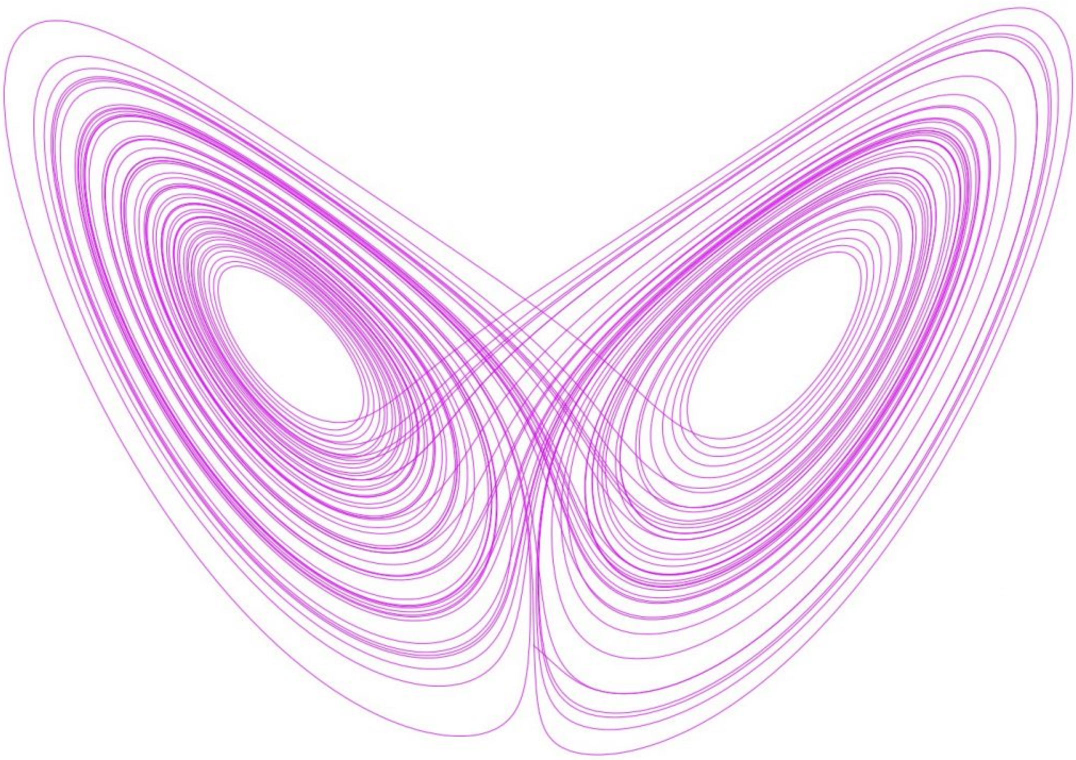
Universidad de Sevilla

Facultad de Física

Sistemas dinámicos: el efecto mariposa



Trabajo Fin de Grado

Autor:
Antonio Manuel García Chaves

Tutor:
Rafael Espinola García

Curso 2020/21

Dedicado a mis padres, Amalia y Alfonso,

así como a Alba, Carlos y Javi..

También a todo el "Cry to Crai" y a "La Caterva".

Gracias por vuestro cariño y apoyo incondicional.

Índice

Resumen

La intención de este trabajo es realizar una introducción a la teoría de los sistemas dinámicos, llegando a abarcar fenómenos de interés como los sistemas caóticos y el efecto mariposa. Se tratará la teoría los sistemas dinámicos, haciendo énfasis en sus aplicaciones para el resto de disciplinas científicas; se definirán los sistemas caóticos y el efecto mariposa, explicando cómo surgen y su interés aplicativo; y se tratará la relevancia de estas nuevas matemáticas desde un punto de vista filosófico y sobre cómo cambiaron la visión del mundo con su surgimiento a mediados del siglo XX.

1. Introducción.

Para los seres humanos, el paso del tiempo es inexorable: no es posible ni pararlo ni hacer que vuelva atrás. Y, aunque, el tiempo sea un concepto abstracto y difícil de explicar, en la vida cotidiana debemos tenerlo en cuenta en cualquier situación, pues estamos sujetos a su avance.

Pero no solo los seres humanos, sino cualquier cosa que pensemos está sujeta al transcurrir del tiempo, y es fácil observar a simple vista cómo cambia con respecto al mismo. Esto nos lleva a pensar que, si queremos conocer el mundo que nos rodea, una de las cosas que debemos hacer es estudiar el comportamiento de nuestro entorno cuando el tiempo avanza. Es por esto por lo que, para cualquier disciplina científica o social, es necesario establecer un modelo que describa el comportamiento de un sistema en el tiempo. Desde el punto de vista matemático, un sistema cuyas características cambian en el tiempo puede estudiarse a partir de la teoría de los sistemas dinámicos.

Cualquiera que sea el estudio que queramos hacer, podemos hacerlo mediante un modelo de sistema dinámico si incluimos una variable temporal: desde el movimiento de un cuerpo físico, hasta la dinámica de poblaciones en biología, pasando por la evolución de los mercados en economía. La teoría de sistemas dinámicos es una herramienta muy útil y tremendamente aplicable a cualquier otra disciplina, lo que la hace de interés general para cualquier científico.

Pero como cualquier teoría, no tiene interés solamente por su aplicabilidad, sino también por su belleza teórica y desde un punto de vista filosófico. Como siempre, la creación de conocimiento puede llevarnos a desestimar cosas que dábamos por hechas y a cambiar por completo nuestra visión del mundo, aportándonos una mayor comprensión del mismo. En concreto, la teoría de los sistemas dinámicos se desarrollaría para dar pie a una teoría más compleja. Dicha teoría fue desarrollada por Edward Lorenz a mediados de siglo XX, y recibiría el nombre de "Teoría del Caos". La importancia de esta teoría no solo residiría en su capacidad para estudiar sistemas dinámicos más complejos, sino que también pondría en jaque la idea clásica de determinismo, presente en las teorías de Galileo y Newton, del siglo XVII. La "teoría del caos" se basa un principio llamado el "efecto mariposa", el cual es base para el entendimiento de muchos sistemas complejos, como por ejemplo el funcionamiento de un láser o los fenómenos atmosféricos.

Conocidos estos hechos, la motivación de este trabajo consiste en mostrar una visión general de la teoría de los sistemas dinámicos y de la teoría del caos, prestando especial atención al efecto mariposa. Esta visión se crea a partir de una revisión bibliográfica de los manuales y artículos de interés, con el fin último es extraer las conclusiones de la teoría que llevaron al cambio de paradigma, anteriormente mencionado, a mediados del siglo XX. La mayoría de a información ha sido extraída del monográfico [5] y de las referencias que en este constan. Por otra parte, todos los cálculos y representaciones gráficas presentes en este trabajo han sido realizados en MatLab.

2. Sistemas dinámicos: definición y tipos.

"Qué insensato es el hombre que deja transcurrir el tiempo estérilmente".
"Fausto", en la novela Fausto de Goethe

Un *sistema dinámico* se define como un sistema matemático que varía en función del tiempo de acuerdo con una cierta regla. De esta manera, el estudio de un sistema dinámico consiste en la evaluación de los valores que toma una cierta función en distintos instantes de tiempo.

Un sistema dinámico es un ente de estudio por sí mismo dentro del campo de la matemática, pero también es un bien de uso para otras disciplinas como la física, la biología o la economía cuando se quiere modelizar el comportamiento de cierto evento de interés en el tiempo. Cualquiera que sea la naturaleza del sistema de estudio, ya sea una partícula en movimiento o una población de cierto ser vivo, si tenemos magnitudes que varían en el tiempo, es posible modelizarlo como un sistema dinámico. En concreto, desde el punto de vista matemático, podemos distinguir entre dos tipos de sistemas dinámicos: las funciones iteradas y las ecuaciones diferenciales.

La principal diferencia entre los dos tipos de sistemas dinámicos es que mientras la función iterada trata al tiempo como una variable discreta, la ecuación diferencial la trata como una variable continua. De esta manera, mientras la primera es útil para estudiar las características de un determinado sistema cada cierta cantidad de tiempo, la segunda permite la evaluación continuada de dicha magnitud. A continuación, se presentan ambos tipos de sistemas,

2.1. Función iterada.

Una *función iterada* consiste en una determinada regla de computación aplicada de manera sucesiva a los valores obtenidos previamente por ella misma. Es decir, partiendo de un valor inicial, una función iterada calcula un valor de salida a partir de este valor de entrada. Posteriormente, utiliza el valor de salida recientemente calculado como valor de entrada, repitiendo este proceso de manera consecutiva. A continuación se expone una definición más precisa de la misma.

Definición 2.1 *Sea un conjunto X y un función $f : X \to X$.*

Se define la n-iteración de f, que se denota f^n, como:

$$f^0 = I(x), \tag{1a}$$

$$f^{n+1} = f \circ f^n, \tag{1b}$$

donde $I(x)$ es la función identidad de X y $f \circ g$ denota la composición de dos funciones tal que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. [8]

Dicho de otra forma, una función iterada es una función compuesta consigo misma, cuyos valores de salida dependen del valor inmediatamente anterior. Para poder hacer los cálculos es necesario un primer valor de la variable independiente, que recibe el nombre de *condición inicial*.

Un ejemplo de función iterada es el que viene en la figura 1. En ella se han representado los valores de salida de la función $f(x) = x^2$, en función de los valores de entrada x, correspondientes, para los cinco primeros valores temporales (izquierda).También se ha representado la variación de estos valores iterados con respecto al tiempo (derecha). Las representaciones se han hecho para diferentes condicione iniciales, indicadas en la leyenda. Se puede observar como los valores tomados por las funciones cambian sensiblemente en función de la condición inicial escogida.

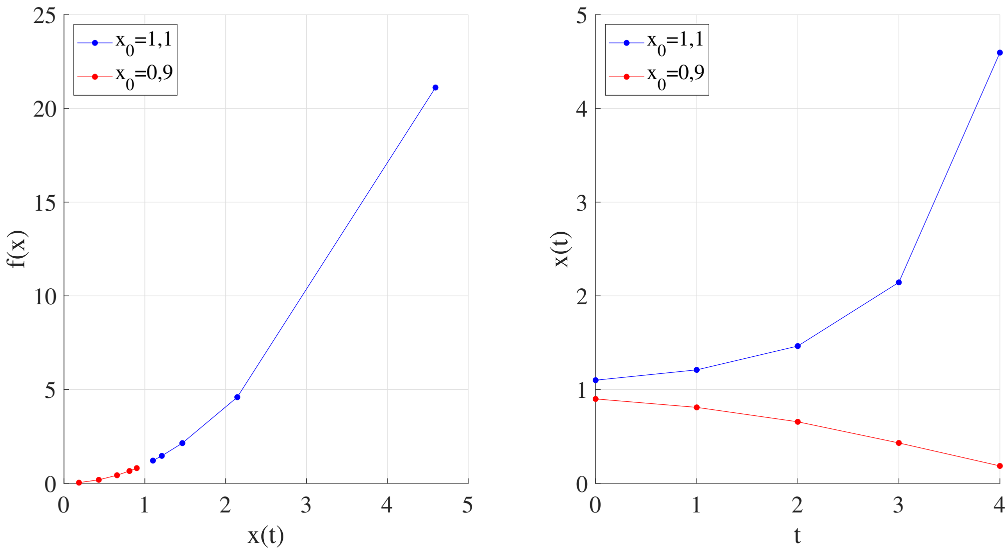


Figura 1: Representación de (1) la función iterada con respecto a sus valores de entrada y (2) los valores de entrada en el tiempo. Condiciones iniciales $x_0 = 1,1$ y $x_0 = 0{,}9$.

