

Trabajo Fin de Máster
Máster en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

Diferentes aproximaciones numéricas para
el acoplamiento de no linealidad material y
fractura basada en la metodología phase-field

Autor: Pablo Olivares Rodríguez

Tutor: José Antonio Reinoso Cuevas

Tutor Externo: Adrià Quintanas Corominas

Dpto. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de
Estructuras
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2022



Trabajo Fin de Máster
Máster en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

Diferentes aproximaciones numéricas para el acoplamiento de no linealidad material y fractura basada en la metodología phase-field

Autor:

Pablo Olivares Rodríguez

Tutor:

José Antonio Reinoso Cuevas

Profesor Titular de Universidad

Tutor Externo:

Adrià Quintanas Corominas

Doctor en Ingeniería Mecánica

Dpto. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2022

Trabajo Fin de Máster: Diferentes aproximaciones numéricas para el acoplamiento de no linealidad material y fractura basada en la metodología phase-field

Autor: Pablo Olivares Rodríguez
Tutor: José Antonio Reinoso Cuevas
Tutor Externo: Adrià Quintanas Corominas

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:

Resumen

Los procesos de fractura son una de las principales causas de fallo que ocurren en diferentes materiales en aplicaciones en Ingeniería. Por ello, a lo largo de las últimas décadas, su estudio ha estado enfocado en tareas como el desarrollo de criterios de prevención en fase de proyección de estructuras o la modelización del comportamiento de materiales ante situaciones (estados de carga) que conlleven la iniciación y el desarrollo de grietas. En el caso concreto de la Ingeniería Civil, los materiales de naturaleza geomecánica (suelos y rocas) sufren a su vez este tipo de procesos de carácter inelástico. En el contexto de la Mecánica Computacional, se han propuesto diversas metodologías de análisis de procesos de fractura basadas en la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL), modelos de grieta cohesiva, entre otros muchos. Recientemente, una de las técnicas con mayor impacto en la comunidad científica ha sido la denominada Phase Field Approach of Fracture (PFAF), que es la visión energética originalmente propuesta por Griffith incluida en un enfoque variacional desde el punto de vista matemático. En este trabajo, se desarrolla la extensión de la PFAF para la modelización de la fractura conjuntamente con leyes materiales no lineales siguiendo diversas formulaciones propuestas en la literatura y aplicadas a modelos de fractura con flujo asociativo y no asociativo. El trabajo concierne un profundo análisis de las diferentes opciones de modelización de fuerzas precursoras de fractura en el contexto de PFAF así como su correspondiente implementación numérica empleando el método de los elementos finitos.

PALABRAS CLAVE: mecánica computacional, plasticidad, phase field, elementos finitos, mecánica de la fractura

Abstract

Fracture events are one of the most common causes of failure that occur in different materials used in engineering applications. Therefore, over the last decades, the comprehensive understanding of these phenomena has been received a great deal of attention with focus on the prevention criteria development in the designing and dimensioning stages of structures as well as on the modelling of the material behaviour in situations (related to load states) that lead the development of cracks. In Civil Engineering applications, geomaterials (soils and rock) are prone to develop this type of inelastic process. Within the context of Computational Mechanics, several fracture methodologies based on Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM), cohesive crack models, among many others, have been proposed so far. Recently, one of the techniques with great impact on the scientific community is the so-called Phase Field Approach of Fracture (PFAF), that is the energetic vision originally proposed by Griffith included in a variational approach from a mathematical point of view. In this work, the extension of the PFAF for material nonlinear effects prior fracture occurrence is developed following several formulations proposed in the literature and applied to fracture models with associative and non-associative flow. The work concerns with an in-depth analysis of the different options for modelling fracture driving forces in the context of PFAF as well as their corresponding numerical implementation using the finite element method.

KEYWORDS: computational mechanics, plasticity, phase field, finite element method, fracture mechanics

Índice

<i>Resumen</i>	I
<i>Abstract</i>	III
1 Introducción	1
1.1 Motivación y objetivos	1
1.2 Revisión del estado del arte	2
1.2.1 Fractura	2
Fractura frágil	9
Rate independent Operator Split Algorithm	12
Fractura dúctil	13
Staggered Algorithm	14
1.2.2 Plasticidad	15
1.3 Organización del documento	21
2 Implementación de la ley constitutiva	23
2.1 Implementación y desarrollo del código	24
2.1.1 Inicialización y declaración de variables y subrutinas	24
2.1.2 Actualización del estado tensional	28
2.1.3 Modelización de la matriz \mathbb{C}^{epc}	37
2.2 Ejemplo de aplicación	43
2.2.1 Resultados	44
2.3 Ejemplo de verificación	45
2.3.1 Resultados	48
3 Desarrollo del modelo de fractura acoplado	51
3.1 Implementación del caso acoplado	51
3.2 Análisis de metodologías	53
3.3 Ejemplo de aplicación	56
3.3.1 Resultados	57
4 Conclusión	61
4.1 Conclusiones	61
4.2 Líneas de investigación futuras	61
<i>Índice de Figuras</i>	63
<i>Índice de Tablas</i>	65
<i>Índice de Códigos</i>	67
<i>Bibliografía</i>	69

1 Introducción

Los procesos de fractura son los modos de fallo que habitualmente tienen lugar en materiales utilizados en aplicaciones de Ingeniería. Por ello, su análisis ha estado enfocado en tareas como el desarrollo de criterios de prevención en fase de proyección de estructuras o la modelización del comportamiento de materiales ante situaciones (estados de carga) que conlleven el desarrollo de grietas. En el campo de la Ingeniería Civil, los materiales tipo suelo y roca no escapan de sufrir este tipo de procesos de carácter mecánico. Garantizar la seguridad ante estados límite relacionados con la fractura es esencial en situaciones como la construcción de estructuras de contención, excavación de túneles o procesos naturales de cambio de humedad en suelo y roca que pueden afectar a las cimentaciones de las estructuras.

Tal y como se introduce en [1], entendemos por fractura el proceso por el cual se da la fragmentación de un sólido debido a la evolución de una o más grietas preexistentes. Por tanto, el objetivo que persigue su prevención pasa por entender y desarrollar una base de conocimiento que sea capaz de predecir la situación de inicio de grieta y su propagación.

Para la aplicación que nos ocupa, dentro del contexto de la Mecánica del Suelo y Rocas, los materiales geológicos presentan ciertas grietas en su estado natural debido principalmente a su historial de tensiones. Según [2], los entornos de dichas grietas presentan un campo de tensiones singular tal que si se somete al material a un estado de tracción remota, cuando el factor de intensidad de tensiones se iguala a la tenacidad de fractura se produce la situación de abertura y propagación de dichas grietas, desde un punto de vista de solución local. Desde el punto de vista global, asemejándose a cualquier tipo de excavación u obra de carácter geotécnico, donde, por ejemplo, la realización de un avance en una excavación se puede entender como la alteración del estado tensional del material suelo/roca presente; es muy importante entender cómo esa alteración puede afectar a su respuesta y a sus defectos, pudiendo ocasionar procesos de fractura que conlleven la propagación o nucleación de nuevos. Dichos procesos ocasionan generalmente una reducción de la resistencia del material que puede acabar desencadenando en la rotura del mismo de forma abrupta, o tras un proceso de deformación irreversible propio de la existencia de una etapa plástica.

A continuación, se explicarán la motivación, los objetivos y se elaborará una pequeña base del conocimientos de los conceptos y desarrollos que estarán presentes a lo largo de este trabajo.

1.1 Motivación y objetivos

La motivación que se persigue desde el punto de vista computacional se basa en desarrollar un modelo para la aplicación de diversas formulaciones de fractura siguiendo la metodología PFAF acoplada con una ley constitutiva de carácter elastoplástico. El material de aplicación serán los suelos cohesivos.

Con base en [3], los suelos son materiales que presentan los tres estados de la materia: sólido en las partículas propias del suelo con diferentes formas y tamaños (granos); y líquido (agua) y gaseoso (aire) en las zonas que no están ocupadas por las partículas (poros). En el caso particular de las arcillas, los granos no contactan entre ellos, ya que alrededor de los mismos existe una capa de agua adherida. En la zona de poros, que suele ser pequeña en comparación con el volumen total del material, se aloja el agua que circula libremente y aire. La circulación o flujo en la zona de poros es normalmente bastante lenta, lo que hace que las arcillas se consideren impermeables. Además, debido a este tipo de estructura, la arcilla presenta un valor de cohesión que le permite tener cierta resistencia a tracción.

La modelización del comportamiento en suelos, cuyo fin es la creación de un modelo constitutivo para este material, no es tarea sencilla. Esto es debido principalmente a la complejidad del medio al que nos enfrentamos, que se escapa de ser continuo y homogéneo. Esto nos podría hacer pensar que la solución pasa por desarrollar un modelo de carácter altamente complejo para reproducir fielmente el comportamiento de este material. Sin embargo, a medida que el modelo se hace más complejo aumenta el número de parámetros a definir y la necesidad de técnicas computacionales más elaboradas y exhaustivas. Esto nos conduce a que el modelo puede llegar a ser intratable debido a que, por un lado, se hace imposible obtener tantos parámetros en laboratorio, y/o las técnicas empleadas hacen ineficiente el costo computacional que conlleva alcanzar una solución. Por ello, el modelo a desarrollar debe ser tanto comprensible en los conceptos y desarrollos que abarca como eficiente en los métodos de resolución.

En la práctica, ante geometrías sencillas se opta por modelos sencillos que pasan por cálculos de carácter simplificado dependientes de un número reducido de parámetros, siendo los modelos más elaborados reservados para situaciones especiales propias de la ingeniería geotécnica o labores de investigación. En cuanto a la complejidad del medio, se aplicará la aproximación macroscópica de la mecánica de medios continuos.

De forma tradicional, y por simplicidad, el suelo se ha considerado totalmente seco o saturado, evadiendo la composición real que se ha explicado anteriormente. Esto es aceptable en numerosos casos, pero en otros, como cambios de humedad en problemas de estabilidad de taludes naturales o problemas de flujo de agua en diques; es necesario considerar condiciones de saturación parcial a la hora de resolver el problema. Es aquí donde entra el estudio de la Mecánica de los Suelos Parcialmente Saturados, que se inició recientemente en el siglo pasado.

En nuestro caso, optaremos por considerar el caso simple de comportamiento totalmente seco o saturado, reservando el caso de parcialmente saturado para futuros trabajos.

Por tanto, el modelo a desarrollar, que debe preservar el equilibrio entre su carácter práctico y realista, tendrá su base en los siguientes submodelos a modo de objetivos a conseguir para el modelo principal:

- ▼ Modelo de simulación de proceso de daño que tenga en cuenta procesos como nucleación, apertura y desarrollo de grietas. Un ejemplo de este tipo de modelos y que ha sido aplicado en numerosos campos es el *Phase Field Approach to Fracture* (PFAF), con origen en los estudios de la fractura de tipo frágil de la mano de Griffith [4] y su formalización a través de una formulación de tipo variacional por Francfort y Marigo [5].
- ▼ Modelo de simulación de plasticidad específica para suelos. Uno de los modelos más sencillos de aplicar por ser de carácter lineal es el de Mohr-Coulomb con plasticidad no asociativa en suelos [3, 6, 7, 8]. Modelos más complejos de carácter no lineal son el Modelo de Hoek-Brown de aplicación a macizos rocosos [9, 10, 11] o el Modelo Cam-Clay Modificado de aplicación a arcillas [3].

Estos dos modelos deben estar interrelacionados, formando el modelo final. En este trabajo se desarrollará la interrelación entre la fractura y la plasticidad, a través de modelos de fractura con plasticidad acoplada.

1.2 Revisión del estado del arte

En esta sección se tratará de realizar un repaso de los conceptos y antecedentes más importantes del desarrollo computacional referente a la fractura y a la plasticidad.

1.2.1 Fractura

En primer lugar, es importante conocer los tipos de comportamiento de fractura que generalmente se pueden dar en un material, distinguiendo [2]:

- ▼ Comportamiento frágil: Con ausencia de deformaciones plásticas apreciables antes de la rotura. Dicho comportamiento se caracteriza por la propagación de carácter rápido de una grieta con una zona plástica muy localizada. En este caso existe un exceso de liberación de energía elástica acumulada, por lo que se genera un mecanismo inestable de propagación de la grieta.
- ▼ Comportamiento dúctil: Con presencia de deformaciones plásticas antes de la rotura. Dicho comportamiento se caracteriza por una rotura dominada por la plasticidad en una zona localizada, donde existen mecanismos de disipación.

Es notable destacar que no es lo mismo caracterizar un material como frágil o dúctil y que su comportamiento sea frágil o dúctil. Es decir, materiales frágiles pueden presentar un comportamiento dúctil y materiales dúctiles pueden presentar un comportamiento frágil para determinados estados de carga que conlleven un cierto recorrido del estado tensional de sus puntos. Así, en la Figura 1.1 se presenta la caracterización de un material frágil y otro dúctil (en este caso de un acero convencional), a través de la definición de las superficies de plastificación y de rotura en el espacio de tensiones principales:

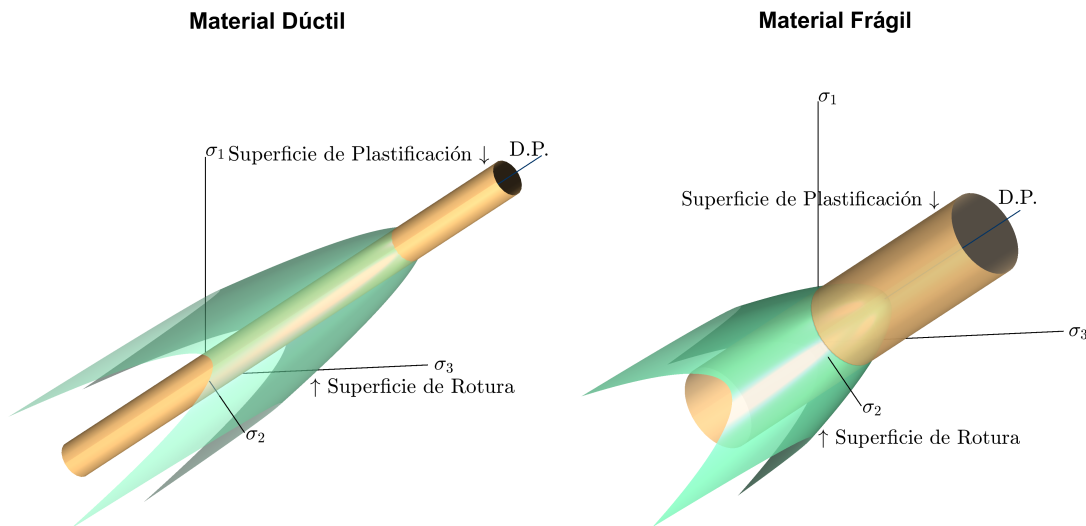


Figura 1.1 Diferencias entre un material dúctil y frágil.

Donde, para el recorrido del estado tensional del punto de estudio, un comportamiento frágil se caracteriza por alcanzar antes la superficie de rotura que la de plastificación. Por otro lado, un comportamiento dúctil se caracteriza por alcanzar primero la superficie de plastificación y después la de rotura (en este caso el punto siempre debe permanecer en la superficie de plastificación o dentro del espacio restringido por la misma).

Podemos ver entonces, por ejemplo, que para un material dúctil es posible desarrollar un comportamiento de rotura de tipo dúctil. Sin embargo, si sometemos al material a un estado de tritración cercano a la diagonal principal, el recorrido de tensiones produce la llegada a una rotura tipo frágil, al alcanzar antes la superficie de rotura que la de plastificación. En materiales frágiles, podemos llegar a mecanismos de rotura tipo dúctil a través de estados de compresión, de forma que se alcance previamente la superficie de plastificación a la de rotura.

En cuanto al desarrollo de modelos computacionales de los tipos de comportamiento que pueden presentar los materiales en este contexto, básicamente los podemos dividir en cuatro, siendo ilustrados a partir del estudio realizado en [12] y la Figura 1.2. En este estudio se modela el comportamiento de materiales en base a ejemplos 1-D, por lo que su comprensión es sencilla a través de las curvas de comportamiento (tensión σ frente a deformación ϵ).

En este caso, en el punto de estudio se caracteriza el proceso de daño (disminución de la rigidez, nucleación y propagación de grietas) a través de la variable de phase-field ϑ (más adelante será propiamente explicada, basta con entender en este punto que un valor $\vartheta = 0$ equivale a una situación del material intacto y $\vartheta = 1$ a la rotura) y el proceso de formación de deformaciones plásticas (plasticidad) a través de p o como comúnmente se conoce el tensor $\boldsymbol{\epsilon}^p$, que evalúa la deformación plástica. En la designación de cada modelo, E hace referencia a la etapa elástica (todos los modelos la poseen), P a la fase de desarrollo de deformaciones plásticas, D a la fase de desarrollo de daño y PD a la evolución acoplada de plasticidad y daño. Tal y como se tratará en el apartado dedicado a la fractura dúctil, existen dos maneras de relacionar la plasticidad con la fractura. Por un lado, podemos modelizar los procesos de manera independiente, es decir, fractura y plasticidad se desarrollan en fases distintas y sus variables no están relacionadas, designándose en este caso al modelo como desacoplado. Por otro lado, y en base a lo observado experimentalmente, ambos procesos pueden desarrollarse simultáneamente y existir algún tipo de dependencia entre sus variables, hablando en este caso de modelos de carácter acoplado.

Así, en analogía con lo ya explicado a través de la Figura 1.1 y los contenidos desarrollados en [12], el alcance de la superficie de rotura/plastificación equivale a llegar a un nivel de tensiones igual a σ_d/σ_p al

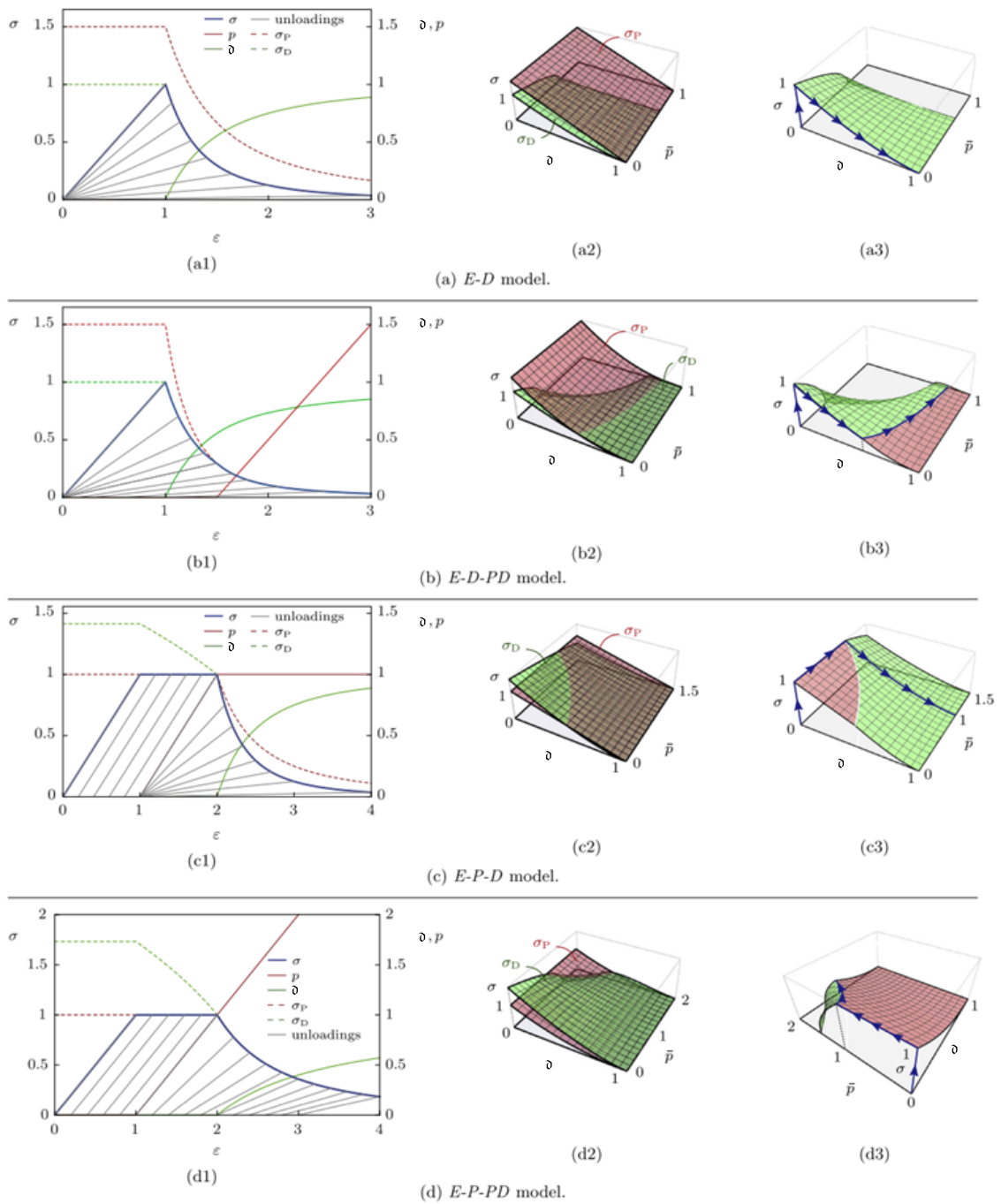


Figura 1.2 Tipos de comportamiento en modelización computacional (extraído de [12]).

tratar con modelos 1-D, tal y como se ilustra en la Figura 1.3. De esta forma, con vista en la Figura 1.2, se distingue:

- ▼ Modelo E-D (Rotura frágil): Se alcanza antes la tensión σ_d , sin en ningún momento alcanzar σ_p . Este caso se trata de un modelo puramente de daño, con disminución progresiva de la rigidez y sin formación apreciable de deformaciones plásticas. Encontramos ejemplos de implementación en [13] y [14].
- ▼ Modelo E-D-PD (Rotura cohesiva): Este caso es similar al anterior con la salvedad de que tras alcanzar σ_d , existe un momento en el que se llega también a σ_p . A partir de este momento, se desarrollan deformaciones plásticas que van acopladas al proceso de daño, observándose en (b1) de la Figura 1.2

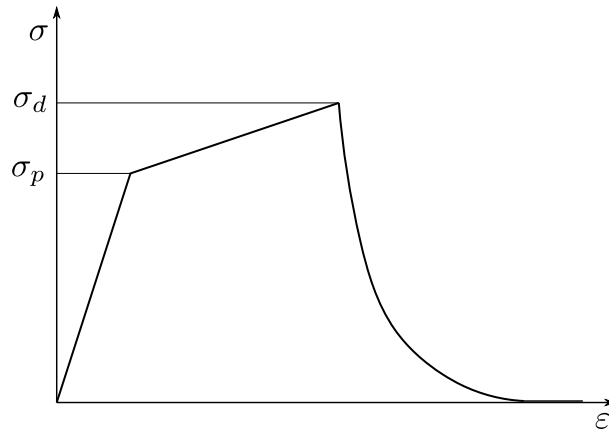


Figura 1.3 Definición de las tensiones σ_d y σ_p a través de la curva de comportamiento.

como a medida que se desarrolla el daño las deformaciones de carácter permanente aumentan. Se pueden encontrar ejemplos y desarrollo de técnicas numéricas como el *Cohesive Zone Model* (CZM) [15].

- ▼ **Modelo E-P-D (Rotura dúctil desacoplada):** En este tipo de modelo se alcanza en primer lugar la tensión σ_p para posteriormente alcanzar σ_d , simulando el recorrido de tensiones en comportamientos tipo dúctil. Al ser de tipo desacoplado, se observa en (c1) de la Figura 1.2 que primero se desarrollan las deformaciones plásticas en el tramo plástico ($\sigma = \sigma_p < \sigma_d$) sin ningún tipo de disminución en la rigidez del material (pendiente del tramo de carga-descarga) y, después, se da el tramo de daño ($\sigma = \sigma_d$) donde ya existe una bajada notoria de la rigidez del material pero sin seguir desarrollando deformaciones permanentes. Ejemplos de este tipo de modelizaciones se encuentran en [16] y [17].
- ▼ **Modelo E-P-PD (Rotura dúctil acoplada):** En contraste con el modelo anterior, en esta tipología de carácter acoplado, tras alcanzar la tensión σ_d , existe una evolución conjunta de plasticidad y daño por la cual se da de forma simultánea la disminución de la rigidez y la continuación de la formación de deformaciones permanentes. Este tipo de modelos cuentan con mayor validez experimental al simular de forma más realista el comportamiento de rotura tipo dúctil en materiales. Se encuentran ejemplos de aplicación en [18], [19] y [20].

La mayoría de modelos ideados para simular procesos de fractura según la aproximación del PFAF se basan en la aproximación de tipo variacional al modelo canónico propuesto por Francfort y Marigo [5], para obtener una versión regularizada. Dicho procedimiento se conoce como la formulación tipo phase-field. Esta formulación se basa en regularizar la superficie discontinua de la grieta a través de una variable auxiliar de tipo difuso, por la que se obtiene un campo continuo de la variable daño evaluable en cada punto del dominio, véase [21]. En la Figura 1.4 se puede observar como la grieta (representada por el campo discreto Γ) se aproxima a través de la variable phase-field, que actúa en la zona delimitada por la longitud característica l_c (parámetro de control) relacionada con σ_d .

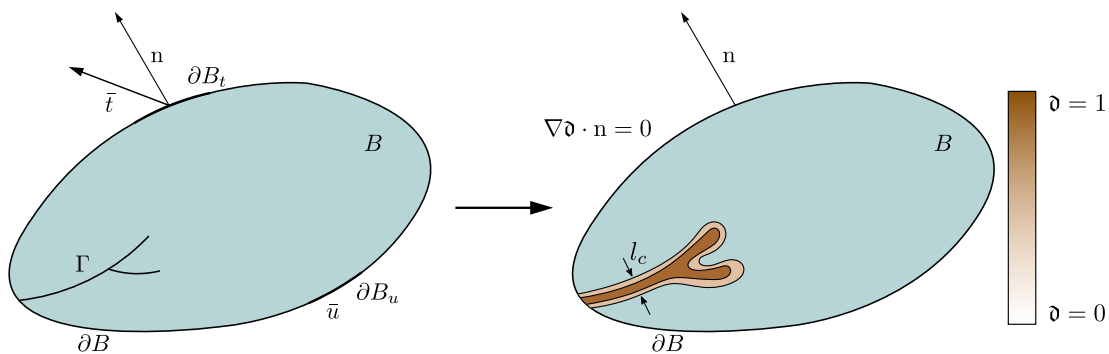


Figura 1.4 Situación de grieta discreta y grieta regularizada según PFAF.

La variable phase-field se define como $\vartheta : \Omega \times [0, t] \rightarrow [0, 1]$. Es decir, ϑ interpola entre el estado intacto del material ($\vartheta = 0$) y el estado totalmente dañado ($\vartheta = 1$) donde los estados intermedios suponen una pérdida progresiva de rigidez. Por otro lado, existen otras variables que entran en juego en el problema de modelización de fractura, y que se recogen en la Tabla 1.1. Las variables independientes del problema son el campo de desplazamientos \mathbf{u} , el campo de deformaciones plásticas $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ y la variable phase-field ϑ .

Tabla 1.1 Variables del problema (Extraída de [22]).

Tabla de definición de variables		
Símbolo	Variable	Tipo
\mathbf{u}	Desplazamiento	Observable
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Deformación total	
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Deformación plástica	Interna
α	Variable de endurecimiento (se adopta la deformación plástica acumulada $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$)	
$\nabla_x \alpha$	Gradiente de la variable de endurecimiento	
ϑ	Variable de daño	Interna
$\nabla_x \vartheta$	Gradiente de la variable daño	

Estas variables entran dentro del montaje del modelo a través de la formulación del potencial de energía interna total, propia de formulaciones de tipo variacional. La densidad de energía presenta la siguiente forma [22]:

$$\begin{aligned}
 W_{int}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \vartheta, \nabla_x \vartheta, \alpha, \nabla_x \alpha) &:= \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \vartheta, \alpha, \nabla_x \alpha) + \Delta(\vartheta, \nabla_x \vartheta, \alpha) = \\
 &= \underbrace{g(\vartheta)\psi_e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)}_{\mathbf{E}} + \underbrace{h(\vartheta)\psi_p(\alpha, \nabla_x \alpha)}_{\mathbf{H}} + \underbrace{\hat{\psi}_f(\vartheta, \nabla_x \vartheta)}_{\mathbf{F}} + \underbrace{p(\vartheta)\hat{\psi}_p(\alpha)}_{\mathbf{P}}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

En un primer desarrollo la energía se divide en dos términos: la energía libre ψ y el trabajo disipativo Δ , que puede ser local o no local para el campo de fractura en función de si se considera el término de $\nabla_x \vartheta$. Pasando a un segundo nivel contamos con cuatro términos, que siguiendo el orden de sumandos, la nomenclatura y desarrollos de [22] son:

- ▼ **E**: Término correspondiente a la energía elástica degradada. Dicha energía se degrada a partir de una función $g(\vartheta)$ cuyo valor disminuye desde 1 a 0 a medida que el valor de ϑ aumenta. Las condiciones que debe cumplir esta función pueden consultarse en [21].
- ▼ **H**: Término correspondiente a la energía plástica degradada, suponiendo un endurecimiento isótropo del material. De nuevo existe una función $h(\vartheta)$ que cumple el mismo propósito y condiciones que $g(\vartheta)$. La definición de la energía libre plástica viene establecida por:

$$\psi_p(\alpha, \nabla_x \alpha) := \frac{1}{2}H\alpha^2 + f(\alpha) + \frac{1}{2}l_p^2|\nabla_x \alpha|^2 \tag{1.2}$$

Donde la contribución del endurecimiento se divide en un primer término de carácter lineal, viniendo caracterizado por el módulo de endurecimiento H , y el término no lineal, que puede o no tenerse en cuenta. El último sumando corresponde al carácter no local del modelo de plasticidad, donde el ancho de la zona plástica viene delimitado por l_p (parámetro de control). En [19], se considera la plasticidad no local (también conocida como *Gradient-Plasticity*) añadiendo una ecuación adicional al

sistema resultante del principio de minimización. En el caso de no considerarse estaríamos tratando con modelos de plasticidad local.

