

# Núcleos exóticos en el límite de estabilidad



TRABAJO FIN DE MÁSTER

Pedro Punta de la Herrán

Dirigido por

D. José Antonio Lay Valera

D. Antonio M. Moro Muñoz

Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear

Universidad de Sevilla

Noviembre 2020



# Resumen

---

Este trabajo se estudian núcleos exóticos ligeros débilmente ligados. En concreto, se centra en los núcleos  $^{17}\text{C}$ ,  $^{19}\text{C}$  y  $^{11}\text{Be}$ . Se considera un problema de dos cuerpos: el neutrón menos ligado y el resto de nucleones, que forma una estructura compacta llamada *core*. Estos núcleos tienen una desviación importante respecto a la simetría esférica. Suponemos que el neutrón se mueve bajo la acción de un potencial elipsoidal, aplicando el modelo de Nilsson para núcleos deformados. Para el *core* solo se considera un grado de libertad rotacional colectivo.

Mediante la diagonalización del hamiltoniano, se obtienen los niveles energéticos y funciones de onda de los distintos estados para los núcleos considerados. Este proceso se ha realizado utilizando un programa en Fortran, creado desde cero para este trabajo. Utilizando la función de onda obtenida para los núcleos  $^{11}\text{Be}$  y  $^{17}\text{C}$ , se calcula la sección eficaz diferencial para las reacciones  $^{11}\text{Be}(p,d)^{10}\text{Be}$  y  $^{16}\text{C}(d,p)^{17}\text{C}$ . Los resultados obtenidos se comparan con los datos experimentales.



# Índice

---

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Modelo de Nilsson	2
1.2 Excitaciones rotacionales del core	4
1.3 Reacciones de transferencia	6
<b>2. Metodología</b>	<b>7</b>
2.1 Diagonalización en la base THO	7
2.2 Diagonalización de la parte central	9
2.3 Diagonalización de la parte no central	11
2.4 Diagonalización de la parte rotacional	12
2.5 Estados finales	13
2.6 Descripción del continuo	15
2.7 Reacciones de transferencia	17
<b>3. Resultados de los cálculos de estructura</b>	<b>21</b>
3.1 Aplicación al núcleo $^{17}\text{C}$	21
3.2 Aplicación al núcleo $^{19}\text{C}$	27
3.3 Aplicación al núcleo $^{11}\text{Be}$	32
<b>4. Aplicación a reacciones de transferencia</b>	<b>39</b>
4.1 $^{11}\text{Be}(p,d)^{10}\text{Be}$	39
4.2 $^{16}\text{C}(d,p)^{17}\text{C}$	41
<b>5. Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>6. Bibliografía</b>	<b>49</b>
<b>Apéndice</b>	<b>51</b>



# 1. Introducción

---

En este trabajo se realiza un estudio de núcleos exóticos en el límite de estabilidad. Los núcleos exóticos son aquellos que tienen una proporción de neutrones y protones significativamente distinta de los núcleos estables más próximos en masa. Debido a esto, sus características son muy distintas a los núcleos del valle de estabilidad. Se estudian en concreto núcleos exóticos ligeros, que son débilmente ligados y decaen por desintegración  $\beta$  con una semivida muy corta. En concreto, los cálculos que se realizan en este trabajo son para  $^{17}\text{C}$ ,  $^{19}\text{C}$  y  $^{11}\text{Be}$ .

Nos centraremos en núcleos con un número par de protones e impar de neutrones, donde estos últimos son los que exceden respecto a la combinación más estable. Para este tipo de núcleos se suele reducir el problema considerando un sistema de dos cuerpos: un neutrón y el resto de nucleones formando una estructura a la que llamamos *core*. Mientras que los nucleones del core están más fuertemente ligados entre sí, el último neutrón está débilmente ligado al resto debido al exceso de neutrones. Por eso, el estudio de reacciones de transferencia de un neutrón, es muy relevante para este tipo de núcleos, reacción que también se tratará en este trabajo.

Los núcleos  $^{19}\text{C}$  y  $^{11}\text{Be}$  son dos ejemplos de los llamados núcleos “halo” de un neutrón. Para este tipo de núcleos el último neutrón está muy débilmente ligado, y su función de onda se extiende lejos del core. De esta extensión proviene la imagen del halo nuclear alrededor del core.

Muchos de los núcleos que se estudian habitualmente, en buena aproximación, poseen simetría esférica, que permite simplificar el problema de estructura suponiendo un potencial central. En los casos que vamos a tratar, hay una desviación importante respecto a la simetría esférica. Esta deformación la vamos a abordar utilizando el modelo de Nilsson [1].

Estos núcleos se han descrito mediante otros modelos, por ejemplo, el de partícula-rotor o partícula-vibrador. Ambos modelos aplican la aproximación de acoplamiento débil, donde se supone que los estados del sistema completo se pueden describir bien como combinación de estados esféricos del neutrón acoplados a estados rotacionales o vibratoriales del core. Esta

no es necesariamente una buena aproximación para sistemas muy deformados. Es interesante comprobar si el modelo de Nilsson, que supone un acoplamiento fuerte, obtiene mejores resultados que otros modelos que suponen un acoplamiento débil.

## 1.1 Modelo de Nilsson

Este modelo, partiendo de un potencial no central entre el nucleón desapareado y el resto del núcleo, obtiene unos estados monoparticulares para el nucleón. El modelo de Nilsson original parte de un potencial de oscilador armónico anisótropo. En nuestro caso, partimos de un potencial central en general ( $V_c(r)$ ) y lo deformamos. La deformación del potencial central se puede expresar cambiando  $r$ , igual para todas las direcciones, por  $r(\theta, \phi)$ , distinto según las coordenadas angulares.

$$V(\vec{r}) = V_c[r(\theta, \phi)]. \quad (1.1)$$

Al escribir  $r(\theta, \phi)$ , consideramos la deformación como una reducción en la escala de longitudes. En muchos casos, se trata la deformación como un desplazamiento de la superficie del core, deformando el parámetro  $R$ :

$$V(\vec{r}) = V_c[r - R(\theta, \phi)]. \quad (1.2)$$

En el artículo de I. Hamamoto [2] se discute que, aunque los resultados numéricos no deben ser muy distintos, considerar la reducción de escala es más razonable. Por esta razón, y con la intención de comparar con los resultados de I. Hamamoto [3,4], seguimos su mismo criterio.

Aproximamos al caso más sencillo, en el que el core posee una forma elipsoidal con simetría axial. Esta aproximación es aceptable para los núcleos que consideramos. Suponiendo que el potencial tiene la misma simetría y que la deformación es pequeña, al hacer un desarrollo multipolar de  $r(\theta, \phi)$ , queda la siguiente expresión:

$$r(\theta, \phi) \approx r(\theta') = r[1 - \beta Y_{20}(\theta')], \quad (1.3)$$



donde  $\beta$  es el llamado parámetro de deformación y  $\theta'$  es el ángulo polar respecto al eje de simetría del core. El parámetro  $\beta$  mide la deformación del core, indicando  $\beta > 0$  una forma prolada y  $\beta < 0$  una forma oblada.

Suponiendo de nuevo que la deformación es pequeña, podemos desarrollar el potencial en primer orden en  $\beta$ :

$$V(\vec{r}') \approx V_c[r(1 - \beta Y_{20}(\theta'))] \approx V_c(r) - r\beta \frac{dV_c(r)}{dr} Y_{20}(\theta'). \quad (1.4)$$

De esta forma podemos separar el potencial en una parte central ( $V_c(r)$ ) y una no central:

$$V_\beta(\vec{r}') = -r\beta \frac{dV_c(r)}{dr} Y_{20}(\theta'). \quad (1.5)$$

Este término no central que hemos obtenido, es compatible con el que se obtiene partiendo del oscilador armónico anisótropo. En el caso de partir de la expresión (1.2) en vez de la (1.1), considerando el desplazamiento de la superficie, se llega a la misma expresión, pero con un factor  $R$  en lugar de  $r$ .

