

# Determinación de la Relación Momento-Curvatura en Vigas de Hormigón Armado Reforzadas con Fibra de Carbono

Fernando Medina Encina, Mario Solís Muñiz, Héctor Cifuentes Bulté

*Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla. Camino de los Descubrimientos s/n.  
954487293 msolis@us.es*

## Resumen

En los últimos años, el aumento de los refuerzos de elementos estructurales de hormigón armado con fibra de carbono ha sido considerable. La fisuración en este tipo de elementos reforzados, se observa que es diferente a la fisuración que presentaría el mismo elemento sin reforzar. En el caso de una viga reforzada, las fisuras son menos profundas y más repartidas a lo largo de la longitud de la viga. En el presente trabajo se exponen los resultados de un modelo analítico, de aplicación a vigas de hormigón armado reforzadas con CFRP, para la obtención de la relación momento-curvatura y por tanto del estado de fisuración. Dicho modelo se valida comparándolo con los resultados experimentales obtenidos y con su modelo análogo para vigas de hormigón armado sin refuerzo. Finalmente se intenta aplicar este modelo para la obtención de la flecha en este tipo de vigas reforzadas.

**Palabras Clave:** CFRP, Fisuración, Refuerzo de Vigas de Hormigón Armado, Momento-Curvatura.

## Abstract

A considerable increase in the use of reinforced concrete structural elements strengthened with externally bonded carbon fiber plates has occurred over the past few years. Cracking for this type of strengthened element, unlike the regular RC beam, is, in this case, observed to be of a smaller depth and is distributed along the length of the beam.

This study shows the results of an analytical model for RC beams strengthened with CFRP plates, in order to obtain the moment-curvature diagram, and hence the cracking point. The model is validated by comparing it with the experimental results obtained and its analog model for regular RC beams. Eventually, the model is applied to obtain deflection for this type of strengthened elements.

**Keywords:** CFRP, Cracking, Strengthened RC Beams, Moment-Curvature.

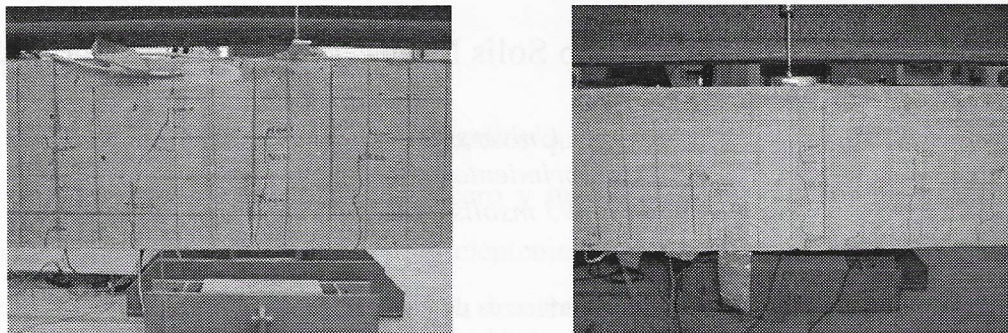
## 1. Introducción

La técnica de refuerzo de elementos estructurales mediante fibra de carbono se ha desarrollado a principios de la década pasada [1] y está siendo objeto de numerosas aplicaciones e investigaciones tanto numéricas como experimentales [2-4].

Todos estos trabajos han puesto de manifiesto la diferencia en la fisuración producida en este tipo de elementos con respecto a los mismos elementos de hormigón armado convencional. En una viga de hormigón armado reforzada con CFRP, se observa que las fisuras son menos profundas y más repartidas a lo largo de la longitud de la viga. Esto



se puede observar en las siguientes fotografías, donde la viga de hormigón armado reforzada, aun teniendo un estado de carga mayor, presenta fisuras menos profundas.



