
Modelos Cosmológicos derivados de la Teoría de la Relatividad General

Universidad de Sevilla
Facultad de Física
Departamento de Física de la Materia Condensada



Trabajo de Fin de Grado en Física

Francisco Javier Méndez Corbacho
Profesor tutor: Diego Gómez García



Índice general

1. Introducción	5
2. Teoría de la Relatividad	7
2.1. Apunte sobre notación	7
2.2. Transformaciones de Lorentz de la Teoría de la Relatividad Especial y ecuación de la energía	8
2.3. Espacio de Minkowski	10
2.4. Teoría de la Relatividad General	13
2.4.1. Postulados de la Teoría de la Relatividad General y movimiento de cuerpos	13
2.4.2. Tensor energía-impulso	14
2.4.3. Ecuaciones de Einstein	15
2.4.4. Peculiaridades del espaciotiempo y horizontes	16
3. Cosmología	19
3.1. El principio cosmológico y el postulado de Weyl	19
3.2. Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	20
3.2.1. Propiedades particulares	28
3.2.2. Modelos cosmológicos basados en la métrica de FLRW	31
3.2.3. Modelo estándar de la cosmología	43
3.3. Modelos cosmológicos que no satisfacen el principio cosmológico	46
4. Conclusión	47
A. Herramientas matemáticas	49
A.1. Coordenadas covariantes y contravariantes (vectores, bases y tensores) y espacios	49
A.2. Regla de derivación de un vector en coordenadas curvilíneas	53
A.3. Variedades, mapas y atlas	53
A.4. Transporte paralelo de vectores y conexión de Livi-Civita	54
A.5. Curvatura y tensores de curvatura	54
A.6. Geodésicas y desviación geodésica	55
B. Álgebra de tensores	57
C. Cálculo de $w_{(x)}$ para los distintos tipos de materia/energía	59
D. Algunos modelos cosmológicos que no satisfacen el principio cosmológico	61
D.0.1. Universo de Gödel	61
D.0.2. Modelos Szekeres	63
E. Script usado para trabajar con métricas	67

Capítulo 1

Introducción

Desde tiempos inmemoriables la humanidad ha mirado al cielo y se ha preguntado qué lugar ocupa entre las estrellas. Numerosos han sido los que han tratado darle respuesta a esta pregunta, planteando un origen, una evolución y un destino del inmenso cosmos en el que nos encontramos. Esta ha sido una materia de la filosofía durante milenios y no fue hasta el siglo XX cuando la ciencia dio un gran paso y pudo tomar parte. Un paso con nombre propio: La Teoría de la Relatividad General.

La Teoría de la Relatividad, desarrollada por Albert Einstein, rompe con la concepción clásica del espacio y el tiempo, sugiriendo que en realidad ambos son parte de un tejido único que tiene la propiedad de curvarse ante la presencia de materia. Estas cualidades propias del mundo en el que vivimos hacen posible el estudio del universo como un todo, un único ente, al relacionar la evolución del espaciotiempo con su contenido material, naciendo así la cosmología física.

Este es un trabajo teórico en el que se expone la Teoría de la Relatividad y cómo a partir de esta es posible el estudio de nuestro universo. Además se desarrollan numerosos modelos de universo que podrían en mayor o menor medida asemejarse al nuestro, demostrando la posibilidad de colapso, finitud sin límites, expansión hasta una muerte térmica, o incluso comportamientos tan peculiares como los viajes en el tiempo para distintos observadores, y dejando la última palabra, como siempre, a la experimentación y a la observación.

Capítulo 2

Teoría de la Relatividad

La Teoría de la Relatividad de Albert Einstein se divide en dos teorías, aunque la segunda es, como su propio nombre indica, una generalización de la primera:

1. Teoría de la Relatividad Especial: se centra en el estudio del movimiento rectilíneo y uniforme de los cuerpos y en el campo electromagnético.

2. Teoría de la Relatividad General: estudia todo tipo de movimiento de los cuerpos y ofrece una explicación del campo gravitatorio. Considera que vivimos en un mundo curvo de 4 dimensiones, y que el efecto de dicha curvatura es lo que denominamos gravedad.

Para poder entender las bases de la cosmología es necesario entender primero los postulados de la Relatividad General, y a su misma vez es de gran ayuda comprender antes la Teoría de la Relatividad Especial.

2.1. Apunte sobre notación

En este escrito se empleará una notación ampliamente empleada en los estudios realizados con la Teoría de la Relatividad.

- Las tres coordenadas espaciales y la temporal se representan con x, y, z y t o con las etiquetas 1,2,3 y 0 respectivamente. Ejemplo:

$$\{x, y, z, ct\} \leftrightarrow \{x^1, x^2, x^3, x^0\}$$

- Los vectores se representan con letras en negrita. Ej: **a**. O mediante sus coordenadas: Ejemplo: a^μ .

- Se emplea el convenio de sumación de Einstein: dos índices repetidos representan un sumatorio en ese índice. Los índices repetidos reciben el nombre de índices mudos y el resto reciben el nombre de índices libres. Puesto que los índices mudos tan solo indican una suma, se les puede asignar cualquier etiqueta. Ejemplos:

$$\sum_i u_i x_i \leftrightarrow u_i x^i = u_j x^j$$

$$\sum_k M_j^k a_k \leftrightarrow M_j^k a_k$$

$$\sum_k T_j^{kh} b_k \leftrightarrow T_j^{kh} b_k$$

¹Se puede hacer esta igualdad porque j es un índice mudo y da igual como le designemos, con j o con k

2.2. Transformaciones de Lorentz de la Teoría de la Relatividad Especial y ecuación de la energía

En el estudio de la Teoría de la Relatividad Especial o Restringida suponemos que:

- Nos movemos en regiones donde no hay campo gravitatorio o es despreciable.
- Los sistemas son inerciales, es decir, se mueven a velocidad constante (en módulo y dirección) los unos respecto a los otros.

La Teoría de la Relatividad Especial se basa en dos postulados:

1. Principio de Relatividad: las leyes de la Física son las mismas para todos los observadores inerciales.
2. La velocidad de la luz en el vacío (c) tiene el mismo valor para todos los sistemas de referencia inerciales.

En la descripción de esta teoría emplearemos las transformaciones de Lorentz. Dichas transformaciones permiten mantener invariante la velocidad de la luz para todos los observadores inerciales.

Entendemos además que, en el contexto de la Relatividad Especial, el espacio es homogéneo (todos los puntos tienen las mismas propiedades) e isótropo (todas las direcciones son equivalentes), y el tiempo es espacialmente homogéneo (todos los relojes marchan con la misma cadencia independientemente del lugar en un sistema de referencia dado, en caso de no ser así, sería afirmar que existen ciertos puntos o direcciones privilegiadas, pero esto es imposible pues contradiría que el espacio es isótropo y homogéneo).

Sean dos sistemas de referencia inerciales ²

$$R = \{x, y, z, ct\} ; R' = \{x', y', z', ct'\}.$$

Suponemos que los sistemas se encuentran en el vacío. Las transformaciones que nos llevan de R a R' reciben el nombre de transformaciones de Lorentz. Estas transformaciones deben ser lineales, pues si no lo fuesen, no se vería a un sistema describiendo un movimiento rectilíneo uniforme respecto al otro. Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, escogemos los dos sistemas de referencia inerciales de modo que para $t = t' = 0$ ambos sistemas coinciden y que para todo instante t los ejes coordenados de ambos sistemas son paralelos. Además consideramos que el sistema primado se mueve respecto al no primado con velocidad ³ \mathbf{u} en la dirección positiva del eje x .

Se hacen unas consideraciones que son en realidad consecuencia de los postulados de la Teoría de la Relatividad Especial:

- Dado que el movimiento se produce solo en la dirección x , en caso de que inicialmente se hubiese colocado el origen de R' a una distancia y , esto no afectaría a la componente z . Lo mismo ocurre con la componente y .
- Los sistemas son equivalentes, es decir, R y R' son intercambiables.
- No existe ningún sistema privilegiado.

²Las tres coordenadas espaciales y la temporal se representan con x, y, z y t o con las etiquetas 1,2,3 y 0 respectivamente. Ejemplo:

$$\{x, y, z, ct\} \leftrightarrow \{x^1, x^2, x^3, x^0\}$$

³Los vectores se representan con letras en negrita. Ej: \mathbf{a} . O mediante sus coordenadas: Ejemplo: a^μ .

- Límite newtoniano para $|\mathbf{u}|$ mucho menor que la velocidad de la luz ⁴.
- El cambio en la coordenada temporal no puede depender del giro que pueda realizar el sistema primado o el no primado. Pues si un sistema realiza un giro respecto al eje que tiene la misma dirección que la velocidad relativa entre ellos, este nuevo sistema es equivalente al anterior por las propiedades del espacio y el tiempo ya descritas.
- Un rayo de luz se observa con la misma velocidad en ambos sistemas de referencia.

Teniendo en cuenta lo anterior, las transformaciones de Lorentz para dos sistemas de referencia R y R' tales que el sistema primado se mueve en el sentido positivo del eje x respecto al no primado a velocidad \mathbf{u} tienen la forma

$$x' = \gamma(x - ut), \quad (2.2.1)$$

$$y' = y, \quad (2.2.2)$$

$$z' = z, \quad (2.2.3)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c}x \right), \quad (2.2.4)$$

donde β es u/c y

$$\gamma = \sqrt{1 - \beta^2} \quad (2.2.5)$$

es conocido como el factor de Lorentz.

Estas transformaciones suponen una nueva concepción de la mecánica. Siempre se había tratado el tiempo como algo absoluto e independiente del espacio, pero la naturaleza revela que el tiempo y el espacio están estrechamente relacionados. Físicamente, estas transformaciones nos dicen que si un cuerpo se desplaza con respecto a un sistema de referencia, dicho cuerpo sufrirá una contracción de su longitud en comparación a su longitud en reposo (longitud propia) en tal sistema de referencia (este fenómeno recibe el nombre de contracción de Lorentz), además la cadencia con la que se moverán las manecillas de un reloj situado en tal cuerpo será menor que la de cualquier otro reloj en reposo respecto al sistema de referencia considerado (el intervalo temporal medido por el observador en reposo respecto al cuerpo se denomina tiempo propio) (este efecto se conoce como dilatación temporal por velocidad).

Por otro lado, puesto que una partícula no puede ser acelerada hasta una velocidad infinita al ser el límite la velocidad de la luz, es necesaria otra expresión que relacione la fuerza aplicada con el cambio de velocidad de una partícula. La fuerza se escribe ahora como

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (2.2.6)$$

donde $\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}$ es el momento lineal de la partícula, m_0 su masa en reposo (la masa inercial de una partícula es $m = \gamma m_0$) y \mathbf{v} su velocidad. Definiendo la variación de energía cinética E de la partícula como el trabajo que realiza la fuerza F a lo largo de una curva C :

$$\Delta E = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.2.7)$$

se obtiene una nueva expresión para la energía de una partícula:

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}. \quad (2.2.8)$$

⁴Con $|\mathbf{u}|$ o u se denota el módulo de la velocidad \mathbf{u}

Esta ecuación supuso una revolución al implicar que la masa y la energía son equivalentes y que cualquier cuerpo con masa, incluso en reposo, posee una cierta cantidad de energía.

Esta teoría también precide un corrimiento al rojo de los cuerpos que se alejan y un corrimiento al azul de los que se acercan, explicando perfectamente el efecto Doppler. Este fenómeno responde a la ecuación

$$f_o = f_e \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}, \quad (2.2.9)$$

donde f_e es la frecuencia emitida por el cuerpo y f_o la observada. También es útil el parámetro *corrimiento al rojo* z , que se define como

$$z = \frac{f_e - f_o}{f_o} = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (2.2.10)$$

donde λ se corresponde con la longitud de onda y se relaciona con la frecuencia mediante la velocidad de propagación de la onda.

2.3. Espacio de Minkowski

Una forma de trabajar en Teoría de la Relatividad Especial consiste en abandonar el espacio euclídeo de tres dimensiones en el que comúnmente se trabaja y optar por un espacio pseudo-rimeno de cuatro dimensiones conocido como espacio de Minkowski.

Empezamos definiendo el invariante de Lorentz. Sean dos puntos del espacio A y B tales que un rayo de luz va de A hasta B a través del vacío. Según el segundo postulado de la Relatividad Especial, dos observadores inerciales (R y R') deben ver que el rayo de luz se propaga a la misma velocidad c , por lo que podemos escribir

$$c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s'}{\Delta t'}, \quad (2.3.1)$$

donde Δs y $\Delta s'$ es la distancia entre A y B en ambos sistemas de referencia, es decir,

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}, \quad (2.3.2)$$

$$\Delta s' = \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2}, \quad (2.3.3)$$

y Δt y $\Delta t'$ es el tiempo que le lleva al rayo viajar entre los dos puntos en los diferentes sistemas.

Combinando las ecuaciones 2.3.1, 2.3.2 y 2.3.3 se llega a

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2 \Delta t'^2. \quad (2.3.4)$$

Se observa que cualquiera de los términos de 2.3.4 (el de la derecha o el de la izquierda) es invariante sea cual sea el sistema de referencia inercial pues los sistemas primado y no primado son completamente arbitrarios. Este término se conoce como invariante de Lorentz.

Si ahora empleamos el cambio de notación

$$\{ct, x, y, z\} \leftrightarrow \{x^0, x^1, x^2, x^3\}, \quad (2.3.5)$$

y escribimos el invariante de Lorentz en forma diferencial:

$$-(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2, \quad (2.3.6)$$

podemos apreciar que 2.3.6 representa la norma al cuadrado del vector (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) en un espacio pseudo-riemano con métrica $\eta_{\mu\nu}$ (*tensor o métrica de Lorentz-Minkowski*):

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.3.7)$$

es decir, la forma diferencial del invariante de Lorentz puede escribirse como:

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.3.8)$$

Denotaremos a dicho espacio como espacio de Minkowski. El espacio de Minkowski posee cuatro dimensiones y en él, los cambios de sistema de coordenadas se hacen mediante las transformaciones de Lorentz. Es una variedad plana ⁵, es decir, las componentes del tensor de Riemann en el espacio de Minkowski son todas nulas. Los puntos en el espacio de Minkowski simbolizan eventos espaciotemporales.

Supongamos a continuación que, dado un sistema de referencia, dos eventos ocurren en un mismo lugar con una diferencia temporal de τ . Esta magnitud recibe el nombre de *tiempo propio*, mencionado anteriormente junto con las ecuaciones de Lorentz, y es necesaria para poder definir multitud de magnitudes físicas, un ejemplo sería la velocidad u^μ , que en el espacio de Minkowski responde a la ecuación:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \equiv \gamma(c, \mathbf{v}). \quad (2.3.9)$$

La mejor forma de calcular el tiempo propio es empleando la expresión que nace de su propia deficiencia:

$$-c^2 d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.3.10)$$

De aquí puede deducirse además que $u = -c^2$ siempre.

Así mismo, algunos vectores importantes en el espacio de Minkowski (llamados *cuadrivectores* ya que tienen 4 coordenadas) son:

- Cuadrivector momento:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} = \left(\frac{E}{c}, m_0\gamma\mathbf{v} \right) \quad (2.3.11)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad newtoniana convencional. Este cuadrivector nos relaciona directamente el momento con la energía, de modo que la conservación del cuadrimento da lugar a las leyes clásicas de conservación de la energía y del momento.

- Cuadrivector fuerza:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \quad (2.3.12)$$

Por último estudiaremos la causalidad al representar los eventos en el espacio de Minkowski. Sea \mathbf{V} un vector no nulo en el espacio de Minkowski. Su norma al cuadrado puede ser:

⁵Para conocer la teoría y las definiciones de los numerosos conceptos geométricos empleados véase el apéndice A.

- $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} > 0$: en este caso se dice que \mathbf{V} es un *vector espacial*, esto significa que dos eventos (puntos) en el espacio de Minkowski conectados por este vector no podrían ser jamás uno la causa del otro, pues la información no ha podido viajar entre ellos en el tiempo que transcurre desde que sucede uno hasta que sucede el otro, ya que el límite al que puede viajar la información es la velocidad de la luz.
- $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = 0$: se conoce a \mathbf{V} como *vector luz*. Son eventos entre los que lo único que puede viajar es un rayo de luz.
- $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} < 0$: se dice que \mathbf{V} es un *vector temporal*, es decir, dos eventos en el espacio de Minkowski conectados por este vector podrían ser uno la causa del otro, pues la información ha podido viajar entre ellos antes de que transcurriese el tiempo entre que ocurre uno y el otro.

En el espacio de Minkowski existe un modo de representar geoméricamente el universo accesible o eventos con los que un observador puede interactuar. Esto se lleva a cabo mediante el *cono de luz*, que es un cono en cuatro dimensiones cuyo centro sería la posición del observador y cuyas aristas están formadas por el haz de rectas $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$ (ver figura 2.1), es decir, el haz de rectas que hace que el invariante sea cero, la trayectoria de rayos de luz emitidos desde un punto.

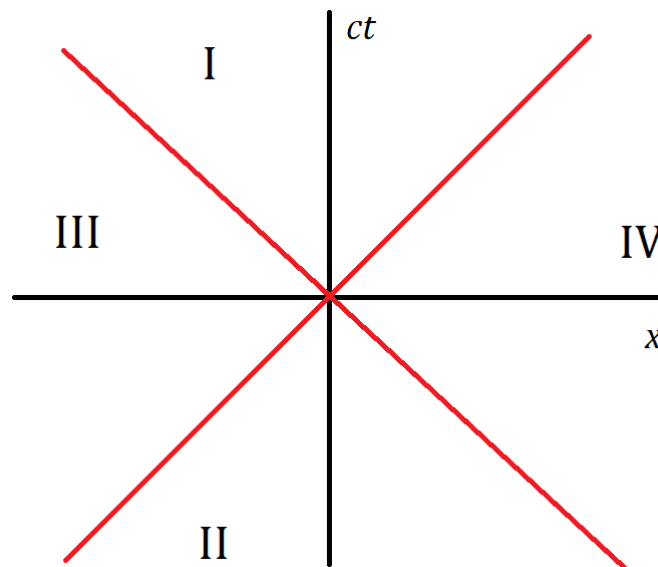


Figura 2.1: Cono de luz en el espacio de Minkowski (delimitado por las rectas rojas $x = ct$). Para poder representarlo se ha simplificado y se han considerado las coordenadas $y = z = 0$. Además se ha situado al observador en el origen del espacio de Minkowski. Podemos observar 4 zonas: la zona I (que va desde la arista superior derecha del cono a la arista superior izquierda) recoge todos los eventos a los que el observador puede tener acceso en su futuro (un vector temporal relaciona los puntos de esta zona con el observador, el origen). La zona II (que va desde la arista inferior derecha a la izquierda) contienen todos los eventos que han podido interactuar con el observador y han hecho que su presente sea el que es (un vector temporal también relaciona el origen con los puntos de esta zona). Las zonas III y IV recogen todos los eventos que se encuentran fuera del acceso del observador (un vector espacial relaciona el origen con los puntos de esta zona). Si un observador emitiese un rayo de luz, este seguiría las rectas rojas, es decir, el origen y los puntos de las rectas rojas se relacionan mediante vectores luz.

Con estos conocimientos, podemos proceder a aventurarnos en la Teoría de la Relatividad General.

2.4. Teoría de la Relatividad General

2.4.1. Postulados de la Teoría de la Relatividad General y movimiento de cuerpos

La Teoría de la Relatividad general se basa en dos postulados:

1. **Principio de equivalencia:** en cualquier punto del espaciotiempo se puede encontrar una transformación de coordenadas tal que este puede describirse localmente por la métrica de Lorentz-Minkowski, es decir, se puede usar localmente la Teoría de la Relatividad Especial. Esto tiene ciertas implicaciones, como que un observador en caída libre en un campo gravitatorio, de forma local, es equivalente a un observador inercial, no existe ninguna forma en esta situación de poder diferenciarlos.

Si $g_{\mu\nu}$ es la métrica de una parte o del total del espaciotiempo, dado un punto se puede hacer un desarrollo de Taylor de dicha métrica, de modo que, en una pequeña región entorno a ese punto es válida la aproximación $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$ y es posible describir un espacio curvo como plano de una forma local.

2. **Principio de covarianza:** Las leyes de la Física son las mismas para todos los observadores. Matemáticamente esto implica que las ecuaciones deben tener la misma forma independientemente del sistema de referencia.

Este principio supone una ruptura con la concepción de sistema inercial y no inercial, pues ahora es un propio observador el que se considera a sí mismo inercial y emplea el espacio de Minkowski a su alrededor de forma local. Esto no es un problema ya que las ecuaciones tensoriales tienen la misma forma independientemente del sistema de coordenadas.

Incluso deja de tener sentido hablar de velocidad relativa entre observadores, pues sus vectores velocidad se encuentran en espacios tangentes a la variedad diferentes.

Por otro lado, al igual que en la Teoría de la Relatividad Especial, es posible definir el tiempo propio como

$$-c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.4.1)$$

Además, según la Teoría de la Relatividad General, vivimos en un universo en el que el espaciotiempo es curvo. Dicha curvatura está producida por la materia/energía (ya vimos en la ecuación 2.2.8 la equivalencia entre la masa y la energía, además cualquier forma de energía altera la curvatura del espaciotiempo) y su efecto sería la gravedad. Los cuerpos con masa se mueven siguiendo las geodésicas temporales y los rayos de luz las geodésicas nulas. Satisfacen la ecuación

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0. \quad (2.4.2)$$

Anteriormente, según Newton, el movimiento de un cuerpo en un campo gravitatorio estaba producido por una fuerza gravitatoria $F_{(g)}^j$ (se escribe g entre paréntesis para indicar que no es un índice de sumación, sino un modo de etiquetar el nombre):

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} - \frac{F_{(g)}^j}{m} = 0, \quad (2.4.3)$$

o escrita considerando el potencial gravitatorio ϕ :

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \nabla \phi = 0, \quad (2.4.4)$$

donde ϕ se relaciona con la densidad de masa ρ mediante la *ecuación de Poisson*:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (2.4.5)$$

con G siendo la constante de gravitación universal. Además, aunque no se demostrará en este escrito, se puede identificar la componente g_{00} del tensor métrico con el potencial gravitatorio.