Como ya hemos dicho antes, una función iterada necesita de una entrada, que llamamos condición inicial, a partir de la cual se calcula un valor de salida. Luego, dicho valor calculado pasa a ser el valor de entrada, y a partir del mismo obtenemos un nuevo valor de salida. Esto es a lo que llamamos un proceso de iteración. Analizando este proceso, podemos ver que todos los valores calculados a partir de la expresión correspondiente dependen únicamente del valor obtenido en la iteración justamente anterior. En un lenguaje computacional, esto quiere decir que una ecuación iterada no tiene memoria, es decir, los valores previos a una iteración no influyen en el cálculo de nuevos valores, salvo el último, por lo que la función no los tiene en cuenta una vez han sido utilizados. Este hecho cobrará importancia conforme avancemos en la lectura de este texto.

2.2. Ecuación diferencial ordinaria.

Una *ecuación diferencial ordinaria* es un sistema dinámico cuyo significado se muestra a continuación.

Definición 2.2 *Sea $f(x)$ definida como una función en un intervalo $X : a < x < b$.*

Se define una ecuación diferencial ordinaria como una relación entre la variable x, la función $f(x)$ y una o más de las derivadas de la misma [15]. Se dice que una ecuación diferencial es de orden n cuando n corresponde al mayor orden de las derivadas presentes en la misma.

En en el caso de un sistema dinámico, la variable de la función en cuestión es el tiempo, por lo que denotaremos a la función solución como $f(t)$. Tanto la función $f(t)$ como sus derivada dependen del tiempo.

En general, una ecuación diferencial no es fácil de resolver. Dependiendo de la ecuación que se trate de resolver, será necesario proceder de una u otra forma. Algunas pueden resolverse analíticamente, con métodos relativamente sencillos, y pudiendo obtenerse una expresión que represente al conjunto de soluciones de la misma. La mayoría de ellas son complejas de resolver, y es necesario utilizar métodos numéricos para resolverla, obteniendo así una solución aproximada. En cualquiera de los dos casos, la solución a una ecuación diferencial es siempre la función $f(t)$. De esta manera, se puede entender una ecuación diferencial como una expresión que define el comportamiento de su función solución en el tiempo, es decir, como un sistema dinámico.

Un ejemplo sencillo de ecuación diferencial es $f'(x) + f(x) = 0$. En concreto, esta sencilla ecuación puede resolverse integrando ambos miembros simultáneamente, fijando unas determinadas condiciones iniciales. Tomemos la condición inicial $f(t = 0) = 1$ y resolvamos.

$$\begin{aligned}
f'(x) + f(x) &= 0 \\
\int_{1}^{f(t)} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \int_{0}^{t} -dx \\
\ln f(t) &= -t \\
f(t) &= e^{-t}
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que la función $f(t)$ es una determinada magnitud física, por ejemplo, una temperatura. Si la temperatura de un determinado sistema físico sigue la ecuación diferencial anteriormente planteada, tras resolverla, se obtiene que la temperatura del sistema disminuye exponencialmente en el tiempo (figura 2).

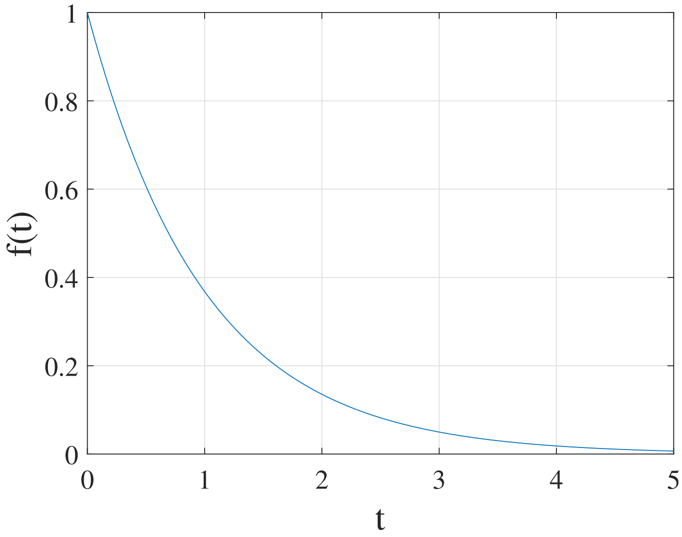


Figura 2: Representación de la función $f(x) = e^{-t}$ para la condición inicial $f_0 = 1$.

3. La ecuación logística.

"La población, sin restricción, se incrementa en proporción geométrica.
La subsistencia solo se incrementa en proporción aritmética."
Thomas Malthus

Es de interés, para la introducción de los conceptos que se van a tratar posteriormente en este trabajo, el estudio de un sistema dinámico concreto: la ecuación logística.

La *ecuación logística* es un sistema dinámico que modeliza de una forma sencilla la población de una determinada especie de seres vivos en un contexto simple. Por ejemplo, puede ser un modelo válido para predecir cómo varía la población de una determinada especie en cautividad, que dispone de una cantidad de alimento fija al día.

En concreto, la ecuación logística puede presentarse de dos formas diferentes: como una función iterada o como una ecuación diferencial. La forma en la que apliquemos esta ecuación depende principalmente del uso que queramos darle, es decir, de la naturaleza del estudio que estemos realizando y de si es más conveniente tratar a la variable temporal como discreta o continua.

3.1. Forma iterada de la ecuación logística.

Para un determinado grupo de individuos pertenecientes a la misma especie, se toman las siguientes consideraciones:

1. Los individuos disponen de una cantidad fija y limitada de recursos.
2. La tasa de reproducción depende del número de individuos y de la cantidad de recursos disponibles por individuo.
3. La tasa de mortalidad depende de la cantidad de recursos disponibles por individuo.

Consideremos que se va a evaluar la población de individuos cada año, que se denotará como P_n. Cada año, este número crece en función de un parámetro r, que recibirá el nombre de factor de crecimiento, y se relacionará con la tasa de reproducción en dicha especie; en concreto $r = 1,1$ quiere decir que la población crece un 10 % cada año. Con esta consideración se obtendría la ecuación 2:

$$P_{n+1} = rP_n. \tag{2}$$

Sin embargo, conforme vaya creciendo la población, se limitará la cantidad de recursos por individuo. De esta manera, se podrá establecer un valor máximo de población para el cual el número de recursos es suficiente. A este último parámetro se lo denota D y se llamará factor de extinción. Con esta nueva consideración, se debe incluir un nuevo término en la ecuación de tal forma que cuando $P_n = D \to P_{n-1} = 0$. Dicho efecto se consigue con la ecuación 3.

$$P_{n+1} = rP_n \left(1 - \frac{P_n}{D}\right) \tag{3}$$

Las ecuaciones (2) y (3) son progresiones geométricas, pero mientras que la primera crece incesantemente, la segunda se ve limitada por un parámetro de control, haciendo que la ecuación (3) se asemeje mejor al comportamiento real de una población. Estos comportamientos se ven ilustrados en la figura 3. Para su representación se ha considerado un crecimiento anual de 10 %, es decir $r = 1,1$, y un factor de extinción de $D = 5000$.

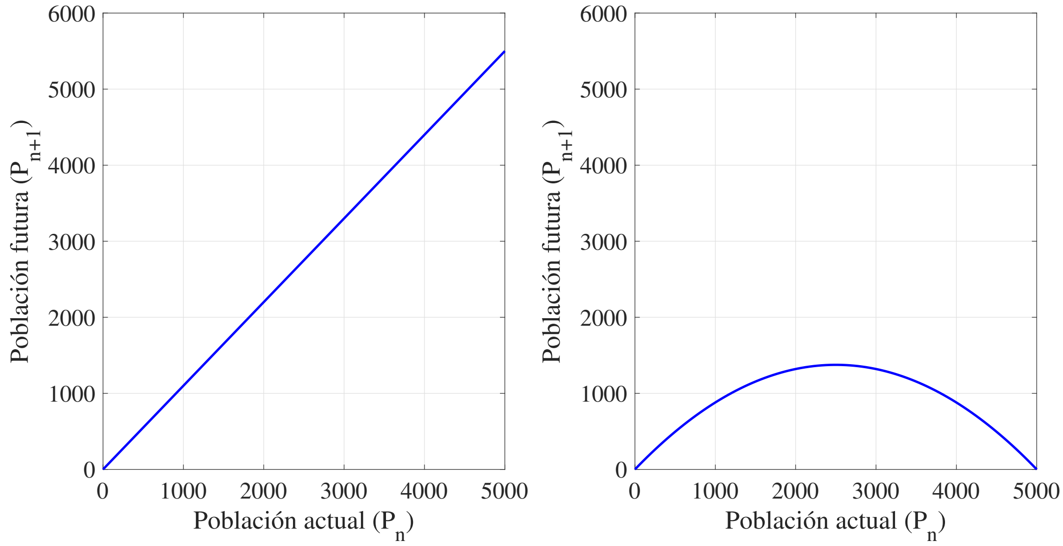


Figura 3: Cálculo de la población al año siguiente para diferentes valores de población actual. A la izquierda, representación del modelo mostrado en la ecuación (2). A la derecha, representación de la ecuación (3).

Una vez representada la comparativa ente las representaciones de (2) y (3) las comparamos. Fijémonos en dos valores diferentes, por ejemplo, $P_{n_1} = 1000$ y $P_{n_2} = 4000$. En la gráfica izquierda de la figura 3, puede observarse como para los dos valores de población, el año siguiente se obtendrá un número de población mayor, de $P_{n_1+1} = 1100$ y $P_{n_2+1} = 4400$. Sin embargo, en la gráfica derecha de la figura 3 se puede ver que se obtendrán valores de población menor, en concreto, $P_{n_1+1} \approx 944$ y $P_{n_2+1} \approx 880$.

También puede apreciarse que la gráfica es simétrica con respecto a $P_n = 2000$, es decir, la variación en la población se equilibra a izquierda y derecha de este valor según el balance dado por el número de individuos, que se reproducen y consumen recursos.

El análisis hecho anteriormente es válido para ver cómo varía una población de un año con respecto al siguiente, pero ¿cómo variaría una población a lo largo de varios años partiendo de un cierto valor inicial? Para responder a esta pregunta, es necesario realizar el proceso de iteración de la ecuación (3).

Esta operación se ha realizado y se ha representado en la figura 4 para distintos valores iniciales. Puede observarse que, para todos ellos, la población tiende a aproximarse a un cierto valor.

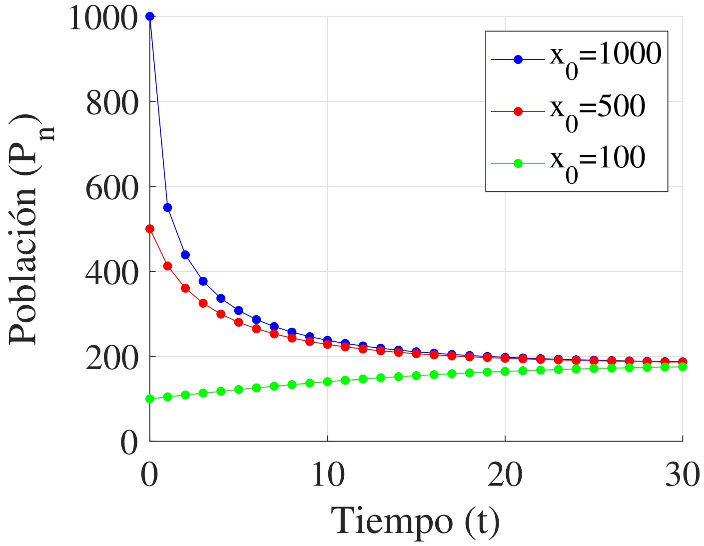


Figura 4: Variación de una población a lo largo del tiempo, según la ecuación (3), para diferente condiciones iniciales. Representación para los parámetros $r = 1,1$ y $D = 1000$.

