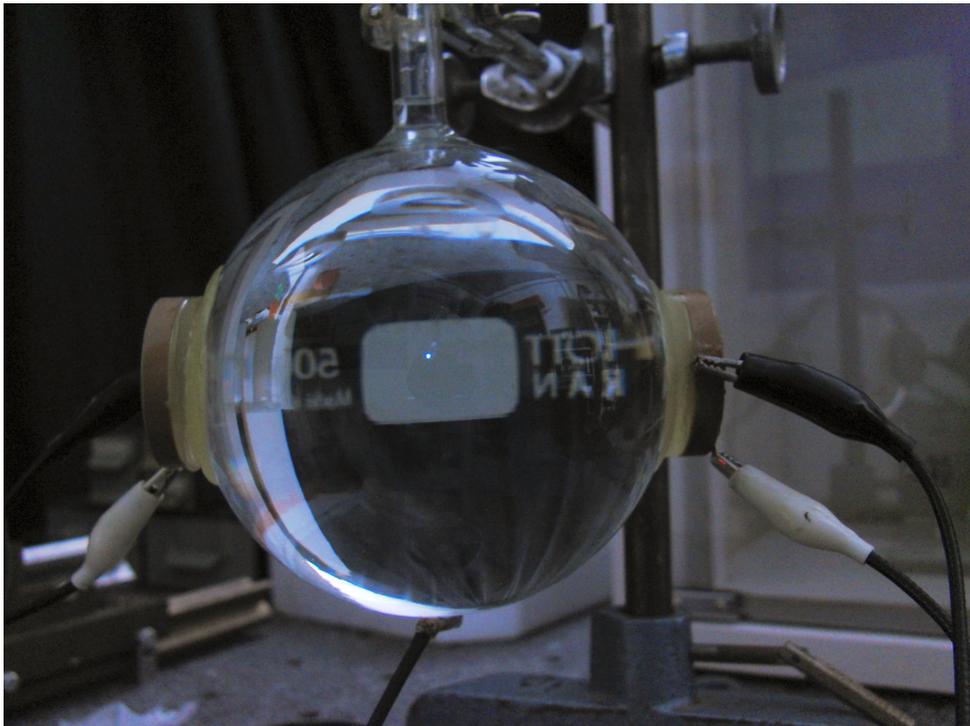
Ángela María Gallardo López
Dpt. de Física de la Materia Condensada

*Gracias a Justin Atkin de The Thought Emporium por introducirme al mundo de la
Sonoluminiscencia.*

*Gracias Ángela, mi tutora, por tu ayuda y por confiar en mí.
Gracias a todos los que me habéis apoyado durante estos largos cuatro años.*

Índice

1. Introducción	1
1.1. Introducción histórica	1
1.2. Motivación y Objetivos	3
2. Sonoluminiscencia de una burbuja	4
2.1. El problema del tamaño de la burbuja	6
2.1.1. La ecuación de Rayleigh-Plesset	7
2.1.2. Condiciones iniciales y de frontera	10
2.1.3. Frecuencia natural de oscilación del radio de la burbuja	11
2.1.4. Comportamiento del tamaño de la burbuja para amplitudes de excitación bajas. Oscilaciones lineales	13
2.2. El problema de la posición de la burbuja	14
2.2.1. Presión de excitación de baja amplitud. Condiciones de estabilidad de la posición	17
3. Soluciones numéricas de la ecuación de Rayleigh-Plesset	20
3.1. Excitación arbitraria: Función escalón y dientes de sierra	22
3.2. Pequeñas oscilaciones y frecuencia natural	27
3.3. La ecuación de Rayleigh-Plesset y la sonoluminiscencia	31
3.3.1. Solución estable y el modelo Keller-Miksis	32
3.3.2. Dependencia de la solución numérica con la amplitud de excitación y la viscosidad	39
4. Sonoluminiscencia de una burbuja en el laboratorio	41
5. Resumen y conclusiones	47
A. Código usado en las simulaciones numéricas	I
A.1. Función que define la ecuación de Rayleigh-Plesset	I
A.2. Función que define la ecuación de Rayleigh-Plesset en el modelo Keller-Miksis	I
A.3. Script para las soluciones y las gráficas	II



Fotografía del fenómeno de Sonoluminiscencia por Federico Lembo [13].
Se aprecia un punto brillante dentro del matraz relleno de agua.
Este punto brillante es una burbuja sonoluminiscente.

1. Introducción

1.1. Introducción histórica

La sonoluminiscencia es un fenómeno poco conocido dentro del ámbito de la Física que consiste en la emisión de luz por parte de las burbujas formadas dentro de un líquido excitado por ultrasonidos. Se produce en ráfagas con una duración de microsegundos y emitidas a la frecuencia de la excitación. Tal emisión se asocia al colapso violento de la burbuja debido a la cavitación¹ de las burbujas. La consecuente compresión del gas interior genera presiones de miles de atmósferas y temperaturas más altas que las de la superficie solar. De naturaleza aparentemente sencilla, el fenómeno de Sonoluminiscencia trae tras de sí una larga historia de teorías que intentan dar explicación a esta emisión de luz, todas de forma incompleta o no totalmente satisfactorias.

Su descubrimiento fue accidental. En 1933, Marinesco y Trillat [14] se encontraban inmersos en el estudio del desarrollo de placas fotográficas mediante el uso de ultrasonidos, cuando detectaron que varias de estas presentaban “fogging”. Este efecto aparece debido a la filtración hacia la placa fotográfica de luz indeseada. Para explicarlo, propusieron que la cavitación generada por los ultrasonidos actuaba como catalizador “químico”, acelerando la reducción química de los compuestos usados en el revelado y posibilitando la aparición de fotones, emitidos por tales reacciones.

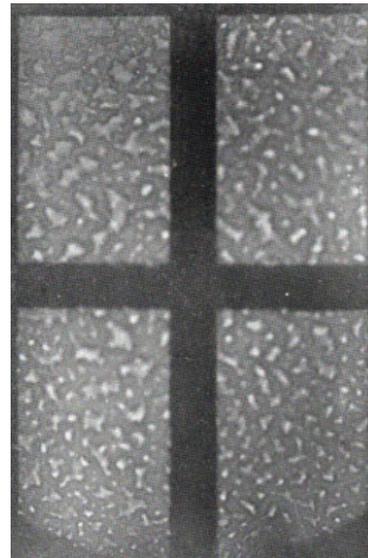


Figura 1: “Fogging” presente en las placas fotográficas. H. Frenzel (1934) [5]

La existencia de una débil luminiscencia en las burbujas cavitantes que los ultrasonidos creaban en el líquido, descubierta en 1934 por H. Frenzel y H. Schultes [5] mientras traba-

¹La cavitación consiste en la creación de cavidades de vacío o vapor dentro de un fluido debido a grandes diferencias dinámicas de presión. Viene acompañada de violentas implosiones de tales cavidades las cuales producen fuertes ondas de choque acústicas.

jan con placas fotográficas, no era totalmente compatible con la explicación de Marinresco - Trillat. Esto llevó a la necesidad de buscar nuevas propuestas. Esta luminiscencia fue el primer tipo de sonoluminiscencia descubierta, la Sonoluminiscencia multiburbuja o MBSL (multiburbuja al ocurrir en un entorno de cavitación con gran número de burbujas). Para darle una explicación a esta luminiscencia, Frenzel y Schultes se basaron en el trabajo de Beuthe (1933) [2], que estudió las reacciones químicas en medios bajo la presencia de ultrasonidos. Beuthe introdujo ideas interesantes en las que aparecían cargas eléctricas creadas por procesos similares a los de la electricidad estática y en los que las burbujas podían jugar un papel similar a condensadores que se cargan y descargan.

Posteriormente, una forma distinta de sonoluminiscencia, la sonoluminiscencia de una sola burbuja o SBSL fue descubierta en Japón por Yosioka (1962) [27] y en EEUU por Temple (1970) [24] de forma independiente al considerarse la posibilidad de atrapar una sola burbuja cavitante en una posición fija.

Tras años de desarrollo experimental en el campo, se ha recopilado bastante información acerca de esta emisión de luz por parte las burbujas y sobre las condiciones necesarias para producir este mecanismo. Uno de los mayores avances fue gracias a Meyer y Kuttruff [16], que consiguieron obtener fotografías del ciclo completo que sufría la burbuja a lo largo del proceso de sonoluminiscencia. Esto permitió estudiar el fenómeno a la misma escala temporal a la que ocurrían los diferentes pasos.

Pese a toda la información recabada y la gran cantidad de teorías propuestas, ninguna ha conseguido ser lo suficientemente robusta como para explicar la sonoluminiscencia de forma satisfactoria en todos los casos observados. Entre las diferentes propuestas, destaca la teoría de Michael P. Brenner, Sascha Hilgenfeldt y Detlef Lohse [17], que introduce la radiación Bremsstrahlung como posible mecanismo de producción de fotones. Otras propuestas más exóticas, incluyen teorías basadas en la radiación inducida por las colisiones de los átomos, reacciones nucleares dentro del gas del interior de la burbuja o incluso el efecto Casimir.

A pesar de la inexistencia de una explicación satisfactoria del efecto, la sonoluminiscencia tiene una amplia serie de aplicaciones inmediatas y propuestas. La principal es su uso, junto a la cavitación (al estar íntimamente ligados), como catalizador de reacciones

químicas dando lugar a una rama de la Química, la Sonoquímica.

Una de las aplicaciones más llamativas recientemente propuesta es la de conseguir la fusión “fría” de átomos de hidrógeno, que podría constituir un nuevo método para la creación de fuentes sostenibles de energía por fusión nuclear [10]. Sin embargo, esta propuesta ha sido acogida con escepticismo por la comunidad científica ya que no se han podido reproducir los resultados obtenidos por el grupo que realizó este estudio.

Es curiosa también la aparición de la sonoluminiscencia dentro de la biología. Los alféidos, una familia de gambas, son capaces de producir cavitación, en la que aparece sonoluminiscencia, y que usan como arma capaz de generar sonido de 220 dB (Un motor a reacción a 10 m equivale a unos 130 dB). Este fenómeno se denomina “shrimpoluminescence”.

En la actualidad, el pilar fundamental en el que se basa todo modelo de sonoluminiscencia es la ecuación de Rayleigh-Plesset. Plesset fue quien en 1949, a partir del trabajo de Lord Rayleigh [22] sobre el colapso de las burbujas, la introdujo por primera vez en su estudio sobre las dinámica de las burbujas cavitantes [21]. Esta ecuación describe las ecuaciones de movimiento del radio de la burbuja en condiciones diversas de presión. Sin embargo, para que la ecuación se adecue totalmente a los datos experimental es necesario añadir ciertas correcciones. Modelos actuales como el modelo de Keller-Miksis [1, 18, 20, 28], incluyen tales correcciones y son capaces de describir con gran precisión el movimiento del radio de las burbujas sonoluminiscentes.

1.2. Motivación y Objetivos

Para una mente curiosa, la sonoluminiscencia es seguramente uno de los fenómenos más interesantes que se pueda encontrar en la escena actual de la física. Su carácter misterioso, al no tener un explicación sólida y satisfactoria; y la belleza de poder convertir sonido en luz es digna de gran interés.

Tal curiosidad e interés por conocer este fenómeno es la principal motivación para la escritura de este trabajo. Es por ello que nuestra idea principal es conseguir un conocimiento sólido y general de las bases físicas tras la sonoluminiscencia. Por tanto, los objetivos de este trabajo son:

- Llegar a las ecuaciones que describen la física de las burbujas sonoluminiscentes partiendo de unos principios y suposiciones básicas. Para que el desarrollo de algunos conceptos sea claro y conciso, tomaremos en algunos puntos vías alternativas a las típicamente propuestas por los autores. De esta forma, obtendremos de una forma simple la ecuación de Rayleigh-Plesset [21], que describe el comportamiento del radio de una burbuja en el seno de un líquido; y obtendremos las condiciones de estabilidad en la posición de tales burbujas a partir de las fuerzas de Bjerkness [12, 15, 28].
- Hacer un análisis de algunas de las características clave del conjunto de las ecuaciones, usando las soluciones analíticas obtenidas a través de la aproximación de oscilaciones pequeñas del radio de la burbuja.
- Usar integración numérica para obtener las soluciones de la ecuación de Rayleigh-Plesset en los casos más complejos con el fin de hacer una interpretación más general del comportamiento de las burbujas. De forma paralela, relacionaremos esta interpretación con la sonoluminiscencia.
- Intentar llevar a cabo la reproducción del fenómeno de sonoluminiscencia en el laboratorio, documentando las posibles dificultades y factores importantes que encontremos en el camino.

2. Sonoluminiscencia de una burbuja

La sonoluminiscencia es la emisión de luz en ráfagas de microsegundos de duración por parte de las burbujas de un líquido excitado por ultrasonidos de alta amplitud.

Se puede diferenciar entre la sonoluminiscencia de una burbuja (SBSL, Single Bubble SonoLuminiscence) y la multiburbuja (MBSL, Multi Bubble SonoLuminiscence). En el segundo tipo, la sonoluminiscencia ocurre directamente por la cavitación del líquido, que hace colapsar de forma violenta a las burbujas que se generan mientras que el primer tipo es un poco más sutil e intenta conseguir la cavitación de una única burbuja aislada. Por simplicidad, nosotros nos vamos a centrar en la sonoluminiscencia de una sola burbuja.

Lo primero que necesitamos es entender las condiciones experimentales para crear sonoluminiscencia de una burbuja. Posteriormente tendremos que buscar las leyes físicas que nos la describan.

Imaginemos que tenemos un matraz de fondo esférico (aunque es posible usar cualquier forma como recipiente) que llenamos con un líquido (agua por ejemplo). A este matraz le acoplamos unos transductores, uno como emisor de ultrasonidos y otro como “micrófono” que reciba las vibraciones de respuesta.

Al colgar el matraz de forma que no se amortigüen las vibraciones y aplicar ultrasonidos se puede encontrar la frecuencia de resonancia que maximice la amplitud respuesta del conjunto líquido-matraz, de manera que se formen ondas estacionarias de presión en su interior. Tras esto, es cuestión de formar una burbuja simplemente soltando sobre la superficie del líquido una gota del mismo.

¿Qué pasará con esta burbuja? Obviamente, este proceso no ha sido arbitrario y se ha hecho para crear las condiciones perfectas para que la burbuja que aparece quede estable dentro del líquido. Para entender esto, necesitamos conocer un poco la dinámica de una burbuja en estas condiciones. Esta dinámica se puede descomponer en dos problemas: El movimiento de la burbuja a lo largo de los gradientes de presión debidos a la excitación por ultrasonidos, que llamaremos **el problema de la posición** y la modulación de su radio, que llamaremos **el problema del tamaño**.

En general, estos dos problemas están acoplados y su resolución exacta implicaría resolverlos en conjunto. Sin embargo, nosotros vamos a estudiarlos por separado, ya que en las condiciones de sonoluminiscencia, la dinámica del movimiento de la burbuja se convierte en un problema prácticamente de estática como ya veremos. Además, las escalas temporales de ambas dinámicas difieren lo bastante como para poder separarlas.

Vamos a estudiar primero el problema del tamaño la burbuja, suponiendo condiciones de equilibrio en el problema de la posición (esto es, que la burbuja se encuentra fija en una posición del espacio). Este orden es justo el contrario al que uno se enfrentaría en un laboratorio al intentar reproducir el fenómeno, sin embargo, para poder seguir una argumentación lineal y con cohesión es más cómodo hacerlo de esta forma. Experimentalmente, primero habría que dejar la burbuja estable en el líquido (problema de la posición)

y posteriormente habría que conseguir obtener un radio crítico de la burbuja usando los ultrasonidos (problema del tamaño).

2.1. El problema del tamaño de la burbuja

Vamos a suponer por ahora que la burbuja se encuentra fija en una región del espacio. Esta suposición viene motivada por las condiciones de estabilidad que se obtendrán en el problema de la posición (Ver 2.2). La posición será, entonces, estática desde el punto de vista del problema del tamaño. Además, debido a la disparidad de las escalas temporales asociadas a cada uno de los problemas; de posición y tamaño, estos se pueden desacoplar.

Bajo esta premisa, suponemos que el líquido en el que la burbuja se encuentra sumergida va estar excitado con ultrasonidos, los cuales producen variaciones temporales en la presión local que rodea la burbuja y en todo el líquido.

Si nuestra burbuja encierra un gas, clave para que no colapse, estos cambios en la presión modularán el tamaño de la misma. Esta modulación permite un gran abanico de situaciones, que irán desde situaciones de estabilidad y equilibrio u oscilaciones lineales (tipo sinusoidal) de su tamaño (radio) a situaciones caóticas y violentas, como el colapso abrupto de la burbuja. Nuestro objetivo es por tanto encontrar una ecuación que describa todo este amplio rango de comportamientos.

Esto es, en general, un problema complejo que involucra las conocidas ecuaciones de Navier-Stokes, ecuaciones no lineales en

derivadas parciales que gobiernan la dinámica de los fluidos. Sin embargo, pese a la casi inabarcabilidad de este tipo de ecuaciones, vamos a poder encontrar una única ecuación relativamente simple que nos describa el comportamiento del radio de la burbuja según las condiciones del medio, simplemente usando la conservación de la energía.

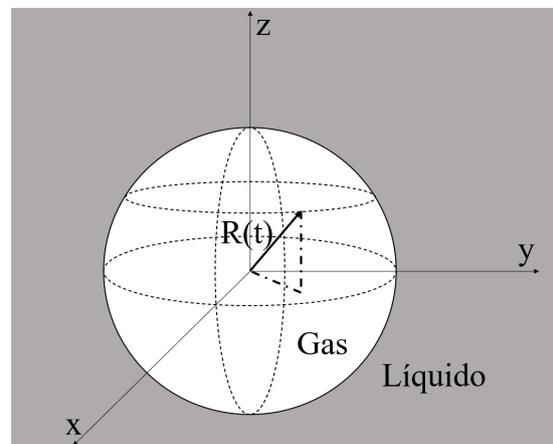


Figura 2: Esquema de la burbuja, líquido y las regiones donde se resolverían las ecuaciones

2.1.1. La ecuación de Rayleigh-Plesset

Comenzamos haciendo varias suposiciones bastante asequibles. La primera de ellas es asumir **simetría esférica** (ver Fig.2). Esto supone que la burbuja es perfectamente esférica y que el ambiente líquido de su alrededor es infinito. Esto nos reduce las variables de 4 a 2, es decir, de (\mathbf{r}, t) a (r, t) , donde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ es el vector de posición medido desde el centro de la burbuja, correspondiendo $r = R(t)$ al radio de la burbuja.

También podemos asumir que el líquido en el que se encuentra inmersa la burbuja es prácticamente **incompresible** y que este no escapa fuera del recipiente. Esta condición se traduce en que la densidad $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_L$ es constante tanto local como globalmente.