- ▼ **F:** Término correspondiente al trabajo disipativo de daño. En el contexto que se trata toma la forma:

$$\hat{\psi}_f(\vartheta, \nabla_x \vartheta) := \frac{G_c}{c_\omega} \left(\frac{\omega(\vartheta)}{l_c} + l_c |\nabla_x \vartheta|^2 \right) \quad (1.3)$$

Donde G_c es la tenacidad a fractura del material, y $\omega(\vartheta)$ y c_ω son los coeficientes propios del funcional de Ambrosio-Tortorelli. En el caso más común (conocido como AT-2) se considera la función de densidad de superficie de grieta definida en [21]:

$$\hat{\psi}_f(\vartheta, \nabla_x \vartheta) := \frac{G_c}{2} \left(\frac{\vartheta^2}{l_c} + l_c |\nabla_x \vartheta|^2 \right) \quad (1.4)$$

Puede comprobarse que utilizando este tipo de formulación se invoca el concepto de Γ -Convergence con respecto al modelo de fractura frágil de Griffith llevando a 0 la longitud característica l_c , véase [21, 23]. Sin embargo, tiene el inconveniente de que el daño empieza a entrar en juego desde que se inicia el estado de carga. Esta desventaja se suele suplir mediante el uso de *thresholds*, por los que se impone un umbral para el comienzo del desarrollo del daño [24, 25]. También existen otros autores que emplean un funcional tipo AT-1, que desarrolla un tramo lineal previo al daño, aunque es necesario realizar ajustes para mantener la condición de irreversibilidad [12]. Dicha condición consiste en que el material no puede recuperarse del daño, es decir, las grietas creadas o desarrolladas no pueden desvanecerse, por lo que el proceso no es reversible.

- ▼ **P:** Término correspondiente al trabajo disipativo plástico. Para establecer el acoplamiento entre las variables de daño y plasticidad, distintos autores utilizan la función de degradación $p(\vartheta)$.

Con estos términos, podemos ensamblar la densidad de energía e integrarla en el dominio de estudio para después obtener la formulación energética basada en: (i) la condición de estabilidad ($\delta > 0$ y $\alpha > 0$), (ii) el balance energético ($\dot{\Pi} = 0$, siendo Π el potencial total del sistema), (iii) la condición de irreversibilidad ($\delta \Pi \geq 0$). Pueden consultarse desarrollos teóricos y aplicaciones directas de estos principios en [26, 27].

Para modelar el comportamiento tipo frágil, únicamente se consideran los términos **E** y **F** de (1.1), ya que no existe desarrollo de deformaciones plásticas. En cambio, para el comportamiento tipo dúctil, es necesario considerar todos los términos.

Mientras que en el primer caso no existe mucha variabilidad en la formulación de los términos bajo el contexto del PFAF (salvo los coeficientes propios de la formulación de Ambrosio-Tortorelli (1.3)), la formulación de cada término en comportamiento dúctil suele variar entre autores. Esto es debido principalmente por dos razones:

- ▼ No existe una formulación variacional de la fractura dúctil, a diferencia que en frágil [5], por lo que es necesario idear una formulación que cumpla los propósitos de la versión regularizada, que es donde se integra la metodología phase-field [17].
- ▼ No existe un método estándar para acoplar fractura y plasticidad, por lo que cada autor propone su metodología.

Así, existen numerosas metodologías con el propósito de simular el comportamiento dúctil en materiales. En la Tabla 1.2 (construida a partir de [22]), se recoge un resumen del planteamiento matemático, basado en (1.1), en el que cada autor propone su modelo en base a las justificaciones que pueden consultarse en los artículos correspondientes recogidos en la primera columna.

Los comentarios acerca de las diferencias entre autores pueden consultarse en [22]. Aquí destacaremos las más importantes:

- ▼ En el término de energía elástica, la función $g(\vartheta)$ varía su expresión en función del autor que se considere y las necesidades que precise, como la modelización del comportamiento post-crítico o ajuste del comportamiento de las variables. Una aplicación reseñable de la función de degradación en este término para una formulación de carácter anisótropo se encuentra en [29]. Por otra parte, es destacable el caso de Ambati et al. [17], que añade el acoplamiento entre fractura y plasticidad en esta

Tabla 1.2 Comparativa de modelos usando la formulación (1.1).

Histórico de modelos		E	H	F	P
Modelo [Referencia]		$g(\vartheta) \psi_\epsilon(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^l)$	$h(\vartheta) \psi_p(\alpha, \nabla_x \alpha)$	$\tilde{\psi}_f(\vartheta, \nabla_x \vartheta)$	$p(\vartheta) \tilde{\psi}_p(\alpha)$
Alessi et al. [12]		$\frac{1-\vartheta)^2}{k-(k-1)(1-\vartheta)^k} \psi_\epsilon(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^l)$ con $k > 0$	-	$\frac{3G_c}{8} (I_c^2 + I_c \nabla_x \vartheta ^2)$	$(1-\vartheta)^{2n} \sigma_p \alpha$ con $n > 0$
Borden et al. [20]		$g(\vartheta) \psi_\epsilon(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^l)$ con $g(\vartheta) = (1-\vartheta)^2 (1+\vartheta(2-k))$ y $k > 0$	$h(\vartheta) (\frac{1}{2} H \alpha^2)$ con $h(\vartheta) \equiv g(\vartheta)$	$\frac{G_c}{2} (I_c^2 + I_c \nabla_x \vartheta ^2)$	$p(\vartheta) \sigma_p \alpha$ con $p(\vartheta) \equiv g(\vartheta)$
Duda et al. [16]		$(1-\vartheta)^2 \psi_\epsilon(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^l)$	$\frac{1}{2} H \alpha^2$		$\sigma_p \alpha$
Kuhn et al. [18]			$(1-\vartheta)^2 (\frac{1}{2} H \alpha^2)$ con $h(d) \equiv g(d)$		$(1-\vartheta)^2 \sigma_p \alpha$
Miehe et al. [19]			$(1-\vartheta)^2 (\frac{1}{2} H \alpha^2 + f(\alpha) + \frac{1}{2} I_p^2 \nabla_x \alpha ^2)$ con $f(\alpha) = (\sigma_\infty - \sigma_p) (\alpha + \frac{1}{\eta} e^{-\eta \alpha})$ y $\eta > 0, \sigma_\infty > \sigma_p$	$(1-(1-\vartheta)^2) \omega_c + \frac{\omega_c}{2} I_c^2 (I_c^2 + I_c \nabla_x \vartheta ^2)$ con $\omega_c > 0$ y $\xi > 0$	
Ambati et al. [17]		$(1-\vartheta)^{2b(\alpha)} \psi_\epsilon(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^l)$ donde $b(\alpha) = (\alpha / \alpha_{crit})^m$, con $\alpha_{crit} > 0$ y $m > 0$	$\frac{1}{2} H \alpha^2$	$\frac{G_c}{2} (I_c^2 + I_c \nabla_x \vartheta ^2)$	$\sigma_p \alpha$
Yin et al. [28]		$(1-\vartheta)^2 \psi_\epsilon(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^l)$		$\frac{f(\xi(\vartheta)) G_c^2}{2} (I_c^2 + I_c \nabla_x \vartheta ^2)$	

función, con el objetivo de establecer el comienzo de daño para un cierto nivel de deformación plástica acumulada.

- ▼ Comparando los términos de energía plástica y disipación plástica podemos conocer aquellos autores que optan por utilizar un modelo acoplado, en base al empleo de factores con variable ϑ . En el caso de Miehe et al. [19], se acopla además con un modelo de plasticidad de carácter no local, al emplear un término proporcional a $|\nabla_x \alpha|^2$ y delimitar la zona de acción con el parámetro de control l_p .
- ▼ En cuanto al término disipativo de fractura se conserva la misma estructura en la mayoría de los casos, salvo en Miehe et al. [19] que emplea una formulación que añade dos parámetros adicionales: w_c , que controla el comienzo del mecanismo de fractura y sustituye a G_c ; y ξ que controla la pendiente del tramo de reblandecimiento, aludiendo a la modelización del comportamiento post-crítico. Por otro lado, Alessi et al. [12] utiliza un término de disipación de daño lineal con un AT-1. Con base en [22], la metodología de Alessi et al. conlleva la pérdida de las fronteras de la variable de phase-field ϑ , que deja de moverse de forma natural entre 0 y 1 y necesita de algoritmos específicos para su recuperación. Por último, es interesante comentar que Yin et al. [28] opta por establecer el acoplamiento entre fractura y plasticidad en este término, a partir de la definición de una tenacidad de fractura degradable con la variable de endurecimiento.

Fractura frágil

Una de las motivaciones principales que persigue la modelización de procesos como el de fractura es reproducir los estudios de carácter experimental. Con este propósito, se intentan suplir limitaciones del método experimental como estados de carga complejos o el gran coste económico que pueden llevar consigo algunos ensayos. Para entender de forma adecuada la modelización de procesos de fractura frágil es preciso entender el desarrollo y consecución de las técnicas numéricas que han llevado a alcanzar el estado actual. A continuación se ofrece una pequeña síntesis de esta idea.

La base de la metodología computacional en el campo que estamos tratando residió de forma primigenia en la Mecánica de la Fractura Elástica-Lineal (MFEL), ya que es una metodología bastante simple y robusta de implementar. Sin embargo, a medida que el problema se va complicando mediante la implementación de geometrías y estados de carga más complejos, los mecanismos de fractura se hacen también más complejos, pudiéndose dar varios a la vez de distintas morfologías. Este hecho es el principal problema de la metodología MFEL, ya que se le hace bastante complicado reproducir caminos de grieta fuera de los casos básicos. Normalmente, en suelos y rocas topamos con el caso más complejo, ya que recordemos que estamos ante un material ya de por sí bastante difícil de modelar, por lo que la MFEL no parece la mejor manera de tratar el problema de estudio.

De esta forma, con el objetivo de solventar estas dificultades, se abren paso las metodologías asociadas al Método de los Elementos Finitos (MEF) y el Método de los Elementos de Contorno (MEC). Para nuestro caso particular nos focalizaremos en el MEF, que es la que más extendida está en el ámbito científico de modelización de procesos de fractura. Las metodologías principales que se han desarrollado en los últimos años se dividen principalmente en:

- ▼ Técnicas basadas en la metodología de grieta difusa: Con base en el campo de la Mecánica de Daño Continuo (MCD), se basa en la definición de variables auxiliares de daño para la modelización de los distintos mecanismos de fractura que se pueden dar en el sólido. El principal problema que presenta es que su versión local tiene una fuerte dependencia entre la solución y la malla de discretización empleada. Para ello, distintos autores han presentado alternativas como el uso de procedimientos de regularización de la formulación o metodologías no locales, como se verá más adelante [30, 31, 32, 33].
- ▼ Técnicas de implementación de discontinuidades fuertes: A modo de reproducir la grieta de forma explícita, esta metodología se divide en estrategias de enriquecimiento del campo cinemático de interpolación a nivel nodal para evitar el remallado del entorno de la grieta, teniendo el eXtended FEM (X-FEM) como ejemplo; o técnicas basadas en el empleo de elementos modelados con formulaciones basadas en modos incompatibles de deformación, como el enhanced FEM (E-FEM) [34, 35, 36, 37, 38].
- ▼ Técnicas de inclusión de elementos de interfaz cohesiva de carácter adaptativo o permanente en los bordes de la malla de elementos finitos [39, 40, 41, 42, 43, 44].

Por tanto, podemos ver que mientras el primer grupo realiza un enfoque de la grieta de carácter difuso, los otros grupos la aproximan de manera discreta. El enfoque de carácter discreto suele tener el inconveniente

de tener que buscar alternativas más complicadas para evitar la dependencia de la solución con la malla de elementos finitos. Todas estas técnicas presentan la limitación común de ser incapaces de predecir la nucleación de grieta y dar problemas en modelizaciones de procesos de ramificación y coalescencia para frentes múltiples. En este momento es cuando surge el origen de la metodología phase-field, que ofrece una nueva perspectiva frente a modelizaciones de grietas vistas hasta ahora de carácter más complejo, con carácter mixto al estar fundamentada en técnicas de grieta difusa y modelos de daño no local asociados al uso del gradiente espacial de la variable de daño. Es interesante comparar las similitudes y disparidades de los modelos asociados al gradiente con la metodología phase-field, véase [45]. Para controlar la extensión del gradiente de daño en phase-field se establece una ecuación adicional en función de una longitud característica l_c , que actúa como parámetro de control. Un ejemplo de aplicación ampliamente estudiado y tratado es la modelización de fractura frágil, objeto de este subapartado. Otra aplicación interesante aplicada específicamente en geomateriales, distinguiendo distinto comportamiento a tracción y a compresión puede consultarse en [46].

De forma particular, la base computacional de la mecánica de la fractura frágil se basa en los desarrollos de la Teoría Clásica de Griffith [4]. Dicha teoría propone un criterio por el cual la grieta se propaga si el ratio de energía disponible para el crecimiento de grieta supera cierto valor crítico. Ambos valores se consideran constantes para condiciones dadas y se denominan G y G_c , respectivamente. Al presentar los mismos problemas comentados en el párrafo anterior, se opta por utilizar métodos variacionales basados en procesos de minimización de energía para resolver el problema [5], como ya ha sido introducido anteriormente. Dicho método se basa en incluir un término asociado a G_c de carácter superficial en la expresión del potencial total de energía interna, dentro del término disipativo. Finalmente, para obtener una formulación manejable, se obtiene una versión regularizada a través de la metodología phase-field. Con esta técnica, el crecimiento y desarrollo de grietas se modela a partir de la evolución y crecimiento de una variable auxiliar de daño en una malla fija de elementos finitos. Los puntos fuertes del uso de la metodología phase-field son: (i) la Γ -Convergencia al Modelo canónico de Griffith [21, 23] (aplicado posteriormente en (1.11)), (ii) evitar el modelado de discontinuidades y (iii) posibilidad de un tipo de implementación de carácter robusto, flexible y efectivo mediante un solver básico.

La formulación analizada en este trabajo se basa en la estructura termodinámicamente consistente de la metodología phase-field para fractura frágil que se recoge en [13, 21, 24]. Desde este punto, se hará uso de aquellos desarrollos que se entiendan necesarios para comprender la materia. En el caso de necesidad de profundidad de contenido pueden consultarse las referencias anteriores.

La configuración de referencia de nuestro problema de estudio, con referencia en la Figura 1.4, está dado por el dominio $B \subset R^n$ cuyo contorno viene delimitado por $\partial B \subset R^{n-1}$. R^n hace referencia al espacio Euclídeo de orden n , siendo en este caso de aplicación el caso dimensional ($n = 2$) y tridimensional ($n = 3$).

Los campos básicos del problema de fractura frágil son el de desplazamientos \mathbf{u} y el de daño, que, como ya vimos en el apartado anterior, viene definido por la variable de phase field ϑ en una formulación de tipología no local. Las condiciones de contorno vienen definidas en el contorno ∂B_u para las acciones cinemáticas y ∂B_t para las acciones estáticas. Por otro lado, como se verá más adelante, las condiciones de contorno de la variable de daño se definen en el contorno completo ∂B .

En el caso del campo de desplazamientos \mathbf{u} también se hará uso tensor de pequeñas deformaciones:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) := \nabla_{x_s} \mathbf{u} = \frac{1}{2} [\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x^T \mathbf{u}] \quad (1.5)$$

Uno de los aspectos más importantes de la formulación empleada [21] es la descomposición espectral del tensor de (1.5) de deformaciones que permite separar la componente positiva y negativa, que será útil para desarrollos posteriores:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}_+ + \boldsymbol{\varepsilon}_- \\ \boldsymbol{\varepsilon}_\pm &:= \sum_{i=1}^n \langle \boldsymbol{\varepsilon}_i \rangle_\pm \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \end{aligned} \quad (1.6)$$

Donde la descomposición se hace en función de los autovalores ε_i y los autovectores \mathbf{n}_i de $\boldsymbol{\varepsilon}$. El operador $\langle z \rangle_\pm$ son los paréntesis de Macaulay que representan la función a trozos $\langle z \rangle_\pm := (z \pm |z|)/2$.

Para obtener la formulación energética del problema es necesario establecer el funcional del sistema completo, que tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Pi(\mathbf{u}, \mathfrak{d}) &= \Pi(\mathbf{u}, \mathfrak{d})_{\text{int}} - \Pi(\mathbf{u})_{\text{rmext}} = E(\mathbf{u}, \mathfrak{d}) + F(\mathfrak{d}, \nabla_x \mathfrak{d}) - W(\mathbf{u}) = \\ &= \underbrace{\int_B \psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathfrak{d}) dV + \int_B G_c \gamma(\mathfrak{d}, \nabla_x \mathfrak{d}) dV}_{\Pi_{\text{int}}} - \underbrace{\left(\int_B \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\partial B} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dA \right)}_{\Pi_{\text{ext}}}\end{aligned}\quad (1.7)$$

Donde se realiza la siguiente descomposición (los términos son análogos a los de (1.1)):

- ▼ Energía libre elástica (E): Caracterizada por una descomposición espectral en cuanto a su parte positiva y negativa. Esta idea se basa en el desarrollo planteado en (1.6):

$$\begin{aligned}\psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathfrak{d}) &= g(\mathfrak{d}) \psi_{e+}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \psi_{e-}(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ \psi_{e\pm}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{\lambda}{2} (\langle \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] \rangle_{\pm})^2 + \mu \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}^2]\end{aligned}\quad (1.8)$$

Donde la función de degradación $g(\mathfrak{d})$ únicamente afecta a la parte positiva de la energía elástica. Esto es coherente con el hecho de que la parte positiva del tensor de deformaciones, asociada a estados tensionales de tracción, es la que cede energía para desarrollar mecanismos de fractura, a modo de disipación:

$$g(\mathfrak{d}) = (1 - \mathfrak{d})^2 + K \quad (1.9)$$

El término cuadrático va acompañado de un parámetro residual K para evitar errores de condicionamiento numérico.

- ▼ Energía disipada por procesos de fractura (F): Previamente definida en (1.4), está caracterizada por la tenacidad a fractura G_c y la función de densidad superficial de grieta γ :

$$\gamma(\mathfrak{d}, \nabla_x \mathfrak{d}) = \frac{1}{2l_c} \mathfrak{d}^2 + \frac{l_c}{2} |\nabla_x \mathfrak{d}|^2 \quad (1.10)$$

Como ya se ha comentado anteriormente, a través de esta función puede obtenerse la longitud de grieta discreta Γ cuando $l_c \rightarrow 0$ a través de la Γ -Convergencia:

$$\Gamma = \lim_{l_c \rightarrow 0} \int_B \gamma(\mathfrak{d}, \nabla_x \mathfrak{d}) dV \quad (1.11)$$

- ▼ Energía referida al trabajo de las fuerzas externas (W): Caracterizada por los dos últimos sumandos de (1.7), están referidos al campo de desplazamientos \mathbf{u} .

Estableciendo el PTV para definir el equilibrio entre el incremento de energía total y el trabajo realizado por las fuerzas externas a partir de (1.7) nos queda el sistema (pueden consultarse los pasos intermedios en [13]):

Equilibrio: $\nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$

Sistema KKT: $\begin{cases} \dot{\mathfrak{d}} \geq 0 \\ f - G_c \delta_{\mathfrak{d}} \gamma \leq 0 \\ \dot{\mathfrak{d}} (f - G_c \delta_{\mathfrak{d}} \gamma) = 0 \end{cases}$

CDC: $\begin{cases} \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{en } \partial B_u \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} & \text{en } \partial B_t \\ \nabla_x \mathfrak{d} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{en } \partial B \end{cases}$

(1.12)

Que distingue entre la forma fuerte de la ecuación de equilibrio para la determinación del campo \mathbf{u} , un sistema tipo Karush-Khun-Tucker para el campo \mathfrak{d} y las condiciones de contorno. En el caso del campo de daño, se impone la condición de contorno sobre la dirección del gradiente de daño, que debe ser perpendicular a la normal en el contorno. Por otro lado, dentro del sistema (1.12) aparece:

- ▼ Tensor de tensiones: $\boldsymbol{\sigma} := \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \vartheta) = g(\vartheta) [\lambda \langle \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] \rangle_+ \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_+] + [\lambda \langle \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] \rangle_- \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_-]$
- ▼ *Energetic force*: $f := -\partial_{\vartheta} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \vartheta) = 2(1 - \vartheta) \psi_{e_+}(\boldsymbol{\varepsilon})$
- ▼ Derivada funcional de la densidad superficial de grieta: $\delta_{\vartheta} \gamma = \partial_{\vartheta} \gamma - \nabla_x \cdot \partial_{\nabla_x \vartheta} \gamma = \frac{1}{l_c} [\vartheta - l_c^2 \Delta \vartheta]$

Utilizando la formulación basada una estructura del tipo *Ginzburg-Landau* generalizada (véase [24, 25]) el sistema KKT puede cambiarse por:

$$\boxed{\eta \dot{\vartheta}}_{\text{Evolución}} = \boxed{2(1 - \vartheta) \mathcal{H}}_{\text{Driving Force}} - \boxed{\frac{G_c}{l_c} [\vartheta - l_c^2 \Delta \vartheta]}_{\text{R. Geométrica}} \quad (1.13)$$

Podemos observar que el mecanismo de fractura frágil por el cual se desarrollan las grietas se basa en un equilibrio, a modo de competición, entre el término de la resistencia geométrica y el término de *Driving Force*, gobernada por la variable histórica \mathcal{H} . Dicha variable toma la forma:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) := \max_{s \in [0, t]} \psi_{e_+}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, s)) \quad (1.14)$$

Por tanto, este tipo de comportamiento viene controlado por la la parte positiva de la energía libre elástica, tal y como se anticipó al principio del capítulo. A (1.14) pueden añadirse términos a modo de *thresholds* para delimitar el comienzo de daño, y evitar la desventaja del empleo de un AT-2. Sin embargo, el hacer uso de estos términos ocasiona la pérdida de consistencia variacional, por lo que no se garantiza que el modelo converja al canónico de Griffith.

Integrando el sistema (1.12) en el dominio de aplicación es posible utilizar un algoritmo de resolución basado en desacoplar el problema en los campos \mathbf{u} y ϑ haciendo uso de (1.13). A continuación se muestra un posible modo de resolver el problema basado en [13]:

Rate independent Operator Split Algorithm

Esquema escalonado de resolución del problema para el pseudo-tiempo $[t_n, t_{n+1}]$:

I. Inicialización: Las variables \mathbf{u}_n , ϑ_n y \mathcal{H}_n son conocidas. Se prescriben las cargas y desplazamientos impuestos \mathbf{b}_{n+1} , $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}$ y $\bar{\mathbf{t}}_{n+1}$.

II. Cálculo de \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = \begin{cases} \psi_{e_+}^+(\boldsymbol{\varepsilon}) & \text{si } \psi_{e_+}^+(\boldsymbol{\varepsilon}) > \mathcal{H}_n \\ \mathcal{H}_n & \text{en otro caso} \end{cases}$$

III. Cálculo del campo daño (PF):

$$\vartheta = \arg \inf_{\vartheta} \left\{ \int_{\mathcal{B}} [G_c \gamma(\vartheta, \nabla_x \vartheta) - (1 - \vartheta)^2 \mathcal{H}] dV \right\}$$

IV. Cálculo del campo de desplazamientos: Con ϑ congelado

$$\mathbf{u} = \arg \inf_{\mathbf{u}} \left\{ \int_{\mathcal{B}} [\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \vartheta) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] dV - \int_{\partial \mathcal{B}_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dA \right\}$$

V. Repetición de los pasos II-IV hasta que se alcance la convergencia para la pareja de variables $(\mathbf{u}_{n+1}, \vartheta_{n+1})$

Donde *rate independent* hace alusión a no considerar términos viscosos en la ecuación (1.13), por lo que el término asociado al parámetro viscoso η desaparece. La viscosidad suele ser empleada para estabilizar la solución post-crítica.

La formulación en elementos finitos no resulta de interés para este problema, ya que estamos interesados en modelar el caso acoplado con la plasticidad. De cualquier forma, puede consultarse desarrollos análogos por la cual se obtiene el sistema de ecuaciones a resolver por el MEF y diversas aplicaciones de interés en [14, 47].

Fractura dúctil

La modelización de la fractura dúctil emerge de la base del conocimiento desarrollada para fractura frágil. Sin embargo, debemos partir de la idea de que el mecanismo de funcionamiento no es el mismo. Según [16], en la MFEL clásica los procesos de fractura pueden darse únicamente en las puntas de grieta, donde el crecimiento viene dominado por la integral-J en el entorno. En el caso elastoplástico, dicha integral se desvanece y en principio, no existiría dicha fuente de crecimiento. Esto no deja de ser un mal uso de la teoría, ya que en plasticidad la zona de fractura se forma delante de la punta de la grieta. Por tanto, los modelos que se desarrollen deben reflejar la existencia de dicha zona de fractura.

De esta forma, la teoría desarrollada para fractura dúctil parte de utilizar la plasticidad para complementar la energía libre dentro de la integral (1.7) en el término \mathbf{H} de (1.1) y los desarrollos de phase-field del apartado anterior, con el objetivo de reproducir el proceso de formación de la zona de fractura. Para materiales dúctiles es necesario considerar un término disipativo adicional debido al desarrollo de deformaciones plásticas. Dicho término no puede ser aproximado desde un enfoque variacional (no existe una teoría variacional que describa el proceso de fractura de tipo dúctil), luego en la mayoría de los casos no deja de ser un artificio matemático sin sentido físico, aunque es importante dárselo para la justificación del modelo. Uno de los aspectos más importantes de este tipo de modelizaciones es la manera en la que se considera el acoplamiento entre la plasticidad y el daño, existiendo ejemplos de ello según los autores de la Tabla 1.2.

Siguiendo los mismos pasos que en fractura frágil, utilizando el PTV podemos obtener la formulación compacta del problema (extraída de [48]), que puede diferenciarse en tres subproblemas según la variable principal (campo de desplazamientos \mathbf{u} , campo de deformaciones plásticas $\boldsymbol{\epsilon}^p$ y la variable phase-field δ):

▼ Equilibrio

$$\text{CDC: } \begin{cases} \nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} & \text{en } \partial B_t \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{en } \partial B_u \end{cases} \quad (1.15)$$

▼ Plasticidad

$$\text{Sistema KKT: } \begin{cases} \dot{\alpha} \geq 0 \\ \bar{f}^p(\mathbf{u}, \alpha) \leq 0 \\ \dot{\alpha} \bar{f}^p(\mathbf{u}, \alpha) = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Regla de flujo: $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\alpha} \mathbf{N}$

Función de plastificación: $\bar{f}^p(\mathbf{u}, \alpha) := \bar{\sigma}^{eq}(\mathbf{u}, \alpha) - H\alpha - \sigma_y$

Donde la función de plastificación compara el término de $\bar{\sigma}^{eq}(\mathbf{u}, \alpha)$ con el límite elástico $\sigma_y(\alpha)$. En este caso, $\bar{\sigma}^{eq}(\mathbf{u}, \alpha)$ varía según el criterio de plastificación que se utilice y $\sigma_y(\alpha)$ se toma lineal, con un módulo de endurecimiento H .

▼ Daño

$$\begin{aligned}
& \text{Sistema KKT: } \begin{cases} \dot{\vartheta} \geq 0 \\ \bar{f}^{\vartheta}(\mathbf{u}, \alpha, \vartheta) \leq 0 \\ \dot{\vartheta} \bar{f}^{\vartheta}(\mathbf{u}, \alpha, \vartheta) = 0 \end{cases} \\
& \text{Función de daño: } \bar{f}^{\vartheta}(\mathbf{u}, \alpha, \vartheta) := (1 - \vartheta)(\boldsymbol{\varepsilon}^e : \bar{\boldsymbol{\sigma}} + H\alpha^2 + 2\sigma_y\alpha) + \frac{G_c}{l_c}(l_c^2\Delta\vartheta - \vartheta) \\
& \text{CDC: } \nabla_x \vartheta \cdot \mathbf{n} \geq 0 \quad \text{en } \partial B
\end{aligned} \tag{1.17}$$

En este caso se ha empleado una formulación de degradación $g(\vartheta) = (1 - \vartheta)^2$ igual a $h(\vartheta)$ y $p(\vartheta)$. Los estados tensionales con $\bar{\square}$ en (1.16) y (1.17) hacen referencia a tensiones efectivas, no afectadas del campo daño.

Utilizando la formulación basada en la variable histórica \mathcal{H} , el sistema KKT asociado al daño puede cambiarse de nuevo por:

$$\begin{aligned}
& \boxed{\frac{G_c}{l_c}[\vartheta - l_c^2\Delta\vartheta]} = \boxed{\frac{2(1 - \vartheta)\mathcal{H}}{\text{Driving Force}}} \\
& \text{R. Geométrica}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Donde:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) := \max_{s \in [0, t]} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\sigma} \right) + \frac{1}{2} H\alpha^2 + \sigma_y\alpha \tag{1.19}$$

La formulación de (1.19) no es única, en este caso la modelización de la *Driving Force* se realiza a partir de la energía elástica y plástica.

Según [28], existen básicamente dos modelos de fractura dúctil acoplados dentro del campo de plasticidad local. Por un lado, existen autores que utilizan y modifican la formulación de (1.19) a través de términos adicionales o *thresholds* para establecer umbrales para el comienzo de los mecanismos de plasticidad y fractura [18, 20, 25]. Por otro lado, hay otros que modifican las funciones de degradación $g(\vartheta)$, $h(\vartheta)$ y $p(\vartheta)$ para establecer un tipo de acoplamiento distinto al caso anterior y/o establecer un tramo lineal previo al comienzo de la plasticidad y la fractura [12, 17, 49].