*Figura 1. Estado de fisuración de una viga. A la izquierda viga de hormigón armado convencional y a la derecha reforzada con CFRP.*

Debido a esta diferencia de fisuración se comprueba que la inercia a lo largo de la viga, después del inicio de la fisuración del hormigón, es diferente a la que tendría una viga de hormigón armado convencional. La relación momento-curvatura está relacionada con la inercia de la sección para un determinado estado de carga, por lo que una variación en la relación momento-curvatura pondría de manifiesto una variación de rigidez correspondiente.

La inercia efectiva de una viga de hormigón armado se puede interpolar según la fórmula de Branson [5], entre el estado fisurado y el estado sin fisurar para cada momento flector al que se encuentre sometida la viga, sin embargo no se recoge la metodología a seguir para el caso de una viga de hormigón armado reforzada con CFRP.

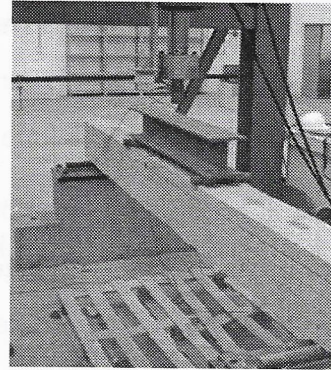
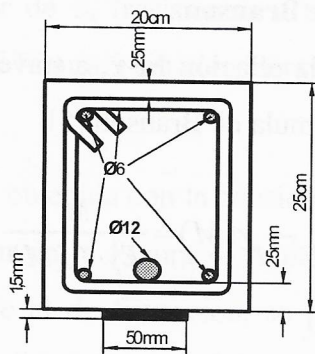
En este trabajo se presenta un modelo analítico que permita obtener la relación momento-curvatura, y por tanto la consideración de la inercia, para las vigas reforzadas. Este modelo se valida con los resultados obtenidos para el caso de vigas de hormigón armado sin reforzar y comparándolo con los resultados experimentales de ensayos realizados en el Laboratorio de la Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla.

## 2. Ensayos

Los ensayos se han realizado sobre cuatro vigas de hormigón armado reforzadas con fibra de carbono y sobre una viga de control de hormigón armado convencional. Dichos ensayos han consistido en un ensayo de flexión en 4 puntos en un pórtico de carga (Figura 2). Las vigas presentan una luz entre apoyos de 2.60 m y las cargas están



colocadas a  $L/3$  de dichos extremos. Las dimensiones de la sección de las vigas son de 20x25 cm, con un armado longitudinal inferior de  $2\Phi 6 + 1\Phi 12$ , un armado longitudinal superior de  $2\Phi 6$  y un armado transversal de  $\Phi 6$  c/20cm.



**Figura 2.** Sección de la viga. Fotografía mostrando la configuración del ensayo.

Las propiedades mecánicas de los materiales se han obtenido mediante los ensayos pertinentes, en el caso del acero se ha realizado un ensayo a tracción, obteniendo un límite elástico de 440 MPa y una resistencia última a tracción de 500 MPa. Para el hormigón se han obtenido probetas cilíndricas normalizadas y además probetas testigo de las vigas ensayadas, de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura. El refuerzo colocado ha sido una lámina de fibra de carbono de 2.6 m de longitud, 50 mm de ancho y 1.2 mm de espesor, con un módulo de elasticidad de 165000 MPa [10].

La aplicación de la carga se ha realizado a una velocidad de 50 kp/s, mediante ciclos estáticos de carga y descarga aumentando la fuerza aplicada en 500 kp/ciclo hasta llegar a la rotura, observándose para cada ciclo los efectos producidos.

La instrumentación del ensayo ha consistido en la medida de la flecha en el centro del vano de todas las vigas y bajo el punto de aplicación de la carga en tres de ellas. Además se han tomado medidas de las deformaciones en el hormigón, acero y laminado de fibra de carbono para dos secciones distintas, pudiendo así obtener dos curvaturas para cada sección que ha sido medida.

### 3. Modelos Analíticos

Se han analizado varios modelos con el objetivo de representar de manera analítica las curvas  $M-\chi$  obtenidas experimentalmente.

