

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

GRADO DE FÍSICA

TRABAJO DE FIN DE GRADO

**Caminos aleatorios y series de Fourier
(AM-GF-02)**

Autor:

Salvador Raya Cuesta

Tutor:

Rafael Espínola García

Curso 2020/2021



*Caminante, no hay camino,
se hace camino al andar.*

Antonio Machado.

Índice

1. Metodología y desarrollo de contenidos	4
1.1. Pequeña introducción histórica	4
1.2. Teoría de la medida y de la probabilidad	4
1.3. Caminos aleatorios	11
1.4. Caminos aleatorios: recurrencia	14
2. Resumen y conclusiones	24
A. Anexo: Caminos Aleatorios Cuánticos	28

Caminos aleatorios y series de Fourier (AM-GF-02)

Salvador Raya Cuesta

Curso 2020/2021

Resumen

El objetivo principal del presente trabajo es demostrar la propiedad de recurrencia de los caminos aleatorios en una dimensión. Para este propósito, en primer lugar, se hace una introducción a la Teoría de la Medida y de la Probabilidad, en la que se presentan las herramientas y los conceptos clave que utilizaremos a lo largo del trabajo. Posteriormente, se introduce el concepto de proceso de Márkov y también el de camino aleatorio. A continuación, se plantea un caso de un camino aleatorio, y mediante la utilización de series de Fourier y de los teoremas presentados previamente, se obtienen ciertos resultados que nos llevan a demostrar que, con probabilidad 1, todos los caminos aleatorios en una dimensión regresan infinitamente al origen, es decir, son recurrentes. Finalmente, se hace una introducción a los caminos aleatorios cuánticos, comentando las similitudes y las diferencias de estos respecto al análogo clásico, y exponiendo cualitativamente una serie de resultados extraídos de varios artículos de investigación.

1. Metodología y desarrollo de contenidos

1.1. Pequeña introducción histórica

Antes de empezar a explicar los fundamentos de la teoría matemática que nos atañe, vamos a contextualizar el marco histórico de la misma, que se encuentra más detalladamente narrado en [20]. La probabilidad es una doctrina nacida algo después de la Edad Media (se le atribuyen algunas consideraciones a Cardano, pero no es hasta mediados del siglo XV que Fermat y Pascal estudian los primeros problemas relacionados con probabilidades). A principios del siglo XVI Bernouilli estudió ciertas distribuciones de probabilidad y, más tarde, Laplace recopiló estas ideas y desarrolló una rigurosa teoría de la probabilidad con aplicación a múltiples problemas, a la que más tarde otros matemáticos aportarían. Pero no es hasta principio de los años 30 del siglo pasado que se convierte en una sólida disciplina matemática, cuando, casi coincidiendo con el nacimiento de la Mecánica Cuántica (campo que luego haría uso de esta teoría de la probabilidad), Andrei Nicolaevich Kolmogorov publica su libro *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* [14]. En él, se introduce la probabilidad en la teoría de la medida de Lebesgue, a la cual ya había tenido cierto acercamiento gracias a Borel, y se axiomatiza la teoría de la probabilidad, dando una definición precisa a conceptos tales como variables aleatorias, que hasta ese momento no tenían una forma matemática, dentro del lenguaje de la teoría de conjuntos, y sentando de esta manera las bases de la teoría moderna de la medida y probabilidad. Es en este último contexto en el que desarrollaremos el problema que vamos a tratar.

1.2. Teoría de la medida y de la probabilidad

En esta sección se va a hacer una introducción a la teoría de la medida y de la probabilidad, la cual se desarrolla a partir de [1], presentando además ciertos resultados de la misma que serán de suma importancia en secciones posteriores. Así pues, veamos y formemos el marco teórico en el que se va a trabajar:

Definición 1.2.1. Sea un conjunto X , un anillo de conjuntos en X es una colección (no vacía), \mathcal{F} de subconjuntos que satisface dos propiedades:

1. $A \cup B \in \mathcal{F}$ si $A, B \in \mathcal{F}$.

2. $A - B \in \mathcal{F}$ si $A, B \in \mathcal{F}$.

Teniendo en cuenta, además de estas dos que definen un anillo, otras dos propiedades:

3. Sean $\{A_{i=0}^{\infty}\}_i^{\infty}$ subconjuntos tales que $A_i \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

4. $X \in \mathcal{F}$.

Se dice entonces que \mathcal{F} es un σ -anillo si es un anillo y cumple la propiedad 3; y que \mathcal{F} es un σ -campo si es un σ -anillo y además cumple la propiedad 4¹.

Se denominan **Conjuntos de Borel** a los conjuntos formados a partir de uniones, intersecciones y complementarios de conjuntos abiertos (o equivalentemente de conjuntos cerrados). Dado un conjunto X , se denomina σ -anillo de Borel al menor σ -anillo que contiene todos los conjuntos abiertos (o todos los conjuntos cerrados). Abusando del lenguaje, llamaremos Conjuntos de Borel a esos últimos, tal y como se hace en [1].

Definición 1.2.2. Una medida es una función μ contable aditiva y no negativa que actúa sobre el anillo \mathcal{F} . Esto es, sea $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ con todos los A_i mutuamente disjuntos, entonces

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (1)$$

Un ejemplo de esta medida es la medida de Lebesgue, μ_L , de forma que, para $A \subset \mathbb{R}$, un intervalo de la recta real, dividido en subintervalos $A_i = (a_i, b_i)$ disjuntos (el intervalo puede ser cerrado también, o abierto por un extremo y cerrado por el otro), de forma que $\mu(A_i) = b_i - a_i$ y por tanto:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \quad (2)$$

Respecto a esta medida, se formula el Principio de Borel:

Principio de Borel. Sea E un evento², la probabilidad de que E ocurra es $P(E) = \mu_L(B_E)$, siendo $B_E \subset I$ el subconjunto de Borel para el cual ocurre este evento, y cumpliéndose que $P(X) = 1$ es la probabilidad del conjunto total de eventos.

Vamos a continuación a confeccionar la estructura matemática asociada a los conceptos usuales de la teoría clásica de la probabilidad, dándoles una definición en términos de la teoría de conjuntos y de la medida.

¹En muchos textos se habla de σ -álgebras y no de σ -anillos, porque en este contexto de teoría de la probabilidad son sinónimos. En este caso, como la bibliografía consultada hace uso del segundo término, continuaremos hablando en general de σ -anillos.

²Esta asignación entre eventos y subconjuntos se ve justo a continuación, pero es apropiado mencionar ahora el Principio ya que acabamos de definir la medida de Lebesgue.

Definición 1.2.3. Sea un conjunto X y \mathcal{F} un campo de subconjuntos E de X , se dice que μ es una medida de probabilidad si $\mu(X) = 1$. En este caso, se denomina a la terna $\{X, \mathcal{F}, \mu\}$ espacio de probabilidad, siendo X el conjunto de sucesos elementales o espacio muestral y \mathcal{F} el conjunto de sucesos aleatorios o posibles eventos. Con esta definición de conceptos en términos de la teoría de conjuntos y de la medida, Kolmogorov formuló los axiomas básicos de la Teoría de la Probabilidad [15]:

1. La probabilidad de un evento es no negativa, $\mu(A) \geq 0$ para $A \in \mathcal{F}$.
2. $\mu(X) = 1$.
3. Para dos eventos $A, B \in \mathcal{F}$ mutuamente disjuntos, $\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Una forma de definir una medida de probabilidad es considerar como $X = I = [0, 1]$, de forma que los $A \subset \mathcal{F}$ son subconjuntos de Borel; y como medida de probabilidad la medida de Lebesgue, ya que $\mu_L(X) = \mu_L(I) = 1$. De esta manera, por el *Principio de Borel*, $\mu_L(A) = P(A)$.

Quiero hacer hincapié en lo que aquí se formula. Se acaba de dar una forma matemática a conceptos asociados a la probabilidad que anteriormente podían parecer bastante indefinidos. Sin embargo, la aportación crucial de la teoría de Kolmogorov fue dar una representación de estos eventos como subconjuntos del espacio muestral (conjunto). De esta manera, haciendo la asignación entre posibles resultados de un experimento (eventos) con subconjuntos, y la probabilidad de que se den estos resultados con cierta medida aplicada sobre estos subconjuntos, podemos utilizar todos los resultados que se conocen de la teoría de la medida a este contexto. A continuación, se adjunta una tabla en la cual se enumeran distintas asignaciones entre elementos de teoría de conjuntos y de sucesos aleatorios que surgen de ésta definición dada por Kolmogorov y que se puede encontrar en [15]:

Teoría de Conjuntos	Sucesos aleatorios
A y B disjuntos	Eventos A y B incompatibles
$AB = C$	El evento C define que A y B ocurren simultáneamente
$A + B = C$	El evento C define que A o B ocurren
\bar{A} (complementario de A)	Evento "no ocurre A "
$A = \emptyset$	El evento A es imposible
$A = X$	El evento A es seguro porque $\mu(X) = 1$
$B \subset A$	Si ocurre el evento B , inevitablemente ocurre A
$\mathcal{U} = \bigcup_i A_i$ elementos disjuntos	Experimento \mathcal{U} en el que pueden resultar los eventos A_i

De la misma manera, sean (X, \mathcal{M}, μ) y (Y, \mathcal{N}, ν) dos espacios de probabilidad, se define el espacio producto $X \times Y$ como

$$X \times Y = \{(x, y); x \in X, y \in Y\} \quad (3)$$

de forma que $A \times B \subset X \times Y$ es un conjunto producto si $A \in \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{N}$, siendo el menor σ -campo en $X \times Y$ que contiene a los subconjuntos producto denotado por $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$. Para un subconjunto $E \subset X \times Y$ y un $x \in X$ fijo, se define una x -sección como el conjunto $E_x = \{y \in Y; (x, y) \in E\}$. De forma similar, se pueden definir y -secciones. Ahora, si $E \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, se puede probar fácilmente que $E_x \in \mathcal{N}$ [2].