Al hamiltoniano monoparticular se le añade un término de espín-órbita sin deformar, igual que en el modelo de capas convencional. En el modelo original, que parte de un potencial de oscilador armónico, se añade otro término dependiente del momento angular orbital. En nuestro caso no se incluye, debido a que consideramos núcleos ligeros y usamos un potencial central más realista. Siendo  $\mu$  la masa reducida del sistema nucleón-core, el hamiltoniano resulta:

$$H_{sp}(\vec{r}') = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V_c(r) + V_{ls}(r)(\vec{l} \cdot \vec{s}) + V_\beta(\vec{r}'). \quad (1.6)$$

Como consecuencia de la aparición del término no central en el hamiltoniano monoparticular, no se conservan los números cuánticos que habitualmente lo hacen en los estados monoparticulares. Se obtienen estados monoparticulares sin momento angular orbital ( $l$ ) y total ( $j$ ) definidos. Por el contrario, la proyección de  $\vec{j}$  en la dirección del eje de simetría axial,

que llamaremos  $\Omega$ , sí que se conserva. También se conserva la paridad ( $\pi = \pm 1$ ), de la misma forma que en el modelo de capas convencional.

Un estado con proyección  $\Omega$  de  $\vec{j}$ , es análogo a otro con proyección  $-\Omega$  debido a la simetría del sistema. En consecuencia se toma  $\Omega > 0$ , y los niveles energéticos tienen degeneración 2.

Estos niveles se pueden representar en los llamados diagramas de Nilsson [1], donde se muestra el cambio en la energía de los niveles al variar  $\beta$ . En dichos diagramas, los niveles suelen clasificarse con los números  $[N, n_3, \Lambda, \Omega]$ . Como decíamos,  $\Omega$  es constante, pero el resto de números cuánticos que aparecen no lo son, se dice que son asintóticos. Esto se refiere a que, para una deformación grande, estos números podrían considerarse constantes.  $\Lambda$  es la proyección de  $\vec{l}$  en la dirección del eje de simetría, mientras que los dos números restantes vienen del oscilador armónico anisótropo.  $n_3$  es el número cuántico de oscilador en la dirección del eje de simetría axial, y  $N = n_1 + n_2 + n_3$  es el número cuántico de oscilador total. Este último, al igual que en el caso isótropo, será par para estados de paridad positiva e impar para estados de paridad negativa.

Para un core inerte, el hamiltoniano total del núcleo no es más que el monoparticular más la energía constante del core. De esta forma, estos estados de  $\Omega$  definido determinarían por completo el estado del sistema. Sin embargo, el core puede encontrarse en distintos estados, lo que simplificamos considerando exclusivamente excitaciones rotacionales.

## 1.2 Excitaciones rotacionales del core

En primer lugar, suponemos que modificar la rotación del core es más favorable energéticamente que alterar el movimiento intrínseco de sus componentes. De esta forma, suponemos que el estado intrínseco del core permanece en su estado fundamental, quedando solo el grado de libertad rotacional. En cierta manera estamos aproximando el core a un sólido rígido.

En el caso de un core esférico, el sistema permanece inalterado ante cualquier rotación debido a la simetría esférica. Al estar deformado, podemos asociarle una energía rotacional dependiente del momento angular del core ( $\vec{I}$ ) utilizando el momento de inercia respecto a los tres ejes principales:

$$H_c = \sum_{k=1}^3 \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}_k} I_k^2. \quad (1.7)$$

Estos tres ejes principales forman el sistema de referencia intrínseco anclado en el core, donde el eje 3 tiene la dirección del eje de simetría axial. Debido a esta simetría, una rotación en torno al eje 3 no tiene efecto y no se considera ( $I_3 = 0$ ), y las rotaciones en torno al resto de ejes deben ser equivalentes ( $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}$ ). Esto simplifica el hamiltoniano:

$$H_c = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} \vec{I}^2. \quad (1.8)$$

Recordemos que el core tiene un número par tanto de neutrones como de protones. Los núcleos par-par tienen un momento angular  $0^+$  en su estado fundamental, y en los primeros estados excitados, el momento va tomando los primeros valores pares. De la misma forma, el core tiene un estado fundamental con  $I^\pi = 0^+$  y los estados excitados seguirán la secuencia  $2^+$ ,  $4^+$ , etc. El momento de inercia debe ser similar al que se observa en el núcleo par-par considerándolo un buen rotor, cumpliendo la siguiente relación con la energía de excitación del primer estado excitado ( $E_{2^+}$ ):

$$\frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} 2(2+1) \approx E_{2^+}. \quad (1.9)$$

El hamiltoniano final del sistema es la suma del término monoparticular del nucleón desapareado ( $H_{sp}$ ) y el término colectivo del core ( $H_c$ ). La aproximación adiabática es la que permite la separación del hamiltoniano total en estos dos términos. Esto es posible porque el movimiento colectivo es mucho más lento que el del nucleón.

Los estados finales de nuestro núcleo deben tener  $\vec{J} = \vec{j} + \vec{I}$  bien definido, pero  $\vec{J}$  no ha aparecido en el hamiltoniano. Para ello se reescribe el término rotacional:

$$H_c = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} (\vec{J} - \vec{j})^2 = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} (\vec{J}^2 + \vec{j}^2 - J_3 - j_3 - J_+ j_- - J_- j_+), \quad (1.10)$$

donde  $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$ ,  $j_{\pm} = j_1 \pm ij_2$  y, como  $I_3 = 0$ ,  $J_3 = j_3$ . Al término con  $(J_+j_- + J_-j_+)$  se le llama de Coriolis, y conecta estados con diferentes proyecciones  $\Omega$ . Por tanto,  $\Omega$  no es una constante para el hamiltoniano completo. Sin embargo, en algunos casos se toma el término de Coriolis como una perturbación, considerando  $\Omega$  aproximadamente constante. En este trabajo no se aplica este tratamiento perturbativo y  $\Omega$  no es una constante del sistema.

Teniendo todos los términos del hamiltoniano completo podemos encontrar los estados estacionarios del sistema. Esto nos permite, por ejemplo, obtener funciones de onda que luego se pueden utilizar para el cálculo de reacciones de transferencia.

### 1.3 Reacciones de transferencia

Una de las aplicaciones del modelo estudiado en este trabajo es el de las reacciones de transferencia de una partícula. El cálculo de secciones eficaces de estos procesos requiere la función de onda de los núcleos con A y A+1 nucleones o, más concretamente, el solapamiento entre dichas funciones. En el capítulo 5 se muestra cómo el modelo de Nilsson nos proporciona expresiones para dichos solapamientos.

En las reacciones de transferencia hablamos de particiones, de manera que la partición inicial especifica cuales son los núcleos que colisionan y la final cuales son los núcleos salientes. Consideraremos reacciones en las que en una de las dos particiones está compuesta por uno de los núcleos que estudiamos y un protón, mientras que la otra está formada por el deuterón ( $^2\text{H}$ ) y el núcleo que forman los nucleones del core de nuestro núcleo. Un ejemplo de reacciones de este tipo es la reacción  $^{11}\text{Be}(p,d)^{10}\text{Be}$ , para la que hay resultados experimentales [5]. Para esta reacción la partición inicial considera un núcleo  $^{11}\text{Be}$  y un protón, la final un núcleo  $^{10}\text{Be}$  y un deuterón. También estudiaremos la reacción  $^{16}\text{C}(d,p)^{17}\text{C}$ , cuyos resultados experimentales acaban de ser publicados [6]. La comparación de medidas experimentales para secciones eficaces de este tipo nos permite evaluar la bondad de los modelos desarrollados.