Inicialmente se analizó la viga de hormigón armado convencional para posteriormente aplicar el modelo considerado más preciso a las vigas reforzadas con CFRP.

### 3.1. Modelo Considerando la Interpolación de Branson

En este modelo se contempla la obtención de la relación M- $\chi$ , a través de la relación entre el momento y la inercia que propone la fórmula de Branson [5].

$$I_e(M) = \left(\frac{M_{fis}}{M}\right)^3 \cdot I_H + \left[1 - \left(\frac{M_{fis}}{M}\right)^3\right] \cdot I_f \rightarrow \chi(M) = \frac{M}{E_c \cdot I_e(M)} \quad (1.1)$$

### 3.2. Modelo Considerando la Integración de Tensiones sin Resistencia a Tracción del Hormigón

Se propone otro método de obtención de la relación M- $\chi$  a través de la integración de las tensiones en la sección [5,6]. Para ello se consideran las leyes de comportamiento de los materiales indicadas en la Figura 3, sin considerar en el hormigón la parte de tracción. Con estas leyes de comportamiento, se procede a la integración de las tensiones y la resolución de las ecuaciones de equilibrio en la sección, obteniendo la deformación en función de la fibra neutra y de la curvatura de la sección. Como se puede observar para el hormigón se ha considerado nula su capacidad de resistencia a tracción.

$$\int_0^h \sigma_c(\varepsilon_c(y, x, \chi)) \cdot b \cdot dy + A_{s1} \cdot \sigma_s(\varepsilon_{s1}(x, \chi)) + A_{s2} \cdot \sigma_s(\varepsilon_{s2}(x, \chi)) = 0 \quad (1.2)$$

$$\int_0^h \sigma_c(\varepsilon_c(y, x, \chi)) \cdot b \cdot y \cdot dy + A_{s1} \cdot \sigma_s(\varepsilon_{s1}(x, \chi)) \cdot d + A_{s2} \cdot \sigma_s(\varepsilon_{s2}(x, \chi)) \cdot r = M$$

Mediante la resolución del sistema de ecuaciones (1.2) se obtiene una relación M- $\chi$ , que se representa gráficamente en la Figura 4. En este caso se obtiene una curva que da unos valores correspondientes a un modelo muy flexible, en comparación con los resultados reales.

### 3.3. Modelo Considerando la Integración de Tensiones con Resistencia a la Tracción del Hormigón. Distribución Lineal



Este modelo es análogo al anterior, con la salvedad de que se considera una resistencia a la tracción por parte del hormigón. A partir de deformación nula, se considera que al aumentar la deformación a tracción del hormigón, este presenta una ley  $\sigma$ - $\epsilon$  lineal hasta alcanzar el valor de  $f_{ct}$  (resistencia a tracción del hormigón) obtenida según [5,6,8]. Corresponde a la Figura 3 sin considerar la rama descendente de la zona de tracción del hormigón.

La relación  $M$ - $\chi$  obtenida con la consideración de resistencia a la tracción del hormigón se puede apreciar en la Figura 4. A partir de un valor del momento, correspondiente aproximadamente al de fisuración, se produce una caída de la resistencia que no se produce en la realidad. Esto se debe a que se está considerando en las ecuaciones una sección fisurada, no representativa de la totalidad de la viga.