Si definimos una función $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ medible respecto a $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$, para $a \in X$ fijo, se define $f_a : Y \rightarrow \mathbb{R}$ como $f_a(y) = f(a, y)$, que es una función medible en Y . Podemos definir entonces $\phi_E(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ que nos de la medida del intervalo E_x como $\phi_E(x) = \nu(E_x)$. Por tanto, integrando esta medida en todo el intervalo de los $x = \{x \in X; x \in E\}$ tenemos que, siendo $E \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$:

$$\pi(E) = \int_X \phi_E(x) d\mu \quad (4)$$

por lo que demostrando que $\phi_E(x)$ es una función medible definida en X , podremos decir que (4) es la *medida producto en E* (estamos tomando las medidas de cada x -sección de E y las estamos "sumando"). Demostrar esto requiere introducir algunos teoremas que no nos serán de utilidad en este trabajo, por lo que no vamos a proceder a probar la validez de (4) como medida. Esta se puede encontrar en [2].

Todo esto que hemos hecho podría repetirse para subconjuntos E_y , llegando a una expresión similar a (4):

$$\pi'(E) = \int_Y \phi_E(y) d\nu \quad (5)$$

donde ahora $\phi_E(y) = \mu(E_y)$. La primera versión del *Teorema de Fubini* nos asegura que $\pi = \pi'$. Esto también se encuentra probado en [2]. Por tanto, definimos la *medida producto de E* como:

$$(\mu \times \nu)(E) = \pi(E) = \pi'(E)$$

Otra versión del Teorema de Fubini (la prueba se puede encontrar en [2]) que nos será útil es la siguiente:

Teorema 1.2.1.: Sea $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible no negativa:

1. Para cada $x \in X$, $f(x, y)$ es una función medible de y .
2. Para cada $y \in Y$, $f(x, y)$ es una función medible de x .
3. $\int_Y f(x, y) d\nu$ es una función medible de x .
4. $\int_X f(x, y) d\mu$ es una función medible de y .
5. $\int_X [\int_Y f(x, y) d\nu] d\mu = \int_Y [\int_X f(x, y) d\mu] d\nu = \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu)$

Toda esta construcción que hemos hecho puede repetirse para espacios producto constituidos por más espacios de probabilidad.

Queda, así pues, bien definido el espacio de probabilidad. Otros resultados importantes derivados de estos axiomas (además de esta construcción que hemos hecho aquí), pero los cuales no trataremos debido a que no los utilizaremos en este trabajo, se pueden encontrar en [13], donde se hace un tratamiento de esta teoría de Kolmogorov dirigida a estudiantes de física que no han estudiado la teoría de la probabilidad de esta manera formal. Más tarde veremos la definición matemática de otros conceptos usuales en probabilidad como son las variables aleatorias en términos de la teoría de la medida.

Pero antes, vamos a presentar dos resultados de esta teoría que utilizaremos más tarde en la resolución de nuestro problema, los **Lemas de Borel-Cantelli**:

Tenemos una colección (contable) de eventos E_i con $i = 1, 2, 3, \dots$. Definamos ahora el evento E : *ocurren infinitos de los eventos E_i* ; y veamos cómo podemos obtener su probabilidad conociendo la probabilidad de que ocurran los eventos E_i . Consideremos que X es nuestro espacio de medida, equipado con un σ -anillo \mathcal{F} y una medida μ , y sea B_i el subconjunto de X que representa al evento E_i . De esta manera, asumiendo $B_i \in \mathcal{F}$, la probabilidad de que suceda E_i es $\mu(B_i)$. Por tanto, podemos definir el evento E que mencionamos antes en términos de los B_i como:

$$B_E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq k} B_n \quad (6)$$

Esto tiene un nombre:

Definición 1.2.4. Dada una sucesión de conjuntos B_1, B_2, \dots , al suceso $B \equiv \{B_i; \text{c.s.}\}$ y que viene dado por (6) se le denomina *límite superior de los B_i* u *ocurrencia de un número infinito de los B_i* .

Por ejemplo [8], imaginemos que tiramos una moneda y nos preguntamos por la probabilidad de que suceda el evento B , *el patrón HTTH (cara, cruz, cruz, cara) ocurre un número infinito de veces*. Definimos los subconjuntos B_i , que son los eventos *el patrón HTTH se da a partir de la tirada i* . De esta manera, $\cup_{i=j}^{\infty} B_i$ es el conjunto de tiradas de monedas para los que el patrón sucede empezando en cualquier tirada mayor o igual que la j -ésima. Por tanto, si el patrón sucede solo un número finito de veces para una serie de tiradas en particular, para un j suficientemente grande, esa tirada no estará en $\cup_{i=j}^{\infty} B_i$. Tomando la intersección de todas estas uniones, seleccionaremos el conjunto de tiradas para las que este patrón sucede un número infinito de veces, $B = \cap_{j=1}^{\infty} \cup_{i \geq j} B_i$.

Una vez tenemos este concepto, definamos los dos lemas de Borel-Cantelli:

Teorema 1.2.2. Dada una sucesión $B_1, B_2, \dots \subset \mathcal{F}$, y sea $B = \{B_i; \text{c.s.}\}$. Entonces, si se cumple que $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) < \infty$, esto implica que $\mu(B) = 0$.

Teorema 1.2.3. Dada una sucesión $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$, y sea $B = \{B_i; \text{c.s.}\}$, si $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \infty$ y, además, los B_i son sucesos independientes, entonces $\mu(B) = 1$.

Estos lemas, los cuales no demostraremos porque exceden a nuestro propósito (se puede ver la demostración en [3]), serán fundamentales a la hora de resolver el problema que plantearemos en la siguiente sección.

Otro objeto matemático que vamos a definir ya que lo vamos a asociar con un concepto importante de la teoría de la probabilidad es el de función medible.

Definición 1.2.5. Sea $\{X, \mathcal{F}, P\}$ un espacio de probabilidad, decimos que la función f que va de X a \mathbb{R} es una función medible si, para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X / f(x) > a\}$ es un elemento de \mathcal{F} .

Es decir, diremos que una función es medible si el conjunto de elementos de X mayores que $f^{-1}(a)$ pertenece al σ -campo con el que esté equipado el conjunto X . Ahora, en base a esto, tenemos el concepto de variable aleatoria:

Definición 1.2.6. Una variable aleatoria es un evento en concreto que se puede medir en un espacio muestral. Un ejemplo sería, en una serie de tiradas de moneda, el número de caras que se obtienen en un cierto número de tiradas. Estas variables aleatorias matemáticamente se podrán definir como **funciones medibles** definidas en el espacio muestral $\{X, \mathcal{F}, P\}$,

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Resumiendo, tenemos por tanto ya los elementos básicos de la teoría de probabilidad asociados a conceptos de la teoría matemática de la medida: el espacio de probabilidad formado por una serie de eventos que vienen dados por elementos de un σ -campo, los posibles resultados obtenidos al medir estos eventos que vienen dados por las variables aleatorias definidas como funciones medibles, y las probabilidades de estos eventos que vienen dados por una medida de probabilidad μ .

Vamos a pasar ahora a definir matemáticamente otra serie de conceptos que están relacionados estrechamente con los que hemos visto hasta ahora:

Definición 1.2.7. El valor esperado de una variable aleatoria es el resultado que esperaríamos obtener al hacer la medida de cierta variable aleatoria, y matemáticamente se define como la integral:

$$E(f) = \int_X f d\mu \quad (7)$$

Este tipo de integral se llama de Lebesgue, pero no nos interesa su definición formal. Si las probabilidades asociadas que tuviésemos fueran valores discretos, el valor esperado vendría dado por:

$$E(f) = \sum_i m_i p_i \quad (8)$$

donde los m_i son los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria f y p_i la probabilidad asociada a cada uno de estos valores.

Definamos la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Si A es un subconjunto de Borel de \mathbb{R} , entonces $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

Definición 1.2.8. La distribución de probabilidad de la variable f será:

$$\mu_f(A) = \mu[f^{-1}(A)] \quad (9)$$

Es decir, siendo A un subconjunto incluido en \mathbb{R} que resulta al medir la variable aleatoria f , la distribución de probabilidad aplicada a A devuelve la medida del subconjunto $E \subset X$ tal que $f(E) = A$, y como μ es una medida de probabilidad, esta nos da la probabilidad de que ocurra este evento. De esta forma, enunciaremos el siguiente teorema:

Teorema 1.2.4. Las siguientes integrales de Lebesgue son equivalentes:

$$\int_X \phi(f) d\mu = \int_{\mathbb{R}} \phi d\mu_{f_i} \quad (10)$$

De manera cualitativa, esta integral de Lebesgue que hemos mencionado varias veces, no es más que una generalización de la integral de Riemann, la cual nos permite tomar como dominio conjuntos que la integral de Riemann no permite. La idea intuitiva es que, al igual que en la integral de Riemann para obtener el valor sumamos el área de rectángulos definidos por subintervalos del dominio, en la integral de Lebesgue se hace lo mismo pero con subintervalos de la imagen. En el caso en el que μ sea una medida de Lebesgue, la integral de Lebesgue coincide con la integral de Riemann definida entre los mismos límites.

Finalmente, para terminar con esta primera sección introductoria, se presenta un resultado que será fundamental en el desarrollo del propósito central del trabajo. Es el **teorema de convergencia monótona**:

Teorema 1.2.5. Sea f_1, f_2, \dots , una secuencia de funciones medibles tales que $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, y sea $f = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i$ el límite de esta secuencia, se puede demostrar que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i d\mu = \int_E f d\mu \quad (11)$$

1.3. Caminos aleatorios

En esta sección introduciremos el tema fundamental que vamos a tratar en este trabajo. Se trata de las cadenas de Márkov, y, más concretamente, de los caminos aleatorios.