# 2. Metodología

---

## 2.1 Diagonalización en la base THO

Los estados del sistema son solución del siguiente problema de autovalores:

$$H\varphi_k = \epsilon_k\varphi_k. \quad (2.1)$$

Esta ecuación se puede resolver de forma matricial teniendo en cuenta que cualquier función se puede desarrollar en una base completa  $\{\phi_n\}$ :

$$\varphi_k = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^k \phi_n. \quad (2.2)$$

Conocer los valores de las constantes  $c_n^k$  equivale a conocer los autoestados del sistema. Esto reduce nuestro problema al siguiente problema de autovalores matricial:

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} c_n^k = \epsilon_k c_m^k, \quad (2.3)$$

siendo necesario obtener los elementos de matriz  $H_{mn}$  del hamiltoniano:

$$H_{mn} = \langle m | H | n \rangle = \int dV \phi_m^* H \phi_n. \quad (2.4)$$

De este modo, diagonalizando la matriz formada por los elementos  $H_{mn}$  se obtienen las energías  $\epsilon_k$  y los coeficientes  $c_n^k$  que determinan las funciones  $\varphi_k$ . El problema es que este cálculo para una base infinita no es posible. Lo que se hace es cortar la base, quedándonos con los  $N$  primeros términos y suponiendo que la contribución del resto de la base es despreciable. Esta aproximación es buena si tomamos un valor de  $N$  suficientemente grande. Cuanto más se parezcan las funciones de la base a las funciones reales, más se puede reducir  $N$  obteniendo un buen resultado.

En nuestro caso, utilizamos la base de Oscilador Armónico Transformado (THO). Esta base aplica una Transformación Local de Escala (LST),  $s(r)$ , a las soluciones del potencial armónico tridimensional e isótropo:

$$\phi_{nl}^{THO}(r) = \sqrt{\frac{ds}{dr}} \phi_{nl}^{HO}[s(r)]. \quad (2.5)$$

La transformación mantiene la ortonormalidad de las funciones para toda  $s(r)$  continua y derivable. En este trabajo se usa la solución de Karataglidis *et al.* [7] para  $s(r)$ , fijando  $m = 4$ :

$$s(r) = \left[ r^{-m} + (\gamma\sqrt{r})^{-m} \right]^{-\frac{1}{m}}. \quad (2.6)$$

El principal propósito de esta transformación es cambiar el comportamiento asintótico de las funciones del oscilador armónico (HO). El potencial armónico no se anula para  $r \rightarrow \infty$  como se espera de un potencial nucleón-núcleo. Debido a esto, las funciones HO decaen de forma Gaussiana, en vez de hacerlo de la forma exponencial esperada. La transformación permite que las funciones THO sí tengan un comportamiento asintótico exponencial:

$$\phi_{nl}^{HO}(r) \rightarrow e^{-\frac{r^2}{2b^2}}, \quad \phi_{nl}^{THO}(r) \rightarrow e^{-\frac{\gamma^2 r}{2b^2}}. \quad (2.7)$$

El parámetro  $b$  es la longitud del oscilador que, junto con  $\gamma$ , se pueden ajustar para obtener una buena convergencia con el menor  $N$  posible.

Para la parte angular usamos las funciones  $\mathcal{Y}_{l_s}^{j\Omega}(\hat{r}')$ , que no son más que las combinaciones de los armónicos esféricos  $Y_{l\Lambda}(\hat{r}')$  acoplados a las funciones de espín para dar  $j$  con proyección  $\Omega$ . Escribimos  $\Omega$  y  $\Lambda$  porque estudiamos los estados monoparticulares del neutrón en el sistema de referencia intrínseco del core. El valor de  $s$ , al tratarse de un nucleón, es siempre  $1/2$ . Con estas funciones angulares, el cálculo de los elementos de matriz  $H_{mn}$  se reduce al cálculo de las integrales de las funciones radiales multiplicadas por los coeficientes de Clebsch-Gordan correspondientes.

Para tener en cuenta la parte rotacional hay que incluir las matrices de rotación  $D_{M\Omega}^{J*}(\omega)$  [8], siendo  $\omega = \{\phi, \theta, \psi\}$  los tres ángulos de Euler,  $M$  la proyección de  $\vec{J}$  en el eje  $z$  del sistema de referencia fijo. Debido a la equivalencia de los estados con proyecciones  $\Omega$  y  $-\Omega$ , se simetriza la parte angular:

$$\sqrt{\frac{2J+1}{16\pi^2}} [\mathcal{Y}_{ls}^{j\Omega}(\hat{r}') D_{M\Omega}^{J*}(\omega) + (-1)^{J-j} \mathcal{Y}_{ls}^{j-\Omega}(\hat{r}') D_{M-\Omega}^{J*}(\omega)], \quad (2.8)$$

donde se incluye el factor de normalización de las funciones de rotación y se toma  $\Omega > 0$ . Con este resultado queda definida la base para diagonalización del hamiltoniano completo, obteniendo así las autofunciones como combinaciones del tipo:

$$\Psi_J^M(\vec{r}', \omega) = \sqrt{\frac{2J+1}{16\pi^2}} \sum_{nlj\Omega} C_{nlj\Omega} \phi_{nl}^{THO}(r) [\mathcal{Y}_{ls}^{j\Omega}(\hat{r}') D_{M\Omega}^{J*}(\omega) + (-1)^{J-j} \mathcal{Y}_{ls}^{j-\Omega}(\hat{r}') D_{M-\Omega}^{J*}(\omega)]. \quad (2.9)$$

Para tomar un número finito de funciones, acotamos el número cuántico de oscilador total de las funciones HO:  $N = 2n + l \leq N_{max} = 2n_{max} + 1$ . Esto implica un límite para  $l$  ( $l \leq 2n_{max} + 1$ ) y para  $n$  ( $n \leq n_{max} - l/2$  para cada  $l$  par y  $n \leq n_{max} - (l-1)/2$  para cada  $l$  impar). Además, se considerara un valor  $J_{max}$  que limita a  $J \leq J_{max}$  los estados calculados.

En este trabajo, la diagonalización total se realiza en un programa en Fortran, con un procedimiento similar al descrito en la referencia [9]. Se han adaptado dos subrutinas ya existentes [10,11], y se han utilizado algunas del código *THOx* [12]. La diagonalización se realiza en tres pasos: se diagonaliza la parte esférica del hamiltoniano monoparticular, luego se incluye el término no central y por último la parte rotacional. A continuación, describimos en detalle cada uno de estos pasos.

## 2.2 Diagonalización de la parte central

En este paso consideramos solo la parte con simetría esférica del hamiltoniano:

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V_c(r) + V_{ls}(r)(\vec{l} \cdot \vec{s}). \quad (2.10)$$

La masa reducida  $\mu$  la calculamos a través de los defectos de masa obtenidos del *National Nuclear Data Center* [13]. Para el potencial central utilizamos la función de Woods-Saxon:

$$V_c(r) = -V_0 f(r), \quad f(r) = \frac{1}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}. \quad (2.11)$$

Tomamos la difusividad  $a = 0,67$  fm y el radio  $R = 1,27 \cdot A^{1/3}$  fm dependiente del número atómico del núcleo considerado.  $V_0$  se ajusta para reproducir lo mejor posible el espectro de los núcleos considerados. La parte radial del potencial de espín-órbita se considera dependiente de  $V_c(r)$ :

$$V_{ls}(r) = - \left( \frac{\hbar}{\mu c} \right)^2 \frac{\nu}{2r} \frac{dV_c(r)}{dr}. \quad (2.12)$$