Por todo ello, la gravedad deja de entenderse como una fuerza y se convierte en un efecto de la geometría del espaciotiempo en el que vivimos.

Es importante, sin embargo, que diferenciamos entre dos tipos de campos gravitatorios:

1. Campo gravitatorio ficticio: si mediante un cambio de coordenadas es posible llegar a una métrica de Lorentz-Minkowski de forma global. Ejemplo: un vehículo acelerando.
2. Campo gravitatorio real: si mediante un cambio de coordenadas es posible llegar a una métrica de Lorentz-Minkowski solo de manera local. Ejemplo: caída libre.

Por otra parte, existe un modo sencillo de hacer válidas todas las expresiones que se emplean en el espacio de Minkowski en un espacio general. Se emplea el *principio de mínimo acoplo*, por el cual las expresiones de las leyes físicas en un espacio curvo son las mismas que el espacio de Minkowski tras sustituir las derivadas parciales ∂_μ por derivadas covariantes ∇_μ y la métrica de Lorentz-Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ por una métrica general $g_{\mu\nu}$. Hay que tener cuidado, no obstante, con que el producto de las derivadas covariantes no cumple la propiedad distributiva.

La teoría de la Relatividad General también predice la curvatura de la trayectoria de la luz, pues realmente está siguiendo geodésicas, el corrimiento al rojo gravitacional y el corrimiento al rojo cosmológico, que se derivará cuantitativamente más adelante.

2.4.2. Tensor energía-impulso

Ya hemos comentado que la curvatura del espacio tiempo está producida por la materia/energía, pero necesitamos una forma de cuantificar este efecto.

En la Teoría de la Relatividad General trabajamos con una gran cantidad de materia por lo que la mejor forma de hacer un estudio es considerar una distribución continua de la misma. Definimos por tanto la densidad de materia en reposo ρ como la masa en reposo por unidad de volumen y emplearemos el cuadrivector densidad de momento: ρu^μ .

Definimos el tensor energía-impulso $T_{\mu\nu}$ (o $T^{\mu\nu}$ o en otra de sus formas) como el flujo de momento y de energía en el espaciotiempo. Puede variar dependiendo de cómo consideremos la materia/energía en cuestión. Por ejemplo, para materia fría (conjunto de partículas que no interactúan entre ellas) el tensor toma la forma

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu. \quad (2.4.6)$$

Es importante observar que si estamos en un sistema de referencia en el que las partículas están en reposo, la única componente no nula del cuadrivector velocidad será u^0 , y por lo tanto la única componente del tensor energía-impulso que sobrevive es $T_{00} = \rho u_0 u_0$. Puesto que $u^2 = -c^2 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$ si la única componente no nula es u^0 , tenemos que

$$u^0 = \sqrt{\frac{-c^2}{g_{00}}}, \quad (2.4.7)$$

lo cual nos será muy útil para cálculos posteriores.

En caso de considerar la distribución continua de materia como un fluido perfecto ⁶ el tensor pasa a escribirse como

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P/c^2)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (2.4.8)$$

donde P es la presión del fluido.

El tensor energía-impulso es simétrico en sus índices y su derivada covariante es igual a cero para que se cumpla el principio de conservación de la energía.

2.4.3. Ecuaciones de Einstein

Las ecuaciones de Einstein relacionan de una manera cuantitativa cómo la masa/energía curva el espaciotiempo. Hay además ciertas condiciones que estas ecuaciones deben satisfacer:

1. Para cumplir el Principio de Covariancia y las ecuaciones sean las mismas en todos los sistemas de coordenadas las ecuaciones deben ser tensoriales.
2. El tensor $T_{\mu\nu}$ debe aparecer en la ecuación pues es la fuente de campo gravitatorio.
3. Si la variedad es plana, entonces $T_{\mu\nu} = 0$. Esto es el espacio de Minkowski.
4. Se busca determinar $g_{\mu\nu}$, por lo que la relación debe dar lugar a ecuaciones diferenciales de segundo grado en las componentes de $g_{\mu\nu}$ en analogía con el resto de ecuaciones de la física.
5. En el límite clásico deben cumplirse la ecuación de Poisson 2.4.5.

Podemos escribir entonces una expresión que nos relacione la geometría del espacio tiempo con su contenido:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.4.9)$$

donde κ es una constante a determinar y $G_{\mu\nu}$ es un tensor al que llamaremos *tensor de Einstein* y que es función únicamente del tensor métrico y sus derivadas al ser un elemento geométrico. Este tensor debe ser lineal en el tensor de Riemann pues en caso contrario se obtendrían ecuaciones diferenciales de un orden mayor a 2 para las componentes del tensor métrico.

El tensor de Einstein es simétrico en sus índices al serlo también el tensor energía-impulso. Además, como la derivada contravariante del tensor energía-impulso es cero, también debe serlo la del tensor de Einstein.

Se puede demostrar que el tensor de Einstein puede escribirse de forma general como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + a g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda, \quad (2.4.10)$$

donde a es una constante y Λ es una función que depende del punto del espaciotiempo. El requisito de que la derivada covariante del tensor de Einstein sea cero implica que Λ es una constante y que $a = -1/2$. Por otro lado, exigir que $G_{\mu\nu}$ sea cero cuando $T_{\mu\nu}$ sea nulo implica que $\Lambda = 0$. Nos queda por tanto:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (2.4.11)$$

⁶Un fluido perfecto es aquel que carece de viscosidad, es decir, un fluido que si estuviese en movimiento dentro de un circuito cerrado mantendría ese movimiento por siempre al no haber una fricción que lo detuviese.

Aplicando por otra parte el límite newtoniano (condición 5), se encuentra que

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (2.4.12)$$

Se obtiene al unirlo todo que las ecuaciones de Einstein tienen la forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.4.13)$$

En caso de eliminar la condición 3, es decir, prescindir del espacio de Minkowski como solución, la constante Λ vuelve a aparecer en la ecuación:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.4.14)$$

La constante Λ recibe el nombre de constante cosmológica y será de suma importancia para la creación de los distintos modelos cosmológicos, tiene unidades de longitud⁻².

Cabe mencionar que otro método para llegar a las ecuaciones de Einsteins se basa en emplear la acción en Relatividad General, la cual recibe el nombre de *acción de Einstein-Hilbert* y tiene la forma

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{|g|} R. \quad (2.4.15)$$

Las ecuaciones de Einstein son un sistema de 10 ecuaciones no lineales, acopladas y de segundo orden, y puesto que no se conoce ningún método para resolverlas de forma general, obtener una solución analítica es un ejercicio de mucha complejidad. Presentar distintas soluciones a estas ecuaciones y discutir sus implicaciones será el objetivo principal de este escrito, ya que son dichas soluciones las que nos proporcionan los distintos modelos de universo.

2.4.4. Peculiaridades del espaciotiempo y horizontes

Al igual que en el espacio de Minkowski, los eventos con los que un observador puede interactuar se describen mediante el cono de luz. Sin embargo, en un espacio curvo el cono de luz sufre constantes deformaciones debido a que la trayectoria de la luz va cambiando al verse afectada por la gravedad, es decir, lo que antes eran aristas fijas de un cono ahora cambian de dirección al moverse el observador de un punto a otro. El cono de luz está delimitado por geodésicas nulas que parten de cada punto, que son las que siguen los rayos de luz al moverse. La relación causal entre dos eventos viene ahora determinada por la geodésica que los une. Un evento puede verse afectado por otro únicamente si la geodésica que los une es de tipo temporal o nula (en este último caso solo la información que se mueve a la velocidad de la luz podría viajar entre los eventos).

Así mismo, en el estudio de la causalidad se pueden definir las *superficies de Cauchy*: sea \mathcal{S} una región de la variedad, \mathcal{S} es una superficie de Cauchy si es atravesada por geodésicas temporales de modo que cada una de ellas solo corta en un punto a la superficie. El estudio causal se hace de modo que podemos definir otra región $D^+(\mathcal{S})$, conocida como desarrollo futuro de Cauchy, tal que un observador que alcance un evento (punto) de $D^+(\mathcal{S})$ ha tenido que pasar necesariamente por \mathcal{S} . También se puede definir el *desarrollo pasado de Cauchy*, $D^-(\mathcal{S})$, como una región tal que un observador que salga de ella tendrá que pasar por \mathcal{S} .

El hecho de que la causalidad esté determinada por un objeto geométrico como el cono de luz, sometido a constantes variaciones, puede dar lugar a que en ciertas regiones del espacio la causalidad funcione de un modo muy diferente al que estamos acostumbrados (por ejemplo mediante la existencia de líneas temporales cerradas, de las que se habla en el *Universo de*

Gödel) o que directamente haya zonas no conectadas casualmente con el resto del universo. Introducimos así los *horizontes*, los cuales son unos límites en el espaciotiempo a partir de los cuales el espaciotiempo tiene ciertas características. La motivación para estudiarlos es la presencia más o menos frecuente de dichos horizontes en los distintos modelos de universo. Los horizontes pueden ser *absolutos*, si son el mismo para todos los observadores, o *relativos*, si varían dependiendo del observador. A su misma vez se clasifican en:

- **Horizonte de sucesos.** Es probablemente el tipo de horizonte más conocido y es claramente un horizonte absoluto. Supone el límite exterior de una región del espacio en la que la gravedad es tan fuerte que ni la luz puede escapar, y puesto que la velocidad de la luz supone el límite máximo al que un cuerpo puede moverse, nada puede volver a salir de dicha región una vez haya entrado. Estos horizontes aparecen en un agujero negro ⁷. Un agujero negro puede ser de distintos tipos según su momento angular y su carga. El más sencillo de ellos, cuyo momento angular es cero y que carece de carga eléctrica, se conoce como *agujero negro de Schwarzschild*. Estudiaremos el horizonte sucesos en este tipo de agujero negro para mostrar como trabajaremos con las métricas en los modelos de universo. Consideremos una de las soluciones a las ecuaciones de Einstein: la solución de Schwarzschild.

La solución de Schwarzschild es una solución exacta que describe como se curva el espacio en presencia de una masa puntual M y se emplea además en el estudio de planetas, estrellas... Se llega a ella proponiendo una solución con simetría esférica y considerando que al alejarnos mucho de la masa debemos encontrarnos en el espacio de Minkowski. La solución responde al elemento de línea en coordenadas esféricas ds :

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.4.16)$$

Podemos observar dos singularidades en esta ecuación, es decir, puntos en los que la métrica se anula total o parcialmente. Una se halla para $r = 0$ y la otra para $r = 2GM/c^2$. Existen dos tipos de singularidades, las de coordenadas y las físicas, las de coordenadas se deben al sistema de coordenadas empleado, son puramente matemáticas, y las físicas a que la curvatura se hace infinita en los puntos singulares. El modo de diferenciarlas es calculando algún invariante de curvatura (como R , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, ...) y estudiando su valor en los puntos dudosos, si el invariante de curvatura diverge, estaremos ante una singularidad física (no obstante, hay casos en los que un invariante en concreto es cero por construcción y no nos proporciona la información deseada, en estos casos es necesario calcular otro). El cálculo de uno de dichos invariantes (no mostrado aquí puesto que esta métrica se emplea únicamente como ejemplo para indicar como trabajaremos posteriormente) revelará que en $r = 0$ encontramos una singularidad física, mientras que en $r = 2GM/c^2$ estamos ante una singularidad de coordenadas. No obstante, cabe mencionar que en este caso, $r = 2GM/c^2$ sí afecta a la física del sistema aunque sea una singularidad de coordenadas, pues representa el horizonte de sucesos. Un horizonte de sucesos (o agujero negro) solo puede existir si el radio del cuerpo estelar es inferior a $2GM/c^2$, de modo que si algo se acerca a ese objeto a una distancia $r < 2GM/c^2$ no podrá evitar ser arrastrado hacia la singularidad física en $r = 0$, matemáticamente esto puede explicarse en tanto que el cono de luz se inclina de modo que el universo accesible del observador son únicamente trayectorias hacia la singularidad. Cabe mencionar, aunque no lo discutiremos aquí, que

⁷Un agujero negro es una región del espacio finita cuya masa está tan concentrada que crea un campo gravitatorio tan fuerte en las inmediaciones que una vez un cuerpo se acerca lo suficiente y atraviesa un límite (horizonte de sucesos) no puede volver a salir.

las coordenadas esféricas empleadas en la métrica de Schwarzschild solo sirven para mostrar como se comportan los conos de luz en un región $r > 2GM/c^2$ y que para la región $r \leq 2GM/c^2$ se emplean unas coordenadas conocidas como *coordenadas de Eddington-Finkelstein*, o, de un modo aún más completo, las *coordenadas de Kruskal* que llevan al estudio de *puentes de Einstein-Rosen*, un hipotético túnel que conectaría dos lugares diferentes del espaciotiempo y por el que la materia podría viajar.

- **Horizonte de partículas.** En un universo pueden existir regiones desde las que la luz no ha tenido el tiempo suficiente para llegar a nosotros (o al observador al que nos refiramos). La distancia desde el observador a la que ocurre este fenómeno se conoce como *horizonte de partículas*. Debido a sus características, se trata de un horizonte relativo. Aparecerá en los modelos cosmológicos que describiremos por lo que su tratamiento matemático se hará más adelante.
- **Horizonte de Hubble.** En un universo en expansión puede darse el caso de que la velocidad con la que se separan dos observadores sea tal que la luz emitida por uno no pueda nunca alcanzar al otro. La distancia a partir de la cual esto sucede recibe el nombre de *horizonte de Hubble*. Con esta definición se podría llegar a pensar que algo podría moverse más rápido que la luz respecto a un observador, sin embargo recordemos que la velocidad relativa entre dos puntos diferentes de una variedad es algo de lo que ya no tiene sentido hablar. Al igual que el horizonte de partículas, el horizonte de Hubble es un horizonte relativo.
- **Horizonte de eventos cósmico.** Es la distancia máxima a la que puede llegar una señal emitida por nosotros. Este puede tener un valor finito o, por el contrario, puede darse que nuestra señal continúe viajando y llegue a cualquier parte del universo.
- **Horizonte de Cauchy.** Ocurre cuando la unión de $D^-(\mathcal{S})$, \mathcal{S} y $D^+(\mathcal{S})$ no cubre toda la variedad. Esto significa que existen regiones del espaciotiempo cuya información es independiente de la información en \mathcal{S} . Este tipo de horizonte se encuentra en los *agujeros negros de Reissner-Nordström* (agujero negro con carga que no rota), en los *agujeros negros de Kerr-Newmann* (agujeros negros que rotan y tienen carga eléctrica) y en el *espacio de anti De-Sitter*,
- **Horizonte de Killing.** Un *vector de killing* \mathbf{k} es un vector que satisface la igualdad:

$$\nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu = 0. \quad (2.4.17)$$

Se emplean para expresar cantidades conservadas. Un *horizonte de killing* tiene lugar cuando la norma del vector de killing es cero. Los horizontes de killing se encuentran en la *ergosfera* de un agujero negro en rotación, una zona externa al horizonte de sucesos en la que cualquier cuerpo que se encuentre en ella jamás podrá ser visto en reposo por un observador externo.

Capítulo 3

Cosmología

3.1. El principio cosmológico y el postulado de Weyl

La cosmología es el estudio del universo como un todo, su origen, su contenido, su evolución y su destino. En dicho estudio se parte de considerar la totalidad del universo como un sistema sometido a las leyes de la Física, y puesto que la Teoría de la Relatividad nos ha brindado una herramienta con la que relacionar la materia/energía con la estructura del espaciotiempo, se abre la puerta a un estudio completo del cosmos mediante la ciencia. Las ecuaciones de Einstein se emplean entonces para describir la configuración de nuestro universo a gran escala en función de la materia que lo constituye, es decir, considerando que construcciones menores, como las galaxias, son una serie de perturbaciones insignificantes, y poniendo el foco en supercúmulos galácticos. Además al tratar el universo como un sistema dinámico y dado que la Teoría de la Relatividad es una teoría determinista, podemos conocer su evolución.

Para simplificar el estudio de esta rama del conocimiento y no llegar en la mayoría de los casos a ecuaciones de la métrica con numerosas funciones desconocidas debido a la escasa información que podemos recopilar sobre el espacio exterior, dos pioneros en el campo de la cosmología, Friedmann y Lemaître, hicieron dos hipótesis sobre las que hoy se construye la mayor parte pero no la totalidad de esta disciplina: *el Principio Cosmológico*.

El **principio cosmológico** establece que el universo es homogéneo e isótropo a grandes escalas (orden de Mpc ¹) en cada instante. Homogéneo significa que todos los puntos tienen las mismas propiedades e isótropo significa que todas las direcciones son equivalentes, no hay ninguna privilegiada. Se especifica que esto ocurre para cada instante porque la estructura del universo en general puede cambiar, pero en todo momento se mantendrá homogéneo e isótropo. Describe el universo como una hipersuperficie de 3 dimensiones (espaciales) para un instante de tiempo concreto y traza su evolución al considerar como cambia la hipersuperficie cuando varía el instante de tiempo considerado.

Matemáticamente, este principio implica que es posible llegar de un punto cualquiera a otro mediante una operación de simetría (homogeneidad) y que las componentes del tensor métrico tienen simetría esférica (isotropía). Que el universo sea homogéneo e isótropo al mismo tiempo se traduce además en que la curvatura de la variedad es constante. El principio también es responsable de que el tensor métrico, el tensor energía-impulso... tengan la misma forma ante un cambio de coordenadas. No obstante, no debemos creer erróneamente que cualquier punto del universo puede elegirse como origen y que desde él el universo será isótropo. Aquí es donde entra en juego el *postulado de Weyl*.

El **postulado de Weyl** considera que toda la materia/energía del universo a grandes escalas se comporta como un fluido perfecto que se mueve siguiendo geodésicas temporales que no se

¹El pársec (pc) es una unidad de longitud ampliamente empleada en astronomía que equivale aproximadamente a $3,086 \cdot 10^{16}$ m.

intersectan salvo, quizás, en un único punto en el pasado o en el futuro. A los observadores que siguen tal movimiento únicamente marcado por la evolución del universo se les denomina *observadores comóviles*. Definimos además el *tiempo cosmológico* como el tiempo que mide un observador comóvil, este tiempo es el que aparece en el principio cosmológico.

Las observaciones llevadas a cabo parecen indicar en principio que estos dos axiomas son buenas aproximaciones de la realidad. La *radiación de fondo de microondas*, que es una radiación que llena todo el cosmos y corresponde a la radiación de un cuerpo negro de temperatura 2,7K aproximadamente, es probablemente el argumento más fuerte a favor de la isotropía del universo, pues es bastante isótropa, y, en el marco de la *Teoría del Big Bang*², muestra al universo en una edad temprana. La mayor prueba a favor de la homogeneidad son observaciones llevadas a cabo con rayos X que mostrarían que el universo es efectivamente homogéneo en las escalas mencionadas. En cuanto al postulado de Weyl, es cierto que debido a la interacción gravitatoria se producen desplazamientos y colisiones de grandes estructuras como galaxias o cúmulos de estas, pero los datos reflejan que la velocidad con la que estos procesos ocurren son despreciables comparada con la de la evolución del universo.

No obstante, recientemente (año 2010 en adelante) se han realizado observaciones que contradicen el principio cosmológico. La Agencia Espacial Europea en su misión *Planck* concluyó que las anisotropías del fondo de microondas son realmente significativas, y el descubrimiento de grandes estructuras como la *Gran Muralla de Hércules-Corona Boreal*, un cúmulo gigante de galaxias con una longitud mayor de 3000 Mpc (recordemos que la escala cosmológica es del orden de Mpc) han puesto en debate la homogeneidad del universo. Aquí es donde aparece una fuerte motivación por el estudio de métricas que no satisfagan el principio cosmológico, aunque hay más razones, especialmente la de encontrar un modelo que quizás pueda explicar nuestro universo sin la necesidad de la materia y la energía oscura, dos fuentes de materia/energía del cosmos de naturaleza desconocida pero que serían las determinantes en los mecanismos de evolución del universo actual, como veremos cuando estudiamos el modelo estándar de la cosmología.

Un estudio completo se divide por tanto en dos, en el de métricas que cumplen el principio cosmológico y en el de métricas que no. El modelo de universo actualmente más sencillo que está de acuerdo con las observaciones y es apoyado por un gran sector de la comunidad científica, el estándar, es el modelo Λ CDM, que se basa en la métrica de *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*, una métrica que surge de forma natural al aplicar el principio cosmológico y el principio de Weyl. Estudiaremos dicha métrica en primer lugar y estudiaremos otras posteriormente.

Por comodidad, debido a la gran cantidad de ecuaciones con la que se trabaja y la complejidad de las mismas, es común en cosmología emplear unas unidades en las que $c = 1$, estas unidades reciben el nombre de *unidades naturales*. Así, la coordenada x^0 pasa a escribirse como t . Todas las ecuaciones anteriores siguen siendo válidas y tienen la misma forma salvo por el hecho de que la velocidad de la luz no aparecerá explícitamente en ellas. Los cálculos son más sencillos al escribir la coordenada como t y esto no supone un problema en la lectura final de la ecuación siempre que tengamos presente las unidades del elemento considerado (longitud, tiempo, energía...). Con ello es posible volver rápidamente a las unidades del sistema internacional si se desea.