Estableciendo el Método de los Elementos Finitos a través de la formulación débil de los sistemas anteriores puede obtenerse un algoritmo de carácter desacoplado donde las variables principales se van actualizando hasta alcanzar la convergencia requerida en cada paso de tiempo. El algoritmo que se presenta a continuación, implementable en softwares de elementos finitos como ABAQUS, ha sido extraído de [50]:

Staggered Algorithm

Resolución del sistema de ecuaciones no lineal del problema desacoplado para el pseudo-tiempo $[t_n, t_{n+1}]$:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \vartheta \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \vartheta \end{Bmatrix}_n - \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}^u \\ r^{\vartheta} \end{Bmatrix}_n \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{u} \\ \Delta\vartheta \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{r}^u \\ r^{\vartheta} \end{Bmatrix}_n$$

▼ Discretización

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \sum_{i=1}^{N_{\text{nodos}}} \mathbf{N}_i^u \mathbf{u}_i & \vartheta &= \sum_{i=1}^{N_{\text{nodos}}} N_i^{\vartheta} \vartheta_i \\
\boldsymbol{\varepsilon} &= \sum_{i=1}^{N_{\text{nodos}}} \mathbf{B}_i^u \mathbf{u}_i & \nabla_x \vartheta &= \sum_{i=1}^{N_{\text{nodos}}} \mathbf{B}_i^{\vartheta} \vartheta_i
\end{aligned}$$

▼ Residuos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i^u &= \int_{\mathcal{B}} g(\vartheta) (\mathbf{B}_i^u)^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} dV + \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{N}_i^u)^T \mathbf{b} dV - \int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbf{N}_i^u)^T \bar{\mathbf{t}} dA \\ r_i^\vartheta &= \int_{\mathcal{B}} \left\{ \left[\frac{G_c}{l_c} \vartheta + g'(\vartheta) \mathcal{H} \right] N_i + G_c l_c (\mathbf{B}_i^\vartheta)^T \nabla_x \vartheta \right\} dV \end{aligned}$$

▼ Matrices de rigidez

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ij}^{uu} &= \frac{\partial \mathbf{r}_i^u}{\partial \mathbf{u}_j} = \int_{\mathcal{B}} g(\vartheta) (\mathbf{B}_i^u)^T \mathbb{C}^{\text{epc}} \mathbf{B}_j^u dV \\ \mathbf{K}_{ij}^{\vartheta\vartheta} &= \frac{\partial r_i^\vartheta}{\partial \vartheta_j} = \int_{\mathcal{B}} \left\{ G_c l_c (\mathbf{B}_i^\vartheta)^T \mathbf{B}_j^\vartheta + \left[\frac{G_c}{l_c} + g''(\vartheta) \mathcal{H} \right] N_i^\vartheta N_j^\vartheta \right\} dV \end{aligned}$$

Donde, dentro de un paso de tiempo, los residuos se van actualizando a través del valor de $g(\vartheta)$ y $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ (efectivo, no dañado) para \mathbf{r}_i^u , y ϑ , $\nabla_x \vartheta$ y \mathcal{H} para r_i^ϑ . En el caso de las matrices de rigidez, \mathbf{K}_{ij}^{uu} se actualiza a través de $g(\vartheta)$ y la matriz de comportamiento elastoplástica consistente \mathbb{C}^{epc} , y $\mathbf{K}_{ij}^{\vartheta\vartheta}$ a través de \mathcal{H} y $g''(\vartheta)$.

1.2.2 Plasticidad

Uno de los aspectos más importantes para modelar correctamente un suelo arcilloso es considerar su comportamiento plástico. Como ya vimos en el apartado de rotura dúctil, un material puede desarrollar deformaciones plásticas de forma conjunta con la fractura, apareciendo las variables características en el sistema de ecuaciones (1.16). De forma procedimental, podemos definir el comportamiento plástico a partir de (las bases de la teoría de la plasticidad pueden consultarse en [6, 7, 8, 51]):

- ▼ Criterio de plastificación: Establecido a partir de la función de plastificación $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{S})$, donde \mathcal{S} establece el conjunto de variables sujetas a evolución por endurecimiento. Dicha función se encarga de evaluar si un estado tensional reside en el dominio elástico o plástico. En el dominio 3-D, geoméricamente se puede entender como una superficie que envuelve a la zona elástica, denominada superficie de plastificación (ya introducida en la Figura 1.1). Los estados tensionales admisibles deben residir dentro de la superficie (estados elásticos) o sobre la superficie (estados plásticos). Por tanto, todo estado tensional debe cumplir:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{S}) \leq 0 \quad (1.20)$$

- ▼ Regla de flujo: Establece la evolución de las deformaciones plásticas en función del potencial plástico Ψ_p . Si el potencial plástico es igual a la superficie de plastificación la ley de flujo es asociativa $\Psi_p \equiv \Phi$. En el caso contrario, se considera no asociativa. Su formulación general es la siguiente:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{C}) \quad \mathbf{N} := \frac{\partial \Psi_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (1.21)$$

Donde \mathbf{N} es el vector de flujo, que indica la dirección del incremento/decremento del vector de deformaciones plásticas, cuya magnitud viene dado por el multiplicador plástico $\dot{\gamma}$. Para el caso de plasticidad asociativa, el vector de deformaciones plásticas es perpendicular a la superficie de plastificación.

- ▼ Ley de endurecimiento: Denota la evolución de ciertos parámetros de la función de plastificación o potencial plástico a través del conjunto de variables de endurecimiento $\boldsymbol{\beta}$, que establecen a su vez la posible evolución de la superficie de plastificación y de las variables del conjunto \mathcal{S} . Para nuestras aplicaciones, se considerará un endurecimiento de tipo isótropo, es decir, la superficie de plastificación se expande o se contrae, pero no se traslada. En la mayoría de los casos se toma una única variable de endurecimiento dada por la deformación plástica equivalente o acumulada (sus expresiones pueden diferir según el modelo que se esté usando), previamente introducida en el apartado de fractura.

Generalmente, para modelos sencillos se suele modelar una dependencia de tipo lineal del límite elástico con la deformación plástica acumulada:

$$\sigma_y(\bar{\epsilon}^p) = \sigma_{y0} + H\bar{\epsilon}^p \quad (1.22)$$

Que es la que se ha utilizado en los modelos de la Tabla 1.2. De nuevo, puede tener carácter asociativo o no asociativo si la ley de evolución de las variables de endurecimiento (en este caso la deformación plástica acumulada $\bar{\epsilon}^p$, que se corresponde con α en el apartado de fractura) está en función de la función de plastificación o del potencial plástico, siguiendo las mismas nociones que la regla de flujo. En nuestras aplicaciones haremos uso de una ley de endurecimiento asociativa [6]:

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{I}) \quad \mathbf{H} := -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{I}} \quad (1.23)$$

Que define la deformación plástica acumulada (única variable de endurecimiento que se considerará en este trabajo, $\boldsymbol{\beta} = \{\bar{\epsilon}^p\}$) a través de su evolución temporal.

Para suelos, el criterio de aplicación por excelencia es el de Mohr-Coulomb por su simplicidad y buen ajuste para un gran rango de problemas de índole geotécnico [3]. En la mayoría de los casos este modelo está del lado de la seguridad, modelando una resistencia conservativa del material. Dicho modelo se define a partir de:

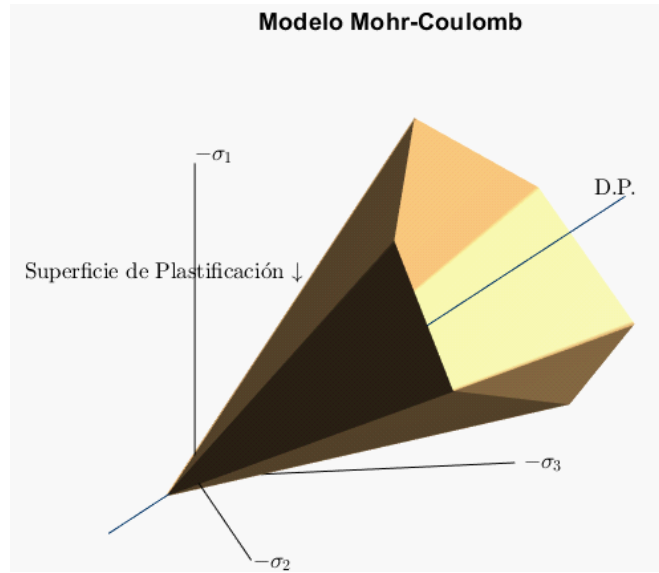


Figura 1.5 Superficie de plastificación de Mohr-Coulomb en el espacio de tensiones principales.

▼ Función de plastificación:

$$\tau = c - \sigma_n \tan \phi \rightarrow \Phi(\sigma, \phi, c) = (\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}) + (\sigma_{\text{máx}} + \sigma_{\text{mín}}) \sin \phi - 2c \cos \phi \quad (1.24)$$

Donde se han dispuesto las dos formas por las cuales se denota esta función. Por un lado, se representa en función de la pareja de valores de tensión normal y tangencial (σ_n, τ) , utilizada en la representación de este criterio mediante círculos de Mohr. Esta forma nos indica que la deformación plástica empieza cuando se alcanza la combinación crítica (σ_n, τ) que cumple la primera parte de (1.24). Por otro lado, y más común en el ámbito computacional, se emplean los valores de tensión máxima y mínima en el espacio de tensiones principales $(\sigma_{\text{máx}}, \sigma_{\text{mín}})$. En ambos casos, los parámetros utilizados son el valor del ángulo de rozamiento ϕ , que se considera constante para este modelo, y la cohesión c . Este último parámetro se suele modelar a través de algún tipo de ley de endurecimiento de la forma (1.22), por tanto pertenece al conjunto \mathcal{I} definido previamente. En cuanto al ángulo de rozamiento ϕ , controla la forma de la superficie de plastificación, tal y como se muestra en la Figura 1.6 a través de una comparación del criterio de Mohr-Coulomb con el de Tresca y Drucker-Prager. Si llevamos el ángulo de rozamiento a cero, la función de plastificación de Mohr-Coulomb pasa a ser la de Tresca.

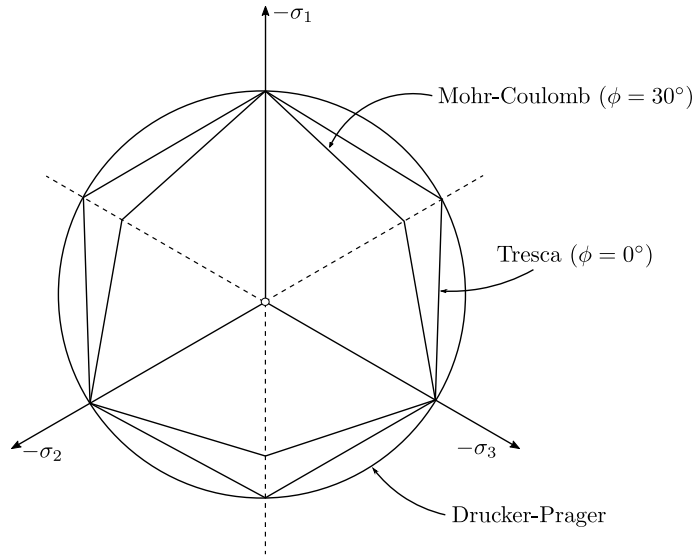


Figura 1.6 Comparación de la forma de superficie de plastificación en el plano desviador.

La peculiaridad del criterio de Mohr-Coulomb reside en el hecho de que es dependiente de la parte esférica del tensor de tensiones, a diferencia de la mayoría de criterios en metales. Tomando las seis posibles combinaciones de (1.24) para $[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$ se obtienen seis planos (cada uno de ellos asociados a una función de plastificación Φ_i) que forman una pirámide hexagonal alineada con la diagonal principal. De hecho, es coherente el hecho de la dependencia de estados esféricos con que la sección en el plano desviador va disminuyendo de tamaño a medida que nos acercamos al origen. La zona admisible en tracción está condicionada al valor de la cohesión, ya que la cúspide se encuentra en la diagonal principal a una distancia de $\sqrt{3}c \cdot \cot(\phi)$. La superficie de plastificación toma la forma de la Figura 1.5 en el espacio de tensiones principales. Las funciones de plastificación asociadas a cada plano que forma la pirámide en el sistema principal son:

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(\sigma, c) &= \sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2c \cos \phi \\
 \Phi_2(\sigma, c) &= \sigma_2 - \sigma_3 + (\sigma_2 + \sigma_3) \sin \phi - 2c \cos \phi \\
 \Phi_3(\sigma, c) &= \sigma_2 - \sigma_1 + (\sigma_2 + \sigma_1) \sin \phi - 2c \cos \phi \\
 \Phi_4(\sigma, c) &= \sigma_3 - \sigma_1 + (\sigma_3 + \sigma_1) \sin \phi - 2c \cos \phi \\
 \Phi_5(\sigma, c) &= \sigma_3 - \sigma_2 + (\sigma_3 + \sigma_2) \sin \phi - 2c \cos \phi \\
 \Phi_6(\sigma, c) &= \sigma_3 - \sigma_2 + (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \phi - 2c \cos \phi
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

▼ Regla de flujo no asociativa:

$$\begin{aligned}
 \dot{\epsilon}^p &= \sum_{i=1}^6 \dot{\gamma}^i \mathbf{N}^i \\
 \mathbf{N}^i &\equiv \frac{\partial \Psi_p^i}{\partial \sigma} \\
 \Phi^i &\leq 0, \quad \dot{\gamma}^i \geq 0, \quad \Phi^i \dot{\gamma}^i = 0
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Para este criterio, el potencial plástico se diferencia de la función de plastificación definida en (1.24) y (1.25) en sustituir el ángulo de rozamiento interno ϕ por el de dilatación ψ . Mediante este ángulo se evalúa el cambio de volumen que se produce en el suelo ante sollicitaciones de cizalladura. Como podemos observar en (1.26), la regla de flujo se obtiene a partir de un sumatorio de hasta seis componentes, cada uno de ellos con su multiplicador plástico y vector de flujo asociado. Cabe destacar que en este caso el vector de flujo no es puramente desviador, ya que el potencial plástico del que deriva es dependiente de la componente esférica del tensor de tensiones. El último conjunto de inecuaciones de (1.26) define las condiciones de carga/descarga, por las cuales las deformaciones plásticas empiezan a desarrollarse cuando la función de plastificación se anula. La regla de flujo asociativa se obtiene

simplemente igualando ángulos $\psi = \phi$.

Para obtener los multiplicadores plásticos y vectores de flujo se opta por trabajar en un único sextante tal y como se muestra en la Figura 1.7. En dicho sextante la condición que se establece es que las tensiones se ordenen de la forma $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Ante esta situación, podrán darse tres casuísticas de carácter excluyente:

- Vector de flujo sobre el plano: En este caso el vector se sitúa sobre el plano delimitado por el sextante, y únicamente entra en acción una de las seis posibles funciones de plastificación, por tanto, la regla de flujo queda:

$$\dot{\epsilon}^P = \dot{\gamma}^a \mathbf{N}^a \tag{1.27}$$

Donde únicamente tenemos como incógnita $\dot{\gamma}^a$, ya que \mathbf{N}^a se obtiene derivando el potencial plástico correspondiente a la función de plastificación del plano del sextante.

- Vector de flujo en la línea de frontera del plano: Este caso corresponde a la intersección de dos planos en la frontera del sextante, tal y como se muestra en (a) de Figura 1.7. Este caso a su vez se divide en la frontera izquierda (L) y la frontera derecha (R), donde intervienen dos funciones de plastificación. La regla de flujo queda en este caso:

$$\dot{\epsilon}^P = \dot{\gamma}^a \mathbf{N}^a + \dot{\gamma}^b \mathbf{N}^b \tag{1.28}$$

Donde ahora se tienen dos incógnitas correspondientes a los multiplicadores plásticos $\dot{\gamma}^a$ y $\dot{\gamma}^b$. De nuevo, los vectores de flujo se pueden obtener a partir de la derivación de los potenciales plásticos correspondientes.

- Vector de flujo en la cúspide: Para este caso intervienen todos los planos del criterio, tal y como se puede observar en (b) de la Figura 1.7, por lo que tenemos seis incógnitas correspondientes a los seis multiplicadores plásticos. Por ello, es necesario emplear la expresión general (1.26).

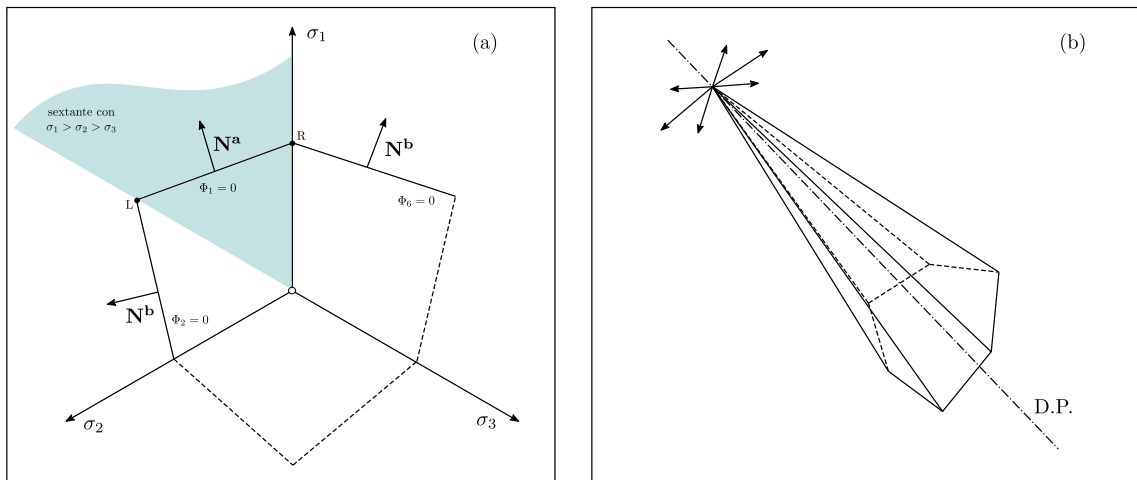


Figura 1.7 Casuística de vectores de flujo para el Modelo Mohr-Coulomb (extraído de [6]).

- ▼ Ley de endurecimiento asociativa: Para la aplicación del Modelo Mohr-Coulomb, se emplea la ley de endurecimiento para la cohesión ($c = c(\bar{\epsilon}^P)$), que suele ser de carácter lineal, análoga a (1.22), mediante el uso de la pendiente H del tramo de endurecimiento.

El carácter asociativo viene dado por la siguiente expresión (obtenida mediante (1.23) y por analogía de (1.26)):

$$\dot{\epsilon}^P = 2 \cos \phi \sum_{i=1}^6 \dot{\gamma}^i \tag{1.29}$$

A través de esta expresión y conocidos los multiplicadores plásticos, puede obtenerse el valor de la deformación plástica acumulada para cada paso de tiempo que se establezca a través de la suma de

incrementos discretos.

Una vez conocidos todos los aspectos necesarios para definir el comportamiento plástico propio de suelos, se debe establecer cuál es el objetivo de la plasticidad en el modelo acoplado definido en el apartado de *Staggered Algorithm*. Dicho objetivo se divide, por un lado, en actualizar el estado de tensiones del sólido conforme al criterio de plastificación establecido, actualizando el vector de residuos. Por otro lado, se actualiza de igual modo la matriz de rigidez tangente consistente \mathbb{C}^{epc} que entra en el cálculo de la matriz de rigidez del campo de desplazamientos ¹.

Para la actualización del valor de las tensiones (normalmente en los puntos de Gauss definidos en la discretización del modelo) se opta por utilizar el algoritmo de *Return Mapping*. Este procedimiento se basa en la utilización de una tensión de prueba elástica (*elastic trial stress*) a partir de un incremento de deformación (se supone un control en deformaciones del modelo) de la que se obtiene dicha tensión a partir de la ley de comportamiento elástico. Si la función de plastificación toma un valor inferior a cero para el valor del estado tensional de prueba, se actualizan los valores conforme al incremento de deformación establecido, ya que estamos en el dominio elástico. Si por el contrario la función toma un valor igual o superior a cero en la función de plastificación, es necesario utilizar un corrector plástico (en este caso igual a el/los multiplicador/es plástico/s γ^i) para resolver el problema (véase [6, 8] para una descripción y desarrollo más profundo).

En el caso del modelo Mohr-Coulomb, en base al algoritmo desarrollado en [6] y representado a partir del diagrama de flujo de la Figura 1.8, el proceso se puede dividir hasta en cuatro fases donde se va comprobando las posibles ubicaciones del vector de deformaciones plásticas. Una vez calculados los multiplicadores plásticos se actualiza el estado de tensiones y otras variables dependientes (deformación plástica acumulada, vectores de deformación elástico y plástico).

Las expresiones para la actualización de las tensiones en el espacio de tensiones principales y asumiendo un modelo de carácter isótropo vienen dadas por [6]:

$$\sigma_j = \sigma_j^{\text{trial}} - \sum_{i=1}^6 \Delta\gamma^i (2G[N_d^i]_j + KN_v^i), \quad j = 1,2,3 \quad (1.30)$$

Para las cuales según la fase donde nos encontremos pueden aparecer uno, varios, o todos los componentes del sumatorio, de acuerdo con lo explicado anteriormente. $\Delta\gamma^i$ hace referencia al incremento de la magnitud del multiplicador plástico para el paso de tiempo actual, G y K son los parámetros del modelo constitutivo elástico, $[N_d^i]_j$ corresponde al j -ésimo autovalor de la parte desviadora del vector de flujo \mathbf{N}^i , y N_v^i hace referencia a la parte volumétrica de \mathbf{N}^i . Puede consultarse la subrutina SUMC desarrollada en [6] para la implementación de esta metodología.

¹ de la formulación cinemática en el MEF $\mathbf{K}^{\text{uu}} = \int_{\mathcal{B}} g(\mathfrak{d}) (\mathbf{B}^{\text{u}})^T \mathbb{C}^{\text{epc}} \mathbf{B}^{\text{u}} dV$

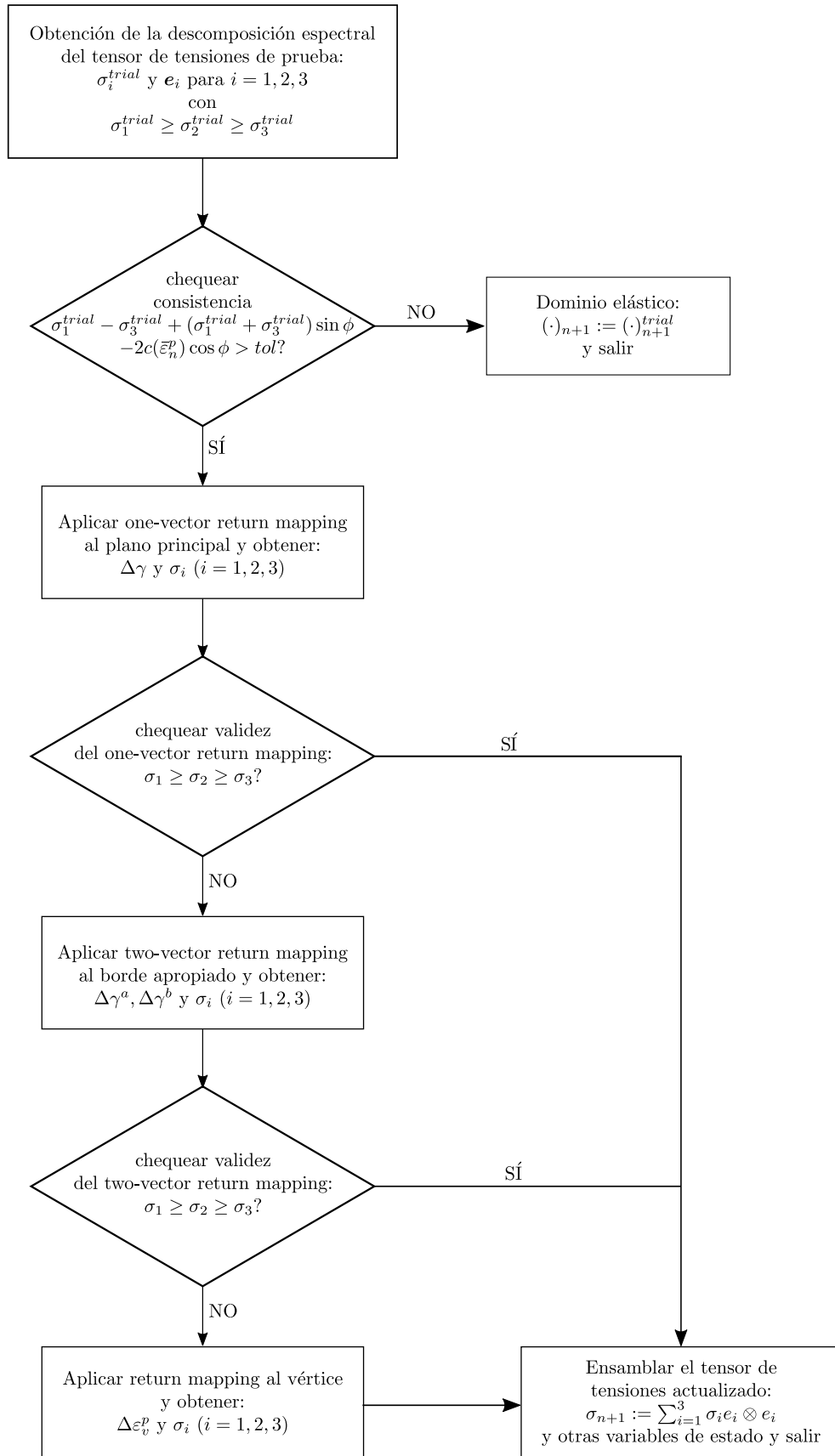


Figura 1.8 Diagrama de flujo para la obtención del vector de tensiones para un paso de tiempo dado usando el algoritmo de *Return Mapping* (extraído de [6]).

Por otro lado, para derivar la matriz \mathbb{C}^{epc} es preferible obtener primeramente su expresión en el espacio de tensiones principales, por simplicidad, a partir de las siguientes expresiones [6]:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{\text{ppal}}^{\text{epc}}(i,j) &= \frac{\partial \sigma_i}{\partial \varepsilon_j^e \text{ trial}}, \quad i,j = 1,2,3 \\ \sigma_i &= \hat{\sigma}(\varepsilon_1^e \text{ trial}, \varepsilon_2^e \text{ trial}, \varepsilon_3^e \text{ trial}) \end{aligned} \quad (1.31)$$

Donde básicamente se deriva la función implícita $\hat{\sigma}$ (obtenida a partir de (1.30)) con respecto a sus variables, que son las deformaciones elásticas de prueba (*elastic trial strains*). Estas deformaciones se obtienen sumando el incremento de deformación del paso actual a las deformaciones elásticas obtenidas en el paso anterior. De forma análoga al caso anterior, en la subrutina CTMC de [6] se realiza una implementación en base a las expresiones desarrolladas para el cálculo de tensiones en el modelo de Mohr-Coulomb, para cada una de las fases de la Figura 1.8.

1.3 Organización del documento

Tras el desarrollo de la base teórica necesaria para la ejecución del objetivo propuesto al principio del capítulo, el trabajo se estructura como sigue:

- ▼ En el Capítulo 2, se abordará la implementación de la ley constitutiva haciendo uso del modelo de plasticidad de Mohr-Coulomb a través de los algoritmos y códigos propuestos en [6]. Posteriormente, se aplicará y validará la metodología propuesta a través de un par de ejercicios.
- ▼ En el Capítulo 3, se propone un modelo acoplado de fractura y plasticidad, en base a una serie de metodologías recogidas en la Tabla 1.2. Mediante la implementación de dichas metodologías se persigue el estudio de las fuerzas precursoras de fractura y cómo sus parámetros influyen en la forma y comportamiento de la solución obtenida.
- ▼ En el Capítulo 4, se expondrán las conclusiones y líneas de investigación futuras en base al modelo desarrollado, con el objetivo de extender su aplicación y validez.

2 Implementación de la ley constitutiva

Con el fin de desarrollar el modelo de fractura considerando la no linealidad material en base a la teoría de la plasticidad, en este capítulo se abordará la implementación de la ley de comportamiento referida a los fundamentos establecidos en el apartado 1.2.2 de este documento. Al tratar con un material con posibilidad de desarrollar deformaciones plásticas, los ingredientes básicos que definen dicho comportamiento son: (i) el criterio de plastificación, (ii) la regla de flujo y (iii) la ley de endurecimiento (en el caso de que permitamos el endurecimiento de ciertas variables). La secuencia por la que pasará la implementación realizada cuenta con los siguientes bloques:

- ▼ Inicialización del modelo. Se declaran las subrutinas internas, variables y parámetros que se emplean en el programa.
- ▼ Actualización del estado de tensiones. A través de un estado de tensiones de predicción y un proceso de corrección de carácter iterativo, se actualiza el estado de tensiones para cada paso, controlado por ciertos valores de tolerancia.
- ▼ Modelización de la matriz de comportamiento elastoplástica consistente \mathbb{C}^{epc} . Para obtener la matriz de comportamiento es necesario obtener la variación del estado tensional con respecto al campo de deformaciones. Dicho proceso se llevará a cabo en primer lugar en el espacio de tensiones principales, donde las expresiones a derivar son más tratables, para luego pasar al espacio global.

La ley constitutiva del material se modelizará a través del Modelo de Mohr-Coulomb de carácter no asociativo, con una ley de endurecimiento aplicada a la variable de cohesión.

En el espacio de tensiones principales, con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (primer sextante), la función de plastificación toma la forma:

$$\Phi_1(\boldsymbol{\sigma}, c) = (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2c \cos \phi \quad (2.1)$$

El potencial plástico, basado en (2.1) para el primer sextante es:

$$\Psi_{p_1}(\boldsymbol{\sigma}, c) = (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \psi \quad (2.2)$$

Esta formulación del potencial plástico resulta ser el caso más sencillo al únicamente sustituir el ángulo de rozamiento ϕ por el de dilatación ψ . Existen otras formulaciones para el potencial plástico más complejas, como la propuesta por Menétrev y William en [52], consistente en una hipérbola en el plano p-q y una elipse en el plano π .

Por último, la ley de endurecimiento para la cohesión estará en función de la deformación plástica acumulada $c(\bar{\epsilon}^p)$, pudiendo adoptar diversas formas según conveniencia (lineal, exponencial, racional). Este tipo de leyes se utilizan para modelar los comportamientos de endurecimiento (la cohesión aumenta de valor ha medida que se van acumulando deformaciones plásticas) y reblandecimiento (la cohesión disminuye ha medida que aumenta la deformación plástica acumulada). Algunos ejemplos de aplicación se muestran en la Figura 2.1.