Estamos utilizando el mismo potencial que las referencias [2,3,4], tomando también  $\nu = 32$ . Para realizar la diagonalización, el programa primero genera las funciones radiales  $\phi_{nl}^{THO}(r)$  para los distintos valores de  $n$  y  $l$  compatibles con la acotación de  $n_{max}$ . Diagonalizamos por separado los estados con  $l$  y  $j$  definidos. Debido a la simetría esférica, no se mezclan estados con distinta parte angular. Calculamos los elementos de matriz:

$$\langle n'lj | H_0 | n'lj \rangle = \int d\vec{r} \phi_{n'l}^{THO}(r) \mathcal{Y}_{ls}^{j\Omega*}(\hat{r}') H_0 \phi_{n'l}^{THO}(r) \mathcal{Y}_{ls}^{j\Omega}(\hat{r}'). \quad (2.13)$$

Se obvia el valor de  $\Omega$  porque no interviene en esta diagonalización a causa de la degeneración por la simetría esférica. Las matrices que se calculan siempre son simétricas, lo que evita calcular casi la mitad de los elementos. Una vez calculados los elementos de matriz, el programa obtiene los autovalores  $\epsilon_{\nu lj}$  y las constantes  $C_n^{\nu lj}$  para cada  $l$  y  $j$ , permitiendo formar las autofunciones de  $H_0$ :

$$\psi_{\nu lj}^{\Omega}(\vec{r}') = \sum_n C_n^{\nu lj} \phi_{nl}^{THO}(r) \mathcal{Y}_{ls}^{j\Omega}(\hat{r}'), \quad H_0 \psi_{\nu lj}^{\Omega}(\vec{r}') = \epsilon_{\nu lj} \psi_{\nu lj}^{\Omega}(\vec{r}'). \quad (2.14)$$



## 2.3 Diagonalización de la parte no central

Para la segunda diagonalización tomamos el hamiltoniano monoparticular completo:

$$H_{sp} = H_0 - V_\beta(\vec{r}') = H_0 - \beta r \frac{dV_c(r)}{dr} Y_{20}(\theta'). \quad (2.15)$$

Diagonalizamos en la base  $\{\psi_{\nu l j}^\Omega(\vec{r}')\}$ , con la ventaja de que  $H_0$  ya está diagonalizado en esta base. La proyección  $\Omega$  está bien definida para los autoestados de  $H_{sp}$ , por tanto, calculamos los elementos de matriz para cada valor de  $\Omega$ :

$$\langle \nu l j \Omega | H_{sp} | \nu' l' j' \Omega \rangle = \epsilon_{\nu l j} \delta_{\nu \nu'} \delta_{l l'} \delta_{j j'} + \langle \nu l j \Omega | V_\beta(\vec{r}') | \nu' l' j' \Omega \rangle. \quad (2.17)$$

El valor de  $\beta$  se ajusta para intentar reproducir el espectro experimental y  $l'$  solo puede ser  $l$  o  $l \pm 2$ , de lo contrario la parte angular se anula. En consecuencia, podemos diagonalizar por separado los estados con paridades distintas. Una vez obtenidos los elementos de matriz, se calculan los autovalores  $\epsilon_{\mu \Omega^\pi}$  y los coeficientes  $C_{\nu l j}^{\mu \Omega^\pi}$  para cada  $\Omega^\pi$ , siempre cumpliendo  $1/2 \leq \Omega \leq J_{max}$ . Estas energías son las que se representan en los diagramas de Nilsson y los autovectores se pueden pasar a la base THO utilizando los coeficientes  $C_n^{\nu l j}$ :

$$C_{n j}^{\mu \Omega^\pi} = \sum_{\nu} C_{\nu l j}^{\mu \Omega^\pi} C_n^{\nu l j}. \quad (2.18)$$

Prescindimos del subíndice  $l$  porque, para que  $C_{\nu l j}^{\mu \Omega^\pi}$  no sea nulo,  $l$  tiene que ser el número par más próximo a  $j$  si  $\pi = 1$  o el impar si  $\pi = -1$ . Se obtienen las siguientes autofunciones:

$$\psi_{\mu \Omega^\pi}(\vec{r}') = \sum_{n j} C_{n j}^{\mu \Omega^\pi} \phi_{n l}^{THO}(r) \mathcal{Y}_{l s}^{j \Omega}(\hat{r}'). \quad (2.19)$$

Podemos adjuntar las funciones  $D_{M \Omega}^{J*}(\omega)$  con cualquier  $J$  y  $M$  compatibles, ya que no les afecta el hamiltoniano monoparticular. En ese caso, hay que incluir el factor de normalización y la simetrización por la equivalencia de los estados con proyección de momento angular  $\pm \Omega$ :

$$\Psi_{\mu\Omega}^{J^\pi M}(\vec{r}', \omega) = \sqrt{\frac{2J+1}{16\pi^2}} \sum_{nj} C_{nj}^{\mu\Omega\pi} \phi_{nl}^{THO}(r) [\mathcal{Y}_{ls}^{j\Omega}(\hat{r}') D_{M\Omega}^{J*}(\omega) + (-1)^{J-j} \mathcal{Y}_{ls}^{j-\Omega}(\hat{r}') D_{M-\Omega}^{J*}(\omega)]. \quad (2.20)$$

Estas funciones  $\Psi_{\mu\Omega}^{J^\pi M}$  siguen siendo autofunciones del hamiltoniano monoparticular:

$$H_{sp} \Psi_{\mu\Omega}^{J^\pi M}(\vec{r}', \omega) = \epsilon_{\mu\Omega\pi} \Psi_{\mu\Omega}^{J^\pi M}(\vec{r}', \omega). \quad (2.21)$$

## 2.4 Diagonalización de la parte rotacional

Ahora utilizamos el hamiltoniano completo, añadiendo el término colectivo de rotación :

$$H = H_{sp} + H_c = H_{sp} + \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} \vec{I}^2. \quad (2.22)$$

Calculamos los elementos de matriz pertinentes en la base  $\{\Psi_{\mu\Omega}^{J^\pi M}\}$ :

$$\langle \mu\Omega J^\pi M | H | \mu'\Omega' J^\pi M \rangle = \epsilon_{\mu\Omega\pi} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\Omega\Omega'} + \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} \langle \mu\Omega J^\pi M | \vec{I}^2 | \mu'\Omega' J^\pi M \rangle. \quad (2.23)$$

Se tiene en cuenta que  $H_{sp}$  ya es diagonal en esta base. Consideramos  $J^{\pi'} = J^\pi$  porque los estados finales tienen paridad y momento angular total bien definidos. También consideramos  $M' = M$ , pero obviamos el valor de  $M$ , ya que no afecta a la diagonalización. Para calcular el elemento de matriz se utiliza la expresión (1.10) y las siguientes propiedades de los operadores escalera  $j_\pm$  y  $J_\pm$  [8]:

$$|lj\Omega\rangle \rightarrow \mathcal{Y}_{ls}^{j\Omega}(\hat{r}'), \quad j_\pm |lj\Omega\rangle = \sqrt{(j \mp \Omega)(j \pm \Omega + 1)} |lj\Omega \pm 1\rangle,$$

$$|JM\Omega\rangle \rightarrow \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi^2}} D_{M\Omega}^{J*}(\omega), \quad J_\mp |JM\Omega\rangle = \sqrt{(J \mp \Omega)(J \pm \Omega + 1)} |JM\Omega \pm 1\rangle. \quad (2.24)$$

Estas expresiones implican que los únicos elementos no nulos cumplen  $\Omega' = \Omega \pm 1$  o  $\Omega' = \Omega$ . En este último caso, a causa de la simetrización, el término de Coriolis no se anula para  $\Omega = 1/2$  únicamente:

$$\langle lj\Omega JM | J_+ j_- + J_- j_+ | lj\Omega JM \rangle = (J + \frac{1}{2})(j + \frac{1}{2})(-1)^{J-j} \delta_{\Omega 1/2}. \quad (2.25)$$