3.2. Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

La métrica de Friedmann-Robertson-Walker es una solución exacta de las ecuaciones de Einstein que surge de partir de los axiomas del principio cosmológico y del postulado de Weyl.

²La Teoría del Big Bang sostiene que el universo nació de una singularidad física y que lleva expandiéndose desde entonces.

Como hemos mencionado, satisfacer el principio cosmológico se traduce en que la curvatura del espacio es constante (curvatura del espacio, no del espaciotiempo, nos referimos únicamente a las componentes espaciales). Esto implica que el tensor de Riemann que indica la curvatura del espacio formado por las coordenadas espaciales puede escribirse del siguiente modo:

$$\tilde{R}_{ijkl} = K(\tilde{g}_{il}\tilde{g}_{jk} - \tilde{g}_{ik}\tilde{g}_{jl}), \quad (3.2.1)$$

donde K es una constante y \tilde{g}_{ij} son las componentes de la métrica del espacio tridimensional formado por las tres coordenadas espaciales. Además es importante mencionar que el valor de K será único para cada espacio concreto ³.

Centrándonos ahora en el proceso de resolución, la manera más común de resolver las ecuaciones de Einstein es plantear un ansatz (solución estimada de la ecuación que se pretende resolver). El ansatz debe mostrar lo que esperamos del resultado, por ejemplo simetrías o comportamientos en determinados límites o puntos. Es muy común que el ansatz contenga parámetros a determinar una vez se introduce en la ecuación. Además se consideran otra serie de condiciones en el problema, como condiciones iniciales o de contorno. Este método resulta satisfactorio si nuestra solución o ansatz es ciertamente una solución de las ecuaciones estudiadas.

En el caso de la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker el ansatz planteado es

$$ds^2 = -dt^2 + W^2(t)\tilde{g}_{ij}dx^i dx^j \quad (3.2.2)$$

donde dx^i hace alusión únicamente a las coordenadas espaciales. Este ansatz satisface el postulado de Weyl puesto que consideramos t como el tiempo propio del observador comóvil, el tiempo cosmológico. Se satisfacen la homogeneidad e isotropía universo en tanto que existe un factor $W^2(t)$ que multiplica a toda la sección espacial. Dicho factor vendría a indicar la expansión o contracción del universo y entraremos en más detalle sobre esto posteriormente. Por otra parte, esta función depende únicamente de t , puesto que para cada instante la velocidad de contracción o dilatación puede cambiar, pero siempre será la misma para todo el universo en ese preciso instante, es decir, no puede depender de las coordenadas espaciales debido a la homogeneidad.

El siguiente paso es por tanto determinar los factores $W^2(t)$ y \tilde{g}_{ij} de las ecuaciones 3.2.1 y 3.2.2.

Centrémonos primero en \tilde{g}_{ij} . Puesto que el universo es isótropo, debe presentar simetría esférica. El diferencial de línea $d\tilde{s}$ general para un espacio con simetría esférica puede escribirse como

$$d\tilde{s}^2 = f(\tilde{r})d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.2.3)$$

Hacemos ahora el cambio

$$f(\tilde{r}) = e^{2C(\tilde{r})} \quad (3.2.4)$$

y tratamos de calcular $C(\tilde{r})$ empleando en tensor de Ricci, que tras considerar 3.2.1 puede escribirse como ⁴

$$\tilde{R}_{ij} = -2K\tilde{g}_{ij}. \quad (3.2.5)$$

³Las demostraciones de la ecuación 3.2.1 y de la anterior afirmación son puramente matemáticas, muy largas y engorrosas, por lo que las omitiremos en este escrito. Si se desea puede consultarse en [2].

⁴3.2.2 implica 3.2.5 pero el contrario no es cierto.

Calculando ahora las componentes del tensor de Ricci, lo cual es posible obteniendo primero los símbolos de Christoffel (en el apéndice A se encuentran las ecuaciones necesarias para ello: A.5.5 y A.2.4), se obtiene:

$$\tilde{R}_{\tilde{r}\tilde{r}} = -\frac{2}{\tilde{r}} \frac{dC}{d\tilde{r}}, \quad \tilde{R}_{\theta\theta} = e^{-2C} \left(1 - \tilde{r} \frac{dC}{d\tilde{r}} \right) - 1, \quad \tilde{R}_{\phi\phi} = \sin^2 \theta \left(e^{-2C} \left(1 - \tilde{r} \frac{dC}{d\tilde{r}} \right) - 1 \right). \quad (3.2.6)$$

Igualando 3.2.6 y 3.2.5 llegamos a las ecuaciones

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{dC}{d\tilde{r}} = K e^{2C}, \quad 1 - e^{-2C} \left(1 - \tilde{r} \frac{dC}{d\tilde{r}} \right) = 2K\tilde{r}, \quad (3.2.7)$$

cuya solución es

$$e^{2C(\tilde{r})} = f(\tilde{r}) = \frac{1}{1 - K\tilde{r}^2}. \quad (3.2.8)$$

Para interpretar esta métrica de un modo más sencillo se lleva a cabo el cambio de coordenadas

$$r = \tilde{r} \quad (\text{si } K = 0), \quad r = \tilde{r} \sqrt{|K|} \quad (\text{si } K \neq 0), \quad (3.2.9)$$

$$k = 0 \quad (\text{si } K = 0), \quad k = \frac{K}{|K|} \quad (\text{si } K \neq 0), \quad (3.2.10)$$

de modo que k puede tomar los valores -1, 0 o 1.

La métrica de la parte espacial queda por tanto como

$$d\tilde{s}^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad \text{para } k = 0, \quad (3.2.11)$$

$$d\tilde{s}^2 = \frac{1}{|K|} \left[\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad \text{para } k \neq 0. \quad (3.2.12)$$

Y la métrica total se puede escribir como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right), \quad (3.2.13)$$

donde $a(t)$ toma los siguientes valores:

$$a(t) = W(t) \quad \text{para } k = 0, \quad (3.2.14)$$

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{|K|}} W(t) \quad \text{para } k \neq 0. \quad (3.2.15)$$

El factor $a(t)$ es el factor de escala con el que se expande o contrae el universo (siendo más formales, realmente corresponde al factor de escala con el que se expanden o se contraen las secciones espaciales cuya unión, forma el universo). Si $a(t)$ fuese constante en el tiempo el universo sería estático. Por otro lado, el factor k determina, como veremos a continuación, la curvatura del espacio.

1. Curvatura nula. $k = 0$.

Si $k = 0$, podemos observar en 3.2.11 que la métrica del espacio se corresponde con la de un **espacio plano euclideo**. Es un universo en evolución en el que todos los puntos se alejan o se acercan del mismo modo. El universo se expande o se contrae como si fuese una lámina sobre la que hacemos zoom sobre cualquier punto con un factor de escala $a(t)$. En este caso $a(t)$ es adimensional.

2. Curvatura constante positiva. $k = 1$.

En este caso empleamos el cambio de coordenadas $r = \sin \xi$ en la ecuación 3.2.12:

$$d\tilde{s}^2 = \frac{1}{K} (d\xi^2 + \sin^2 \xi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)). \quad (3.2.16)$$

Esta métrica es análoga a la de una esfera de radio $K^{-1/2}$ en un espacio euclideo de cuatro dimensiones. Esto es visible al considerar las coordenadas:

$$X^1 = K^{-1/2} \sin \xi \sin \theta \cos \theta, \quad X^2 = K^{-1/2} \sin \xi \sin \theta \sin \theta, \quad (3.2.17)$$

$$X^3 = K^{-1/2} \sin \xi \cos \theta, \quad X^4 = K^{-1/2} \cos \xi, \quad (3.2.18)$$

que satisfacen la ecuación

$$(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 + (X^4)^2 = K^{-1} \quad (3.2.19)$$

y la ecuación

$$d\tilde{s}^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 + (dX^4)^2. \quad (3.2.20)$$

Observando la ecuación 3.2.13, concluimos que el universo tendría la forma de una **esfera de tres dimensiones** con radio $a(t) = W(t)/\sqrt{K}$ (en este caso las unidades de $a(t)$ serían de longitud). El universo se expande o se contrae según la variación del radio $a(t)$ con el tiempo cosmológico t . No estamos dotados para imaginar una circunferencia en cuatro dimensiones, pero un ejemplo ilustrativo sería el de imaginarse nuestro universo como la superficie de un globo esférico que crece si lo inflamamos y decrece si le quitamos aire. Un universo de estas características sería finito pero ilimitado, pues la superficie de la esfera es finita pero podemos movernos por ella sin que ninguna barrera nos lo impida. En este caso también se dice que el universo es cerrado.

3. Curvatura constante negativa. $k = -1$.

Para este valor de k es conveniente hacer el cambio

$$r = \sinh \zeta. \quad (3.2.21)$$

Sustituyendo en la ecuación 3.2.12 llegamos a la métrica de un hiperboloide de tres dimensiones en un espacio de cuatro (aunque no euclideo, sino con signatura (1,1,1,-1)):

$$d\tilde{s}^2 = \frac{1}{K} (d\zeta^2 + \sinh^2 \zeta (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)). \quad (3.2.22)$$

El hiperboloide es visible al considerar el cambio de coordenadas

$$X^1 = K^{-1/2} \sinh \zeta \sin \theta \cos \theta, \quad X^2 = K^{-1/2} \sinh \zeta \sin \theta \sin \theta, \quad (3.2.23)$$

$$X^3 = K^{-1/2} \sinh \zeta \cos \theta, \quad X^4 = K^{-1/2} \cosh \zeta, \quad (3.2.24)$$

pues satisface, en un espacio de signatura (1,1,1,-1) (espacio similar al espacio de Minkowski), la siguiente ecuación

$$-(X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 + (X^4)^2 = K^{-1} \quad (3.2.25)$$

y

$$d\tilde{s}^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 - (dX^4)^2. \quad (3.2.26)$$

Podemos concluir tras este razonamiento y tras considerar de nuevo la ecuación 3.2.13, que el universo tiene en este caso la forma de un **hiperboloide de tres dimensiones** que aumenta en tamaño o decrece según el factor $a(t)$. La variación de $a(t)$ indica, al igual que en los casos anteriores, cómo se alejan o acercan los puntos del espacio según avanza el tiempo cosmológico. En este caso se dice que el universo es abierto y $a(t)$ también tendría unidades de longitud.

Por otra parte, $W(t)$ (o $a(t)$) viene determinado por el contenido de materia/energía del universo. Según el postulado de Weyl suponemos que el universo a grandes escalas se comporta como un fluido perfecto, debemos entonces considerar las variables densidad ρ y presión P (suma de las densidades de todos los tipos de materia/energía del universo) y que el tensor de Riemann toma la forma 2.4.8. El modo de obtener ahora una ecuación para $a(t)$ es sustituir nuestro ansatz en las ecuaciones de Einstein. Empleamos el caso general con constante cosmológica, ecuación 2.4.14. Por otro lado, además del sistema de ecuaciones que se obtenga, necesitamos también conocer como cambia $a(t)$ con la presión y la densidad a medida que evoluciona el universo. Empecemos con las ecuaciones de campo de Einstein.

Primero se calculan los símbolos de Christoffel con el ansatz 3.2.2, los cuales toman la forma:

$$\Gamma^t_{rr} = -\frac{a(t) \frac{\partial a}{\partial t}}{kr^2 - 1}, \quad \Gamma^t_{\theta\theta} = r^2 a(t) \frac{\partial a}{\partial t}, \quad \Gamma^t_{\phi\phi} = r^2 a(t) \sin^2(\theta) \frac{\partial a}{\partial t}, \quad \Gamma^r_{tr} = \frac{\frac{\partial a}{\partial t}}{a(t)}, \quad (3.2.27)$$

$$\Gamma^r_{rr} = -\frac{kr}{kr^2 - 1}, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = kr^3 - r, \quad \Gamma^r_{\phi\phi} = (kr^3 - r) \sin^2(\theta), \quad \Gamma^\theta_{t\theta} = \frac{\frac{\partial a}{\partial t}}{a(t)}, \quad (3.2.28)$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\cos(\theta) \sin(\theta), \quad \Gamma^\phi_{t\phi} = \frac{\frac{\partial a}{\partial t}}{a(t)}, \quad \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r}, \quad (3.2.29)$$

$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}. \quad (3.2.30)$$

Y con ellos es posible calcular los tensores de curvatura:

$$R_{tt} = -\frac{3 \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}}{a(t)}, \quad (3.2.31)$$

$$R_{rr} = -\frac{2 \left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^2 + a(t) \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 2k}{kr^2 - 1}, \quad (3.2.32)$$

$$R_{\theta\theta} = 2r^2 \left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^2 + r^2 a(t) \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 2kr^2, \quad (3.2.33)$$

$$R_{\phi\phi} = \left(2r^2 \left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^2 + r^2 a(t) \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 2kr^2\right) \sin^2(\theta), \quad (3.2.34)$$

$$R = \frac{6 \left(\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^2 + a(t) \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + k\right)}{a^2(t)}. \quad (3.2.35)$$

Se observa que las componentes correspondientes a la parte espacial del tensor de Ricci puede escribirse como

$$R_{ij} = \tilde{g}_{ij} \left(\left(2 \frac{\partial a}{\partial t}\right)^2 + a \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 2k \right). \quad (3.2.36)$$

También calculamos el tensor energía impulso en sus coordenadas covariantes (al estar empleando coordenadas comóviles tenemos que $u^\mu = 1$ para $\mu = t$ y cero para el resto):

$$T = \begin{pmatrix} \rho(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{P(t)a^2(t)}{kr^2-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2P(t)a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2P(t)a^2(t)\sin(\theta)^2\sin(\theta)^2 \end{pmatrix}. \quad (3.2.37)$$

Sustituyendo en las ecuaciones de Einstein llegamos a dos ecuaciones diferenciales no lineales en la variable $a(t)$ conocidas como *Ecuaciones de Friedmann*:

$$-8\pi G\rho(t) - \Lambda + \frac{3}{a^2(t)}\frac{\partial}{\partial t}a^2(t) + \frac{3k}{a^2(t)} = 0, \quad (3.2.38)$$

$$-12\pi GP(t) - 4\pi G\rho(t) + \Lambda - \frac{3}{a(t)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}a(t) = 0. \quad (3.2.39)$$

La primera ecuación deriva de la componente 00 de las ecuaciones de campo de Einstein y se le suele llamar *ecuación de Friedmann*, mientras que la segunda proviene de las componentes de la traza de la ecuaciones de campo junto con la ecuación primera y se la conoce como *ecuación de aceleración*.

Es posible eliminar los términos con constante cosmológica reescribiendo las variables como sigue:

$$\rho = \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad P = P - \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (3.2.40)$$

Físicamente, esto significa considerar que la constante cosmológica representa una forma de energía que posee una densidad $\Lambda/8\pi G$ y una presión con magnitud $-\Lambda/8\pi G$, esta forma de energía recibe el nombre de *energía de vacío* o *energía oscura*. De modo que las ecuaciones de Friedmann pueden reescribirse como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} \quad (3.2.41)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(3P + \rho) \quad (3.2.42)$$

Donde \dot{a} y \ddot{a} representan las derivadas de $a(t)$ respecto a la variable temporal t una y dos veces respectivamente. Es importante recalcar que si en el proceso de obtención de la ecuación de evolución no hubiésemos empleado la ecuación de Friedmann para realizar una sustitución, hubiésemos llegado a la ecuación

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi GP - \frac{k}{2a^2}, \quad (3.2.43)$$

que se conoce como *ecuación de evolución*.

Por otro lado, el modo de relacionar $a(t)$ con el cambio de presión y densidad a medida que evoluciona el universo se hace con la ley de conservación de la energía $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. La componente temporal nos proporciona la relación deseada:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0, \quad (3.2.44)$$

o, multiplicando por $a^3(t)$ en ambos lados y reagrupando, podemos escribir

$$\frac{d}{dt}(a^3\rho) = -P\frac{d}{dt}a^3. \quad (3.2.45)$$

Si se interpreta $a^3(t)$ como el elemento de volumen de una sección espacial en el instante t , llegamos a la primera ecuación de la termodinámica

$$dE = -PdV, \quad (3.2.46)$$

siendo E la energía contenida en el elemento de volumen V . En esta ecuación se puede ver claramente que la evolución del universo (expansión, contracción o permanencia estática) es un proceso adiabático, es decir, el universo se comporta como un sistema cerrado. Además nos enseña que las ecuaciones de Friedmann son dependientes la una de la otra, pues si derivamos 3.2.41 respecto al tiempo y empleamos 3.2.45 llegamos a 3.2.42.

O sea que tan solo es necesario resolver la ecuación más simple de todas ellas (3.2.41) para calcular la dinámica de universo (factor $a(t)$). Es muy ilustrativo reescribir la ecuación de aceleración deshaciendo el cambio 3.2.40, de modo que 3.2.42 se convierte en

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(3P + \rho) + \Lambda. \quad (3.2.47)$$

De esta ecuación podemos concluir que todas las formas de materia/energía del universo contribuyen con su densidad y presión a una deceleración de la expansión del universo o a una aceleración de su contracción, salvo la energía oscura (constante cosmológica) ya que su presión (si $\Lambda > 0$) o su densidad (si $\Lambda < 0$) produce el efecto contrario.

Para poder resolver la ecuación 3.2.45 y obtener como evoluciona la densidad de las distintas formas de materia/energía del universo es necesario relacionar la presión y la densidad de algún modo. Considerando que todas las formas de materia/energía pueden ser descritas mediante fluidos perfectos, definimos el parámetro adimensional w conocido como *parámetro de ecuación de estado*:

$$w_{(x)} = \frac{P_x}{\rho_x}, \quad (3.2.48)$$

donde $w_{(x)}$ es una constante que dependerá del tipo de materia/energía que forme el fluido y recibe este nombre porque la ecuación está relacionada con la ecuación de estado de un gas ideal. Se escribe este subíndice entre paréntesis para que no lo confundamos con el índice de un sumatorio en la notación de Einstein. En el caso de la métrica de FLRW, este parámetro no depende de la coordenada espacial en tanto que de hacerlo no cumpliría el principio cosmológico. Además se considera independiente del tiempo por simplicidad matemática, es preferible definir parámetros diferentes para épocas del universo distintas que hacer que el parámetro dependa de una variable temporal, definiendo así un parámetro $w_{(x)}$ para cada tipo de fluido perfecto.

Introduciendo la relación 3.2.48 en 3.2.44 se obtiene

$$\dot{\rho}_x = -3(1 + w_{(x)})\rho_x \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.2.49)$$

cuya solución es

$$\rho_x(t) = \rho_0 \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-3(1+w_{(x)})}, \quad (3.2.50)$$

donde ρ_0 y a_0 son los valores de ρ_x y $a(t)$ para un tiempo concreto t_0 (proviene de los límites de integración).

Analicemos ahora dicha solución para los distintos tipos de fluidos perfectos que podemos encontrar:

- **Materia fría o no relativista.** $w_{(m)} = 0$.⁵

La ecuación 3.2.50 pasa a escribirse como

$$\rho_m(t) = \rho_0 \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-3}, \quad (3.2.51)$$

observando claramente que la densidad del fluido $\rho_x(t)$ evoluciona proporcionalmente a $a^{-3}(t)$, inversamente proporcional al volumen.

- **Radiación.** $w_{(r)} = 1/3$.

Obtenemos que

$$\rho_r(t) = \rho_0 \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-4}, \quad (3.2.52)$$

es decir, el fluido se diluye proporcionalmente a $a(t)^{-4}$.

- **Costante cosmológica o energía oscura.** $w_{(\Lambda)} = -1$.

Se obtiene que

$$\rho_\Lambda = \rho_0. \quad (3.2.53)$$

Nos encontramos ante una densidad constante.

Un parámetro importante en cosmología relacionado con la densidad es la *densidad crítica* ρ_c , la cual se define como la densidad total del fluido (puede ser la suma de fluidos que lo componen $\rho = \sum_x \rho_x$) para la cual nos encontramos en un espacio de curvatura nula ($k = 0$). De la primera ecuación de Friedmann 3.2.41 se observa que dicho valor es

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2, \quad (3.2.54)$$

de modo que si la densidad es mayor que la crítica ($\rho > \rho_c$), $k = 1$ y el universo es cerrado. De la misma manera, si $\rho < \rho_c$ entonces $k = -1$ y el universo es abierto. La curvatura del universo es constante en el tiempo, k no puede cambiar de un valor a otro. Se define además el *parámetro de densidad total* como

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (3.2.55)$$

y se cumple que:

- Si $\Omega = 1$, el universo es espacialmente plano ($k = 0$).
- Si $\Omega < 1$, el universo es abierto ($k = -1$).
- Si $\Omega > 1$, el universo es cerrado ($k = 1$).

También podemos definir los *parámetros de densidad parciales* como

$$\Omega_x = \frac{\rho_x}{\rho_c}, \quad (3.2.56)$$

los cuales cumplen que $\Omega = \sum_x \Omega_x$.

⁵Ir a apéndice B para ver cómo se calculan los distintos valores de $w_{(x)}$

Con esto ya habríamos resuelto todas las incógnitas presentes en la métrica en la ecuación 3.2.2. Resumiendo, la métrica del universo homogéneo e isótropo responde a la ecuación 3.2.13, donde el factor $a(t)$ puede obtenerse resolviendo las ecuaciones de Friedmann (comúnmente se resuelve 3.2.41). La forma y evolución del universo dependerá del contenido de materia/energía del mismo y sus proporciones respecto al total, determinando así si el universo es plano, cerrado o abierto. Será este contenido el que nos dará diferentes soluciones concretas o modelos cosmológicos.