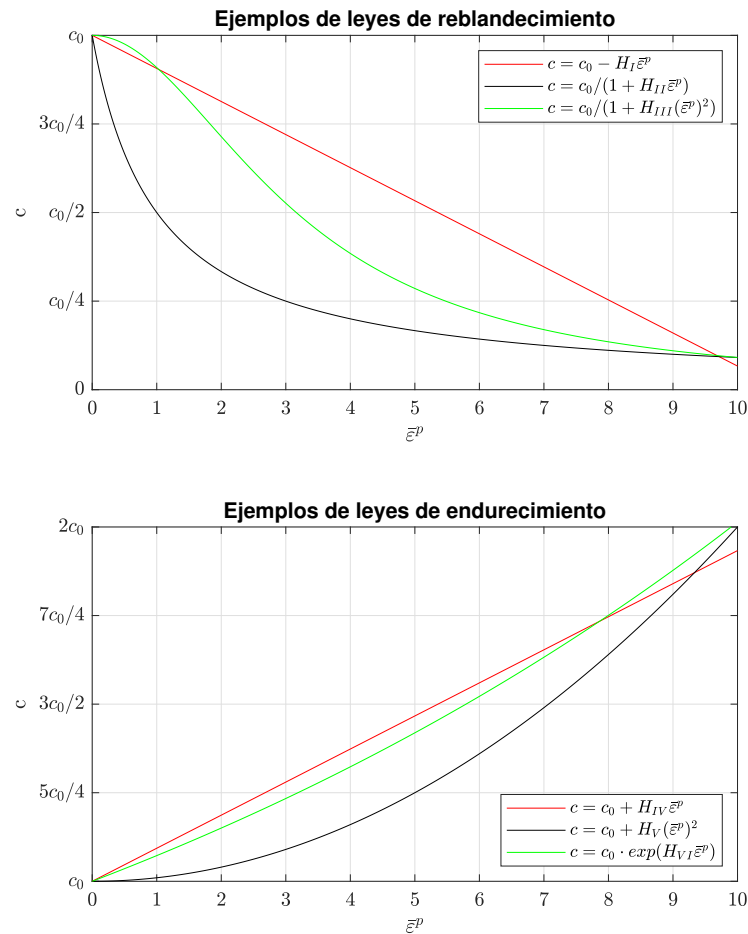


Figura 2.1 Ejemplos de leyes de endurecimiento para la cohesión $c(\bar{\epsilon}^p)$.

2.1 Implementación y desarrollo del código

La implementación de esta ley se llevará a cabo a través de una UMAT que se procesará en ABAQUS. La UMAT no es más que una subrutina que se encarga de establecer la ley constitutiva de un material de forma genérica. Tiene como fin obtener el tensor de tensiones y la matriz de rigidez para ensamblar el sistema de ecuaciones a resolver por el MEF. El código de la UMAT, que se utilizará como guía para explicar los conceptos desarrollados, se desarrollará en lenguaje FORTRAN.

Los procedimientos y cálculos realizados toman la base y la metodología empleada en [6], de los cuales se ofrece en este trabajo un resumen conciso con las ecuaciones más significativas y útiles para nuestro objetivo.

2.1.1 Inicialización y declaración de variables y subrutinas

En primer lugar, se establece la subrutina principal a partir de la cual deriva todo el código diseñado. En dicha subrutina se declaran todas las variables propias de ABAQUS y de nuestro código, que entrarán en subrutinas internas posteriores para la realización de los cálculos (Código 2.1).

Código 2.1 Inicialización subrutina UMAT. Declaración de variables y parámetros del modelo.

```
subroutine \texttt{UMAT}( &
    STRESS, STATEV, DDSDE, SSE, SPD, SCD, RPL, DDSDDT, DRPLDE, &
    DRPLDT, STRAN, DSTRAN, TIME, DTIME, TEMP, DTEMP, PREDEF, DPRED, &
    CMNAME, NDI, NSHR, NTENS, NSTATV, PROPS, NPROPS, COORDS, DROT, &
```

```

PNEWDT,CELENT,DFGRD0,DFGRD1,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC)

!-----
! Plastic strain update for a elastoplastic with linear hardening
! Mohr-Coulomb soil. Applications for plane strain problems.
! Non-associated linear Mohr-Coulomb material model with input
! 1) Young's modulus, E
! 2) Poisson's ratio, NU
! 3) Hardening law: initial cohesion, CO and hardening modulus, H
! 4) friction angle, PHI [degrees]
! 5) dilation angle, PSI [degrees]
!-----
implicit none
!-----
! Variables defined by ABAQUS input/output
!-----

character(len=80), intent(in)    :: CMNAME
integer(4), intent(in)          :: NTENS
integer(4), intent(in)          :: NSTATV
integer(4), intent(in)          :: NPROPS
integer(4), intent(in)          :: NDI
integer(4), intent(in)          :: NSHR
integer(4), intent(in)          :: NOEL
integer(4), intent(in)          :: NPT
integer(4), intent(in)          :: LAYER
integer(4), intent(in)          :: KSPT
integer(4), intent(in)          :: KSTEP
integer(4), intent(in)          :: KINC
real(8), intent(in)             :: CELENT
real(8), intent(in)             :: DTIME
real(8), intent(in)             :: TEMP
real(8), intent(in)             :: DTEMP
real(8), intent(in)             :: STRAN(NTENS)
real(8), intent(in)             :: DSTRAN(NTENS)
real(8), intent(in)             :: PROPS(NPROPS)
real(8), intent(in)             :: PREDEF(1)
real(8), intent(in)             :: DPRED(1)
real(8), intent(in)             :: TIME(2)
real(8), intent(in)             :: COORDS(3)
real(8), intent(in)             :: DROT(3,3)
real(8), intent(in)             :: DFGRD0(3,3)
real(8), intent(in)             :: DFGRD1(3,3)
real(8), intent(inout)          :: SSE
real(8), intent(inout)          :: SPD
real(8), intent(inout)          :: SCD
real(8), intent(inout)          :: RPL
real(8), intent(inout)          :: DRPLDT
real(8), intent(inout)          :: STATEV(NSTATV)
real(8), intent(inout)          :: STRESS(NTENS)
real(8), intent(inout)          :: DDSdde(NTENS,NTENS)
real(8), intent(inout)          :: DDSDDT(NTENS)
real(8), intent(inout)          :: DRPLDE(NTENS)
real(8), intent(inout)          :: PNEWDT

!-----
! Variables defined by this subroutine

```

```

!-----
real(8)          :: DGAM(2) , STRES(NTENS)
real(8)          :: DMATX(NTENS,NTENS)
real(8)          :: PHI_D, PSI_D, PHI, PSI, COHO, H, E, NU
logical          :: LALGVA(5)
real(8), parameter :: pi = 3.1415926535897932_8

```

Donde las variables más significativas y utilizadas en el resto del código son:

▼ ABAQUS:

■ Argumentos de entrada:

- ◆ NTENS: Número de componentes del vector tensión/deformación (en notación de Voigt).
- ◆ STRAN(NTENS): Deformación total al principio del incremento.
- ◆ DSTRAN(NTENS): Incremento de deformación.
- ◆ NSTATV: Número de variables de estado. Este tipo de variables se utilizan en ABAQUS para guardar variables propias de nuestro problema que son dependientes del paso de tiempo.
- ◆ PROPS(NPROPS): Array con las propiedades del material a modelar, limitado por su número a partir de NPROPS. Para nuestro caso, y tal y como se detalla en el Código 2.1, para el Modelo Mohr-Coulomb es necesario definir las propiedades E y ν para la fase elástica, los ángulos ϕ y ψ para la función de plastificación y potencial plástico respectivamente, y parámetros para establecer la ley de endurecimiento como c_0 (cohesión inicial) y H (módulo de endurecimiento) en el caso de ser de carácter lineal.
- ◆ KSTEP: Número de paso de tiempo.
- ◆ KINK: Número de incremento dentro de un paso de tiempo.

■ Argumentos de salida:

- ◆ DDSDD(NTENS,NTENS): Matriz elastoplástica constitutiva.
- ◆ STRESS(NTENS): Vector de tensiones.
- ◆ STATEV(NSTATEV): Variables de estado.

▼ Propias:

- DGAM: Array para guardar los incrementos de los multiplicadores plásticos, incógnita dentro del algoritmo de *Return Mapping*.
- STRES(NTENS), DMATX(NTENS,NTENS): Arrays para guardar e ir actualizando los argumentos STRESS y DDSDD respectivamente durante el número de iteraciones que sea necesario para alcanzar la convergencia deseada dentro de un paso de tiempo.
- E, NU: Propiedades elásticas del material.
- COHO, H: Propiedades de endurecimiento del material.
- PHI, PSI: Ángulos de rozamiento y dilatación (propiedades propias de la formulación del Modelo de Mohr-Coulomb).

A continuación, debemos declarar las subrutinas internas que entran dentro de la subrutina general, además de las propiedades que se mantendrán constantes durante todo el proceso de resolución (Código 2.2).

Código 2.2 Inicialización subrutina UMAT. Establecimiento de subrutinas internas y definición de los parámetros del material.

```

! !---- Explicit interfaces -----

interface
  subroutine MCSTUP(DGAM,LALGVA,RSTAVA, &
    STRAT,STRES,MSTRE, &
    KSTEP,KINC,PROPS,PHI,PSI)
    logical, intent(out) :: LALGVA(5)
    real(8), intent(out) :: DGAM(2)
    integer(4), intent(in) :: MSTRE
    real(8), intent(inout) :: RSTAVA(MSTRE+1)
    real(8), intent(in) :: STRAT(MSTRE)
    real(8), intent(out) :: STRES(MSTRE)
    integer(4), intent(in) :: KSTEP,KINC
    real(8), intent(in) :: PROPS(4), PHI, PSI
  end subroutine MCSTUP

  subroutine MCCONTANMA(DMATX,LALGVA,RSTAVA,&
    STRAT,STRES,MSTRE,PROPS,PHI,PSI)
    logical, intent(in) :: LALGVA(5)
    integer(4), intent(in) :: MSTRE
    real(8), intent(out) :: DMATX(MSTRE,MSTRE)
    real(8), intent(in) :: RSTAVA(MSTRE+1)
    real(8), intent(in) :: STRAT(MSTRE)
    real(8), intent(in) :: STRES(MSTRE)
    real(8), intent(in) :: PROPS(4),PHI,PSI
  end subroutine MCCONTANMA

end interface
! !-----

!-----
!   Material Properties
!-----

E      = PROPS(1) ! E   - Young's modulus
NU     = PROPS(2) ! NU  - Poisson's ratio
COHO   = PROPS(3) ! c   - initial cohesion
H      = PROPS(4) ! H   - hardening modulus
PHI_D  = PROPS(5) ! PHI - angle of friction (degrees)
PSI_D  = PROPS(6) ! PSI - angle of dilatation (degrees)

!-----
!   Conversion of angles from degrees to radians
!-----
PHI = pi*PHI_D/180.0_8 ! [rad] Friction angle
PSI = pi*PSI_D/180.0_8 ! [rad] Dilatation angle

```

Por una parte, la subrutina MCSTUP se encargará de actualizar el estado de tensiones en los puntos de Gauss de los elementos del modelo conforme al algoritmo de *Return Mapping*, mientras que la subrutina MCCONTANMA realizará la construcción de la matriz de rigidez de forma consistente con la formulación de las tensiones.

Por último, en la subrutina principal se llaman a las subrutinas anteriores para la realización de los cálculos. Como vector de deformaciones de entrada se utiliza las deformaciones elásticas del paso anterior más el incremento de deformación del paso actual, de acuerdo con las premisas del algoritmo. Una vez alcanzada la

convergencias de cada subrutina se actualizan los argumentos principales de la UMAT: STRESS Y DDSDE (Código 2.3).

Código 2.3 Desarrollo subrutina UMAT. Llamadas a subrutinas internas y actualización de los argumentos de salida principales.

```

!-----
!   Stress update and creation of consistent constitutive matrix
!-----
call MCSTUP(&
&   DGAM,LALGVA,STATEV(1:5),&
&   STATEV(1:4)+DSTRAN(:),STRES,NTENS,KSTEP,KINC,PROPS(1:4),PHI,PSI)

call MCCONTANMA(&
&   DMATX,LALGVA,STATEV(1:5),STATEV(1:4)+DSTRAN(:),STRES,NTENS,PROPS(1:4),
&   PHI,PSI)
!-----
!   Postconditioner for ABAQUS
!-----

STRESS = STRES      ! updated stress at the Gauss point
DDSDE   = DMATX     ! consistent constitutive matrix
!-----
end subroutine \texttt{UMAT}
!-----

```

2.1.2 Actualización del estado tensional

Para la actualización del estado tensional seguiremos el diagrama de flujo de la Figura 1.8 conforme al esquema del *Return Mapping* ilustrado en la Figura 2.2.

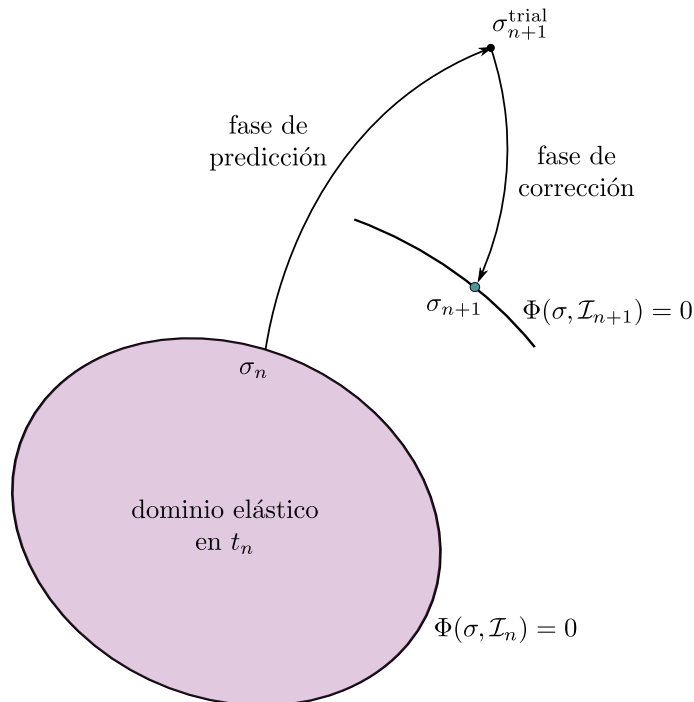


Figura 2.2 Esquema de aplicación del *Return Mapping* (extraído de [6]).

Cuya formulación de tipo de incremental para las tensiones, de la cual deriva la actualización del estado tensional mostrada en (1.30), es [6]:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} - \mathbb{C}^e : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.3)$$

Donde \mathbb{C}^e hace referencia a la matriz constitutiva elástica. La aplicación al Modelo de Mohr-Coulomb mediante la regla de flujo no asociativa es [6]:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} - \mathbb{C}^e : \sum_{i=1}^6 \Delta \gamma^i \mathbf{N}_{n+1}^i \quad (2.4)$$

Dependiente de un conjunto de incógnitas $\Delta \gamma^i$, que son los incrementos de los multiplicadores plásticos para el pseudo-tiempo $[t_n, t_{n+1}]$. La subrutina planteada ha sido adaptada del código programado para HYPLAS de la rutina SUMC, de [6]. En primer lugar, como en el caso anterior, se declaran las variables, parámetros a utilizar y subrutinas internas (Código 2.4).

Código 2.4 Inicialización subrutina MCSTUP. Declaración de parámetros y variables.

```

subroutine MCSTUP(&
  DGAM,LALGVA,RSTAVA,STRAT,STRES,MSTRE, &
  KSTEP,KINC,PROPS,PHI,PSI)
! -----
! State update procedure for the Mohr-Coulomb type material model.
!
! This routine uses the fully implicit elastic predictor/return
! mapping algorithm as the state update procedure for the
! Mohr-Coulomb elasto-plastic material model. The essential return mapping is
! carried out here in principal stress space.
! -----
  implicit none
! --- Parameters for subroutines -----
  integer(4), parameter :: MCOMP=4, NDIM=2
  integer(4), parameter :: MXITER=50
! -----
  logical, intent(out) :: LALGVA(5)
  real(8), intent(out) :: DGAM(2)
  integer(4), intent(in) :: MSTRE
  real(8), intent(inout) :: RSTAVA(MSTRE+1)
  real(8), intent(in) :: STRAT(MSTRE)
  real(8), intent(out) :: STRES(MSTRE)
  integer(4), intent(in) :: KINC, KSTEP(4)
  real(8), intent(in) :: PROPS(6), PHI, PSI
! -----
  logical :: IFPLAS, SUFAIL, EDGE, APEX
  logical :: RIGHT, DUMMY
  real(8) :: E, NU, COHO, H
  real(8) :: EIGPRJ(MSTRE,2), PSTRS(3), STREST(3)
  real(8) :: DGAMA, DGAMB, EPBAR, EPBARN
  real(8) :: GMODU, BULK, R2G, R4G, R2BULK, R2CPHI, R1D3
  real(8) :: EETV, PT, EETVD3
  integer(4) :: II, JJ, MM, I, J
  real(8) :: PSTRS1, PSTRS2, PSTRS3
  real(8) :: COHE, SMCT, PHIA, RES
  real(8) :: SCAPRD
  real(8) :: SPHSPS, CONSTA, R4C2PH
  real(8) :: DENOM, DDGAMA
  real(8) :: S1, S2, S3, DELTA

```

```

real(8) :: P
real(8) :: SMCTA, SMCTB, PHIB
real(8) :: CONSTB, FACTA
real(8) :: DRVAA, DRVAB, DRVBA, DRVBB
real(8) :: R1DDET
real(8) :: DDGAMB
real(8) :: RESNOR, FACTOR
real(8) :: AUX1, AUX2, AUX3
real(8) :: DEPV, COTPHI, DDEPV, EEVD3
! -----

! ---- Explicit interfaces -----
interface
  subroutine SPDEC2(EIGPR,EIGX,REPEAT,X,MCOMPP,NDIMM)
    integer(4), intent(in) :: MCOMPP,NDIMM
    real(8), intent(in) :: X(MCOMPP)
    real(8), intent(out) :: EIGPR(MCOMPP,NDIMM),EIGX(NDIMM)
    logical, intent(out) :: REPEAT
  end subroutine SPDEC2
end interface
! -----

```

Donde las variables más significativas en esta subrutina son:

- ▼ LALGVA: Vector de flags lógicos utilizado para saber el estado elástico/plástico del punto de Gauss analizado, la efectividad del método utilizado y la región en la que se encuentra el estado tensional actualizado. Se distingue entre el estado activado (T) y el desactivado (F). Las componentes de este vector son:
 - IFPLAS [LALGVA(1)]: Flag que se activa si el estado del punto de Gauss es plástico (la función de plastificación se iguala a cero).
 - SUFAIL [LALGVA(2)]: Flag que se activa si el algoritmo de *Return Mapping* no ha convergido, normalmente debido a un incremento de deformación inicial demasiado elevado.
 - EDGE [LALGVA(3)]: Flag que se activa si el algoritmo seleccionado corresponde a uno de los bordes (*two-vector Return Mapping*).
 - RIGHT [LALGVA(4)]: Flag que se activa si el borde seleccionado es el derecho.
 - APEX [LALGVA(5)]: Flag que se activa si el algoritmo seleccionado corresponde al vértice.

De esta forma, un ejemplo de secuencia (T,F,F,F,F) nos indica que el algoritmo *one-vector Return Mapping* ha convergido para el punto de Gauss analizado.

- ▼ RSTAVA: Vector que contiene las deformaciones elásticas y la deformación plástica acumulada actualizadas conforme al estado actualizado de tensiones. Este vector se guardará en la variable STATEV de ABAQUS.
- ▼ STRAT: Vector de entrada de deformaciones elásticas de prueba, necesario para obtener las tensiones de prueba.

Las demás variables y parámetros creados se irán utilizando a lo largo del código, ya que este tipo de programación nos obliga a declarar todas las variables que se vayan a emplear al principio de la subrutina.

A continuación, pasamos a la fase de predicción, en la que se calculan las tensiones elásticas de prueba en el sistema principal $[\sigma_1^{trial}, \sigma_2^{trial}, \sigma_3^{trial}]$. Para ello, el argumento de entrada son las deformaciones elásticas de prueba almacenadas en el array STRAT, que se corresponden con las deformaciones elásticas obtenidas en el paso anterior más el incremento de deformación del paso actual ($\epsilon_n^e + \Delta\epsilon$), y calculamos su respectivo estado tensional elástico a través de las ecuaciones de Lamé. Dicho estado tensional se corresponde con el de tensiones de prueba. Seguidamente se calcula su estado equivalente en tensiones principales en base a la

resolución del problema de autovalores y autovectores asociado (valor y dirección de dichas tensiones) a través de la subrutina SPDEC2 [6] y se ordenan convenientemente para trabajar en el sextante $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Todo este procedimiento se recoge en la siguiente parte del código (Código 2.5).

Código 2.5 Desarrollo subrutina MCSTUP. Fase de predicción. Cálculo y descomposición espectral de las tensiones de prueba.

```

! Compute elastic trial state
! -----
! Elastic trial volumetric strain and pressure stress
  EETV=STRAT(1)+STRAT(2)+STRAT(3)
  PT=BULK*EETV
! Spectral decomposition of the elastic trial stress
  EETVD3=EETV*R1D3
  STREST(1)=R2G*(STRAT(1)-EETVD3)+PT
  STREST(2)=R2G*(STRAT(2)-EETVD3)+PT
  STREST(3)=GMODU*STRAT(4)
  CALL SPDEC2(EIGPRJ,PSTRS,DUMMY,STREST,MCOMP,NDIM)
  PSTRS(3)=R2G*(STRAT(3)-EETVD3)+PT
! Identify maximum (PSTRS1) and minimum (PSTRS3) principal stresses
  II=1
  JJ=1
  PSTRS1=PSTRS(II)
  PSTRS3=PSTRS(JJ)
  DO I=2,3
    IF(PSTRS(I).GE.PSTRS1)THEN
      II=I
      PSTRS1=PSTRS(II)
    ENDIF
    IF(PSTRS(I).LT.PSTRS3)THEN
      JJ=I
      PSTRS3=PSTRS(JJ)
    ENDIF
  ENDDO
  IF(II.NE.1 .AND. JJ.NE.1)MM=1
  IF(II.NE.2 .AND. JJ.NE.2)MM=2
  IF(II.NE.3 .AND. JJ.NE.3)MM=3
  PSTRS2=PSTRS(MM)

```

Una vez calculadas las tensiones de prueba se introducen en la función de plastificación (2.1). Si el valor de la función de plastificación es menor o igual que una cierta tolerancia (próxima a cero) se considera que el estado tensional es elástico y por tanto las tensiones de prueba son las tensiones actualizadas, ya que proceden del cálculo lineal por la ecuación de Lamé. Si por otro lado es mayor, se considera que el estado tensional está en dominio plástico y por tanto es necesario aplicar un corrector a las tensiones de prueba, ya que la función de plastificación debe anularse. En la siguiente parte del código se comprueba la función de plastificación y se activan de forma conveniente los flags IFPLAS y RIGHT. En el caso de RIGHT se aplica la siguiente ecuación deducida en [6] mediante criterios puramente geométricos para saber en que hipotético borde (L o R de la Figura 1.7) estaríamos para el caso de selección de borde como opción del algoritmo de *Return Mapping*:

$$S = (1 - \sin \psi) \sigma_1^{trial} - 2\sigma_2^{trial} + (1 + \sin \psi) \sigma_3^{trial} \quad (2.5)$$

Si $S \geq 0 \rightarrow$ Borde derecho

Si $S < 0 \rightarrow$ Borde izquierdo

Código 2.6 Desarrollo subrutina MCSTUP. Fase de predicción. Comprobación de la función de plastificación y selección de borde.

```

! Compute trial yield function and check for plastic consistency
! -----
COHE=COHO+H*EPBARN
SMCT=PSTRS1-PSTRS3+(PSTRS1+PSTRS3)*SIN(PHI)
PHIA=SMCT-R2CPHI*COHE
RES=PHIA
IF(COHE.NE.0.0_8)RES=RES/ABS(COHE)
IF(RES.GT.1.0e-10_8)THEN
! Plastic step: Apply return mapping
IFPLAS=.TRUE.
! identify possible edge return: either right or left of main plane
SCAPRD=PSTRS1*(1.0_8-SIN(PHI))+PSTRS2*(-2.0_8)+PSTRS3*(1.0_8+SIN(PHI))
IF(SCAPRD.GE.0.0_8)THEN
RIGHT=.TRUE.
ELSE
RIGHT=.FALSE.
ENDIF

```

Para este caso concreto, dentro de la función de plastificación entra la cohesión como una variable de endurecimiento, que se actualiza mediante una ley lineal dependiente de la deformación plástica acumulada. En un ejercicio posterior se ilustrará el hecho de la posibilidad de implementar otro tipo de leyes más complejas.

Tal y como se comentó en el apartado 1.2.2, el algoritmo de *Return Mapping* se puede dividir hasta en cuatro fases, donde se va comprobando la ubicación del vector de deformaciones plásticas de forma eliminatoria. En todos los casos, el/los multiplicador/es plástico/s (corrector/es) se obtiene/n a través de la convergencia de una ecuación implícita de carácter residual mediante el algoritmo iterativo de Newton-Raphson. En lo sucesivo, únicamente se detallarán las ecuaciones que se entiendan útiles para el entendimiento del desarrollo del código, pudiéndose consultar el origen y derivación de cada una de ellas en [6].

En primer lugar, se contempla la posibilidad del que la fase correcta sea la del plano principal. La ecuación residual es la siguiente:

$$\tilde{\Phi}(\Delta\gamma) \equiv (\sigma_1^{trial} - \sigma_3^{trial}) + (\sigma_1^{trial} + \sigma_3^{trial}) \sin \phi - 2c(\bar{\epsilon}_n^p + \Delta\bar{\epsilon}^p) \cos \phi - a\Delta\gamma = 0 \quad (2.6)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\epsilon}^p &= 2 \cos \phi \Delta\gamma \\ a &= 4G\left(1 + \frac{1}{3} \sin \phi \sin \psi\right) + 4K \sin \phi \sin \psi \end{aligned} \quad (2.7)$$

Obtenida a partir de la introducción de las expresiones de las tensiones corregidas (1.30) en la función de plastificación (2.1). La ecuación (2.6), al no ser normalmente lineal en $\Delta\gamma$ debido a la ley de endurecimiento para la cohesión, se resuelve mediante procedimientos de resolución de ecuaciones no lineales como el de Newton-Raphson. En el caso de ley de endurecimiento lineal no sería necesario este método, aunque su labor de implementación se fundamenta en que pueda ser aplicado para cualquier otro tipo de ley continua y derivable, como se demostrará en un ejercicio posterior. Dicho método, para funciones escalares $f(x)$, se basa en encontrar x^* tal que $f(x^*) = 0$ realizando la iteración:

$$x_{k+1}^* = x_k^* - \frac{f(x_k^*)}{f'(x_k^*)} \quad (2.8)$$

Hasta que $|f(x_{k+1}^*)|$ sea menor que cierta tolerancia impuesta de antemano. Para nuestro caso, como ejemplo se muestra la aplicación a la ecuación (2.6), en la que el primer iterante es $\Delta\gamma = 0$:

$$\begin{aligned}\Delta\gamma_{k+1} &= \Delta\gamma_k - \frac{\tilde{\Phi}}{d} \\ d &= \frac{d\tilde{\Phi}}{d\Delta\gamma} = -4G\left(1 + \frac{1}{3}\sin\psi\sin\phi\right) - 4K\sin\psi\sin\phi - 4H\cos^2\phi \\ H &= \left.\frac{dc}{d\bar{\epsilon}^p}\right|_{\bar{\epsilon}_{k+1}^p}, \quad \bar{\epsilon}_{k+1}^p = \bar{\epsilon}_k^p + \Delta\bar{\epsilon}^p\end{aligned}\quad (2.9)$$

Donde para cada iteración se va actualizando el valor $\Delta\gamma$ y el de $\bar{\epsilon}^p$ conforme a la primera ecuación de (2.7). El primer iterante de $\bar{\epsilon}^p$ corresponde al valor al que convergió en el paso de tiempo anterior ($\bar{\epsilon}_n^p$).

Tras cumplir con los criterios de convergencia podemos obtener los valores de tensiones principales a través de (1.30). La expresión del vector de flujo deriva del potencial plástico Ψ_{p1} definido en (2.2) a través de (1.26).

En el caso de que se alcance la convergencia pero el estado tensional no se encuentre en el sextante correcto ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) significa que no nos encontramos en la fase correcta del algoritmo. En este caso, al no cumplir en la fase de plano principal pasamos a la fase de uno de los bordes. En la siguiente parte del código se detalla la implementación de la fase de corrección del plano principal (Código 2.7).