Se calculan los elementos y se diagonaliza la matriz para cada  $J^\pi$ , siempre cumpliendo  $\Omega \leq J \leq J_{max}$ . Se obtienen las energías  $\epsilon_{\lambda J^\pi}$  y las constantes  $C_{\mu\Omega}^{\lambda J^\pi}$ . Pasamos a la base THO e introducimos las funciones  $\phi_{j\Omega}^{\lambda J^\pi}$ :

$$C_{nj\Omega}^{\lambda J^\pi} = \sum_{\mu} C_{\mu\Omega}^{\lambda J^\pi} C_{nj}^{\mu\Omega^\pi}, \quad \phi_{j\Omega}^{\lambda J^\pi}(r) = \sum_n C_{nj\Omega}^{\lambda J^\pi} \phi_{nl}^{THO}(r), \quad (2.26)$$

llegando así a las autofunciones finales:

$$\Psi_{\lambda J^\pi}^M(\vec{r}', \omega) = \sqrt{\frac{2J+1}{16\pi^2}} \sum_{j\Omega} \phi_{j\Omega}^{\lambda J^\pi}(r) [\mathcal{Y}_{ls}^{j\Omega}(\hat{r}') D_{M\Omega}^{J*}(\omega) + (-1)^{J-j} \mathcal{Y}_{ls}^{j-\Omega}(\hat{r}') D_{M-\Omega}^{J*}(\omega)],$$

$$H \Psi_{\lambda J^\pi}^M(\vec{r}', \omega) = \epsilon_{\lambda J^\pi} \Psi_{\lambda J^\pi}^M(\vec{r}', \omega). \quad (2.27)$$

Estas funciones ortonormales y sus respectivas energías determinan el estado del sistema completo, sin contar el movimiento intrínseco de las partículas del core que consideramos constante.

## 2.5 Estados finales

La expresión (2.27) ya muestra las funciones del sistema, pero en algunos casos, como el calculo de reacciones de transferencia, será necesario reescribir las funciones con otra expresión que tenga componentes de momento  $I$  del core definido [14,15]. El desarrollo completo se muestra en el apéndice, presentamos solo el resultado final:

$$\Psi_{\lambda J^\pi}^M(\vec{r}, \omega) = \sum_{jI} \phi_{jI}^{\lambda J^\pi}(r) [\mathcal{Y}_{ls}^j(\hat{r}) \otimes \Phi_I(\omega)]_{JM}. \quad (2.28)$$

La suma es solo para los  $I$  pares. Las funciones  $\phi_{jI}^{\lambda J^\pi}$  se escriben en función de la base THO con los coeficientes  $C_{njI}^{\lambda J^\pi}$ :

$$\phi_{jl}^{\lambda J^\pi}(r) = \sqrt{2} \sum_n C_{njI}^{\lambda J^\pi} \phi_{nl}^{THO}(r), \quad C_{njI}^{\lambda J^\pi} = \sqrt{2} \sum_\Omega (-1)^{J+\Omega} \langle I0 | j - \Omega J \Omega \rangle C_{nj\Omega}^{\lambda J^\pi}. \quad (2.29)$$

La parte angular representa de forma simplificada el acoplamiento en el sistema fijo de  $\vec{j}$  e  $\vec{I}$  para dar  $\vec{J}$ :

$$[\mathcal{Y}_{ls}^j(\hat{r}) \otimes \Phi_I(\omega)]_{JM} = \sum_{M_I} \langle JM | jm IM_I \rangle \mathcal{Y}_{ls}^{jm}(\hat{r}) \Phi_I^{M_I}(\omega). \quad (2.30)$$

$\Phi_{IM_I}$  es la función rotacional del core par-par de momento  $I$  y proyección  $M_I$ :

$$\Phi_I^{M_I}(\omega) = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} D_{M_I 0}^{I*}(\omega). \quad (2.31)$$

Otra cuestión relevante es cuánto contribuye cada componente  $j\Omega$  o  $jI$  a la función de onda total, para ello hablamos de pesos. Llamamos peso a la norma de las funciones  $\phi_{j\Omega}^{\lambda J^\pi}$  y  $\phi_{jI}^{\lambda J^\pi}$ , que al estar compuesta por funciones ortonormales se puede calcular fácilmente:

$$\int_0^\infty dr |r \phi_{j\Omega}^{\lambda J^\pi}(r)|^2 = \sum_n |C_{nj\Omega}^{\lambda J^\pi}|^2, \quad \int_0^\infty dr |r \phi_{jI}^{\lambda J^\pi}(r)|^2 = \sum_n |C_{njI}^{\lambda J^\pi}|^2. \quad (2.32)$$

La suma del peso de todas las componentes debe ser 1 (100%) en ambas representaciones, pero si no incluimos el peso de todas las componentes puede que no se alcance.

También hay que mencionar la existencia de las bandas rotacionales, bandas que en ocasiones se han observado experimentalmente y justifican la aproximación rotacional del core. Los niveles energéticos se pueden agrupar por bandas de niveles que comparten los números asintóticos de Nilsson  $[N, n_3, \Lambda, \Omega]$  [1], donde ahora  $\Omega$  también es asintótico y no una constante. Las bandas contienen niveles con distintos valores de  $J$ , cuya energía normalmente crece con  $J$ .

El principio de exclusión de Pauli, que no se ha aplicado hasta ahora, prohíbe las bandas cuyos primeros niveles son de menor energía. Cada banda puede tener una ocupación 2, como los niveles de Nilsson, por tanto, un núcleo de  $2N + 1$  neutrones tiene  $N$  bandas prohibidas y

todos los estados de esas bandas están prohibidos. El estado fundamental sería el nivel de menor energía no prohibido y a partir de ahí contamos los estados excitados.

## 2.6 Descripción del continuo

Para energías positivas existe un continuo de soluciones, todas ellas posibles. El resultado de diagonalizar el hamiltoniano nos proporciona un número discreto de funciones de onda, conocidos como pseudoestados. Aquellos con energía negativa representan los estados ligados del sistema, mientras que aquellos con energía positiva proporcionan una representación discreta del continuo del sistema. Esta representación discreta del continuo puede ser muy útil para distintos fines como, por ejemplo, estudiar la ruptura del núcleo. En nuestro caso, nos ceñiremos a la identificación de resonancias y la obtención de funciones de onda que reproduzcan sus propiedades. Para ello aplicamos el método de estabilización de Hazi y Taylor [16]. Si tenemos una base de funciones cuya extensión espacial depende de un parámetro  $\alpha$ , los autovalores de energía  $\epsilon_n$  también dependen de este parámetro. De esta forma, si aumentamos la extensión variando  $\alpha$ , la energías disminuyen de forma monótona. Cuando los autovalores se acercan a una resonancia, este decaimiento se suaviza, formando una especie de *plateau* en torno a la energía de la resonancia. Superada esta energía se vuelve al decaimiento monótono.

En la base THO al disminuir  $\gamma/b$  aumenta la extensión espacial de las funciones, concentrando más estados en la zona de baja energía. Sabiendo esto, para un  $b$  fijo,  $\gamma$  es un buen ejemplo de parámetro  $\alpha$ , de forma que buscaremos resonancias variando este parámetro. En la parte superior de la figura 2.1 se expone un ejemplo de este caso.

El tamaño de la base, en nuestro caso determinado por  $n_{max}$ , también es válido como ejemplo de parámetro  $\alpha$  aunque sea discreto. Al aumentar  $n_{max}$  aparecen funciones con una mayor extensión espacial y las energías disminuyen. A pesar de no ser un parámetro continuo, se puede ver que la tendencia decreciente de las energías se suaviza en torno a la energía de la resonancia. En el panel inferior de la figura 2.1 se muestra un ejemplo de este tipo.