Se denomina cadena de Márkov [11] a un proceso estocástico que describe un conjunto X de posibles eventos en los que la probabilidad de que estos ocurran depende solamente del estado en el que se encuentra el sistema en el instante anterior. Es decir, el proceso está definido por una matriz de probabilidad de elementos P_{xy} , siendo esta la probabilidad de transicionar del estado x al y , por lo que $P_{xy} \geq 0$ y $\sum_y P_{xy} = 1$. De esta manera, por la propiedad de independencia, la probabilidad de pasar de x a y en un intervalo de tiempo $t = n$ mediante una serie de pasos intermedios $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ será el producto de cada probabilidad de transición, $P_{xx_1} P_{x_1 x_2} \cdots P_{x_{n-1} y}$. Se dice que la cadena de Márkov es recurrente si todos

los posibles procesos regresan al punto inicial. En caso contrario, se dice que la cadena de Márkov es transitoria. Esta propiedad de recurrencia será nuestro objeto de estudio principal como veremos próximamente.

Por otro lado, los caminos aleatorios son procesos matemáticos aleatorios. En general, se trata de una partícula puntual situada en una posición determinada de un espacio de d dimensiones en el instante cero, y que en cada instante de tiempo siguiente tiene cierta probabilidad de transicionar a otro punto del espacio. Este tipo de procesos son muy utilizados para modelar distintas situaciones en diversas disciplinas tales como en economía. Por ejemplo en [16], que popularizó la *teoría del camino aleatorio*, una teoría financiera que afirma que los precios del mercado de valores evolucionan de forma similar a un camino aleatorio.

Pero donde los caminos aleatorios encuentran su máxima aplicación es en ciencias como en biología y en física [7]. En 1827, el botanista Robert Brown observó el movimiento continuo de partículas de polen que estaban en suspensión en un líquido. Esto causó impresión, ya que eran partículas de materia inerte. Posteriormente, Einstein lleva a cabo una definición de este movimiento browniano en el primero de sus artículos de 1905 [9] en el que formula este hecho como un proceso de difusión a partir de resultados obtenidos de considerar el movimiento browniano como un camino aleatorio realizado por las partículas.

Hay otras muchas situaciones que pueden modelarse como caminos aleatorios, como el movimiento que describe un animal en busca de comida, o las ganancias de un jugador en una noche en el Casino.

Para visualizar mejor este concepto de caminos aleatorios, vamos a exponer este último caso, que es el ejemplo conocido como "la ruina del jugador". Supongamos una persona jugando a cierto juego de azar. En él, a cada instante de tiempo se lanza una moneda. Si sale cara, el jugador gana un euro, y si sale cruz, el jugador pierde un euro. De esta manera, la situación se puede modelar como un camino aleatorio: el jugador parte sin dinero, y en cada instante de tiempo tiene la misma probabilidad, $1/2$, de perder un euro o de ganarlo. Por tanto, se describe la variable *dinero del jugador en el instante de tiempo t* como un punto de la recta real que comienza en cero y que a cada instante de tiempo tiene la misma probabilidad de moverse un paso de tamaño 1 tanto a la izquierda como a la derecha. En este caso, se

demuestra (al igual que haremos en una sección posterior) que la probabilidad de que el jugador pierda todo el dinero ganado pasado un tiempo lo suficientemente grande es 1, es decir, el camino aleatorio es recurrente (vuelve al punto de origen, el cero).

En [1] se formula matemáticamente esta tirada de monedas como $\omega \in I = [0, 1]$ tal que:

$$\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} \quad (12)$$

donde $a_i = 1$ si sale cara o $a_i = 0$ si sale cruz. Se puede expresar también ω en lo que se denomina su expansión binaria $\omega = .a_1 a_2 a_3 \dots$. Definida de esta manera, por ejemplo, el conjunto de tiradas que cumplen el evento *la N-ésima tirada es cara* ($a_N = 1$), será el siguiente conjunto de Borel:

$$B_E = \left\{ \omega \in I; \omega = .a_1 a_2 \dots a_{N-1} 1 a_{N+1} \dots \right\} \quad (13)$$

de forma que, si $s = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{a_i}{2^i} + 1 + 0 + 0 + 0 + \dots$, y $s' = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{a_i}{2^i} + 1 + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = s + \frac{1}{2^N}$, el conjunto de Borel correspondiente será $B_E = [s, s + 1/2^N]$ por lo que aplicando la medida de probabilidad de Lebesgue sobre este, teniendo en cuenta que los a_n resultantes anteriores a la N-ésima tirada ($.a_1 a_2 \dots a_{N-1}$) se pueden obtener en 2^{N-1} combinaciones distintas, se obtiene que:

$$\mu_L(B_E) = 2^{N-1} (s + 1/2^N - s) = 1/2 \quad (14)$$

y por tanto teniendo en cuenta el *Principio de Borel* concluimos que la probabilidad de obtener cara en la N-ésima tirada es $P(E) = \mu_L(B_E) = 1/2$, como era de esperar. Haciendo actuar sobre ω la función de Rademacher que se define como:

$$R_k(\omega) = 2a_k - 1 \quad (15)$$

que será $R_k = 1$ si el jugador gana en el instante $t = k$ o $R_k = -1$ si pierde. Por tanto, la variable aleatoria que nos interesa vendrá dada por $S_N(\omega) = \sum_{i=1}^N R_i(\omega)$, y será la cantidad de dinero que tiene el jugador en el instante de tiempo N .

En la sección posterior se expondrá un caso algo más complicado de un camino aleatorio, y se demostrará un resultado bastante importante que luego comentaremos.

Claramente, se puede ver que los caminos aleatorios se pueden considerar cadenas o procesos de Márkov en el caso de que la probabilidad de transición de un punto a otro no

dependa de las posiciones en las que estuvo la partícula en instantes anteriores, sino solamente de la posición que ocupa en dicho instante. Es decir, en un camino aleatorio con esta premisa, se puede asociar una matriz de probabilidad \mathcal{P} de elementos p_{x-y} al igual que mencionamos cuando definimos las cadenas de Márkov, donde p_{x-y} es la probabilidad de transicionar a la posición y en el instante $t + 1$ si en el instante t me encuentro en la posición x . Como se observa, en el camino aleatorio definido de esta manera, la probabilidad de que el siguiente paso sea a una cierta posición dependerá sola y exclusivamente de la posición anterior, por lo que estamos ante un proceso de Márkov.

Por último, haremos una breve introducción a la metodología seguida en el estudio de la versión cuántica de los caminos aleatorios mediante la revisión de una serie de artículos. El gran interés de estudiar estos procesos actualmente es su aplicación a algoritmos en computación cuántica, al igual que se implementan los caminos aleatorios clásicos a la computación clásica. La ventaja de los caminos aleatorios cuánticos frente a los clásicos es que los algoritmos basados en los primeros operan a una velocidad (hasta) exponencialmente más rápida que aquellos basados en los segundos [23]. Un ejemplo de algoritmo basado en caminos aleatorios cuánticos es el algoritmo de Grover, que permite que, mientras que con un algoritmo clásico tardaríamos un tiempo del orden de $t = N$ en realizar cierta acción (por ejemplo, "encontrar" una secuencia de bits concretos), con el algoritmo de Grover tardaríamos un tiempo del orden de $t = \sqrt{N}$ [10].

1.4. Caminos aleatorios: recurrencia

Esta sección es el núcleo principal del trabajo. En ella, se desarrolla un caso particular de caminos aleatorios en la recta real formulado en [4], explicándolo con mayor detalle y llegando finalmente a demostrar una propiedad fundamental de los caminos aleatorios.

El camino lo vamos a definir de la siguiente manera. Tenemos una partícula puntual (el caminante) situada en una cierta posición i de \mathbb{R} (siendo i un número entero) en el instante de tiempo k . En el instante siguiente, $k + 1$, la partícula tiene cierta probabilidad de haberse movido a otra posición j (entera), p_{i-j} . Estas probabilidades son tales que la partícula tiene, en cada instante, la misma probabilidad de transicionar $i - j$ unidades a la derecha o a la izquierda. Además, consideraremos que el caminante solo podrá dar pasos de transición de ciertos tamaños determinados, por lo que estas probabilidades serán cero excepto para un

número finito de valores $i - j$. Descrita de esta manera, la probabilidad de transición de una partícula en cierto instante de tiempo k se puede formular de la manera siguiente:

1. $p_n = 0$ excepto para un número finito de n 's
2. $p_n = p_{-n}$
3. $\sum p_n = 1$

donde n es la diferencia entre el punto en el que se encuentra y al punto que se mueve, $n = i - j$.

Así formulado, el camino aleatorio simple que formulamos en la sección anterior, consistente en que en cada instante de tiempo el caminante tiene la misma probabilidad de dar un paso de tamaño 1 a la izquierda o a la derecha, sería tal que $p_1 = p_{-1} = 0.5$, y cero para el resto de n 's.

Consideremos en nuestro caso que el caminante parte del origen, $i = 0$. La variable aleatoria más básica que se puede definir en este caso es, para cada instante de tiempo *la diferencia entre la posición en $t = k - 1$ y en $t = k$* . Según hemos descrito el problema, esta variable aleatoria tendrá una distribución de probabilidad discreta, siendo la suma de las probabilidades que tiene la partícula de moverse a una posición o a otra. Por lo tanto, la distribución de probabilidad para una de estas variables, f_k , será:

$$\mu_{f_k}(A) = \sum_{n \in A} p_n \quad (16)$$

donde A es el conjunto de valores $n \in \mathbb{Z}$ a los que puede transicionar la partícula, es decir, cuya probabilidad de transición sea distinta de cero. Esta distribución no depende del instante de tiempo en el que nos encontremos.

Modelización matemática del camino aleatorio.