### 3.4. Modelo Considerando la Integración de Tensiones con Resistencia a la Tracción del Hormigón según Bažant

En este caso, se supone que la ley de comportamiento del hormigón cuando este se encuentra sometido a tracción, sigue la ley de Bažant, considerando una cierta resistencia a tracción disminuida (*softening tension*) a partir del valor  $f_{ct}$  [7,9]:

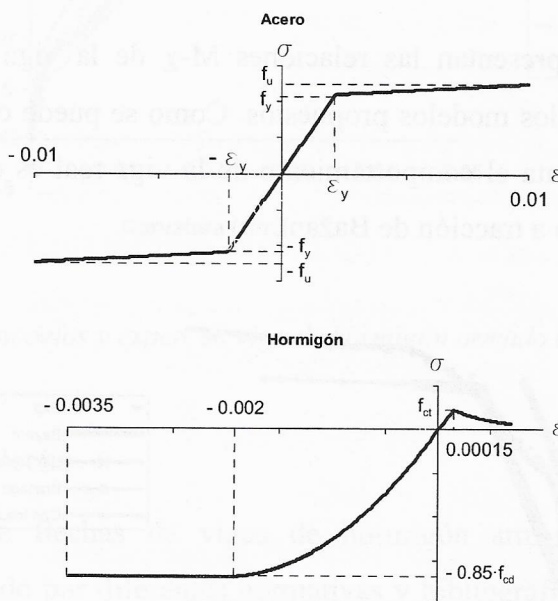


Figura 3. Ley de comportamiento de los materiales. Sup.acero e inf. hormigón.

La relación  $M$ - $\chi$  obtenida mediante la consideración de este modelo, corrige la caída de resistencia que se produce en el modelo anterior.

En la Figura 4 se representan las relaciones  $M-\chi$  obtenidas con cada uno de los modelos analíticos descritos anteriormente.

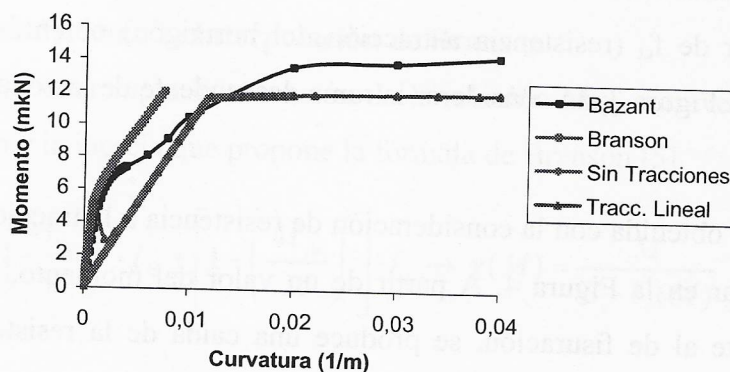


Figura 4. Relación  $M-\chi$  según el modelo con resistencia a tracción s/ Bazant.

#### 4. Resultados

##### 4.1. Comparación de Resultados para el Caso de la Viga de Control

Una vez obtenidos los modelos, estos se comparan con las relaciones  $M-\chi$  obtenidas experimentalmente en las vigas. En principio, se valida una de estas teorías para la viga de hormigón armado convencional, para luego extenderlo a las vigas reforzadas con CFRP.

A continuación se representan las relaciones  $M-\chi$  de la viga de hormigón armado convencional frente a los modelos propuestos. Como se puede observar el modelo que más fielmente representa el comportamiento de la viga real es el correspondiente a la ley de comportamiento a tracción de Bazant.

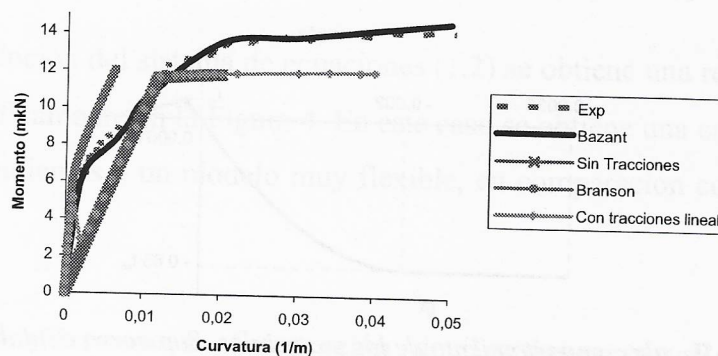


Figura 5.  $M-\chi$  según modelos y experimental en viga de hormigón armado convencional.