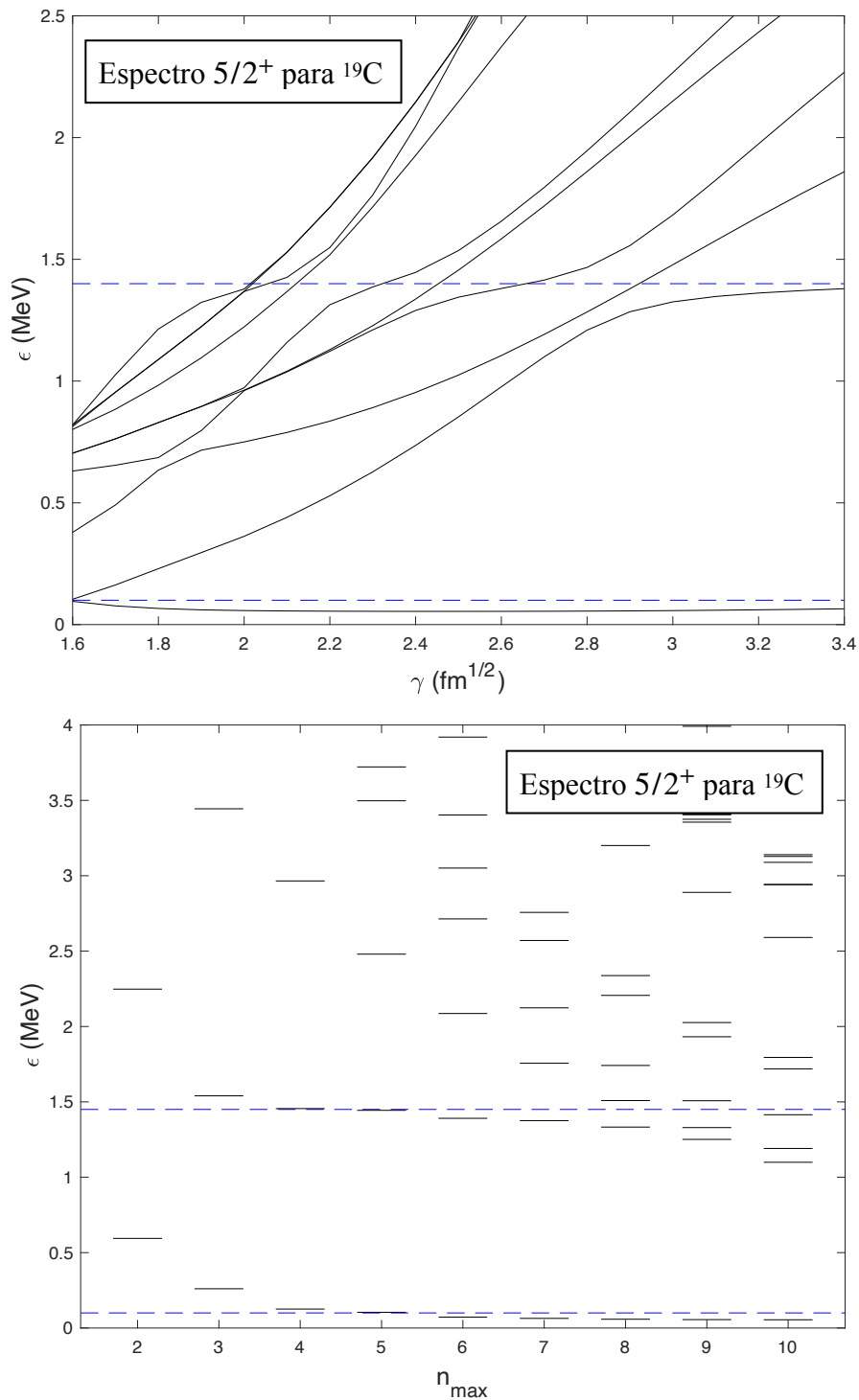


Figura 2.1: Aplicación del método de estabilización [16] para la búsqueda de resonancias  $5/2^+$  del núcleo  $^{19}\text{C}$ . Arriba se observa la evolución de las autoenergías en el espectro  $5/2^+$  frente al parámetro  $\gamma$ , para  $n_{max} = 10$ . Abajo la evolución de las autoenergías frente al parámetro  $n_{max}$  para  $\gamma = 2,7 \text{ fm}^{1/2}$ . Las líneas discontinuas marcan las energías de las resonancias encontradas.

Una vez identificada la energía de la resonancia, tomamos la función de onda del pseudoestado más próximo en energía. Esta función de onda reproduce aproximadamente las propiedades de la resonancia.

## 2.7 Reacciones de transferencia

En este trabajo se calculan secciones eficaces para la reacción  $^{11}\text{Be}(p,d)^{10}\text{Be}$  utilizando el programa FRESCO [17]. Se toma la aproximación de Born de onda distorsionada (DWBA) [18], que permite calcular la sección eficaz de dos formas: la llamada representación “prior”, donde se desarrolla el hamiltoniano en la partición inicial, y la llamada representación “post”, donde el hamiltoniano está descrito en la partición final. Para poder utilizar el resultado de nuestro modelo es necesario usar la forma que describe el hamiltoniano en la partición que no incluye el núcleo con un número impar de neutrones, al que llamamos A. De esta forma el potencial deformado entre el neutrón y el core, que no está implementado en el programa FRESCO, no se incluye en el cálculo, porque ya está integrado en la estructura del núcleo A. Si tenemos una reacción como  $^{11}\text{Be}(p,d)^{10}\text{Be}$ , donde el núcleo A, que sería el  $^{11}\text{Be}$ , está en la partición inicial, se utiliza la forma prior, obteniendo la siguiente expresión para sección eficaz diferencial :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\beta\alpha} = \frac{\mu_\alpha\mu_\beta}{(2\pi\hbar^2)^2} \left| \int \chi_d^{(-)*}(\vec{k}_d, \vec{R}') \psi_d^*(\vec{r}') \Delta V_\alpha \chi_p^{(+)}(\vec{k}_p, \vec{R}) \psi_{CA}(\vec{r}) d\vec{r} d\vec{R} \right|^2. \quad (2.33)$$

Los subíndices  $\alpha$  y  $\beta$  hacen referencia a la partición inicial y final respectivamente, por tanto,  $\mu_\alpha$  es la masa reducida del sistema en la partición inicial. Los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  marcan la posición del neutrón respecto al core y el protón respectivamente,  $\vec{R}$  la posición del núcleo A respecto al protón y  $\vec{R}'$  la posición del deuterón respecto al núcleo C, el core del núcleo A, véase figura 2.2. El potencial  $\Delta V_\alpha$  es la suma del potencial entre protón y neutrón más la diferencia de los potenciales ópticos, por tanto complejos, entre protón core y C y entre protón y núcleo A completo:

$$\Delta V_\alpha = V_{pn}(\vec{r}') + U_{pC}(\vec{R}, \vec{r}) - U_{pA}(\vec{R}). \quad (2.34)$$

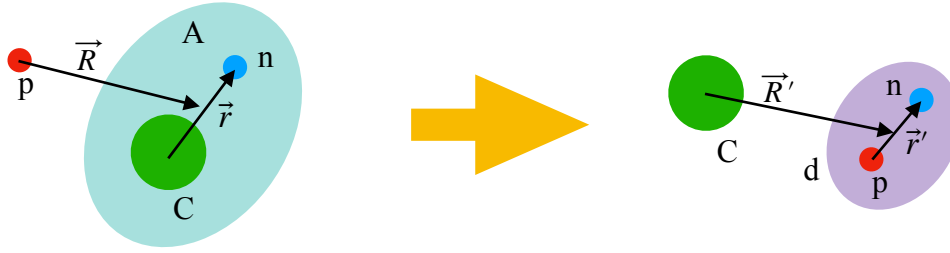


Figura 2.2: Esquema de la reacción  $^{11}\text{Be}(p,d)^{10}\text{Be}$ , donde A es el núcleo  $^{11}\text{Be}$  y C el núcleo  $^{10}\text{Be}$ .