Vamos ahora a formular matemáticamente el camino aleatorio de forma parecida a como se hacía para el caso de las tiradas de monedas, es decir, con la forma (12). Tendremos $\omega \in I$, que vendrá dado por:

$$\omega = \sum_{k=1}^r \frac{a_k}{(m+1)^k} \quad a_k = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots, m \quad (17)$$

donde hacemos la siguiente asignación: tenemos que el tamaño del paso tendrá cierta canti-

dad positiva (a la derecha) o negativa (a la izquierda) y que solo puede tomar ciertos valores. De esta forma, para cada posible paso n entre el instante k y $k + 1$, a_k será:

$$\text{Si } n > 0 \rightarrow a_k = n$$

$$\text{Si } n < 0 \rightarrow a_k = -n + \frac{1}{2}$$

y m será el máximo valor posible de a_k . Definamos la expansión de ω como $\omega = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, y, como ejemplo, pongamos el caso de que la partícula parte del origen y solo puede dar pasos de tamaño 1, 3 y 4, luego $m = 4.5$ ya que es el n máximo posible es -4, equivalente a un valor $a_k = 4.5$. Imaginemos que la partícula da un paso de tamaño 1 a la derecha, dos de tamaño 3 a la derecha, y uno de tamaño 4 a la izquierda. Este camino será descrito por la expansión $\omega = (1, 3, 3, 4.5)$, y de forma (17), tendremos que $\omega = 1/5.5 + 3/(5.5)^2 + 3/(5.5)^3 + 4.5/(5.5)^4 = 0.303941 \in I$. Enseguida veremos la utilidad de este desarrollo.

De esta forma, podemos definir nuestro espacio de probabilidad con el conjunto $X = I = (0, 1]$ y $\mathcal{F} = B_I$, el anillo de subconjuntos de Borel en I , y con medida de probabilidad la medida de Lebesgue que viene dada por la distribución de probabilidad (16).

Teniendo el camino descrito de esta forma matemática, podemos entonces definir funciones medibles que serán las variables aleatorias básicas que antes mencionamos. Sea $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, aplicada a cierto camino aleatorio dado por ω , proporcionará $f_k(\omega) = a_k$ si $a_k \in \mathbb{N}$; o $f_k(\omega) = -a_k + \frac{1}{2}$ si $a_k \notin \mathbb{N}$. Es decir, la función f_k aplicada a cierto camino aleatorio da el coeficiente a_k de la expansión de ω si este es un número natural, por lo que el paso sería $n = a_k$; sin embargo, si a_k no es entero, significa que el paso que da el caminante es hacia la izquierda, y de tamaño $n = -a_k + \frac{1}{2}$. Queda así descrito matemáticamente el camino aleatorio en los términos de teoría de la medida que se expuso en el apartado anterior.

Propiedad de recurrencia.

Consideremos ahora la siguiente variable aleatoria, la cual se define a partir de las variables aleatorias básicas que acabamos de conformar:

$$S_k = \sum_{i=1}^k f_i \tag{18}$$

Se ve fácilmente que esta variable aplicada a cierto camino aleatorio dado por ω es la posición del caminante en el instante de tiempo k . En el ejemplo que usamos anteriormente,

sería:

$$S_4(\omega) = S_4(0,303941) = S_k(1,3,3,4.5) = (f_1 + f_2 + f_3 + f_4)(1,3,3,4.5) = 1 + 3 + 3 - 4 = 3$$

luego si partimos del origen, el caminante se encuentra en la posición 3 en el instante de tiempo $t = 4$.

Una vez tenemos el espacio de probabilidad definido matemáticamente y las variables aleatorias de interés descritas mediante funciones medibles, vamos a proceder en lo que resta de esta sección a demostrar la siguiente afirmación:

Proposición 1.3.1. Con probabilidad 1, el caminante regresa un número infinito de veces al punto del que partió. Matemáticamente, el conjunto de caminos aleatorios que regresan al origen en el instante de tiempo n son:

$$\{\omega \in I; S_n(\omega) = 0\} \tag{19}$$

La afirmación mencionada antes vendrá dada por tanto por:

$$\mu(\{S_n = 0; c.s.\}) = 1 \tag{20}$$

Obviamente, consideramos que $p_0 < 1$, ya que en caso contrario el problema es trivial.

Vamos a obtener primero un resultado importante. Consideremos las funciones dadas por e^{itf_k} siendo f_k las variables aleatorias definidas anteriormente. Su valor esperado, según la definición (7) que dimos, será:

$$E(e^{itf_k}) = \int_I e^{itf_k} d\mu$$

Recordando que f_k puede tomar ciertos valores n y que la probabilidad de que esto sea así es p_n , el valor esperado queda como:

$$g(t) = E(e^{itf_k}) = \sum_n p_n e^{itn}$$

que puede considerarse la Serie de Fourier³ de una cierta función g , cuyos coeficientes de Fourier serán los p_n .

³En breves definiremos qué son las Series de Fourier, pero vamos a mencionarlas aquí porque es importante comentar este resultado.

Consideremos ahora el conjunto de caminos aleatorios:

$$\{\omega \in I; S_n(\omega) = r\}$$

y definamos al igual que antes la función e^{itS_n} . Un teorema de la teoría de probabilidades [5] nos asegura que las variables aleatorias f_1, f_2, \dots, f_n son independientes si y solo si la distribución de probabilidades $\mu_{f_1, \dots, f_n}(A_1 \times \dots \times A_n)$ es igual a la medida producto $\mu_{f_1}(A_1) \times \dots \times \mu_{f_n}(A_n) = \mu_{f_1} \times \dots \times \mu_{f_n}(A_1 \times \dots \times A_n)$. Como consecuencia directa de esto, aplicando el cambio en la integral entre la medida y la distribución de probabilidad por (10):

$$\begin{aligned} \int_X f_1 \times \dots \times f_n d\mu &= \int_{\mathbb{R}^n} x_1 x_2 \dots x_n d\mu_{f_1, \dots, f_n} = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 x_2 \dots x_n d\mu_{f_1} \times \dots \times d\mu_{f_n} = \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} x_1 d\mu_{f_1} \right) \left(\int_{\mathbb{R}} x_2 d\mu_{f_2} \right) \dots = E(f_1) \times E(f_2) \times \dots \times E(f_n) \end{aligned}$$

donde en el penúltimo paso se ha aplicado el Teorema de Fubini que nos asegura que se puede reagrupar de esta manera.

Aplicando este resultado a e^{itS_n} , su valor esperado será, debido a que las variables aleatorias de este problema, f_k , son independientes (la distancia que se mueve el caminante en el instante k no depende en absoluto de la distancia que se moviese en el instante anterior, las probabilidades de transición en ambos instantes de tiempo son las mismas):

$$E\left(e^{itS_n}\right) = E\left(e^{it\sum f_k}\right) = E\left(e^{itf_1} \times \dots \times e^{itf_n}\right) = E\left(e^{itf_1}\right) \times \dots \times E\left(e^{itf_n}\right) = g(t)^n \quad (21)$$

Por otro lado, S_n solo puede tomar un número finito de valores, por lo que el anterior valor esperado será:

$$E\left(e^{itS_n}\right) = \sum_r \mu(S_n = r) e^{itr} \quad (22)$$

Por lo que comparando (21) y (22), concluimos que $\mu(S_n = r)$, que es **la probabilidad de que la partícula se encuentre en la posición r en el instante n , es el r -ésimo coeficiente de la serie de Fourier de la función g^n .**

Una vez obtenido este resultado, el siguiente objetivo es demostrar que la siguiente afirmación:

Proposición 1.3.2. La suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(\{\omega \in I; S_n(\omega) = 0\}) \quad (23)$$

es infinita.

Demostración. Usando el último resultado obtenido, vemos que podemos expresar la suma (23) en términos de los coeficientes del desarrollo de Fourier de las sucesivas funciones g^n .

Definición 1.4.1. Dada una función f continua, de periodo 2π y diferenciable a trozos en el intervalo $[-\pi, \pi]$, se define su serie de Fourier como:

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

la cual converge a f en este intervalo (enunciado en [6], donde también se puede encontrar la demostración de esta afirmación).

Definición 1.4.2. Se define el coeficiente k -ésimo de la serie de Fourier de una función $f(t)$ como:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} d\mu \quad (24)$$

el cual se obtiene como [6] el producto escalar de la función f con un elemento de una base ortonormal del espacio $\mathcal{L}^2[-\pi, \pi]$, es decir, $c_k = \langle f, \phi_k \rangle$ con

$$\phi_k = \frac{1}{2\pi} e^{ikt}, \quad -\infty < k < \infty$$

Por tanto, la medida $\mu(\{\omega \in I; S_n(\omega) = 0\})$ será el coeficiente de Fourier de orden $r = 0$ de las funciones g^n debido al último resultado que obtuvimos, y la expresión (23) queda como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^n d\mu \right) \quad (25)$$

Vamos a jugar un poco con esta expresión:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^n d\mu \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} g^n d\mu = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{2N-1} g^n d\mu \quad (26)$$

Analicemos el último término de la igualdad. Definamos las funciones $w_N = \sum_{n=0}^{2N-1} g^n$. La $g(t)$ tiene la propiedad $|g(t)| < 1$, excepto para un número finito de puntos en el intervalo $[-\pi, \pi]$ para los que puede valer ± 1 . Probemos esta última propiedad:

$$\overline{g(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n e^{-int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_{-n} e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n e^{int} = g(t)$$

es decir, al coincidir $g(t)$ con su conjugado, es real, por lo que:

$$g(t) = \Re(g(t)) = \sum_n p_n \cos(nt)$$

y finalmente se obtiene:

$$|g(t)| = \left| \sum_n p_n \cos(nt) \right| \leq \sum_n p_n |\cos(nt)| \leq \sum p_n = 1$$

Se cumplirá, por tanto, que $w_N \leq w_{N+1}$ ya que estamos sumando cada vez un término adicional, y positivo al ser las p_n positivas. Tenemos entonces una serie de funciones w_1, w_2, \dots monótonamente crecientes, y cuyo supremo es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} g^n = \frac{1}{1-g(t)}$$

igualdad que se da debido a que $|g(t)| < 1$ y por tanto la suma es una serie geométrica. De esta forma, por el teorema de convergencia monótona, concluimos que el último término de (26) es igual a:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1-g(t)} \quad (27)$$

donde hemos sustituido $d\mu$ por dt debido a que al ser μ una medida de Lebesgue, la integral de Lebesgue coincide con la integral de Riemann efectuada sobre la variable t . Llegamos entonces a que la suma inicial (23) es igual a la integral (27), de forma que si demostramos que esta última es infinita, habremos demostrado que la suma es infinita.