Por último, cabe destacar que es conveniente normalizar esta ecuación para poder estandarizar su uso. Este proceso consiste en dividir entre el número máximo de habitantes de la población, el factor de extinción, a ambos lados de la ecuación. De esta manera, los valores de entrada y de salida estarán delimitados en el intervalo $0 \leq x \leq 1$.

$$
\begin{aligned}
P_{n+1} &= rP_n \left(1 - \frac{P_n}{D}\right) \\
\frac{P_{n+1}}{D} &= r\frac{P_n}{D} \left(1 - \frac{P_n}{D}\right)
\end{aligned}
$$

De tal forma que, definiendo $x_n = P_n/D$, escribimos:

$$
x_{n+1} = rx_n \left(1 - x_n\right). \tag{4}
$$

La ecuación (4) se denomina *Ecuación logística estándar*, y ofrece bastantes ventajas en comparación a la ecuación (3):

1. La ecuación está normalizada, por lo que los resultados que ofrece son relativos al número máximo de individuos posible, el factor de extinción.

2. Se puede evaluar para diferentes situaciones variando un único parámetro, la tasa de crecimiento r, lo cual hace que la ecuación sea computacionalmente más sencilla.

3.2. Forma diferencial de la ecuación logística.

En este epígrafe haremos una pequeña presentación de la forma diferencia de la ecuación logística. Aquí la definiremos y veremos sus características principales. A pesar del tremendo interés que tiene por sí misma, las conclusiones a las que llegaremos en este trabajo pueden obtenerse de igual forma a partir de su forma iterada, siendo esta última una forma más directa e intuitiva de obtenerlas. Por ello, aunque no será tratada posteriormente, creo que tiene la suficiente importancia como para incluirla en este trabajo.

La ecuación logística en forma diferencial tiene la misma forma que en su forma iterada. Para escribirla solamente hay que darse cuenta que el concepto de derivada, de cambio en la población, es equivalente a un proceso de iteración, que también implica cambio en dicha magnitud. De nuevo, la única diferencia es que aquí el tiempo se considera una variable continua y no discreta. De esta manera, la ecuación logística en forma diferencial queda como en la ecuación (5), donde r es el factor de crecimiento y K recibe el nombre de parámetro de persistencia [5].

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right). \tag{5}$$

De igual forma que en el apartado anterior, se puede representar la variación de la población en función de los valores de población actual (figura 3) y la variación de la población en el tiempo (figura 4). En este caso, la primera de ellas es la representación de la ecuación diferencial y la segunda la representación de su solución. Por lo tanto, primero, se resuelve la ecuación diferencial, que tiene solución analítica. A la solución se la denomina *función logística* y se escribe como en la ecuación (6) [16]:

$$P(t) = \frac{KP_0e^{rt}}{K + P_0\left(e^{rt} - 1\right).} \tag{6}$$

En la figura 5 se puede ver representada, a la izquierda, la ecuación diferencial; y, a la derecha, la función logística para diferentes valores iniciales. Se han seleccionado para ello los valores de los parámetros $r = 3$ y $K = 100$.

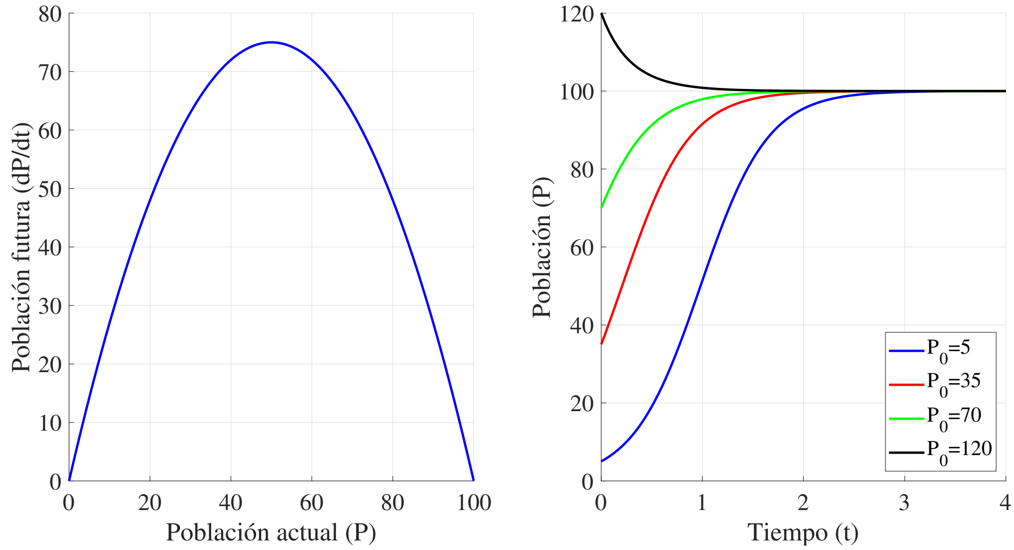


Figura 5: Representación (1) de la ecuación diferencial para los distintos valores de población y (2) de la población en el tiempo, para distintos valores de condiciones iniciales.

En la figura 5 puede verse cómo el comportamiento es análogo a la función iterada: la dependencia de la población futura con respecto a la actual es una parábola que balancea según la cantidad de individuos, modelando así su reproducción y su consumo de recursos; la dependencia de la población en el tiempo varía en función de la condición inicial, pero todas tienden a un valor fijo en el tiempo y que coincide con el parámetro de persistencia.

3.3. Comportamiento: periodicidad y aperiodicidad.

En este apartado, vamos a realizar un análisis sobre el comportamiento de la ecuación logística. Los análisis los realizaremos a partir de su forma de ecuación iterada para una mayor simplicidad conceptual y computacional, pero las conclusiones que extraeremos son universales, es decir, se pueden aplicar también a su forma diferencial. En concreto, el análisis de la función logística lo haremos con su dependencia temporal, a partir de la ecuación (4) y en base a los valores que pueden tomar el factor de crecimiento r.

En general, si estudiamos su serie temporal, la ecuación logística puede comportarse de forma periódica, es decir, para tiempos muy grandes el valor de la población tiende u oscila sobre ciertos valores concretos; o de forma aperiódica, de tal manera que no se observa una tendencia clara a primera vista. Obtener un comportamiento u otro va a depender del valor del parámetro r y, dentro de ese valor, también se pueden obtener distintas variaciones en función de la condición inicial de población. Lo vemos a continuación.

3.3.1. Comportamiento periódico.

Primero, cabe destacar que, como partimos de la ecuación (4), los valores de población serán relativos al parámetro de extinción y estarán contenidos en el intervalo $x_n \in [0, 1]$. Por otra parte, es necesaria una elección correcta de parámetro r y de diferentes condiciones iniciales para observar el comportamiento explicado. Una representación similar se hizo en la figura 4, pero para la ecuación (3). Si atendemos a ella, se puede observar que todas los representaciones tienden a un mismo valor, situado en $P_n \approx 181, 8$, independientemente de la condición inicial seleccionada. Eso quiere decir que, para el valor seleccionado del factor de crecimiento, a lo largo del tiempo, el número de individuos va a tender a acercarse a ese valor. Se dice que este es un *comportamiento estable de punto fijo* de la ecuación logística. Un comportamiento de punto fijo es, como vemos en este ejemplo, cuando una función iterada tiende a un valor concreto en el límite de $t \to \infty$

Visto eso, el siguiente paso es analizar la tendencia para distintos valores de r. Se toma el conjunto de valores $r = \{0, 90; 1, 50; 1, 90; 2, 80; 3, 20; 3, 84\}$ y se representan para la misma condición inicial en la figura 6.

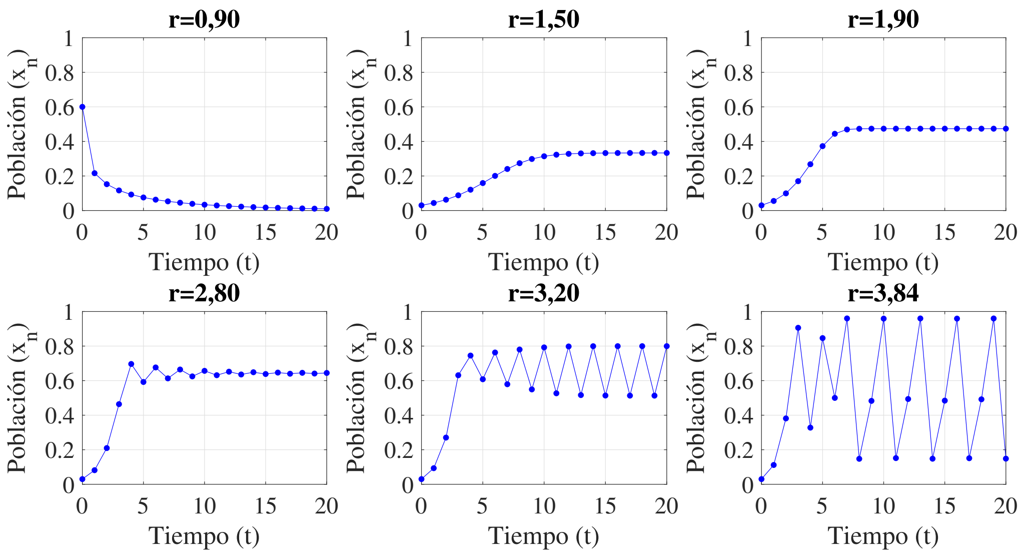


Figura 6: Representación de la ecuación logística estándar para distintos valores del parámetro r y condición inicial $x_0 = 0{,}03$, salvo para la $r = 0, 90$ que se ha seleccionado $x_0 = 0, 6$.

Parémonos a observar las tres primeras figuras, en las que se puede observar una tendencia clara hacia un valor de la población. En la primera de ellas, correspondiente a $r = 0,90$, se observa un caso crítico en el que la tasa de crecimiento es menor que la unidad y, por tanto, el ritmo de crecimiento es menor que el de mortandad, desapareciendo así la población. En el tiempo, el numero de individuos de la población tiende a cero. La segunda y la tercera, con respectivos valores de $r = 1,50$ y a $r = 1,90$, corresponden a una población estable, en la cual, durante el transcurso del tiempo, el número de individuos de la población tiende a estabilizarse a un número concreto; $x_n \approx 0,33$ y $x_n \approx 0,47$ respectivamente. Comparando estas dos, se puede observar que el valor estable de la población aumenta con el valor de r, incluso partiendo de la misma condición inicial.

Con respecto a la segunda fila de gráficas, nos encontramos en una situación similar salvo por una diferencia: ahora la gráfica no tiende a un valor concreto, sino que oscila sobre él. En la gráfica $r = 2,80$ se puede observar que a partir de la cuarta iteración el valor de la población aumenta y disminuye con respecto a un valor intermedio, tal y como comentábamos antes, hasta que para un tiempo relativamente grande acaba convergiendo al valor de la tendencia, $x_n = 0,64$ en este caso. En las gráficas $r = 3,20$ y $r = 3,84$ ocurre lo mismo al principio, pero a diferencia de la gráfica anterior, para tiempos muy grandes el valor de la población no converge a ningún valor concreto, sino que oscila en el tiempo tomando dos valores de referencia en lugar de uno. La gráfica $r = 3,20$ oscila entre los valores $x_n \approx 0,51$ y $x_n \approx 0,80$, y la gráfica $r = 3{,}84$ entre $x_n \approx 0,15$ y $x_n \approx 0,49$.

Es decir, el comportamiento de punto fijo se da para valores bajos de r, mientras que el comportamiento de la función cambia, conforme aumentamos r, a otro tipo de comportamiento periódico, oscilando entre ciertos valores concretos. Esto también es independiente de la condición inicial.