Como consecuencia, se debe cumplir la ley de conservación de la masa en cada punto de líquido ($r > R$). En este contexto, esta se escribe como [11]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1)$$

con $\mathbf{u} = u(r, t)\hat{\mathbf{r}}$ el campo de velocidades dentro del líquido bajo simetría esférica. Como $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_L$ constante, tenemos que la ecuación anterior, en realidad es:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) = 0 \quad \xrightarrow{\text{Integrando}} \quad u(r, t) = \frac{C(t)}{r^2} \quad (2.2)$$

$C(t)$, constante de integración, será una función que depende exclusivamente del tiempo y es la misma para todo el líquido, es decir, para todos los puntos $r > R$. Esto nos permite obtener una expresión que relaciona la velocidad radial de la frontera de la burbuja $\dot{R} = dR/dt$ de la burbuja con la de cualquier otro punto r del líquido. Simplemente igualamos $C(t)$ para estos dos puntos:

$$r^2 u = R^2 \dot{R} \quad (2.3)$$

Como queremos aplicar la **conservación de energía** [25], necesitamos identificar todos los mecanismos implicados en el intercambio de energía, posibilitando la cuantificación de estas transferencias. Si solo consideramos fuerzas debidas a presiones, la energía puesta en juego será la cinética y el trabajo generado por la presión tanto en el interior como

en el exterior de la burbuja debido a cambios en el tamaño de la misma. Uno podría argumentar que debemos tener en cuenta la energía térmica, sin embargo, al ser el líquido infinito, su temperatura como mucho cambiaría cerca de la burbuja (ya que esta sí que lo hará) pero va a mantenerse constante en todo el resto de su inmensidad, permitiéndonos no tenerla en cuenta. De esta forma, si la energía se conserva, un cambio en la energía cinética total del líquido se deberá exclusivamente al trabajo realizado por las fuerzas debidas a la presión en la frontera de la burbuja. Usando la relación 2.3, podemos calcular la energía cinética total en función del radio de la burbuja:

$$K = \int_V \frac{1}{2} \rho_L u^2(r', t) dV = \frac{1}{2} \rho_L \int_{r'=R}^{r'=\infty} \frac{R^4 \dot{R}^2}{r'^4} 4\pi r'^2 dr' = -2\pi \rho_L \frac{R^4 \dot{R}^2}{r'} \Big|_{r'=R}^{r'=\infty} = 2\pi \rho_L R^3 \dot{R}^2 \quad (2.4)$$

recordando que $u(\mathbf{r}, t)$ es el módulo del campo de velocidades en el líquido, ρ_L es la densidad del mismo y R y \dot{R} son el radio y la velocidad radial de la frontera de la burbuja.

La presión en la frontera de la burbuja se compone de dos términos. Uno para la presión en el interior de la burbuja p_B que hace que no colapse, y otro término para la presión que ejerce el líquido desde el exterior de la frontera hacia dentro. Esta última, en general no será uniforme a lo largo de toda la frontera de la burbuja ni en el líquido.

Sin embargo, si el radio de la burbuja está acotado a una región espacial lo suficientemente pequeña con respecto al tamaño característico de los cambios de presión, podemos considerarla localmente constante a lo largo de toda la superficie². Si además consideramos que el líquido está en equilibrio, al ser incompresible, esta presión será coincidente con la que exista en un punto muy alejado del centro, al transmitirse las ondas a velocidad infinita y sin pérdidas. Esta presión la denotamos como p_∞ .

Se podría pensar que estamos dejando detrás la inclusión de toda la energía acumulada (términos del tipo pV) en el volumen del líquido debido a la presión hidrostática y la presión de la propia excitación. Sin embargo, esta energía no puede contribuir directamente a cambios en el volumen de la burbuja porque estas presiones no dependen del radio de la misma. Si quisiéramos incluirlas, podríamos hacerlo, pero en lo que continúa de nuestro razonamiento, el término asignado a ellas desaparecería.

²Para ondas armónicas como las que vamos a usar, esta condición se traduce a $R \ll \lambda$, siendo λ la longitud de onda que excita el líquido, condición que también supondremos en el problema de la posición

De esta forma, el trabajo neto que se realiza para un cambio de volumen entre un radio R_0 y otro R es:

$$W = \int_{R_0}^R (p_B - p_\infty) dV = \int_{R_0}^R (p_B - p_\infty) 4\pi r'^2 dr' \quad (2.5)$$

La condición de conservación de la energía es por tanto:

$$W = \int_{R_0}^R dK \quad (2.6)$$

$$\int_{R_0}^R (p_B - p_\infty) 4\pi r'^2 dr' = 2\pi\rho_L R^3 \dot{R}^2 + K_0 \quad (2.7)$$

con K_0 la energía cinética en un estado de referencia arbitrario de la burbuja $R(t_0) = R_0$.

En general, las presiones que estamos teniendo en cuenta sí que van a depender de $R(t)$, por lo que no podemos integrar sin conocer esta dependencia. Así, para poder continuar, derivamos con respecto a R (es aquí donde el término pV asociado al volumen del líquido desaparece, al no depender de R)

$$(p_B - p_\infty) 4\pi R^2 = 2\pi\rho_L \left(3R^2 \dot{R}^2 + 2R^3 \frac{\partial \dot{R}}{\partial R} \dot{R} \right) \quad (2.8)$$

$$(p_B - p_\infty) R^2 = \rho_L \left(\frac{3}{2} R^2 \dot{R}^2 + R^3 \ddot{R} \right)$$

Reordenando, obtenemos la **ecuación de Rayleigh-Plesset** [22, 21], que gobierna el radio de una burbuja $R(t)$, en el seno de un líquido con unas condiciones de presión concretas (p_B y P_∞) y que será una de nuestras bases:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_B - p_\infty}{\rho_L} \quad (2.9)$$

Un análisis más profundo y que use directamente las ecuaciones de Navier-Stokes lleva a esta misma ecuación pero con unos términos extra asociados a la viscosidad μ , a la tensión superficial σ y a la presión del vapor del líquido [3, 4, 25]. Estos términos también pueden incluirse como parte de nuestro análisis si los añadimos a las presiones p_B y p_∞ . Para ello, podemos pensar que la tensión superficial es una presión que actúa en la frontera de la burbuja para optimizar el volumen con la mínima superficie posible. En esta misma línea,

podemos construir el término asociado a la viscosidad.

La ecuación con todos estos términos es:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{4\mu}{\rho_L R}\dot{R} + \frac{2\sigma}{\rho_L R} = \frac{p_B - p_\infty}{\rho_L} \quad (2.10)$$

En una sección posterior, veremos una ecuación aún más completa, obtenida en el modelo de Keller-Miksis o modelo KM. Ver sección 3.3.1.

2.1.2. Condiciones iniciales y de frontera

Uno, al ver la ecuación de Rayleigh-Plesset completa (Ec. 2.10), podría preocuparse por su no linealidad, sin embargo, podemos acudir a métodos numéricos para solucionarla³ y evitar manejar expresiones analíticas demasiado engorrosas para nuestros objetivos. En nuestro caso, para resolverla suponemos que la burbuja se encuentra **inicialmente** en **equilibrio** y en **reposo** con un radio R_{eq} , esto es:

$$R(0) = R_{eq} \quad \dot{R}(0) = 0 \quad (2.11)$$

Además, la condición de equilibrio impone el estado inicial del gas (Ec. 2.13-b). Podemos suponer que el proceso de expansión y compresión del mismo ocurre como un proceso **adiabático**⁴ [1, 18, 25] por lo que la presión del gas cumplirá:

$$p_B = p_0 \left(\frac{V_0}{V(t)} \right)^\gamma = p_0 \left(\frac{R_{eq}}{R(t)} \right)^{3\gamma} \quad (2.12)$$

donde γ es el coeficiente de dilatación adiabática.

La condición de equilibrio inicial es:

$$p_B = \left(p_\infty(0) + \frac{2\sigma}{R_{eq}} \right) \left(\frac{R_{eq}}{R(t)} \right)^{3\gamma} \quad p_0 = p_\infty(0) + \frac{2\sigma}{R_{eq}} \quad (2.13)$$

³Cabe decir que existen métodos de aproximación analítica y soluciones cerradas para casos concretos de esta ecuación. [8, 9, 19, 20]

⁴esto además refuerza la condición de una temperatura constante en el líquido pero no en el interior de la burbuja

Si además, el líquido está expuesto a la presión atmosférica P_{at} y a una excitación de tipo sinusoidal de amplitud A_p y frecuencia ω , la ecuación de Rayleigh-Plesset y las condiciones iniciales que tenemos que resolver son:

$$\left\{ \begin{array}{l} R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{4\mu}{\rho_L R}\dot{R} + \frac{2\sigma}{\rho_L R} = \frac{1}{\rho_L} \left[\left(P_{at} + \frac{2\sigma}{R_{eq}} \right) \left(\frac{R_{eq}}{R(t)} \right)^{3\gamma} - (P_{at} + A_P \sin(\omega t)) \right] \\ R(0) = R_{eq} \\ \dot{R}(0) = 0 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Este conjunto ecuación-condiciones iniciales nos modelará el comportamiento del tamaño de la burbuja en nuestro caso experimental.

2.1.3. Frecuencia natural de oscilación del radio de la burbuja

Es interesante encontrar el comportamiento de la burbuja para **amplitudes de la excitación pequeñas**, así como la frecuencia de resonancia para obtener alguna idea sobre como responde la burbuja a las excitaciones. Para ello, suponemos que el cambio $\delta R(t)$ en el tamaño será pequeño con respecto al radio de equilibrio R_{eq} . Esto es:

$$\left\{ \begin{array}{ll} R(t) = R_{eq} + \delta R(t) & \delta R(t) \ll R_{eq} \\ \dot{R}(t) = \delta \dot{R}(t) & \delta \dot{R}(t) \ll R_{eq} \\ \ddot{R}(t) = \delta \ddot{R}(t) & \delta \ddot{R}(t) \ll R_{eq} \\ P(t) = P_{at} + \delta P \sin(\omega t) & \delta P(t) \ll P_{at} \end{array} \right. \quad (2.15)$$

y buscamos la ecuación que cumple $\delta R(t)$ usando la ecuación de R-P (Eq. 2.14), quedando:

$$R_{eq}\delta\ddot{R} + \frac{3}{2}\delta\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_L} \left[\left(P_{at} + \frac{2\sigma}{R_{eq}} \right) \left(\frac{R_{eq}}{R_{eq} + \delta R} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R_{eq} + \delta R} - \frac{4\mu\delta\dot{R}}{R_{eq} + \delta R} - P_{at} - \delta P \sin(\omega t) \right] \quad (2.16)$$

Si dividimos entre R_{eq} , despreciamos todos los términos menores y desarrollamos en serie hasta primer orden, nos quedamos con:

$$\delta\ddot{R} = \frac{1}{R_{eq}\rho_L} \left[\left(P_{at} + \frac{2\sigma}{R_{eq}} \right) \left(1 - 3\gamma \frac{\delta R}{R_{eq}} \right) - \frac{2\sigma}{R_{eq}} \left(1 - \frac{\delta R}{R_{eq}} \right) - \frac{4\mu\delta\dot{R}}{R_{eq}} - P_{at} - \delta P \sin(\omega t) \right] \quad (2.17)$$

Simplificando y re-ordenando de una forma reconocible:

$$\delta\ddot{R} + \frac{4\mu}{R_{eq}^2\rho_L}\delta\dot{R} + \frac{1}{R_{eq}^2\rho_L} \left[3\gamma \left(P_{at} + \frac{2\sigma}{R_{eq}} \right) - \frac{2\sigma}{R_{eq}} \right] \delta R = -\frac{\delta P}{R_{eq}^2\rho_L} \sin(\omega t) \quad (2.18)$$

tenemos la ecuación de un oscilador forzado con pérdidas, en la cual podemos reconocer la frecuencia natural o de resonancia [4, 28] de vibración f_n como:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_{eq}\sqrt{\rho_L}} \left[3\gamma \left(P_{at} + \frac{2\sigma}{R_{eq}} \right) - \frac{2\sigma}{R_{eq}} - \frac{4\mu^2}{R_{eq}^2\rho_L} \right]^{1/2} \quad (2.19)$$

De la ecuación (2.18), también se puede definir un coeficiente de amortiguamiento, o de forma equivalente un tiempo de relajación característico de amortiguamiento. Sus expresiones son:

$$\tau = \frac{R_{eq}^2\rho_L}{2\mu} \quad \eta = \tau^{-1} = \frac{2\mu}{R_{eq}^2\rho_L} \quad (2.20)$$

Se puede ver que τ tiene unidades de tiempo y que por tanto podemos asignar como el tiempo de relajación, siendo η el coeficiente de amortiguamiento.

Las soluciones, en general, serán oscilaciones armónicas amortiguadas en las que podemos medir la frecuencia natural y la de excitación.

Uno, al ver la expresión puede percatarse de una cosa. Fijado el radio de equilibrio por las condiciones de creación de la burbuja y conocidos los parámetros que describen el líquido, queda totalmente determinada la frecuencia resonante de la burbuja. De igual forma, uno podría darle la vuelta y pensar que para cada una frecuencia de excitación, existe un radio resonante dado por [1]:

$$R_n \approx \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\frac{3\gamma P_{at}}{\rho_L}} \quad (2.21)$$

donde se han despreciado todos los términos de viscosidad y tensión superficial excepto el dado por la presión atmosférica.

2.1.4. Comportamiento del tamaño de la burbuja para amplitudes de excitación bajas. Oscilaciones lineales

La expresión (2.21) es bastante útil, ya que además indicar el tamaño de las burbujas que necesitamos, aporta información relevante sobre la correlación temporal entre la presión de la excitación y el radio de la burbuja como veremos a continuación.

Para ilustrar esta correlación temporal, se resuelve la ecuación (2.18) y posteriormente tomamos tiempos largos con respecto al periodo de oscilación para facilitar el análisis. Consideramos oscilaciones pequeñas del radio para las burbuja se encuentra inicialmente estática y en equilibrio. En estas condiciones, es la excitación externa la que fuerza el movimiento del volumen de la burbuja, y no un desequilibrio de presión inicial. Se puede encontrar que la solución de la ecuación (2.18) en estas condiciones es:

$$\delta R(t) = e^{-\eta t} [C_1 \sin(\omega_n t) + C_2 \cos(\omega_n t)] - \frac{A}{\omega_n^2 - \omega^2 + \frac{4\eta^2 \omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2}} \left[\sin(\omega t) - \frac{2\eta\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \right] \quad (2.22)$$

con A una amplitud arbitraria, C_1 y C_2 dos constantes de integración arbitrarias y $\eta = 2\mu/R_{eq}^2 \rho_L$. Tomando tiempos largos para eliminar los términos de frecuencia natural y asumiendo rozamiento despreciable:

$$\delta R(t \rightarrow \infty) \approx -\frac{A}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin(\omega t) \propto -\frac{P(t)}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (2.23)$$

De esta expresión se deduce que si la frecuencia de excitación es menor que la de resonancia de la burbuja, el cambio en el tamaño $\delta R(t)$ oscila en contrafase con la presión. Por el contrario, si la frecuencia usada es mayor, ambos oscilan en fase. Esto bastante intuitivo. Como la frecuencia de resonancia nos da la escala temporal en la que actúa la inercia del movimiento de la frontera de la burbuja, si se excita con mayor lentitud que esta, la frontera podrá adaptarse a la excitación, pasando de un estado de -equilibrio al siguiente. Si aumenta la presión externa, debe disminuir el tamaño de la burbuja, como es lógico.

Si por el contrario operamos a frecuencias mayores que las de resonancia, la inercia de la frontera de la burbuja impedirá que esta pueda ir siguiendo estados de equilibrio de una forma lo suficientemente rápida. Esto hace que el desfase inicial, que ya teníamos a

frecuencias menores que la de resonancia, aumente hasta llegar hasta anularse. De esta forma, la presión de excitación y el radio de la burbuja oscilarán en fase.

Desde una perspectiva del tamaño de la burbuja, el caso en contrafase se corresponde a un radio de equilibrio de burbuja menor que el resonante a la frecuencia de excitación y viceversa. Esto nos será útil a la hora de analizar el problema de la posición.

Para oscilaciones generales, el carácter no lineal de la ecuación podría romper totalmente este comportamiento fase-contrafase y dando lugar a un comportamiento más complejo en el que la fase relativa pueda tomar valores intermedios entre 0 y π o en el que este análisis no tenga demasiado sentido. Es conveniente tener cuidado con el concepto de frecuencia resonante, definido para un radio de equilibrio fijado y el de radio resonante, definido para una frecuencia externa dada. Es decir, el término *resonante* se refiere a la fuente de excitación en el primer caso y a la burbuja en el segundo.

Fase relativa	Frecuencia	Radio
0	$f > f_n$	$R > R_n$
π	$f < f_n$	$R < R_n$

Tabla 1: Fase relativa en función de los parámetros de frecuencia f y tamaño de la burbuja R

2.2. El problema de la posición de la burbuja

Vista la dinámica del volumen, veamos qué ocurre con su posición y cómo se acoplan los dos problemas: el de la posición y el del tamaño. Debido a la aparición de gradientes de presión p , causados por la excitación de ultrasonidos, aparecerá una fuerza sobre la burbuja de volumen V que afectará a su movimiento. Para conocerla, construimos el potencial correspondiente a la interacción entre el cuerpo y los gradientes de presión como:

$$U = pV \tag{2.24}$$

La construcción del potencial de esta forma implica que la presión es la misma en todo el cuerpo, o lo que es lo mismo, nuestra burbuja es muy pequeña respecto a las distancias

típicas a las cuales cambia la presión⁵. Esta condición es la de **localidad del volumen de la burbuja**. La fuerza correspondiente a este potencial es:

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -V\nabla p \quad (2.25)$$

La dependencia con el volumen de esta fuerza nos acopla las dinámicas de posición y tamaño. En la discusión sobre el problema del tamaño hicimos la suposición de que la burbuja se encontraba estable en una posición de equilibrio. Con el fin de ver que tal suposición de estabilidad de la posición es posible, tenemos que suponer que la presión se propaga como **onda estacionaria** [28]. Así:

$$p = p_0 + \delta p \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (2.26)$$

donde k es el número de ondas y $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia de la onda de presión. La decisión de usar una onda estacionaria **monodimensional** en vez de una tridimensional y de forma acorde al recipiente viene motivada de nuevo por la condición de localidad del volumen de la burbuja. Como este volumen es pequeño respecto a la onda, podemos asimilar localmente la onda de ultrasonidos como monodimensional.

En general, a escala completa, la forma de la onda estacionaria dependerá de la simetría concreta del problema, dada principalmente por el recipiente que contenga el líquido. Si usamos, por ejemplo, un matraz esférico, la simetría es esférica que es considerada hasta ahora. Bajo estas condiciones de simetría esférica, se puede demostrar que las ondas estacionarias están íntimamente relacionadas con los conocidos armónicos esféricos y las funciones de Bessel.

Dicho esto, si $V = 4/3\pi R^3(t)$ es el volumen de la burbuja, la fuerza será:

$$\mathbf{F} = -\frac{4}{3}\pi R^3(t)\nabla p = -\frac{4}{3}\pi k\delta p \cos(kx) R^3(t) \cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} \quad (2.27)$$

Si la **frecuencia** es lo **suficientemente alta**⁶, la inercia de la burbuja nos permite considerar una **fuerza efectiva**, promedio temporal de la anterior que nos facilita los

⁵Esta condición es $R(t)/d \ll 1$. Si tenemos una onda de presión, equivale a $kR(t) \ll 1$, donde k es el número de ondas

⁶el rango considerado es el de los ultrasonidos, del orden de los 20 kHz

cálculos y el análisis con respecto a la fuerza completa. Este promedio se hará a escalas temporales del mismo orden que las del movimiento. Si nos limitamos ya a la proyección de tal fuerza en el eje x y dejamos fuera el contexto de vectores, la fuerza efectiva será:

$$\langle F \rangle = -\frac{4}{3}\pi k \delta p \cos(kx) \langle R^3(t) \cos(\omega t) \rangle \quad (2.28)$$

Este tipo de fuerzas se conocen como fuerzas primarias de Bjerknes [12, 15, 28]. Por comodidad, vamos a reescribirlo como:

$$\langle F \rangle = -f_0 \chi \cos(kx) \quad \text{con} \quad f_0 = \frac{4}{3}\pi k \delta p \quad \text{y} \quad \chi = \langle R^3(t) \cos(\omega t) \rangle \quad (2.29)$$

Si ahora desarrollamos en serie de Taylor alrededor del primer antinodo ($x_1 = \pi/2k$) de presión:

$$\langle F \rangle = f_0 \chi k (x - x_1) + \mathcal{O}((x - x_1)^3) \quad (2.30)$$

donde la notación $\mathcal{O}(x^n)$ indica los términos residuales de orden n del desarrollo.