Para ello, la idea es desarrollar $g(t)$ en serie de Taylor centrada en $t = 0$ y truncar a segundo orden. De esta forma:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + \dots \quad (28)$$

Teniendo en cuenta lo siguiente:

- $g(0) = \sum p_n e^{in0} = \sum p_n = 1$
- $g'(t) = \sum in p_n e^{int} \rightarrow g'(0) = i \sum n p_n = 0$, ya que $p_n = p_{-n}$
- $g''(t) = -\sum n^2 p_n e^{int} \rightarrow g''(0) = -\sum n^2 p_n < 0$, ya que $p_n > 0$, $n^2 > 0$

se puede aproximar (28) truncando a segundo orden, obteniendo $g_{aprox}(t) \simeq 1 - Ct^2$ siendo $C = -\frac{1}{2}g''(0) > 0$. Teniendo en cuenta que por el Teorema de Taylor, $g(t) \geq 1 - Ct^2 > 0$, y que

$|g(t)| \leq 1$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1-g(t)} \geq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1-g_{aprox}(t)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{Ct^2}$$

Esta última integral, al estar definida en un intervalo $[-\epsilon, \epsilon]$ que contiene al cero, que es un punto singular, es infinita, por lo que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(\{\omega \in I; S_n(\omega) = 0\}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1-g(t)} \geq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{Ct^2} = +\infty \quad (29)$$

quedando demostrado que la suma es infinita.

De esta forma, si los eventos $S_n = 0$ fuesen independientes, aplicando el segundo lema de Borel-Cantelli, concluiríamos que $\mu(\{S_n = 0; c.s.\}) = 1$. Pero esto no es así, ya que estos eventos dependen de los S_k con $k < n$ y por tanto no podemos finalizar de esta manera. He aquí una sutileza: la probabilidad de que $S_n = 0$ indica la probabilidad de que el camino regrese al origen en el instante n , pero este camino podría haber regresado a cero en otro instante anterior. Estamos por tanto interesados en definir estas funciones de manera que $S_k = 0$ por primera vez en el instante k .

Definamos ahora las funciones $f'_l = f_{k+l}$ para cada l . Sea B_k el conjunto de los $\omega \in I$ tal que:

$$\sum_{i=1}^r f_i(\omega) \neq 0, \quad r < k; \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^k f_i(\omega) = 0 \quad (30)$$

y de igual forma los conjuntos B'_l :

$$\sum_{i=1}^r f'_i(\omega) \neq 0, \quad r < l; \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^l f'_i(\omega) = 0 \quad (31)$$

Es decir, B_k representa el conjunto de los caminos que regresan al origen por primera vez en el instante de tiempo k ; y los B'_l es el conjunto de caminos tales que, tras el instante de tiempo k , vuelven al origen en el instante $k+l$ **independientemente de lo que hiciese entre los instantes 0 y k** . Está claro que, debido a que las funciones f_i (y por tanto las f'_i) son independientes, tanto B_k como B'_l son independientes.

Sea $\rho_k = \mu(B_k)$ y $\rho'_l = \mu(B'_l)$, al ser μ una medida de Lebesgue, para $k = l$ se debe cumplir que $\rho_k = \rho'_l$. Esto es así ya que la distribución de probabilidad asociada a B_k , debido a que las f_i

son independientes, es el producto de las distribuciones de probabilidad de todas ellas:

$$\pi = \mu_{f_1} \times \mu_{f_2} \times \dots \times \mu_{f_k}$$

donde todas las μ_{f_i} son iguales al ser la distribución de probabilidades independiente del instante de tiempo i ; y la distribución de probabilidad para B'_k es exactamente la misma, ya que:

$$\pi' = \mu_{f'_1} \times \mu_{f'_2} \times \dots \times \mu_{f'_k} = \mu_{f_{k+1}} \times \mu_{f_{k+2}} \times \dots \times \mu_{f_{k+k}}$$

que vuelve a ser el producto de k veces μ_f , por lo que $\pi = \pi'$.

Sea el conjunto de valores que pueden tomar las variables aleatorias:

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^r x_i \neq 0, \quad r < k, \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^k x_i = 0 \right\} \quad (32)$$

está claro que la medida de este conjunto respecto a π es la misma que la medida $\mu(B_k)$ por la definición que dimos de distribución de probabilidad; y de igual manera se definiría un conjunto tal que su medida respecto a π' es igual a $\mu(B'_k)$, de donde deducimos que $\pi = \pi' \Rightarrow \rho_k = \rho'_k$.

Como ya hemos dicho, B_k es el conjunto de caminos aleatorios que regresan al origen por primera vez en el instante k , por lo que la medida ρ_k es la probabilidad de que esto ocurra. De esta manera, la probabilidad de que un camino aleatorio regrese al origen **al menos** una vez será:

$$\rho = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \quad (33)$$

Por la definición que dimos de los B y de los B' , su intersección $B_k \cap B'_l$ es el conjunto de caminos aleatorios que regresa por primera vez al origen en el instante k , y por segunda vez en el instante $k+l$. Debido a que, por cómo los construimos, B_k y B'_l son independientes, la probabilidad de este evento no es más que la medida de uno multiplicada por la medida del otro, $\rho_k \rho_l$ ya que demostramos que $\rho'_l = \rho_l$. De la misma forma que antes, tenemos que la probabilidad de que el caminante regrese al origen al menos dos veces, vendrá por tanto dada por:

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \rho_k \rho_l = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} \rho_l \right) = \rho^2$$

Podemos, por tanto, repetir toda esta construcción, definiendo ahora otra serie de variables $f_i'' = f_{k+l+i}$ y los correspondientes B_m'' definidos igual que los B_k' pero con las variables f_i'' . De esta manera, se puede definir el n -ésimo conjunto de este tipo como:

- $f^{(n)} = f_{k+l+m+\dots+w}$
- $B_w^{(n)}$ son los caminos aleatorios tales que $\sum_{i=1}^r f_i^{(n)}(\omega) \neq 0$, $r < w$; y $\sum_{i=1}^w f_i^{(n)}(\omega) = 0$.
- Su medida, $\rho_w^{(n)} = \mu(B_w^{(n)})$, por el mismo argumento de las distribuciones de probabilidad que usamos para demostrar que $\rho_k' = \rho_k$, es igual a ρ_w .

De esta manera, tenemos que $B_k \cup B_l' \cup \dots \cup B_w^{(n)}$ es el conjunto de caminos aleatorios que regresa por primera vez al origen en el instante de tiempo k , por segunda vez en el instante de tiempo $k+l$, ..., y por n -ésima vez en el instante de tiempo $k+l+\dots+w$. Al igual que antes, por la forma que están definidos, los conjuntos $B_k, B_l', \dots, B_w^{(n)}$ son independientes, luego la probabilidad de que estos caminos sucedan es $\rho_k \rho_l \dots \rho_w$, con n de estas medidas ρ multiplicándose en total. Por tanto, la probabilidad de que un camino aleatorio vuelva **al menos** n veces al origen será:

$$\sum_{k,l,\dots,w=1}^{\infty} \rho_k \rho_l \dots \rho_w = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} \rho_l \right) \dots \left(\sum_{w=1}^{\infty} \rho_w \right) = \rho^n \quad (34)$$

donde ρ es la probabilidad de que el camino aleatorio regrese al menos una vez al origen (33). Vamos entonces a demostrar que esta probabilidad ρ^n es igual a 1. Supongamos que $\rho < 1$. Sea el conjunto:

$$A_k = \left\{ \omega \in I; S_k(\omega) = 0 \right\} \quad (35)$$

Definamos la función h

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{A_k} \quad (36)$$

donde 1_{A_k} es la función característica del conjunto A_k , es decir, vale 1 si el ω sobre el que actúa h pertenece a A_k y cero en el caso contrario. De esta manera, tenemos que $h(\omega)$ dará el número de conjuntos del tipo (35) a los que pertenece el camino aleatorio dado por ω , y por tanto, para $m < \infty$, el conjunto

$$\left\{ \omega \in I; h(\omega) = m \right\} \quad (37)$$

es el conjunto de caminos aleatorios que regresa al origen **exactamente** m veces. Por tanto, la medida de este conjunto será la diferencia de la de los conjuntos que regresan al origen al menos m veces y la de los conjuntos que regresan al origen al menos $m+1$ veces, $\rho^m - \rho^{m+1} = \rho^m(1 - \rho)$. Por tanto, para $m = \infty$, el conjunto (37) será el de caminos que regresan al origen infinitas veces, por lo que asumiendo que $\rho < 1$ se obtiene que su medida es cero, y la integral de Lebesgue, que será realmente una suma al poder tomar h valores discretos, será:

$$\int_I h d\mu = \sum_m m \rho^m (1 - \rho) < \infty$$

y a su vez por la definición dada en (36) de h :

$$\int_I h d\mu = \int_I \sum_{k=1}^{\infty} 1_{A_k} d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Pero resulta que esta última suma es, tal y como hemos definido A_k , la expresión (23) que demostramos que era infinita, por lo cual llegamos a una contradicción, y concluimos que al ser ρ una medida de probabilidad, y al ser falso que $\rho < 1$, obligatoriamente $\rho = 1$.

De esta forma, se demuestra que con probabilidad 1, todos los caminos aleatorios regresan al menos una vez al origen.

Llamando $C_k = B_a \cup B'_b \cup \dots \cup B_k^{(k)}$ el conjunto de caminos aleatorios que regresan al origen al menos k veces, debido a que la medida de este conjunto es $\mu(C_k) = \rho^k$ tal y como se demostró antes, y por ser $\rho = 1$, se concluye que la medida de este conjunto es 1; y como se cumple que $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \dots$, la intersección de estos conjuntos será el **conjunto de caminos aleatorios que regresan con infinita frecuencia al origen**. Su medida es:

$$\mu(\{S_n = 0; c.s.\}) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i\right) = 1$$

por lo que queda demostrado que los caminos aleatorios en la recta real definidos de esta manera regresan con infinita frecuencia al origen, es decir, **son recurrentes**.