Código 2.7 Desarrollo subrutina MCSTUP. Fase de corrección. Aplicación del *one-vector Return Mapping* al plano principal.

```
! Apply one-vector return mapping first (return to MAIN PLANE)
! -----
      SPHSPS=SIN(PHI)*SIN(PSI)
      CONSTA=R4G*(1.0_8+R1D3*SPHSPS)+4.0_8*BULK*SPHSPS
      R4C2PH=R2CPHI*R2CPHI
! Start Newton-Raphson iterations for DGAMA
      DO WRITER=1,MXITER
! Compute residual derivative
          DENOM=-CONSTA-R4C2PH*H
! Compute Newton-Raphson increment and update variable DGAMA
          DDGAMA=-PHIA/DENOM
          DGAMA=DGAMA+DDGAMA
! Compute new residual
          EPBAR=EPBARN+R2CPHI*DGAMA
          COHE=COHO+EPBAR*H
          PHIA=SMCT-CONSTA*DGAMA-R2CPHI*COHE
! Check convergence
          RESNOR=ABS(PHIA)
          IF(SMCT.NE.0.0_8)RESNOR=RESNOR/ABS(SMCT)
          IF(RESNOR.LE.1.0E-10_8)THEN
! Check validity of 1-vector return (check sextant of converged stress)
              S1=PSTRS1-(R2G*(1.0_8+R1D3*SIN(PSI))+R2BULK*SIN(PSI))*DGAMA
              S2=PSTRS2+(R4G*R1D3-R2BULK)*SIN(PSI)*DGAMA
              S3=PSTRS3+(R2G*(1.0_8-R1D3*SIN(PSI))-R2BULK*SIN(PSI))*DGAMA
              DELTA=DMAX1(ABS(S1),ABS(S2),ABS(S3))*1.0E-6_8
              IF(S1+DELTA.GE.S2.AND.S2+DELTA.GE.S3)THEN
! converged stress is in the same sextant as trial stress -> 1-vector
! return is valid.
                  P=(S1+S2+S3)*R1D3
                  GOTO 70
              ELSE
! converged stress is not in the same sextant -> 1-vector result is
! not valid. Go to two-vector return map to edge
```

```

GOTO 30
ENDIF
ENDIF
ENDDO

```

El procedimiento de resolución para los bordes es análogo a la fase anterior. En este caso, en los bordes se da la peculiaridad de que contamos con dos multiplicadores plásticos, ya que confluyen dos superficies de plastificación, por lo que es necesario aplicar la regla de flujo (1.28) y la ecuación de endurecimiento (1.29) correspondiente. Al tener dos multiplicadores como incógnitas $[\Delta\gamma^a, \Delta\gamma^b]$, necesitamos dos ecuaciones residuales para resolver. Estas ecuaciones derivan de las superficies de plastificación que intersectan en el borde, que puede ser el izquierdo ($\Phi_1 = 0$ y $\Phi_2 = 0$) o el derecho ($\Phi_1 = 0$ y $\Phi_6 = 0$) según la Figura 1.7, formando el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Phi}^a(\Delta\gamma^a, \Delta\gamma^b) \\ \tilde{\Phi}^b(\Delta\gamma^a, \Delta\gamma^b) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}^a - a\Delta\gamma^a - b\Delta\gamma^b - 2c(\bar{\epsilon}_n^p + \Delta\bar{\epsilon}^p) \cos \phi \\ \tilde{\sigma}^b - b\Delta\gamma^a - a\Delta\gamma^b - 2c(\bar{\epsilon}_n^p + \Delta\bar{\epsilon}^p) \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Donde:

$$\Delta\bar{\epsilon}^p = 2 \cos \phi (\Delta\gamma^a + \Delta\gamma^b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^a &= \sigma_1^{trial} - \sigma_3^{trial} + (\sigma_1^{trial} + \sigma_3^{trial}) \sin \phi \\ \tilde{\sigma}^b &= \begin{cases} \sigma_2^{trial} - \sigma_3^{trial} + (\sigma_2^{trial} + \sigma_3^{trial}) \sin \phi & \text{borde izquierdo} \\ \sigma_1^{trial} - \sigma_2^{trial} + (\sigma_1^{trial} + \sigma_2^{trial}) \sin \phi & \text{borde derecho} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$a = 4G \left(1 + \frac{1}{3} \sin \phi \sin \psi \right) + 4K \sin \phi \sin \psi$$

$$b = \begin{cases} 2G \left(1 - \sin \phi - \sin \psi - \frac{1}{3} \sin \phi \sin \psi \right) + 4K \sin \phi \sin \psi & \text{borde izquierdo} \\ 2G \left(1 + \sin \phi + \sin \psi - \frac{1}{3} \sin \phi \sin \psi \right) + 4K \sin \phi \sin \psi & \text{borde derecho} \end{cases}$$

El sistema (2.10) se resuelve de nuevo de forma iterativa por Newton-Raphson. El procedimiento y ecuaciones a aplicar son análogos al caso anterior con (2.9), donde se obtienen los multiplicadores plásticos que se aplican a (1.30) para obtener el estado de tensiones actualizado. Los vectores de flujo se obtienen a partir de los potenciales plásticos pertinentes según el borde en el que nos encontremos. De nuevo, si el método converge en esta fase pero no cumple la regla del primer sextante, se pasa a la fase del vértice. En la siguiente parte del código se detalla la resolución de la fase del borde, con las expresiones derivadas del método de Newton-Raphson incluidas (Código 2.8).

Código 2.8 Desarrollo subrutina MCSTUP. Fase de corrección. Aplicación del *two-vector Return Mapping* al borde apropiado.

```

30 CONTINUE
! Apply two-vector return mapping to appropriate EDGE
! -----
DGAMA=0.0_8
EPBAR=EPBARN
COHE=COHO+H*EPBARN
SMCTA=PSTRS1-PSTRS3+(PSTRS1+PSTRS3)*SIN(PHI)
IF(RIGHT) THEN
  SMCTB=PSTRS1-PSTRS2+(PSTRS1+PSTRS2)*SIN(PHI)
ELSE
  SMCTB=PSTRS2-PSTRS3+(PSTRS2+PSTRS3)*SIN(PHI)
ENDIF
PHIA=SMCTA-R2CPHI*COHE
PHIB=SMCTB-R2CPHI*COHE

```

```

IF (RIGHT) THEN
  CONSTB=R2G*(1.0_8+SIN(PHI)+SIN(PSI)-R1D3*SPHSPS)+4.0_8*BULK*SPHSPS
ELSE
  CONSTB=R2G*(1.0_8-SIN(PHI)-SIN(PSI)-R1D3*SPHSPS)+4.0_8*BULK*SPHSPS
ENDIF
! Start Newton-Raphson iterations for DGAMA and DGAMB
DO NRITER=1,MXITER
! Compute residual derivative matrix
FACTA=R4C2PH*H
DRVAA=-CONSTA-FACTA
DRVAB=-CONSTB-FACTA
DRVBA=-CONSTB-FACTA
DRVBB=-CONSTA-FACTA
! Compute Newton-Raphson increment and update variables DGAMA and DGAMB
R1DDET=1.0_8/(DRVAA*DRVBB-DRVAB*DRVBA)
DDGAMA=(-DRVBB*PHIA+DRVAB*PHIB)*R1DDET
DDGAMB=(DRVBA*PHIA-DRVAA*PHIB)*R1DDET
DGAMA=DGAMA+DDGAMA
DGAMB=DGAMB+DDGAMB
! Compute new residual
EPBAR=EPBARN+R2CPHI*(DGAMA+DGAMB)
COHE=COHO+EPBAR*H
PHIA=SMCTA-CONSTA*DGAMA-CONSTB*DGAMB-R2CPHI*COHE
PHIB=SMCTB-CONSTB*DGAMA-CONSTA*DGAMB-R2CPHI*COHE
! Check convergence
RESNOR=(ABS(PHIA)+ABS(PHIB))
FACTOR=(ABS(SMCTA)+ABS(SMCTB))
IF (FACTOR.NE.0.0_8) RESNOR=RESNOR/FACTOR
IF (RESNOR.LE.1.0E-10_8) THEN
! Check validity of 2-vector return to edge
AUX1=R2G*(1.0_8+R1D3*SIN(PSI))+R2BULK*SIN(PSI)
AUX2=(R4G*R1D3-R2BULK)*SIN(PSI)
AUX3=R2G*(1.0_8-R1D3*SIN(PSI))-R2BULK*SIN(PSI)
IF (RIGHT) THEN
  S1=PSTRS1-AUX1*(DGAMA+DGAMB)
  S2=PSTRS2+AUX2*DGAMA+AUX3*DGAMB
  S3=PSTRS3+AUX3*DGAMA+AUX2*DGAMB
ELSE
  S1=PSTRS1-AUX1*DGAMA+AUX2*DGAMB
  S2=PSTRS2+AUX2*DGAMA-AUX1*DGAMB
  S3=PSTRS3+AUX3*(DGAMA+DGAMB)
ENDIF
DELTA=DMAX1(ABS(S1),ABS(S2),ABS(S3))*1.0E-6_8
IF (S1+DELTA.GE.S2.AND.S2+DELTA.GE.S3) THEN
! converged stress is in the same sextant as trial stress -> 2-vector
! return to edge is valid.
EDGE=.TRUE.
P=(S1+S2+S3)*R1D3
GOTO 70
ELSE
! converged stress is not in the same sextant -> 2-vector return to edge
! is not valid. Go to two-vector return map to APEX
GOTO 50
ENDIF
ENDIF
ENDDO

```

La fase del vértice se considera la última antes de salir del algoritmo, según la Figura 1.8. El vértice de la pirámide de Mohr-Coulomb se encuentra en la diagonal principal del espacio de tensiones principales. De la función de plastificación, se puede deducir que además de que el estado tensional se encuentre en esta línea se debe cumplir:

$$p = c \cot \phi \quad (2.12)$$

Donde p es la parte hidrostática del tensor de tensiones, que en el espacio principal equivale a:

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (2.13)$$

Con todo lo visto hasta el momento, el tensor de tensiones principales solución debe ser de la forma $[p, p, p]$, al tener solo parte hidrostática.

Para esta fase en particular, la incógnita del algoritmo del *Return Mapping* será el incremento de deformación plástica volumétrica $\Delta \varepsilon_v^p$, igual a la traza del tensor de deformaciones plásticas en el sistema principal, ya que la solución se encuentra sobre la diagonal principal. La ecuación residual a resolver es la siguiente (su deducción, basada en la ley de comportamiento elástica y (2.12), y consideraciones pertinentes pueden consultarse en [6]):

$$c(\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta \bar{\varepsilon}^p) \cot \phi - p_{n+1}^{trial} + K \Delta \varepsilon_v^p = 0 \quad (2.14)$$

Donde:

$$\begin{aligned} p_{n+1}^{trial} &= K(\varepsilon_{1_n}^e + \varepsilon_{2_n}^e + \varepsilon_{3_n}^e) \\ \Delta \bar{\varepsilon}^p &= \lambda \Delta \varepsilon_v^p \quad \lambda = \frac{\cos \phi}{\sin \psi} \end{aligned} \quad (2.15)$$

El estado actualizado de tensiones en cada iteración se corresponde con:

$$\sigma_{i_{k+1}} = p_{n+1}^{trial} - K \Delta \varepsilon_v^p \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.16)$$

Donde los valores actualizados en cada paso se corresponden con el subíndice $n + 1$ y en cada iteración con $k + 1$. Una vez alcanzada la convergencia del paso los valores con $k + 1$ pasan al estado $n + 1$.

De nuevo, para la ecuación (2.14) se utiliza el método de Newton-Raphson, obteniendo como resultado $\Delta \varepsilon_v^p$ para su aplicación en (2.16). En el caso de que el método falle en este punto, al no existir más fases, se considera que el incremento de deformación utilizado al comienzo del paso es demasiado elevado, tal y como se comentó previamente. En la siguiente parte del código se implementa la fase del vértice con las ecuaciones anteriores (Código 2.9).

Código 2.9 Desarrollo subrutina MCSTUP. Fase de corrección. Aplicación del *multi-vector Return Mapping* al vértice.

```

50 CONTINUE
! Apply multi-vector return mapping to APEX
! -----
! Set initial guess for volumetric plastic strain increment DEPV
DEPV=0.0_8
EPBAR=EPBARN
COHE=COHO+EPBAR*H
COTPHI=COS(PHI)/SIN(PHI)
RES=COTPHI*COHE-PT
! Newton-Raphson iterations for DEPV
DO NRITER=1, MXITER
DENOM=COS(PHI)*COTPHI/SIN(PHI)*H+&
BULK
DDEPV=-RES/DENOM
DEPV=DEPV+DDEPV
EPBAR=EPBARN+COS(PHI)/SIN(PHI)*DEPV

```



```

      COHE=COHO+EPBAR*H
      P=PT-BULK*DEPV
      RES=COTPHI*COHE-P
      ! check for convergence
      RESNOR=ABS (RES)
      IF (PT.NE.0.0_8) RESNOR=RESNOR/ABS (PT)
      IF (RESNOR.LE.1.0e-10_8) THEN
        APEX=.TRUE.
        DGAMA=DEPV
        DGAMB=0.0_8
      ! update principal stresses
        S1=P
        S2=P
        S3=P
        GOTO 70
      ENDIF
    ENDDO

```

Si se ha alcanzado la convergencia y el estado final de tensiones actualizado se ubica en el primer sextante en alguna de las fases anteriormente explicadas significa que el algoritmo de *Return Mapping* se ha empleado con éxito. El último paso en este apartado sería transformar el estado principal al global mediante los autovalores y autovectores obtenidos mediante la subrutina SPEC2 y actualizar todas las variables resultado (tensiones, deformaciones elásticas, plásticas y plástica acumulada) al paso $n + 1$. En el caso de las deformaciones plásticas, son fácilmente obtenibles a partir del incremento de deformaciones elásticas y el incremento de deformación total del paso:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.17)$$

2.1.3 Modelización de la matriz \mathbb{C}^{epc}

Tras obtener el estado actualizado de tensiones estamos en disposición de ensamblar la matriz de comportamiento elastoplástica consistente. Elastoplástica ya que tiene en cuenta el carácter plástico de la formulación empleada y consistente ya que está de acuerdo con el algoritmo de *Return Mapping* desarrollado en el apartado anterior. La definición de la matriz es la siguiente:

$$\mathbb{C}^{\text{epc}} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \left. \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \right|_{\alpha_n} \quad (2.18)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\alpha_n, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1})$$

Donde la variable de endurecimiento queda fijada en la obtención de esta matriz, al igual que en la expresión de tensiones actualizadas para el algoritmo de *Return Mapping* (1.30). De esta forma, podemos asemejar una ley elastoplástica (*path-dependent*) a una elástica no lineal con un módulo tangente (*path-independent*) (2.18) para el pseudo-tiempo $[t_n, t_{n+1}]$. Por tanto, no es necesario integrar todo el historial de tensiones, sino únicamente tener en cuenta el estado actual y su módulo tangente.

Sin embargo, como ya se comentó en el capítulo anterior, es más sencillo obtener esta matriz en el espacio de tensiones principales a través de las expresiones de (1.30) y (1.31). La relación entre (1.31) y (2.18) puede dividirse en dos partes. En primer lugar, se considera que (2.18) también está definida en el espacio de tensiones principales. En este caso, la equivalencia se produce a través de la definición de la deformación elástica de prueba $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}}$. A través del siguiente set de relaciones:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n \\ \boldsymbol{\varepsilon}_n &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \end{aligned} \quad (2.19)$$

Es fácilmente demostrable que $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$. Por tanto, se puede establecer la siguiente equivalencia:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\alpha_n, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) \equiv \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\alpha_n, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}) \quad (2.20)$$

Que se puede entender como un simple cambio de variable. Mediante este cambio se concluye:

$$\mathbb{C}_{\text{ppal}}^{\text{epc}} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}} \quad (2.21)$$

Donde se ha hecho implícito el uso de la regla de la cadena. La composición de esta matriz, para el paso $n + 1$, queda de la siguiente forma:

$$\mathbb{C}_{\text{ppal}}^{\text{epc}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1^{e\ trial}} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_2^{e\ trial}} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_3^{e\ trial}} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varepsilon_1^{e\ trial}} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varepsilon_2^{e\ trial}} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varepsilon_3^{e\ trial}} \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial \varepsilon_1^{e\ trial}} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial \varepsilon_2^{e\ trial}} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial \varepsilon_3^{e\ trial}} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

La segunda parte del proceso para llegar a (2.18) pasa por transformar la matriz (2.22) al espacio de tensiones globales. Se entiende por espacio global a la ordenación de las tensiones de la forma $[\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12}]$, considerando problemas de deformación plana generalizada y axisimétrico. Para ello, se denota el hecho de que la matriz (2.22) calcula las derivadas de los autovalores del pseudovector $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ con respecto a los autovalores del pseudovector $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}$. De esta forma, conociendo los arrays de autovalores y las derivadas de un array con respecto al otro es bastante sencillo el cálculo de las derivadas de los pseudovectores de origen. El proceso de transformación se lleva a cabo mediante una subrutina que evalúa las derivadas del pseudovector de tensiones con respecto al pseudovector de deformaciones elásticas de prueba (véase la sección A.3 de [6] para más información).

En resumen, tras conocer el valor de las tensiones principales, deformaciones elásticas de prueba y la fase del *Return Mapping* donde se ha alcanzado la convergencia, el proceso de obtención de \mathbb{C}^{epc} pasa por obtener la matriz de derivadas en el espacio principal y posteriormente pasarla al espacio global. Todo este proceso, modelado para las distintas fases explicadas en el apartado anterior (fase elástica o plástica dividida en corrector al plano principal, bordes o vértice) se llevará a cabo a través de la subrutina MCONTANMA, adaptada del código para HYPLAS de la rutina CTMC, de [6]. Cabe destacar que si estamos en fase elástica la matriz es igual a la elástica, por simple aplicación de las ecuaciones de Lamé.

En cuanto al desarrollo de la subrutina, en primer lugar, se declaran las variables, parámetros y subrutinas internas a utilizar (Código 2.10).

Código 2.10 Inicialización subrutina MCONTANMA. Declaración de parámetros y variables.

```
subroutine MCONTANMA(&
  DMATX,LALGVA,RSTAVA, &
  STRAT,STRES,MSTRE,PROPS,PHI,PSI)
!-----
! Consistent tangent matrix for the Mohr-Coulomb model
! The tangent matrix computed in this routine is consistent with
! fully implicit elastic predictor/return mapping algorithm for the
! Mohr-Coulomb elasto-plastic material model.
! It contains the plane strain and axisymmetric implementations of
! the model.
! It returns either the elastic tangent or the elasto-plastic
! consistent tangent matrix depending on the input value of EPFLAG.
!-----
  implicit none
!--- Parameters for subroutines -----
```

```

integer(4), parameter :: MCOMP=4, MDIM=3, NDIM=2
integer(4), parameter :: NTYPE=3
!-----
  logical, intent(in) :: LALGVA(5)
integer(4), intent(in) :: MSTRE
real(8), intent(out) :: DMATX(MSTRE,MSTRE)
real(8), intent(in) :: RSTAVA(MSTRE+1)
real(8), intent(in) :: STRAT(MSTRE)
real(8), intent(in) :: STRES(MSTRE)
real(8), intent(in) :: PROPS(4),PHI,PSI
!-----
  logical :: EPFLAG, APEX, EDGE, OUTOFP,RIGHT
logical :: REPEAT
  real(8) :: E, NU, COHO, H
real(8) :: DPSTRS(MDIM,MDIM), PSTRS(MDIM), STRAC(MDIM)
real(8) :: EIGPRJ(MSTRE,2), PSTRA(MDIM)
real(8) :: FOID(MSTRE,MSTRE), SOID(MSTRE)
real(8) :: GMODU, BULK, R2G, R4G, R2BULK, R2CPHI
real(8) :: R4C2PH, R1D3, R2D3, R2GD3, R4GD3
integer(4) :: II, JJ, MM, I, J
real(8) :: PSTMAX, PSTMIN
real(8) :: SPHSPS, CONSTA, CONSTB
real(8) :: FACTA, DRVAA, DRVAB, DRVBA, DRVBB
real(8) :: AUX1, AUX2, AUX3
real(8) :: R1DDET
real(8) :: COTPHI,DSIDEJ
real(8) :: DENOM, B1, B2, B3
real(8) :: FACTOR
integer(4) :: NSTRE
!-----

!---- Explicit interfaces -----
interface
  subroutine SPDEC2(EIGPRJ,EIGX,REPEAT,X, &
    MCOMP,NDIM)
    integer(4), intent(in) :: MCOMP,NDIM
    real(8), intent(in) :: X(MCOMP)
    real(8), intent(out) :: EIGPRJ(MCOMP,NDIM),EIGX(NDIM)
    logical, intent(out) :: REPEAT
  end subroutine SPDEC2

  subroutine DGISO2(DEIGY,DYDX,EIGPRJ,EIGX,EIGY, &
    OUTOFP,REPEAT,MCOMP,MDIM,NDIM)
    integer(4), intent(in) :: MCOMP,MDIM,NDIM
    real(8), intent(in) :: DEIGY(MDIM,MDIM), EIGPRJ(MCOMP,NDIM)
    real(8), intent(in) :: EIGX(NDIM), EIGY(NDIM)
    logical, intent(in) :: OUTOFP, REPEAT
    real(8), intent(out) :: DYDX(MCOMP,MCOMP)
  end subroutine DGISO2
end interface

```

Donde como variable nueva se presenta DMATX, que es el array que almacena la matriz elastoplástica consistente, análoga a la variable DDSDDDE utilizada por ABAQUS. También se crea una variable lógica nueva, EPFLAG, análoga a IFPLAS en MCSTUP, que determina si la fase de actualización de tensiones ha sido elástica o plástica. La subrutina interna DGISO2 [6] se encargará de transformar la matriz de derivadas en principales a globales, de acuerdo con lo explicado anteriormente. La subrutina SPDEC2 se volverá a utilizar para obtener los autovalores de $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}$.

Al ser el proceso de obtención de la matriz bastante mecánico en todas las fases, se ilustra a continuación un ejemplo de cálculo de una de las componentes de esta en el espacio principal. Dicha componente será la (2,2) de la fase del borde izquierdo, es decir $\frac{\partial \sigma_2}{\partial \varepsilon_2^{e\ trial}}$. En primer lugar, se toman diferenciales de (1.30) para σ_2 teniendo en cuenta que contamos con dos multiplicadores plásticos $[\Delta\gamma^a \ \Delta\gamma^b]$ correspondientes a los vectores de flujo de los planos 1 y 2, \mathbf{N}^1 y \mathbf{N}^2 , quedando:

$$\begin{aligned} d\sigma_2 &= d\sigma_2^{trial} + \left(\frac{4}{3}G - 2K\right) \sin \psi d\Delta\gamma^a - \left[2G \left(1 + \frac{1}{3} \sin \psi\right) + 2K \sin \psi\right] d\Delta\gamma^b = \\ &= d\sigma_2^{trial} + \text{AUX1 } d\Delta\gamma^a + \text{AUX2 } d\Delta\gamma^b \end{aligned} \quad (2.23)$$

Por un lado, para obtener $d\sigma_2^{trial}$, o cualquier componente del vector de tensiones de prueba en principales, en función de $d\varepsilon_2^{e\ trial}$ se hace uso de la ley elástica lineal, tal que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1^{trial}}{\partial \varepsilon_2^{e\ trial}} \\ \frac{\partial \sigma_2^{trial}}{\partial \varepsilon_2^{e\ trial}} \\ \frac{\partial \sigma_3^{trial}}{\partial \varepsilon_2^{e\ trial}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K - \frac{2}{3}G \\ K + \frac{4}{3}G \\ K - \frac{2}{3}G \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Por otro lado, para obtener $[d\Delta\gamma^a \ d\Delta\gamma^b]$ en función $d\varepsilon_2^{e\ trial}$ es necesario diferenciar el sistema de ecuaciones residual (2.10) del apartado anterior (las constantes y variables definidas en este desarrollo provienen de las utilizadas en el sistema (2.10)):

$$\begin{bmatrix} d\tilde{\Phi}^a(d\Delta\gamma^a, d\Delta\gamma^b) \\ d\tilde{\Phi}^b(d\Delta\gamma^a, d\Delta\gamma^b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\tilde{\sigma}^a + \frac{\partial \tilde{\Phi}^a}{\partial \Delta\gamma^a} d\Delta\gamma^a + \frac{\partial \tilde{\Phi}^a}{\partial \Delta\gamma^b} d\Delta\gamma^b \\ d\tilde{\sigma}^b + \frac{\partial \tilde{\Phi}^b}{\partial \Delta\gamma^a} d\Delta\gamma^a + \frac{\partial \tilde{\Phi}^b}{\partial \Delta\gamma^b} d\Delta\gamma^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Que es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial \tilde{\Phi}^a}{\partial \Delta\gamma^a} & -\frac{\partial \tilde{\Phi}^a}{\partial \Delta\gamma^b} \\ -\frac{\partial \tilde{\Phi}^b}{\partial \Delta\gamma^a} & -\frac{\partial \tilde{\Phi}^b}{\partial \Delta\gamma^b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Delta\gamma^a \\ d\Delta\gamma^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\tilde{\sigma}^a \\ d\tilde{\sigma}^b \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{\Phi}^a}{\partial \Delta\gamma^a} & \frac{\partial \tilde{\Phi}^a}{\partial \Delta\gamma^b} \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}^b}{\partial \Delta\gamma^a} & \frac{\partial \tilde{\Phi}^b}{\partial \Delta\gamma^b} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a - 4H \cos^2 \phi & -b - 4H \cos^2 \phi \\ -b - 4H \cos^2 \phi & -a - 4H \cos^2 \phi \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{\sigma}^a}{\partial \varepsilon_2^{e\ trial}} \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}^b}{\partial \varepsilon_2^{e\ trial}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2K - \frac{4}{3}G \\ 2G + \left(2K + \frac{2}{3}G\right) \sin \phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.27)$$

En la que en la primera igualdad de (2.27) se ha hecho implícito el uso de la regla de la cadena para $c(\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\bar{\varepsilon}^p)$ utilizando la primera ecuación de (2.11), mientras que en la segunda se ha hecho uso de (2.24) de nuevo.

Despejando el set de incógnitas de (2.26) queda:

$$\begin{bmatrix} d\Delta\gamma^a \\ d\Delta\gamma^b \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial \check{\Phi}^a}{\partial \Delta\gamma^a} \frac{\partial \check{\Phi}^b}{\partial \Delta\gamma^b} - \frac{\partial \check{\Phi}^b}{\partial \Delta\gamma^a} \frac{\partial \check{\Phi}^a}{\partial \Delta\gamma^b}} \begin{bmatrix} -\frac{\partial \check{\Phi}^b}{\partial \Delta\gamma^b} & \frac{\partial \check{\Phi}^a}{\partial \Delta\gamma^b} \\ \frac{\partial \check{\Phi}^b}{\partial \Delta\gamma^a} & -\frac{\partial \check{\Phi}^a}{\partial \Delta\gamma^a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\check{\sigma}^a \\ d\check{\sigma}^b \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Finalmente, sustituyendo la segunda componente de (2.24), (2.27) y (2.28) en la ecuación (2.23) diferenciando con respecto a $d\epsilon_2^{e\text{ trial}}$ resulta:

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial \epsilon_2^{e\text{ trial}}} = K + \frac{4}{3}G + \frac{1}{D} \left\{ \text{AUX1} \left[2K \left(\frac{\partial \check{\Phi}^a}{\partial \Delta\gamma^b} - \frac{\partial \check{\Phi}^b}{\partial \Delta\gamma^a} \right) + 2G \frac{\partial \check{\Phi}^a}{\partial \Delta\gamma^b} + G \left(\frac{2}{3} \frac{\partial \check{\Phi}^a}{\partial \Delta\gamma^b} + \frac{4}{3} \frac{\partial \check{\Phi}^b}{\partial \Delta\gamma^a} \right) \sin \phi \right] + \right. \\ \left. + \text{AUX2} \left[2K \left(\frac{\partial \check{\Phi}^a}{\partial \Delta\gamma^a} - \frac{\partial \check{\Phi}^b}{\partial \Delta\gamma^a} \right) + 2G \frac{\partial \check{\Phi}^a}{\partial \Delta\gamma^a} + G \left(\frac{2}{3} \frac{\partial \check{\Phi}^a}{\partial \Delta\gamma^a} + \frac{4}{3} \frac{\partial \check{\Phi}^b}{\partial \Delta\gamma^a} \right) \sin \phi \right] \right\} \quad (2.29)$$

Donde D es el denominador (determinante) de (2.28). Esta componente y el resto se encuentran implementadas en la siguiente parte del código (Código 2.11). Se muestra únicamente la fase del borde izquierdo ya que el procedimiento de resolución en el resto de fases del dominio plástico son análogas a la mostrada.

Código 2.11 Desarrollo subrutina MCCONTANMA. Cálculo de la matriz elastoplástica consistente para la fase del borde izquierdo.

```

      IF (EPFLAG) THEN
      ! Compute elastoplastic consistent tangent
      ! -----
      ! Spectral decomposition of the elastic trial strain
      STRAC(1)=STRAT(1)
      STRAC(2)=STRAT(2)
      STRAC(3)=STRAT(4)*0.5_8
      CALL SPDEC2(EIGPRJ,PSTRA,REPEAT,STRAC,MCOMP,NDIM)
      PSTRA(3)=STRAT(3)
      ! and current total stress
      PSTRS(1)=STRES(1)*EIGPRJ(1,1)+STRES(2)*EIGPRJ(2,1)+2.0_8*STRES(4)*
        EIGPRJ(3,1)
      PSTRS(2)=STRES(1)*EIGPRJ(1,2)+STRES(2)*EIGPRJ(2,2)+2.0_8*STRES(4)*
        EIGPRJ(3,2)
      PSTRS(3)=STRES(3)
      ! Identify directions of maximum and minimum principal trial stresses
      ! II MAX
      ! JJ MIN
      ! MM MED
      II=1
      JJ=1
      PSTMAX=PSTRA(II)
      PSTMIN=PSTRA(JJ)
      DO I=2,3
        IF (PSTRA(I) .GE. PSTMAX) THEN
          II=I
          PSTMAX=PSTRA(II)
        ENDIF
        IF (PSTRA(I) .LT. PSTMIN) THEN
          JJ=I
          PSTMIN=PSTRA(JJ)
        ENDIF
      ENDDO

```

```

IF (II.NE.1.AND.JJ.NE.1)MM=1
IF (II.NE.2.AND.JJ.NE.2)MM=2
IF (II.NE.3.AND.JJ.NE.3)MM=3
IF (EDGE) THEN
  ! Tangent consistent with 2-vector return to edge
  SPHSPS=SIN(PHI)*SIN(PSI)
  CONSTA=R4G*(1.0_8+R1D3*SPHSPS)+4.0_8*BULK*SPHSPS
  IF (RIGHT) THEN
    CONSTB=R2G*(1.0_8+SIN(PHI)+SIN(PSI)-R1D3*SPHSPS)+4.0_8*BULK*SPHSPS
  ELSE
    CONSTB=R2G*(1.0_8-SIN(PHI)-SIN(PSI)-R1D3*SPHSPS)+4.0_8*BULK*SPHSPS
  ENDIF
  FACTA=R4C2PH*H
  DRVAA=-CONSTA-FACTA
  DRVAB=-CONSTB-FACTA
  DRVBA=-CONSTB-FACTA
  DRVBB=-CONSTA-FACTA
  AUX1=R2G*(1.0_8+R1D3*SIN(PSI))+R2BULK*SIN(PSI)
  AUX2=(R4GD3-R2BULK)*SIN(PSI)
  AUX3=R2G*(1.0_8-R1D3*SIN(PSI))-R2BULK*SIN(PSI)
  R1DDET=1.0_8/(DRVAA*DRVBB-DRVAB*DRVBA)
  ! ...returned to left edge
  DPSTRS(II,II)=BULK+R4GD3+(AUX1*((R2BULK*(DRVBB-DRVAB)+(DRVAB*R4GD3+
    DRVBB*R2GD3))*SIN(PHI))+DRVBB*R2G)+AUX2*((R2BULK*(DRVBA-DRVAA)
    +(DRVAA*R4GD3+DRVBA*R2GD3))*SIN(PHI))+DRVBA*R2G))*R1DDET
  DPSTRS(II,MM)=BULK-R2GD3+(AUX1*((R2BULK*(DRVBB-DRVAB)-(DRVAB*R2GD3+
    DRVBB*R4GD3))*SIN(PHI))-DRVAB*R2G)+AUX2*((R2BULK*(DRVBA-DRVAA)
    -(DRVAA*R2GD3+DRVBA*R4GD3))*SIN(PHI))-DRVAA*R2G))*R1DDET
  DPSTRS(II,JJ)=BULK-R2GD3+((AUX1*(DRVBB-DRVAB)+AUX2*(DRVBA-DRVAA))
    *((R2BULK+R2GD3)*SIN(PHI))-R2G))*R1DDET
  DPSTRS(MM,II)=BULK-R2GD3+(AUX1*((R2BULK*(DRVAA-DRVBA)-(DRVAA*R4GD3+
    DRVBA*R2GD3))*SIN(PHI))-DRVBA*R2G)+AUX2*((R2BULK*(DRVAB-DRVBB)
    -(DRVAB*R4GD3+DRVBB*R2GD3))*SIN(PHI))-DRVBB*R2G))*R1DDET
  DPSTRS(MM,MM)=BULK+R4GD3+(AUX1*((R2BULK*(DRVAA-DRVBA)+(DRVAA*R2GD3+
    DRVBA*R4GD3))*SIN(PHI))+DRVAA*R2G)+AUX2*((R2BULK*(DRVAB-DRVBB)
    +(DRVAB*R2GD3+DRVBB*R4GD3))*SIN(PHI))+DRVAB*R2G))*R1DDET
  DPSTRS(MM,JJ)=BULK-R2GD3+((AUX1*(DRVAA-DRVBA)+AUX2*(DRVAB-DRVBB))
    *((R2BULK+R2GD3)*SIN(PHI))-R2G))*R1DDET
  DPSTRS(JJ,II)=BULK-R2GD3+(AUX3*((R2BULK*(DRVAB-DRVBB-DRVAA+DRVBA)+(
    DRVAA-DRVAB)*R4GD3+(DRVBA-DRVBB)*R2GD3)*SIN(PHI))+((DRVBA-DRVBB)*
    R2G))*R1DDET
  DPSTRS(JJ,MM)=BULK-R2GD3+(AUX3*((R2BULK*(DRVAB-DRVBB-DRVAA+DRVBA)+(
    DRVAB-DRVAA)*R2GD3+(DRVBB-DRVBA)*R4GD3)*SIN(PHI))+((DRVAB-DRVAA)*
    R2G))*R1DDET
  DPSTRS(JJ,JJ)=BULK+R4GD3+(AUX3*(DRVAB-DRVBB-DRVAA+DRVBA)*((R2BULK+
    R2GD3)*SIN(PHI))-R2G))*R1DDET

  ! Take from principal to global space
  CALL DGISO2(DPSTRS,DMATX,EIGPRJ,PSTRA,PSTRS,&
    &          OUTOFP,REPEAT,MCOMP,MDIM,NDIM)
  !-----
end subroutine MCCONTANMA !-----
!-----

```

La componente (MM,MM) de la matriz DPSTRS corresponde al ejemplo resuelto anteriormente. Una vez calculada se llama a la subrutina interna DGISO2 para obtener la componente de la matriz elasto-plástica en el espacio global.