Recopilando lo visto en este punto, hemos observado que para los valores de r seleccionados se obtiene un comportamiento estable de la ecuación logística, es decir, el valor de la variable tiende a uno o a ciertos valores. Las cuatro primeras gráficas tienden en el tiempo a un cierto valor, por lo que decimos que tiene una estabilidad de punto fijo; mientras las dos últimas gráficas tienden a dos valores diferentes, por lo que decimos que tienen estabilidad de ciclo o que son *periódicas.* En concreto, los dos ejemplos tienen periodicidad doble, ya que los valores que se obtienen se basan en dos valores principales, pero, en general, una función periódica podría converger a múltiples valores.

3.3.2. Comportamiento aperiódico.

Ahora cabe preguntarse ¿qué ocurrirá si seguimos aumentado el parámetro r? Sea la ecuación logística (4) para $r = 4,0$ y con condición inicial $x_0 = 0,1$, se representa la figura 7.

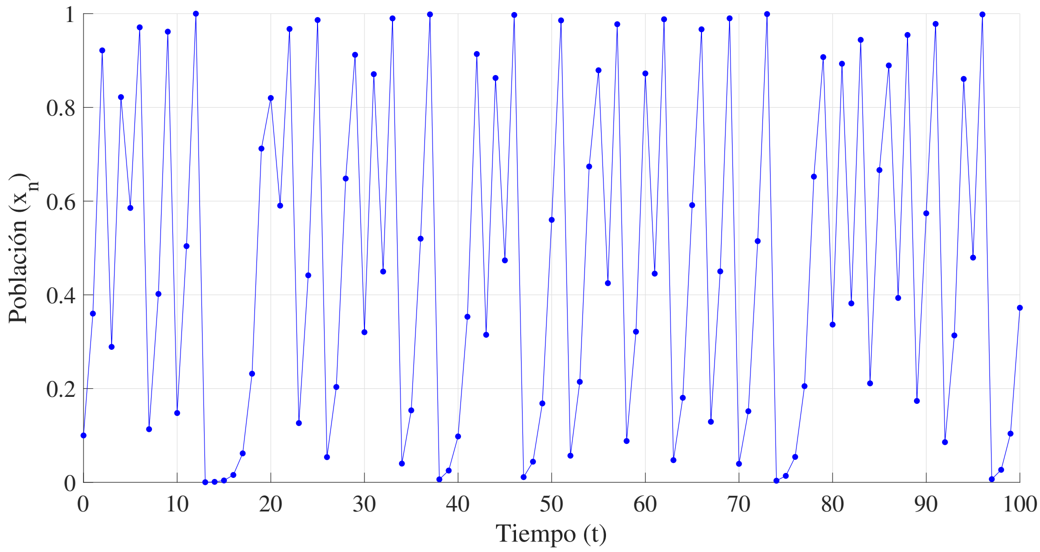


Figura 7: Representación de la ecuación logística estándar para $r = 4,0$ y condición inicial $x_0 = 0{,}1$.

En la figura 7 se ha iterado hasta $t = 100$ para tener una visión más amplia de la posible periodicidad. Se puede observar que, a pesar de haber iterado bastantes más veces, no existe ningún patrón de periodicidad observable a simple vista. Podríamos pensar que, simplemente, no le hemos dado el tiempo suficiente como para que la función vuelva a repetir valores, pero a partir de sistemáticos análisis es demostrable que, efectivamente, esta función no presenta periodicidad para $t \to \infty$. Este análisis se sale de la intención de este trabajo, pero puede consultarse en cualquier libro de sistemas dinámicos. Un ejemplo de libro de sistemas dinámicos es el Hirch (capítulo 15) [11].

En cualquier caso, la aperiodicidad es una característica especial. Que una función sea aperiódica quiere decir que, para infinitos valores posibles de la población ($x_n \in [0, 1] \in \mathbb{R}$) la función nunca tomará dos veces el mismo valor. Y esto ocurre para una función definida a partir de la ecuación logística: una regla matemáticamente muy sencilla, que consta de un único parámetro y que no tiene memoria. Precisamente, este último hecho, que la función no tenga memoria. es lo que hace este resultado tan especial. Si la función no sabe qué puntos ha tomado, ¿por qué no se repiten esos puntos? Realmente, este hecho tiene sentido si consideramos que el intervalo $[0, 1]$ contiene a infinitos valores y la función toma valores de forma aleatoria dentro de dicho intervalo.

Ahora bien, ¿no resulta curioso que un sistema regido por una ecuación bien definida parezca que toma valores aleatorios? Esta pequeña pregunta, aunque parezca una simple curiosidad, puede ser la primera ficha de dominó que caiga y cuya hilera termine desembocando en un gran cambio. ¿Algo tan pequeño puede cambiar tanto las cosas? Sigamos con nuestro estudio y lo veremos.

4. El efecto mariposa.

"El aleteo de una mariposa puede provocar un huracán al otro lado del mundo".

Edward Lorenz.

En el apartado anterior hemos visto que la ecuación logística puede tener un comportamiento periódico, en el cual incluimos el comportamiento de punto fijo; o un comportamiento aperiódico. Cuando la ecuación exhibe un comportamiento periódico, los valores que toma tienden a uno o varios valores en el tiempo, mientras que cuando exhibe un comportamiento aperiódico parece que los valores que toma no tienden a un valor de forma que sea apreciable a simple vista. En este punto, nos centraremos en una peculiaridad que concierne al segundo comportamiento, pero no podemos olvidarnos de la clara tendencia del primero, ya que volveremos sobre esta diferencia más adelante.

La peculiaridad en cuestión se conoce comúnmente como *efecto mariposa* o, de una forma un poco más técnica *dependencia sensible a las condiciones iniciales*. En inglés, *sensitive dependence of initial conditions (SDIC)*. A partir de ahora, será frecuente referirnos a este como efecto mariposa o por sus siglas en inglés. En esta sección, nos dedicaremos a presentar el concepto, mostrar su origen y definirlo matemáticamente.

4.1. Definición de SDIC.

Así pues, consideremos de nuevo la ecuación (4) con factor de crecimiento $r = 4$. Dado que la función no tiene una tendencia clara, no deberíamos esperar que los valores obtenidos en la iteración fueran similares si tomamos dos condiciones iniciales diferentes, pero sí habría que preguntarse qué valores toma la función si seleccionamos dos valores iniciales arbitrariamente cercanos. En principio, dado que la ecuación logística es una regla determinista, podríamos pensar que una pequeña variación en las condiciones iniciales implicaría dos órbitas cercanas entre sí para todas las iteraciones, pero ¿es realmente así? Seleccionemos dos condiciones iniciales, $x_0 = 0,10$ e $y_0 = 0,11$, iteramos para los 20 primero valores temporales y representemos. El resultado de las iteraciones se muestran en la figura 8. Aquí, podemos apreciar de una forma muy visual el efecto mariposa.

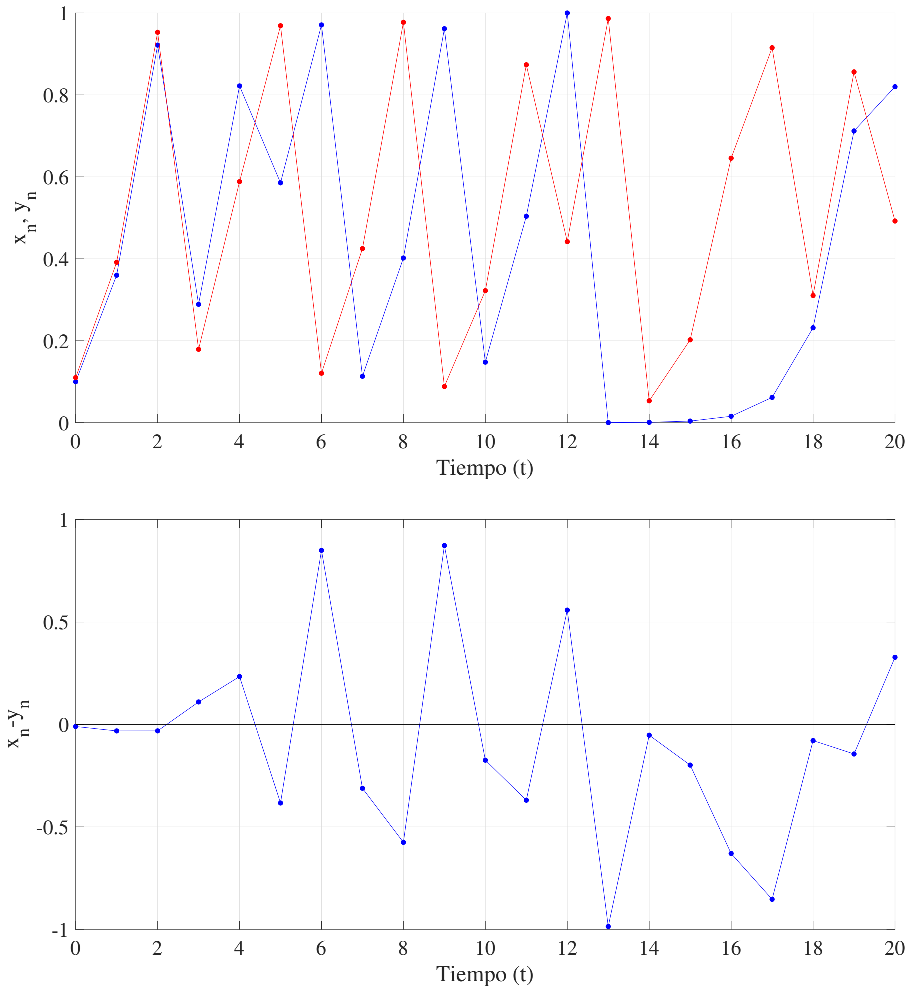


Figura 8: (1) Representación de la ecuación logística estándar para $r = 4,0$ con condición inicial x_0 = 0,10 (azul) e y_0 = 0,11, (2) Representación de la diferencia de valores x e y en cada iteración.

Definición 4.1 *Sea una función f(x) definida en el intervalo unidad, se dice que dicha función muestra SDIC si para cualquier δ, x_0 y ϵ existe un número natural n y una condición inicial $y_0 \in [0, 1]$ tal que $|x_0 - y_0| < \epsilon$ y $|f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(y_0)| > \delta$.*

Dicho de otra forma, un sistema es sensible a sus condiciones iniciales cuando, al tomar dos condiciones iniciales arbitrariamente cercanas, a una distancia relativa ϵ, los valores tomados por la función distan mucho entre sí a partir de una determinada iteración n, más que la distancia relativa notada por δ. Es decir, a pesar de haber tomado condiciones iniciales muy cercanas, las órbitas de la función evolucionan de formas muy diferentes a partir de un momento determinado. Nótese que el momento en el que esto ocurra no es importante para determinar si la función posee o no SDIC, es decir, puede ocurrir en cualquier iteración n. De hecho, podemos comprobar que cuanto menor sea la distancia relativa entre el par de valores iniciales más tarde ocurre esta separación. La representación se muestra en la figura 9, análoga a la figura 8 pero con condiciones iniciales $x_0 = 0,10$ e $y = 0,10001$.