3.2.1. Propiedades particulares

Ahora estudiaremos particularidades de la métrica de FLRW y definiremos conceptos que nos serán de ayuda posteriormente, cuando consideremos soluciones cosmológicas particulares. Al ser, el universo homogéneo e isótropo, un universo dinámico en el que la expansión o la contracción son posibles, es interesante conocer a qué velocidad ocurriría esta. Dado que contamos con el tiempo cosmológico t , que es el mismo para todos los observadores comóviles en todos los lugares del universo, podríamos definir la distancia $D_g(t)$ entre dos puntos como la distancia radial entre dichos puntos para un mismo instante t_0 tomando a uno de ellos como origen de coordenadas (esta distancia se conoce como *distancia geométrica*). Matemáticamente, esto significa que $d\theta = d\phi = 0$ en la ecuación de la métrica 3.2.2 cuando integramos, es decir,

$$D_g(t) = \int ds = a(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}. \quad (3.2.57)$$

De modo que podemos definir la velocidad a la que se acercan o alejan las galaxias (*velocidad de recesión* v_r) como

$$v_r = \dot{D}_g(t) = \dot{a}(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = \dot{a}(t) \frac{D_g(t)}{a(t)} = H(t)D_g(t), \quad (3.2.58)$$

donde $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ (con unidades de tiempo⁻¹) se conoce como *parámetro de Hubble* y proporciona mucha información sobre la evolución del universo, pues además permite, como veremos posteriormente, calcular la edad del universo. Si la medida se realizase en el momento presente, llamando a este t_0 , emplearíamos la *constante de Hubble* $H_0 = \dot{a}(t_0)/a(t_0)$.

No obstante, estas definiciones de distancia y velocidad de recesión no resultan prácticas al estar escritas de este modo, ya que desde la Tierra no detectamos los objetos lejanos al instante, sino que vemos dónde se encontraban en su pasado, pues estamos limitados por la velocidad de la luz. En su lugar, es conveniente definir la *distancia de cono de luz*: distancia que recorre la luz desde que se emite hasta que la recibimos, lo que matemáticamente se traduce en la geodésica que recorre la luz desde que es emitida (t_e) hasta llegar a nosotros (t_r), situándonos en el origen de coordenadas (una geodésica nula cumple que $ds = 0$ y además consideramos que la luz viene directa a nosotros, $d\theta = d\phi = 0$):

$$0 = -dt^2 + a(t)^2 \frac{dr^2}{1 - kr^2}. \quad (3.2.59)$$

La distancia de cono de luz será por tanto

$$D_c = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = \int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.2.60)$$

Esta definición nos permite darle un valor cuantitativo al horizonte de partículas (de un universo originado en $t_{\text{origen}} = 0$ o que ha existido desde siempre, $t_{\text{origen}} = -\infty$). Recordando la definición

de horizonte de partículas como la distancia $D_{c(hp)}$ de un observador a una región desde la que la luz no ha tenido el tiempo t suficiente para llegar, escribimos

$$D_{c(hp)} = \int_{t_{\text{origen}}}^t \frac{dt'}{a(t')} < \infty. \quad (3.2.61)$$

Esta distancia $D_{c(hp)}$ supone el límite del universo visible y va creciendo a medida que pasa el tiempo. Del mismo modo, el horizonte cósmico de eventos puede definirse como

$$D_{c(hce)} = \int_t^{t_f} \frac{dt'}{a(t')}, \quad (3.2.62)$$

donde t es el tiempo de emisión y t_f el instante final del universo (puede ser finito en caso de colapso o infinito).

Además, en un universo en contracción o expansión de estas características se produce un fenómeno por el cual la frecuencia de una señal en su emisión difiere de la frecuencia medida en su recepción. Esto se conoce como *corrimiento al rojo cosmológico*. Demostremos esta afirmación:

Sea un observador situado en el origen de coordenadas que recibe una onda en un instante t_r . Dicha onda fue emitida con una longitud de onda λ_e en el instante t_e , anterior a t_r , en una posición $r = R$ respecto al observador. La distancia de cono de luz entre la fuente y el emisor es

$$\int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} = \int_R^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (3.2.63)$$

La siguiente cresta y valle de la onda serán emitidos tras el transcurso de un ciclo, es decir, en $t = t_e + \lambda_e$ ⁶. Por otro lado, el observador que recibe la onda con una longitud λ_r verá la siguiente cresta y valle en el instante $t = t_r + \lambda_r$. Esta parte de la onda también ha sido emitida en $r = R$ y recibida en $r = 0$, por lo que podemos escribir que

$$\int_{t_e + \lambda_e}^{t_r + \lambda_r} \frac{dt}{a(t)} = \int_R^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (3.2.64)$$

Puesto que los términos de la derecha de 3.2.63 y 3.2.64 son iguales, podemos igualar ambas expresiones:

$$\int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \lambda_e}^{t_r + \lambda_r} \frac{dt}{a(t)} \quad (3.2.65)$$

y tras sencillas operaciones con los límites de estas integrales llegamos a

$$\int_{t_r}^{t_r + \lambda_r} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_e + \lambda_e} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.2.66)$$

Teniendo presente que el período de una onda es muy pequeño, el factor de escala $a(t)$ puede considerarse constante durante dicho período, por lo que escribimos que

$$\frac{t_r + \lambda_r}{a(t_r)} - \frac{t_r}{a(t_r)} = \frac{t_e + \lambda_e}{a(t_e)} - \frac{t_e}{a(t_e)} \rightarrow \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{a_r}{a_e}. \quad (3.2.67)$$

⁶Recordemos que en las unidades empleadas la velocidad de la luz está implícita, en el SI escribiríamos $t = t_e + \lambda_e/c$.

Recordando la definición del parámetro z en 2.2.10 obtenemos finalmente que

$$1 + z = \frac{a(t_r)}{a(t_e)}. \quad (3.2.68)$$

Observando esta ecuación podemos extraer algunas conclusiones. Si el universo se expande ($a(t_r) > a(t_e)$), el parámetro z será mayor que 1, lo que implica que se producirá un corrimiento al rojo de la onda. Si, por el contrario, el universo se contrae ($a(t_r) < a(t_e)$), el parámetro z será menor que 1 y habrá un corrimiento al azul.

El parámetro de Hubble puede escribirse en función de z , de hecho este es el modo de darle un valor experimental. Para ello, consideremos que estudiamos objetos relativamente cercanos, de modo que $a(t)$ no haya tenido tiempo de variar mucho y hacemos una extrapolación lineal en la ecuación 3.2.68:

$$1 + z \approx \frac{a(t_r)}{a(t_r) - \dot{a}(t_r)(t_r - t_e)} = \frac{1}{1 - \frac{\dot{a}(t_r)}{a(t_r)}(t_r - t_e)} \approx 1 + \frac{\dot{a}(t_r)}{a(t_r)}(t_r - t_e). \quad (3.2.69)$$

Puesto que la distancia es relativamente pequeña, el tiempo $t_r - t_e$ será simplemente la distancia recorrida D_c (que se corresponde con la del cono de luz, la distancia a la que aparenta estar la galaxia cuando la observamos) dividida por la velocidad de la onda electromagnética, o sea, la de la luz, de modo que finalmente podemos escribir

$$z \approx \frac{\dot{a}(t_r)}{a(t_r)} D_c = H(t_r) D_c. \quad (3.2.70)$$

A parte de las definiciones introducidas, son importante también el *radio de Hubble* y el *tiempo de Hubble*.

El radio de Hubble $R_H(t)$ es definido como la distancia a partir de la cual la velocidad de receso v_r es igual a la de la luz:

$$R_H(t) = \frac{1}{H(t)}. \quad (3.2.71)$$

De modo que el radio de Hubble⁷ es en sí el horizonte de Hubble del que se ha hablado con anterioridad.

Por otro lado, el tiempo de Hubble $T_H(t)$ es el tiempo que necesitaría un rayo de luz para recorrer el radio de Hubble:

$$T_H = \frac{1}{H(t)}. \quad (3.2.72)$$

Este tiempo se correspondería con la edad del universo si este hubiese nacido de una singularidad y desde entonces siempre se hubiese expandido con la misma velocidad.

A la par que se define el parámetro de Hubble es interesante definir el parámetro de deceleración $q(t)$ como un modo de medir la aceleración/deceleración del universo:

$$q(t) = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \quad (3.2.73)$$

Este es un parámetro adimensional que toma valores positivos si el cambio de tamaño del universo está en deceleración y negativos si está en aceleración.

⁷ $R_H(t) = c/H(t)$ en las unidades del SI.

3.2.2. Modelos cosmológicos basados en la métrica de FLRW

Ahora estudiaremos modelos de universo que satisfacen el principio cosmológico, es decir, que son soluciones de la métrica de FLRW. Los modelos varían en función del contenido del universo. Algunos fueron considerados bastante acertados en su época, otros son solo pedagógicos y otros son muy útiles para comprender el modelo estándar de la cosmología (modelo Λ CDM), el cual se basa también en la métrica FLRW. Escribamos las ecuaciones que nos permitirán estudiar los distintos modelos de universo, estas son la ecuación de Friedmann 3.2.41, la ecuación de evolución 3.2.43 y la ecuación de aceleración 3.2.42, y se muestran a continuación en la forma más general y desarrollada posible, es decir, empleando las ecuaciones de estado y las ecuaciones que relacionan la densidad con el factor $a(t)$ para los distintos tipos de fuente (3.2.51, 3.2.52 y 3.2.53):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \frac{8\pi G}{3} \left(\rho_{m0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} + \rho_{r0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} + \rho_{\Lambda} \right) - \frac{k}{a^2}, \quad (3.2.74)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = -4\pi G \left(\frac{1}{3} \rho_{r0} \left(\frac{a}{a_{r0}}\right)^{-4} - \rho_{\Lambda} \right) - \frac{k}{2a^2}, \quad (3.2.75)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_{m0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} + 2\rho_{r0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} - 2\rho_{\Lambda} \right). \quad (3.2.76)$$

La ecuación más sencilla que nos proporciona el valor de $a(t)$ es la expresión 3.2.74. Sin embargo, es imposible encontrar una solución analítica para ella si al menos 3 de los 4 sumandos del término de la derecha son distintos de cero. Por ello, en tales casos, debemos emplear métodos numéricos.

Los distintos modelos de universo que cumplen el principio cosmológico y el postulado de Weyl varían según su contenido de materia/energía. En el siguiente esquema se exponen las distintas posibilidades de universos dominados por una única fuente, algunos reciben nombre y otros no. Algunas elecciones de contenido son incompatibles con algunas curvaturas (valores de k), mientras que existe una en concreto, el universo de De Sitter, para la que las distintas curvaturas describen un mismo espacio pero en diferentes coordenadas. Al final también aparecen algunos ejemplos de modelos que combinan varias fuentes. Todos estos modelos serán estudiados en este capítulo.

$$\text{FLRW} \left\{ \begin{array}{l} \text{Vacío: } \rho_m = \rho_r = \rho_{\Lambda} = 0 \left\{ \begin{array}{l} k = 0 \\ k = -1 \end{array} \right. \rightarrow \text{Universo de Milne} \\ \text{Materia fría: } \rho_m > 0, \rho_r = \rho_{\Lambda} = 0 \left\{ \begin{array}{l} k = 0 \rightarrow \text{Universo de Einstein-De Sitter} \\ k = 1 \\ k = -1 \end{array} \right. \\ \text{Radiación: } \rho_r > 0, \rho_m = \rho_{\Lambda} = 0 \left\{ \begin{array}{l} k = 0 \rightarrow \text{Universo de Tolman} \\ k = 1 \\ k = -1 \end{array} \right. \\ \text{Constante cosmológica: } \rho_{\Lambda} \neq 0, \rho_m = \rho_r = 0 \left\{ \begin{array}{l} \rho_{\Lambda} > 0 \rightarrow k = 0 \equiv k = \pm 1 \rightarrow \text{U. De Sitter} \\ \rho_{\Lambda} < 0 \rightarrow k = -1 \rightarrow \text{U. anti-De Sitter} \end{array} \right. \\ \text{Combinaciones: ejemplos relevantes} \left\{ \begin{array}{l} \text{Universo estático de Einstein} \\ \text{Modelo de Lemaître} \\ \text{Modelo de Eddington-Lemaître} \\ \text{Modelo } \Lambda\text{CDM} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Es importante mencionar que dado que las ecuaciones de Friedmann son ecuaciones diferenciales no lineales puede darse el caso de que un cambio en las condiciones iniciales de a lleve a comportamientos muy dispares. En la mayoría de los modelos siguientes esto sin embargo no ocurre y escribiremos la solución de la manera más sencilla posible de leer, pues una constante de integración podría simplemente ser absorbida por una redefinición de la coordenada t . No obstante, en los modelos en los que las condiciones iniciales sí repercutan en el comportamiento de la solución, sí haremos un estudio diferenciador.

Universo vacío o de Milne

Es un universo que carece de materia, de radiación y de energía oscura ($\rho_m = \rho_r = \rho_\Lambda = 0$). La ecuación de Friedmann y la ecuación de aceleración se escriben como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2}, \quad (3.2.77)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = 0. \quad (3.2.78)$$

Observado la ecuación 3.2.77 vemos que las únicas posibilidades son $k = 0$ o $k = -1$, pues en la relatividad general trabajamos sobre el cuerpo de números reales, y una raíz negativa no lo es. Diferenciamos entonces dos casos:

- $k = 0$. En este caso estaríamos en un espacio plano y con $a(t) = a_0$, es decir, estamos ante el espacio de Minkowski.
- $k = -1$. Obtenemos que $a(t) = t$ y la solución de la métrica se corresponde con el interior del cono de luz del espacio de Minkowski. Es decir que este universo no supone ninguna novedad pues en ambos casos se corresponde con el ya estudiado espacio de Minkowski.

Aún en el caso de que en nuestro universo la densidad de materia y de radiación fueran despreciables a muy grandes escalas y no existiese una constante cosmológica, este modelo nunca fue aceptado por la comunidad científica debido a sus grandes discrepancias con las observaciones.

Universos dominados por materia fría

■ Universo de Einstein-De Sitter ($k = 0$)

Este modelo de universo carece de radiación y de constante cosmológica. El contenido sería únicamente materia fría con densidad crítica ($\Omega = \Omega_r = 1$ y $\Omega_r = \Omega_\Lambda = 0$).

El hecho de que el parámetro de densidad total sea 1 implica que el universo debe ser plano ($k = 0$). Tomando la ecuación de Friedmann para estas condiciones:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_{m0}a_0^3}{3a^3}, \quad (3.2.79)$$

obtenemos la solución

$$a(t) = \left(\frac{3}{2}\Upsilon t\right)^{2/3}, \quad (3.2.80)$$

siendo $\Upsilon = \sqrt{8\pi G\rho_{m0}a_0^3/3}$ una constante con dimensiones de tiempo⁻¹, que además coincide con el parámetro de Hubble para t_0 (además normalmente se hace la normalización

$a_0 = 1$ en los universos dominados por materia). Y puesto que el espacio es plano, la métrica se escribe de la siguiente forma:

$$ds^2 = -dt^2 + \left(\frac{3}{2}\Upsilon t\right)^{4/3} \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.2.81)$$

A partir de este resultado podemos calcular el parámetro de deceleración, cuyo valor resulta ser $q = 1/2$. Estamos por lo tanto ante un universo en expansión cada vez más lenta.

Se observa que este modelo presenta una singularidad en $t = 0$ pues las componentes espaciales de la métrica se hacen cero. Para ver si la singularidad es matemática o física calculamos una contracción del tensor de curvatura, en este caso es suficiente con calcular el escalar de Ricci:

$$R = \frac{4}{3t^2}. \quad (3.2.82)$$

Se observa que para $t = 0$, R diverge, por lo que en $t = 0$ hay una singularidad física y la variable t solo está definida en el intervalo $(0, +\infty)$. La singularidad en $t = 0$ recibe el nombre de *Big Bang* y es el origen del universo. En este modelo por tanto, la edad del universo es finita.

Podemos calcular dicha edad empleando la ecuación del factor de escala 3.2.80. Consideremos el valor del factor de escala en el presente a_0 , vendrá dado por la expresión

$$a_0 = \left(\frac{3}{2}\Upsilon t_0\right)^{2/3}, \quad (3.2.83)$$

donde t_0 es el tiempo transcurrido hasta el presente, es decir, la edad de universo.

Dividiendo el factor de escala general $a(t)$ entre en factor de escala actual a_0 se obtiene:

$$\frac{a(t)}{a_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}. \quad (3.2.84)$$

Diferenciando ahora ambos lados de la ecuación respecto al tiempo t se obtiene que

$$\frac{\dot{a}(t)}{a_0} = \frac{2}{3} \frac{1}{t^{1/3} t_0^{2/3}}. \quad (3.2.85)$$

Considerando ahora $t = t_0$ llegamos a

$$\frac{\dot{a}_0}{a_0} = H_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{t_0}, \quad (3.2.86)$$

donde H_0 es la constante de Hubble actual. Reescribiendo obtenemos finalmente la edad del universo:

$$t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0}. \quad (3.2.87)$$

Este modelo de universo fue considerado por la comunidad científica como un modelo que se ajustaba bastante bien a nuestro universo hasta finales de la década de los 80. El principal problema radica en que predice una edad del universo muy corta comparada con la obtenida a través de las observaciones, además de que nuestro universo se encuentra en una expansión acelerada, no decelerada.

■ **Universos dominados por materia fría con $k = \pm 1$**

Para poder resolver la ecuación de Friedmann en estos casos emplearemos el siguiente cambio de coordenadas:

$$dT = \frac{dt}{a(t)} \Leftrightarrow dt = a(T)dT. \quad (3.2.88)$$

T es conocido como *tiempo conforme* y las coordenadas que derivan de este se denominan *coordenadas conformes*. La métrica toma por tanto la forma

$$ds^2 = a^2(T) (-dT^2 + \tilde{g}_{ij}dx^i dx^j), \quad (3.2.89)$$

y las ecuaciones de Friedmann, de evolución y de aceleración pasan a escribirse como

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}a^2\rho - k = \frac{8\pi G}{3}a^2 \left(\rho_{m0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} + \rho_{r0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} + \rho_\Lambda \right) - k \quad (3.2.90)$$

$$\frac{a''}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = -4\pi G a^2 P - \frac{1}{2}k = -4\pi G \left(\frac{1}{3}\rho_{r0} \left(\frac{a}{a_{r0}}\right)^{-4} - \rho_\Lambda \right) - \frac{k}{2a^2} \quad (3.2.91)$$

$$\frac{a''}{a} = \frac{4\pi G}{3}a^2(3P + \rho) = \frac{4\pi G}{3}a^2 \left(\rho_{m0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} + 2\rho_{r0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} - 2\rho_\Lambda \right), \quad (3.2.92)$$

donde a' y a'' indican las derivadas de $a(T)$ respecto al tiempo conforme T una y dos veces respectivamente. Un cálculo directo también revela que el escalar de Ricci y el tensor de Ricci en estas nuevas coordenadas se escribe como

$$R = 6 \left(\frac{a''}{a^3} + \frac{k}{a^2} \right), \quad (3.2.93)$$

$$R_{TT} = -3 \left(\frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \right), \quad (3.2.94)$$

$$R_{ij} = \tilde{g}_{ij} \left(2k + \frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \right), \quad (3.2.95)$$

donde i y j corren sobre las coordenadas espaciales. Estas expresiones nos serán útiles posteriormente para estudiar singularidades.

Volviendo ahora a nuestro caso particular ($\rho_m > 0$ y $\rho_r = \rho_\Lambda = 0$) podemos emplear la ecuación de evolución 3.2.91 y reescribirla considerando el parámetro de Hubble en coordenadas conformes $h = a'/a$, llegando a

$$2h' + h^2 + k = 0. \quad (3.2.96)$$

De esta ecuación es posible hallar el tiempo conforme integrando:

$$T = -2 \int \frac{dh}{h^2 + k}. \quad (3.2.97)$$

Y estudiamos ahora que ocurre para $k = 1$ y $k = -1$.

- $k = 1$. Se obtiene que

$$T = -2 \int \frac{dh}{h^2 + 1} = 2\text{arccoth}h \rightarrow h = \cot \frac{T}{2} \quad (3.2.98)$$

o equivalentemente que

$$a(T) = \Upsilon' \sin^2 \frac{T}{2}. \quad (3.2.99)$$

con $\Upsilon' = 8\pi G\rho_{m0}a_0^3/3$ siendo una constante con unidades de longitud ($\Upsilon' = \Upsilon^2/c^2$ en SI). Para interpretar el resultado debemos volver a las coordenadas comóviles. Sin embargo tan solo es posible escribir t como función de T y no al contrario:

$$t = \frac{1}{2}\Upsilon'(T - \sin T). \quad (3.2.100)$$

Aún así, las expresiones 3.2.99 y 3.2.100 nos permiten realizar una buena interpretación de la forma de $a(t)$ a través de métodos más gráficos y computacionales, llegando a observar que la forma de $a(t)$ es la de una cicloide (curva que describe un punto de una circunferencia cuando esta rueda sin deslizarse sobre una recta). Podemos observar además singularidades en $T = 2\pi n \equiv t = \Upsilon\pi n$ que, para saber si son matemáticas o físicas debemos analizar con los invariantes de curvatura. El cálculo del escalar de Ricci

$$R = \frac{3}{\Upsilon'^2 \sin^6(T/2)} \quad (3.2.101)$$

arroja que en los puntos $T = 2\pi n \equiv t = \Upsilon\pi n$ con $n \in \mathbb{N} \cup 0$ nos encontramos ante singularidades físicas. Todo estas características nos permiten explicar el comportamiento de este universo: nace de una singularidad (Big Bang) en $t = 0$ expandiéndose muy rápido cuando es joven, según avanza el tiempo la expansión es cada vez más lenta hasta que llega un momento en el que la materia logra frenar la expansión e invertirla (instante $t = \Upsilon'\pi/2$), provocando, tras el mismo periodo de tiempo que le llevó a su expansión máxima, un recolapso en $t = \Upsilon'\pi$ (fenómeno conocido como *Big Crunch*). Es interesante mencionar que existen teorías que defienden que un universo de tipo Big Bang-Big Crunch podría ser un universo cíclico, es decir, existirá una cadena infinita de Big Bangs y Big Crunchs de modo de que el universo nacería y moriría de forma cíclica.