Si χ es negativo, lo que tenemos es la ley de Hooke, haciendo el término $F_0 \chi k$ de constante elástica. Esto nos abre la posibilidad, como buscábamos, de que la burbuja quede estable en al menos un punto, el primer antinodo. Obviamente, este antinodo no es diferente al resto, y por simetría, todos los demás deben ser válidos. Sin embargo, algo importante que debemos discutir es el parámetro $\chi = \langle R^3(t) \cos(\omega t) \rangle$.

Este parámetro da cuenta de la correlación temporal entre la presión ($p \propto \cos \omega t$) y el volumen ($V \propto R^3(t)$) en el sentido de que podemos asignar uno a uno, un valor de este parámetro a la relación temporal presión-volumen. Esta correlación vendrá dada de forma implícita por la fase relativa entre ambas funciones. Si recordamos lo discutido en el apartado anterior (tabla 1 del apartado 2.1.4), para una frecuencia fijada, la oscilación del volumen va en contrafase con la presión si el radio de la burbuja es menor que el de resonancia y en fase en caso contrario. Esto nos indica que para radios pequeños ($R < R_n$ con R_n el radio resonante), χ es negativo debido a que la fase relativa entre el volumen V y la presión p es de π , posibilitando la existencia de puntos estables para la burbuja en los antinodos. Para radios grandes ($R > R_n$) tendremos χ positivo (fase relativa nula) e inestabilidad.

Otro gran problema es que, en realidad, el radio $R(t)$ va a depender de la posición y esta a su vez depende de la presión, algo que hemos ignorado totalmente. Esta dependencia cruzada hace que el acople de las dos dinámicas, tamaño y posición, sea aún mayor ya que va en dos sentidos. El radio depende de la posición a través de la dependencia de la presión y la posición depende del radio a través del volumen. Por si fuera poco, la no linealidad de la ecuación de Rayleigh-Plesset dificulta bastante nuestra capacidad de calcular el parámetro χ con exactitud. Pese a todo esto, el comportamiento cualitativo visto será el mismo en una mayoría de casos que cumplan las condiciones supuestas, por lo que en prácticamente todos ellos tendremos posibles puntos estables donde fijar la burbuja.

2.2.1. Presión de excitación de baja amplitud. Condiciones de estabilidad de la posición

Para ilustrar el cálculo de χ , la dependencia del radio de la burbuja $R(t)$ con la posición y los puntos de estabilidad, podemos volver al caso donde la amplitud de la onda de presión es baja. Estas condiciones son las dadas por (2.15).

De nuevo, considerando la situación de onda estacionaria armónica antes especificada bajo las mismas condiciones del tamaño (localidad del volumen de la burbuja, $kR(t) \ll 1$, con k el número de ondas de los ultrasonidos), la presión será del tipo dado por (2.26) con $\delta p \ll p_0$. El radio oscilará de forma lineal con respecto al equilibrio (ver 2.1.3 y 2.1.4). Teniendo en cuenta su dependencia espacial dada por la presión, podemos asumir que es:

$$R(t) = R_{eq} - \delta R \sin(kx) \cos(\omega t + \alpha) \quad \delta R \ll R_{eq} \quad (2.31)$$

La fase α nos da cuenta de si el tamaño de la burbuja está por encima o por debajo del de resonancia. De esta forma, $\alpha = 0$ para burbujas menores al tamaño de la resonancia y $\alpha = \pi$ en el caso contrario. Podemos computar la fuerza usando (2.25). Para ello, necesitamos conocer primero el volumen. Como $R \ll R_0$, podemos desarrollar en serie de Taylor:

$$V(t) \approx \frac{4}{3}\pi (R_0^3 - 3R_0^2\delta R \sin(kx) \cos(\omega t + \alpha)) + \mathcal{O}(\delta R^2) \quad (2.32)$$

donde la notación $\mathcal{O}(x^n)$ indica los términos residuales de orden n del desarrollo.

Esto no es estrictamente necesario ya que podemos calcularlo directamente como $V = 4/3\pi R^3(t)$, pero facilita mucho el análisis. Así, la fuerza sería:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -V\nabla p = -V \frac{\partial p}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} = -\frac{4}{3}\pi (R_0^3 - 3R_0^2\delta R \sin(kx) \cos(\omega t + \alpha)) \cdot k\delta p \cos(kx) \cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} = \\ &= -f_0\chi(x) \cos(kx) \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Como hemos indicado anteriormente, χ depende de la posición a través del radio. Calculemos su valor. Tomando el promedio en un tiempo largo:

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \langle (R_0^3 - 3R_0^2\delta R \sin(kx) \cos(\omega t + \alpha)) \cos(\omega t) \rangle = \\ &= R_0^3 \cos(\omega t) - 3R_0^2\delta R \sin(kx) \langle \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t) \rangle \end{aligned} \tag{2.34}$$

Usamos la identidad: $\cos(\omega t + \alpha) = \cos(\omega t) \cos(\alpha) - \sin(\omega t) \sin(\alpha)$, y sabiendo que $\langle \cos(\omega t) \rangle = \langle \sin(\omega t) \rangle = 0$; $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = 1/2$ llegamos a:

$$\chi(x) = -\frac{3}{2}R_0^2\delta R \sin(kx) \cos(\alpha) \tag{2.35}$$

Introduciendo este valor y usando la identidad: $\sin(kx) \cos(kx) = \frac{1}{2} \sin(2kx)$, llegamos a que la fuerza es finalmente:

$$\langle F \rangle = \frac{3}{4}R_0^2\delta R f_0 \sin(2kx) \cos(\alpha) = F_0 \sin(2kx) \cos(\alpha) \tag{2.36}$$

Esta será la fuerza primaria de Bjerknes, antes vista de forma general, pero para el caso particular de oscilaciones pequeñas.

Es fácil ver que esta fuerza es nula (de nuevo, en promedio) en los puntos que corresponden a $x_n = \pi n/2k$ con $n \in \mathbb{N}$ es decir, en los nodos (n par) y antinodos (n impar) de presión. Si desarrollamos en serie la fuerza cerca de estos puntos, como hicimos antes:

$$\langle F \rangle \approx F_0 \cos(\alpha) 2k(-1)^n [x - x_n] + \mathcal{O}((x - x_n)^3) \tag{2.37}$$

El término $F_0 \cos(\alpha) 2k(-1)^n$ hace el papel de constante de fuerza del “muelle”. Tendrá que ser negativo para dar puntos estables y positivo para puntos estables. Desglosando

en cada caso posible, según el valor del desfase α entre la presión y el volumen/radio y la posición de la burbuja en nodos o antinodos, dada por el número n .

- **Caso $\alpha = 0$ y n par:** $(-1)^n$ es positivo y $\cos(\alpha) = 1$. El coeficiente es positivo y por lo tanto es un punto de equilibrio **inestable**. Corresponde a burbujas de tamaño menor que la resonancia en los nodos de presión.
- **Caso $\alpha = 0$ y n impar:** $(-1)^n$ es negativo y $\cos(\alpha) = 1$. El coeficiente es negativo y por lo tanto es un punto de equilibrio **estable**. Corresponde a burbujas de tamaño menor que la resonancia en los antinodos de presión.
- **Caso $\alpha = \pi$ y n par:** $(-1)^n$ es positivo y $\cos(\alpha) = -1$. El coeficiente es negativo y por lo tanto es un punto de equilibrio **estable**. Corresponde a burbujas de tamaño mayor que la resonancia en los nodos de presión.
- **Caso $\alpha = \pi$ y n impar:** $(-1)^n$ es negativo y $\cos(\alpha) = -1$. El coeficiente es positivo y por lo tanto es un punto de equilibrio **inestable**. Corresponde a burbujas de tamaño mayor que la resonancia en los antinodos de presión.

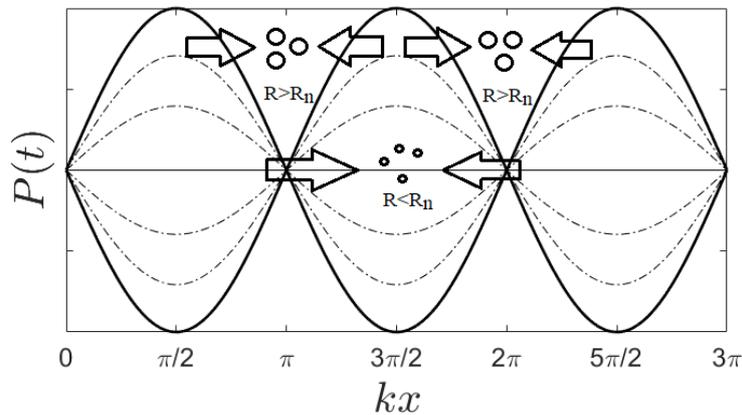


Figura 3: Esquema de los puntos de estabilidad para la burbuja según su radio

3. Soluciones numéricas de la ecuación de Rayleigh-Plesset

En la sección (2.1.1) encontramos la ecuación de Rayleigh-Plesset (Ec. 2.10). La ecuación describe el comportamiento del radio de una burbuja dentro de un líquido en función de los parámetros que describen el medio, esto es, viscosidad, densidad, tensión superficial del líquido y presión, tanto dentro como fuera de la burbuja. Como ya vimos, su expresión más general es:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{4\mu}{\rho_L R}\dot{R} + \frac{2\sigma}{\rho_L R} = \frac{p_B - p_\infty}{\rho_L} \quad (2.10)$$

donde R , \dot{R} y \ddot{R} son el radio de la burbuja y sus derivadas respecto al tiempo de primer y segundo orden; μ es la viscosidad del líquido; ρ_L la densidad del líquido; σ el coeficiente de tensión superficial; y p_B y p_∞ las presiones en el interior y exterior de la burbuja respectivamente (Ver sección 2.1.1).

Como es lógico, si la burbuja está vacía (no hay gas en su interior) esta colapsará inmediatamente tras su formación debido a la falta de presión interior que la pueda sustentar. Este papel es el que toma la presión p_B , que nos indica la presión en el interior de la burbuja debida al gas encerrado.

Así, si queremos evitar este colapso, tendremos que asignarle un valor no nulo a p_B . Como ya vimos, también en la sección (2.1.1), suponiendo procesos adiabáticos se puede obtener la relación siguiente entre la presión del gas y el radio de la burbuja:

$$p_B = \left(p_\infty(0) + \frac{2\sigma}{R_{eq}} \right) \left(\frac{R_{eq}}{R(t)} \right)^{3\gamma} \quad p_0 = p_\infty(0) + \frac{2\sigma}{R_{eq}} \quad (2.13)$$

Faltaría por ver como sería la presión p_∞ . En su momento, vimos que esta equivale a la presión atmosférica a la que se exponía el líquido y una presión externa de excitación:

$$p_\infty = P_{at} + P_{ex}(t) \quad (3.1)$$

En general, la presión de excitación $P_{ex}(t)$ tendrá una forma arbitraria ya que esta viene impuesta de forma externa por nosotros. En concreto, para reproducir la sonoluminiscencia en el laboratorio en este trabajo, lo que se impondrán serán formas sinusoidales

con frecuencias en el rango de los ultrasonidos $P_{ex}(t) = A \sin(2\pi ft)$. Para obtener un análisis más profundo del comportamiento de la burbuja y la ecuación de R-P no es conveniente limitarnos a una única forma funcional para la excitación. Será mucho más interesante aplicar distintas formas (ya sean pulsos de presión, escalones, etc) que nos permitan observar el comportamiento del radio de la burbuja en diversas situaciones, aportando información con la que poder generar un esquema general de la dinámica en funcionamiento. De esta forma, la ecuación de R-P que queremos resolver para **excitaciones arbitrarias** $P_{ex}(t)$ es una modificación de la dada por la Ec. 2.14. Incluyendo las **condiciones iniciales de equilibrio y reposo inicial**:

$$\begin{cases} R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{4\mu}{\rho_L R}\dot{R} + \frac{2\sigma}{\rho_L R} = \frac{1}{\rho_L} \left[\left(P_{at} + \frac{2\sigma}{R_{eq}} \right) \left(\frac{R_{eq}}{R(t)} \right)^{3\gamma} - (P_{at} + P_{ex}(t)) \right] \\ R(0) = R_{eq} \\ \dot{R}(0) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Para tener la ecuación totalmente definida y poder resolverla necesitamos darle valores a todos los parámetros. En nuestro caso, hemos elegido los **parámetros característicos del agua** [7, 23, 26] a **temperatura ambiente**, esto es $T \approx 300$ K. Como gas encerrado hemos elegido **aire atmosférico**.

Nombre	Símbolo	Valor
Coefficiente de tensión superficial	σ	0,0725 N/m
Viscosidad	μ	$8,9 \times 10^{-4}$ Pa·s
Densidad	ρ_L	998 kg/m ³
Coefficiente adiabático del gas encerrado	γ	1,4
Presión atmosférica	P_{at}	101325 Pa
Temperatura inicial del gas encerrado	T_0	300 K

Tabla 2: Parámetros para la simulación

Los tiempos de integración $t_0 = 0 < t < t_{end}$ y los radios de equilibrio iniciales R_{eq} se elegirán según la excitación externa P_{ex} que impongamos para facilitar la visualización y compresión de lo obtenido.

Dicho esto, ya tenemos todo lo necesario para integrar la ecuación y encontrar las soluciones. Intentar resolver la ecuación de forma analítica implica un esfuerzo bastante grande debido a la no linealidad de la ecuación. Es por ello, que en este trabajo vamos

a optar por resolverla de forma numérica usando la familia de funciones `ODE Solver` de MATLAB[®] R2020b. En concreto usaremos la función `ode45`, ya que permite bastante precisión para tiempos de computación relativamente cortos. Esta función implementa el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden para la resolución numérica de ODEs (ecuaciones diferencias ordinarias). El código usado se deja en el anexo A

3.1. Excitación arbitraria: Función escalón y dientes de sierra

Con el fin de obtener una intuición general del comportamiento del radio de la burbuja según la situación en la que se encuentre, vamos a resolver la ecuación de R-P (Ec. 3.2) para diversas presiones de excitación $P_{ex}(t)$.

Recordamos que la burbuja comienza estando en reposo y en equilibrio con el gas, por lo que el inicio del movimiento de su radio $R(t)$ se deberá exclusivamente a las presiones externas $P_{ex}(t)$. Por conveniencia, la viscosidad que se va a usar hasta el siguiente apartado será 10 veces la del agua (tabulada en la tabla 2). Esto nos permitirá una mejor visualización de los resultados, sin perder las características típicas de las curvas solución. Por lo tanto, los resultados obtenidos en este apartado no se corresponderán a valores realistas. Dicho esto, vamos a analizar varios casos:

Continua en la siguiente página...

3.1.1. Presión externa tipo Escalón

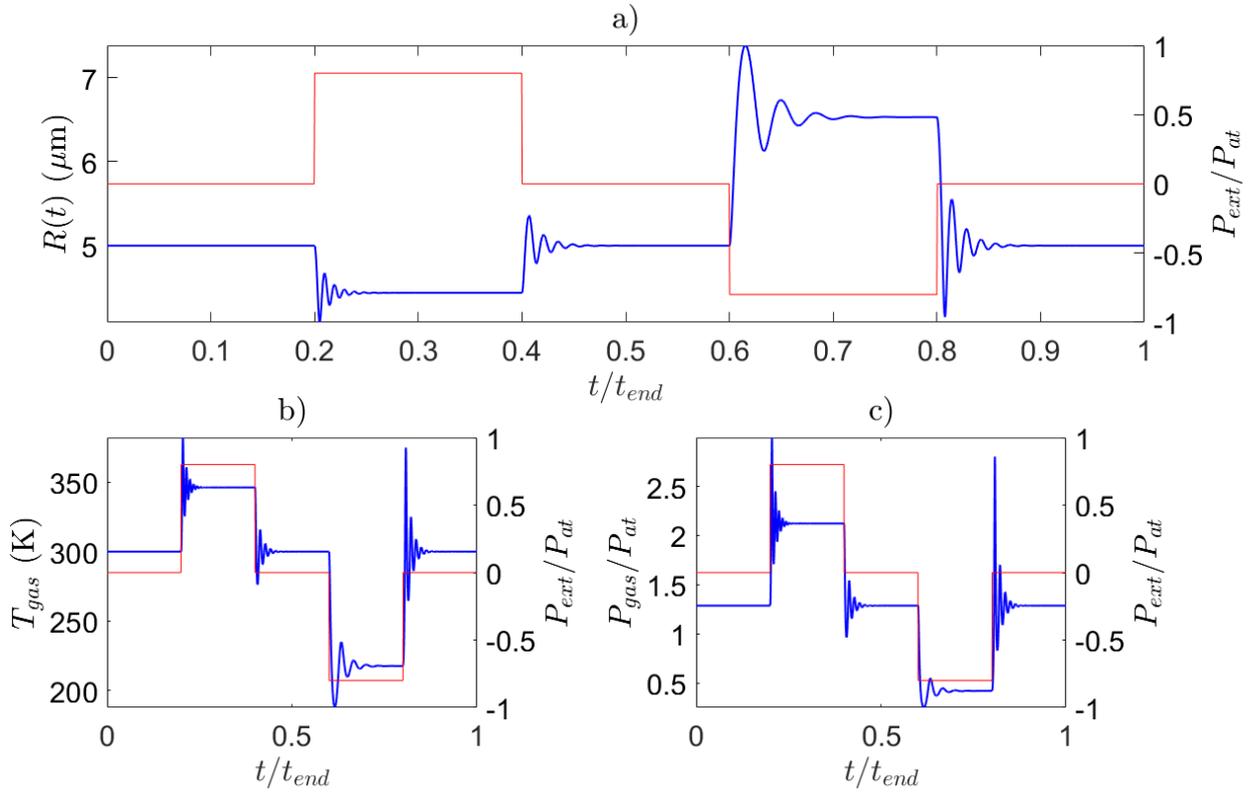


Figura 4: Solución (en azul) de la ecuación R-P para una excitación externa P_{ext} en forma de escalón (en rojo). a) Radio de la burbuja $R(t)$; b) Temperatura del gas interior T_{gas} ; c) Presión del gas interior P_{gas} . Condiciones de simulación: Amplitud de $0,8 \times P_{at}$ y paso de tiempo $20 \mu s$. Radio inicial $R_0 = 5 \mu m$ y tiempo de simulación $t_{tend} = 100 \mu s$.

En este caso, la presión de excitación $P_{ex}(t)$ es una señal cuadrada de amplitud $0,8 \times P_{at}$ y un paso de tiempo de $20 \mu s$. Inicialmente, $P_{ex}(t)$ es nula y la burbuja se mantiene en estado de equilibrio hasta la llegada del primer escalón. Cuando la presión en el exterior de la burbuja aumenta la burbuja se comprime como es de esperar. Tras la compresión, el radio de la burbuja oscila alrededor del nuevo equilibrio fijado por el cambio de presión hasta que la amortiguación finalmente lo estabiliza. Este comportamiento es, sin duda, similar a la respuesta dada por un circuito RLC excitado con una señal cuadrada como la nuestra.