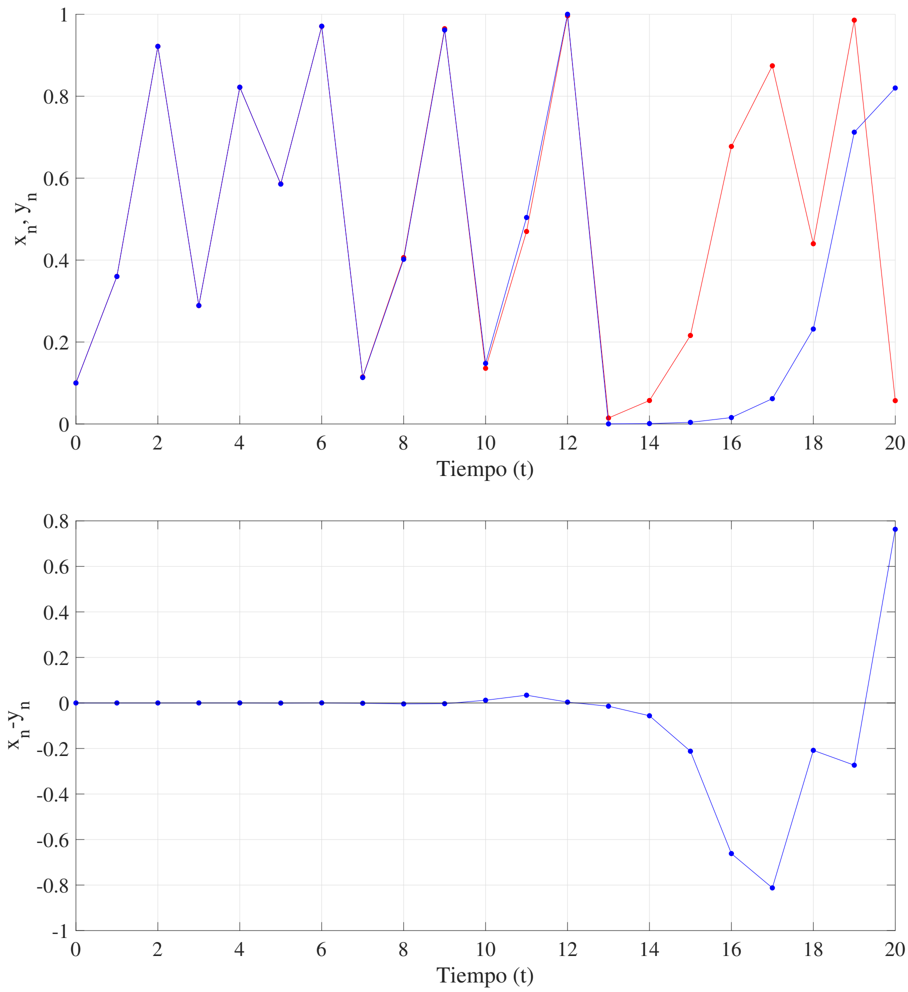


Figura 9: (1) Representación de la ecuación logística estándar para $r = 4,0$ con condición inicial $x_0 = 0,10$ (azul) e $y_0 = 0,10001$, (2) Representación de la diferencia de valores x e y en cada iteración.

Mientras que en la figura 8 la separación empezaba a ser notable en $t = 3$, en la figura 9 la separación de ambas órbitas empieza a ser notable en $t = 11$ y de $t = 14$ en adelante.

4.2. Interpretación del efecto mariposa.

Tanto el propio efecto mariposa como el hecho de que para condiciones iniciales más cercanas la separación ocurra más tarde puede entenderse de la siguiente manera: una pequeña diferencia en el valor inicial de un proceso de iteración sistemático va a ir acumulándose en cada iteración individual, de tal manera que el comportamiento expuesto por la función puede terminar variando significativamente [13].

Reflexionemos un momento ante el hecho de la existencia de SDIC en la ecuación logística. La ecuación logística es una regla sencilla, que depende solo de un parámetro, y que nos da un comportamiento fijo para un valor inicial bien definido. De esta manera, un sistema, de cualquier índole, definido por la ecuación logística puede suponerse un sistema determinista. Aquí utilizamos el concepto de *determinismo* según la concepción propia de Newton, Galileo o Laplace: un sistema se dirá determinista si, a partir de ciertas condiciones iniciales, puede definirse de forma exacta la evolución del mismo a partir de una regla matemática. La máxima expresión de este hecho podemos apreciarla cuando tenemos valores de r pequeños y la ecuación logística exhibe un comportamiento periódico. Independientemente del valor escogido, la ecuación siempre va a tender a uno o varios valores, por lo que siempre se puede determinar la tendencia de la función.

Todo lo dicho en el párrafo anterior es aplicable, desde el punto de vista computacional, al caso que nos ocupa en este punto, la ecuación logística con $r = 4$ y el comportamiento aperiódico. Tal y como se ha hecho para representar las gráficas de este punto, si le damos un valor inicial a un programa de representación este es capaz de calcular la órbita correspondiente y, en cualquier caso, la órbita siempre será la misma para una determinada condición inicial. Esto, a pesar de que la función no tenga una tendencia clara. Desde el punto de vista computacional esto no genera ningún problema, pero es porque, en este caso, podemos asignar valores iniciales precisos. La realidad es que, en cualquier experimento científico, los datos medidos tienen siempre cierto error y, por tanto, el valor inicial de la magnitud no va a ser un dato preciso. Este cierto grado de indeterminación que acompaña a cualquier medida hace que un sistema definido por una ecuación con SDIC no genere la misma órbita de forma inequívoca.

Para entender el problema anteriormente planteado, fijémonos en la representación (1) de la figura 8. Supongamos que en un determinado experimento hemos medido la condición inicial de una determinada magnitud y que se ha obtenido $x_0 = (0,10 \pm 0,01)\, u$ es una medida experimental, donde u representa las unidades correspondientes a dicha magnitud. Esto quiere decir que el valor de dicha magnitud en el instante $t = 0$ es 0,10 y que el aparato de medida utilizado nos da un error de 1 en la centésima. Es decir, no podemos saber con certeza el valor exacto de la condición inicial, sino que lo más que podemos alcanzar a saber es que $0,9 \leq x_0 \leq 0,11$. Por lo tanto, si resulta que este sistema presenta SDIC, esa centésima de error puede cambiar muchísimo el comportamiento de la magnitud de estudio, exactamente como vemos en la figura 8. Supongamos ahora que hemos conseguido un aparato de medida mucho mejor y que en lugar de darnos un error en al centésima de unidad, nos la da el error en la cienmilésima, es decir, el error de x_0 es 0,00001. En ese caso, estamos en la representación de la figura 9, y se pueden extraer las mismas conclusiones. Que la indeterminación de la medida sea menor va a implicar que las órbitas serán similares al principio, pero estas irán separándose conforme avance el tiempo, obteniendo un comportamiento muy diferente al final.

El nombre de efecto mariposa aporta una descripción muy visual de este fenómeno. El nombre viene de una metáfora que dice que "el aleteo de una mariposa en Brasil puede provocar un tornado en Michigan". Este efecto fue descubierto en la década de 1960 por Edward Lorenz, pero el nombre del efecto mariposa fue atribuido por Phillipe Merilees, el cual estaba encargado de ponerles nombres llamativos a las conferencias de la AAAS (American Association for the Advancement of Science), donde Lorenz expuso este comportamiento. En el artículo [10] se puede leer el origen tan interesante de esta metáfora. No obstante, la idea intuitiva que da esta metáfora es bastante acertada: cómo una pequeña diferencia al principio puede marcar un gran suceso con el paso del tiempo.

Por último, una idea interesante es la de la yuxtaposición de dos conceptos opuestos en una misma ecuación matemática. Mientras que cuando la ecuación exhibe un comportamiento periódico es fácil predecir la evolución de la misma, en el caso de comportamiento aperiódico y con SDIC el comportamiento de la función se vuelve impredecible, debido al error en las magnitudes. Esto último, pese a ser la ecuación una regla determinista. Visto de esta manera, a pesar de que un sistema tenga un comportamiento determinista no quiere decir que sea predecible, por lo que podemos decir que algo determinista puede ser impredecible o *aleatorio*. Volveremos sobre esta idea en las secciones posteriores para definir mejor estos términos, y así clarificarlos.

En definitiva, en función del valor de r tenemos un comportamiento periódico o uno aperiódico, un comportamiento predecible frente a uno impredecible: *orden* frente a *caos*. Como vemos, las leyes naturales no excluyen la posibilidad de que exista caos, de que un sistema pueda evolucionar de una forma impredecible. De esta manera, y en consecuencia con esta idea, se desarrolla la teoría del caos. En la Sección 5, se definirá el concepto de caos de una forma más exacta.

Figura 10: Foto de Edward Lorenz, descubridor del efecto mariposa.[4]

4.3. Exponentes de Liapunov

Antes de hablar de caos, determinismo y demás aspectos, cabría que nos preguntemos cuán sensible puede ser una ecuación a la elección de las condiciones iniciales. Hasta ahora, hemos definido cuándo un sistema tiene una dependencia sensible a las condiciones iniciales (SDIC), pero no nos hemos parado a pensar cómo de fuerte es esta dependencia o si hay algunos sistemas que sean más dependientes que otros. Para cuantificar el grado de sensibilidad de un sistema a la elección de las condiciones iniciales se utilizan los exponentes de Liapunov.

Consideremos para un sistema dinámico concreto dos condiciones iniciales x_0 e y_0. Consecuentemente, se definen las órbitas creadas por ambas condiciones iniciales como $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente. Se puede definir la función diferencia de ambas órbitas como

$D(t) = |x(t) - y(t)|$ con condición inicial $D_0 = |x_0 - y_0|$. En este caso, t puede ser considerado tanto discreto como continuo, por lo que el método es válido tanto para sistemas definidos por funciones iteradas como para sistemas definidos por ecuaciones diferenciales.

En general, para valores de t pequeños, se puede considerar que esta diferencia entre valores de las órbitas crece exponencialmente con el tiempo. Por lo tanto, podemos escribir que:

$$D(t) = D_0 e^{\lambda t}. \tag{7}$$

Es decir, el crecimiento exponencial vendrá definido a partir del valor inicial y de un parámetro λ, que es al que llamamos *exponente de Liapunov.* Tal y como está definida la ecuación (7), el valor de λ va a determinar cómo de sensible es este sistema al error de la condición inicial: cuanto mayor sea el valor del exponente de Liapunov mayor será la desviación entre las órbitas en un determinado instante temporal y, por tanto, mayor será la sensibilidad a las condiciones iniciales de dicho sistema. De esta forma, lo que nos da el exponente de Liapunov es una media del crecimiento exponencial de la distancia entre los valores de las órbitas.

Consideremos ahora la siguiente simplificación: en cada iteración, la función $D(t)$ crece un valor fijo, por ejemplo, un 5 %. De esta manera, se puede escribir la siguiente progresión.

$$D(1) = 1,05 D_0; \quad D(2) = 1,05 D(1) = 1,05^2 D_0; \quad \ldots \tag{8a}$$

$$D(n) = 1,05^n D_0. \tag{8b}$$

Si comparamos el resultado de la progresión (8) con el modelo de la ecuación (7), se puede obtener fácilmente el exponente de Liapunov tomando logaritmos.

$$D(n) = 1{,}05^n D_0 = D_0 \left(e^{\ln(1{,}05)}\right)^n = D_0 e^{0{,}0488 n} \tag{9}$$

Por lo que, si sabemos que en cada iteración existe la función crece un porcentaje fijo es fácil calcular λ. En el caso del ejemplo, habríamos obtenido $\lambda \approx 0,0488$. Esta suposición puede parecer un poco simple, pero es realmente lo que ocurre en la ecuación logística. El factor de crecimiento, r, lo que hace es establecer un ritmo de crecimiento fijo. De esta manera, si la función crece un determinado porcentaje en cada iteración, la función diferencia también lo hará. Esta suposición no será correcta para otros sistemas más complejos, pero es correcta para el caso que nos atañe. De hecho, podemos representar el valor real de la diferencia, $|x(n) - y(n)|$, y la ecuación (7) para compararlas. Así, consideremos la ecuación logística con $r = 4$, $x_0 = 0,17$ e $y_0 = 17001$ y representamos cómo varía $|x(n) - y(n)|$ en el tiempo.