- $k = -1$. Se consigue que

$$T = -2 \int \frac{dh}{h^2 + 1} = 2\text{arccoth}h \rightarrow h = \coth \frac{T}{2} \quad (3.2.102)$$

y que

$$a(T) = \Upsilon' \sinh^2 \frac{T}{2}. \quad (3.2.103)$$

Al igual que en caso anterior lo único que podemos escribir es t como función de T y no al contrario:

$$t = \frac{1}{2}\Upsilon'(\sinh T - T). \quad (3.2.104)$$

Al calcular el escalar de Ricci

$$R = \frac{3}{\Upsilon'^2 \sinh^6(T/2)}, \quad (3.2.105)$$

observamos que en el puntos $T = 0 \equiv t = 0$ existe una singularidad física, lo cual indica que este universo también nació de una singularidad (Big Bang). Además las

expresiones 3.2.103 y 3.2.104 nos siguen permitiendo interpretar la forma de $a(t)$: el factor de escala crece indefinidamente desde que nace el universo y para un T muy grande es posible aproximar t según la función

$$t \approx \frac{1}{4} \Upsilon' e^T, \quad (3.2.106)$$

o, lo que es lo mismo,

$$a(t) \approx t. \quad (3.2.107)$$

Es decir, este universo dominado por materia cuya densidad está por debajo de la densidad crítica se caracteriza por ser finito (nacer de una singularidad) y expandirse cada vez más hasta aproximarse, después de mucho tiempo, al universo de Milne (para $k = -1$).

Finalmente, para facilitar la visualización de estos modelos de universo dominados por radiación se realiza una representación gráfica en la figura 3.1 de $a(t)$ frente a t para los distintos valores de k para unas constantes Υ y Υ' elegidas arbitrariamente.

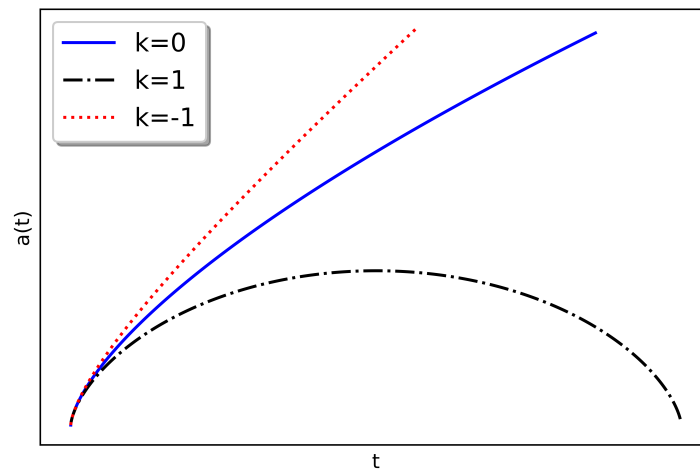


Figura 3.1: Representación de $a(t)$ frente a t en un universo dominado por materia para los distintos valores de k y para unas constantes Υ y Υ' elegidas arbitrariamente. Se puede apreciar como el universo recolapsa para un valor de $k = 1$ y se expande hasta el infinito para $k = 0$ y $k = -1$, siendo la expansión más rápida en el último caso. (Gráfica realizada con Python).

Universos dominados por radiación

Un universo con $\rho_r > 0$ y $\rho_m = \rho_\Lambda = 0$ admite los tres valores de k .

■ Universo de Tolman o dominado por radiación con $k = 0$

La ecuación de Friedmann 3.2.74 queda como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G \rho_{r0} a_0^4}{3a^4}, \quad (3.2.108)$$

cuya solución es

$$a(t) = (2Dt)^{1/2}, \quad (3.2.109)$$

con $D = \sqrt{8\pi G\rho_{r0}a_0^4/3}$, una constante que tiene unidades de tiempo⁻¹ y que también coincide con el parámetro de Hubble para t_0 (además en este tipo de universos también suele escogerse $a_0 = 1$). En este caso estamos ante un universo plano dominado por radiación, el factor $a(t)$ crece proporcionalmente a $t^{1/2}$.

En $t = 0$ observamos una singularidad (se anularía la parte espacial del diferencial de línea) cuya naturaleza, física o matemática, debemos determinar a través de algún invariante de curvatura. En este caso, el escalar de Ricci no nos proporciona esa información porque es 0 en todos los puntos por construcción. En su lugar empleamos el invariante

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{3}{4t}, \quad (3.2.110)$$

observando que diverge para $t = 0$ y que este universo también nace de una singularidad. La edad de este universo puede obtenerse similarmente a como se obtuvo para un universo plano con materia, resultando en

$$t_0 = \frac{1}{2H_0}. \quad (3.2.111)$$

■ Universos dominados por radiación con $k = \pm 1$

Para obtener las características de estos modelos de universo es necesario volver a recurrir a las coordenadas conformes. De la ecuación de Friedmann en coordenadas conformes 3.2.90 y con nuestras condiciones, $\rho_r > 0$ y el resto de densidades cero, obtenemos que

$$dT = \frac{da}{\sqrt{D'^2 - ka^2}}. \quad (3.2.112)$$

con $D' = \sqrt{8\pi G\rho_{r0}a_0^4/3}$ siendo una constante con unidades de longitud ($D' = D/c$ en SI). Haciendo el cambio de variable $a^2 = D'^2x^2$ podemos escribir la expresión anterior como

$$T = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - kx^2}}. \quad (3.2.113)$$

Analizamos esta solución para los dos valores de k restantes.

- $k = 1$. Obtenemos que $T = \sin^{-1} x$, y deshaciendo el cambio y despejando conseguimos que

$$a(T) = D' \sin T. \quad (3.2.114)$$

Por otro lado, de la definición de tiempo conforme se sigue que

$$t = D'(1 - \cos T). \quad (3.2.115)$$

Estos dos resultados nos permiten conocer la forma de $a(t)$ empleando una representación paramétrica.

Observamos singularidades en $T = 0 \equiv t = 0$ y en $T = \pi \equiv t = 2D'$. El escalar de Ricci es cero por construcción, pero si calculamos el invariante

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{12}{D'^4 \sin^4(T)}, \quad (3.2.116)$$

revela que ambas son singularidades físicas, pues diverge para esos valores.

Este modelo de universo nace por tanto de una singularidad, $a(t)$ crece hasta llegar a un valor máximo para $T = \pi/2 \equiv t = D'$ y se contrae hasta recolapsar en $t = 2D'$.

- $k = -1$. En este caso la solución es $T = \sinh^{-1} x$, es decir,

$$a(T) = D' \sinh T \quad (3.2.117)$$

y

$$t = D'(\cosh T - 1), \quad (3.2.118)$$

mostrando que $a(t)$ crece para siempre cada vez más lentamente.

El escalar de Ricci es también siempre cero en este caso, por lo que para estudiar la naturaleza de las singularidades calculamos

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{12}{D'^4 \sinh^4(T)}, \quad (3.2.119)$$

mostrando que en $T = 0 \equiv t = 0$ existe una singularidad física.

Por tanto, un universo abierto dominado por radiación nacería de una singularidad y se expandiría para siempre, siendo esta expansión más rápida en tiempos jóvenes.

Podemos observar una clara analogía entre modelos de universo dominados por materia y por radiación, aunque la evolución siga funciones diferentes: todos nacen de una singularidad, se expanden para siempre para $k = 0$ y $k = -1$ y recolapsan para $k = 1$. En la figura 3.2 se muestra una representación de $a(t)$ frente a t en los universos dominados por radiación para los distintos valores de k y para unas constantes D y D' elegidas arbitrariamente.

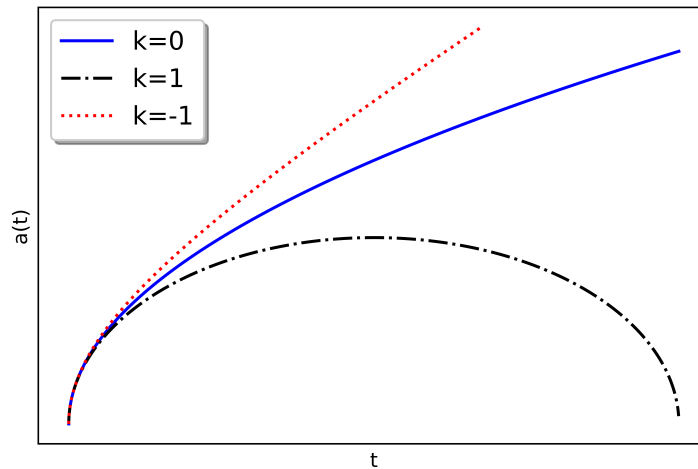


Figura 3.2: Representación de $a(t)$ frente a t en un universo dominado por radiación para los diferentes valores de k y para unas constantes D y D' escogidas arbitrariamente. Al igual que en los universos dominados por materia, se puede observar que el universo recolapsa para un valor de $k = 1$ y se expande hasta el infinito para $k = 0$ y $k = -1$, siendo la expansión más rápida para $k = -1$. (Gráfica realizada con Python).

Universos dominados por constante cosmológica

■ Universo con Λ positiva o de De Sitter

Es un universo sin materia ni radiación pero sí con constante cosmológica positiva ($\rho_m = \rho_r = 0$, $\rho_\Lambda > 0$). Este contenido permite los tres valores de k :

- $k = 0$. Al emplear la ecuación de Friedmann con estas condiciones en un universo plano obtenemos el factor de escala

$$a(t) = e^{Ht}, \quad (3.2.120)$$

donde $H = \dot{a}/a = \sqrt{\Lambda/3}$ es la constante de Hubble en este universo (y se ha escogido $a = 1$ para $t = 0$). Es un universo plano en expansión exponencial infinita cuyo parámetro de deceleración es constante con valor $q = -1$, por lo que cada vez se expande más rápido.

Debido a la expansión acelerada, en este universo existe un horizonte cósmico de eventos, que según la ecuación 3.2.62 se encuentra a

$$D_{g(hce)} = \frac{e^{-Ht}}{H}, \quad (3.2.121)$$

es decir, el universo accesible decrece exponencialmente con el tiempo.

Cada estado de este universo es un cambio en la escala de uno anterior, ha existido siempre y siempre existirá.

- $k = \pm 1$. Un calculo directo da el valor del factor de escala:

$$a(t) = \frac{\cosh(Ht)}{H} \quad (3.2.122)$$

para $k = 1$ y

$$a(t) = \frac{\sinh(Ht)}{H} \quad (3.2.123)$$

para $k = -1$.

Si ahora calculamos el tensor de Riemann obtendremos que para todos los casos de k se obtiene el mismo valor:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = H^2(g_{\rho\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\rho\sigma}g_{\nu\lambda}). \quad (3.2.124)$$

Recordemos que el tensor de Riemann toma la forma 3.2.1 cuando la curvatura es contante (debemos tener presente sin embargo que H no es el parámetro de Hubble para $k = \pm 1$). En este caso la curvatura no es solo constante a nivel espacial sino también a nivel temporal, siendo así, el espacio de De Sitter, la máxima expresión de la simetría en 4 dimensiones. Teniendo en cuenta además que la forma 3.2.1 es única para cada valor de K y hemos obtenido el mismo valor para todos los k (3.2.124), observamos que el universo de De Sitter es el mismo para los distintos valores de k , solo que expresado en coordenadas diferentes, efectivamente la geometría se esta viendo afectada por el sistema de coordenadas empleado en este caso, haciendo que para el caso $k = 1$ se produzca un rebote, es decir, el universo decrece desde un valor infinito y rebota para crecer por siempre. Además no existen singularidades físicas en estos modelos.

Aprovechamos también este modelo de universo para introducir lo que sería una extensión del principio cosmológico, el principio *cosmológico perfecto*. Según este, el universo sería isótropo y homogéneo en el espacio y en el tiempo, lo cual puede traducirse matemáticamente, entre otras cosas, en un parámetro de Hubble constante, dando lugar a la métrica hallada en este modelo. Cabe mencionar que aunque este principio se haya cumplido de forma natural en universos dominados por una constante cosmológica positiva, no significa que sea exclusivo de ellos, siempre podríamos imponer el principio cosmológico perfecto

y trabajar a partir de ahí. Por ejemplo, imponiendo dicha condición y suponiendo un universo dominado por materia en expansión llegaríamos a la conclusión de que en dicho universo es necesaria una creación de materia constante (teoría conocida como *Teoría del estado estacionario*), pues el universo debe verse igual de homogéneo e isótropo a lo largo del tiempo, y esto solo es posible manteniendo la densidad de materia constante, incluso en caso de expansión, para lo cual se precisa de dicha creación continua. No obstante, la evidencia observacional parece no estar de acuerdo con la Teoría del estado estacionario.

■ Universo con Λ negativa o de anti-De Sitter

Observado la ecuación de Friedmann puede verse que la única curvatura compatible con este tipo de universo es la dada por $k = -1$. El valor del factor de escala es

$$a(t) = \frac{\sin(Jt)}{J} \quad (3.2.125)$$

con $J = \sqrt{-\Lambda/3}$

Este universo ha existido desde siempre y siempre lo hará, las singularidades presentes son solamente matemáticas, indicando que no colapsa. En este espacio, dos partículas se alejarían primeramente la una de la otra para posteriormente ser frenadas y volver al lugar del que partieron.

No obstante, no profundizaremos más en este universo, pues para hacer un completo tratamiento del mismo sería necesario emplear una quinta dimensión, además de que considerar una constante cosmológica negativa en el marco de la métrica de FLRW representa más un ejercicio matemático que físico, pues va en contra de todas las observaciones. Aún así, esta métrica se aplica en estudios en otras ramas de la física.

Universo estático de Einstein

Fue el primer modelo cosmológico y fue propuesto por el propio Einstein. Einstein llegó a esta solución considerando la constante cosmológica e imponiendo que el universo debía ser estático (sin expandirse ni contraerse) como respuesta al pensamiento científico de la época.

Matemáticamente un universo estático debe cumplir $\dot{a} = \ddot{a} = 0$ y la ecuación de aceleración, al combinarla con las distintas ecuaciones de estado, toma la forma

$$0 = -\frac{4\pi G}{3} \sum_{(x)} (3w_{(x)} + 1)\rho_{(x)} \rightarrow 0 = \rho_m + 2\rho_r - 2\rho_\Lambda. \quad (3.2.126)$$

Históricamente, Einstein únicamente derivó el modelo considerando que estaba dominado por materia y por la constante cosmológica ($\rho_r = 0$) llegando a

$$\rho_m = 2\rho_\Lambda. \quad (3.2.127)$$

Es decir, las densidades deberían estar ajustadas exactamente como indica esta ecuación, para lo cual no había ninguna explicación ni evidencia.

Resolviendo ahora la ecuación de Friedmann teniendo en cuenta 3.2.127 llegamos a

$$a^2 = \frac{k}{4\pi G\rho_m} = \frac{k}{\Lambda}. \quad (3.2.128)$$

El único valor posible de k es 1, pues -1 daría una raíz negativa y 0 significaría que no hay universo. Es decir, el universo estático de Einstein tendría forma esférica y puesto que no se contrae ni se expande, un rayo de luz podría dar la vuelta al universo y volver a su punto de

partida (por ejemplo, no habría horizonte o corrimiento al rojo que lo impidiese como en otros casos). Este universo es, por tanto, finito, ilimitado y sin principio ni final.

Las observaciones posteriores determinaron que nuestro universo está en expansión y el universo estático de Einstein fue rechazado. Además, años más tarde se demostró que el universo estático presentado por Einstein es inestable, lo cual puede verse en los modelos a estudiar a continuación: modelos de Lemaître y de Eddington-Lemaître.

Modelo de Lemaître y modelo de Eddington-Lemaître

El **modelo de Lemaître** supone un universo dominado por materia y por una constante cosmológica positiva con $k = 1$.

Para explicar este modelo es necesario calcular una cantidad en el universo estático de Einstein: $\rho_m a^3$. Esta cantidad indica la cantidad de materia/energía en un elemento de volumen a^3 , y es constante, lo cual se deduce de la ecuación de conservación 3.2.45, pues la materia fría carece de presión. En el universo estático de Einstein el valor de $\rho_m a^3$ puede hallarse considerando las ecuaciones 3.2.127 y 3.2.128 (recordando que con $k = 1$):

$$\rho_m a^3 = \frac{1}{4\pi G \sqrt{\Lambda}} \quad (3.2.129)$$

Ahora bien, es posible establecer la evolución general de un universo dominado por materia y por constante cosmológica positiva en función del valor de Λ . El valor que supone una ruptura es Λ_c , que viene de sustituir Λ en 3.2.129:

$$\Lambda_c = \left(\frac{1}{4\pi G \rho_m a^3} \right)^2. \quad (3.2.130)$$

de modo que podemos clasificar tres evoluciones según Λ sea mayor, igual o menor que Λ_c .

Desafortunadamente, puesto que en este modelo hay tres sumandos distintos de cero en la ecuación de Friedmann, no podemos hallar una solución analítica para $a(t)$, pero sí llegar a conclusiones analizando la ecuación de Friedmann 3.2.74 y aplicando lo que ya sabemos de modelos anteriores.

Si $\Lambda > \Lambda_c$ tenemos que:

1. Inicialmente, puesto que la cantidad de materia es superior a la del universo estático de Einstein, el modelo se comportará de manera similar a un universo dominado por materia con $k = 1$, es decir, nace de una singularidad y en eras tempranas $a(t)$ crece de manera aproximadamente proporcional a $t^{2/3}$ (en eras tempranas el comportamiento de $a(t)$ en un universo dominado por materia es muy similar para los tres valores de k , como muestra la figura 3.1).
2. A medida que pasa el tiempo la velocidad con la que crece $a(t)$ va decreciendo, pues la materia se va diluyendo y la densidad de constante cosmológica, que es constante, comienza a ser comparable con la de materia.
3. Llega un momento en el se cumple la relación necesaria entre la densidad de energía oscura y de materia estudiada en el universo estático de Einstein, de modo que alrededor de este punto, en un intervalo de tiempo conocido como *coasting period*, el universo parece ser estático. Este período será, como cabe esperar, mayor cuanto menor sea el valor de la constante cosmológica.
4. Finalmente, al irse diluyendo aún más la materia, el universo empieza a parecerse a uno dominado únicamente por una constante cosmológica, de modo que tiende progresivamente al espacio de De Sitter y a una expansión acelerada.

Por otro lado, el **modelo de Eddington-Lemaître** es un caso límite del modelo de Lemaître en el que $\Lambda = \Lambda_c$, y por tanto el cosasting period tiene una duración infinita. En este caso hay dos posibilidades dependiendo de la condición inicial de $a(t)$.

Si nuestra condición inicial es tal que $a = 0$ para $t = 0$, entonces el valor de a se acercará asintóticamente al valor del universo estático de Einstein $a = 1/\sqrt{\Lambda}$. Si por el contrario establecemos como condición inicial que $a = 1/\sqrt{\Lambda}$ para $t = 0$, el valor de $a(t)$ crecerá acercándose cada vez más al valor dado por el espacio de De Sitter y mostrando así que el universo estático de Einstein es inestable.

Por último, si $0 < \Lambda < \Lambda_c$ dos comportamientos son posible dependiendo de la condición inicial. Existe un rango de valores de la condición inicial de $a(t)$ para el que el universo nace de una singularidad, se expande cada vez más despacio y se contrae para recolapsar (esto ocurre porque la densidad de materia "gana" a la constante cosmológica). Además existe otro rango de valores para el que el universo viene decreciendo y rebota para crecer para siempre, como en el caso de De Sitter para $k = 1$.

Resulta muy ilustrativo, en caso de $a(0) = 0$, un manuscrito de Lemaître en el que representa la evolución de $a(t)$ frente a t para distintos valores de la constante cosmológica, véase la figura 3.3.

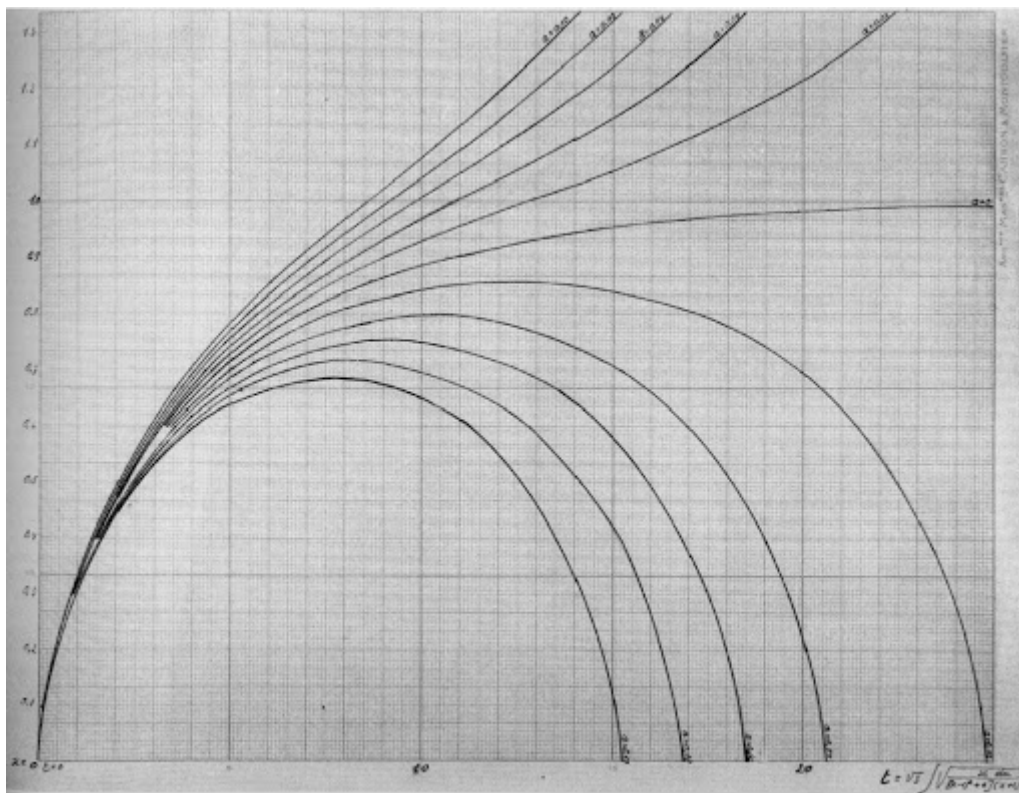


Figura 3.3: Representación de $a(t)$ frente a t en un universo dominado por materia y por constante cosmológica positiva para $k = 1$ y con condición inicial $a(0) = 0$ (en el manuscrito está escrito $x(0) = 0$). Se puede apreciar como el universo recolapsa para valores de la constante cosmológica inferior a la crítica, tiende a un valor constante para la crítica y se expande para siempre si el valor es superior. Imagen extraída de "Lemaître, G. (1927). Manuscripts. Louvain University, Lemaître archive".