2.2 Ejemplo de aplicación

En este ejemplo se va a mostrar una de las capacidades más útiles por la cual se ha decidido implementar el modelo de carácter elastoplástico de Mohr-Coulomb de [6] frente a otros. Dicha capacidad consiste en poder introducir una ley de endurecimiento propuesta de forma sencilla en la UMAT diseñada para este trabajo, con el fin de poder ajustarse a posteriores contrastes con resultados experimentales. Para poder ilustrar esta ventaja se van a aplicar diversos tipos de leyes de endurecimiento isótropo a un modelo simple de carácter cualitativo.

El modelo propuesto consiste en un elemento sujeto a las siguientes condiciones de contorno, esquematizado en la Figura 2.3.

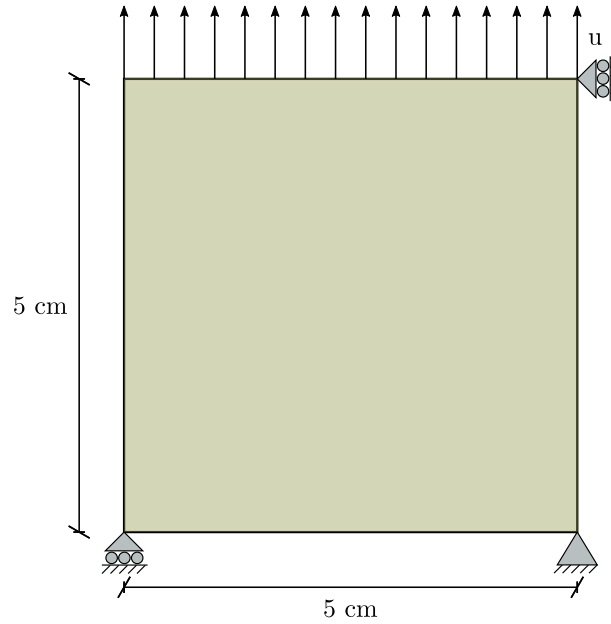


Figura 2.3 Esquema del modelo.

La idea es obtener la curva del comportamiento en la dirección de aplicación de la condición de contorno en desplazamiento, y observar las distintas respuestas del modelo en función de la ley de endurecimiento establecida. La formulación general de la ley de endurecimiento, tal y como se describió en el Capítulo 1 para el modelo Mohr-Coulomb, es la siguiente:

$$c = c(\bar{\epsilon}^p) \quad (2.30)$$

Donde c es la cohesión del material (variable sujeta a evolución por endurecimiento) y $\bar{\epsilon}^p$ la deformación plástica acumulada (variable de endurecimiento). A continuación, se detalla la lista de leyes de endurecimiento que se van a implementar, en las que la mayoría ya fueron mostradas a través de la Figura 2.1. Se realiza una clasificación en función de si la cohesión crece con la aplicación de la carga (endurecimiento), disminuye (reblandecimiento) o muestra un comportamiento mixto (mixto):

▼ Leyes de endurecimiento:

- Lineal: $c(\bar{\epsilon}^p) = c_0 + H\bar{\epsilon}^p$
- Cuadrática: $c(\bar{\epsilon}^p) = c_0 + H(\bar{\epsilon}^p)^2$
- Exponencial: $c(\bar{\epsilon}^p) = c_0 \cdot e^{H\bar{\epsilon}^p}$

▼ Leyes de reblandecimiento:

- Lineal: $c(\bar{\epsilon}^p) = c_0 - H\bar{\epsilon}^p$
- Inversa: $c(\bar{\epsilon}^p) = \frac{c_0}{1 + H\bar{\epsilon}^p}$
- Inversa al cuadrado: $c(\bar{\epsilon}^p) = \frac{c_0}{1 + H(\bar{\epsilon}^p)^2}$

▼ Ley mixta:

■ Cuadrática: $c(\bar{\epsilon}^p) = a(\bar{\epsilon}^p)^2 + b\bar{\epsilon}^p + c$

En la mayoría de leyes propuestas se denota una dependencia con un par de parámetros que son c_0 (cohesión inicial) y H (módulo de endurecimiento). En el caso de la ley mixta se opta por establecer una serie de coeficientes a,b,c; que podrían ser objeto de ajuste de una nube de puntos obtenida de resultados experimentales. Para este caso todos los parámetros y coeficientes tendrán un valor teórico, con el objetivo de mostrar resultados de índole cualitativo que se ajusten a un mismo rango de tensiones. Los datos de entrada para cada tipo de modelo son los siguientes:

Tabla 2.1 Parámetros empleados para los modelos.

Endurecimiento	c_0 [kPa]	H [kPa]
Lineal	15.0	40.0
Cuadrático	15.0	100.0
Exponencial	15.0	2.0

Reblandecimiento	c_0 [kPa]	H [kPa]
Lineal	15.0	-30.0
Inversa	15.0	15.0
I. al cuadrado	15.0	40.0

Mixto	a [kPa]	b [kPa]	c [kPa]
Cuadrático	-2750/7	1675/14	15.0

En todos los casos se trabajará con valores de ϕ y ψ de carácter residual, con el objeto de que no interfieran en el cometido de este ejercicio, que es evaluar la forma de las curvas de comportamiento en función de las leyes de endurecimiento. Los valores asignados de los parámetros de la fase elástica son $E = 4.0 \cdot 10^3$ kPa y $\nu = 0.3$.

2.2.1 Resultados

Resolviendo el problema conforme a la UMAT planteada en la sección anterior, en la Figura 2.4 se muestra los resultados para cada tipo de ley de endurecimiento.

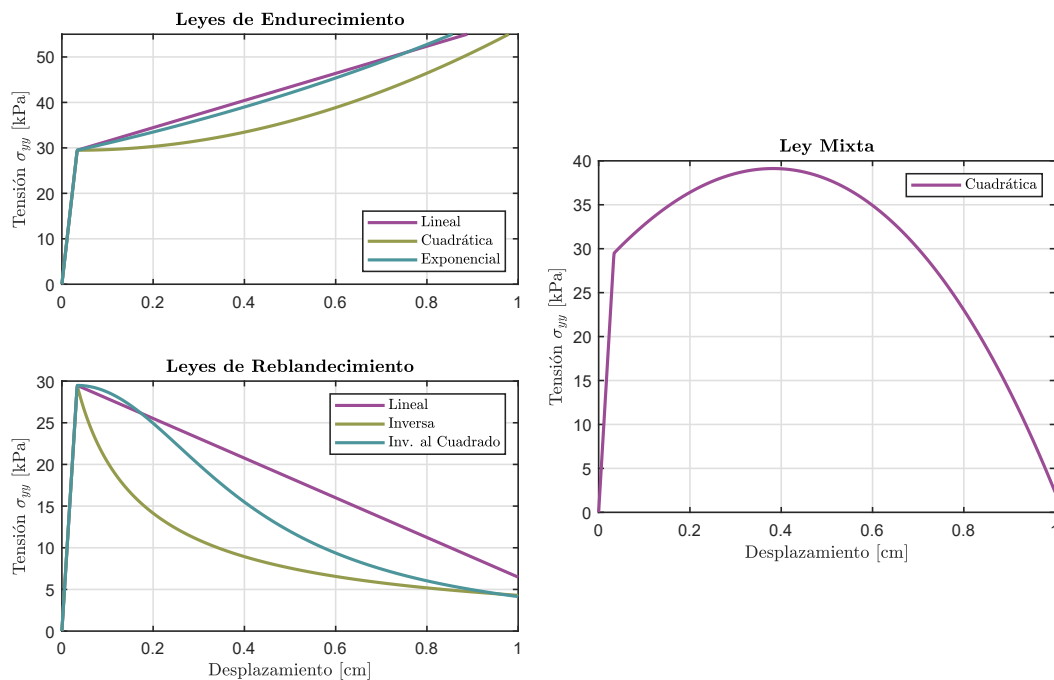


Figura 2.4 Curvas de comportamiento para cada tipo de ley de endurecimiento.

Se observa que en todos los casos el tramo plástico de la curva de comportamiento se ajusta al carácter de la ley de endurecimiento modelada. Esto supone una amplia libertad para poder realizar ajustes experimentales, seleccionando el tipo de ley más adecuado y calibrando una serie de parámetros para acercarnos al comportamiento real del material que estamos estudiando. Como se deduce de la formulación mostrada en la sección anterior, el hecho de cambiar el tipo de ley de endurecimiento no afecta a la resolución del algoritmo de *Return Mapping*, ya que hacemos uso del Método de Newton-Raphson para resolver la ecuación residual, que es donde entra en juego la variable de cohesión.

2.3 Ejemplo de verificación

En este ejemplo se va a plantear un problema de verificación cuyo objetivo es comparar las soluciones dadas por tres metodologías distintas, donde una de ellas es la planteada y explicada en este trabajo. A continuación se hace un pequeño resumen de cada una de ellas:

- ▼ Abaqus: Este software plantea un modelo propio formado por una superficie de plastificación tipo Mohr-Coulomb (1.25) y un potencial plástico distinto al descrito en este trabajo. Dicho potencial se basa en la formulación de Menétrey y William [52].
- ▼ Clausen: Formulación verificada y basada en [3]. Está planteada para el caso elástico-perfectamente plástico, sin posibilidad de endurecimiento o reblandecimiento. El potencial plástico no asociativo es análogo al caso explicado en el apartado 2.1.
- ▼ Hyplas: Formulación adaptada al entorno de ABAQUS a través de la UMAT diseñada en este trabajo. Se permite además la modelización de endurecimiento o reblandecimiento a través de una ley de endurecimiento.

El caso planteado se basa en la evaluación de la capacidad de carga de un material tipo suelo a través de la modelización del fenómeno de hundimiento de una zapata corrida infinitamente larga que descansa sobre un terreno homogéneo en condiciones ideales de deformación plana, tal y como se muestra en la Figura 2.5.

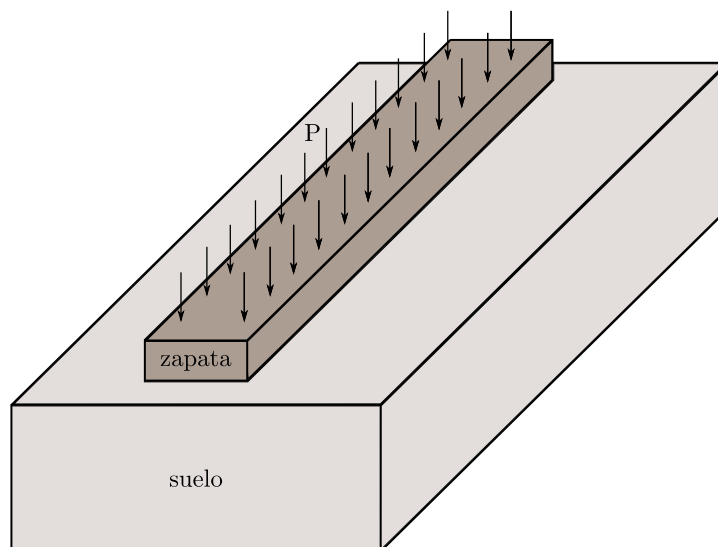


Figura 2.5 Esquema del problema.

Cuyo resultado principal es la carga límite o de colapso del terreno P para las condiciones impuestas. Este problema ya ha sido resuelto por numerosos autores tal y como se detalla en [53], empleando el teorema de la cota superior. Una de las soluciones más famosas es la ideada por Prandtl & Hill [54, 55], que predispone que la zapata es indeformable y que la carga superficial P se asemeja a un descenso uniforme del plano horizontal bajo la zapata, todo ello suponiendo un comportamiento elástico perfectamente plástico.

Por otro lado, dentro de la solución de Prandtl & Hill se incluye la definición de la línea de rotura, que conforma el mecanismo de colapso. Dicho mecanismo de colapso se ilustra en la Figura 2.6.

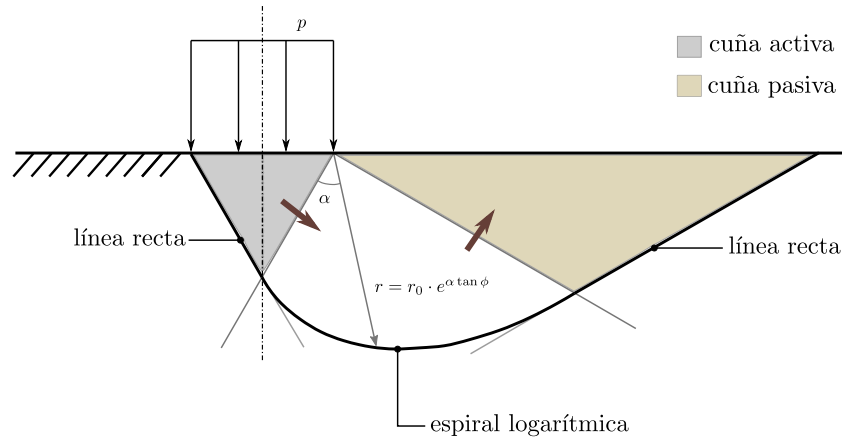


Figura 2.6 Mecanismo de colapso de Prandtl & Hill, fundamentado en [56].

Que es típico de suelos pocos compresibles, como arenas densas o muy densas y arcillas saturadas, en condición de carga a corto plazo (condiciones no drenadas). Vemos que el mecanismo está formado por una cuña activa, una cuña pasiva y una zona intermedia denominada de plasticidad radial, con forma de espiral logarítmica.

El problema se va a resolver tomando como base el caso definido en el capítulo 1 de la documentación de referencia de ABAQUS *Abaqus Benchmarks Guide* gracias a los aportes de [57]. El sistema de unidades empleado se corresponderá al de este caso, estando las dimensiones de distancia en pulgadas [in] y de fuerza en libras [lb]. La geometría del modelo y las condiciones de contorno son la que se presentan en la Figura 2.7.

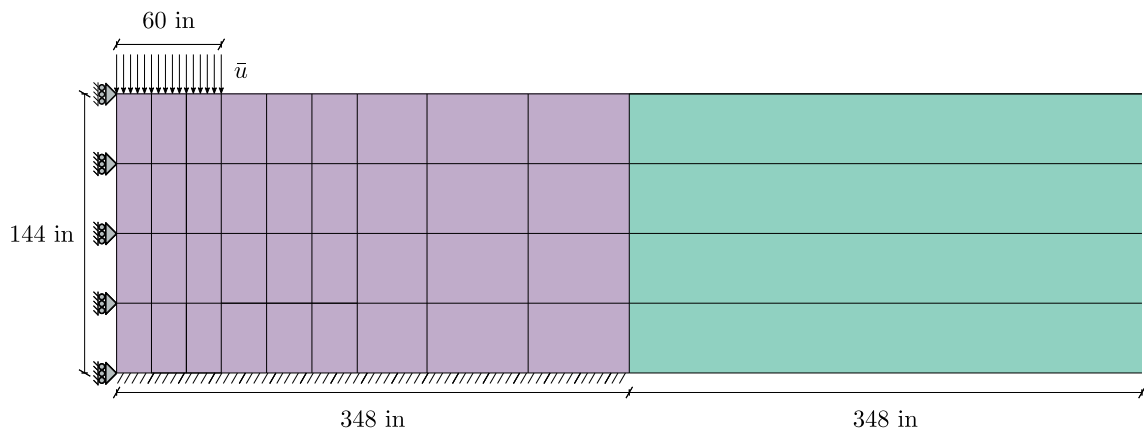


Figura 2.7 Mallado propuesto por la documentación de ABAQUS y descripción del modelo utilizado.

Donde se ha discretizado la mitad de la geometría inicial al ser posible disponer condiciones de simetría en el plano central. Por tanto, se impide el desplazamiento perpendicular a la línea de simetría en los nodos pertenecientes a esta. Además, se restringen todos los grados de libertad de movimiento en la base.

En cuanto a la parte del borde superior donde se sitúa la zapata, se ha seguido la ideología planteada por Prandtl & Hill de imponer una condición de contorno en desplazamiento en el plano de la base de la zapata, en contacto con el suelo. Para ello se impone el desplazamiento en el nodo de la esquina superior izquierda y por ecuaciones de relaciones cinemáticas se extiende al resto del nodos que se encuentran debajo de la zapata.

Por último, existen diversas formas de discretizar el modelo. La empleada aquí se basa en utilizar dos tipos de elementos para plantear un entorno semi-infinito. Por un lado, se ha discretizado la zona de interés de la solución (morada) con elementos tipo cuadrilátero para deformación plana con integración reducida (CPE8R en ABAQUS) donde se aplicaran las distintas metodologías explicadas al principio de la sección. Por otro lado, se utilizan elementos tipo infinito de cinco nodos de integración reducida (CINPE5R en ABAQUS) para definir la zona más alejada del foco de carga (verde), en la que la solución no goza de interés.

La ley de comportamiento en todas las metodologías será la de Mohr-Coulomb de carácter asociativo, en base a un comportamiento elástico perfectamente plástico. El carácter asociativo para este problema viene debido a la necesidad de obtener un buen ratio de convergencia en los resultados que se expondrán a

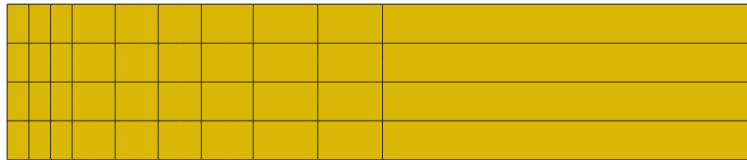
continuación. La caracterización del material viene dada por unas constantes elásticas $E = 30 \cdot 10^3 \text{ lb/in}^2$ y $\nu = 0.3$, y parámetros resistentes $\phi = 20^\circ$ y $c = 10 \text{ lb/in}^2$.

El objetivo de este ejemplo de verificación será por tanto evaluar la carga límite mediante las tres metodologías propuestas. Tal y como se puede observar en la Figura 2.8 y en la Figura 2.9, se ha diferenciado el uso de mallas de elementos de tamaño adaptativo y constante.

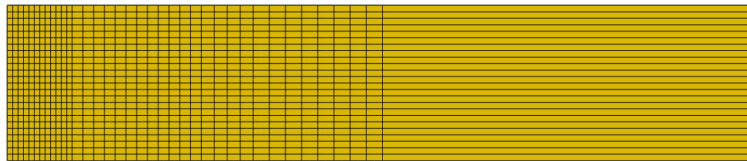
El tamaño adaptativo viene dado por el caso resuelto de la documentación de ABAQUS, donde a medida que nos alejamos de la zapata se incrementa el tamaño del elemento. Este tipo de discretización adaptativa resulta conveniente para ahorrar tiempo de cómputo a la hora de realizar los cálculos, pero debe ser siempre de carácter regular a la hora de tratar con métodos no lineales, ya que puede peligrar la convergencia de la solución. Un ejemplo de fallo de convergencia mediante el uso de mallas irregulares podría ser la formación de un mecanismo sobre la cuña pasiva, produciendo que los nodos de esa zona tuvieran un valor de desplazamiento relativo a infinito.

El tamaño constante se ha empleado para evaluar el contraste con la tipología de malla en la solución obtenida. Además, para casos donde se implemente la metodología acoplada con phase-field, es recomendable utilizar este tipo de discretizaciones.

Malla 1 (4x10 elementos)



Malla 2 (24x37 elementos)



Malla 3 (48x73 elementos)

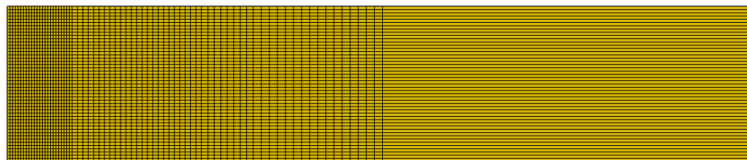
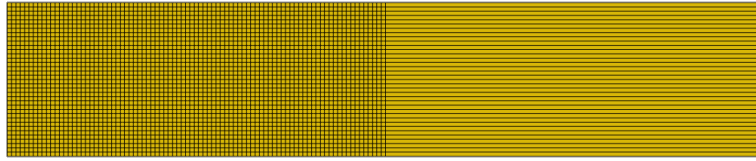


Figura 2.8 Mallas adaptativas.

Malla 1 (36x88 elementos)



Malla 2 (48x117 elementos)

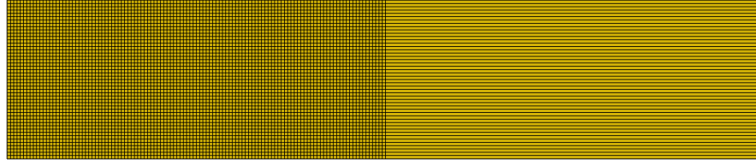


Figura 2.9 Mallas regulares de tamaño constante.

2.3.1 Resultados

Como resultados de este problema se ofrecen las curvas presión-desplazamiento en el nodo situado en el plano de simetría por debajo de la zapata para las mallas descritas en el apartado anterior. Además, se ilustrará el campo de deformaciones totales y plásticas acumuladas a nivel cualitativo para ver su analogía con el mecanismo de colapso de la Figura 2.6.

En primer lugar, se presentan las curvas presión-desplazamiento agrupadas para los dos tipos de mallas diseñadas a partir de la Figura 2.10 y la Figura 2.11, y comparadas con las soluciones teóricas propuestas por Prandtl [54] y Terzaghi [58].

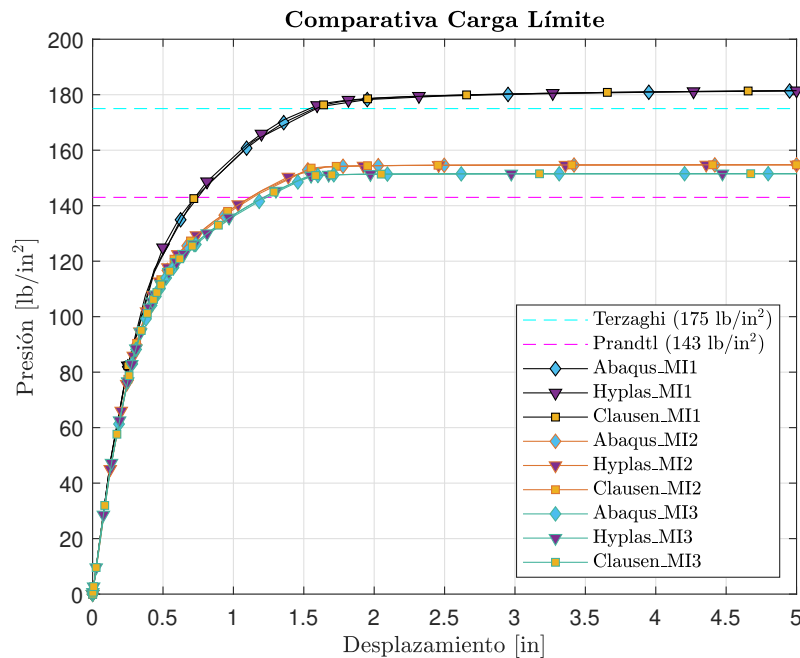


Figura 2.10 Gráficas de comportamiento para mallas regulares de tamaño adaptativo.

La carga límite se toma como el valor al que tiende el último tramo de la curva, que se puede entender como un tramo de fluencia, donde el suelo ya ha colapsado. Las mallas de tamaño adaptativo se designan con la letra I y las de tamaño constante con la letra R. Se puede observar como en todos los casos las tres metodologías presentan resultados análogos, lo que nos permite verificar la UMAT diseñada en el apartado 2.1 de este

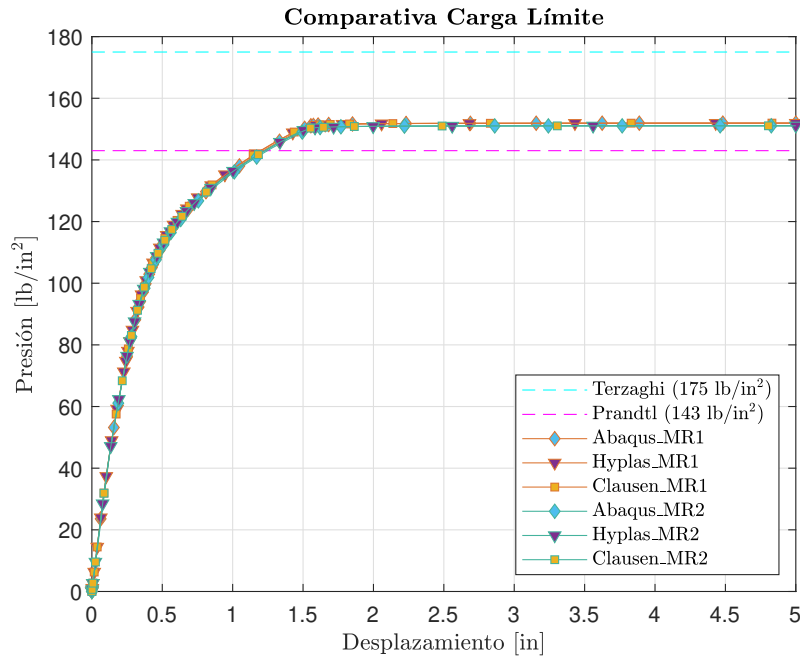


Figura 2.11 Gráficas de comportamiento para mallas regulares de tamaño constante.

capítulo. Por otro lado, cabe destacar que en los dos tipos de malla se puede observar la convergencia del valor de la carga de colapso con la discretización realizada, por lo que no presenta ningún tipo de variabilidad en este sentido. En la Tabla 2.2 se recogen los valores numéricos de la carga de colapso para cada tipo de modelo y malla, y se calculan los errores absoluto y relativo, tomando como referencia el valor de la carga de colapso por el modelo explicado en este trabajo (Hyplas).

Tabla 2.2 Resultados y cálculo de errores para la carga de colapso.

Malla	Abaqus			Clausen			Hyplas
	Valor (lb/in ²)	E.A. (lb/in ²)	E. R. (%)	Valor (lb/in ²)	E.A. (lb/in ²)	E. R. (%)	Valor (lb/in ²)
MI_1	181.354	1.12E-01	6.18E-02	181.464	1.42E-03	7.81E-06	181.466
MI_2	154.737	1.15E-02	7.42E-03	154.748	4.88E-05	3.16E-07	154.748
MI_3	151.535	4.82E-03	3.18E-03	151.540	1.62E-05	1.07E-07	151.540
MR_1	151.938	4.10E-03	2.70E-03	151.942	3.25E-05	2.14E-07	151.942
MR_2	151.067	2.88E-03	1.90E-03	151.070	3.78E-05	2.50E-07	151.070

El valor de los errores baja a medida que utilizamos mallas más finas para las dos tipologías empleadas. En el caso de las metodologías existe menos error entre la de Hyplas y Clausen, ya que emplean la misma formulación de plasticidad, a diferencia del modelo Abaqus.

En la Figura 2.12 se presenta el mapa de deformaciones totales para una de las mallas de tamaño adaptativo empleando el modelo Hyplas, representando el valor máximo de la deformación en el plano.

Cualitativamente, el mecanismo de colapso que plantea la Figura 2.12 es análogo al de la Figura 2.6. Se puede observar la formación de un triángulo en la parte superior izquierda de la solución que actúa como la cuña activa del mecanismo de Prandtl, a modo de sólido rígido delimitada por la línea de esfuerzo tangente, y la línea de rotura que sigue la trayectoria lineal-espiral-lineal. También se observa una concentración de deformaciones (en este caso plásticas, que se traducen en tensiones) situada sobre la zona exterior de la aplicación de las condiciones de contorno en desplazamiento, debido a la discontinuidad existente entre los dos nodos que suponen la frontera.