El comportamiento de este tipo de circuitos viene dado (salvo consideración de órdenes superiores) por una ecuación diferencial de segundo orden del tipo oscilador armónico amortiguado:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \eta \frac{dy}{dt} + ky = F(t) \quad (3.3)$$

Esto nos indica que el comportamiento de la burbuja está principalmente gobernado por la ecuación de R-P para oscilaciones pequeñas (aunque en este caso no se cumplan totalmente las condiciones requeridas para su aplicación) que tiene el mismo tipo que la anterior:

$$\delta\ddot{R} + \frac{4\mu}{R_{eq}^2\rho_L}\delta\dot{R} + \frac{1}{R_{eq}^2\rho_L}\left[3\gamma\left(P_{at} + \frac{2\sigma}{R_{eq}}\right) - \frac{2\sigma}{R_{eq}}\right]\delta R = -\frac{\delta P}{R_{eq}^2\rho_L}\sin(\omega t) \quad (2.18)$$

Recordamos que en esta ecuación, el tiempo de relajación por amortiguamiento se podía definir (ver sección 2.1.3) como:

$$\tau = \frac{R_{eq}^2\rho_L}{2\mu} \sim 1\mu s \quad (3.4)$$

Este tiempo es del mismo orden que el tiempo de amortiguamiento visto en la solución numérica, lo que indica consistencia entre nuestra solución numérica y la teoría que estamos desarrollando.

Pese a la buena correlación entre la solución numérica y una ecuación del tipo (3.3), uno no puede evitar darse cuenta de que existen diferencias apreciables entre ambos. Por un lado, tenemos que el comportamiento de la solución numérica no es simétrico respecto al radio de equilibrio, por lo que el radio de la burbuja no responde de igual forma a subidas y bajadas de presión. Es más difícil su compresión que su expansión. Esto se puede ver en la figura (4.a), podemos ver que para la misma amplitud de salto en el escalón, el radio de expande mucho más que lo que se comprime. Esto choca con la ecuación (3.3), que sí tiene una respuesta simétrica compresión-expansión.

Explicar esta diferencia no es complicado si recordamos que la ecuación de la R-P es no lineal y contiene potencias impares de $R(t)$.

Sin embargo, como se dijo en secciones anteriores, la ecuación de Rayleigh-Plesset puede presentar un régimen de tipo caótico, bastante diferente al comportamiento suave y analítico dado por el comportamiento RLC o un oscilador armónico amortiguado. Para verlo, bastaría con cambiar un parámetro respecto a la situación actual, el tiempo de paso de la excitación.

3.1.2. Presión externa tipo Escalón: Régimen caótico

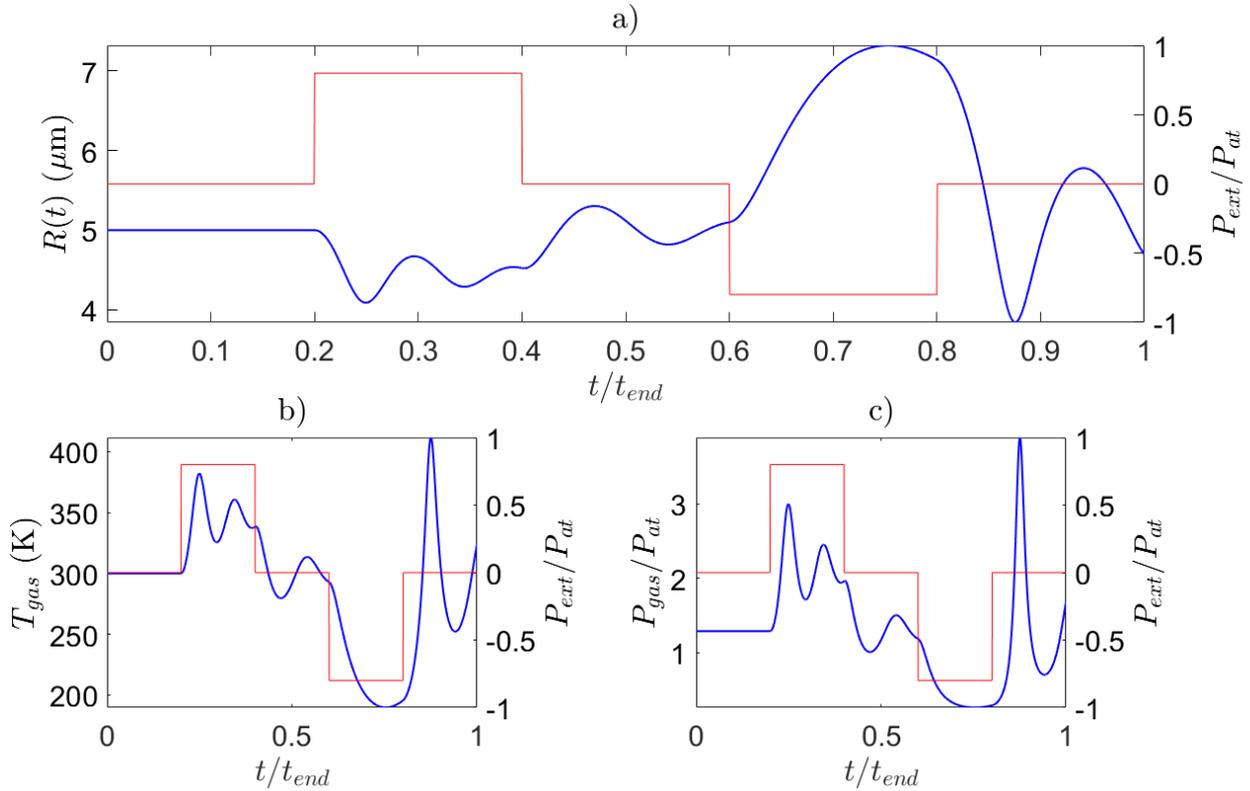


Figura 5: Solución (en azul) de la ecuación R-P para una excitación externa P_{ext} en forma de escalón (en rojo). a) Radio de la burbuja $R(t)$; b) Temperatura del gas interior T_{gas} ; c) Presión del gas interior P_{gas} . Condiciones de simulación: Amplitud de $0,8 \times P_{at}$ y paso de tiempo $2 \mu\text{s}$. Radio inicial $R_0 = 5 \mu\text{m}$ y tiempo de simulación $t_{end} = 10 \mu\text{s}$.

Características de régimen caótico

Ahora, hemos reducido el tiempo de paso de la excitación y el tiempo de simulación a 1/10 de su valor anterior. En esta situación, el tiempo de relajación $\tau \sim 1 \mu\text{s}$ es del mismo orden que el de paso de la excitación. De esta forma, el radio de la burbuja no puede estabilizarse a un valor fijo de equilibrio y el siguiente salto de presión externa se produce mientras aún oscila. La suma de esta oscilación y el cambio de brusco de presión rompe la estabilidad y el comportamiento de segundo orden antes visto, comenzando así un régimen caótico.

De nuevo, este comportamiento se explica con el carácter no lineal de la ecuación de R-P.

3.1.3. Presión externa tipo “Dientes de sierra”

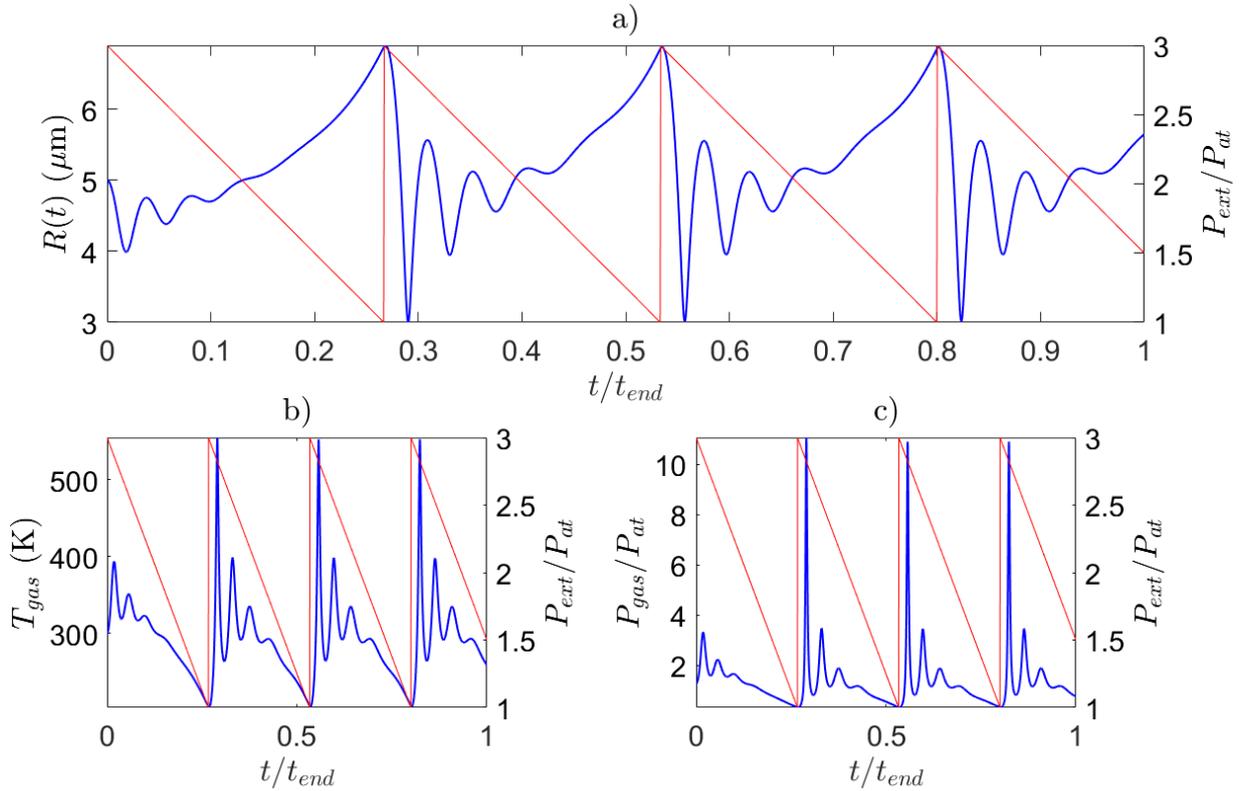


Figura 6: Solución (en azul) de la ecuación R-P para una excitación externa P_{ext} en forma de dientes de sierra (en rojo). a) Radio de la burbuja $R(t)$; b) Temperatura del gas interior T_{gas} ; c) Presión del gas interior P_{gas} . Condiciones de simulación: Amplitud de $2 \times P_{at}$ y “offset” de $1 \times P_{at}$. Radio inicial $R_0 = 5 \mu\text{m}$ y tiempo de simulación $t_{tend} = 25 \mu\text{s}$.

Por último, podemos ver qué ocurre si le aplicamos una función sierra. En este caso, hemos elegido una amplitud bastante superior a los dos casos anterior con el fin de observar el comportamiento del radio de la burbuja ante compresiones más fuertes.

Lo importante que podemos observar en este caso es lo que ocurre en el salto de presión. Con el aumento abrupto de presión, la burbuja se comprime rápidamente. Debido a la inercia del radio de la burbuja, este se hace más pequeño que el radio de equilibrio tras el aumento de presión y se comprime más de la cuenta. Esto hace que el gas en el interior multiplique la temperatura y presión inicial a unos 600 K; y a $11 \times P_{at}$ respectivamente. Tras esto, ocurre un efecto rebote donde predomina la presión del gas P_{gas} frente a las demás debido al pequeño valor del radio ($P_g \propto R^{-3\gamma}$). La burbuja se descomprime y comienza de nuevo el ciclo, que se repite de forma estable.

Este comportamiento es semejante al que se presenta en la sonoluminiscencia estable. La burbuja se comprime lo suficiente como para calentarse a temperaturas relativamente altas y presiones ordenes de magnitud por encima de la inicial. Estas presiones y temperaturas se disparan aún más cuando obtenemos sonoluminiscencia, lo que nos daría pistas sobre los posibles mecanismos por los cuales ocurre la emisión de luz. Todo esto ocurre de forma cíclica y estable.

Es muy importante recalcar que los valores numéricos concretos obtenidos no reflejan la realidad de forma correcta debido al uso de una viscosidad 10 veces superior a la medida en el agua. Como veremos, un estudio completo y realista de la sonoluminiscencia **requiere** del uso de modelos más completos, que incluyan efectos, que hasta ahora hemos ignorado. Uno de estos modelos es el de Keller-Miksis (modelo KM), que añade efectos como la compresibilidad del líquido y la pérdida de energía por emisión de ondas acústicas [1, 18, 20, 28].

3.2. Pequeñas oscilaciones y frecuencia natural

Antes de ver el caso de sonoluminiscencia, podemos comprobar numéricamente el desarrollo realizado en las secciones 2.1.3 y 2.1.4. En estas secciones se obtuvo la ecuación de Rayleigh-Plesset en el caso de oscilaciones pequeñas ($P_{ex}(t)/P_{at} \ll 1$ y $\delta R(t)/R_{eq} \ll 1$):

$$\delta \ddot{R} + \frac{4\mu}{R_{eq}^2 \rho_L} \delta \dot{R} + \frac{1}{R_{eq}^2 \rho_L} \left[3\gamma \left(P_{at} + \frac{2\sigma}{R_{eq}} \right) - \frac{2\sigma}{R_{eq}} \right] \delta R = -\frac{\delta P}{R_{eq}^2 \rho_L} \sin(\omega t) \quad (2.18)$$

de la cual se deduce la expresión para frecuencia natural de vibración de la burbuja dada por:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_{eq} \sqrt{\rho_L}} \left[3\gamma \left(P_{at} + \frac{2\sigma}{R_{eq}} \right) - \frac{2\sigma}{R_{eq}} - \frac{4\mu^2}{R_{eq}^2 \rho_L} \right]^{1/2} \quad (2.19)$$

así como la fase relativa entre las oscilaciones del radio de la burbuja y la presión de excitación (Ver Tabla. 1). Recordamos que $\delta R(t)$ era la desviación de pequeña amplitud del radio de la burbuja respecto al equilibrio, de forma que $R(t) = R_{eq} + \delta R(t)$

Para hallar la frecuencia de oscilación natural, lo ideal es eliminar la presión de excitación externa e introducir un desequilibrio puntual, como por ejemplo darle una velocidad

inicial al radio de la burbuja. También es conveniente eliminar la viscosidad para obtener oscilaciones del radio lo más cercanas posibles a oscilaciones armónicas puras.

El resultado obtenido se puede ver en la figura (7a). Domina el comportamiento de oscilaciones lineales de tipo sinusoidal que ya se predijo en la secciones 2.1.3 y 2.1.4. Se vio que la solución para la desviación $\delta R(t)$ en este caso era:

$$\delta R(t) = e^{-\eta t} [C_1 \sin(\omega_n t) + C_2 \cos(\omega_n t)] - \frac{A}{\omega_n^2 - \omega^2 + \frac{4\eta^2 \omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2}} \left[\sin(\omega t) - \frac{2\eta\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \right] \quad (2.22)$$

donde η es el coeficiente de amortiguamiento visto en la subsección anterior, A es la amplitud de la presión de excitación $P_{ex}(t)$ (en caso de ser sinusoidal) y ω y ω_n son las frecuencias angulares de la excitación y natural de la burbuja.

La solución numérica obtenida (fig. 7a) se calculó con viscosidad nula ($\mu = \eta = 0$), sin excitación externa ($A=0$) e imponiendo un estado inicial con velocidad inicial $\delta \dot{R}(0) = 0,455 \text{ m/s} \neq 0$. Además, se tiene que $\delta R(0) = 0$ ya que $R(0) = R_{eq}$. Si se imponen tales condiciones en la expresión anterior, se obtiene:

$$\delta R(t) = \frac{\delta \dot{R}(0)}{\omega_n} \sin(\omega_n t) = \frac{\delta \dot{R}(0)}{2\pi f_n} \sin(2\pi f_n t) \quad (3.5)$$

Este resultado se ha representado en la misma figura (7a) para facilitar la comparación con la solución numérica obtenida. Podemos ver que ambas están muy próximas y que por lo tanto podemos considerar que la expresión (3.5) describe satisfactoriamente al radio de la burbuja en las condiciones antes propuestas. Sin embargo, existen ciertas diferencias. La solución numérica muestra un cierto atraso en los tiempos de compresión de la burbuja (mitad izquierda de los valles) que desaparece en los tiempos de expansión (mitad derecha de los valles). Esto es una consecuencia de la existencia de los términos residuales de orden mayor que se han ignorado al hacer los desarrollos en serie en las secciones 2.1.3 y 2.1.4 para obtener la ecuación de Rayleigh-Plesset en el caso de oscilaciones pequeñas (Ec. 2.18). Estos términos rompen la armonicidad y la simetría entre la compresión y la expansión de la burbuja. Además, su efecto será más grande cuanto mayor sea la amplitud de oscilación $\delta R(t)$, rompiéndose la condición $\delta R(t) \ll R_{eq}$ considerada.

Respecto a la frecuencia natural, al ver que las soluciones teórica (3.5) y numérica

coinciden (Fig. (7a)), la expresión (2.19) debe ser correcta. Sin embargo, es conveniente usar un método más potente que el simple análisis visual. Lo primero que se podría venir a la mente es usar el análisis de Fourier, que descompone la dependencia temporal de $R(t)$ en componentes armónicas de frecuencia pura. Por ello, podemos calcular la transformada de Fourier de la solución numérica, que nos da la amplitud de cada una de estas componentes armónicas, y ver con ella que frecuencias dominan.

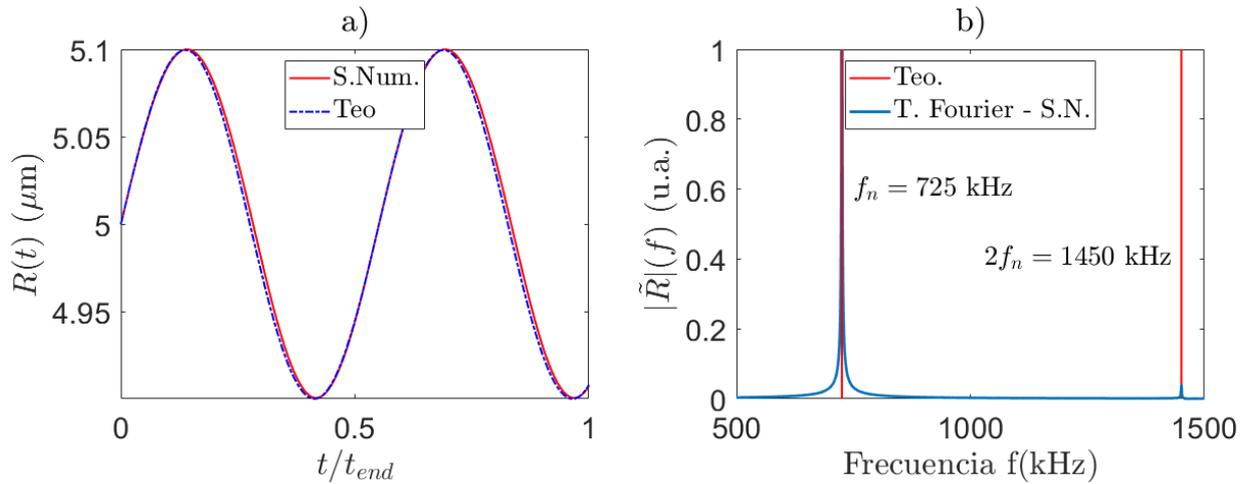


Figura 7: a) Solución $R(t)$ sin excitación externa y velocidad inicial $\dot{R} = 0,455$ m/s, b) Transformada discreta de Fourier (método FFT) de la solución $R(t)$

Como estamos trabajando de forma numérica y para tiempos de integración finitos, no nos queda más remedio que realizar una transformada de Fourier (DFT) discreta usando FFT (Fast Fourier Transform). Pasamos de un dominio en el tiempo a un dominio en frecuencia:

$$R(t) \rightarrow \mathcal{F}[R(t)] = \tilde{R}(f)$$

Esta transformada es en general un número complejo por lo que para visualizar la amplitud de cada frecuencia tenemos que representar su módulo, $|\tilde{R}(f)|$. Este módulo se muestra en la figura (7b). Podemos ver un gran pico en $f = 725$ kHz y otro bastante más pequeño en $f = 2 \times 725 = 1450$ kHz, el primer armónico. También es visible un tercer pico correspondiente al segundo armónico. Esto nos indica que la señal se compone en su gran mayoría por una señal sinusoidal de frecuencia pura $f = 725$ kHz, con algunos términos bastante menores correspondientes a frecuencias armónicas a esta. Si calculamos

la frecuencia natural con la expresión (2.19):

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_{eq}\sqrt{\rho_L}} \left[3\gamma \left(P_{at} + \frac{2\sigma}{R_{eq}} \right) - \frac{2\sigma}{R_{eq}} \right]^{1/2} = 725,44 \text{ kHz} \quad (3.6)$$

(Recordamos que se ha considerado $\mu = 0$)

Considerando que la FFT en su versión discreta tiene un límite de resolución dado por el muestreo de puntos en el tiempo que se tengan y que en este caso tal límite es del orden de 0,5 kHz, podemos decir que la frecuencia de la solución numérica calculada por Fourier y la dada por la aproximación teórica (2.19) son coincidentes.