Hemos visto que jugando con la composición del universo y con los valores iniciales del factor de escala podríamos obtener infinidad de modelos diferentes, pero nuestro siguiente paso es estudiar lo que hoy en día se considera el modelo más acertado para describir nuestro universo, el modelo Λ CDM.

3.2.3. Modelo estándar de la cosmología

El modelo cosmológico más aceptado actualmente por la comunidad científica es, como ya se ha comentado, el modelo Λ CDM. Abordaremos este modelo desde la relatividad general aunque también hablaremos de algunas de sus áreas que conciernen a la física de partículas sin profundizar en ellas. Este es el modelo más sencillo capaz de explicar las observaciones, entre las que se encuentran:

- La radiación de fondo de microondas: radiación de un cuerpo negro de 2,7 K de temperatura que llena el cosmos en su totalidad, como ya mencionamos.
- La aparente expansión acelerada del universo, que se ve reflejada en el corrimiento al rojo de las galaxias lejanas.
- La distribución de las galaxias a muy gran escala.

Dicho modelo se basa en un universo isótropo y homogéneo, es decir, en la métrica de FLRW, aunque se llevan a cabo estudios en los que se incluyen pequeñas perturbaciones para poder explicar correctamente la formación de estructuras del universo:

$$g_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu} \quad (3.2.131)$$

donde $g_{\mu\nu}$ sería la métrica de nuestro universo, $\hat{g}_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura en métrica de FLRW, $|\epsilon| \ll 1$ y $h_{\mu\nu}$ es una función desconocida a ser determinada empleando las ecuaciones de Einstein.

Al basarse en la métrica de FLRW reconoce que el universo puede ser abierto, plano o cerrado dependiendo de su parámetro de densidad total Ω o de su curvatura k , siempre constante. Actualmente las observaciones sitúan el valor de Ω muy cercano a 1, indicando que nuestro universo es plano. Además actualmente los componentes más relevantes serían la materia y la energía oscura/constante cosmológica en las proporciones aproximadas $\Omega_{m0} = 0,3$ y $\Omega_{\Lambda0} = 0,7$ (el parámetro de radiación tiene un valor muy pequeño, $\Omega_{r0} = 8 \cdot 10^{-5}$ aproximadamente). Sin embargo, el contenido material se divide así mismo en dos, en el de materia bariónica (la materia que conocemos, la común) con aproximadamente $\Omega_{mb} = 0,04$ y la *materia oscura* con aproximadamente $\Omega_{mo} = 0,26$. La materia oscura es un tipo de materia transparente a la radiación electromagnética y su naturaleza es desconocida. Su existencia se infiere principalmente por los efectos gravitacionales observados en galaxias y cúmulos de galaxias.

Puesto que el universo está en expansión, este modelo establece que, o bien el universo tuvo un origen (como en tantos modelos estudiados) o bien se contrajo para volver a expandirse (proceso similar al del universo de De-Sitter en el marco de $k = 1$) o empezó a expandirse desde un estado estacionario (como en la solución de Eddington-Lemaître). Sea como fuere, este modelo plantea, a grandes rasgos, la existencia de **seis épocas** en la historia del universo, siendo la teoría de que nació de una singularidad la más aceptada. Además el modelo Λ CDM, ofrece un valor de la edad del mismo: 13799 millones de años. Este número puede obtenerse de varios modos, y uno de ellos es a partir de la ecuación de Friedmann como mostramos a continuación.

Primero escribimos los parámetros de densidad parciales 3.2.56 evaluándolos en el tiempo actual t_0 y combinándolos con la expresión del parámetro de Hubble para el momento actual

$H_0 = \dot{a}_0/a_0$, resultando en

$$\Omega_{r0} = \frac{8\pi G\rho_{r0}}{3H_0^2}, \quad (3.2.132)$$

$$\Omega_{m0} = \frac{8\pi G\rho_{m0}}{3H_0^2}, \quad (3.2.133)$$

$$\Omega_{\Lambda 0} = \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \quad (3.2.134)$$

Ahora tomamos la ecuación de Friedmann 3.2.74, sustituimos los valores de los parámetros anteriores, empleamos las definiciones de H y de H_0 y multiplicamos a ambos lados de la igualdad por la densidad crítica del universo 3.2.54, llegando a la ecuación

$$H^2 = H_0^2 (\Omega_{r0}(a/a_0)^{-4} + \Omega_{m0}(a/a_0)^{-3} + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{k0}(a/a_0)^{-2}). \quad (3.2.135)$$

La edad del universo t_0 puede ser obtenida calculando la expresión de t a partir de la ecuación de Friedmann:

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \int_0^{a_0} \frac{1}{H} \frac{da}{a} = \int_0^{a_0} \frac{da}{aH_0\sqrt{\Omega_{r0}(a/a_0)^{-4} + \Omega_{m0}(a/a_0)^{-3} + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{k0}(a/a_0)^{-2}}}, \quad (3.2.136)$$

donde $\Omega_{k0} = k/a_0^2 H_0^2$. Es común, y más práctico, expresar esta ecuación en función del corrimiento al rojo z , por lo que usando 3.2.68 ($t \equiv t_e$ y $t_0 \equiv t_r$) se llega a

$$t_0 = \int_\infty^0 \frac{dz}{(1+z)H_0\sqrt{\Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{k0}(1+z)^2}} \quad (3.2.137)$$

Aplicando los valores ya expuestos para los parámetros de densidad parciales, con $\Omega_{k0} = 0$ pues $k = 0$ y con el valor aproximado de $H_0 = 70$ km/s/Mpc (estimado observacionalmente), se puede obtener el valor mostrado arriba de la edad del universo.

Hablemos ahora de las diferentes épocas de nuestro universo según este modelo.

1. **Origen, rebote o expansión desde un estado estacionario** Si se parte de una singularidad sería el momento en el que el espacio, el tiempo y la materia se formaron. La teoría de la relatividad no puede explicar el instante cero. Sin embargo, existen algunas teorías candidatas a convertirse en la *Teoría del Todo*⁸ que sí podrían, pero están muy lejos de su aprobación o rechazo por falta de datos y experimentación.
2. **Inflación cósmica** ($< 10^{-35}$ s). Correspondería a una época en la que se produjo una expansión ultrarrápida del universo y que explicaría por qué el universo resulta tan isótropo y homogéneo. Si el universo es homogéneo e isótropo esto tiene que deberse a que las distintas partes han tenido la misma cantidad de materia/energía en una edad temprana y el universo ha ido evolucionando como si todas sus partes estuviesen en equilibrio, lo cual resulta difícil de explicar debido a que el límite al que se puede transmitir información es la velocidad de la luz y en la edad que tiene nuestro universo según esta teoría sería un hecho imposible (este problema se conoce como *problema del horizonte*). La inflación cósmica haría que en la edad más temprana, en la que el universo era pequeño y estaba en equilibrio, se produjese una expansión tan rápida que aislaría distintas regiones del espacio con la misma cantidad de materia/energía, las cuales evolucionarían imponiendo la homogeneidad a muy gran escala. Aún es un misterio si esta etapa existió realmente

⁸Teoría que unificaría todas las áreas de la física

y cuál sería su causa, pues en un universo únicamente dominado por materia y radiación no sería posible una expansión tan rápida.

La constante cosmológica es de poca utilidad aquí, pues como su nombre indica es una constante. Si se produjese una expansión acelerada del universo producida por una constante cosmológica, esta debería continuar cada vez más rápidamente, ya que su densidad se mantiene constante fomentando la aceleración de la expansión. Por otro lado, la radiación y la materia tratarían de frenarla, pero sin éxito, pues sus densidades decrecen a medida que el universo se hace más grande (compárense las ecuaciones 3.2.51, 3.2.52 y 3.2.53).

Así mismo, hay teorías que no consideran esta época como necesaria para explicar la aparente homogeneidad e isotropía del universo.

- 3. Era dominada por la radiación** (10^{-35} s \sim 47000 años). En esta época se encontraba materia ionizada y radiación en equilibrio. Es también en una parte de este período, en el que universo se encontraba a unos 10^8 K, cuando se formaron los elementos más ligeros: deuterio y helio, por medio de captura electrónica. Además la evolución del contenido del universo sería muy cercana a la expuesta en la ecuación 3.2.52 y la evolución del factor de escala $a(t)$ sería proporcional a $t^{1/2}$ como se ha visto en el caso de universos planos dominados por radiación. Este estadio termina, estrictamente hablando, cuando la densidad de masa materia sorpasa a la de radiación (\sim 47000 años). Aunque a veces se considera que la era acaba cuando la temperatura del cosmos decae hasta la temperatura de ionización de la materia (\sim 378000 años), la cual resulta en el desacoplamiento de la materia y la radiación y en una emisión cósmica a una temperatura aproximada de 4000 K. Mediante las relaciones de absorción y la densidad de energía de los fotones dadas por la física estadística se llega a que la temperatura de los fotones emitidos en aquel momento viene dada por la ecuación

$$T(t) = \frac{T_0 a_0}{a(t)}, \quad (3.2.138)$$

de modo que hoy en día la temperatura de esta radiación es de 2,7 K y se conoce como radiación de fondo de microondas.

El cálculo de los instantes en los que una densidad supera a otra se puede llevar a cabo mediante las relaciones de evolución de la densidad de los distintos componentes (3.2.51, 3.2.52 y 3.2.53).

- 4. Era dominada por materia** ($47000 \sim 9,8 \cdot 10^9$ años). La materia pasa a ser dominante debido a que la radiación se diluye mucho más rápido (veánse las ecuaciones 3.2.51 y 3.2.52). Las diferentes estructuras presentes en el universo se fueron creando de menor a mayor, empezando por las estrellas, gracias a las cuales también surgieron los elementos más pesados. Y puesto que el universo se considera plano, la evolución del factor de escala $a(t)$ fue proporcional a $t^{2/3}$ como hemos estudiado. Esta época termina cuando la densidad de energía oscura supera a la de materia.
- 5. Expansión acelerada del universo (actualidad)** ($> 9,8 \cdot 10^9$ años). En esta época las observaciones parecen indicar que una expansión acelerada del universo se está produciendo, siendo esta compatible con un universo dominado por la energía oscura o constante cosmológica (aunque la materia es aún muy significativa). Ya no es posible la creación de nuevas grandes estructuras en esta época.
- 6. Destino del universo.** Puesto que la materia y la radiación se diluyen y la densidad de la energía oscura permanece constante es lógico pensar que el universo seguirá expandiéndose

cada vez más rápidamente de manera indefinida, haciéndose más y más frío y llegando a impedir eventualmente la nueva creación de estrellas. Así, cuando mueran todas las estrellas y la materia y la radiación se encuentren altamente diluidas, el universo será un lugar oscuro y con una temperatura muy baja (teoría conocida como *muerte térmica del universo*). A este fenómeno se le suma el hecho de que si la expansión se produce cada vez más rápidamente, llegará un momento en el que afectará a puntos que se encuentren muy cerca, y la atracción gravitatoria u otras fuerzas elementales no podrán hacerle frente, provocando que todas las estructuras se descompongan en sus partículas elementales y quedando estas aisladas (teoría conocida como *Big Rip*).

Actualmente se piensa que la energía oscura es la manifestación de la constante cosmológica, pero si se diese que dicha energía, que actualmente produce la expansión acelerada del universo, responde en realidad a otro mecanismo y cambiase su comportamiento, lo cual se baraja puesto que su naturaleza nos es incierta, el futuro del universo sería desconocido. En caso de que se probase, por ejemplo, que la energía oscura también se diluye, el universo podría seguir expandiéndose infinitamente pero a distinta velocidad (en caso de ser abierto o plano) o incluso podría colapsar o rebotar (lo cual sería posible si fuese cerrado), permitiendo contemplar además teorías del universo cíclico.

3.3. Modelos cosmológicos que no satisfacen el principio cosmológico

En la búsqueda de explicar el cosmos es necesario hacerse la pregunta de si el universo es realmente homogéneo e isótropo, o si esta asunción, hecha cuando la cosmología como rama de la física era aún muy joven, es un error que debe ser corregido. Fue de hecho Karl Popper quien mostró su rechazo a este principio (y a su extensión de principio cosmológico perfecto) manifestado que es un dogma, fruto de nuestra falta de conocimiento, que nunca debió ser propuesto. Además, las motivaciones que nos llevan a considerar un modelo de universo que no satisfaga dicho principio no son ninguna nimiedad: anisotropías en la radiación de fondo de microondas, estructuras que ponen en entredicho la homogeneidad del universo, la materia y energía oscura, la inflación... y por supuesto, la importancia de contar con un modelo teórico cuyas predicciones puedan ser comparadas con las observaciones.

En este escrito presentaremos tres métricas que se contendrán en el apéndice D, pues debido a la limitación de extensión de este escrito no es posible explicarlas en profundidad, ya que cada una de ellas requeriría un estudio similar o aún más elaborado que el realizado para la métrica de FLRW. Las tres métricas introducidas que no satisfacen el principio cosmológico son el universo de Gödel, la métrica de Lemaître-Tolman-Bondi y la métrica de los Szekeres. El de Gödel es homogéneo y anisótropo, los de LTB son inhomogéneos e isótropos y los Szekeres son inhomogéneos y anisótropos (realmente la métrica de LTB es un caso particular de los Szekeres).

Capítulo 4

Conclusión

La Teoría de la Relatividad General ofrece unas herramientas de trabajo que han probado su utilidad y capacidad de predicción. Su uso, como hemos visto, ha permitido el desarrollo de una nueva rama de la ciencia: la Cosmología.

En este escrito hemos analizado numerosas soluciones a las ecuaciones de Einstein, las cuales nos ofrecen diferentes modelos de universo. Hemos analizado sus características y comentado si darían explicaciones satisfactorias a las observaciones.

Como hemos podido ver, el modelo que hoy en día estaría en mayor consonancia con los datos, y los explicaría de la manera más sencilla posible, es el modelo Λ CDM, que se fundamenta en la métrica de un universo homogéneo e isótropo. La incapacidad para poder realizar ciertos experimentos hace que, en esta disciplina de la física, la teoría vaya aún muy por delante de la experimentación y muchas incógnitas quedan por resolver, como la naturaleza de la energía oscura. Sin embargo, la cosmología sigue avanzando como ciencia y cada vez más caminos son contemplados como posibles, tanto dentro del propio modelo, como fuera (universos inhomogéneos e isótropos). Solo el tiempo nos proporcionará los suficientes datos del cosmos que nos rodea como para poder aceptar o descartar las diferentes hipótesis.

Apéndice A

Herramientas matemáticas

A.1. Coordenadas covariantes y contravariantes (vectores, bases y tensores) y espacios

La motivación de introducir los conceptos de covarianza y contravarianza es poder definir propiamente el producto escalar y los elementos con los que se trabaja en la Teoría de la Relatividad.

Sea A un punto de un espacio de N dimensiones. Dado un sistema de referencia (un origen y una base \mathbf{e}_i), dicho punto viene dado por su vector de posición, \mathbf{a} , según sus coordenadas ¹ en la base \mathbf{e}_i :

$$\mathbf{r} = x^i \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.1.1})$$

En vez de usar la base \mathbf{e}_i , se podría haber empleado una diferente como \mathbf{e}'_i (pero el origen se mantiene por simplicidad). En dicho caso, el vector \mathbf{r} vendrá dado por una nuevas coordenadas, x'^i :

$$\mathbf{r} = x'^i \mathbf{e}'_i. \quad (\text{A.1.2})$$

Ambas bases se pueden relacionar mediante

$$\mathbf{e}_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \mathbf{e}'_i, \quad (\text{A.1.3})$$

donde $\partial x'^i / \partial x^j$ es la componente M_j^i (obsérvese la equivalencia en la notación de los índices: $M_j^i = \partial x'^i / \partial x^j$, arriba i y abajo j en ambos, esto será usado siempre de ahora en adelante) de una matriz cuadrada M ($N \times N$), conocida como matriz de cambio de base, una matriz tal que al aplicarla sobre los vectores de una base da otra. Se puede escribir:

$$\mathbf{e}_j = M_j^i \mathbf{e}'_i. \quad (\text{A.1.4})$$

Una vez presentada esta matriz es importante diferenciar entre dos tipos de transformaciones: Una *transformación global* es aquella en la que al cambiar de las coordenadas x^μ a unas coordenadas $y^\nu(x^\mu)$ las reglas de transformación no cambian de punto a punto, en ellas, los elementos de la matriz M son constantes. Por otra parte, se llama *transformación local* a aquella en la que las reglas de transformación si varían de punto a punto, en ellas los elementos de la

¹Los ejes del sistema de coordenadas no tienen por qué ser ortogonales entre ellos, es decir son coordenadas curvilíneas (ejemplo: coordenadas esféricas). Si los ejes fuesen ortogonales las coordenadas serían cartesianas, pero esto es solo un caso particular de coordenadas curvilíneas.

matriz M varían dependiendo del punto en el que se realice la transformación, es decir, son funciones.

Además es posible relacionar las coordenadas del vector \mathbf{r} en ambos sistemas de coordenadas mediante la matriz M :

$$x^i = (M^{-1})^i_j x'^j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} x'^j, \quad (\text{A.1.5})$$

donde M^{-1} es la matriz inversa de M ². Por lo que también es válido escribir:

$$x'^i = M^i_j x^j. \quad (\text{A.1.6})$$

Se puede observar que las coordenadas se transforman de manera inversa o contraria a como se transforma la base. Este tipo de coordenadas reciben el nombre de *coordenadas contravariantes*.

Consideremos ahora una serie de aplicaciones \mathbf{q} que al actuar sobre los vectores en sus coordenadas contravariantes dan lugar a un escalar (invariante sea cual sea el sistema de coordenadas). Una combinación lineal de estas aplicaciones también será una aplicación, de modo que el espacio de estas aplicaciones lineales tiene la estructura de un espacio vectorial, y le denotaremos como *espacio dual*. Por tanto se puede considerar a \mathbf{q} como vectores y crear una base \mathbf{e}^i en la que puedan descomponerse en sus coordenadas, y_i :³

$$\mathbf{q} = y_i \mathbf{e}^i. \quad (\text{A.1.7})$$

Puesto que estas aplicaciones actúan para crear un escalar, se puede definir el producto de los vectores de la base del espacio y de su dual como:

$$\mathbf{e}^i \mathbf{e}_j = \delta^i_j \quad (\text{A.1.8})$$

Por la definición anterior, las componentes del vector \mathbf{q} en la base \mathbf{e}_i vienen dadas por $y_i = \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_i$. Por tanto, las componentes del vector \mathbf{q} en la base \mathbf{e}'_i vienen dadas por $y'_i = \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}'_i$, es decir:

$$y'_i = \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}'_i = \mathbf{q} (M^{-1})^i_j \mathbf{e}_i = (M^{-1})^i_j \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_i = (M^{-1})^i_j y_j. \quad (\text{A.1.9})$$

Se observa que las coordenadas de los vectores del espacio dual se transforman igual que los vectores de la base del espacio y de manera opuesta a las coordenadas contravariantes. Este nuevo tipo de coordenadas reciben el nombre de *coordenadas covariantes*. La aplicación de un vector en sus coordenadas covariantes sobre uno en sus coordenadas contravariantes es lo que definiremos como producto escalar: $b_j a^j$.

Los vectores de la base dual se transforman según

$$\mathbf{e}'^i = M^i_j \mathbf{e}^j. \quad (\text{A.1.10})$$

Por lo que el producto escalar es invariante ante el cambio de base. Cabe mencionar que normalmente no se habla de coordenadas covariantes y contravariantes porque en el clásico espacio euclídeo dichas coordenadas coinciden.