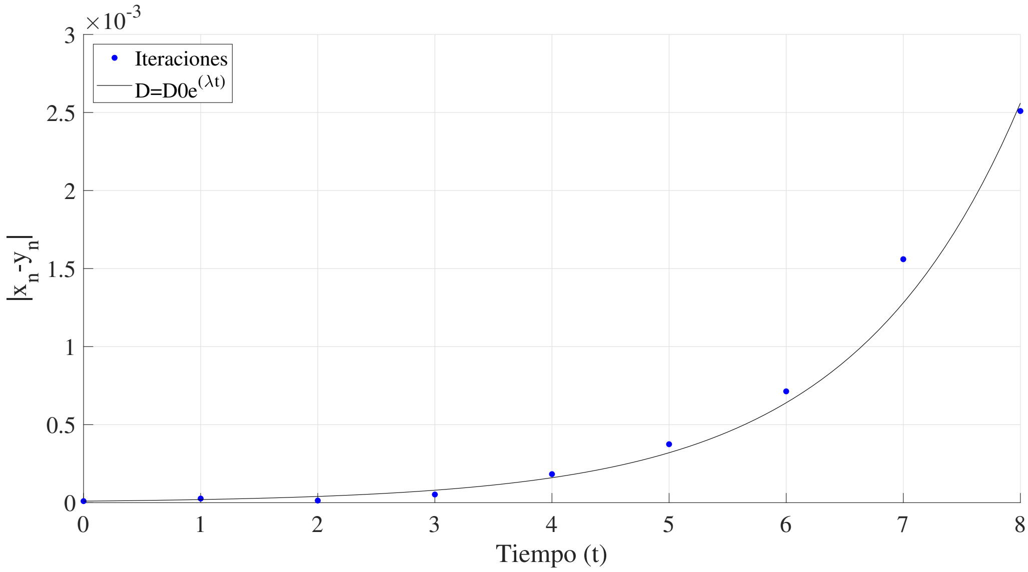


Figura 11: Representación del valor real de las órbitas (puntos azules) y del modelo exponencial (linea continua negra).

En este caso, el exponente de Liapunov da exactamente $\lambda = \ln(2)$ [9]. Como podemos ver, la tendencia de ambas representaciones son muy parecidas, por lo que el modelo de crecimiento exponencial es válido para los primeros instantes de tiempo.

5. Caos.

”Llamamos caos al orden que todavía no comprendemos”.

Edward Lorenz.

En el lenguaje cotidiano, cuando hablamos de caos nos referimos a algo ”absolutamente desordenado o confuso”. Sin embargo, en matemáticas, la palabra *caos* hace referencia a un sistema errático en impredecible, por la propia naturaleza de dicho sistema. [2]. En esta sección, trataremos de definir de una forma más concisa cómo surge, qué es, cuál es la naturaleza, y qué implicaciones tuvo el concepto de sistema caótico.

Antes, fijémonos nuevamente en la ecuación logística. Como decíamos al final de la Sección 4.2, esta ecuación es un claro ejemplo de lo que en matemáticas podemos denominar ”orden” y ”caos”, predecible o impredecible, en función del valor del parámetro de crecimiento seleccionado. Resulta curioso que un mismo modelo matemático hayamos podido ver ambos comportamientos, pero es así, las leyes de la naturaleza dejan abierta la posibilidad a caos. Todo depende de lo sensible que sea un sistema a sus condiciones iniciales. A continuación, vemos una definición un poco más exacta de este fenómeno.

5.1. Definición de sistema caótico.

Sea conocido y estudiado el fenómeno de efecto mariposa o SDIC, podemos definir un *sistema caótico* de la siguiente manera:

Definición 5.1 *Decimos que un sistema dinámico es caótico cuando cumple las siguientes características:*

1. *La evolución temporal del sistema viene dada por una ecuación determinista.*
2. *Su órbita está acotada.*
3. *Su órbita depende sensiblemente de sus condiciones iniciales.*
4. *Su órbita es aperiódica.*

Mientras que las dos últimas características ya han sido tratadas en profundidad a lo largo de este trabajo, las dos primeras las trataremos a continuación.

La primera característica nos dice que un sistema caótico debe venir definido por una regla determinista, es decir, para una determinada condición inicial la órbita de un sistema caótico se encuentra perfectamente definida. Esta idea puede parecer poco intuitiva con respecto a la idea de caos que podríamos tener en un principio, pero es condición necesaria para definir de forma usual el caos en matemáticas. Lo que le da la característica de impredecible a un sistema caótico son los dos últimos puntos: la dependencia sensible a la condición inicial y la aperiodicidad es lo que hace que un sistema caótico tenga una tendencia difícil de prever. Normalmente, y en lo que concierne a este trabajo, el término *caos* suele referirse siempre a *caos determinista*.

La segunda condición nos dice que un sistema caótico debe estar acotado, es decir, debe tender a valores concretos diferentes del infinito para cualquier valor temporal. Este hecho también puede parecernos poco intuitivo, pero, tras reflexionar un poco, parece lógico pensar que las funciones que tienden al infinito carecen de interés dentro de este tipo de estudios. Supongamos, por ejemplo, la función iterada $f(x) = x^2$. Es una regla determinista, aperiódica y que al tender a infinito, en algún punto, puede considerarse que tiene SDIC, ya que cumplirá la condición de separación entre dos órbitas que empiezan muy cerca en algún valor temporal. Dicho de otra forma, que una función tenga una tendencia hacia el infinito hace que las condiciones 3 y 4 pierdan importancia a la hora de definir un sistema caótico. Por ello, la condición 2 elimina un gran número de funciones que, típicamente, carecen de interés desde el punto de vista tratado en este trabajo [1].

5.2. Ejemplos de sistemas caóticos.

Una vez definido propiamente el concepto de sistema caótico, podemos comprobar que la ecuación logística con $r = 4$ cumple los requisitos para catalogarse como tal. Esto puede considerarse trivial, ya que hemos introducido el concepto de sistema caótico a partir de la misma, pero me ha parecido importante comentarlo por ser el único sistema que de momento conocemos. Por lo tanto, la ecuación logística, sobre la que hemos basado todo lo que va de trabajo, es el primer ejemplo en sí mismo de sistema caótico expuesto en este punto. Concretamente, cómo ya hemos visto, la ecuación logística adquiere un comportamiento caótico cuando el parámetro $r = 4$. Esto, aplicado a un modelo biológico, representa una población de una determinada especie, aislada y con una tasa de reproducción, definida anteriormente, de un 400 %.

Como es obvio, además de la ecuación logística existen multitud de sistema caóticos. Muchos de ellos aparecen a partir de modelar situaciones relativas a otras disciplinas como la física, la biología o la economía. A continuación, vamos a nombrar algunos sistemas que pueden modelarse a partir de ecuaciones deterministas y que tienen un comportamiento caótico. El objetivo de este trabajo no es hacer un estudio detallado sobre los mismos, pero sí que creo conveniente realizar una primer contacto con los mismos, ya que son lo suficientemente relevantes en sus respectivas disciplinas.

5.2.1. Péndulo doble.

El péndulo doble es de los sistemas físicos más simples que presenta un comportamiento caótico. Un péndulo doble es, básicamente, dos péndulos unidos. El primero cuelga de una superficie estable, mientras que el segundo cuelga del extremo del primero.

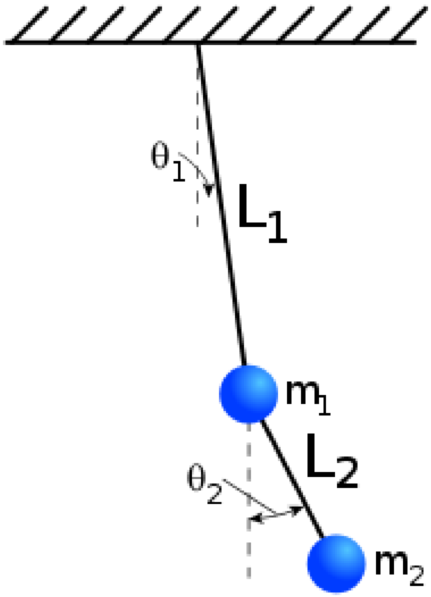


Figura 12: Esquema visual del péndulo doble [3].

Para esta sistema, realicemos el experimento de dejar oscilar el péndulo doble. Si le damos una posición inicial x_0, por ejemplo la de la figura 12 el doble péndulo comenzará a oscilar de forma errática. Físicamente hablando, la fuerza de la gravedad ejercida en ambos péndulos, la inercia de ambos, y la interacción entre ellos son las causantes de este movimiento errático. El péndulo de abajo comenzará a oscilar por acción de la gravedad, a su vez, este movimiento provocará una perturbación en el péndulo de arriba, haciendo que este también se mueva. Nuevamente, el movimiento del péndulo de arriba afectará al péndulo de abajo, que perturbará el movimiento inercial del mismo, y así consecutivamente. Ahora, consideremos el mismo experimento, situando el péndulo en la misma condición inicial, y repitamos el experimento. Podemos ver cómo volvemos a tener un movimiento errático de ambos péndulos. Ahora bien, si nos fijamos, la trayectoria del péndulo doble empieza siendo muy parecida a la del experimento anterior, sin embargo, la trayectoria se va volviendo diferente a medida que pasa el tiempo. El motivo es que, debido a las imprecisiones del mundo físico, la posición inicial seleccionada en el segundo experimento no es exactamente la misma que la seleccionada en el primer experimento, sino que son dos posiciones iniciales x_0 e y_0 arbitrariamente cercanas con una distancia relativa igual al error experimental.

Cualitativamente hablando, este sistema encaja con la definición aportada de sistema con SDIC. Además, es un sistema con órbita acotada, ya que la posición del péndulo se limita a la longitud de las cuerdas; es una órbita aperiódica, ya que la posición del péndulo doble no tiende a ningún valor concreto ni parece repetirse; y está regido por una ecuación determinista. En concreto, este sistema está regido por un par de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas, que se muestran a continuación. (Estas ecuaciones fueron sacadas de los apuntes del curso de ”Mecánica Teórica”, del grado en Física).

$$(m_1 + m_2)L_1\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + (m_1 + m_2)g\theta_1 + m_2L_2\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = 0 \tag{10a}$$

$$L_2\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + g\theta_2 + L_1\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = 0 \tag{10b}$$

En las ecuaciones se ha denotado m como la masa, L como la longitud de la cuerda, θ como el ángulo que forma la cuerda con la dirección vertical y g como la aceleración gravitatoria. Asimismo, los subíndices 1 y 2 hacen referencias a las magnitudes correspondientes a los péndulos superior e inferior, respectivamente. También, se denota la derivada del ángulo θ con respecto al tiempo con la notación típica de Leibniz.

Más allá de las características fenomenológicas de este experimento, puede comprobarse de forma rigurosa que ambas ecuaciones constituyen un sistema caótico, cumpliendo con todas las características planteadas anteriormente. También cabe destacar que son necesarias cuatro condiciones iniciales para resolver este sistema. Físicamente, corresponden a la posición y la velocidad de cada uno de los péndulos, denotados como θ_0 y $\dot{\theta}_0$

5.2.2. El mercado de capitales.

En general, el comportamiento de un sistema económico es complejo e irregular, sin embargo, hasta la última década del siglo XX la teoría económica no comenzó a aceptar los modelos no lineales para explicar los fenómenos que se sucedían dentro de esta disciplina.

En concreto, la introducción de sistemas caóticos fue capaz de explicar de forma mucho más exacta distintos fenómenos que hasta el momento se ajustaban con modelos lineales. Un ejemplo de sistema que se ajusta a un modelo caótico es el mercado de capitales [7].