Ahora bien, la aparición de picos en frecuencias correspondientes a armónicos de f_n no era algo previsto por la aproximación teórica en condiciones de oscilaciones pequeñas. Esto se debe, de nuevo, a los términos de orden superior a los considerados en los desarrollos en serie realizados en 2.1.3 y 2.1.4. Estos términos permiten la oscilación del radio a frecuencias múltiplo de f_n .

Este efecto es similar al que aparece en las transiciones dipolares atómico-moleculares y transiciones de radiación tipo γ en núcleos atómicos, en las que la consideración de términos de orden cada vez mayor añaden a la teoría más y más líneas de transición, cuya intensidad disminuye conforme aumenta su orden.

En un análisis más completo, convendría hacer un estudio más exhaustivo de la expresión (2.19), esto es, de la expresión para la frecuencia natural de oscilación. Una buena idea sería comprobar la dependencia con varios de los parámetros que entran en juego en la simulación (viscosidad del líquido, gas considerado, velocidad inicial...), haciendo simulaciones que vayan barriendo un cierto rango de valores de los mismos. De la misma forma, se podría observar el comportamiento oscilatorio de la burbuja en función de, por ejemplo, la velocidad inicial dada. Con esto último, uno podría observar que a partir de un cierto valor límite, el régimen de oscilaciones pequeñas desaparece, haciendo que el radio de la burbuja no oscile sinusoidalmente, si no de una forma más compleja acorde al comportamiento general que hemos visto en esta sección.

3.3. La ecuación de Rayleigh-Plesset y la sonoluminiscencia

Ahora que tenemos una intuición del comportamiento de la ecuación de Rayleigh-Plesset y hemos comprobado que la aproximación para oscilaciones pequeñas es consistente, podemos pasar a simular una situación típica de Sonoluminiscencia.

Las condiciones típicas comprenden una excitación externa sinusoidal, aplicada mediante transductores de ultrasonidos (frecuencia del orden de las decenas de kHz) acoplados a una matraz que contiene el líquido y que cuelga para no amortiguar las vibraciones. La frecuencia de la excitación se ajustará con el fin de obtener ondas estacionarias en el líquido, llegándose a la condición de equilibrio obtenida en el problema de la posición (Ver 2.2). Por otro lado, la amplitud A_P de la excitación será la máxima posible que no haga colapsar a las burbujas. Consideraremos que es del mismo orden que la presión atmosférica P_{at} . La ecuación de R-P en estas condiciones que tendremos que integrar quedaría como:



Figura 8: Transductores de ultrasonidos acoplados a una matraz esférico

$$\begin{cases} R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{4\mu}{\rho_L R}\dot{R} + \frac{2\sigma}{\rho_L R} = \frac{1}{\rho_L} \left[\left(P_{at} + \frac{2\sigma}{R_{eq}} \right) \left(\frac{R_{eq}}{R(t)} \right)^{3\gamma} - (P_{at} + A_P \sin(\omega t)) \right] \\ R(0) = R_{eq} \\ \dot{R}(0) = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Recordamos que los parámetros usados para simular el líquido son los del agua (Ver tabla (2)). Los nuevos parámetros que definen la excitación externa se presentan en la tabla (3). Estos valores se han escogido de tal forma que entren dentro del rango característico en un experimento de sonoluminiscencia típico [28].

Nombre	Símbolo	Valor
Amplitud de excitación	A_P	$1,3 \times P_{at}$
Frecuencia de excitación	f	20 kHz
Radio inicial (y de equilibrio)	R_{eq}	$5 \mu\text{m}$
Velocidad inicial del radio	$\dot{R}(0)$	0
Tiempo de simulación	t_{end}	$\sim 100 \mu\text{s}$

Tabla 3: Parámetros de la excitación externa de ultrasonidos y condiciones iniciales para la simulación

3.3.1. Solución estable y el modelo Keller-Miksis

Con los parámetros ya definidos, podemos realizar la integración numérica de la ecuación de R-P. La solución resultante se muestra en la Fig. 9

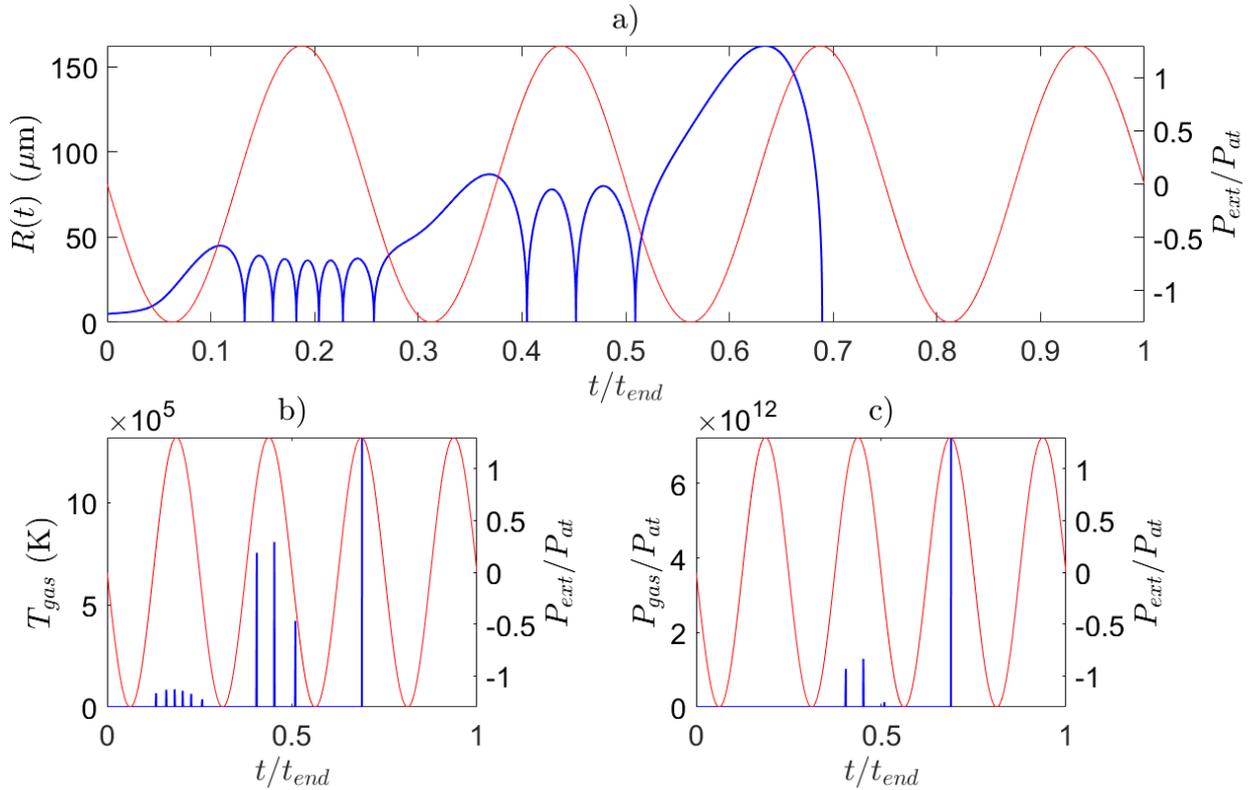


Figura 9: Solución (en azul) de la ecuación R-P para las condiciones de sonoluminiscencia con una excitación externa en forma sinusoidal. a) Radio de la burbuja $R(t)$; b) Temperatura del gas interior T_{gas} ; c) Presión del gas interior P_{gas} . $t_{end} = 200 \mu\text{s}$. Comportamiento no físico de efectos rebote hasta el colapso de la burbuja.

A priori, uno puede pensar que la solución obtenida es correcta, pues la burbuja alcanza presiones y temperaturas varios órdenes de magnitud por encima de los valores iniciales, valores que podrían desencadenar la sonoluminiscencia. Sin embargo, existen

dos problemas respecto a esta solución que muestran que no sigue un comportamiento físico como el observado en los experimentos. Para empezar, las temperaturas y presiones alcanzadas son exageradamente grandes, incluso para los casos de sonoluminiscencia [17, 28]. Por otro lado, tenemos que el radio de la burbuja crece por efecto rebote cada vez más, al no disiparse la suficiente energía. Esto causa que cuando el radio de la burbuja es suficientemente grande y este decrece bruscamente, la presión del gas no es suficiente como para aguantar la compresión y la burbuja colapsa (se observa que la simulación ha terminado antes de $t = t_{end}$, al llegar el radio a ser prácticamente nulo).

Está claro que el modelo que estábamos usando hasta ahora, la ecuación R-P (2.14), falla en las condiciones de compresión extrema que aparecen en este caso.

Por tanto, es necesario mejorar este modelo con efectos que no hayamos tenido en cuenta. Una pista de qué tipo de efectos tenemos que añadir es el hecho de que la burbuja gane en tamaño con cada ciclo de rebotes, es decir, gana energía. Se puede esperar, entonces, que existan algunos efectos en los que esa energía que absorbe de

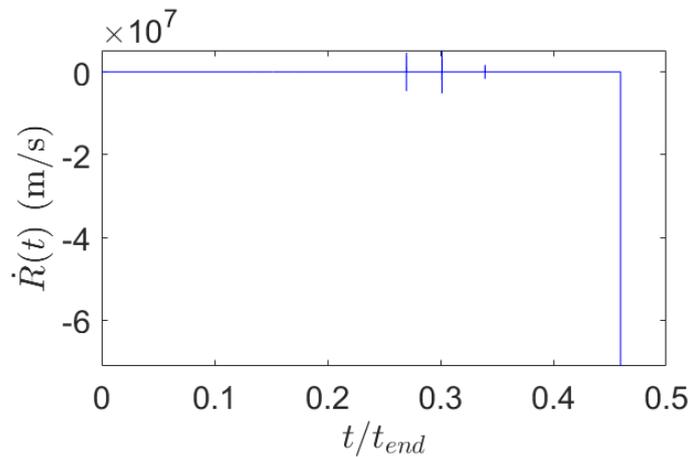


Figura 10: Velocidad del radio de la burbuja \dot{R}

la excitación la burbuja se disipe y esta no aumente en volumen como lo hace. Deben ser, por tanto, efectos que disipen esta energía “extra” de la burbuja.

Para intentar conseguir encontrar qué efectos debemos añadir, podemos revisar las aproximaciones que se hacen hasta llegar a la ecuación de R-P (2.14). Una de las primeras aproximaciones que se hacen es considerar el agua como un líquido no compresible. Esta consideración es totalmente válida para casos en las que las condiciones no sean extremas, pero deja de cumplirse cuando la velocidad y/o la presión del líquido son suficientemente grandes. Para comprobar si esta aproximación es o no válida podemos ver cuál es la velocidad de cambio en el radio de la burbuja \dot{R} , que como vimos en (2.1.1) está relacionada con la velocidad $u(r)$ de cualquier otro punto r del líquido por:

$$r^2 u = R^2 \dot{R} \quad (2.3)$$

En la figura 10, podemos ver que aparecen picos en los que la velocidad del radio alcanza un valor máximo de 7×10^7 m/s o un 23 % de la velocidad de la luz en el vacío. Como r y R tienen valores del mismo orden, la velocidad $u(r)$ de los puntos del líquido cercanos a la burbuja sería también del orden de 10^7 m/s. Esto es absurdo. Por lo tanto, es necesario introducir una corrección que tenga en cuenta la compresibilidad no nula del líquido.

Por otro lado, existe otro efecto que no hemos tenido en cuenta y que es consecuencia de considerar la compresibilidad de líquido. Cuando la burbuja se comprime y se expande a suficiente velocidad (como suele ocurrir), se emiten ondas en forma de radiación acústica. Es un efecto parecido a la emisión clásica de ondas electromagnéticas por parte de partículas cargadas aceleradas⁷. Esta emisión de ondas acústicas correspondería a una corrección de radiación relacionada con la corrección para la compresibilidad no nula del líquido.

Ambos efectos se incluyen en el llamado **modelo de Keller-Miksis** [1, 18, 20, 28] y resultan en una ecuación de R-P modificada con la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right) R \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \left(1 - \frac{\dot{R}}{3c}\right) = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c}\right) \frac{p_l(t)}{\rho_L} + \frac{R}{c\rho_L} \frac{dp_l}{dt} \\ p_l(t) = \left(P_{at} + \frac{2\sigma}{R_{eq}}\right) \left(\frac{R_{eq}}{R}\right)^{3\gamma} - P_{at} - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu}{R} \dot{R} - A_P \sin(\omega t) \\ R(0) = R_{eq} \\ \dot{R}(0) = 0 \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Los nuevos parámetros introducidos son: c la velocidad del sonido en el líquido y $p_l(t)$ la presión total en la frontera de la burbuja. Está claro que cuando $c \rightarrow \infty$ o de forma equivalente, cuando la compresibilidad del líquido se hace nula⁸, la ecuación de

⁷<https://www.compadre.org/osp/EJSS/4126/154.htm>. Último acceso: Junio de 2021

⁸En realidad, es suficiente con que $\dot{R}/c \rightarrow 0$

R-P modificada tiende a la ecuación de R-P que habíamos usado hasta ahora. Un simple vistazo a la ecuación nos muestra que esta tiene en cuenta la velocidad del líquido mediante los términos en los que se incluye el ratio \dot{R}/c ⁹, que mide como de rápido se mueve la frontera de la burbuja con respecto a la velocidad del sonido en el líquido. Por otro lado, tenemos un sumando extra que aparece como $dp_l(t)/dt$. Esta es la corrección que incluye la pérdida de energía debido a la radiación acústica emitida por la burbuja.

En lo que resta, vamos a usar el modelo de KM con la ecuación modificada de R-P (3.7). Solo nos quedaría definir el parámetro c . Al ser c la velocidad del sonido en el líquido tomaremos su valor para el agua a la temperatura considerada $T_0 = 300$ K, $c = 1500$ m/s.

Antes de mostrar la solución para $R(t)$ obtenida con este modelo, vamos a ver si los valores de \dot{R} son ahora más razonables:

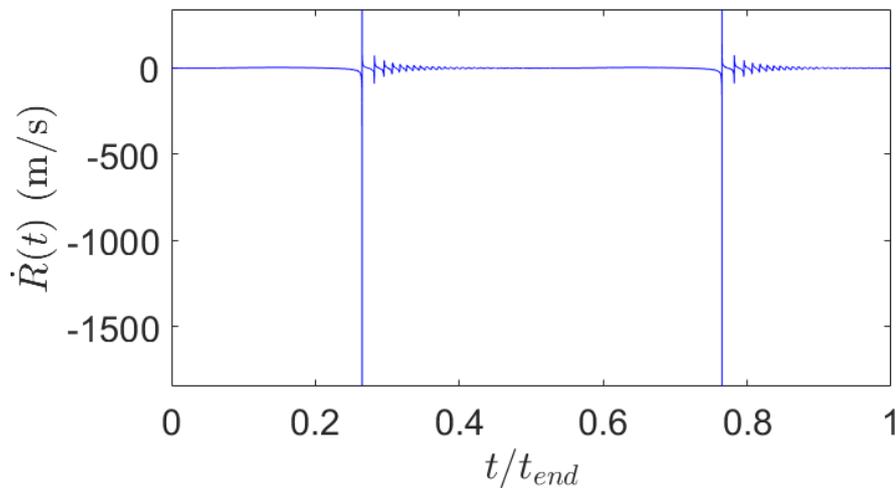


Figura 11: Velocidad del radio de la burbuja \dot{R} con el modelo KM

Los valores máximos alcanzados con el modelo de KM son superiores a la velocidad del sonido c en el líquido aunque en el mismo orden, $\dot{R}_{max} \sim 1800$ m/s. Está claro que estos valores son mucho más razonables, y que por lo tanto podemos considerar el nuevo modelo como un buen candidato para la descripción de situaciones de sonoluminiscencia. Visto esto, podemos ver la solución para el radio $R(t)$ obtenida con este nuevo modelo en la figura 12.

Un primer vistazo ya revela ciertas características muy interesantes. Para empezar,

⁹Este ratio no es más que el número Mach

vemos que el radio efectúa ciclos que se repiten con la misma frecuencia que la señal de excitación. En cada uno de esos ciclos, la burbuja se comprime varias veces durante un brevísimo instante de tiempo a radios muy inferiores al inicial, haciendo que el gas en su interior alcance presiones del orden los miles de grados ($T \sim 6000$ K) y presiones miles de veces la atmosférica. Estas presiones son bastante inferiores a las obtenidas en el modelo anterior pero se sitúan en un rango razonable para considerar la aparición de sonoluminiscencia. Además, ahora el radio de la burbuja no comienza a crecer con cada uno de estos ciclos y está acotado por debajo de un cierto valor máximo. Analicemos esta solución paso a paso.

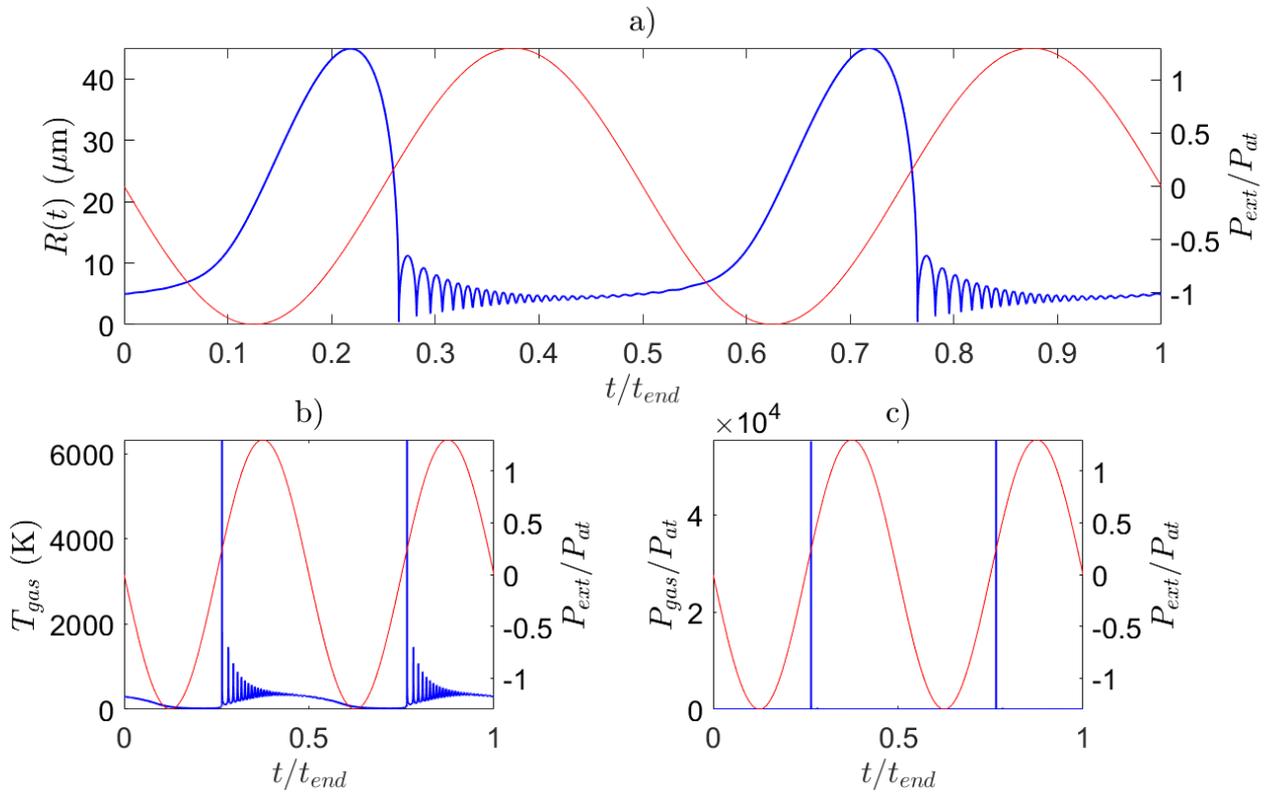


Figura 12: Solución (en azul) de la ecuación R-P modificada del modelo KM en condiciones de sonoluminiscencia con una excitación externa en forma sinusoidal. a) Radio de la burbuja $R(t)$; b) Temperatura del gas interior T_{gas} ; c) Presión del gas interior P_{gas} . $t_{end} = 100 \mu s$. Comportamiento no físico de efectos rebote hasta el colapso de la burbuja.