Al haber introducido el espacio dual, es necesario describir claramente los elementos que nos sirven para trabajar tanto en un espacio como en su dual. En nuestro contexto:

²Es decir, $(M^{-1})^i_j M^j_k = M^i_j (M^{-1})^j_k = \delta^i_k$, donde δ^i_k es 1 si $k = i$ y 0 si $k \neq i$

³Obsérvese que las coordenadas de los vectores del espacio dual se representan con un subíndice y no con un superíndice

1. Un escalar es un elemento que se mantiene invariante sea cual sea el sistema de coordenadas.
2. Un vector es un elemento dado por coordenadas que se transforman de la siguiente forma:
 - Coordenadas contravariantes:

$$x'^i = M_j^i x^j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} x^j. \quad (\text{A.1.11})$$

- Coordenadas covariantes:

$$y'_j = (M^{-1})_j^i y_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} y_i. \quad (\text{A.1.12})$$

3. Un tensor es un elemento que se obtiene como el producto tensorial de dos o más vectores ⁴ (pueden estar todos en sus coordenadas contravariantes, todos en sus coordenadas covariantes o unos en sus coordenadas contravariantes y otros en sus covariantes. Esto determinará el tipo de vector ante el que nos encontramos) Sean $(x^i)_1, (x^i)_2, \dots, (x^i)_l$ un conjunto de vectores en sus coordenadas contravariantes y $(y_i)_1, (y_i)_2, \dots, (y_i)_m$ un conjunto de vectores en sus coordenadas covariantes. Entonces:

- Obtenemos un *tensor contravariante* $A^{i_1 \dots i_l}$ de rango l al realizar el producto tensorial de todos los vectores $(x^i)_l$. Es un objeto de $\mathbb{R}^N \times \dots \times \mathbb{R}^N$ (l veces). Tendiendo en cuenta las propiedades de covarianza y contravarianza antes decritas, este tipo de tensor viene dados sus coordenadas en la base primada \mathbf{e}'_i mediante la transformación:

$$A^{i_1 \dots i_l} = M_{k_1}^{i_1} \dots M_{k_l}^{i_l} A^{k_1 \dots k_l} = \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial x'^{i_l}}{\partial x^{k_l}} A^{k_1 \dots k_l}. \quad (\text{A.1.13})$$

- Obtenemos un *tensor covariante* $B_{i_1 \dots i_m}$ de rango m al realizar el producto tensorial de todos los vectores $(y_i)_m$. Es un objeto de ${}^* \mathbb{R}^N \times \dots \times {}^* \mathbb{R}^N$ (m veces)⁵. Se transforma según:

$$B'_{i_1 \dots i_m} = (M^{-1})_{i_1}^{k_1} \dots (M^{-1})_{i_m}^{k_m} B_{k_1 \dots k_m} = \frac{\partial x^{k_1}}{\partial x'^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{k_m}}{\partial x'^{i_m}} B_{k_1 \dots k_m}. \quad (\text{A.1.14})$$

- Obtenemos un *tensor mixto* $C_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_l}$ de rango l contravariante y m covariante (o rango (l, m)) al realizar el producto tensorial de todos los vectores $(x^i)_l$ y $(y_i)_m$. O, lo que es lo mismo, el producto tensorial de $A^{i_1 \dots i_l}$ y $B_{i_1 \dots i_m}$. Es decir, el producto de tensores es también un tensor. Es un objeto de $\mathbb{R}^N \times \dots \times \mathbb{R}^N \dots {}^* \mathbb{R}^N \times \dots \times {}^* \mathbb{R}^N$. Se transforma según:

$$C'^{i_1 \dots i_l}_{j_1 \dots j_m} = M_{k_1}^{i_1} \dots M_{k_l}^{i_l} (M^{-1})_{j_1}^{n_1} \dots (M^{-1})_{j_m}^{n_m} C^{k_1 \dots k_l}_{n_1 \dots n_m} = \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial x'^{i_l}}{\partial x^{k_l}} \frac{\partial x^{n_1}}{\partial x'^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{n_m}}{\partial x'^{j_m}} C^{k_1 \dots k_l}_{n_1 \dots n_m}. \quad (\text{A.1.15})$$

Un tensor puede entenderse como una generalización de escalares y vectores, ya que un escalar es un tensor de rango 0 y un vector es un tensor de rango 1.

Ahora se necesita un modo de relacionar las coordenadas covariantes con las contravariantes. Esto es posible gracias a la *métrica*, g_{ij} , la cual se define como una aplicación que transforma las coordenadas contravariantes en coordenadas covariantes. También existe la *métrica inversa*, g^{ij}

⁴Es decir, sus componentes serán el producto de cada una de las componentes de un elemento con todas las demás de los otros. Ejemplos: $G_{jk} = a_j b_k$, $R_{jk}^i = G_{jk} c^i = a_j b_k c^i$.

⁵* representa el dual.

$(g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k)$, que transforma las coordenadas covariantes en coordenadas contravariantes. La métrica es un tensor dos veces contravariante ya que se transforma siguiendo las reglas descritas anteriormente ⁶, por lo que a veces nos referiremos a ella como tensor métrico. Aplicándola sobre los vectores y las bases:

- Para un vector:

$$x_i = g_{ij}x^j, \quad (\text{A.1.16})$$

$$x^i = g^{ij}x_j. \quad (\text{A.1.17})$$

- Para las bases:

$$\mathbf{e}_i = g_{ij}\mathbf{e}^j, \quad (\text{A.1.18})$$

$$\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j. \quad (\text{A.1.19})$$

- Para un tensor ver apéndice B.

Se puede deducir a partir de las ecuaciones A.1.3, A.1.10, A.1.11 y A.1.12 que la métrica tendrá la siguiente forma:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^j}{\partial x'^{\nu}} \delta_{ij} = \mathbf{e}_{\mu} \mathbf{e}_{\nu}. \quad (\text{A.1.20})$$

Considerando todo lo anterior, el producto escalar entre dos vectores puede escribirse como

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = y_i x^i = g_{ij} y^i x^j, \quad (\text{A.1.21})$$

podemos definir la norma de un vector \mathbf{r} según $|\mathbf{r}|$:

$$|\mathbf{r}|^2 = x_i x^i = g_{ij} x^i x^j = g^{ij} x_i x_j. \quad (\text{A.1.22})$$

También es posible definir el elemento de línea ds como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \quad (\text{A.1.23})$$

Para finalizar esta sección, es importante hacer una clasificación de distintos espacios en base a su métrica:

1. Espacio euclídeo: se caracteriza por un métrica plana, es decir, g_{ij} es la matriz unidad. En él, la norma al cuadrado de un vector no nulo solo puede ser mayor que cero.
2. Espacio rimeniano: su métrica hace posible que la norma al cuadrado de un vector no nulo sea mayor o menor que cero.
3. Espacio semi-rimeniano: su métrica hace posible que la norma al cuadrado de un vector no nulo sea cero, mayor o menor que cero.

⁶Para saber las características algebraicas de los tensores ver el apéndice B

A.2. Regla de derivación de un vector en coordenadas curvilíneas

Sea un vector \mathbf{v} dado por sus coordenadas contravariantes:

$$\mathbf{v} = v^\nu \mathbf{e}_\nu. \quad (\text{A.2.1})$$

Diferenciándolo:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial (v^\nu \mathbf{e}_\nu)}{\partial x^\mu}. \quad (\text{A.2.2})$$

Cambiamos la notación ($\partial/\partial x^\mu = \partial_\mu$) y operamos:

$$\partial_\mu \mathbf{v} = \partial_\mu v^\nu \mathbf{e}_\nu + v^\nu \partial_\mu \mathbf{e}_\nu = (\partial_\mu v^\rho + v^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\rho) \mathbf{e}_\rho, \quad (\text{A.2.3})$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \mathbf{e}_\nu$ es la componente ρ del vector $\partial_\mu \mathbf{e}_\nu$ en la base \mathbf{e}_ρ y se conoce como *conexión de Levi-Civita* o *símbolos de Christoffel*. Este elemento no es un tensor, es simétrico en μ y ν , y puede escribirse en función del tensor métrico como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (\text{A.2.4})$$

Se conoce como derivada covariante $\nabla_\mu = \nabla/dx^\mu$ de las coordenadas contravariantes del vector v^μ al elemento:

$$\nabla_\mu v^\rho = \partial_\mu v^\rho + v^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\rho. \quad (\text{A.2.5})$$

En el caso de un tensor $T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n}$, la derivada covariante toma la forma:

$$\nabla_\rho T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \partial_\rho T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu_1} T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\lambda \mu_2 \dots \mu_n} + \dots + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu_n} T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_{n-1} \lambda} - \Gamma_{\rho\nu_1}^\lambda T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} - \dots - \Gamma_{\rho\nu_1}^\lambda T_{\nu_1 \dots \nu_{n-1} \lambda}^{\mu_1 \dots \mu_n}. \quad (\text{A.2.6})$$

Pudiendo observar que hay una conexión por cada índice.

A.3. Variedades, mapas y atlas

La Teoría de la Relatividad propone que vivimos en un universo curvo de 4 dimensiones, en matemáticas este objeto se conoce como *variedad*. Una variedad de N -dimensiones \mathcal{V}^N es un espacio con aspecto de \mathbb{R}^N de forma local. Es posible encontrar un plano tangente $T_p(\mathcal{V})$ en cada punto p de la variedad. El conjunto de todos los planos tangentes en todos los puntos recibe el nombre *haz tangente* $T(\mathcal{V})$.

Una parte de una variedad, junto con un sistema de coordenadas que la describe, recibe el nombre de *mapa*.

Sea una región de la variedad en la que dos mapas se solapan. En dicha región es posible usar el sistema de coordenadas de uno y de otro sistema, por lo que debe existir una transformación que lleve del sistema de coordenadas de un mapa al del otro y viceversa. Si todos los mapas tienen esta propiedad y cubren toda la variedad, el conjunto de todos los mapas recibe el nombre de *atlas*.

En una variedad, el tensor métrico ha de ser tenido en cuenta en su elemento de volumen ($dx dy dz \dots$). Para un variedad de N -dimensiones, el elemento de volumen toma la forma:

$$\sqrt{|g|} d^N x, \quad (\text{A.3.1})$$

donde $|g|$ es el determinante del tensor métrico. Ello se debe a que el producto A.3.1 es invariante bajo un cambio de coordenadas.

A.4. Transporte paralelo de vectores y conexión de Levi-Civita

Es importante recalcar que los vectores no se encuentran en la variedad como tal, sino en los planos tangentes a ellas ya descritos. De modo que el transporte de un vector sobre una variedad no es algo trivial. Para empezar, supongamos que tenemos un vector en un punto a y otro en un punto b , es decir tenemos un vector que pertenece al plano $T_a(\mathcal{V})$ y otro a $T_b(\mathcal{V})$, dos espacios vectoriales distintos. En un espacio no curvo, relacionar el vector en a y el vector en b mediante operaciones comunes (sustracción, adición, productos...) no es posible, pues como se ha dicho, los vectores se encuentran en espacios vectoriales diferentes. En su lugar, para poder trabajar con los vectores por ejemplo en $T_b(\mathcal{V})$ es necesario un vector que se encuentre en $T_b(\mathcal{V})$, $A_a^\mu(b)$, y tenga toda la información del vector en $T_a(\mathcal{V})$, $A^\mu(a)$. Supongamos que el punto a tiene coordenadas x^μ y el punto b $x^\mu + \delta x^\mu$. Para desplazamientos pequeños el transportado paralelo es el vector $A^\mu(a)$ más un término de corrección:

$$A_a^\mu(b) = A^\mu(a) - \Omega_{\nu\rho}^\mu \delta x^\nu A^\rho(a), \quad (\text{A.4.1})$$

donde $\Omega_{\nu\rho}^\mu$ expresa como cambia la coordenada μ del vector $A^\mu(a)$ cuando se transporta paralelamente. Es importante mencionar que el transportado paralelo depende de la curva que se haya seguido para ir de a a b y la elección de la conexión $\Omega_{\nu\rho}^\mu$ es arbitraria. Sin embargo, conocida la métrica, podemos calcular una conexión que nos será de ayuda, ya que cumple ciertas características físicas, la conexión de Levi-Civita, ya introducida en el capítulo anterior (A.2.4), por lo que a partir de ahora siempre haremos la elección

$$\Omega_{\nu\rho}^\mu = \Gamma_{\nu\rho}^\mu, \quad (\text{A.4.2})$$

lo cual simplificará en gran medida los resultados.

La conexión de Levi-Civita $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ se caracteriza, como ya se ha dicho, por ser simétrica en ν y ρ y por hacer que la derivada covariante del tensor métrico $\nabla_\mu g_{\nu\rho}$ sea cero.

En el caso de tensores, un tensor $T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n}$ es transportado paralelamente en una curva si se cumple:

$$u^\rho \nabla_\rho T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} = 0, \quad (\text{A.4.3})$$

donde $u^\rho = dx^\rho/d\tau$ es el vector tangente a la curva $x^\mu(\tau)$. En algunos textos, este producto del vector tangente a la curva u^ρ en la dirección en la que se realiza la deriva covariante ∇_ρ , recibe el nombre de *derivada absoluta* $D/d\tau$, y sería una generalización de la derivada total:

$$\frac{DT_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n}}{d\tau} = \frac{\nabla T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n}}{dx^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (\text{A.4.4})$$

A.5. Curvatura y tensores de curvatura

Los seres humanos podemos visualizar espacios curvos de una y dos dimensiones, al verlos desde fuera, desde un espacio de tres. Pero cuando el número de dimensiones aumenta dejamos de ser capaces de visualizarlos. Por tanto, es necesario una definición con la podamos establecer cuándo un espacio es curvo. Si transportamos un vector de forma paralela en una curva cerrada y observamos que el vector resultante difiere del vector original, diremos que nos encontramos en una variedad curva. Para poder medir la curvatura se estudiará la diferencia entre dos vectores, que serán los transportados paralelos de un mismo vector a través de dos caminos diferentes.

Esto se lleva a cabo empleando el conmutador de la derivadas covariantes en cada uno de los caminos escogidos sobre el vector:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\lambda = (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)V^\lambda. \quad (\text{A.5.1})$$

Operando se llega a

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\lambda = R_{\mu\nu\rho}^\lambda V^\rho, \quad (\text{A.5.2})$$

donde

$$R_{\mu\nu\rho}^\lambda = \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \quad (\text{A.5.3})$$

se conoce como *tensor de Riemann*. Este tensor será nuestra forma de medir la curvatura, de modo que si todas sus componentes son cero diremos que estamos en una variedad plana. Así, es un espacio euclídeo tanto las componentes del tensor de Riemann como los símbolos de Christoffel tienen todas sus componentes nulas.

El tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho}^\lambda$ es antisimétrico en μ y ν . Bajando su índice contravariante llegamos al tensor de Riemann completamente covariante:

$$R_{\mu\nu\rho\lambda} = g_{\lambda\sigma} R_{\mu\nu\rho}^\sigma, \quad (\text{A.5.4})$$

este tensor es simétrico en el intercambio de μ y ν con ρ y λ .

Otro tensor importante en la Teoría de la Relatividad es el *tensor de Ricci*, que se obtiene al contraer el índice contravariante con el segundo índice covariante del tensor de Riemann:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma. \quad (\text{A.5.5})$$

Si contraemos los dos índices del tensor de Ricci obtenemos el *escalar de Ricci*:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (\text{A.5.6})$$

A.6. Geodésicas y desviación geodésica

En nuestro estudio es muy importante el concepto de distancia. Es por ello que las geodésicas tienen un papel fundamental. Una geodésica es la curva $x^\mu(\tau)$ de mínima longitud que une dos puntos de una variedad. En A.1.23 definimos el elemento de línea ds y la geodésica hace que

$$\int ds = \text{mínimo}. \quad (\text{A.6.1})$$

Aplicando el principio variacional y las ecuaciones de Euler-Lagrange llegamos a la ecuación de la geodésica:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0. \quad (\text{A.6.2})$$

Las geodésicas, en general, no se mantienen a la misma distancia las unas de las otras a medida de nos desplazamos por una variedad, sino que se acercan o se alejan. Este fenómeno se describe mediante la *desviación geodésica*. Sea una curva geodésica $x^\mu(\tau)$, $dx^\mu/d\tau$ el vector tangente a dicha geodésica y δx^μ el desplazamiento hacia una geodésica cercana. Entonces, calculando cómo de rápido se acerca una geodésica a otra, si convergen o divergen se obtiene que

$$\frac{\nabla^2 \delta x^\lambda}{d\tau^2} = -R_{\mu\nu\rho}^\lambda \delta x^\nu \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}. \quad (\text{A.6.3})$$

Es de esperar, y así se cumple, que para un espacio plano la desviación geodésica es cero.

Además es posible hacer una clasificación de una geodésica $x^\mu(\tau)$ que unen dos puntos según el parámetro $\chi = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$:

- Temporal: $\chi = 1$.
- Nula: $\chi = 0$.
- Espacial: $\chi = -1$.

Esto es de mucha utilidad para explicar las características físicas de un cuerpo en un espacio curvo.

Apéndice B

Álgebra de tensores

Los tensores se caracterizan, además de por lo que ya se ha estudiado, por:

- Si todas las componentes de un tensor son nulas en un sistema de coordenadas, también lo serán en todos los sistemas de coordenadas.
- Sean A y B dos tensores de rango (m, n) , entonces su combinación lineal será un tensor C de rango (m, n) .
- Sean A un tensor de rango (m, n) y B un tensor de rango (p, q) , entonces su producto tensorial es un tensor C de rango $(m + p, n + q)$.
- Un tensor $T^{ij\dots}$ es simétrico en i y j si $T^{ij\dots} = T^{ji\dots}$. Si un tensor es simétrico en una base, lo será en todas.
- Un tensor $T^{ij\dots}$ es antisimétrico en i y j si $T^{ij\dots} = -T^{ji\dots}$. Si un tensor es antisimétrico en una base, lo será en todas.
- El tensor métrico g_{ij} puede emplearse para "bajar índices", es decir, si tenemos un tensor A de rango (m, n) y realizamos el producto de g_{ij} por A obtendremos un tensor B de rango $(m - 1, n + 1)$. Del mismo modo, el tensor métrico inverso g^{ij} puede usarse para "subir índices", es decir, si tenemos un tensor T de rango (m, n) y realizamos el producto de g^{ij} por T obtendremos un tensor R de rango $(m + 1, n - 1)$.
- Es posible reducir el rango de un tensor mediante un proceso llamado *contracción*. Sea un tensor A de rango (m, n) , mediante la contracción se puede obtener un tensor B de rango $(m - 1, n - 1)$. Esto se consigue sumando dos índices:

$$B_{j_1\dots j_{n-1}}^{i_1\dots i_{m-1}} = A_{j_1\dots j_{n-1}k}^{i_1\dots i_{m-1}k}. \quad (\text{B.0.1})$$

También es posible contraer dos índices del mismo tipo empleando el tensor métrico o su inverso, es decir, partir de un tensor de rango (m, n) y obtener un tensor $(m - 2, n)$ o $(m, n - 2)$:

$$D_{j_1\dots j_n}^{i_1\dots i_{m-2}} = g_{kl} D_{j_1\dots j_n}^{i_1\dots i_{m-2}kl}. \quad (\text{B.0.2})$$

$$D_{j_1\dots j_{n-2}}^{i_1\dots i_m} = g^{kl} D_{j_1\dots j_{n-2}kl}^{i_1\dots i_m}. \quad (\text{B.0.3})$$

- Operador derivada con respecto a las coordenadas ∂ : este operador es un vector que puede presentarse de manera covariante o contravariante, respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu. \quad (\text{B.0.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} = \partial^\nu. \quad (\text{B.0.5})$$

Al aplicar B.0.4 sobre un campo tensorial (se asigna un tensor a cada punto del espacio) de rango (m, n) se obtiene un tensor de rango $(m, n + 1)$. Y Al aplicar B.0.5 sobre un campo tensorial de rango (m, n) se obtiene un tensor de rango $(m + 1, n)$.

Apéndice C

Cáculo de $w(x)$ para los distintos tipos de materia/energía

En estas demostraciones es más ilustrativo emplear unidades en las que c aparece explícitamente.

■ Materia fría. $w_{(m)} = 0$

La ecuación de estado de un gas ideal puede escribirse como

$$P = \rho RT = \rho C^2, \quad (\text{C.0.1})$$

donde R es la constante particular del gas ideal, T la temperatura del gas y $C = \sqrt{RT}$ es la velocidad térmica de las partículas del gas.

Definimos $w_{(m)}$ como

$$w_{(m)} = \frac{P}{\rho c^2} = \frac{\rho C^2}{\rho c^2} = \frac{C^2}{c^2} \approx 0. \quad (\text{C.0.2})$$

■ Radiación. $w_{(r)} = 1/3$

Según la física estadística, la ecuación de estado de un gas de fotones se escribe en función de su energía interna U y del volumen que lo contiene V como

$$P = \frac{1}{3} \frac{U}{V} = \frac{1}{3} u, \quad (\text{C.0.3})$$

donde u es la energía por unidad de volumen, que no es otra cosa que ρc^2 . Nos queda por tanto la relación

$$P = \frac{1}{3} \rho c^2, \quad (\text{C.0.4})$$

demostrando que $w_{(r)} = 1/3$.

■ Constante cosmológica o energía oscura. $w_{(\Lambda)} = -1$

Como hemos visto en 3.2.40, la constante cosmológica puede escribirse en forma de densidad de materia como

$$\Lambda = \frac{8\pi G\rho}{c^2}, \quad (\text{C.0.5})$$

y puesto que es una constante, $\dot{\rho} = 0$. Sustituyendo en 3.2.44, escrita con c explícita:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) = 0, \quad (\text{C.0.6})$$

se obtiene que

$$3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) = 0 \rightarrow P = -\rho c^2, \quad (\text{C.0.7})$$

probando que $w_{(\Lambda)} = -1$.

Apéndice D

Algunos modelos cosmológicos que no satisfacen el principio cosmológico

D.0.1. Universo de Gödel

Antes de comenzar con el tratamiento formal de este modelo es conveniente mencionar que el universo de Gödel no se considera una representación realista de nuestro universo, principalmente por carecer de expansión. No obstante, su estudio supone un gran ejercicio pedagógico, pues a partir de él, la búsqueda de soluciones a las ecuaciones de Einstein más complejas que las conocidas tomó un fuerte impulso. Además, es interesante el análisis de este universo porque rompe una vez más, como ya estamos acostumbrados en la Teoría de la Relatividad, con nuestra intuición sobre el funcionamiento del espacio y el tiempo.