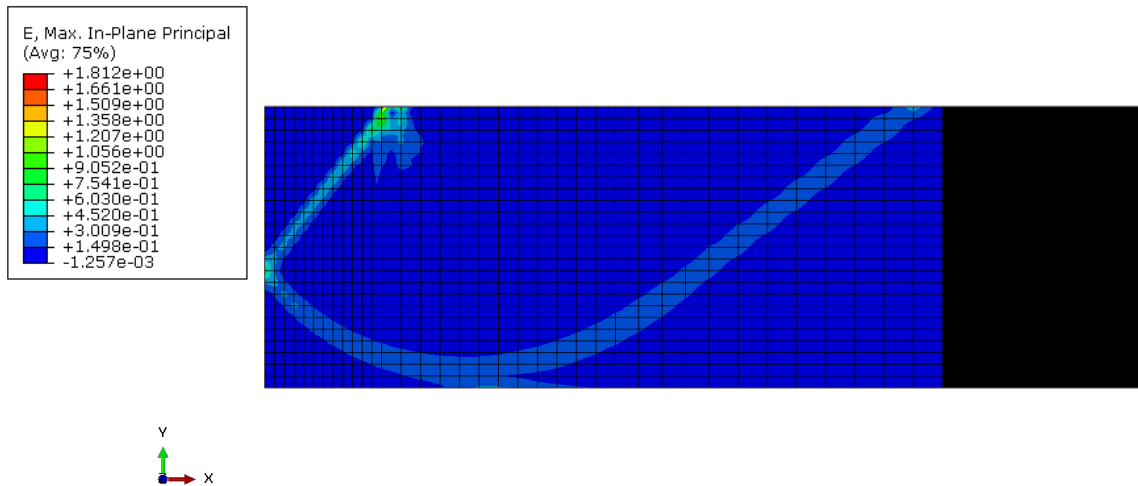


Figura 2.12 Mapa de deformaciones para el modelo Hyplas.

Por último, con vista a determinar la evolución de la zona plástica de la solución obtenida, en la Figura 2.13 se muestra la secuencia o evolución de la deformación plástica acumulada. Se puede observar como dicha zona empieza a formarse en la zona de discontinuidad de las condiciones de contorno comentada en el párrafo anterior, donde existe concentración de tensiones, y progresa siguiendo la línea de deslizamiento del mecanismo de colapso. Cabe destacar que se ha optado por mostrar la solución de carácter discreto en vez de la interpolada ya que la interpolada puede llevar a una interpretación errónea. Para este caso en concreto, el error reside en la extrapolación que realiza el programa ABAQUS desde los puntos de Gauss, donde se calcula la deformación plástica acumulada, a los nodos. Por definición, la deformación plástica acumulada es una variable que es positiva y monótonamente creciente desde cero, aspecto que incumple la solución interpolada, asignado a varios nodos un valor negativo por este proceso de extrapolación. Por ello, siempre debe existir precaución a la hora de utilizar soluciones interpoladas, ya que pueden ser fuente de errores conceptuales.

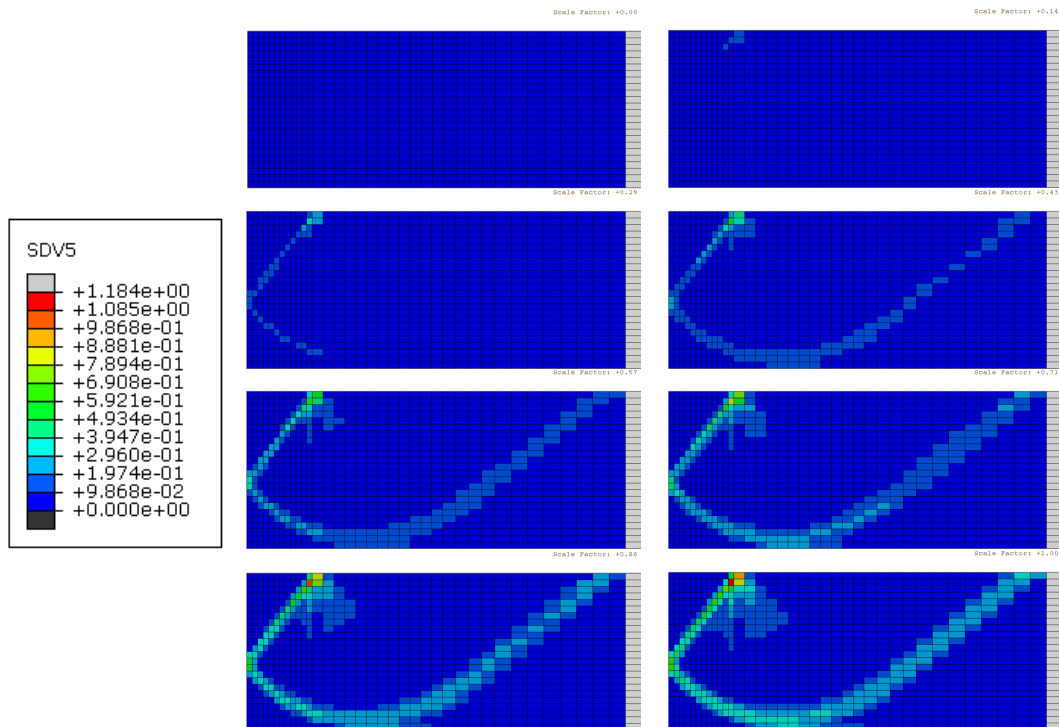


Figura 2.13 Evolución de la zona plástica.

3 Desarrollo del modelo de fractura acoplado

Tras la modelización y verificación de la ley de comportamiento no lineal en el capítulo anterior, en este se desarrollará el modelo acoplado con fractura. Entiéndase el acoplamiento como la acción conjunta de la fractura y plasticidad proveniente de leyes materiales no lineales. Para ello, se aplicará la metodología phase-field en base a lo explicado en la revisión del estado del arte del capítulo 1. La ley de comportamiento desarrollada, implementada a través de una UMAT, tiene el objetivo dentro del entramado general de actualizar el estado de tensiones y la matriz de rigidez en base al criterio de plastificación, regla de flujo y ley de endurecimiento implementados.

3.1 Implementación del caso acoplado

La forma de resolver el problema acoplado pasa por implementar un procedimiento tipo *Staggered Algorithm* definido en el Capítulo 1. Al trabajar con el software ABAQUS, se utilizará una UEL desarrollada por el equipo de tutores de este trabajo, que se conectará con la UMAT implementada en el Capítulo 2. Una UEL (*User Element*) es una interfaz que permite implementar elementos finitos según una metodología propuesta por el usuario. Los arrays más importantes de esta interfaz son el RHS (*Right Hand Side*) y AMATRX. El RHS es la contribución al vector de residuos y AMATRX la contribución a la matriz de rigidez del elemento diseñado al sistema de ecuaciones del MEF. Como variables generales de entrada se detalla el valor estimado del campo de desplazamientos y de daño, que deben converger en cada paso de tiempo por el carácter desacoplado del algoritmo empleado.

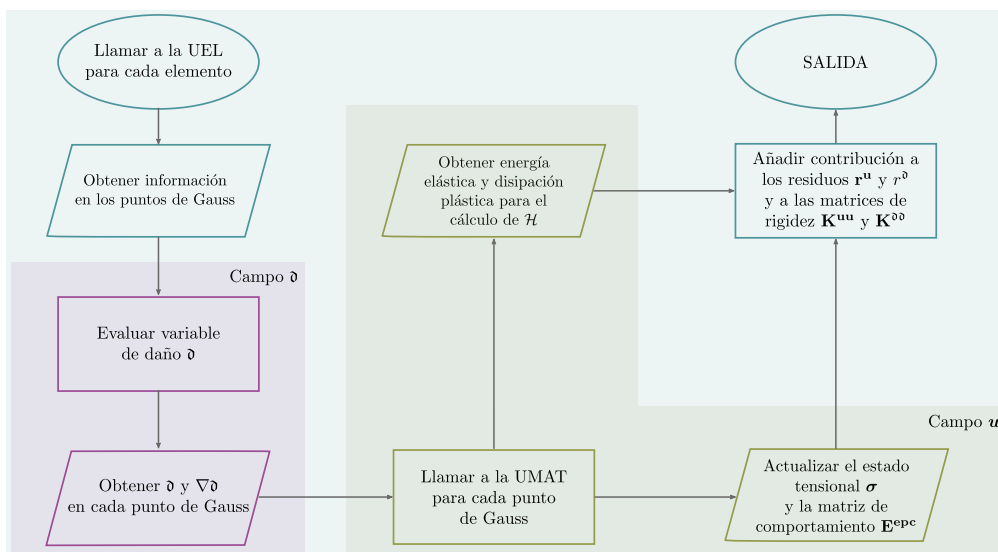


Figura 3.1 Diagrama de flujo para la obtención de contribuciones al sistema del MEF.

El esquema de trabajo seguido por la UEL en cuanto al cálculo de contribuciones se detalla a través del diagrama de la Figura 3.1. Tras la llamada a la UEL para cada elemento, se obtiene el valor de las funciones de forma, matriz de deformación (derivada de las funciones de forma) y Jacobiano de la transformación (matriz de paso de coordenadas locales a naturales) en los puntos de Gauss. A través de la estimación de la variable de daño se calcula su valor y su gradiente en estos puntos. Tras calcular el campo δ se llama a la UMAT para realizar el cometido explicado al principio de este capítulo. Cabe destacar que los resultados obtenidos son de carácter nominal, es decir, el estado tensional y matriz de comportamiento están afectados de la variable de daño a través de la función de degradación (1.9). Además, dentro de la UMAT también se calculan las energías elástica y plástica necesarias para la obtención de la *Driving Force*.

En cuanto a este último cálculo, por un lado, hay diversas formas de calcular la energía elástica (término \mathbf{E} de (1.1) sin degradar), que para materiales isotrópos y en base a las constantes de Lamé toma la forma:

$$\Psi_e = \frac{\lambda}{2} (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}^e)^2 + \mu \text{tr} [(\boldsymbol{\varepsilon}^e)^2] \quad (3.1)$$

Se puede observar que (3.1) es combinación lineal de los invariantes del tensor de deformaciones elástico. A través de esta formulación se exponen las descomposiciones definidas en [59]:

- ▼ Descomposición de Miehe [24]: Ya introducida en (1.8), se basa en la descomposición en la parte positiva (tracción) y negativa (compresión) haciendo uso de las deformaciones elásticas del sistema principal, que son los autovalores del tensor de deformaciones elástico $(\varepsilon_1^e, \varepsilon_2^e, \varepsilon_3^e)$.

$$\Psi_{e_{\pm}} = \frac{\lambda}{2} \langle \varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e \rangle_{\pm}^2 + \mu (\langle \varepsilon_1^e \rangle_{\pm}^2 + \langle \varepsilon_2^e \rangle_{\pm}^2 + \langle \varepsilon_3^e \rangle_{\pm}^2) \quad (3.2)$$

- ▼ Descomposición de Amor et al (parte esférica-desviadora): En este caso la descomposición se hace en base a la parte esférica y la parte desviadora del tensor de deformaciones elástico:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \varepsilon_k^e \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{des}}^e \quad (3.3)$$

Donde ε_k^e es la deformación esférica media elástica, obtenida a partir de la traza del tensor. Haciendo uso de los parámetros K , módulo de compresibilidad, y G , módulo de cizalladura, la descomposición queda de la siguiente forma:

$$\Psi_e = \frac{K}{2} (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}^e)^2 + G \text{tr} [(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{des}}^e)^2] \quad (3.4)$$

Que puede adoptar a su vez una descomposición en parte positiva y negativa:

$$\begin{aligned} \Psi_{e_+} &= \frac{K}{2} \langle \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}^e \rangle_+^2 + G \text{tr} [(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{des}}^e)^2] \\ \Psi_{e_-} &= \frac{K}{2} \langle \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}^e \rangle_-^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

La descomposición en parte positiva y negativa es útil ya que es más realista degradar únicamente la parte positiva, que es la encargada de la nucleación y desarrollo de defectos en el material. En este trabajo se hará uso del primer tipo de descomposición.

Por otro lado, la energía disipativa plástica Ψ_{pd} (término $\mathbf{H} + \mathbf{P}$ de (1.1) sin degradar) se calcula a través de la obtención del área bajo la curva de tensión-deformación plástica, de forma que:

$$\Psi_{pd} = \Psi_{pd} + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^{n+1} + \sigma_i^n}{2} (\varepsilon_{p_i}^{n-1} - \varepsilon_{p_i}^n) \quad (3.6)$$

Siendo n el número de componentes del pseudovector de deformaciones plásticas, en el caso 2-D serían tres y en el caso 3-D seis. Tal y como se muestra en la Figura 3.2 para una componente genérica, la energía se calcula mediante la discretización de la integral o suma discreta de áreas sucesivas, añadiendo en cada paso la encerrada entre los valores de deformación plástica del paso anterior y del actual.

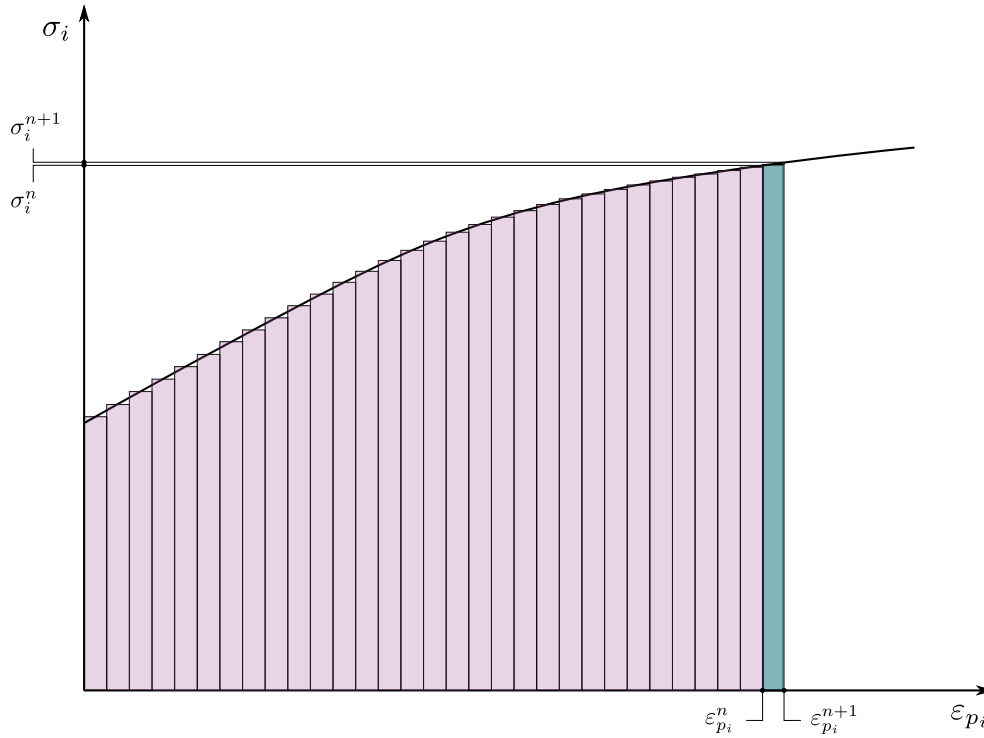


Figura 3.2 Obtención de la energía disipativa plástica a través de suma de áreas para una componente.

Se observa que este tipo de disipación se calcula en función de las tensiones efectivas, que no están afectadas del campo de daño. Se emplean este tipo de tensiones, y no las nominales (afectadas del campo de daño), ya que la energía se degrada posteriormente a través de la función de degradación.

Tras la obtención de todas las variables necesarias, se añaden como contribuciones a los vectores de residuos y matrices de rigidez, a través de las expresiones definidas en el bloque de *Staggered Algorithm* del Capítulo 1. Dichas contribuciones se actualizan hasta alcanzar la convergencia establecida mediante las tolerancias impuestas en el modelo.

3.2 Análisis de metodologías

Tras quedar claro el proceso de obtención de las componentes del sistema de ecuaciones del MEF a resolver, a continuación haremos especial énfasis en el cálculo del residuo y parte de la matriz de rigidez dependiente del campo de daño ϑ , r_i^{ϑ} y $\mathbf{K}_{ij}^{\vartheta\vartheta}$. Recordemos que estas variables dependían, además de la discretización del MEF realizada, del término de *Driving Force* de (1.18) a través de la variable histórica \mathcal{H} y la función de degradación $g(\vartheta)$.

Como se comentó en su momento con referencia en [28], el término de *Driving Force* es objeto de cambios para el desarrollo de distintas metodologías de carácter acoplado como los mostrados en la Tabla 1.2. En este trabajo se estudiará la derivación de las metodologías de Borden et al. [20] y Miehe et al. [19], que son los que más versatilidad ofrecen a la hora de modelar este tipo de comportamiento en materiales.

En ambos casos, se parte de la ecuación de evolución de la superficie de grieta (1.18) realizando una serie de modificaciones a través de parámetros y *thresholds*. A continuación se muestra como obtener las componentes del vector de residuos y matriz de rigidez asociados al daño para cada metodología.

▼ Metodología propuesta por Borden et al. [20]:

En este caso, la ecuación de evolución sufre cambios en la definición de \mathcal{H} y $g(\vartheta)$, partiendo de (1.4), quedando de la siguiente forma:

$$\frac{G_c}{l_c} (\vartheta - l_c^2 \Delta \vartheta) = -g'(\vartheta) [\beta_e \mathcal{H} + \beta_p \langle \Psi_{pd} - W_0 \rangle_+] \quad (3.7)$$

Donde:

$$\mathcal{H} = \max_{s \in [0, t]} [\Psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}^e)] \quad (3.8)$$

$$g(\vartheta) = (1 - \vartheta)^2 (1 + \vartheta(2 - m)), \quad m > 0$$

Siendo nomenclatura asignada es la siguiente:

- G_c : Tenacidad a fractura.
- l_c : Longitud característica.
- $g(\vartheta)$: Función de degradación.
- β_e, β_p : Coeficientes de influencia de la parte de la energía elástica y plástica respectivamente en la *Driving Force*.
- \mathcal{H} : Variable histórica del término de *Driving Force*.
- Ψ_{pd} : Energía disipativa plástica.
- W_0 : *Threshold* de la parte de la energía plástica.

Por facilitar la comprensión en el desarrollo, se ha obviado intencionadamente la descomposición en parte positiva y negativa de la energía elástica en ambas metodologías, teniendo solo que afectar la función de degradación a la parte positiva.

En base a la discusión ofrecida en [22], Borden y coautores utilizan una función de degradación cúbica con AT-2 para poder generar un tramo lineal previo a alcanzar la deformación correspondiente a la tensión pico (como comparación al comportamiento de la de carácter cuadrático consultar [20]) y así suplir el defecto del comienzo inmediato del daño con la puesta en carga propia de la combinación $\{g(\vartheta)$ cuadrática+AT-2}. En la Figura 3.3 se compara el uso de ambas funciones para la respuesta a carga uniaxial correspondiente a un caso homogéneo planteado en [20]. Se observa que antes de alcanzar la tensión pico encontramos un tramo lineal para la función cúbica, mientras que la cuadrática se aleja de un comportamiento elástico-lineal. Para conseguir mantener el mismo nivel de deformaciones ε_d^{cuad} al alcanzar la tensión pico σ_d^{cub} que en el caso cuadrático y mantener la semejanza con un modelo AT-2, el parámetro m se debe ajustar. Dicho ajuste se corresponde a un valor mucho menor que la unidad, pero sin alcanzar su nulidad ya que no se podría producir la nucleación de defectos para el estado intacto del material. En [20], siguiendo diversas modelizaciones, se opta por un valor de $m = 10^{-4}$.

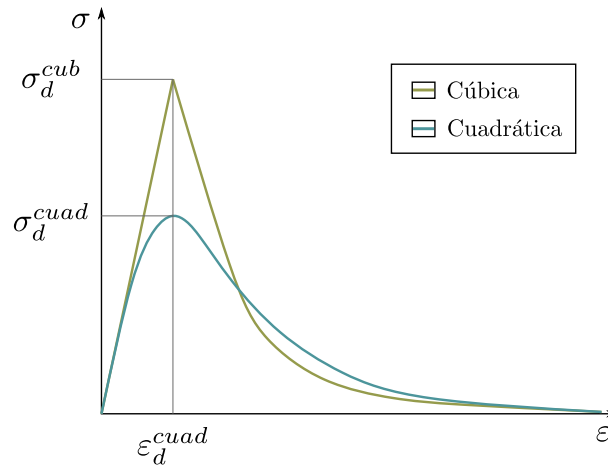


Figura 3.3 Curva de comportamiento del caso comparativo para carga uniaxial extraída de [20].

Por otro lado, Borden separa la *Driving Force* en dos términos afectados por unos coeficientes de ponderación β_e y β_p . El primer término afecta a la energía elástica y el segundo a la disipación plástica controlada además por un *threshold* W_0 . Los coeficientes de ponderación modelan la contribución de cada término al crecimiento de grieta, que es el fin último de la *Driving Force*.

Para obtener la componente asociada al daño del vector de residuos y matriz de rigidez es necesario utilizar la discretización propia del MEF:

$$\begin{aligned}\vartheta &= \mathbf{N}_i \mathbf{d}_i \\ \nabla_x \vartheta &= \mathbf{B}_i \mathbf{d}_i\end{aligned}\quad (3.9)$$

Por la cual, sustituyendo en (3.7) y derivando se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i^\vartheta &= \int_{\mathcal{B}} \left\{ \left[\frac{G_c}{l_c} \vartheta + g'(\vartheta) (\beta_e \mathcal{H} + \beta_p \langle \Psi_{pd} - W_0 \rangle_+) \right] \mathbf{N}_i + G_c l_c (\mathbf{B}_i^T \nabla_x \vartheta) \right\} dV \\ \mathbf{K}_{ij}^{\vartheta\vartheta} &= \frac{\partial \mathbf{r}_i^\vartheta}{\partial \vartheta_j} = \int_{\mathcal{B}} \left\{ \left[\frac{G_c}{l_c} + g''(\vartheta) (\beta_e \mathcal{H} + \beta_p \langle \Psi_{pd} - W_0 \rangle_+) \right] \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j + G_c l_c \mathbf{B}_i^T \mathbf{B}_j \right\} dV\end{aligned}\quad (3.10)$$

▼ Metodología propuesta Miehe y coautores [19]:

Por su parte, Miehe et al. [25] realizan la modificación del término \mathbf{F} de (1.1). En dicho término establece una extensión del modelo AT-2:

$$\Delta_f(\vartheta, \nabla_x \vartheta) := 2 \frac{\omega_c}{\xi} \left(\frac{\vartheta^2}{l_c} + l_c |\nabla_x \vartheta|^2 \right) + (1 - g(\vartheta)) \omega_c \quad (3.11)$$

Cuya nomenclatura es la siguiente:

- l_c : Longitud característica.
- $g(\vartheta)$: Función de degradación.
- ω_c : Energía crítica de fractura.
- ξ : Parámetro de control de la fase postcrítica.

Básicamente, se añade un término adicional controlado por la energía crítica de fractura ω_c que actúa a modo de *threshold*. Desarrollando la energía total del sistema y derivando con respecto a la variable daño para obtener la ecuación de evolución queda:

$$2 \frac{\omega_c}{\xi} (\vartheta - l_c^2 \Delta \vartheta) = -g'(\vartheta) \mathcal{H} \quad (3.12)$$

Donde:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \max_{s \in [0,1]} [\langle \Psi_e + \Psi_{pd} - \omega_c \rangle] \\ g(\vartheta) &= (1 - \vartheta)^2\end{aligned}\quad (3.13)$$

Como puede observarse, esta formulación introduce el *threshold* de manera natural en el término de energía de fractura, que deriva en la ecuación de evolución, a diferencia de otros autores que optan por establecerlo en los términos de energía elástica o plástica. De esta forma, consigue asemejarse a un modelo AT-1 con un tramo previo lineal sin daño apreciable, pero con las ventajas propias de un modelo AT-2. Además, emplea un parámetro ξ para controlar la caída de la fase postcrítica de daño.

De forma análoga al proceso realizado en Borden et al. [20], se obtienen las contribuciones al sistema del MEF:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i^\vartheta &= \int_{\mathcal{B}} \left\{ \left[2 \frac{\omega_c}{\xi} \vartheta + g'(\vartheta) \mathcal{H} \right] \mathbf{N}_i + \frac{2\omega_c l_c^2}{\xi} (\mathbf{B}_i^T \nabla_x \vartheta) \right\} dV \\ \mathbf{K}_{ij}^{\vartheta\vartheta} &= \frac{\partial \mathbf{r}_i^\vartheta}{\partial \vartheta_j} = \int_{\mathcal{B}} \left\{ \left[2 \frac{\omega_c}{\xi} + g''(\vartheta) \mathcal{H} \right] \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j + \frac{2\omega_c l_c^2}{\xi} \mathbf{B}_i^T \mathbf{B}_j \right\} dV\end{aligned}\quad (3.14)$$

3.3 Ejemplo de aplicación

Para verificar las metodologías presentadas en la sección anterior con el modelo computacional desarrollado, se comprobará de forma cualitativa su efectividad a través de un ejemplo sencillo de carácter homogéneo. Dicho ejemplo supone la modelización de un elemento sometido a tracción en condiciones de deformación plana. El elemento utilizado es de tipo bilineal de 4 nodos, con 4 puntos de integración. En la Figura 3.4 se ilustra el esquema del problema planteado, análogo al planteado en la sección 2.2, detallando las condiciones de contorno impuestas.

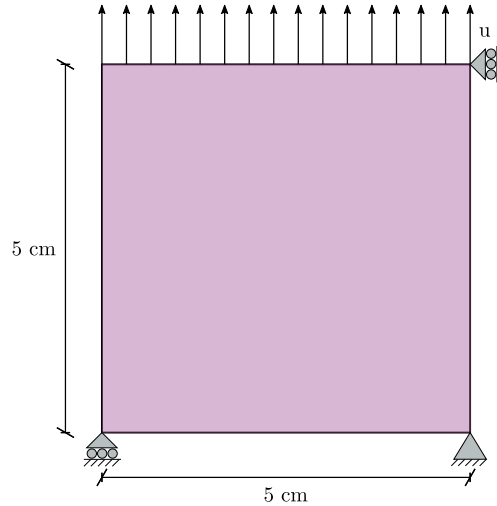


Figura 3.4 Esquema del modelo.

Dentro de la modelización de la plasticidad a partir del modelo de Mohr-Coulomb se propone la siguiente ley de endurecimiento de carácter lineal para la cohesión, en función de la deformación plástica acumulada $\bar{\epsilon}^p$ (variable de endurecimiento):

$$c(\bar{\epsilon}^p) = c_0 + H\bar{\epsilon}^p \quad (3.15)$$

Las propiedades empleadas en la modelización son las recogidas en la Tabla 3.1. Estas propiedades modelizan de forma cualitativa un suelo tipo arcilloso en condiciones no drenadas (simulación a corto plazo), material característico de aplicación del modelo Mohr-Coloumb, con un módulo de endurecimiento H negativo ya que la tracción va asociada a una pérdida de resistencia en suelos.

Tabla 3.1 Propiedades y parámetros utilizados para las metodologías de Borden et al. y Miehe et al..

Material	E [kPa]	ν	G_c [kPa·m]	l_c [m]
Arcilla	$8.0 \cdot 10^3$	0.2	0.5	0.2

Material	c_0 [kPa]	H [kPa]	ϕ [°]	ψ [°]
Arcilla	15.0	-10.0	1.0	1.0

3.3.1 Resultados

A continuación, se incluye un análisis pormenorizado de los resultados para ambas metodologías:

▼ Metodología de Borden et al.:

■ Análisis del parámetro m :

En la Figura 3.5 y la Figura 3.6 se compara la influencia del parámetro m con respecto al estado no dañado. En ninguno de los casos se aplica un *threshold*. Mientras que en el primer caso, correspondiente al empleo de $m = 10^{-4}$, se verifica la conservación de una fase no dañada antes de darse la caída de resistencia, en el caso de $m = 2$ (correspondiente a un modelo AT-2, compruébese sustituyendo en la segunda ecuación de (3.8)) la degradación comienza desde la fase elástica. Este hecho demuestra una de las ventajas de la metodología de Borden et al., no necesitando de un *threshold* para evitar el comienzo del daño desde el comienzo del estado de carga.

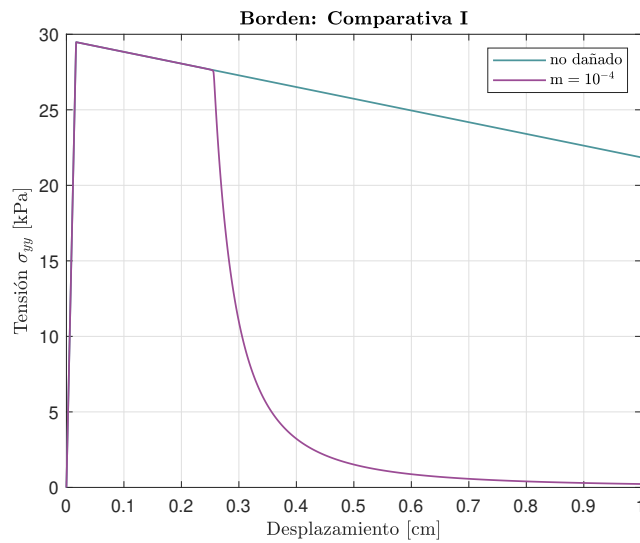


Figura 3.5 Comparativa del empleo de $m = 10^{-4}$ con el caso no dañado.

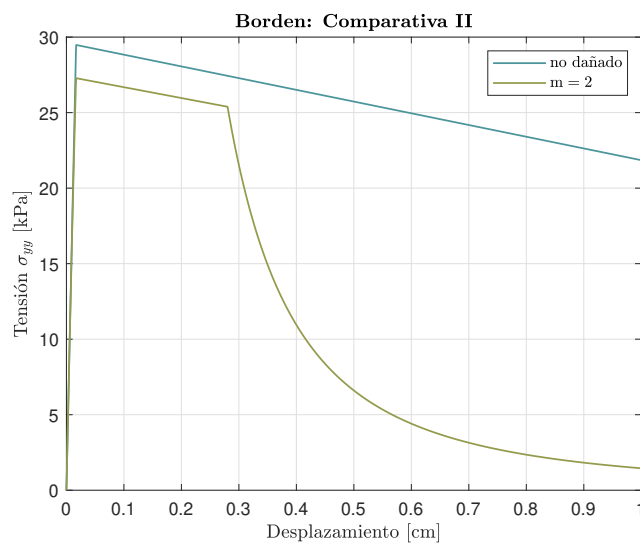


Figura 3.6 Comparativa del empleo de $m = 2$ con el caso no dañado.