Inicialmente, las presiones en el interior y exterior de la burbuja crean un balance en el que la burbuja se encuentra en equilibrio. La presión de excitación comienza a decrecer, lo que permite que la burbuja se expanda, alcanzando radios de unos $25 \mu m$, unas 5 veces su radio inicial.

Justo antes de llegar a este máximo, la presión externa ya ha tocado su mínimo y comenzado a crecer, por lo que la respuesta de la burbuja lleva cierto retraso respecto a los cambios de presión externa. De esta forma, una vez la burbuja alcanza su máximo volumen, debe comprimirse rápidamente para responder al aumento de presión de excitación que ya había comenzado.

Gracias a la rápida compresión, el radio de la burbuja puede llegar a tomar valores mucho más pequeños que los que había tenido hasta ese instante, menores a 1/10 del valor inicial. Para llegar a esta situación, se ha tenido que vencer la asimetría que había entre la compresión y expansión creada por el gas encerrado, que hacía que disminuir el radio de la burbuja requiriese de diferencias en la presión mayores que para un aumento del radio en la misma cantidad. Recordamos que la presión del gas es $P_{gas} \propto R(t)^{-3\gamma}$ (con γ el coeficiente adiabático).

Al comprimirse tanto, la presión y la temperatura del gas encerrado se disparan, llegando a los valores extremos que se aprecian. Por otro lado, este aumento de presión y temperatura provoca una rápida expansión, por efecto rebote, que permita a la burbuja volver al equilibrio. Sin embargo, la presión externa aún está en aumento, lo cual, junto con la pérdida de energía por la viscosidad y la radiación acústica frenan tal expansión, devolviendo a la burbuja a un proceso de compresión.

Estos ciclos de compresión extrema y expansión por efecto rebote se repiten varias veces hasta que por pérdidas de energía y la disminución de la presión externa se acaban disipando, volviendo la burbuja a su radio de equilibrio. Finalmente, el ciclo se repite al entrar la presión de excitación en una nueva oscilación.

Ahora bien, ¿por qué llegan la temperatura y la presión a valores tan extremos con compresiones a 1/10 del valor del radio de equilibrio? La explicación es sencilla. La presión del gas depende del radio como $P_{gas} \propto R(t)^{-3\gamma}$ (esto se obtuvo en la sección 2.1.2 considerando procesos adiabáticos). Esta dependencia crece hasta divergir a infinito según disminuye $R(t)$. Como $\gamma = 1,4$, una compresión desde un valor R_0 a otro de $R_0/10$ resulta en una presión 50000 veces superior a la inicial. De la misma forma, se puede ver que la temperatura es $T \propto R(t)^{-3(\gamma-1)}$, produciéndose el mismo efecto aunque en menor medida. En el mismo caso, la temperatura se multiplica por 20, pasando de 300 K a ~ 6000 K.

Este es el rango de temperaturas que se ha podido observar en los experimentos de sonoluminiscencia [17, 28]. Conocer las temperaturas alcanzadas en las burbujas arroja luz sobre los posibles mecanismo que ocurren dentro de la burbuja y que producen la emisión de fotones.

Por otro lado, se observa que el modelo de KM se ajusta a los resultados experimentales en una muy buena medida aunque no totalmente (Ver Fig. 13). Experimentalmente, el radio de la burbuja se estabiliza en un valor mucho antes de lo predicho por el modelo de Keller-Miksis, lo cuál indica que siguen siendo necesarias más correcciones por disipación de energía.

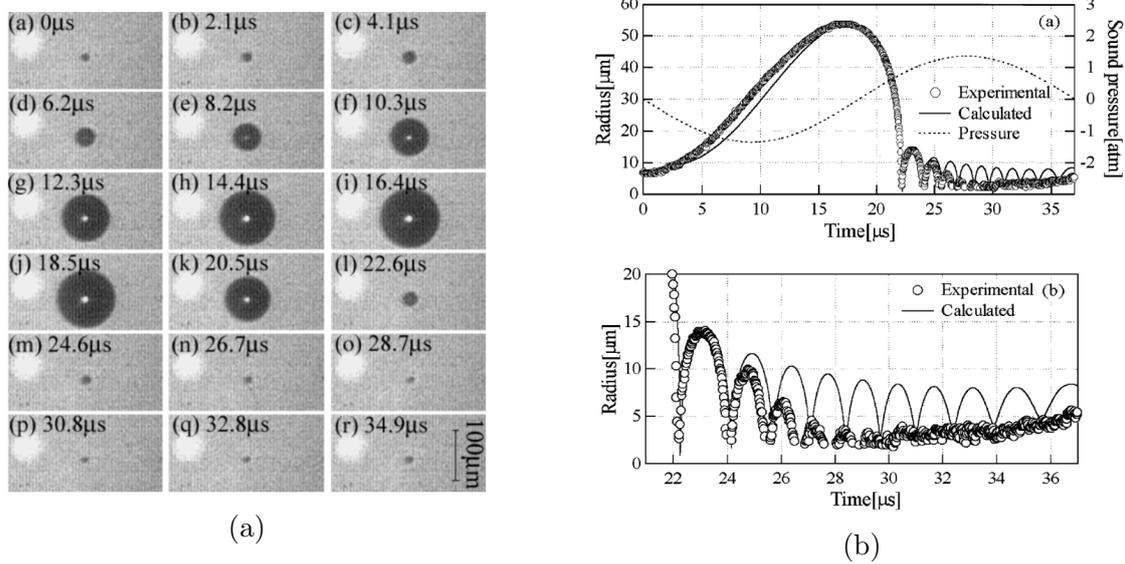


Figura 13: a) Fotografías del ciclo acústico de la burbuja que permiten obtener una curva experimental del radio de la burbuja $R(t)$
 b) Comparación entre los valores experimentales del radio obtenidos y los valores dados por el modelo KM [6].

La teoría con más fuerza, propuesta por Michael P. Brenner, Sascha Hilgenfeldt y Detlef Lohse, indica que a tales presiones y temperaturas, el gas en el interior se ioniza. En caso de ser una mezcla de gases, como lo es el aire, dentro de la burbuja se producen reacciones químicas que eliminan el oxígeno y el nitrógeno dejando solo a los gases nobles de la composición. Estos gases nobles, como el Argón, se ionizan parcialmente, creándose electrones libres, que al ser reabsorbidos emiten luz. Por otro lado, también se propone que durante el tiempo de ionización, los electrones libres puedan interactuar con los iones, emitiendo un espectro continuo asociado a la radiación de Bremsstrahlung térmica [17].

Hasta ahora, tanto los parámetros que describen el sistema líquido-burbuja-gas como la forma de la presión de excitación se han elegido de forma concreta y no arbitraria. Como ya hemos dicho, el objetivo era mostrar una simulación que pueda representar todas las características de un proceso de sonoluminiscencia obtenido en un laboratorio sin dispositivos complejos. Sin embargo, obtener una respuesta similar a la analizada no implica limitarse a estas condiciones concretas, si no que habrá un amplio rango de valores en los parámetros de formas funcionales de la presión de excitación que nos lleven a resultados similares. El objetivo de la siguiente sección será determinar tales rangos mediante el análisis de la dependencia de la solución numérica $R(t)$ respecto a tales parámetros.

3.3.2. Dependencia de la solución numérica con la amplitud de excitación y la viscosidad

Ya hemos visto un caso concreto en el que podíamos simular condiciones bastante buenas para la aparición de sonoluminiscencia. Limitarse al análisis de unos valores concretos de los parámetros que describen la simulación (parámetros del líquido, gas y presión de excitación) es limitar las posibilidades que se tienen de alcanzar el efecto en un laboratorio por lo que es conveniente analizar, a partir del caso descrito en la sección anterior (3.3.1), como cambia la respuesta de la burbuja con cambios en tales parámetros. Esto nos permitirá definir unos rangos aproximados de los parámetros en los que las características de las respuestas sean similares a la vista en la Fig. 12. Para realizar este tipo de análisis, se integrará la ecuación modificada de R-P del modelo KM variando los parámetros a estudiar en pasos discretos pequeños, de forma que se barra todo el rango de estudio. De cada una de las soluciones obtenidas, podremos obtener información relevante, como los radios máximo y mínimo alcanzados por la burbuja.

Podemos hacer un estudio conjunto de los tamaños máximo y mínimo que alcanza la burbuja en función de la amplitud de excitación A_P y la viscosidad al definir estos parámetros dos mecanismos que compiten entre sí.

Como vemos en la figura 14, tanto el radio máximo como el radio mínimo no dependen en gran medida de la viscosidad. Esto no se debe a que la viscosidad no sea relevante,

si no a que hay mecanismos de disipación de energía que dominan sobre ella en estas condiciones. Esto es, que se disipa más energía en la emisión de ondas acústicas y por efecto de la compresibilidad no nula de líquido que por viscosidad. Sin embargo, no hay que confundirse, pues en situaciones como las de oscilaciones lineales del radio con pequeña amplitud, es la viscosidad el efecto dominante al ser pequeña la velocidad que alcanza el radio de la burbuja. Se podría, entonces, considerar el límite $\dot{R}/c \rightarrow 0$, bajo el cual, la ecuación del modelo KM se transforma en la ecuación R-P sin modificar, que no contiene efectos de compresibilidad y que sigue el comportamiento visto en la sección 2.1.

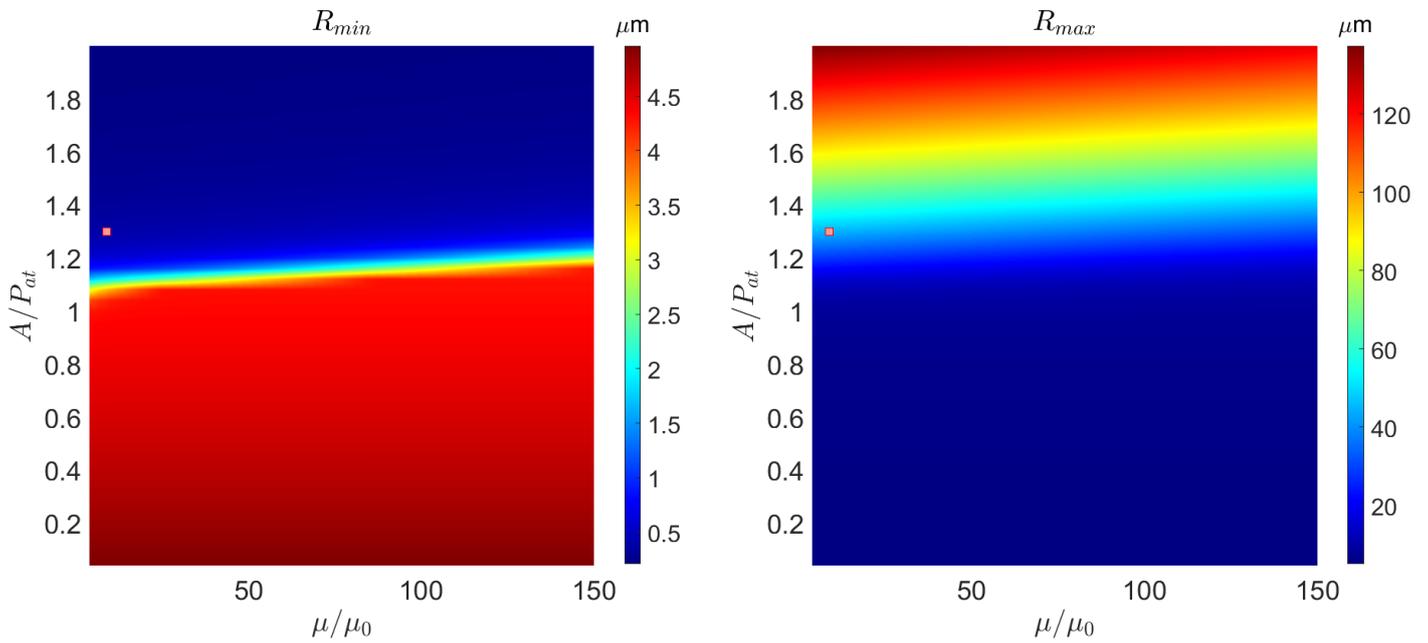


Figura 14: Dependencia de los radios máximo y mínimo en función de la viscosidad μ y la amplitud de excitación A_P . $\mu_0 = 5 \times 10^{-5}$ Pa·s es un valor de referencia. El punto rojo indica los valores de viscosidad del agua a la presión de excitación de $1,3 \times P_{at}$

Esta baja dependencia con la viscosidad, nos permite elegir un valor para ella y centrarnos en el comportamiento con la amplitud A_P . Para la viscosidad del agua se obtiene lo representado en la Fig 15.

De esta forma, es mucho más fácil ver la dependencia. Como es de esperar, según aumenta la amplitud de excitación A_P , disminuye el radio mínimo y aumenta el radio máximo. Sin embargo, hay un valor crítico a partir de cuál el radio mínimo cae de forma abrupta. Este valor crítico se sitúa al rededor de los $A_{crit} = 1,16 \times P_{at}$. Para amplitudes ligeramente superiores a este valor, el radio mínimo comienza a ser ordenes de magnitud

más bajo que el inicial considerada, de $5 \mu\text{m}$. Este valor es, por lo tanto, una buena referencia para las presiones que se necesitan en la sonoluminiscencia.

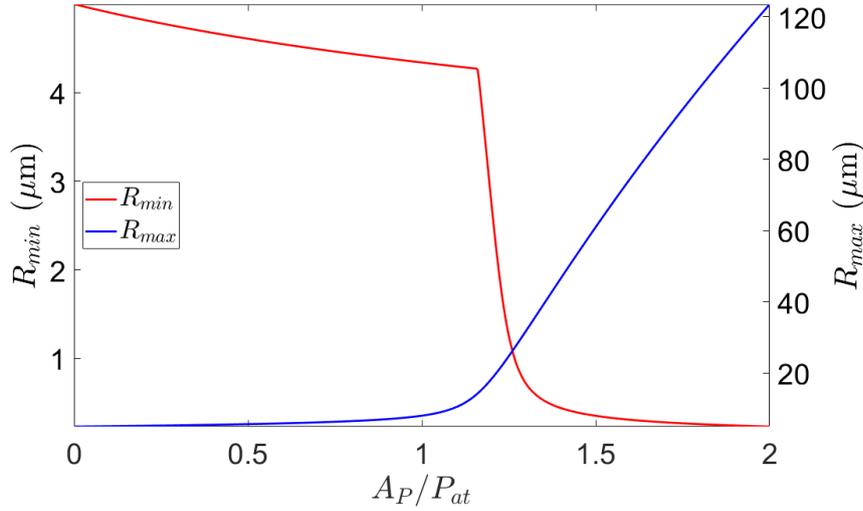


Figura 15: Dependencia de los radios máximo y mínimo en función de la amplitud de excitación A_P

Para completar el estudio, se podría hacer este mismo tipo de análisis para la frecuencia de excitación f , el coeficiente de tensión superficial σ , el radio inicial y de equilibrio R_{eq} , la velocidad inicial $\dot{R}(0)$ o incluso el gas en el interior de la burbuja, cambiando el coeficiente adiabático usado. Sin embargo, nosotros nos hemos limitado al estudio de los parámetros μ y A_P por cuestiones de abarcabilidad.

4. Sonoluminiscencia de una burbuja en el laboratorio

La reproducción del fenómeno de sonoluminiscencia de una burbuja, es un proceso que se puede realizar de muchas formas diferentes aunque la mayoría presenta una estructura básica común. En pocas palabras, la idea es atrapar una burbuja (que contiene gas en su interior) en una posición fija mediante ultrasonidos a cierta frecuencia e intensidad. Tras esto, se aumenta la potencia de los ultrasonidos hasta que la burbuja pueda llegar a comprimirse lo suficiente como para llegar a un radio crítico, a partir de cual se producen temperaturas y presiones características de la sonoluminiscencia.

El análisis de la física que nos permite entender este proceso experimental en un laboratorio se ha realizado en las secciones anteriores. Por lo tanto, ya tenemos una idea bastante sólida del comportamiento de una burbuja en el interior de un líquido y podemos comenzar a ver uno de los muchos procesos para la reproducción de sonoluminiscencia.

Es necesario decir que en nuestro caso el fenómeno no se pudo reproducir debido a una combinación de falta de instrumental concreto y la necesidad de improvisar con el material del que se disponía. Pese a ello, es interesante analizar qué se consiguió y cómo, además de compararlo con lo que se debería haber obtenido idealmente.

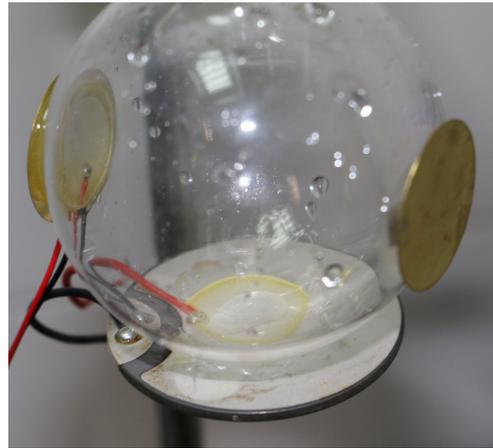
Comenzamos el procedimiento eligiendo un **recipiente** en el que introducir el líquido y sobre el que acoplar transductores generadores de ultrasonido. En nuestro caso, se usó un matraz de fondo esférico de 100 ml. Por otro lado, tenemos que elegir el líquido que actúe como medio. El gas en el interior de la burbuja será una combinación de aire atmosférico (introducido al crear la burbuja) y una cierta porción de los gases disueltos en el líquido, y por tanto, la elección de un líquido u otro influye directamente en el interior de la burbuja. Respecto a estos gases disueltos en líquido se hablará posteriormente. En general, el líquido más usado es el **agua** con el que nosotros hemos trabajado tanto en las simulaciones como en el laboratorio. La elección de agua se debe a que es el líquido más fácil de obtener y a que la obtención de sonoluminiscencia con ella no se complica con respecto a otros líquidos.

Para generar los ultrasonidos se han usado unos **transductores piezoeléctricos** acoplados al matraz con resina epoxi y que se conectaron a un **generador de funciones**. La excitación eléctrica dada por el generador de funciones se traduce de forma directa en un movimiento mecánico debido a la piezoelectricidad del transductor. Si está correctamente acoplado al matraz o el recipiente que se use, estos movimientos se traducen en vibraciones, es decir, ondas de presión dentro del líquido y cuya forma funcional¹⁰ será la correspondiente a la dada por el generador. En principio, se podría conectar el generador de funciones directamente al transductor, aunque como veremos hay algunas sutilezas.