Los potenciales  $V_{pn}$ ,  $U_{pC}$ ,  $U_{pA}$  y  $U_{dC}$ , potencial óptico entre el deuterón y C, se definen en FRESKO dándole parámetros a alguna de las formas de potencial típicas que ya tiene el programa definidas. Con los potenciales  $U_{pA}$  y  $U_{dC}$ , FRESKO obtiene las funciones  $\chi_p^{(+)}$  y  $\chi_d^{(-)}$ , que representan respectivamente la función de onda distorsionada del protón entrante y el deuterón saliente. Se calculan teniendo en cuenta que  $\chi_p^{(+)}$  cumple la ecuación de Schrödinger con el potencial  $U_{pA}$  y  $\chi_d^{(-)}$  con  $U_{dC}$ . De la misma forma, con el potencial  $V_{pn}$ , el programa obtiene la función de onda del deuterón  $\psi_d$ . La función  $\psi_{CA}$  es el resultado de la integración del producto de la función de onda del núcleo A y la de C conjugada sobre los grados de libertad de este último. Esta integral, comúnmente llamada de solapamiento, se puede escribir aplicando los resultados de nuestro modelo:

$$\psi_{CA}(\vec{r}) = \int \Phi_I^{M_I^*}(\omega) \Psi_{\lambda J \pi}^M(\vec{r}, \omega) d\omega. \quad (2.35)$$

Dada la expresión (2.28) para  $\Psi_{\lambda J \pi}^M$  y la ortonormalidad de las funciones  $\Phi_I^{M_I}$  el resultado de la integral es simplemente [14,15]:

$$\psi_{CA}(\vec{r}) = \sum_j \langle JM | jm IM_I \rangle \phi_{jI}^{\lambda J \pi}(r) \mathcal{Y}_{ls}^{jm}(\hat{r}), \quad (2.36)$$



siendo  $\langle JM | jmIM_I \rangle$  el coeficiente de Clebsh-Gordan correspondiente y  $m = M - M_I$ . Para un canal con el núcleo C en un estado de momento  $I$ , FRESCO solo necesita que introduzcamos las funciones  $\phi_{jI}^{\lambda J \pi}$  ya calculadas con nuestro modelo, con ellas calcula la sección eficaz diferencial para ese canal. Las contribución de las funciones  $\phi_{jI}^{\lambda J \pi}$  a la sección eficaz es proporcional a su peso, por eso no se introducen en el cálculo funciones con un peso menor al 2%.

Para la reacción  $^{11}\text{Be}(p,d)^{10}\text{Be}$  introducimos las funciones  $\phi_{jI}^{\lambda J \pi}$  del estado fundamental del núcleo  $^{11}\text{Be}$  con  $I = 0$  e  $I = 2$ , con ellos se calculan las secciones eficaces para los canales  $^{11}\text{Be}(p,d)^{10}\text{Be}(0^+)$  y  $^{11}\text{Be}(p,d)^{10}\text{Be}(2^+)$ , para comparar con los resultados experimentales [5].

En el caso de reacciones como  $^{16}\text{C}(d,p)^{17}\text{C}$  en las que el cálculo se hace en la representación post, se obtiene una expresión muy similar a la (2.33):

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\beta\alpha} = \frac{\mu_\alpha \mu_\beta}{(2\pi \hbar^2)^2} \left| \int \chi_p^{(-)*}(\vec{k}_p, \vec{R}') \psi_{CA}^*(\vec{r}') \Delta V_\beta \chi_d^{(+)}(\vec{k}_d, \vec{R}) \psi_d(\vec{r}) d\vec{r} d\vec{R} \right|^2, \quad (2.37)$$

donde ahora  $C$  se refiere a  $^{16}\text{C}$  y  $A$  a  $^{17}\text{C}$ , mientras que los vectores quedan definidos conforme a la figura 2.3. En este caso el potencial  $\Delta V_\beta$  tiene la expresión:

$$\Delta V_\alpha = V_{pn}(\vec{r}) + U_{pC}(\vec{R}', \vec{r}') - U_{pn}(\vec{R}'). \quad (2.38)$$

Los potenciales se introducen como describimos anteriormente. En este caso se obtiene la función del deuterón entrante,  $\chi_d^{(+)}$ , con  $U_{dC}$  y la del protón saliente,  $\chi_p^{(-)}$ , con  $U_{pA}$ .

Aparece  $\psi_{CA}^*$ , por tanto, se vuelven a introducir las funciones  $\phi_{jI}^{\lambda J \pi}$  para el cálculo de las secciones eficaces diferenciales. Se introducen solo funciones con  $I = 0$ , ya que el núcleo  $^{16}\text{C}$  de partida se encuentra en su estado fundamental, pero se consideran distintos estados finales para el núcleo  $^{17}\text{C}$ : el fundamental ( $3/2^+$ ), el primer estado excitado ( $1/2^+$ ) y el segundo estado excitado ( $5/2^+$ ). Se calculan las secciones eficaces diferenciales para cada uno de los estados y se compara con los recientes datos experimentales [6].

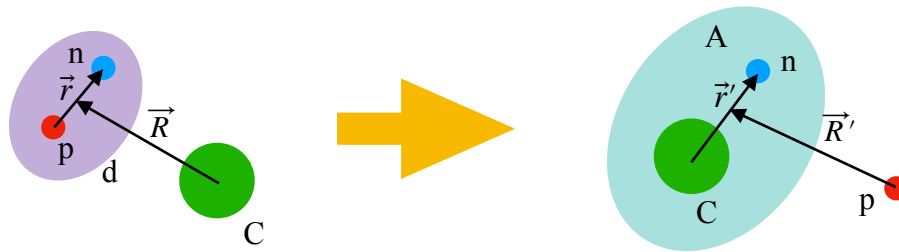


Figura 2.3: Esquema de la reacción  $^{16}\text{C}(d,p)^{17}\text{C}$ , donde C es el núcleo  $^{16}\text{C}$  y A el núcleo  $^{17}\text{C}$ .

# 3. Resultados de los cálculos de estructura

---

Los cálculos de estructura se han realizado para los núcleos:  $^{17}\text{C}$ ,  $^{19}\text{C}$  y  $^{11}\text{Be}$ . Esto implica el ajuste de  $V_0$  y  $\beta$  para obtener un estado fundamental con energía  $-S_n$ , siendo  $S_n$  la energía de separación de un neutrón experimental. El ajuste también pretende conseguir que la diferencia de energía entre los estados excitados y el fundamental sea igual a las energías de excitación experimentales. Todos los casos que calculamos tienen un core de forma prolada ( $\beta > 0$ ).

Se representa la parte radial de la función de onda de los estados, en concreto las funciones  $u_{lj\Omega}(r) = r\phi_{j\Omega}^{\lambda J^\pi}(r)$  para cada estado. No se representan las funciones de  $l$  mayor que 3 porque su peso es menor del 1% en la mayoría de los casos.