### 4.2. Comparación de Resultados para el Caso de las Vigas Reforzadas con CFRP

El modelo que más se ajusta para la viga de control es el que tiene en cuenta la distribución de tensiones de tracción según Bažant. Por ello, es el empleado en el caso de vigas reforzadas con CFRP. En este caso, para aplicarlo a este tipo de vigas, habrá que añadirles a las ecuaciones (1.2) los términos correspondientes a la lámina de fibra de carbono.

$$\begin{aligned}
 N_c(y, x, \chi) + N_{s1}(x, \chi) + N_{s2}(x, \chi) + A_r \cdot \sigma_r(\varepsilon_r(x, \chi)) &= 0 \\
 M_c(y, x, \chi) + N_{s1}(x, \chi) \cdot d + N_{s2}(x, \chi) \cdot r + A_r \cdot \sigma_r(\varepsilon_r(x, \chi)) \cdot d_r &= M
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

En la figura 6 se representa la relación M- $\chi$  obtenida según el modelo propuesto para el caso de la viga reforzada, frente a los datos obtenidos experimentalmente para las cuatro vigas. Se puede observar como el modelo se ajusta bien al comportamiento experimental de las vigas ensayadas.

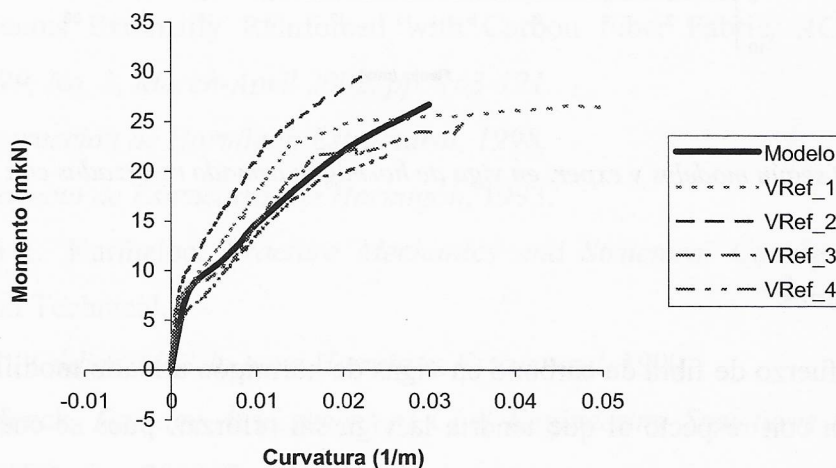


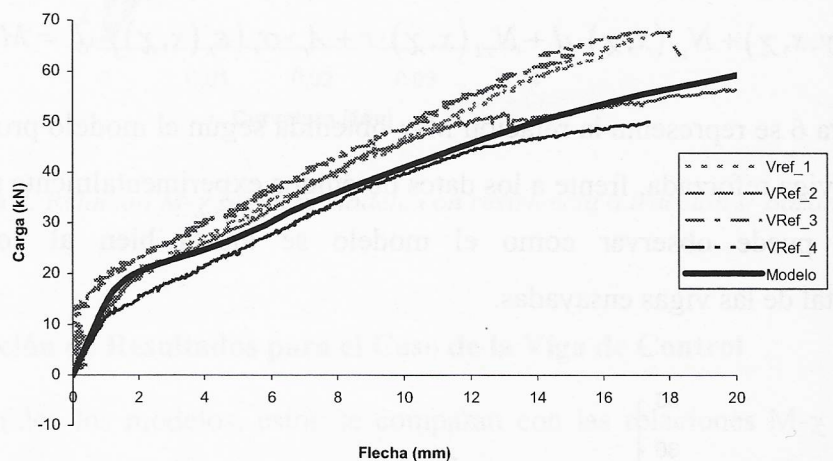
Figura 6. M- $\chi$  según modelos y exper. en viga de hormigón armado reforzadas con CFRP.