El mercado de capitales es un espacio donde se invierte vendiendo y comprando deudas a medio o largo plazo. Un tipo de mercado de capitales es la bolsa financiera [12]. Estos sistemas financieros exhiben un comportamiento, desde un punto de vista cualitativo, con las características necesarias para ser tratados como sistemas caóticos, ya que los valores de los productos de comercio sufren unas fluctuaciones difíciles de predecir por cualquier otra teoría. En concreto, las fluctuaciones de este tipo de mercados exhiben un comportamiento errático, difícil de predecir, mucho más que otros de sistemas económicos. A la hora de realizar un análisis, los datos empíricos permiten aceptar que los mercados de capitales se pueden modelar mediante un sistema caótico, por lo que, dados los datos empíricos, se asumen las condiciones necesarias para considerar al mercado un sistema caótico, se modeliza, y se comprueba de forma estadística que, efectivamente, los datos se ajustan a dicho modelo.

Por ejemplo, el precio de un determinado producto en el mercado de capitales se puede modelar a partir de la siguiente ecuación iterada, que aunque no ha sido nombrada en su texto de origen, llamaremos ”ecuación de los mercado activos”, en referencia a las explicación dadas en [7].

$$P_{t+1} = P_t + \gamma \left(\alpha \left(P^* - P_t \right) \left(\frac{1}{2P_t - P_t^2} \right) + \beta \left(P_t - v \right) \right) \tag{11}$$

Este modelo fue propuesto en la tesis doctoral de Pilar Grau Carles, citada previamente [7] con el fin de modelar el precio de una acción en función del comportamiento de los inversores. De esta manera, la evolución del precio de una acción en el mercado financiero, P_{t+1}, se definirá a partir de su precio actual, P_t más un factor de corrección multiplicado por la constante γ, que representa la demanda de dicha acción. Por su parte, el factor está compuesto por la suma de dos miembros. El primero de ellos es una función que modela un inversor, llamado fundamental, cuyo comportamiento consiste en comprar la acción cuando se encuentra por debajo de su valor fundamental, P^*, y en vender cuando está por encima de dicho valor. El segundo, modela al inversor técnico, que compra con la esperanza de que la acción suba y vende cuando cree que ya no puede subir más, guiado por la tendencia de dicho valor, que se denota como v. Los coeficientes α y β son constantes y definen la fuerza de cada tipo de inversor sobre el mercado.

Desde un punto de vista más formal, puede comprobarse que este modelo está enmarcado en la teoría caótica determinista. Además, este modelo es capaz de predecir con una mayor exactitud el valor de las acciones dentro del mercado financiero que sus predecesores, modelos lineales, deterministas y no caóticos.

5.2.3. Ecuaciones de Lorenz.

Las ecuaciones de Lorenz fueron el modelo precursor de la teoría del caos, por lo que necesariamente debían estar incluidas en este trabajo. Edward N.Lorenz propuso en 1963 un modelo simplificado para explicar la dinámica de la atmósfera terrestre. No obstante, este conjunto de ecuaciones puede servir para modelar otros sistemas físicos de carácter similar, por lo que lo presentaremos de forma general y luego lo particularizaremos a un par de fenómenos físicos de interés. Dicho modelo consistiría en un conjunto de tres ecuaciones diferenciales reales, de primer orden, acopladas y no lineales [6].

$$\frac{dx}{dt} = \sigma\left(y - x\right) \tag{12a}$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + x\left(r - z\right) \tag{12b}$$

$$\frac{dz}{dt} = -bz + xy \tag{12c}$$

Las variables $\{x,y,z\}$ son un conjunto de tres variables adimensionales proporcionales a diferentes magnitudes físicas, según sea el ámbito de aplicación del modelo, y $\{\sigma,\ r,\ b\}$ tres parámetros reales que representan tasas de relajación, también adimensionales.

En el caso original, se piensa en la atmósfera como un fluido en movimiento, enmarcándose este problema dentro de la mecánica de fluidos. En este caso, el tratamiento matemático es relativamente complejo. En primer lugar, se trata al campo de velocidades de las partículas que forman al fluido con un análisis de Fourier de tal forma que la primera y segunda componentes de dicho análisis forman dos de las variables de interés. Las variables x e y del modelo de Lorenz son, respectivamente, la primera y segunda componentes de este análisis de Fourier del campo de velocidades. Haciendo un tratamiento análogo a la temperatura, z correspondería a la primera componente de Fourier del campo de temperatura del fluido, que define la temperatura de cada punto. Por otra parte, los parámetros σ, r, b, son parámetros complicados de definir matemáticamente, pero físicamente y groso modo, σ tiene que ver con la viscosidad del fluido y los parámetros r, b tienen que ver con la importancia de los fenómenos de convección en fluidos, debidos al gradiente de temperatura en el mismo. De esta manera, el modelo relaciona el movimiento de las partículas de un fluido, como la atmósfera, con el gradiente de temperaturas asociado en sus distintos puntos [9].

Otro fenómeno físico es el del fenómeno de encendido de un láser. El fenómeno de encendido de un láser consiste en la evolución caótica de determinadas magnitudes físicas de carácter electromagnético y que están directamente relacionadas con la luz emitida y con los materiales con los que se ha fabricado el láser. En este caso, x representa la amplitud del campo eléctrico irradiado, mientras que y, z representan características electromagnéticas del medio material; en concreto y es proporcional al momento dipolar inducido a las partículas de medio, y z es proporcional a la excitación energética de las partículas del medio. Por otra parte, b es el cociente entre la tasa de relajación de la inversión de población y la del dipolo inducido, σ es el cociente entre la tasa de relajación del campo y la del dipolo y r es el cociente entre las ganancias y las pérdidas que ocurren en el proceso de encendido.

El fenómeno de encendido o no encendido (ON/OFF) de un láser consiste en una dinámica microscópica de las partículas de un medio que interacciona con un campo electromagnético, concretamente con una corriente eléctrica. Este modelo deja patente la dependencia mutua de la luz irradiada, la creación de dipolos y promoción energética de las partículas del medio [6].

6. Implicaciones del efecto mariposa.

"En la Ciencia la única verdad sagrada es que no hay verdades sagradas".

Carl Sagan.

A lo largo de este trabajo, se han ido introduciendo los conceptos básicos para comprender los aspectos fundamentales que rigen el comportamiento de los sistemas caóticos, entre los cuales destaca la dependencia sensible de las condiciones iniciales, SDIC. Que un sistema caótico y determinista presente SDIC conlleva que nos planteemos ciertas cuestiones.

6.1. Determinismo, estocástica y aleatoriedad.

En primer lugar, un sistema caótico determinista está regido por una ecuación tal que conociendo la condición inicial necesaria podemos obtener su tendencia, pero el hecho de que haya SDIC hace que esa tendencia no sea predecible. En cierto modo, al no poder predecir con exactitud su comportamiento a partir de cierto valor temporal, hace que el valor tomado inmediatamente después al valor considerado sea un valor *aleatorio*. Pero ¿los valores que toma la ecuación son realmente aleatorios? ¿Tendría sentido que así fuera para una regla determinista? Veámoslo a continuación.

En primer lugar, consideremos el experimento aleatorio por excelencia: tirar una moneda. Este es un experimento de carácter estocástico donde la probabilidad de que salga ”cara” y la probabilidad de que salga ”cruz” son iguales, del 50 % (o, normalizando, de 1/2). El experimento es completamente aleatorio, ya que, tenemos las mismas probabilidades de obtener un resultado que otro, con lo cual, es imposible predecir de ninguna forma cual vamos a obtener. Consideremos ahora la realización consecutiva de este experimento, es decir, que tiramos varias veces la moneda y anotamos el resultado obtenido. Además, cada vez que saga ”cara” anotaremos un ”L”, y cada vez que salga ”cruz”, un ”R”. De esta manera, lo que obtendremos al realizar varias veces el experimento será una secuencia de unos y ceros, donde estará la información del resultado de los experimentos. Un ejemplo de realizar el experimento 20 veces sería: RLRLRLRLRLRLRRLRLRR; donde la frecuencia con la que aparece cada resultado es aproximadamente la misma, en este caso, $11/20 = 0,55$ para R y $9/20 = 0,45$ para L. A este procedimiento, realizado para entender el carácter aleatorio del experimento, se lo denomina dinámica simbólica.

La dinámica simbólica también es aplicable a otro tipo de experimentos, por ejemplo, vamos a utilizarla para entender mejor el proceso de iteración de la ecuación logística. Podemos entender un proceso de iteración como la repetición sucesiva de un experimento marcado por la regla determinista correspondiente, en este caso, la ecuación logística. En ese caso, iteraremos computacionalmente la ecuación logística para $r = 4$, de tal forma que cada vez que obtengamos $x \geq 0,5$ marcaremos un R, y cada vez que obtengamos

$x < 0,5$, marcaremos L. A los conjuntos L y R los llamaremos particiones de la ecuación. Tras la iteración de la ecuación logística correspondiente a las condiciones presentadas en la figura 7, se puede obtener que la secuencia simbólica es la siguiente:

LRLRRRLLRLRRLLLLLLRRRRLLRLLRRLRLRLLRRLLLLRLRLRLLLR...

Esta secuencia simbólica agrupa los distintos valores tomados por la ecuación en dos conjuntos diferenciados, cuya unión corresponde al conjunto de soluciones de la ecuación logística. Si realizamos la iteración un millón de veces y comparamos cuantas veces el punto obtenido está en cada partición, obtenemos que la frecuencia de cada suceso es:

$$f(L) = 0,504 \quad f(R) = 0,496.$$

Las frecuencias con las que ocurre cada suceso son aproximadamente iguales, y conforme más iteraciones se realicen mayor será el parecido entre las dos frecuencias. Por lo tanto, en el límite de infinitas iteraciones, la probabilidad de obtener números mayores o menores de 0,5 es la misma, 1/2. Exactamente igual que con el experimento de la moneda, con los sucesos ”cara” y ”cruz”.

En este caso, hemos realizado la partición del conjunto de posibles soluciones en dos, tomando como límite el valor de 0,5, pero, también es posible realizar más particiones. Por ejemplo, si realizáramos cuatro particiones, que podríamos denotar como $LL \in [0; 0,25)$, $LR \in [0,25; 0,5)$, $RL \in [0,5; 0,75)$ y $RR \in [0,75; 1]$; y realizáramos la iteración lo que obtendríamos es que la probabilidad de obtener un valoro dentro de un intervalo cualquiera de los cuatro intervalos es de 1/4, en el límite para infinitas iteraciones. Y así, sucesivamente, con cualesquiera que sean las particiones escogidas. En el límite de infinitas particiones, cuando los intervalos escogidos son infinitesimales, el resultado que se induce es que el valor tomado por la ecuación logística en cada iteración es aleatorio.

Con el razonamiento planteado en este punto, lo que hemos hecho ha sido inducir que los sistemas caóticos son una fuente de aleatoriedad deterministas. De esta manera, y para no caer en contradicciones, en el libro de Feldman [5] se proponen las siguientes tres definiciones para determinismo, estocástica y aleatoriedad.

1. **Determinismo**: un sistema se dice determinista si sigue una regla bien definida, es decir, no ambigua. De esta manera, el valor tomado por un sistema determinista

puede ser determinado con precisión si se tiene un buen conocimiento (lo suficientemente preciso) de la regla y de las condiciones iniciales del sistema.

2. **Estocástica**: un sistema se dice estocástico si la toma de valores del mismo depende de un cierto grado de azar. Es decir, el valor tomado por un sistema no puede ser determinado con precisión por muy bien que se conozcan las condiciones iniciales.

3. **Aleatoriedad**: un sistema se dice aleatorio si su secuencia es impredecible e incomprensible. Es decir, no presenta ningún tipo de patrón o tendencia clara.