2. Resumen y conclusiones

Esta última sección nos servirá para discutir el resultado obtenido en la resolución del problema sobre la recurrencia del camino aleatorio clásico en una dimensión.

En la sección anterior, postulamos un camino aleatorio en la recta real de la forma más general posible. Es decir, no impusimos ninguna restricción al caminante, ya que nuestras únicas premisas eran que partíamos de una cierta posición (elegimos como origen el cero de la recta real, pero el análisis es totalmente análogo si se eligiese otra posición de partida) que era un número entero, y que el caminante podía moverse a cualquier otra posición (entera) de la recta con cierta probabilidad. Como, en cada instante de tiempo, la probabilidad total de transición tiene que ser 1 (el caminante sí o sí va a moverse o a permanecer en la misma posición), debe haber ciertos puntos a los que no se puede desplazar, ya que si no tendríamos que cada probabilidad $P_{i \rightarrow j}$ sería cero al tener infinitos puntos en la recta. De esta manera, impusimos que las probabilidades de transición $P_{i \rightarrow j}$ eran cero para ciertos j , y tenían valores arbitrarios para los otros j , siempre y cuando $\sum_j P_{i \rightarrow j} = 1$.

Mediante el uso de los teoremas y resultados obtenidos de la Teoría de la Medida y de la Probabilidad que enunciamos en la Sección 1.2., y de herramientas matemáticas como las series de Fourier, llevamos a cabo un análisis del camino aleatorio y llegamos a la conclusión de que este retornaba infinitamente al origen con probabilidad 1. En otras palabras, **los caminos aleatorios clásicos en 1 dimensión son recurrentes**.

Esto, sin embargo, no es ninguna sorpresa. En 1921, Pólya [18] enunció su *Teorema de caminos aleatorios*:

Teorema 2.1. Todo camino aleatorio en \mathbb{Z}^d es recurrente para dimensiones $d = 1, 2$ y transitorio para dimensión $d \geq 3$.

Este teorema, que realmente es válido para Procesos de Márkov (recordemos que los caminos aleatorios no son más que un caso particular de estos últimos), se prueba en [17].

En primer lugar, vamos a definir ciertas funciones [11] que serán de ayuda, tanto para el análisis de la propiedad de recurrencia, como para la demostración. Al ser las probabilidades de transición en distintos instantes de tiempo independientes, la probabilidad de retornar al origen en n pasos será el producto de todas las probabilidades intermedias, sumadas para las distintas posibilidades:

$$p_n = \sum_{x_1, \dots, x_{n-1}} P_{0, x_1} P_{x_1, x_2} \cdots P_{x_{n-1}, 0} \quad (38)$$

y de la misma forma, la probabilidad de retorno por primera vez será:

$$q_n = \sum_{x_1, \dots, x_{n-1}; x_i \neq 0} P_{0, x_1} P_{x_1, x_2} \cdots P_{x_{n-1}, 0} \quad (39)$$

Fácilmente, podemos relacionar estas dos expresiones, ya que q_n es claramente la suma de sólo unos cuantos términos de p_n : siendo k el índice mayor para el que sucede que $x_k = 0$, tendremos que $p_m = q_{m-k} p_k$, luego teniendo en cuenta todas las posibilidades para un número de pasos n :

$$p_n = \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k} \quad (40)$$

Para $n = 0$ no es cierta ya que $p_0 = 1$ pero $q_0 = 0$, luego este término se debe tratar aparte. Definiendo ahora las respectivas ecuaciones generadoras en \mathbb{C} :

$$\hat{p}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \quad (41)$$

$$\hat{q}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n \quad (42)$$

donde los coeficientes p_n y q_n no son más que las probabilidades definidas en (38) y (39) respectivamente.

Estas funciones generadoras, al sumar para todo n , están relacionadas por (40):

$$\hat{p}(z) = 1 + \hat{p}(z) \hat{q}(z) \quad (43)$$

donde el primer término proviene de que la ecuación (40) falla para $n = 0$. Esta ecuación es conocida como *Renewal Equation*. Utilizando esta relación, podemos obtener que la probabilidad de retornar al origen por primera vez es:

$$\sum_n q_n = \hat{q}(1) = 1 - \frac{1}{\hat{p}(1)} = 1 - \frac{1}{\sum_n p_n}$$

Es decir, el camino aleatorio será recurrente sólo si $\sum_n q_n = 1$, que equivale a que $\sum_n p_n = \infty$, es decir, sólo si el camino aleatorio retorna con infinita frecuencia al origen.

En [17] se demuestra, mediante la descomposición del camino en lazos (un lazo dentro de un camino aleatorio es un subcamino que inicia y termina en cierto punto, en este caso el origen) y ciertas manipulaciones matemáticas más o menos complicadas, que $\hat{p}(1)$ es igual

a la siguiente integral:

$$\hat{p}(1) = \int_0^{\infty} I_0\left(\frac{t}{d}\right)^d e^{-t} dt$$

donde $I_0(z)$ es la *función de Bessel modificada de primera especie de orden 0*. Finalmente, se acaba probando que esta integral diverge para $d = 1, 2$ y converge para $d \geq 3$. De esta manera, se prueba que la probabilidad de volver al origen (i.e. retornar por primera vez) es $\sum_n q_n = 1$ para dimensiones 1 y 2, pero es $\sum_n q_n \leq 1$ para dimensiones superiores. En otras palabras: todo camino aleatorio (i.e. Cadenas de Márkov) en dimensiones $d = 1, 2$ es recurrente, y es transitorio para $d \geq 3$, quedando demostrado el Teorema de Pólya.

Es decir, el resultado obtenido en nuestro trabajo, pese a estar demostrado en base al análisis de un caso concreto (aunque bastante general), no es más que la verificación de una propiedad que se prueba que se cumple para todo camino aleatorio.

A. Anexo: Caminos Aleatorios Cuánticos

En este apartado haremos una breve introducción cualitativa a los caminos cuánticos. Como ya se mencionó con anterioridad, los caminos cuánticos aleatorios no son más que el análogo cuántico de los caminos clásicos ya tratados. Sin embargo, pese a ser formulados de manera prácticamente idéntica, los principios cuánticos introducen una serie de peculiaridades en el desarrollo de los caminos y en los resultados obtenidos de ellos.

Este tema se presenta en un anexo aparte por varios motivos. En primer lugar, debido a que los trataremos de forma bastante superficial, ya que hablar de la formulación matemática y de los experimentos de caminos cuánticos puede dar para otro trabajo aparte. Sin embargo, me parece interesante dedicarles una sección, porque su utilización en algoritmos cuánticos está a la orden del día, como ya se comentó. En segundo lugar, porque me parecía más importante presentar y obtener los resultados del caso que hemos analizado en profundidad, el de caminos clásicos, antes de entrar a tratar el análogo cuántico. Por tanto, una vez hemos profundizado en el caso clásico y hemos demostrado ciertas propiedades de recurrencia, hemos visto conceptos como las probabilidades de primeros retornos, etc., vamos a adentrarnos en el mundo cuántico.

Al igual que en el caso clásico considerábamos inicialmente una partícula de masa m situada en un punto origen de la recta real, vamos a considerar un estado cuántico inicial que viene dado por un vector $|\psi_0\rangle$ perteneciente al Espacio de Hilbert, $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$. Al igual que antes el caminante a cada instante de tiempo evolucionaba, pasando a otras posiciones de la recta, ahora nuestro estado $|\psi_0\rangle$ va a poder evolucionar a otros estados $|\psi\rangle$. Esta evolución vendrá dada por un operador unitario \hat{U} , el cual actúa sobre el estado de manera que $\hat{U}|\psi_0\rangle = |\psi\rangle$, por lo que en el instante $t = n$ tendré que $|\psi_n\rangle = \hat{U}^n|\psi_0\rangle$. De ahora en adelante, asumiremos que U es un operador por lo cual no especificaremos el $\hat{}$.

Estamos por tanto ahora interesados, al igual que en el camino clásico, en obtener la probabilidad de recurrencia, es decir, de retorno al estado de partida, $|\psi\rangle$. Aquí surge un problema debido a la naturaleza cuántica del experimento: debemos comprobar después de cada instante de tiempo si el estado se encuentra ahora en el estado de partida $|\psi\rangle$. Pero, al igual que ocurre con el experimento de la doble rendija, al realizar una medida sobre un sistema cuántico provocamos que este colapse a un estado determinado, cambiando las propiedades que el estado en sí podía tener (es decir, "perdiendo" otros estados en los que podría estar superpuesto) y alterando así la evolución natural del camino. Por tanto ahora nos pre-

guntamos, ¿cómo podemos formular el camino de manera que podamos comprobar si en cierto instante de tiempo regreso al origen sin alterarlo?

En este sentido, hay dos líneas de actuación: la llevada a cabo por [21], en la cual no es necesario monitorear el camino en cada instante $t = n$; o la llevada a cabo por [11], en la cual el monitoreo del estado de la partícula en cada instante de tiempo se incluye en la descripción del propio camino. Con ambos procedimientos se llega a resultados distintos.

En el primer método [21], se prepara al sistema en un estado inicial $|\psi\rangle$. Tras un intervalo de tiempo, se mide su estado (recordar que $|\langle\psi|\psi'\rangle|^2$ da la probabilidad de encontrar al estado $|\psi'\rangle$ en el estado $|\psi\rangle$) y se descarta. Se vuelve a preparar un sistema en el mismo estado inicial. Tras dos intervalos de tiempo, se mide su estado y se descarta. Esto se repite sucesivamente para intervalos de tiempo $t - t_0 = 3, 4, 5, \dots$, obteniendo que la probabilidad de primer retorno en una serie de n procedimientos es:

$$R^{SJK} = 1 - \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n)$$

donde esta fórmula se obtiene de

$$R = \sum_n q_n = 1 - \frac{1}{\sum_n p_n}$$

teniendo en cuenta que el hecho de que $\sum_n p_n = \infty$ para que se de la recurrencia es equivalente a $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n) = 0$.