¹⁰Conocer tal forma se podría saber resolviendo la ecuación de ondas con las condiciones de contorno.



(a) Matraz con un estrechamiento en el cuello por el que se puede sostener



(b) Transductores acoplados al matraz. El mayor actúa como emisor, otro como receptor y el tercero queda inutilizado

Figura 16

Ya tenemos los elementos principales. Para sostener el matraz o el recipiente elegido de alguna forma que no disipe las señales de los transductores. Para ello se usó un matraz con un reborde que se apoyaba sobre una placa con una ranura (Fig. 17). Con el fin de controlar la señal emitida por los transductores y la respuesta de líquido y el recipiente se usó un **osciloscopio** multicanal. El primer canal se conectó al transductor que genera los ultrasonidos para poder ver la señal de entrada proveniente del generador de funciones. El segundo canal se utilizó para ver la salida de un segundo transductor acoplado al matraz de forma que este actuaba como un “micrófono” que escucha lo que ocurre en el líquido y el recipiente.



Figura 17: Soporte de metacrilato usado para colgar el matraz

Con todos estos elementos tenemos el siguiente montaje:

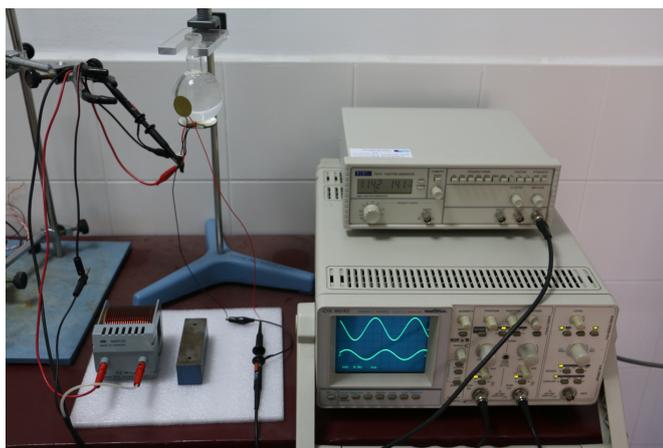
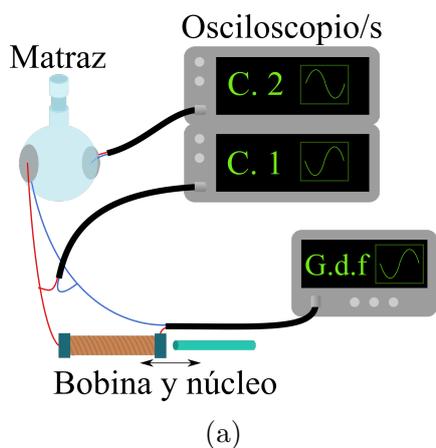


Figura 18: a) Esquema del montaje experimental. El matraz está colgado en un soporte que permita su vibración. Los transductores de ultrasonidos acoplados al matraz están conectados a la bobina y el generador de funciones (G.d.f.)
 b) Montaje experimental realizado siguiendo el esquema de la izquierda

Con el montaje ya construido, se llena el matraz de agua hasta justo antes de llegar al cuello. Esto no es demasiado importante pero nos ayuda a usar el mismo nivel de agua todas las veces que cambiemos el agua. Colgamos el matraz en el soporte con la ranura o estructura equivalente y activamos los osciloscopios y el generador de señales. En el generador de señales buscamos el modo sinusoidal y elegimos una escala de frecuencias de las decenas de kHz. Elegimos, por ejemplo 30 kHz.

Una vez se comienza a aumentar la amplitud del generador de funciones, deberían aparecer en el osciloscopio las dos señales sinusoidales de la misma frecuencia la del generador y la de respuesta con una amplitud bastante menor. La amplitud elegida en el generador depende del transductor usado pero normalmente está sobre los 10-20 V.

Una vez activada la señal de excitación y visto que la respuesta es correcta, tenemos que crear al menos una burbuja dentro del líquido. Para ello, usamos una jeringuilla o una pipeta con apertura fina. Con ellas extraemos un poco de agua y la expulsamos sobre la superficie con cierta fuerza. De esta forma, aparece una cantidad alta de burbujas de diferentes tamaños dentro del líquido a lo largo de bastante volumen. Se podría pensar que tener una gran cantidad de burbujas es interesante ya que aumenta la casuística que tenemos en el tamaño de las burbujas, que como vimos en la sección 2.2 influye en el

movimiento de la burbuja y en cómo responde esta a las ondas de presión. Sin embargo, tener demasiadas burbujas es realmente un problema debido a la existencia de una fuerza atractiva entre burbujas, la **fuerza secundaria de Bjerkness**¹¹. Al tener demasiadas burbujas, es muy probable que existan dos o más burbujas lo suficientemente cerca como para que esta fuerza actúe, acercándolas hasta que se fusionen y colapsen debido al tamaño o comiencen a ascender hasta la superficie, imposibilitando su uso. Lo ideal por tanto sería un sistema por el que podamos crear un única burbuja en el interior de líquido. Gran parte de las burbujas comienzan a ascender hasta la superficie tras aparecer debido al principio de Arquímedes, pero si la frecuencia es la correcta, algunas de ellas quedarán atrapadas oscilando alrededor de un punto (Ver Sec. 2.2). Estas burbujas tienen un tamaño bastante pequeño por lo que es necesario mirar bastante bien para identificarlas. Si ninguna o muy pocas burbujas quedan atrapadas, lo que tenemos que hacer es buscar las frecuencias de resonancia del matraz y el líquido, es decir, tenemos que hacer un barrido de frecuencias donde la amplitud de respuesta aumente considerablemente e ir probando en cada una de estas frecuencias de resonancia hasta elegir la óptima. Si se ajusta correctamente la frecuencia, las burbujas quedan atrapadas tras crearse.

Podría pasar que todas las burbujas colapsen inmediatamente. Esto ocurre si la amplitud de la señal del generador es demasiado alta, por lo que tenemos que bajarla. Es también posible que si la amplitud es muy alta y el agua contiene suficiente gas disuelto, el líquido comience a cavitarse creándose burbujas y entrando en un régimen de presión caótico que imposibilita la estabilidad de las burbujas. Para solucionar esto, lo recomendable es la **desgasificación** del agua, mediante el uso de un baño de ultrasonidos o un cámara de vacío. Este paso, es bastante recomendable.

Una vez tenemos las burbujas fijas en una posición, podemos comenzar a aumentar la amplitud de excitación hasta el punto donde las burbujas colapsen. La idea es encontrar el voltaje en el generador de señales más alto sin que esto ocurra. Si se consigue encontrar y ajustar este voltaje correctamente, todo debería estar listo. Las burbujas deberían estar fijas en una posición aunque aparentemente no brillan. Esto es porque el brillo es muy débil y para verlo necesitamos una **oscuridad** total en la sala en la que se haga el experimento. Por ello, debemos cerrar todo orificio por el que pueda entrar luz y tapar pantallas y LEDs

¹¹Es una fuerza complementaria a la fuerza primera de Bjerkness vista en la sección 2.2

del instrumental.

Si el brillo es suficientemente alto, tras dejar que los ojos se acostumbren a la oscuridad uno podría ver un punto brillante en el matraz, de forma similar a una estrella en el cielo nocturno. Puede ser que el brillo no sea suficiente y por lo tanto necesitemos algo mejor que nuestros ojos. Usamos entonces una cámara fotográfica con un tiempo de exposición largo y apertura grande.

En nuestro caso, no pudimos comprobar de forma satisfactoria que ninguna burbuja brillase pese al uso de una cámara fotográfica. Sin embargo, sí que podíamos dejarlas fijas sin mayor problema. Lo más probable que podía estar fallando era la potencia que generaban los transductores usados, que quizás fuese baja. Como elegir unos mejores no era una opción solo podíamos cambiar la amplitud de excitación en el generador de funciones. Pese a usar el valor máximo y probar varias frecuencias, el resultado era negativo. Por ello, recurrimos a un método diferente para aumentar la amplitud de excitación.

El transductor por construcción tiene una cierta capacitancia la cual, en conjunto con una bobina de hilo de cobre nos permite crear un circuito LC como el de la Fig. 19a.

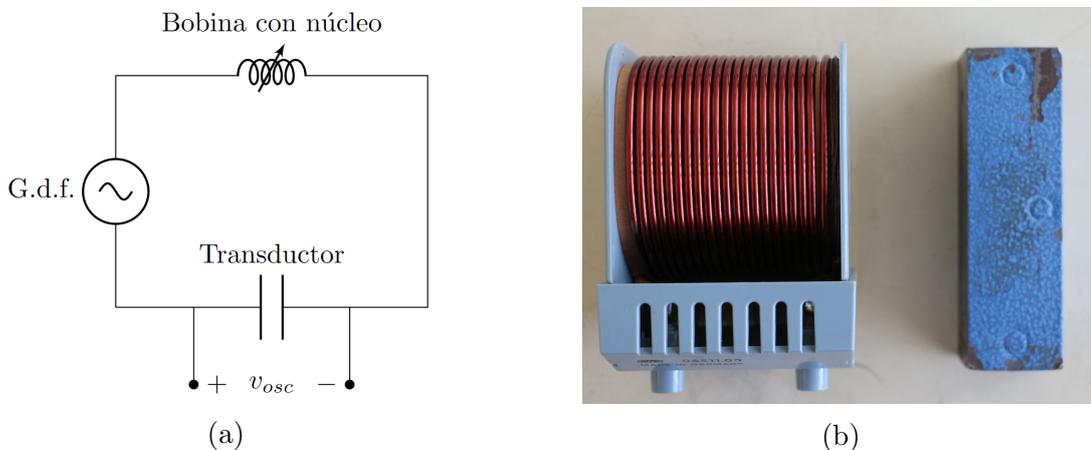


Figura 19: a) Esquemático del circuito LC que forman la bobina y el transductor. v_{osc} es la entrada de voltaje al transductor
b) Bobina y núcleo usados

Este tipo de circuitos presenta una respuesta dependiente de la frecuencia de la señal introducida. Esta respuesta sigue un comportamiento resonante para frecuencias múltiplo de:

$$f_{res} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (4.1)$$

donde L es la inductancia de la bobina y C la capacitancia del transductor, que normal-

mente está en el orden los nanofaradios. Si conseguimos construir el circuito de tal forma que esta frecuencia sea igual a una de las frecuencias de resonancia acústicas del conjunto matraz-líquido, la amplitud de las ondas será máxima, al ser máxima la amplitud de las oscilaciones del transductor y al estar este en resonancia con el matraz.

Como la capacitancia del transductor no se puede modificar, sólo podemos cambiar la inductancia de la bobina para poder seleccionar la frecuencia de resonancia del circuito (Ec. 4.1). Para ello, se introdujo un núcleo de material ferromagnético en el interior de la bobina. Con todo activado, se procedió a buscar, introduciendo más o menos el núcleo ferromagnético en la bobina, la respuesta en el transductor “micrófono” de mayor amplitud posible, jugando también con la amplitud de excitación en el generador. También se probaron otros modos funcionales como funciones escalones o dientes de sierra. Debido a las impedancias dependientes de las frecuencias de la bobina y el transductor estas señales se suavizan hasta acercarse a una sinusoidal y es posible que la amplitud obtenida sea mayor que la obtenida directamente con la señal sinusoidal.

Pese a esto, los resultados fueron negativos y no pudimos observar sonoluminiscencia. Aunque las causas concretas de nuestro fallo a la hora de reproducir el fenómeno no están claras, es bastante probable que se deban a una combinación de un mal acople eléctrico entre el generador, el transductor y el circuito LC que causaba una amplitud baja y un señal ligeramente distorsionada y la imposibilidad de elegir la frecuencia con ajuste lo suficientemente fino. La distorsión de la señal se observaba en las burbujas, que realizaban fuertes oscilaciones alrededor de un punto de equilibrio de forma aleatoria.

5. Resumen y conclusiones

En este trabajo se ha estudiado la física tras el fenómeno de la sonoluminiscencia, que consiste en la emisión de luz por parte de burbujas en un líquido cuando este es excitado por ultrasonidos en unas determinadas condiciones. Esta emisión se produce cuando las burbujas colapsan. Durante el colapso, en el interior de la burbuja se alcanzan presiones y temperaturas muy elevadas.

- En la introducción, se describe brevemente el fenómeno. Se trata su descubrimiento,

algunas de las teorías que intentan explicarlo y varias de sus aplicaciones.

- En la sección 2, se analizan las condiciones físicas necesarias para que se produzca el fenómeno de sonoluminiscencia de una sola burbuja, que tienen que ver con dos aspectos fundamentales: el tamaño de la burbuja y su posición cuando se somete a cambios de presión (ondas de ultrasonido). Estos dos aspectos se tratan de forma independiente:
 - En primer lugar, se desarrollan paso a paso las ecuaciones que gobiernan la dinámica del radio de la burbuja (problema del tamaño) a partir de consideraciones de conservación de la masa y de la energía, haciendo algunas aproximaciones. De esta forma se llega a la ecuación de Rayleigh-Plesset. Imponiendo una serie de condiciones iniciales y de contorno, la ecuación queda totalmente determinada en función de las propiedades del medio líquido y gaseoso de la burbuja. Considerando oscilaciones pequeñas en el tamaño de la burbuja, se obtiene analíticamente la frecuencia natural de oscilación del radio de la burbuja. También se obtiene una correlación temporal entre el radio (tamaño) de la burbuja $R(t)$ y la excitación externa (ultrasonidos) $P_{ext}(t)$.
 - En segundo lugar, se desarrollan las ecuaciones que gobiernan la dinámica de la posición de la burbuja, y se obtienen las condiciones para las cuales la posición de la burbuja es estable en el caso particular de una excitación externa de baja amplitud.
- En sección 3, se analizan varias soluciones numéricas de la ecuación de Rayleigh-Plesset para el radio de la burbuja $R(t)$ obtenidas mediante simulaciones en MATLAB considerando el caso particular del agua como medio líquido. Se estudia la influencia de la forma de la presión de excitación externa (función escalón, diente de sierra y sinusoidal) en el radio de la burbuja, en la presión del gas en su interior y en su temperatura.

También se comprueba numéricamente el caso particular desarrollado en la sección 2 para amplitudes de excitación pequeñas, y se obtiene la frecuencia natural de oscilación del radio (tamaño) de la burbuja en estas condiciones mediante transformada rápida de Fourier (FFT) sobre la solución numérica.

A continuación, se simula un caso en condiciones de sonoluminiscencia, introduciendo las condiciones iniciales y de excitación externa típicas para este fenómeno. Se presenta un nuevo modelo, el modelo de Keller-Miksis, más realista, que incluye términos adicionales de disipación de energía (compresibilidad del líquido y radiación acústica) que no habían sido considerados en el modelo de Rayleigh-Plesset y que dan lugar a la ecuación de R-P modificada. Se obtiene numéricamente la dinámica del tamaño de la burbuja $R(t)$ con este nuevo modelo. Obtenemos una estimación para las temperaturas y presiones en el interior de la burbuja, cuyos valores dan indicios sobre los posibles mecanismos tras la emisión de luz. Para finalizar el apartado, se analiza el rango en el que ocurre el fenómeno (de validez del fenómeno) (estabilidad de las soluciones $R(t)$) en función de la viscosidad del líquido y de la amplitud de la excitación.

- La sección 4 describe el diseño experimental utilizado para intentar reproducir el fenómeno de la sonoluminiscencia en el laboratorio.

De todo este trabajo realizado, hemos obtenido una serie de conclusiones:

- La ecuación de Rayleigh-Plesset presenta un comportamiento similar a la ecuación de movimiento de un oscilador forzado amortiguado en el caso de amplitudes de excitación pequeñas. La burbuja presenta una frecuencia de oscilación de resonancia que depende del tamaño. Gracias a esta dependencia con el tamaño, la correlación temporal entre el radio de la burbuja y la excitación depende del radio de equilibrio de la burbuja y la frecuencia de la excitación. El radio y la excitación están en fase cuando la frecuencia de excitación es mayor que la resonante y en contrafase en el caso contrario (Ver Tabla 1). También se puede definir el radio resonante de la burbuja.
- Como consecuencia de la existencia de las fuerzas de Bjerkness, bajo la presencia de ondas estacionarias de ultrasonidos existen puntos estables en el líquido donde las burbujas permanecen fijas. Debido a la dependencia de estas fuerzas con la correlación entre la presión de excitación y el radio de la burbuja, que un punto sea estable o no depende del tamaño de la burbuja y cómo este cambie en el tiempo. Para las burbujas menores que el radio resonante, los puntos estables son los antinodos de

las ondas estacionarias de excitación. Las burbujas mayores que el radio resonante quedarán ancladas en los nodos (Ver Fig. 3).

- Al obtener y analizar las soluciones numéricas de la ecuación de R-P hemos visto que el comportamiento de oscilador forzado amortiguado domina en un amplio rango de condiciones. A más extremas sean estas condiciones, más dominan las características no lineales de la ecuación de Rayleigh-Plesset. Las soluciones pueden presentar por tanto una gran cantidad de características diversas, con rasgos de estabilidad o de completo caos.

Al obtener la solución de la ecuación de Rayleigh-Plesset para condiciones típicas de Sonoluminiscencia, llegamos que zonas del líquido y la burbuja alcanzan velocidades del orden de la velocidad de la luz en el vacío. Concluimos que por lo tanto esta ecuación no es totalmente válida para la descripción de la sonoluminiscencia y que es necesaria la introducción de términos adicionales de disipación de energía.

Gracias al modelo de Keller-Miksis, obtenemos una solución numérica que se ajusta con bastante precisión a los datos experimentales y que nos permite estimar la temperatura y presión máxima para una burbuja de radio inicial $5 \mu\text{m}$. Los valores obtenidos son bastante elevados: $T \sim 6000 \text{ K}$ y $P \sim 50000 \times P_{at}$. Pese a los buenos resultados de este modelo, concluimos que es necesario un modelo más preciso si se quiere describir con total precisión los datos experimentales.

Tras el análisis de las soluciones obtenidas con el modelo KM en función de la viscosidad del líquido y las amplitud de excitación, observamos que el papel que juega la viscosidad es mínimo y que es la amplitud la que juega el papel relevante. Se estima que es necesaria una presión de excitación mínima de $1,16 \times P_{at}$ para obtener sonoluminiscencia.

- En el laboratorio, hemos visto que conseguir la sonoluminiscencia requiere jugar con bastantes parámetros hasta ajustarlos de forma correcta. Entre ellos están: la frecuencia y amplitud de excitación, el líquido usado y los transductores. Es importante elegir con precisión la frecuencia de excitación y encontrar mecanismos, como la resonancia del circuito LC para maximizar la amplitud de oscilación de los transductores. Es también relevante la acción de la fuerza secundaria de Bjerkness en las burbujas, que nos dificulta el atraparlas de forma estable en los gradientes de presión.