6.2. Límites de predicciones en la práctica y en la teoría.

La impredecibilidad de los sistemas caóticos, de la que hemos hablado en el punto anterior, hace que la aplicación del modelo a un sistema de estudio tenga ciertos límites con respecto a la precisión del mismo. Por tanto, ¿de qué nos sirve modelar este tipo de sistemas de esta manera?

Consideremos primero la parte práctica. Cuando queremos modelar un experimento a partir del caos, ocurre que el modelo obtenido solo nos va a dar predicciones de los resultados con cierta precisión hasta un momento concreto, a partir del cual, la diferencia entre el modelo y el experimento dejan de ser salvables. Dicho de otra forma, sólo vamos a obtener resultados precisos de la evolución temporal para instantes cercanos al instante inicial. No obstante, sí que podemos hacer diferentes análisis estadísticos para, en un determinado instante temporal, comprobar qué trayectorias son posibles para el sistema. Eso nos da para cada instante de tiempo un *conjunto solución*, el cual incluye todas las soluciones posibles en dicho instante de tiempo. Es decir, aunque no podamos determinar con exactitud los valores tomados por el sistema, sí que se pueden hacer estimaciones estadísticas para intentar averiguar qué va a suceder. Esto, por ejemplo, puede verse aplicado en las predicciones meteorológicas, que se modelan con sistemas caóticos y que están sujetas a cierta probabilidad.

Por otra parte, los sistemas caóticos ven también limitada su capacidad de predicción desde el punto de vista teórico. Para que el modelo nos dé soluciones que se ajusten a los experimentos, es necesario poseer un muy alto conocimiento de las condiciones iniciales, esto es, saberlas con gran precisión. En función de cómo de precisa sea la condición inicial introducida en el modelo, así de precisos serán los resultados obtenidos. Esta limitación impone que cualquier modelo matemático con SDIC va a limitar la predicción de resultados conforme pasa el tiempo y, aunque esto pueda suponer un problema, el ajuste puede seguir realizándose valorando el grado de SDIC. El cómo de precisos serán los resultados y el hasta cuándo esos resultados predichos son válidos podemos obtenerlo analizando el modelo mediante distintas técnicas como, por ejemplo, a partir de los exponentes de Lyapunov.

6.3. Determinismo de Laplace y Newton: cambio de paradigma.

El paradigma determinista en la ciencia fue sustituido debido al desarrollo de la teoría cuántica a lo largo del siglo XX, la cual era capaz de describir los estado de partículas microscópicas utilizando la estadística y dándole carácter estocástico a las magnitudes dinámicas. Sin embargo, los sistemas macroscópicos siguieron enmarcados en el determinismo desarrollado durante los siglos XVII y XVIII, cuyos principales exponentes son Isaac Newton y Pierre-Simon Laplace.

La idea de determinismo científico, desde aquella época, puede entenderse a partir del «demonio de Laplace». Laplace describía el universo a partir de la idea newtoniana: el universo estaría constituido por un conjunto de corpúsculos que interaccionan entre sí mediante unas leyes naturales bien definidas, de tal forma que un supercientífico, el demonio de Laplace, capaz de conocer las condiciones iniciales de todos los cuerpos del universo con una precisión arbitrariamente pequeña sería capaz de predecir el desarrollo futuro del mismo. Dicho de otra forma, *el determinismo* se definiría como *una doctrina que defiende que el estado de cualquier sistema físico cerrado puede ser predicho con una precisión arbitraria, aunque no infinita, en cualquier instante futuro a partir de unas leyes naturales determinadas, incluso desde dentro del propio sistema.* De esta manera, el demonio de Laplace sería un científico, perteneciente al mundo tangible, conocedor de las condiciones iniciales de todos los cuerpos del universo y de todas las leyes físicas, de tal forma que puede conocer la situación futura del universo [14].

Por lo que hemos visto en este trabajo, los sistemas caóticos no causan un conflicto en la concepción determinista de ver el mundo (no así como, por ejemplo, la teoría cuántica) ya que estos están definidos por reglas matemáticas sencillas, siendo estos deterministas. No obstante, parece que si hay un pequeño conflicto a la hora de asociar determinismo con predecibilidad. Todos los sistemas vistos en este trabajo son deterministas y, sin embargo, se vuelven impredecibles a partir de cierto instante de tiempo, lo cual choca con la idea descrita con el demonio de Laplace. Ahora, un supercientífico que conozca las condiciones iniciales de todos los cuerpos del universo con una precisión arbitraria, y necesariamente no infinita, no va a ser capaz de predecir el futuro del mismo, ya que muchos de los sistemas que forman parte de él son caóticos. La teoría del caos, por tanto, asocia a algunos sistemas físicos la cualidad de ser determinista con la cualidad de ser impredecible a largo plazo. De esta manera, la irrupción de la teoría del caos no rompe por completo el concepto de determinismo, pero si hace que sea necesario un nuevo pensamiento del mismo.

6.4. Orden y desorden.

Para hablar de este punto, consideremos, de nuevo, la figura 6, donde se ilustraba el comportamiento de la ecuación logística para diferentes valores de $r < 4$; y la figura 7, donde se ilustraba el comportamiento de la misma ecuación para $r = 4$.

Como ya se ha comentado previamente, la tendencia de la ecuación logística en función del valor del factor de crecimiento hace que podamos distinguir dos tipos de comportamientos muy bien diferenciados. En primer lugar, cuando al la ecuación se comporta de forma periódica, podemos ver que la la órbita tiende a uno o varios valores independientemente de la condición inicial del sistema; mientras que, cuando se comporta de forma aperiódica, la órbita se vuelve errática independientemente de la condición inicial del sistema. En el primer caso, por muy alejadas que estén dos condiciones iniciales, la órbita va a converger a un fin que puede determinarse con exactitud; mientras que en el segundo caso, por muy cercanas que estén dos condiciones iniciales la órbita va a tomar valores completamente aleatorios e indeterminables a partir de cierto instante de tiempo. O, visto desde otra perspectiva: en el primer caso, el sistema siempre va a tender al ”orden”, a un valor concreto; mientras que el segundo sistema siempre va a tender al ”desorden”, a valores aleatorios.

Entendiendo de esta manera los conceptos de orden y desorden, de forma general, cabría pensar que, en el universo, existen sistemas asilados que van a tender a al orden y otros que van a tender al desorden. Sin embargo, la teoría del caos no nos dice eso. Hemos visto que un único sistema, regido por la ecuación logística, es capaz de tender al orden o al desorden, en función de las condiciones del mismo (en el caso de la ecuación logística, el valor de r). De esta manera, orden y desorden no deben entenderse como dos cosas muy diferenciadas, si no, más bien, como dos caras de la misma moneda.

7. Conclusión.

A lo largo de este trabajo, he intentado dar una visión global y simplificada, una introducción, de la teoría de sistemas dinámicos, haciendo especial incapié en el fenómeno conocido como efecto mariposa y en los sistemas caóticos.

En la Sección 2 se han definido los sistemas caóticos, haciendo hincapié en algunos de los tipos de modelos que puede utilizarse. Estos sistemas son de muchísimo interés para el resto de disciplinas científicas, tanto naturales como sociales, ya que los científicos necesitan hacer estudios de determinadas magnitudes que varía con el tiempo.

En la Sección 3, se ha definido un sistema caótico concreto, que es de gran interés en bilogía, para el control de poblaciones: la ecuación logística. La intención de este estudio detallado ha sido la de utilizar un ejemplo para mostrar los distintos comportamientos que puede tener un sistema caótico. Como hemos visto, el estudio detallado de la ecuación logística nos ha revelado gran cantidad de características de los sistemas dinámicos, tremendamente aplicables en los modelos del resto de disciplinas.

En la Sección 4, hemos definido el efecto mariposa, o dependencia sensible de las condiciones iniciales. Este es, sin lugar a dudas, una de las características más notables de los sistemas dinámicos, y el punto de mayor importancia del trabajo. El efecto mariposa es un fenómeno muy curioso, que hace que un sistema dinámico determinista se vuelva aleatorio y, por tanto, impredecible. Este hecho a supuesto un gran avance en el estudio de ciertos sistemas en distintos ramas del conocimiento.

En la Sección 5, hemos pasado al siguiente nivel: la definición de sistemas caóticos. Estos sistemas dinámicos tienen características especiales, aplicables también, cómo hemos visto, a multitud de casos en el resto de disciplinas.

Por ultimo, en la Sección 6, hemos visto qué significa todo esto desde un punto de vista más filosófico.

Como toda teoría científica, el estudio de los sistemas caóticos nos permite, a la humanidad, a estar un paso más cerca de comprender el mundo que nos rodea. En concreto, la teoría del caos nos permite explicar distintos fenómenos, de cualquier índole, que no encajaban de forma correcta con modelos anteriores. Por lo tanto, la teoría del caos ha marcado un antes y un después en el conocimiento científico de la humanidad.

Referencias

[1] Robert C. Bishop. “Chaos”. En: *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2017).

[2] *Caos | Definición | Diccionario de la lengua española | RAE - ASALE*. URL: `https://dle.rae.es/caos` (visitado 31-05-2021).

[3] *Doble péndulo - Wikipedia, la enciclopedia libre*. URL: `https://es.wikipedia.org/wiki/Doble_p%7B%5C'%7Be%7D%7Dndulo` (visitado 03-06-2021).

[4] *Edward Lorenz, padre de la teoría del caos | elmundo.es*. URL: `https://www.elmundo.es/elmundo/2008/04/17/obituarios/1208392642.html` (visitado 22-05-2021).

[5] David Feldman. *Chaos and Dynamical Systems*. Princeton University Press, 2019.

[6] F. V. Garcia-Ferrer y col. “Didactic application of numerical analysis in nonlinear dynamics: Lorenz model study”. En: *Optica Pura y Aplicada* 50.3 (2017), págs. 197-219. ISSN: 21718814. DOI: `10.7149/OPA.50.3.49009`.

[7] Pilar Grau Carles. “Economía Dinámica Caótica”. En: *Universidad Complutense de Madrid* (1996).

[8] Herschel y John Frederick William. *A Collection of Examples of the Applications of the Calculus of Finite Differences*. Cambridge, UK: Printed by J. Smith, sold by J. Deighton y sons, 1820, págs. 1–13 5-6.

[9] Robert C. Hilborn. *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Oxford University Press, ene. de 2002. DOI: `10.1093/acprof:oso/9780198507239.001.0001`.

[10] Robert C. Hilborn. “Sea gulls, butterflies, and grasshoppers: A brief history of the butterfly effect in nonlinear dynamics”. En: *American Journal of Physics* 72.4 (2004), págs. 425-427. ISSN: 0002-9505. DOI: `10.1119/1.1636492`.

[11] Morris W. Hirsch, Stephen Smale y Robert L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systemas, and an Introduction to Chaos*. Academic Press, 2004.

[12] Alfonso Peiro Ucha. *Mercado de capitales - Qué es, definición y concepto | 2021 | Economipedia*. URL: `https://economipedia.com/definiciones/mercado-de-capitales.html` (visitado 03-06-2021).

[13] Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens y Dietmar Saupe. *Chaos and Fractals, New Frontiers of Sciencie*. Springer New York, 1992.

[14] Karl Popper. *El Universo Abierto: Un argumento en favor del determinismo del Post Scriptum a La Lógica de la investigación científica. Vol II.* tecnos, 2011, págs. 52-63. ISBN: 9788530950829.

[15] Morris Tenenbaum. *Ordinary differential equations.* 1985.

[16] Pierre-François Verhulst y Pierre-François Verhulst. "Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement". En: *Correspondance mathématique et physique* 10 (1838), págs. 113-121.