La idea de Gödel fue la de presentar un universo homogéneo y estacionario en el que su contenido material se encontrase en rotación axial. Es posible encontrar una métrica que satisfaga las ecuaciones de Einstein en la que esto ocurre considerando un universo dominado por materia y eligiendo un valor muy preciso para la constante cosmológica.

Emplearemos el ansatz desarrollado por Stephen Hawking, el cual se escribe en coordenadas locales cartesianas como si estuviésemos sobre el material rotatorio:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 - \frac{e^{2\sqrt{2}\omega x}}{2} dy^2 + dz^2 - 2e^{\sqrt{2}\omega x} dt dy, \quad (\text{D.0.1})$$

donde ω es una constante a ser determinada mediante las ecuaciones de Einstein.

Para computar este ansatz en las ecuaciones de campo debemos calcular primero los símbolos de Christoffel y posteriormente los tensores de curvatura necesarios:

$$\Gamma^t_{tx} = \sqrt{2}\omega, \quad (\text{D.0.2})$$

$$\Gamma^t_{xy} = \Gamma^x_{ty} = \sqrt{2}\omega e^{\sqrt{2}\omega x} / 2, \quad (\text{D.0.3})$$

$$\Gamma^x_{yy} = \sqrt{2}\omega e^{2\sqrt{2}\omega x} / 2, \quad (\text{D.0.4})$$

$$\Gamma^y_{tx} = -\sqrt{2}\omega e^{-\sqrt{2}\omega x}, \quad (\text{D.0.5})$$

$$R_{tt} = 2\omega^2, \quad (\text{D.0.6})$$

$$R_{yy} = 2\omega^2 e^{2\sqrt{2}\omega x}, \quad (\text{D.0.7})$$

$$R_{ty} = R_{yt} = 2\omega^2 e^{\sqrt{2}\omega x}, \quad (\text{D.0.8})$$

$$R = -2\omega^2, \quad (\text{D.0.9})$$

y el resto de componentes son nulas.

Puesto que en este universo se considera la materia como partículas de polvo que no interactúan entre ellas, el tensor energía-impulso toma la forma del de la materia fría 2.4.6, es una

materia pulverizada, sin presión, que representaría las galaxias ¹:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu. \quad (\text{D.0.10})$$

El vector u , que es el cuadvivector velocidad en este caso medido desde un observador sobre uno de los granos de materia que rota, en su forma contravariante viene dado por

$$w^\mu \equiv (1, 0, 0, 0), \quad (\text{D.0.11})$$

dando lugar a que su forma covariante sea

$$u_\mu \equiv (-1, 0, -e^{\sqrt{2}\omega x}, 0). \quad (\text{D.0.12})$$

Por tanto el tensor energía-impulso en sus coordenadas covariantes es :

$$T = \begin{pmatrix} \rho & 0 & e^{\sqrt{2}\omega x} \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{\sqrt{2}\omega x} \rho & 0 & e^{2\sqrt{2}\omega x} \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.0.13})$$

Si sustituimos todo en las ecuaciones de campo 2.4.14 se observará que solo se cumplen para $\omega^2 = 4\pi G\rho = -\Lambda$. En este universo por tanto, existe una constante cosmológica de valor negativo.

Para comprobar el carácter simétrico y rotatorio de este universo es ilustrativo realizar un cambio a coordenadas cilíndricas:

$$(t, x, y, z) \rightarrow (t', r, \phi, Z), \quad (\text{D.0.14})$$

$$e^{\sqrt{2}\omega x} = \cosh 2r + \cos \phi \sinh 2r, \quad (\text{D.0.15})$$

$$\omega y e^{\sqrt{2}\omega x} = \sin \phi \sinh 2r, \quad (\text{D.0.16})$$

$$\tan \frac{1}{2} (\phi + \omega t - \sqrt{2}t') = e^{-2r} \tan \frac{1}{2} \phi, \quad (\text{D.0.17})$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{\omega} Z. \quad (\text{D.0.18})$$

La métrica pasa a escribirse como

$$ds^2 = \frac{2}{\omega^2} \left(-dt'^2 + dr^2 - (\sinh^4 r - \sinh^2 r) d\phi^2 + dZ^2 + 2\sqrt{2} \sinh^2 r dt d\phi \right). \quad (\text{D.0.19})$$

Puesto que la métrica $g_{\mu\nu}$ no muestra dependencia en ϕ (no hay ninguna función de ϕ en el diferencial de línea) el universo posee simetría rotacional.

La estructura causal de este universo es bastante peculiar. Para estudiarla debemos ver como se comportarían los conos de luz para los diferentes valores de las variables. Ello es posible observando el diferencial de línea D.0.19. Los límites del cono de luz son geodésicas nulas, y una geodésica nula es aquella en la que $ds^2 = 0$, por lo que satisface

$$dt^2 = dr^2 - (\sinh^4 r - \sinh^2 r) d\phi^2 + dZ^2 + 2\sqrt{2} \sinh^2 r dt d\phi. \quad (\text{D.0.20})$$

Ahora bien, podemos prescindir de la componente Z para explicar la causalidad, pues es una componente constante y su contribución sería la de un espacio plano. Nos queda por tanto que

$$dt^2 = dr^2 - (\sinh^4 r - \sinh^2 r) d\phi^2 + 2\sqrt{2} \sinh^2 r dt d\phi. \quad (\text{D.0.21})$$

¹Realmente puede observarse que la ecuación del tensor energía-impulso de un fluido perfecto 2.4.8 se convierte en 2.4.6 cuando el contenido del universo es únicamente materia, pues en la ecuación de estado $w_{(m)} = 0$.

Analizando esta igualdad, el comportamiento que se observa para un valor de $t = 0$ es que a medida que un punto se aleja del origen en $r = 0$, su cono de luz se inclina cada vez más la dirección de $d\phi > 0$. Llega un momento en el que el cono de luz se inclina tanto que llega a contener puntos del pasado, lo cual ocurre a partir de $r_c = \log(1 + \sqrt{2})$ cuando $\sinh^4 r - \sinh^2 r = 0$. Por lo tanto, para todo $r > r_c$, todas las líneas con r constante y $t = 0$ son líneas temporales cerradas. Esto significa que un objeto que se encontrase en esas coordenadas podría realizar el bucle temporal infinitas veces o incluso moverse por el tiempo hacia el pasado. Si por algún casual nuestro universo exhibiese un comportamiento similar a este, sería necesaria una reformulación de lo que entendemos por tiempo filosóficamente hablando, pues existirían eventos conectados aunque no podríamos distinguir cuál sucedió antes o después.

Por otra parte, las geodésicas nulas que parten de un punto en el eje $r = 0$ divergen girando hasta llegar a $r = r_c$ y vuelven a converger, de modo que un observador podría verse a sí mismo en un estado anterior. Además la existencia de curvas temporales cerradas muestra que en este universo no podemos considerar un tiempo cosmológico como en la métrica de FLRW, es decir, que crezca al avanzar en cada geodésica nula o temporal.

D.0.2. Modelos Szekeres

Los Szekeres describen un universo inhomogéneo e isótropo cuyo contenido es materia pulverizada (ρ_m) (además de permitir la existencia de una constante cosmológica), que vista por un observador comóvil, no rota. La métrica de FLRW es un caso límite de estos modelos. En las coordenadas comóviles con el contenido del universo (t, r, x, y) la métrica de los Szekeres viene dada por

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\alpha(t,r,x,y)} dr^2 + e^{2\beta(t,r,x,y)} (dx^2 + dy^2). \quad (\text{D.0.22})$$

A su vez se dividen en dos tipos, los que cumplen que $\partial\beta/\partial r = 0$ y los que $\partial\beta/\partial r \neq 0$. A los primeros no se les ha encontrado aplicación en la cosmología. Trabajando con las ecuaciones de Einstein en un universo en el que solo hay materia y constante cosmológica se puede llegar a que las funciones que aparecen en la métrica se pueden escribirse como

$$e^\beta = \Phi(t, r) e^{\nu(r,x,y)}, \quad (\text{D.0.23})$$

$$e^\alpha = h(r) \Phi(t, r) \frac{\partial\beta}{\partial r}, \quad (\text{D.0.24})$$

con

$$e^{-\nu} = A(r)(x^2 + y^2) + 2B_1(r)x + 2B_2(r)y + C(r), \quad (\text{D.0.25})$$

y con Φ satisfaciendo que (la siguiente ecuación sería el análogo a la ecuación de Friedmann en los Szekeres)

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 = -k(r) + 2\frac{M(r)}{\Phi} + \frac{1}{3}\Lambda\Phi^2, \quad (\text{D.0.26})$$

donde Λ es la constante cosmológica y $h(r)$, $A(r)$, $B_1(r)$, $B_2(r)$, $C(r)$ y $k(r)$ son funciones que cumplen la siguiente igualdad y nos permiten definir la función $g(r)$:

$$g(r) = 4(AC - B_1^2 - B_2^2) = 1/h(r)^2 + k(r). \quad (\text{D.0.27})$$

Se observa que si $\partial\beta/\partial r = 0$, e^α es cero y no contaríamos con la variable r .

Además llegamos a que el contenido de materia se relaciona con algunas de las funciones mediante

$$\rho_m = \left(\frac{\partial(2Me^{3\nu})}{\partial r} \right) / \left(8\pi G e^{2\beta} \frac{\partial e^\beta}{\partial r} \right). \quad (\text{D.0.28})$$

Y es también posible obtener una función para la variable temporal a partir de D.0.26:

$$t - t_B(r) = \int_0^\Phi \frac{d\tilde{\Phi}}{\sqrt{-k + 2M/\tilde{\Phi} + \Lambda\tilde{\Phi}^2/3}}, \quad (\text{D.0.29})$$

donde $t_B(r)$ es una función que aparece como constante de integración y que recibe el nombre de *momento del Big Bang*.

En estos universos, se puede demostrar tras un largo cálculo, que el signo de $g(r)$ proporciona la información de la geometría, y que, en el caso de $\Lambda = 0$, $k(r)$ nos da la información sobre la evolución.

- Si $g > 0$, la geometría del espaciotiempo es esférica.
- Si $g = 0$, la geometría es plana.
- Si $g < 0$, la geometría es hiperbólica.

Por otro lado, si $\Lambda = 0$, se cumple que

- Si $k > 0$ el universo nace de una singularidad (demostrable al calcular los invariantes de curvatura) en t_B y se expande hasta volver a recolapsar.
- Si $k < 0$ el universo se expandiría (y se habría expandido) por siempre o bien iría hacia un colapso por siempre.
- Si $k = 0$ estaríamos ante el caso límite de no recolapso, como en el universo plano dominado por materia de la métrica de FLRW.

Puesto que estas dos funciones están relacionadas mediante una ecuación el signo de una afecta a la otra (nos ocurrió lo mismo en el caso de FLRW cuando no todas las fuentes de materia/energía admitían todas las curvaturas). Observando D.0.27 y teniendo en cuenta que $1/h(r)^2 > 0$ siempre, obtenemos que

- Para $g > 0$, los tres valores de k son admitidos.
- Para $g = 0$, k puede ser cero o menor que cero.
- Para $g < 0$, tan solo es posible que $k = 0$.

Algo muy peculiar de esta métrica es que, dado que $g(r)$ y $k(r)$ son funciones de r las distintas regiones del universo pueden tener evoluciones diferentes, así por ejemplo unas pueden expandirse para siempre mientras que otras colapsan. No obstante, actualmente en investigación se emplean más habitualmente los casos de $g(r) > 0$ y $\Lambda = 0$.

Los modelos Szekeres se han utilizado para tratar de dar explicación a la evolución del universo a partir del desacoplo de la materia y la radiación (momento en el que se originó la radiación de fondo de microondas), la formación de cúmulos de galaxias y súper cúmulos, vacíos cósmicos... Y algo muy relevante, que puede llegar a suponer un antes y un después en el estudio de la cosmología, es que algunos procesos asociados a la energía oscura pueden ser explicados en realidad por variaciones espaciales, por lo que abriría la puerta a prescindir de

de dicha energía de naturaleza desconocida para explicar el universo. No obstante esto es aún campo de estudio.

Unos modelos, subtipos de de Szekeres, que se han empleado precisamente en la investigación de los fenómenos mencionados anteriormente de modo más frecuente son los modelos de *Lemaître-Tolman-Bondi*, que estudiaremos a continuación.

Modelos de Lemaître-Tolman-Bondi

La métrica de Lemaître-Tolman-Bondi es la de un universo isótropo pero inhomogéneo. Este universo poseería simetría esférica respecto al observador comóvil y la fuente de energía/materia sería también materia pulverizada (tensor 2.4.6), además contempla la existencia de la constante cosmológica como posibilidad. Situándonos en el origen de coordenadas y empleando coordenadas esféricas el anstaz puede escribirse como

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\left(\frac{\partial R(t,r)}{\partial r}\right)^2}{1 + 2E(r)} dr^2 + R(t,r)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (\text{D.0.30})$$

donde $E(r)$ es una función arbitraria que aparece como constante de integración al resolver las ecuaciones de Einstein y $R(r,t)$ es una función que cumple que

$$\left(\frac{\partial R(r,t)}{\partial t}\right)^2 = 2E(r) + 2\frac{M(r)}{R(r,t)} + \frac{1}{3}\Lambda R(r,t)^2, \quad (\text{D.0.31})$$

donde Λ es de nuevo la constante cosmológica y $M(r)$ es una función que también aparece como constante de integración al resolver las ecuaciones de Einstein, y que debe tomar valores no negativos. Obsérvese el parecido de D.0.31 con las ecuaciones de Friedmann, lo cual nos facilita realizar una interpretación física de esta métrica. Además esta ecuación no puede resolverse de forma analítica si todos sus sumando son distintos de cero.

Al depender la métrica de t y de r exhiben la inhomogeneidad pero isotropía propia de estos universos, pues $g_{\mu\nu}$ no tiene dependencia en θ ni ϕ .

También al resolver las ecuaciones de Einstein podemos relacionar $M(r)$ con la densidad de materia mediante

$$\rho_m = \frac{\frac{dM(r)}{dr}}{4\pi G R(r,t)^2 \frac{\partial R(r,t)}{\partial r}}. \quad (\text{D.0.32})$$

Asumiendo a partir de ahora que $\Lambda = 0$, es posible obtener una solución analítica para D.0.31. Además esta métrica admite distintos tipos de evolución, que dependen de la función $E(r)$:

- Si $E < 0$, $R(r,t)$ toma la forma (al resolver D.0.31)

$$R(r,t) = -\frac{M}{2E} (1 - \cos \eta), \quad (\text{D.0.33})$$

donde η es un parámetro que satisface

$$\eta - \sin \eta = \frac{(-2E(r))^{3/2}}{M(r)} (t - t_B(r)). \quad (\text{D.0.34})$$

donde $t_B(r)$ es de nuevo el momento del Big Bang.

- Si $E = 0$, $R(r, t)$ toma la forma

$$R(r, t) = \left(\frac{9}{2} M(r) (t - t_B(r))^2 \right)^{1/3}. \quad (\text{D.0.35})$$

- Si $E > 0$, tenemos que

$$R(r, t) = \frac{M}{2E} (\cosh \eta - 1), \quad (\text{D.0.36})$$

con

$$\sinh \eta - \eta = \frac{(2E(r))^{3/2}}{M(r)} (t - t_B(r)). \quad (\text{D.0.37})$$

Analizando las evoluciones, se puede determinar que únicamente para el caso de $E(r) < 0$ el universo puede recolapsar. En un universo de LTB general (como en los Szekeres en general), el signo de $E(r)$ puede cambiar dependiendo de la región, de modo que el comportamiento de la diferentes regiones puede ser muy distinto.

Además si t_B y $|E|^{3/2}/M$ son constantes, recuperamos las soluciones halladas con la métrica de FLRW para materia fría, siendo estas un caso particular de la métrica de LTB. Si consideramos que $M(r) = M_0 r^3$ y que, por tanto $E(r) = E_0 r^2$ donde M_0 y E_0 son constantes arbitrarias, r sería la coordenada radial empleada en la métrica de FLRW y $E_0 = -k/2$ donde k es la constante de curvatura de esa misma métrica ya estudiada.

Apéndice E

Script usado para trabajar con métricas

Para realizar este trabajo se han empleado varios programas, tanto para la resolución de algunos cálculos como para el desarrollo de gráficas. A continuación se expone el código que se ha empleado para obtener diversas propiedades de las métricas estudiadas usando el software *SageMath*:

```
version()
% display latex
#Variables y variedad
M = Manifold(4, 'M', structure='Lorentzian')
print(M)
fr.<t,r,th,ph> = M.chart(r't r:[0,+oo] th:[0,pi]:\theta ph:[0,2*pi]: \phi') (las coordenadas pueden elegirse así, en esféricas, o del modo que se prefiera)
var('G, Lambda, k', domain='real')
a = M.scalar_field(function('a')(t), name='a')
rho = M.scalar_field(function('rho')(t), name='rho')
P = M.scalar_field(function('P')(t), name='P')
(pueden añadirse más variables...)
#Tensor métrico
g = M.metric()
g[0,0] = (añadir...)
g[1,1] =
g[2,2] =
g[3,3] =
...
g.display()
g[:]
#Símbolos de Chrisstofel
nabla = g.connection()
g.christoffel_symbols_display()
#Tensor de Ricci
Ricci = nabla.ricci()
Ricci.display_comp()
#Escalar de Ricci
Ricci_scalar = g.ricci_scalar()
Ricci_scalar.display()
```

```

#Tensor de energía-impulso
u = M.vector_field('u')
u[0] = 1
u.display()
g(u,u).expr()
u.dot(u).expr()
u_form = u.down(g)
u_form.display()
T = (rho+P)*(u_form*u_form) + P*g
T.set_name('T')
print(T)
T.display()
T.display_comp
T[:]

```

Para obtener las ecuaciones de Friedmann además puede emplearse lo siguiente (siempre que g sea el de la métrica de FLRW):

```

#Ecuaciones
Ttrace = g.inverse()['^ ab']*T['_ab']
Ttrace.display()
E1 = Ricci - Ricci_scalar/2*g + Lambda*g - (8*pi*G)*T
print("First Friedmann equation:\n")
E1[0,0].expr().expand() == 0
E2 = Ricci - Lambda*g - (8*pi*G)*(T - Ttrace/2*g)
print("Second Friedmann equation:\n")
E2[0,0].expr().expand() == 0

```

Si queremos calcular por ejemplo un invariante como $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ podemos emplear la siguiente línea de código:

```

F=Ricci.down(g)['_{ab}'] * Ricci.up(g)['^ {ab}']

```

Bibliografía

- [1] Janssen, B. (2013). *Teoría de la Relatividad General*. Universidad de Granada.
- [2] Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons.
- [3] Foster, J. and Nightingale, J. D. (1979). *A short course in general relativity*. Longman.
- [4] Hawking, S. and Ellis, G. (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press.
- [5] Petrostan, V. and Salpeter, E. E. (1970). Lemaitre Models and the Cosmological Constant. *Comments on Astrophysics and Space Physics*, 2, pp. 109-115.
- [6] Gödel, K. (1949). An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation. *Reviews of Modern Physics*, 21(3), pp. 447-450.
- [7] George F.R. Ellis and Jean-Philippe Uzan (2017), Scholarpedia: *Modern cosmology*. Recuperado de http://www.scholarpedia.org/article/Modern_cosmology.
- [8] Krasiński, A. and Hellaby, C. (2001). Structure formation in the Lemaitre-Tolman model. *Phys. Rev. D*. doi: 10.1103/PhysRevD.65.023501.
- [9] Krzysztof Bolejko, K. , Célérier, M-N. and Krasiński, A. (2011). Inhomogeneous cosmological models: exact solutions and their applications. *Phys. Rev. D*. doi: 10.1088/0264-9381/28/16/164002.
- [10] Rugh, S. E. and Zinkernagel, H. (2010). Weyl's Principle, Cosmic Time and Quantum Fundamentalism. *Springer*. doi: 10.1007/978-94-007-1180-8_28.
- [11] Hernández Jiménez, R , Moreno, C , Sánchez Guzmán, D y García Salcedo, R. (2011). Cálculo didáctico de la edad del Universo y la importancia de la constante cosmológica en un modelo FRW. *Lat. Am. J. Phys. Educ*, 5(3), pp. 556-564.
- [12] Kragh, H. (2012). The most philosophically of all the sciences: Karl Popper and physical cosmology. *philsci-archive*. Recuperado de <http://philsci-archive.pitt.edu/id/eprint/9062>.
- [13] Lahav, O. and Liddle, A. R. (2015). The Cosmological Parameters. *Particle Data Group*.
- [14] Cern. *Dark matter*. Recuperado de <https://home.cern/science/physics/dark-matter>.

- [15] Harvey S. L. (2002). Teaching the photon gas in introductory physics. *Am. J. Phys.*, 70(8), pp. 792-797.
- [16] Refregier, A. (2015). Astrophysics I. Extraído de sus notas de clase en ETH Zürich.
- [17] Brey Abalo, J. J, Rubia Pacheco, J. de la y Rubia Sánchez, J. de la (2001). *Mecánica estadística*. UNED.
- [18] Horvath, I, Hakkila, J. and Bagoly, Z. (2014). Possible structure in the GRB sky distribution at redshift two. *Astronomy & Astrophysics*. doi: 10.1051/0004-6361/201323020.
- [19] SageManifolds. *Example notebooks*. Recuperado de <https://sagemanifolds.obspm.fr/examples.html>.
- [20] Reall, Harvey (2008). Black Holes. Extraído de sus *Lecture notes*. University of Cambridge.