Pero esta formulación es cuanto menos extraña, ya que estamos haciendo medidas, en instantes distintos, para sistemas distintos y viendo qué es lo que pasa con cada uno de ellos. Por tanto, en [11] se opta por otra vía: incluir una medición explícita del estado tras cada instante de tiempo en la propia descripción del camino aleatorio. Así, podemos trabajar únicamente con un sistema y ver si este es recurrente, pero pagamos el precio de perturbar su evolución del estado realizando la medición. Vamos a plantear el procedimiento:

El camino se formula de la siguiente manera. Comenzamos en un estado inicial, $|\psi\rangle$. Este estado se hace evolucionar a cada instante de tiempo mediante el operador unitario U . De esta manera, en la transición entre los instantes $t = n$ y $t = n + 1$, pasará de estar en el estado $|\psi_n\rangle$ a tener el estado $|\psi_{n+1}\rangle = U|\psi_n\rangle$; y de manera equivalente podemos relacionar $|\psi_n\rangle$ con el estado inicial ya que $|\psi_n\rangle = U^n|\psi\rangle$. De esta manera, si medimos en $t = n$ si el

estado ha regresado al origen, se obtiene que este regresa al origen con una probabilidad $p_n = |\langle \psi | U^n \psi \rangle|^2$. El problema de esta formulación es que la probabilidad que obtenemos es la probabilidad total de regreso al origen en ese instante, pero el estado ha podido regresar algunas veces al origen en todo el intervalo de tiempo entre $t = 0$ y $t = n$. Por tanto, si estamos interesados en obtener las probabilidades de primer retorno, debemos cambiar la formulación del camino, e ir midiendo a cada paso, pagando el precio de alterar la evolución natural del camino. Lo hacemos de la siguiente manera:

Tras cada paso $|\psi_{n+1}\rangle = U|\psi_n\rangle$, se sigue con la medida, proyectando el operador $|\psi\rangle\langle\psi|$ sobre el estado. Si esta proyección me da un resultado positivo, hemos terminado el experimento, y la probabilidad de regresar al estado inicial es $|\langle\psi|U\psi_n\rangle|^2$. Si al proyectar obtengo una probabilidad nula de regresar al estado inicial, proyecto el estado $U|\psi_n\rangle$ sobre el subespacio ortogonal al generado por $|\psi\rangle$, mediante el proyector $Q = \mathbb{1} - |\psi\rangle\langle\psi|$. Por tanto, tendré que $|\psi_{n+1}\rangle = c_{n+1}(\mathbb{1} - |\psi\rangle\langle\psi|)U|\psi_n\rangle$, siendo c_{n+1} un coeficiente tal que $\|\psi_{n+1}\| = 1$. De ahora en adelante denotaremos \tilde{U} al operador $\tilde{U} = (\mathbb{1} - |\psi\rangle\langle\psi|)U$.

Por tanto, suponiendo un camino para el que no se detecta el estado inicial hasta el instante n , tendremos que este estará en el estado $|\psi_n\rangle = U\tilde{U}^{n-1}|\psi\rangle$, y su probabilidad de retorno será $|\langle\psi|U\tilde{U}^{n-1}\psi\rangle|^2$. Pero como hemos dicho, esta es la **probabilidad de primer retorno en el instante n** . Podemos, por tanto, definir la amplitud de primer retorno como:

$$a_k = \langle\psi|U\tilde{U}^{k-1}\psi\rangle, \quad k \geq 1 \quad (44)$$

de forma que las probabilidades de primer retorno se obtienen como $q_k = |a_k|^2$.

Al igual que en el caso clásico, tenemos dos probabilidades: las probabilidades de primeros retornos, q_k , y las probabilidades de retorno total, que no tienen en cuenta que el estado haya podido regresar al original en instantes anteriores al considerado, p_k . Obviamente, para saber si el camino es recurrente, las probabilidades que nos interesan son las de primeros retornos.

Antes de pasar a un caso ilustrativo y del que vamos a obtener un resultado sorprendente, solamente mencionar que el operador unitario de evolución, U , en su representación matricial, viene dado por *matrices CMV* (pueden ser infinitas o doblemente infinitas dependiendo del caso), cuyos coeficientes tienen relación con los polinomios ortogonales en el disco unidad, que a su vez están relacionados con ciertas funciones útiles y utilizadas en la teoría de caminos aleatorios.

Vamos a ver ahora el caso concreto del **camino aleatorio cíclico**, formulado en [22]. Este camino consiste en tres posibles estados ortonormales entre sí, $|\psi_0\rangle$, $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$; y la evolución del camino vendrá dada por la matriz:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

de manera que esta matriz indica que paso de $|\psi_0\rangle$ a $|\psi_1\rangle$ con probabilidad 1, mientras que la probabilidad de pasar al estado $|\psi_2\rangle$ o de seguir en $|\psi_0\rangle$ tras un paso temporal es 0. Igualmente para los otros dos estados, por lo que al final tengo que:

$$\begin{cases} U|\psi_0\rangle = |\psi_1\rangle \\ U|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle \\ U|\psi_2\rangle = |\psi_0\rangle \end{cases} \quad (46)$$

Se ve pues claramente por qué hemos denominado a este camino como cíclico. El operador U es unitario, ya que $U^{-1} = U^\dagger$, tal y como dijimos que tenía que ser.

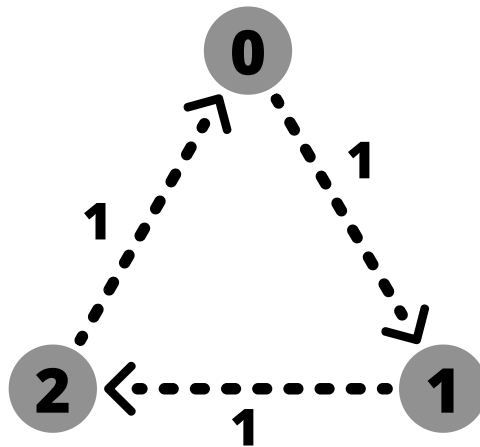


Figura 1: *Grafo del camino cíclico, representado como se suele hacer con cadenas de Márkov.*

Supongamos ahora al sistema en un estado particular, $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle)$, y veamos qué sucede cuando lo dejo evolucionar durante 2 pasos de tiempo. Para calcular la probabilidad

de retorno total, deajo al estado evolucionar dos veces y luego mido:

$$U^2 |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_0\rangle - |\psi_1\rangle)$$

$$\langle\phi|U^2\phi\rangle = \frac{1}{2}(\langle\psi_1| - \langle\psi_2|)(|\psi_0\rangle - |\psi_1\rangle) = -\frac{1}{2}$$

ya que hemos dicho que los estados son ortonormales. La probabilidad total de retorno en dos pasos será por tanto:

$$p_2 = |\langle\phi|U^2\phi\rangle|^2 = \frac{1}{4}$$

Pero veamos ahora qué ocurre con la probabilidad primer retorno en dos pasos. Tendremos que después de dos pasos, por el procedimiento que describimos para obtener los primeros retornos, el sistema estará en el estado $U\tilde{U}|\phi\rangle$ que será:

$$U\tilde{U}|\phi\rangle = U((\mathbb{1} - |\phi\rangle\langle\phi|)U|\phi\rangle)$$

Calculemos primero:

$$\begin{aligned} (\mathbb{1} - |\phi\rangle\langle\phi|)U|\phi\rangle &= (\mathbb{1} - |\phi\rangle\langle\phi|)\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_2\rangle - |\psi_0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_2\rangle - |\psi_0\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_2\rangle - |\psi_0\rangle) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}|\psi_2\rangle - |\psi_0\rangle + \frac{1}{2}|\psi_1\rangle\right) \end{aligned}$$

Por lo que aplicando U a este estado se obtiene:

$$U\tilde{U}|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}|\psi_0\rangle - |\psi_1\rangle + \frac{1}{2}|\psi_2\rangle\right)$$

Y la amplitud de probabilidad será:

$$a_2 = \langle\phi|U\tilde{U}\phi\rangle = \frac{1}{2}(\langle\psi_1| - \langle\psi_2|)\left(\frac{1}{2}|\psi_0\rangle - |\psi_1\rangle + \frac{1}{2}|\psi_2\rangle\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$$

Por lo que la probabilidad de primer retorno en dos pasos es:

$$q_2 = |\langle\phi|U\tilde{U}\phi\rangle|^2 = \frac{9}{16}$$

Fijémonos en el resultado al que acabamos de llegar. Obtenemos que la probabilidad de

retornar por primera vez al origen es mayor que la probabilidad de retornar al origen independientemente de haber regresado con anterioridad o no. Esto clásicamente no tiene sentido. ¡La probabilidad de que suceda un evento más restrictivo es mayor que la de que suceda el evento más general! Pero una vez más, al igual que en el caso de la doble rendija, los principios de la mecánica cuántica (realmente, los efectos de la naturaleza cuántica) le dan un revés a nuestra mentalidad clásica. Porque además de calcular las probabilidades, llevando a cabo el experimento se obtienen resultados en buen acuerdo con estas. Al igual que este resultado, para otros caminos aleatorios se obtiene que la probabilidad de regresar a un estado es mayor que la probabilidad de regresar a un subespacio que contiene a dicho estado.

Este ejemplo ha servido para ilustrar cómo la manera de la que está formulada la mecánica cuántica nos lleva a que, pese a plantear caminos aleatorios de forma parecida a como lo hacíamos clásicamente, el hecho de que los estados se puedan encontrar en superposición, y la interpretación probabilística de la mecánica cuántica, nos lleva a obtener resultados distintos de lo que obtendríamos en el caso clásico.

De hecho, dicha propiedad de superposición de estados es lo que hace que los algoritmos cuánticos sean exponencialmente más rápidos que los clásicos, ya que pueden "explorar" todas las posibilidades, por ejemplo de contraseñas encriptadas, mucho más rápidamente al poder tener superpuestos varios estados de manera simultánea.