Referencias

- [1] I. Akhatov, R. Mettin, C. D. Ohl, U. Parlitz, and W. Lauterborn. Bjerknes force threshold for stable single bubble sonoluminescence. *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, 55(3):3747–3750, 1997.
- [2] H. Beuthe. Über den Einfluss der Ultraschallwellen auf chemische Prozesse. *Zeitschrift für Physikalische Chemie*, 163A(1):161–171, 1933.
- [3] Christopher E. Brennen. Bubble Growth and Collapse. In *Fundamentals of Multiphase Flow*, pages 73–96. Cambridge University Press, jun 2014.
- [4] Christopher Earls Brennen. *Cavitation and bubble dynamics*. Number October. 2013.
- [5] H. Frenzel and H. Schultes. Luminescenz im ultraschallbeschiedten Wasser. *Zeitschrift für Physikalische Chemie*, 27B(1):421–424, 1934.
- [6] Masaya Kaji, Nicolas Bergeal, Takaaki Asase, and Yoshiaki Watanabe. Observation of sonoluminescing bubble motion at the rebounding phase. *Japanese Journal of Applied Physics, Part 1: Regular Papers and Short Notes and Review Papers*, 41(5 B):3250–3251, 2002.
- [7] Joseph Kestin, Mordechai Sokolov, and William A Wakeham. Viscosity of Liquid Water in the Range of -8 °C to 150 °C. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 7(3):941–948, 1978.
- [8] Nikolai A. Kudryashov and Dmitry I. Sinelshchikov. Analytical solutions for problems of bubble dynamics. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 379(8):798–802, 2015.
- [9] Nikolay A. Kudryashov and Dmitry I. Sinelshchikov. Analytical solutions of the Rayleigh equation for empty and gas-filled bubble. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 47(40), 2014.
- [10] R.T. Lahey Jr, R.P. Taleyarkhan, and R.I. Nigmatulin. Sonofusion—Fact or Fiction? *11th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal-Hydraulics (NURETH-11)*, pages 1–33, 2005.

-
- [11] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Fluid mechanics: Landau and Lifshitz: course of theoretical physics, 1987.
- [12] T. G. Leighton, A. J. Walton, and M. J.W. Pickworth. Primary Bjerknes forces. *European Journal of Physics*, 11(1):47–50, jan 1990.
- [13] Federico Lembo. Sonoluminescenza da bolla singola, 2011. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sonoluminescenza.jpg>, último acceso: Junio 2021.
- [14] N. Marinenco and J.J. Trillat. Action des ultrasons sur les plaques photographiques. *Proc. R. Acad. Sci. Amst.*, 196:858–860, 1933.
- [15] R. Mettin, I. Akhatov, U. Parlitz, C. D. Ohl, and W. Lauterborn. Bjerknes forces between small cavitation bubbles in a strong acoustic field. *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, 56(3):2924–2931, sep 1997.
- [16] Erwin Meyer and Heinrich Kuttruff. Zur phasenbeziehung zwischen sonolumineszenz und kavitations-vorgang bei periodischer anregung. *Zeit angew. Phys*, 11:325–333, 1959.
- [17] Detlef Lohse Michael P. Brenner, Sascha Hilgenfeldt. Single-bubble sonoluminescence. *Reviews of Modern Physics*, 74(April):426–477, 2002.
- [18] H. Nazari-Mahroo, K. Pasandideh, H. A. Navid, and R. Sadighi-Bonabi. Influence of liquid compressibility on the dynamics of single bubble sonoluminescence. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 382(30):1962–1967, 2018.
- [19] D. Obreschkow, M. Bruderer, and M. Farhat. Analytical approximations for the collapse of an empty spherical bubble. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 85(6):8–11, 2012.
- [20] Masashi Ohnawa and Yukihiro Suzuki. Mathematical and numerical analysis of the rayleigh-plesset and the keller equations. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 183:159–180, 2016.
- [21] M. S. Plesset. The Dynamics of Cavitation Bubbles. pages 277–282, 1949.

-
- [22] Lord Rayleigh. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 34(200):94–98, 1917.
- [23] M. Tanaka, G. Girard, R. Davis, A. Peuto, and N. Bignell. Recommended table for the density of water between 0 °c and 40 °c based on recent experimental reports. *Metrologia*, 38(4):301–309, 2001.
- [24] Paul Reid Temple. *Sonoluminescence from the gas of a single bubble*. PhD thesis, University of Vermont, 1970.
- [25] T.G. Leighton. Derivation of the Rayleigh-Plesset Equation in Terms of Volume. *ISVR Technical Report No 308*, (January):26, 2007.
- [26] N. B. Vargaftik, B. N. Volkov, and L. D. Voljak. International Tables of Water Surface Tension. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 12(3):817–820, 1983.
- [27] A. Yosioka, K.; Omura. The light emission from a single bubble driven by ultrasound and the spectra of acoustic oscillations. *Proc. Annu. Meet. Acoust. Soc. Jpn., May 1962*, 1962.
- [28] F. Ronald Young. *Sonoluminescence*. CRC Press LLC, 2005.

A. Código usado en las simulaciones numéricas

A.1. Función que define la ecuación de Rayleigh-Plesset

```

1 function dy = rpeq(t,y)
2 % funcion para ode45
3 global A
4 global gamma
5 global rho
6 global mu
7 global sigma
8 global po
9 global f
10 global R0
11 global Pat
12 global tend
13
14 pex=@(t)-A*sin(2*pi*f*t);
15
16
17 %pex=@(t) ...
    A*(heaviside(t-tend/5)-heaviside(t-2*tend/5)-heaviside(t-3*tend/5)...
18 %     +heaviside(t-4*tend/5));
19
20
21 %pex=@(t) A*sawtooth(2*pi*5*f*t);
22
23
24 dy =[ y(2); ...
    1/(rho*y(1))*(po*(R0/y(1))^(3*gamma)-Pat-pex(t))-1.5*y(2)^2/y(1)...
25     -4*mu*y(2)/(rho*y(1)^2)-2*sigma/(rho*y(1)^2)];
26
27 end

```

A.2. Función que define la ecuación de Rayleigh-Plesset en el modelo Keller-Miksis

```

1 function dy = rpeq-real(t,y)
2 % funcion para ode45, es el modelo de K-M
3 global A
4 global gamma
5 global rho
6 global mu
7 global sigma
8 global po
9 global f
10 global R0
11 global Pat
12 global Cl
13 global tend
14
15 pex=@(t)-A*sin(2*pi*f*t);
16 dpex_dt=@(t)-2*pi*f*A*cos(2*pi*f*t);
17
18 % pex=@(t) ...

```

```

    A*(heaviside(t-tend/5)-heaviside(t-2*tend/5)-heaviside(t-3*tend/5)...
19 %      +heaviside(t-4*tend/5));
20 % dpex_dt=@(t) ...
    A*(dirac(t-tend/5)-dirac(t-2*tend/5)-dirac(t-3*tend/5)+dirac(t-4*tend/5));
21
22 % pex=@(t) 2-A*sawtooth(2*pi*5*f*t)+1;
23 % dpex_dt=@(t) 0;
24
25 p_l=@(R, dot_R, t) po*(R0/R)^(3*gamma)-Pat-2*sigma/R-4*mu/R*dot_R-pex(t);
26 dp_l_dt=@(R, dot_R, t) ...
    -3*gamma*po*(R0/R)^(3*gamma)*dot_R/R+2*sigma/R^2*dot_R+4*mu/R^2*dot_R^2...
27     -dpex_dt(t); %No incluye el ddot_R
28
29
30 dy =[ y(2); ...
    1/((1-y(2)/Cl)*y(1)+4*mu/(rho*Cl))*((1+y(1)/Cl)*p_l(y(1),y(2),t)/rho+y(1)/...
31 (rho*Cl)*dp_l_dt(y(1),y(2),t)-1.5*y(2)^2*(1-y(2)/(3*Cl)))];
32
33 end

```

A.3. Script para las soluciones y las gráficas

```

1 %PARA RESOLVER LA ECUACION DE RAYLEIGH-PLESSET CON LOOP PARA RANGOS
2
3 %
4 % d v
5 % ----- = f(R,v)
6 % dt
7 %
8 % d R
9 % ----- = v
10 % dt
11 %
12
13 clc; clear;
14
15 %TODO EN EL SI
16
17 global gamma
18 gamma = 1.4 ; %1.33-1.4 para el agua
19
20 global R0
21 R0 = 5E-6; %tamano tipico 10 um
22
23 global Pat
24 Pat=101325; %(Pa)
25
26 t0 = 0; %(s)
27
28 global tend
29 tend = 100E-6; %100E-6
30
31 global rho
32 rho=998; %(kg/m^3)
33
34 global f
35 f=20E3; %30E3 (Hz)

```

```

36
37 global A
38 A=1.3*Pat;   %~1.3x
39
40 global sigma
41 sigma=0.0725;
42
43 global mu
44 mu=8.9E-4;  %8.9E-3           8.9E-4 (agua)
45
46 global po
47 po=(Pat+2*sigma/R0);
48
49 global Cl
50 Cl=1500;
51
52 %%
53 Pmax=2;
54
55 N=600;
56
57 RSOL=cell(N,1);
58 TSOL=cell(N,1);
59 rmax=zeros(N,1);
60 rmin=zeros(N,1);
61
62 for i=1:N
63
64     fprintf('Iteracion: %4i\n',i)
65
66     A=i*Pmax*Pat/N;
67
68     options = odeset('RelTol', 1e-12);
69     V0=0; %0.455 para f_n
70     [ tsol, ysol] = ode45(@rpeq_real,[0; tend],[R0; V0], options);
71
72     rmax(i)=max(ysol(:,1));
73     rmin(i)=min(ysol(:,1));
74
75     RSOL{i}=ysol;
76     TSOL{i}=tsol;
77
78 end
79 %%
80 figure('NumberTitle', 'off', 'Name', 'MAX');
81 plot(Pmax*(1:N)/N, rmin./1E-6, '-r', 'LineWidth', 2);
82 hold on
83 xlabel('$A_P/P_{at}$', 'Interpreter', 'latex');
84 ylabel('$R_{min}$ ($\mu$m)', 'Interpreter', 'latex')
85 axis tight
86 xlim([0 Pmax])
87
88 yyaxis right
89 plot(Pmax*(1:N)/N, rmax./1E-6, '-b', 'LineWidth', 2);
90 ylabel('$R_{max}$ ($\mu$m)', 'Interpreter', 'latex')
91 ax=gca;
92 ax.YAxis(2).Color = 'k';
93

```

```

94 % ylim([0 Inf])
95 legend('$R_{\min}$', '$R_{\max}$', 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'West')
96 set(gca, 'fontsize', 28)
97 hold off
98
99 %%
100 Pmax=2;
101 mu0=5E-5;
102 mu_max=15E-3;
103
104 N1=50;
105 N2=50;
106
107 RSOL=cell(N1,N2);
108 TSOL=cell(N1,N2);
109 rmax=zeros(N1,N2);
110 rmin=zeros(N1,N2);
111
112 for i=1:(N1+1)
113     for j=1:(N2+1)
114
115         A=(i-1)*Pmax*Pat/N1;
116         mu=mu0+(j-1)/N2*(mu_max-mu0);
117
118         fprintf('Iteracion: (%4i, %4i) \n',i,j)
119
120         options = odeset('RelTol', 1e-12);
121         V0=0; %0.455 para f_n
122         [ tsol, ysol] = ode45(@rpeq_real,[0; tend],[R0; V0], options);
123
124         rmax(i,j)=max(ysol(:,1));
125         rmin(i,j)=min(ysol(:,1));
126
127         RSOL{i,j}=ysol;
128         TSOL{i,j}=tsol;
129
130     end
131 end
132 %% Para ver la dependencia con V0 y sin excitacion
133
134 A=0;
135 V0max=100;
136 N=50;
137
138 for i=1:N
139
140     V0=i*V0max/N;
141
142     fprintf('Iteracion: %4i) \n',i)
143
144     options = odeset('RelTol', 1e-12);
145     [ tsol, ysol] = ode45(@rpeq_real,[0; tend],[R0; V0], options);
146
147     rmax(i)=max(ysol(:,1));
148     rmin(i)=min(ysol(:,1));
149
150     RSOL{i}=ysol;
151     TSOL{i}=tsol;

```

```

152 end
153
154 figure('NumberTitle', 'off', 'Name', 'MAX-V');
155 plot(V0max*(1:N)/N, rmin./1E-6, '-r', 'LineWidth', 2);
156 hold on
157 xlabel('$\dot{R}(0)$ m/s', 'Interpreter', 'latex');
158 ylabel('$R_{\min}$ ($\mu\text{m})$', 'Interpreter', 'latex')
159 axis tight
160 xlim([0 V0max])
161
162 yyaxis right
163 plot(V0max*(1:N)/N, rmax./1E-6, '-b', 'LineWidth', 2);
164 ylabel('$R_{\max}$ ($\mu\text{m})$', 'Interpreter', 'latex')
165 ax=gca;
166 ax.YAxis(2).Color = 'k';
167
168 % ylim([0 Inf])
169 legend('$R_{\min}$', '$R_{\max}$', 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'West')
170 set(gca, 'fontsize', 22)
171 hold off
172
173
174 %%
175 figure('NumberTitle', 'off', 'Name', 'MAX');
176 subplot(1,2,1)
177 f1=pcolor(1+(1:N2) ./N2*(mu_max/mu0-1), Pmax*(1:N1) ./N1, rmin./1E-6);
178 hold on
179 title('$R_{\min}$', 'Interpreter', 'latex')
180 plot(8.9E-4/mu0 , 1.3, 'rs', 'MarkerEdgeColor', 'red', ...
181     'MarkerFaceColor', [1 .6 .6], 'MarkerSize', 10);
182
183 ylabel('$A/P_{at}$', 'Interpreter', 'latex')
184 xlabel('$\mu/\mu_0$', 'Interpreter', 'latex')
185 zlabel('$0,05 \times R_{\max}, R_{\min}$ ($\mu\text{m})$', 'Interpreter', 'latex')
186
187 axis tight
188
189 % ylim([0 2])
190 % xlim([1 mu_max/mu0])
191 f1.FaceColor = 'interp';
192 f1.EdgeColor = 'none';
193
194 hcb=colorbar;
195 title(hcb, '\mum')
196
197 set(gca, 'fontsize', 26)
198 hold off
199
200
201 subplot(1,2,2)
202 f2=pcolor(1+(1:N2) ./N2*(mu_max/mu0-1), Pmax*(1:N1) ./N1, rmax./1E-6);
203 hold on
204 title('$R_{\max}$', 'Interpreter', 'latex')
205 plot(8.9E-4/mu0 , 1.3, 'rs', 'MarkerEdgeColor', 'red', ...
206     'MarkerFaceColor', [1 .6 .6], 'MarkerSize', 10);
207
208 ylabel('$A/P_{at}$', 'Interpreter', 'latex')
209 xlabel('$\mu/\mu_0$', 'Interpreter', 'latex')

```

```

210 xlabel('$0,05\times R_{\max}, R_{\min}$ ($\mu\text{m}$)', 'Interpreter', 'latex')
211
212 axis tight
213 % ylim([0 2])
214 % xlim([1 mu_max/mu0])
215 f2.FaceColor = 'interp';
216 f2.EdgeColor = 'none';
217 hcb=colorbar;
218 title(hcb, '\mum')
219 colormap jet
220 set(gca, 'fontsize', 26)
221 hold off
222
223 %%
224
225 i=45;
226
227 figure('NumberTitle', 'off', 'Name', 'Burbuja con R-P');
228 subplot(2,2,1);
229 plot(TSOL{i}/tend, 10^6*RSOL{i}(:,1), '-b');
230 hold on
231 xlabel('$t/t_{\text{end}}$', 'Interpreter', 'latex');
232 ylabel('$R(t)$ ($\mu\text{m}$)', 'Interpreter', 'latex')
233 axis tight
234 % xlim([0 1])
235 % ylim([0 Inf])
236 set(gca, 'fontsize', 22)
237 hold off
238
239 subplot(2,2,2)
240 plot(TSOL{i}/tend, po/Pat*(R0./RSOL{i}(:,1)).^(3*gamma), '-b');
241 xlabel('$t/t_{\text{end}}$', 'Interpreter', 'latex');
242 ylabel('$P_{\text{gas}}/P_{\text{at}}$', 'Interpreter', 'latex');
243 axis tight
244 set(gca, 'fontsize', 22)
245
246 subplot(2,2,3)
247 plot(TSOL{i}/tend, 300.*(R0./RSOL{i}(:,1)).^(3*gamma-3), '-b');
248 xlabel('$t/t_{\text{end}}$', 'Interpreter', 'latex');
249 ylabel('$T_{\text{gas}}$ (K)', 'Interpreter', 'latex');
250 axis tight
251 set(gca, 'fontsize', 22)
252
253 ts=linspace(0,1,2000);
254
255 subplot(2,2,4);
256 plot(ts, -A/Pat*sin(2*pi*f.*tend*ts))
257 xlabel('$t$', 'Interpreter', 'latex');
258 ylabel('$P_{\text{ext}}/P_{\text{at}}$', 'Interpreter', 'latex');
259 xlim([0 1])
260 set(gca, 'fontsize', 22)
261
262 %% SOLO PARA LA F_N
263 figure('NumberTitle', 'off', 'Name', 'f_n - Transformada de Fourier');
264 subplot(1,2,1)
265 plot(tsol/tend/0.25E-2, 10^6*ysol(:,1), '-r', 'LineWidth', 1.5);
266 hold on
267

```

```

268 %f_n teorica y delta_R
269 ts_fn=linspace(0,5,2000);
270 f_n_teo=1/(2*pi*R0*sqrt(rho))*(3*gamma*(Pat+2*sigma/R0)-2*sigma/R0)^(1/2);
271 deltaR_teo=@(t) V0/(2*pi*f_n_teo)*sin(2*pi*f_n_teo*t/1000);
272 plot(ts_fn*tend/0.25E-2, ...
      10^6*(R0+deltaR_teo(ts_fn*tend)),'-.b','LineWidth',1.5);
273
274 title('a'),'Interpreter','latex')
275 xlabel('$t/t_{end}$','Interpreter','latex');
276 ylabel('$R(t)$ ($\mu\text{m}$)','Interpreter','latex')
277 axis tight
278 xlim([0 1])
279 % ylim([0 Inf])
280 set(gca,'fontsize',22)
281
282 legend('S.Num.','Teo','Interpreter','latex','Location','North')
283 hold off
284
285 t = tsol;
286 v = ysol(:,1)-5E-6;
287
288 %Como el tsol no esta equispaciado hay que hacer resampling
289 [vr, tr] = resample(v, t); % Resampled Signal Vector
290
291 %FFT
292 L = length(tr); % Signal Length
293 Ts = mean(diff(tr)); % Sampling Interval
294 Fs = 1/Ts; % Sampling Frequency
295 Fn = Fs/2; % Nyquist Frequency
296 FTvr = fft(vr)/L; % Fourier Transform
297 Fv = linspace(0, 1, fix(L/2)+1)*Fn; % Frequency Vector
298 Iv = 1:length(Fv); % Index Vector
299
300 FTvr(1:3)=0; %Para limpiar un pico en 0
301
302 %PLOT
303 subplot(1,2,2)
304 line([2*f_n_teo/1000,2*f_n_teo/1000],[-1,1],'color','red','LineWidth',1.5)
305 hold on
306 title('b'),'Interpreter','latex')
307 plot(Fv*1E-3, abs(FTvr(Iv))*3E8/5,'LineWidth',2)
308 line([f_n_teo/1000,f_n_teo/1000],[-1,1],'color','red','LineWidth',1.5)
309
310 [~, f_n]=max(abs(FTvr(Iv))); %NOS DA LA FRECUENCIA NATURAL
311 f_n=f_n-1;
312
313
314
315 xlabel('Frecuencia f(kHz)','Interpreter','latex');
316
317 text(750, 0.6, sprintf('$f_n = %3.0d$ kHz', ...
      f_n),'Interpreter','latex','FontSize',20);
318 text(1030, 0.4, sprintf('$2f_n = %3.0d$ kHz', ...
      2*f_n),'Interpreter','latex','FontSize',20);
319
320 ylabel('$|\tilde{R}|(f)$ (u.a.)','Interpreter','latex')
321 xlim([500 1.5E3])
322 ylim([0 1])

```

```
323 set(gca, 'fontsize', 22)
324
325 legend('Teo.', 'T. Fourier - S.N.', 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'North')
326 box on;
327 hold off
```