En la Figura 3.7 se compara la metodología de Borden et al. ($m = 10^{-4}$) con un modelo AT-2 con función de degradación cuadrática ($m = 2$). Uno de los aspectos más interesantes a comentar es la transición más suave a la caída del primer caso con respecto al segundo, debido al empleo de una función de degradación cúbica, en vez de una cuadrática.

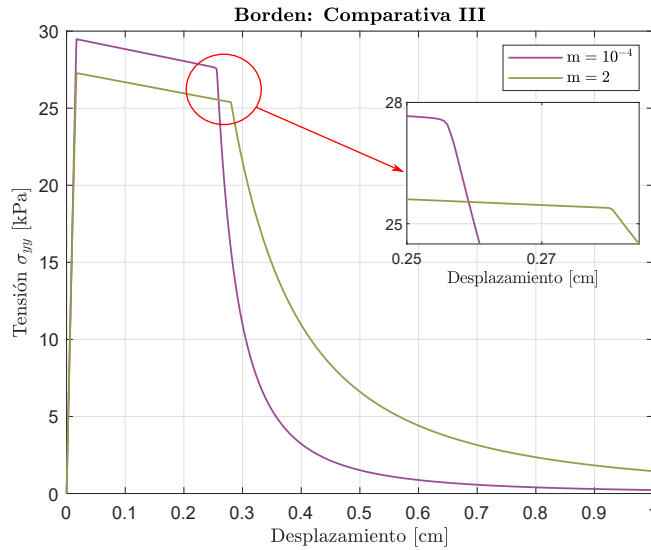


Figura 3.7 Comparativa del empleo de $m = 10^{-4}$ (Borden et al.) con $m = 2$ ($g(\vartheta)$ cuadrática+AT-2).

■ Análisis del parámetro W_0 :

Como refuerzo del primer análisis realizado en esta sección, en la Figura 3.8 se demuestra que la metodología de Borden et al. no necesita de *threshold* para desarrollar una fase sin daño previa. También se denota el crecimiento de la variable de daño ϑ hasta un valor cercano a 1, aunque nos encontremos ante un caso homogéneo. Este hecho indica que este tipo de metodología desarrolla un fuerte crecimiento del daño una vez tiene comienzo.

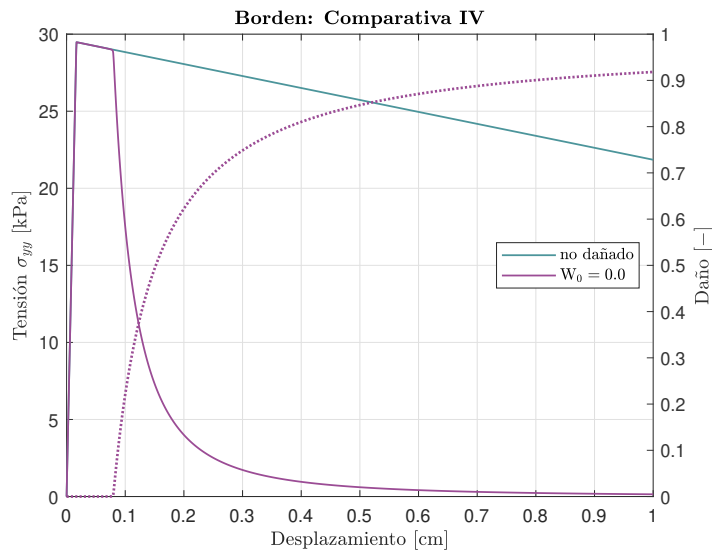


Figura 3.8 Resultados de las curvas de comportamiento (línea continua) y evolución del daño (línea discontinua) para la comparativa de Borden et al. sin *threshold* y el caso no dañado.

En la Figura 3.9 se ilustra una comparativa del valor del *threshold* para distintos casos. Como era de esperar, a mayor valor del *threshold* más se retrasa el inicio de la fase de daño en el elemento.

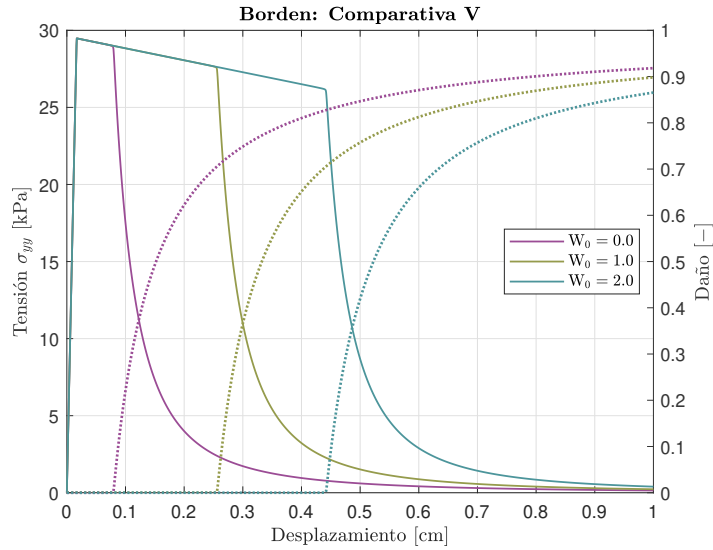


Figura 3.9 Resultados de las curvas de comportamiento (línea continua) y evolución del daño (línea discontinua) para la comparativa de distintos valores de *threshold*.

▼ Metodología de Miehe et al.:

■ Análisis del parámetro ω_c :

En la metodología de Miehe et al. se emplea el parámetro ω_c para establecer la energía crítica desencadenante del proceso de daño (similar a G_c) y establecer un *threshold*, tal y como se ilustró en (3.11). A través de la Figura 3.10 se observa como el parámetro ω_c establece una fase previa al daño, ajustable a través de su valor. En contraste con la metodología de Borden, se denota la caída más suave, donde la variable de daño \bar{d} alcanza aproximadamente un valor de 0.8. Más adelante se verá que la forma de la caída se puede ajustar gracias al parámetro ξ .

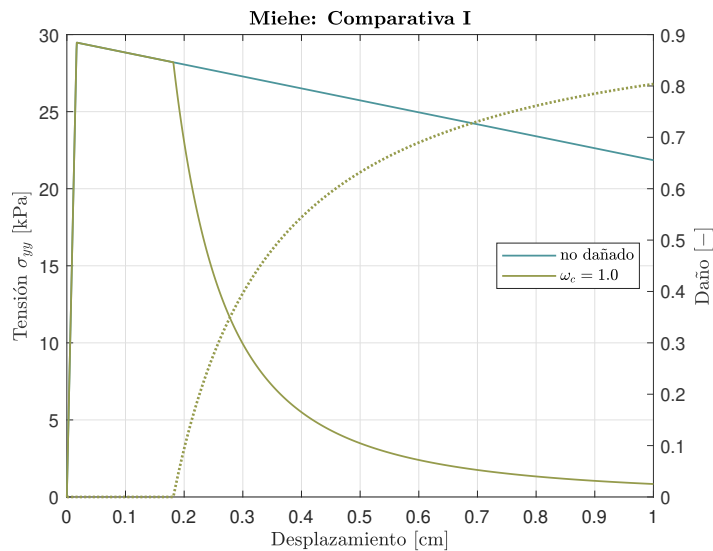


Figura 3.10 Resultados de las curvas de comportamiento (línea continua) y evolución del daño (línea discontinua) para la comparativa de Miehe et al. con $\omega_c = 1.0$ y el caso no dañado.

De forma análoga a la metodología de Borden et al., en la Figura 3.11 se comprueba el efecto del crecimiento de la energía crítica ω_c . A mayor valor de este parámetro, mayor es la energía necesaria para desencadenar la etapa de daño.

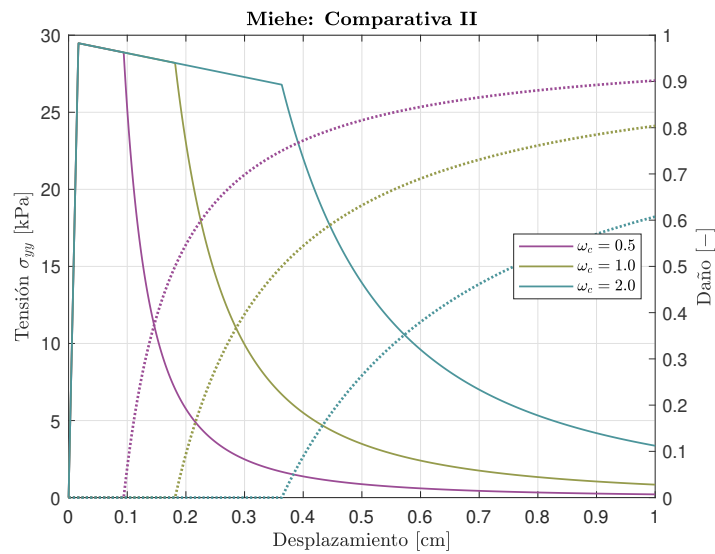


Figura 3.11 Resultados de las curvas de comportamiento (línea continua) y evolución del daño (línea discontinua) para la comparativa de distintos valores de ω_c .

■ Análisis del parámetro ξ :

Por último, en la Figura 3.12 se ilustran las diferentes formas de caída propias de la fase post-crítica debido al parámetro ξ . A medida que aumenta el valor de este parámetro la pendiente va creciendo, asemejándose a una fase de daño sin mucho recorrido en deformaciones.

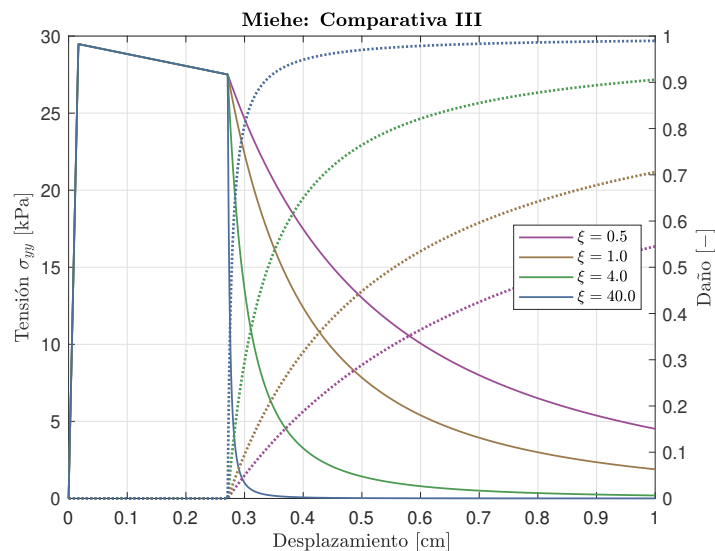


Figura 3.12 Resultados de las curvas de comportamiento (línea continua) y evolución del daño (línea discontinua) para la comparativa de distintos valores de ξ .

4 Conclusión

En el presente trabajo se ha realizado un estudio en profundidad de la mecánica de la fractura en el contexto del comportamiento dúctil, que ha derivado en la aplicación de leyes no lineales del material a partir de la modelización de la plasticidad con posibilidad de ser de carácter asociativa o no asociativa.

4.1 Conclusiones

En esta sección se describe los desarrollos llevados a cabo en cada capítulo de este trabajo:

- ▼ En el primer capítulo, a modo de introducción, se ha realizado una revisión del estado del arte de la mecánica de la fractura y la plasticidad. En el apartado de la mecánica de la fractura, se ha descrito el comportamiento tanto frágil como dúctil en materiales, desde una perspectiva de la mecánica computacional a través de metodologías de tipo variacional como es el PFAF. Mediante esta metodología, se ha podido establecer la versión regularizada del modelo por el cual se obtienen los algoritmos a emplear para la resolución del problema. Centrándonos en el comportamiento dúctil, se han dispuesto las herramientas y conocimientos necesarios para desarrollar la labor de este trabajo.

Por otro lado, en el apartado de plasticidad, se han descrito los fundamentos y desarrollos necesarios para el empleo de técnicas como el *Return Mapping* para la actualización del estado tensional y la matriz de comportamiento elastoplástico consistente. De forma particular, con miras al próximo capítulo, se ha definido el Modelo de Mohr-Coulomb, con base en [6].

- ▼ En el segundo capítulo, se ha desarrollado el modelo computacional de la plasticidad a través de la creación de una subrutina UMAT utilizando el programa de elementos finitos ABAQUS. Para demostrar la eficacia y validez del modelo, se han desarrollado un par de ejemplos de aplicación.
- ▼ En el tercer capítulo, se ha mostrado la capacidad de varias metodologías descritas en el primer capítulo empleando el modelo computacional desarrollado. En este caso, el carácter asociativo o no asociativo de la plasticidad viene dada por una aplicación sencilla del modelo de Mohr-Coulomb.

Gracias al problema planteado en este capítulo, se ha podido comprobar como los parámetros de cada metodología influyen en la solución. Con este conocimiento se podría trabajar con el ajuste de resultados experimentales. Sin embargo, cabe destacar que detrás de cada metodología y de la obtención del valor de cada parámetro debería existir un trasfondo físico que le aporte rigor científico y experimental a la modelización efectuada.

Finalmente, se denota la versatilidad del modelo computacional para incluir otro tipo de leyes de comportamiento distintas a través del desarrollo de UMAT específicas, que pueden acoplarse fácilmente al entorno de la UEL implementado en ABAQUS. Además, una vez verificado los resultados para un elemento, los problemas planteados pueden asemejarse a geometrías y condiciones más realistas.

4.2 Líneas de investigación futuras

En base a los conocimientos adquiridos con la realización de este trabajo, como líneas de investigación se proponen:

- ▼ El desarrollo de modelos de fractura acoplados con modelos de plasticidad distintos al de Mohr-Coulomb. Como se ha comentado anteriormente, es fácilmente acoplable el uso de otros modelos de plasticidad, como puede ser el de Hoek-Brown a macizos rocosos, mediante la implementación de subrutinas UMAT específicas, que se conecten con el entorno UEL desarrollado. En este sentido es interesante el modelo de plasticidad aplicado a materiales friccionales y grandes deformaciones desarrollado en [60].
- ▼ La implementación de la mecánica del medio parcialmente saturado. Para poder realizar un estudio más exhaustivo y profundo de materiales como las arcillas, es necesario modelar el comportamiento ante variables tan importantes como la succión o la humedad. Mediante la implementación del Modelo de Barcelona (BBM) [61], se propone el inicio de una línea de investigación cuyo propósito es interrelacionar este campo con los ya estudiados de fractura y plasticidad, tal y como se ilustra en la Figura 4.1.

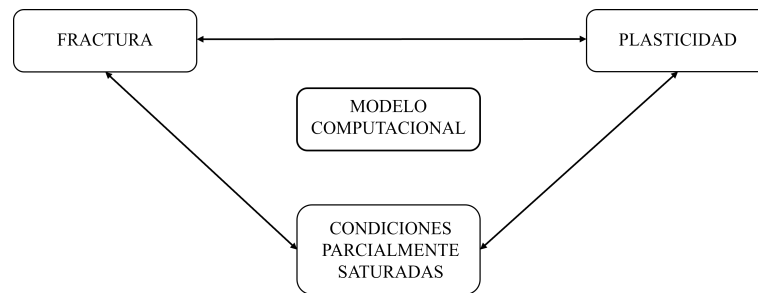


Figura 4.1 Esquema representativo de la futura línea de investigación.

En este trabajo se ha trabajado en la interrelación entre la fractura y la plasticidad, siendo el siguiente paso establecer las relaciones restantes.

- ▼ Aplicación del modelo planteado a contrastes experimentales y entornos prácticos. En este trabajo se han aplicado únicamente ejemplos teóricos y de índole cualitativo. Por tanto, un buen modo de darle utilidad y mayor validez al modelo sería mediante la aplicación del mismo a casos más realistas.

Índice de Figuras

1.1	Diferencias entre un material dúctil y frágil	3
1.2	Tipos de comportamiento en modelización computacional (extraído de [12])	4
1.3	Definición de las tensiones σ_d y σ_p a través de la curva de comportamiento	5
1.4	Situación de grieta discreta y grieta regularizada según PFAF	5
1.5	Superficie de plastificación de Mohr-Coulomb en el espacio de tensiones principales	16
1.6	Comparación de la forma de superficie de plastificación en el plano desviador	17
1.7	Casística de vectores de flujo para el Modelo Mohr-Coulomb (extraído de [6])	18
1.8	Diagrama de flujo para la obtención del vector de tensiones para un paso de tiempo dado usando el algoritmo de <i>Return Mapping</i> (extraído de [6])	20
2.1	Ejemplos de leyes de endurecimiento para la cohesión $c(\bar{\epsilon}^p)$	24
2.2	Esquema de aplicación del <i>Return Mapping</i> (extraído de [6])	28
2.3	Esquema del modelo	43
2.4	Curvas de comportamiento para cada tipo de ley de endurecimiento	44
2.5	Esquema del problema	45
2.6	Mecanismo de colapso de Prandtl & Hill, fundamentado en [56]	46
2.7	Mallado propuesto por la documentación de ABAQUS y descripción del modelo utilizado	46
2.8	Mallas adaptativas	47
2.9	Mallas regulares de tamaño constante	48
2.10	Gráficas de comportamiento para mallas regulares de tamaño adaptativo	48
2.11	Gráficas de comportamiento para mallas regulares de tamaño constante	49
2.12	Mapa de deformaciones para el modelo Hyplas	50
2.13	Evolución de la zona plástica	50
3.1	Diagrama de flujo para la obtención de contribuciones al sistema del MEF	51
3.2	Obtención de la energía disipativa plástica a través de suma de áreas para una componente	53
3.3	Curva de comportamiento del caso comparativo para carga uniaxial extraída de [20]	54
3.4	Esquema del modelo	56
3.5	Comparativa del empleo de $m = 10^{-4}$ con el caso no dañado	57
3.6	Comparativa del empleo de $m = 2$ con el caso no dañado	57
3.7	Comparativa del empleo de $m = 10^{-4}$ (Borden et al.) con $m = 2$ ($g(\bar{\sigma})$ cuadrática+AT-2)	58
3.8	Resultados de las curvas de comportamiento (línea continua) y evolución del daño (línea discontinua) para la comparativa de Borden et al. sin <i>threshold</i> y el caso no dañado	58
3.9	Resultados de las curvas de comportamiento (línea continua) y evolución del daño (línea discontinua) para la comparativa de distintos valores de <i>threshold</i>	59
3.10	Resultados de las curvas de comportamiento (línea continua) y evolución del daño (línea discontinua) para la comparativa de Miehe et al. con $\omega_c = 1.0$ y el caso no dañado	59
3.11	Resultados de las curvas de comportamiento (línea continua) y evolución del daño (línea discontinua) para la comparativa de distintos valores de ω_c	60
3.12	Resultados de las curvas de comportamiento (línea continua) y evolución del daño (línea discontinua) para la comparativa de distintos valores de ξ	60

4.1	Esquema representativo de la futura línea de investigación
-----	--

62

Índice de Tablas

1.1	Variables del problema (Extraída de [22])	6
1.2	Comparativa de modelos usando la formulación (1.1)	8
2.1	Parámetros empleados para los modelos	44
2.2	Resultados y cálculo de errores para la carga de colapso	49
3.1	Propiedades y parámetros utilizados para las metodologías de Borden et al. y Miehe et al.	56

Índice de Códigos

2.1	Inicialización subrutina UMAT. Declaración de variables y parámetros del modelo	24
2.2	Inicialización subrutina UMAT. Establecimiento de subrutinas internas y definición de los parámetros del material	27
2.3	Desarrollo subrutina UMAT. Llamadas a subrutinas internas y actualización de los argumentos de salida principales	28
2.4	Inicialización subrutina MCSTUP. Declaración de parámetros y variables	29
2.5	Desarrollo subrutina MCSTUP. Fase de predicción. Cálculo y descomposición espectral de las tensiones de prueba	31
2.6	Desarrollo subrutina MCSTUP. Fase de predicción. Comprobación de la función de plastificación y selección de borde	31
2.7	Desarrollo subrutina MCSTUP. Fase de corrección. Aplicación del <i>one-vector Return Mapping</i> al plano principal	33
2.8	Desarrollo subrutina MCSTUP. Fase de corrección. Aplicación del <i>two-vector Return Mapping</i> al borde apropiado	34
2.9	Desarrollo subrutina MCSTUP. Fase de corrección. Aplicación del <i>multi-vector Return Mapping</i> al vértice	36
2.10	Inicialización subrutina MCCONTANMA. Declaración de parámetros y variables	38
2.11	Desarrollo subrutina MCCONTANMA. Cálculo de la matriz elastoplástica consistente para la fase del borde izquierdo	41

Bibliografía

- [1] S. Teichtmeister, D. Kienle, F. Aldakheel, y M. A. Keip, “Phase field modeling of fracture in anisotropic brittle solids,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 97, 2017.
- [2] “Apuntes de Mecánica de la Fractura,” *Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales, Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras, ETSI, US*, Curso 2019/2020.
- [3] J. Clausen, *Efficient Non-linear Finite Element Implementation of Elasto-Plasticity for Geotechnical Problems : Thesis*. Computational Mechanics. Esbjerg Institute of Technology. Aalborg University Esbjerg, 2007.
- [4] A. A. Griffith, “The phenomena of rupture and flow in solids,” *Masinoventenie*, 1995.
- [5] G. A. Francfort y J. J. Marigo, “Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 46, 1998.
- [6] E. A. D. S. Neto, D. Perić, y D. R. Owen, *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*, 2008.
- [7] J. Lubliner, “Plasticity Theory: Revised Edition,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 59, 2006.
- [8] R. I. Borja, *Plasticity Modeling and Computation*, 2013.
- [9] E. Hoek, C. Carranza, y B. Corkum, “Hoek-brown failure criterion – 2002 edition,” *Narms-Tac*, 2002.
- [10] E. Hoek y E. T. Brown, “The Hoek–Brown failure criterion and GSI – 2018 edition,” *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, vol. 11, 2019.
- [11] J. Clausen y L. Damkilde, “An exact implementation of the Hoek-Brown criterion for elasto-plastic finite element calculations,” *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, vol. 45, 2008.
- [12] R. Alessi, J. J. Marigo, C. Maurini, y S. Vidoli, “Coupling damage and plasticity for a phase-field regularisation of brittle, cohesive and ductile fracture: One-dimensional examples,” *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 149, 2018.
- [13] C. Miehe, M. Hofacker, y F. Welschinger, “A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, 2010.
- [14] M. A. Msekh, J. M. Sargado, M. Jamshidian, P. M. Areias, y T. Rabczuk, “Abaqus implementation of phase-field model for brittle fracture,” *Computational Materials Science*, vol. 96, pp. 472–484, 1 2015.
- [15] M. Paggi y J. Reinoso, “Revisiting the problem of a crack impinging on an interface: A modeling framework for the interaction between the phase field approach for brittle fracture and the interface cohesive zone model,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 321, 2017.
- [16] F. P. Duda, A. Ciarbonetti, P. J. Sánchez, y A. E. Huespe, “A phase-field/gradient damage model for brittle fracture in elastic-plastic solids,” *International Journal of Plasticity*, vol. 65, 2014.

- [17] M. Ambati, T. Gerasimov, y L. D. Lorenzis, “Phase-field modeling of ductile fracture,” *Computational Mechanics*, vol. 55, pp. 1017–1040, 5 2015.
- [18] C. Kuhn, T. Noll, y R. Müller, “On phase field modeling of ductile fracture,” *GAMM Mitteilungen*, vol. 39, 2016.
- [19] C. Miehe, S. Teichtmeister, y F. Aldakheel, “Phase-field modelling of ductile fracture: A variational gradient-extended plasticity-damage theory and its micromorphic regularization,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 374, 2016.
- [20] M. J. Borden, T. J. Hughes, C. M. Landis, A. Anvari, y I. J. Lee, “A phase-field formulation for fracture in ductile materials: Finite deformation balance law derivation, plastic degradation, and stress triaxiality effects,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 312, 2016.
- [21] C. Miehe, F. Welschinger, y M. Hofacker, “Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: Variational principles and multi-field FE implementations,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 83, 2010.
- [22] R. Alessi, M. Ambati, T. Gerasimov, S. Vidoli, y L. D. Lorenzis, “Comparison of phase-field models of fracture coupled with plasticity,” *Computational Methods in Applied Sciences*, vol. 46, 2018.
- [23] G. A. Francfort, B. Bourdin, y J. J. Marigo, “The variational approach to fracture,” *Journal of Elasticity*, vol. 91, pp. 5–148, 4 2008.
- [24] C. Miehe, L. M. Schänzel, y H. Ulmer, “Phase field modeling of fracture in multi-physics problems. Part I. Balance of crack surface and failure criteria for brittle crack propagation in thermo-elastic solids,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 294, 2015.
- [25] C. Miehe, M. Hofacker, L. M. Schänzel, y F. Aldakheel, “Phase field modeling of fracture in multi-physics problems. Part II. Coupled brittle-to-ductile failure criteria and crack propagation in thermo-elastic-plastic solids,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 294, 2015.
- [26] P. Rodriguez, J. Ulloa, C. Samaniego, y E. Samaniego, “A variational approach to the phase field modeling of brittle and ductile fracture,” *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 144, 2018.
- [27] C. Li, J. Fang, C. Wu, G. Sun, G. Steven, y Q. Li, “Phase field fracture in elasto-plastic solids: Incorporating phenomenological failure criteria for ductile materials,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 391, p. 114580, 2022.
- [28] B. Yin y M. Kaliske, “A ductile phase-field model based on degrading the fracture toughness: Theory and implementation at small strain,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 366, 2020.
- [29] J. Y. Wu, V. P. Nguyen, H. Zhou, y Y. Huang, “A variationally consistent phase-field anisotropic damage model for fracture,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 358, 2020.
- [30] M. Jirásek, “Nonlocal models for damage and fracture: Comparison of approaches,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35, 1998.
- [31] J. Lemaitre, “A continuous damage mechanics model for ductile fracture,” *Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME*, vol. 107, 1985.
- [32] J. Lemaitre y R. Desmorat, *Engineering damage mechanics: Ductile, creep, fatigue and brittle failures*, 2005.
- [33] G. T. Camacho y M. Ortiz, “Computational modelling of impact damage in brittle materials,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33, 1996.
- [34] M. Jirásek, “Comparative study on finite elements with embedded discontinuities,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 188, 2000.
- [35] N. Sukumar, N. Moës, B. Moran, y T. Belytschko, “Extended finite element method for three-dimensional crack modelling,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, 2000.

- [36] M. Stolarska, D. L. Chopp, N. Mos, y T. Belytschko, "Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 51, 2001.
- [37] E. Béchet, H. Minnebo, N. Moës, y B. Burgardt, "Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, 2005.
- [38] J. Oliver, A. E. Huespe, y P. J. Sánchez, "A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities: E-FEM vs X-FEM," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, 2006.
- [39] T. Yang, K. M. Liechti, y R. Huang, "A multiscale cohesive zone model for rate-dependent fracture of interfaces," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 145, 2020.
- [40] N. Chandra, H. Li, C. Shet, y H. Ghonem, "Some issues in the application of cohesive zone models for metal-ceramic interfaces," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, 2002.
- [41] D. Xie y A. M. Waas, "Discrete cohesive zone model for mixed-mode fracture using finite element analysis," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 73, 2006.
- [42] H. D. Espinosa, P. D. Zavattieri, y S. K. Dwivedi, "A finite deformation continuum/discrete model for the description of fragmentation and damage in brittle materials," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 46, 1998.
- [43] J. Reinoso y M. Paggi, "A consistent interface element formulation for geometrical and material nonlinearities," *Computational Mechanics*, vol. 54, 2014.
- [44] M. Paggi y J. Reinoso, "An anisotropic large displacement cohesive zone model for fibrillar and crazing interfaces," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 69-70, 2015.
- [45] R. de Borst y C. V. Verhoosel, "Gradient damage vs phase-field approaches for fracture: Similarities and differences," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 312, 2016.
- [46] J. Ulloa, J. Wambacq, R. Alessi, E. Samaniego, G. Degrande, y S. François, "A micromechanics-based variational phase-field model for fracture in geomaterials with brittle-tensile and compressive-ductile behavior," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 159, 2022.
- [47] J. Reinoso, "Análisis numérico de procesos de fractura en rocas heterogéneas mediante el uso combinado de la metodología phase field y grietas de interfase," *Trabajo Fin de Máster, Universidad de Sevilla*, 2020.
- [48] J. Fang, C. Wu, J. Li, Q. Liu, C. Wu, G. Sun, y Q. Li, "Phase field fracture in elasto-plastic solids: Variational formulation for multi-surface plasticity and effects of plastic yield surfaces and hardening," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 156, 2019.
- [49] R. Alessi, J. J. Marigo, y S. Vidoli, "Gradient damage models coupled with plasticity: Variational formulation and main properties," *Mechanics of Materials*, vol. 80, 2015.
- [50] J. Fang, C. Wu, T. Rabczuk, C. Wu, C. Ma, G. Sun, y Q. Li, "Phase field fracture in elasto-plastic solids: Abaqus implementation and case studies," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 103, 2019.
- [51] R. Picón, "Teoría de la Plasticidad," *Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales, Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras, ETSI, US, Curso 2019/2020*.
- [52] P. Menetrey y K. J. Willam, "Triaxial failure criterion for concrete and its generalization," *ACI Structural Journal*, vol. 92, 1995.
- [53] W. F. Chen, *Limit Analysis and Soil Plasticity*, 1975.
- [54] L. Prandtl, "Hauptaufsätze: Über die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden," *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 1, 1921.

- [55] R. Hill, "The plastic yielding of notched bars under tension," *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 2, 1949.
- [56] "Guía de Cimentaciones en Obras de Carretera," *Ministerio de Fomento, Gobierno de España*, 2009.
- [57] W. F. Chen, A. F. Saleeb, y G. J. Dvorak, "Constitutive Equations for Engineering Materials, Volume I: Elasticity and Modeling," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, 1983.
- [58] K. Terzaghi, *Theoretical Soil Mechanics*, 1943.
- [59] N. P. Dijk, J. J. Espadas-Escalante, y P. Isaksson, "Strain energy density decompositions in phase-field fracture theories for orthotropy and anisotropy," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 196-197, 2020.
- [60] D. Kienle, F. Aldakheel, y M. A. Keip, "A finite-strain phase-field approach to ductile failure of frictional materials," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 172-173, 2019.
- [61] E. E. Alonso, A. Gens, y A. Josa, "A constitutive model for partially saturated soils," *Geotechnique*, vol. 40, 1990.