Otra diferencia respecto a los caminos clásicos es que, mientras que en estos definíamos las funciones generadoras a partir de las probabilidades totales y de primer retorno, en el caso cuántico realmente lo que medimos son amplitudes de probabilidad, las a_n , y por tanto definimos las funciones generadoras a partir de estas:

$$\hat{a}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

Se puede demostrar por el teorema espectral [19] que, para operadores unitarios U que definen los pasos de los caminos cuánticos asocian a todo estado $|\psi\rangle$ una medida μ_ψ en el círculo unidad \mathbb{T} , por lo que la n -ésima amplitud de probabilidad total se puede ver que es, según vimos cuando hablamos de teoría de la medida:

$$u_n = \langle U^n \psi | \psi \rangle = \int_{\mathbb{T}} t^n d\mu_\psi(t) =: \mu_n$$

Por lo que la función generadora queda definida según estas amplitudes de probabilidad:

$$\hat{\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n z^n = \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu_{\psi}(t)}{1-tz}$$

que se conoce como *función de Stieltjes*. Las dos funciones generadoras están relacionadas, al igual que en el caso clásico, mediante la denominada *Renewal Equation*:

$$\hat{a}(z) = 1 - \frac{1}{\hat{\mu}(z)}$$

Estas funciones son muy importantes en la teoría de caminos aleatorios cuánticos ya que enlazan con la teoría de polinomios ortogonales en \mathbb{T} que nos permite estudiar propiedades de recurrencia de los caminos. No entraremos a exponer esta teoría ya que nos extenderíamos mucho y nuestro objetivo en esta sección es dar una visión general de cómo se plantean los caminos cuánticos y qué resultados inesperados podemos llegar a obtener.

Uno de los resultados que se obtiene utilizando las funciones relacionadas con $\hat{\mu}(z)$ y $\hat{a}(z)$ es el tiempo esperado de retorno al origen. Se llega a que este tiene un significado topológico en \mathbb{T} , y que es siempre **o un número entero o infinito**. Este resultado, de nuevo desde nuestra lógica clásica, es bastante sorprendente.

Para concluir, mencionar una serie de resultados que se exponen en [12] sobre diversos caminos aleatorios, definidos en un espacio de Hilbert \mathcal{H} generado por estados $|i\rangle \otimes |\uparrow\rangle$ y $|i\rangle \otimes |\downarrow\rangle$, donde los primeros representan la posición en la recta real y los segundos una componente intrínseca de espín definida en un espacio de espín; y se lleva a cabo simulaciones con diferentes "monedas" (i.e., matrices que conectan los distintos estados) que rigen el camino en concreto. Por ejemplo, en el **Camino de Hadamard**, la moneda es:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11}^i & c_{12}^i \\ c_{21}^i & c_{22}^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

donde estos coeficientes son las amplitudes de probabilidad de transición entre estados:

$$\left\{ \begin{array}{l} |i\rangle \otimes |\uparrow\rangle \xrightarrow{c_{11}^i} |i+1\rangle \otimes |\uparrow\rangle \\ |i\rangle \otimes |\uparrow\rangle \xrightarrow{c_{21}^i} |i-1\rangle \otimes |\downarrow\rangle \\ |i\rangle \otimes |\downarrow\rangle \xrightarrow{c_{12}^i} |i+1\rangle \otimes |\uparrow\rangle \\ |i\rangle \otimes |\downarrow\rangle \xrightarrow{c_{22}^i} |i-1\rangle \otimes |\downarrow\rangle \end{array} \right.$$

Haciendo simulaciones con esta moneda, se pretende conocer la probabilidad de encontrar al caminante en el subespacio positivo, es decir, $i > 0$, para lo cual se mide el número de veces que se detecta el estado en este subespacio, r . Llevando a cabo la simulación con $n = 100$ y $n = 900$ pasos de tiempo, se llega a un resultado que tampoco nos esperábamos: la densidad de probabilidad es simétrica, tiene valores distintos de cero para los valores $r/n = 0$ y $r/n = 1$, y es prácticamente cero para valores intermedios, comportamiento que se acentúa cuantos más intervalos de tiempo transcurran. La conclusión por tanto es que el estado o bien se encuentra siempre en el subespacio positivo, o bien se encuentra siempre en el subespacio negativo, ambas posibilidades con probabilidad $1/2$, pero no pasa de estados de un subespacio a estados del otro. Esto nuevamente es un resultado llamativo: ¡el caminante permanece siempre en una mitad de la recta real y jamás sale de esta!

En este artículo también se lleva a cabo una simulación con una moneda distinta:

$$C_{\infty} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (48)$$

la cual lleva a una densidad de probabilidad la cual, para $n \rightarrow \infty$, tiende a un valor 1 en $r/n = 0.5$, donde r es el número de veces que está el caminante en el subespacio positivo y n el número total de intervalos de tiempo, y es cero en el resto de puntos. Es decir, con probabilidad 1, el estado permanece **exactamente** la mitad del tiempo en ambos subespacios de la recta real. Esto también es sorprendente. Vemos cómo cambiando la evolución del sistema llegamos a un resultado que es totalmente lo contrario al anterior.

En resumen, hemos visto las diferencias entre los caminos aleatorios cuánticos y clásicos, y cómo los principios de la mecánica cuántica llevan a resultados que, desde el punto de vista clásico, parecen no tener sentido. Podríamos decir que las principales diferencias en cuanto a la formulación son, por un lado, el medir posiciones de un caminante en un ca-

so, y medir estados pertenecientes a un espacio de Hilbert en el otro; y por otro el cómo en el caso clásico obtenemos probabilidades y definimos las funciones generadoras mediante estas, mientras que en los caminos cuánticos medimos amplitudes de probabilidad y definimos las funciones generadoras (y otras funciones derivadas de estas) a partir de ellas. Otra diferencia fundamental, la cual condiciona el planteamiento de los caminos cuánticos, es cómo al medir perturbamos la evolución del sistema, por lo que hay que ingeniárselas para poder medir los estados (recordemos que estamos interesados en obtener si los caminos son recurrentes) para así obtener la probabilidad de retorno.

Referencias

- [1] Malcolm Adams and Victor Guillemin. *Measure Theory and Probability by Malcolm Adams, Victor Guillemin*. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Birkhäuser Boston : Imprint: Birkhäuser, Boston, MA, 1st ed. 1996. edition, 1996.
- [2] Malcolm Adams and Victor Guillemin. *Measure Theory and Probability by Malcolm Adams, Victor Guillemin.*, pages 89–102. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Birkhäuser Boston : Imprint: Birkhäuser, Boston, MA, 1st ed. 1996. edition, 1996.
- [3] Malcolm Adams and Victor Guillemin. *Measure Theory and Probability by Malcolm Adams, Victor Guillemin.*, pages 45–49. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Birkhäuser Boston : Imprint: Birkhäuser, Boston, MA, 1st ed. 1996. edition, 1996.
- [4] Malcolm Adams and Victor Guillemin. *Measure Theory and Probability by Malcolm Adams, Victor Guillemin.*, pages 156–164. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Birkhäuser Boston : Imprint: Birkhäuser, Boston, MA, 1st ed. 1996. edition, 1996.
- [5] Malcolm Adams and Victor Guillemin. *Measure Theory and Probability by Malcolm Adams, Victor Guillemin.*, pages 104–108. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Birkhäuser Boston : Imprint: Birkhäuser, Boston, MA, 1st ed. 1996. edition, 1996.
- [6] Malcolm Adams and Victor Guillemin. *Measure Theory and Probability by Malcolm Adams, Victor Guillemin.*, pages 137–142. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Birkhäuser Boston : Imprint: Birkhäuser, Boston, MA, 1st ed. 1996. edition, 1996.
- [7] Telcs András. *The Art of Random Walks*. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [8] Estep D. Chapter 7: Probability, Introduction to Measure Theoretic Probability. <https://www.stat.colostate.edu/~estep/assets/chapter7.pdf>.
- [9] Albert Einstein. On the movement of small particles suspended in stationary liquids required by the molecular kinetic theory of heat. *Ann. d. Phys*, 17(549-560):1, 1905.

- [10] Lov K Grover. A fast quantum mechanical algorithm for database search. In *Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 212–219, 1996.
- [11] F. Alberto Grünbaum, Luis Velázquez, Albert H. Werner, and Reinhard F. Werner. Recurrence for discrete time unitary evolutions. *Communications in Mathematical Physics*, 320(2):543–569, 2013.
- [12] F. Alberto Grünbaum, Luis Velazquez, and Jon Wilkening. Occupation time for classical and quantum walks. 2020.
- [13] Andrei Khrennikov. Introduction to foundations of probability and randomness (for students in physics), Lectures given at the Institute of Quantum Optics and Quantum Information, Austrian Academy of Science, Lecture-1: Kolmogorov and von Mises. arXiv:1410.5773[quant-ph], 2014.
- [14] A. N. Kolmogorov. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer, Berlin, 1933.
- [15] A.N. Kolmogorov, N. Morrison, and A.T. Bharucha-Reid. *Foundations of the Theory of Probability*. AMS Chelsea Publishing Series. Chelsea Publishing Company, 1956.
- [16] Burton Gordon Malkiel. *A Random Walk Down Wall Street*. W.W. Norton & Company, 1973.
- [17] Jonathan Novak. Pólya’s random walk theorem. *The American Mathematical Monthly*, 121(8):711–716, 2014.
- [18] Georg Pólya. Über eine aufgabe der wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die irrfahrt im straß ennetz. *Mathematische Annalen*, 84(1):149–160, 1921.
- [19] Sam Raskin. Spectral measures and the spectral theorem. *University of Chicago*, 2006.
- [20] Julián Restrepo B., Luis F. González L. La historia de la probabilidad. *Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias*, pages 0120–0690, 2003.
- [21] M. Štefaňák, I. Jex, and T. Kiss. Recurrence and Pólya number of quantum walks. *Physical review letters*, 100(2):020501, 2008.

- [22] Luis Velázquez. Course Spectral methods in classical and quantum random walks. 2020.
- [23] Feng Xia, Jiaying Liu, Hansong Nie, Yonghao Fu, Liangtian Wan, and Xiangjie Kong. Random walks: A review of algorithms and applications. *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence*, 4(2):95–107, 2019.