### 4.3. Relación Carga-Flecha

Si bien el cálculo de flechas de vigas de hormigón armado convencional está ampliamente considerado por diferentes normativas y bibliografía, no es así en el caso de vigas reforzadas con CFRP. Por ello, se propone el cálculo de la flecha con la relación M- $\chi$  obtenida mediante el modelo propuesto. De esta forma, se obtiene la rigidez a flexión de la viga (EI) a considerar en las fórmulas de cálculo de flecha.



En las curvas de la Figura 7 se puede observar como la variación de la flecha con carga, para una viga reforzada, tiene una forma similar entre el ensayo experimental y método numérico, siendo la flecha numérica superior a la obtenida experimentalmente por tanto del lado de la seguridad. Este aumento en el modelo numérico puede atribuirse a la hipótesis aproximada de considerar sección constante para la obtención de la misma.



**Figura 7.** *P-f según modelos y exper. en viga de hormigón armado reforzadas con CFRP.*

## 6. Conclusiones

El uso de refuerzo de fibra de carbono en vigas de hormigón armado modifica el estado de fisuración con respecto al que tendría la viga sin reforzar, pues se cuenta con una contribución a la resistencia adicional debida a la fibra de carbono. Esto se pone de manifiesto con las leyes  $M-\chi$  obtenidas anteriormente, resultando una flecha para este tipo de vigas inferior a la que tendría la viga sin reforzar.

Para un momento flector de 7 mkN (aproximadamente la mitad del momento último de la viga sin reforzar), según resultados experimentales se produce un aumento aproximado de la relación  $M-\chi$  del 80% en viga con refuerzo con respecto a la viga sin reforzar. Mediante los modelos numéricos el aumento obtenido es del 92%.

Para una carga de 30 kN (aproximadamente la mitad de la carga última de la viga reforzada) el valor representativo de la flecha experimental es de 5.2 mm, lo que representa un 54% de la flecha correspondiente a la viga sin refuerzo. Mediante



modelo teórico la flecha obtenida es de 5.9 mm (60% de la flecha teórica de la viga de control), lo cual supone un buen ajuste, del lado de la seguridad, a los valores experimentales.

## 7. Bibliografía

1. Ritchie, P. A.; Thomas, David A.; Lu, Le-Wu; y Connelly, G. M.; External Reinforcement of Concrete Beams Using Fiber Reinforced Plastics, *ACI Structural Journal*, V. 88, No. 4, July-August 1991, pp. 490-500.
2. Malek, A. M.; y Saadatmanesh, H.; Analytical Study of R/C Beams Strengthened with Web-Bonded CFRP Plates or Fabrics, *ACI Structural Journal*, V. 95, No. 3, May-June 1998, pp. 343-352.
3. Arduini, M.; y Nanni, A.; Parametric Study of Beams with Externally Bonded FRP Reinforcement, *ACI Structural Journal*, V. 94, No. 5, Sept-Oct 1997, pp. 493-501.
4. Bencardino, F., Spadea, G.; y Swamy, R. N.; Strength and Ductility of Reinforced Concrete Beams Externally Reinforced with Carbon Fiber Fabric, *ACI Structural Journal*, V. 99, No. 2, March-April 2002, pp. 163-171.
5. EHE, *Instrucción de Hormigón Estructural*, 1998.
6. EC2, *Proyecto de Estructuras de Hormigón*, 1993.
7. Bhushan L. Karihaloo, *Fracture Mechanics and Structural Concrete*, Longman Scientific and Technical.
8. CEB-FIP, *Código Modelo para Hormigón Estructural*, 1990.
9. Johan Maeck, *Damage Assessment of Civil Engineering Structures by Vibration Monitoring*, Heverlee, 2003. Tesis doctoral.
10. Galvín P, *Estructuras de Hormigón Reforzadas con Fibras de Carbono*, Proyecto Fin de Carrera, Universidad de Sevilla, Diciembre 2002.