Todos nuestros resultados se han comparado con los obtenidos a través de un modelo PAMD [19]. El modelo PAMD es una extensión del modelo de partícula-rotor (PRM) [20]. En el modelo PRM se considera que el acoplamiento es débil, por lo que se trabaja con la base esférica, acoplando a los distintos estados de un core deformado con un potencial similar a  $V_\beta$ . La particularidad del modelo PAMD reside en calcular dicho potencial a partir de un cálculo microscópico para el core en el modelo AMD [21,22] (*Antisymmetrized Molecular Dynamics*). Mientras que el modelo PAMD, considera un acoplamiento débil, nuestro modelo lo considera fuerte, por tanto, es interesante comprobar cuál da un mejor resultado. En esta memoria se muestran las principales similitudes y diferencias encontradas entre los resultados del modelo PAMD y el nuestro. Para comparar las funciones con este modelo es necesario pasar a las funciones  $u_{jl}(r) = r\phi_{jl}^{\lambda J^\pi}(r)$ .

## 3.1 Aplicación al núcleo $^{17}\text{C}$

### 3.1.1 Diagrama de Nilsson

Para el núcleo  $^{17}\text{C}$  se ha obtenido un diagrama de Nilsson tomando  $V_0 = 40$  MeV, con el objetivo de compararlo con el que aparece en [3]. El resultado se muestra en la figura 3.1 y

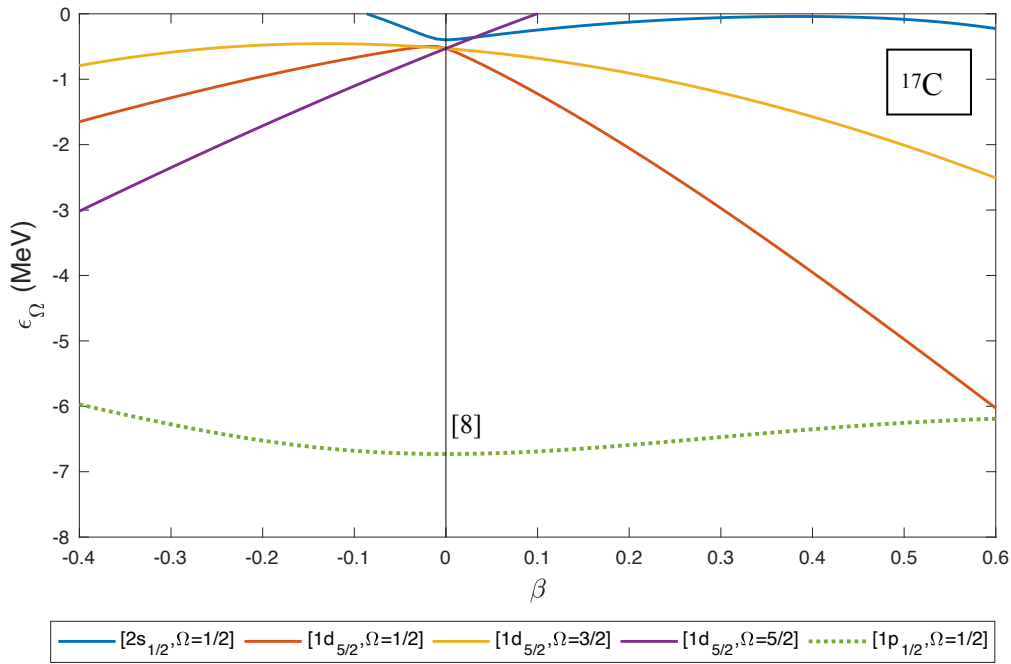


Figura 3.1: Diagrama de Nilsson para el núcleo  $^{17}\text{C}$  tomando  $V_0 = 40$  MeV. Se etiquetan los niveles por su configuración sin deformación y la proyección  $\Omega$ . Se indica el número de nucleones (8) que ocuparían los niveles de menor energía, incluyendo el  $[1p_{1/2}, \Omega = 1/2]$ .

concuera perfectamente con el del artículo citado, ya que se usan los mismos parámetros. En este caso etiquetamos los niveles con su configuración para  $\beta = 0$  y su valor de  $\Omega$ , mostrando la degeneración de los estados que difieren únicamente en  $\Omega$  para  $\beta = 0$  y cómo esta se rompe cuando aparece una deformación oblada o prolada. No se incluyen los niveles provenientes de  $1s_{1/2}$  y  $1p_{3/2}$  porque están muy por debajo en energía.

Si despreciáramos el término rotacional del core, el último neutrón del  $^{17}\text{C}$  ocuparía el nivel  $[1d_{5/2}, \Omega = 3/2]$ . Considerando el término rotacional se mezclan los niveles de misma paridad, pero el estado que corresponde a  $[1d_{5/2}, \Omega = 3/2]$  tiene el mayor peso.

Al incluir  $H_c$ , tomamos  $\hbar^2/2\mathcal{J} = 0,3$  MeV para que se cumpla la expresión (1.8) con la energía del primer estado excitado del núcleo  $^{16}\text{C}$ :  $E_{2^+} = 1,77$  MeV [23]. Se ajustan los parámetros del potencial  $V_0 = 44,26$  MeV,  $\beta = 0,34$  y con una base THO de  $b = 1,8$  fm,  $\gamma = 2,7$  fm $^{1/2}$ ,  $n_{max} = 15$  se consiguen los estados ligados que se muestran en la figura 3.2.

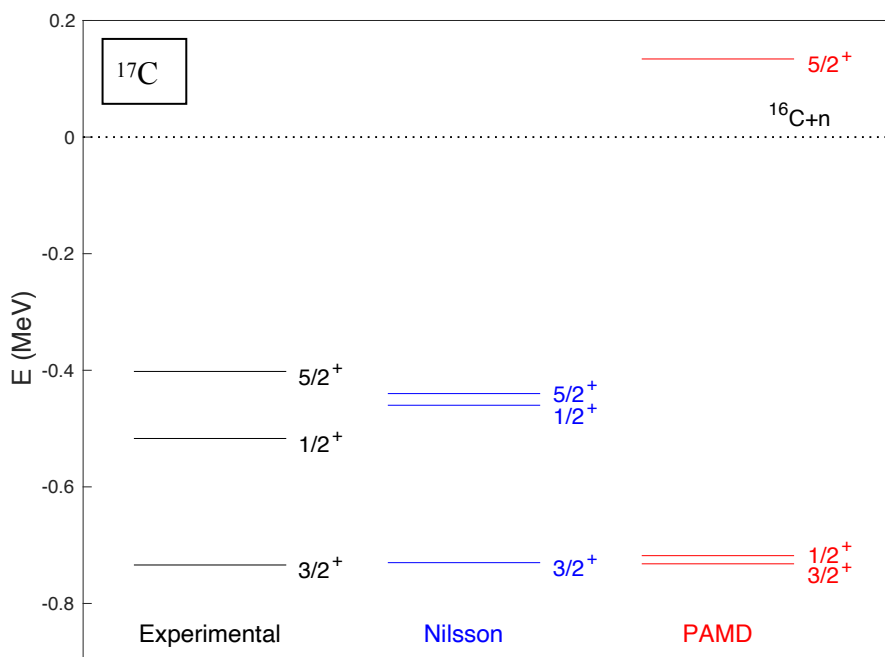


Figura 3.2: Espectro de estados ligados del núcleo  $^{17}\text{C}$ , donde el momento angular y la paridad se especifica a la derecha de cada nivel. Se comparan las energías experimentales [27,28] con las obtenidas con nuestro modelo de Nilsson y el modelo PAMD [19]. La línea de puntos marca el umbral de separación de un neutrón.

Hay que resaltar que el valor  $\beta$  obtenido es muy similar al valor 0,33 (para  $R = 2,9$  fm) que utiliza el artículo [24] con otro modelo. En este mismo artículo se citan otros valores de beta encontrados en la literatura:  $0,47 \pm 0,05$  [25] y  $0,35 \pm 0,06$  [26].

En dicha figura, se comparan las energías de los estados experimentales [27,28], las obtenidas con nuestro modelo y con el modelo PAMD [19]. Comprobamos que las energías de los estado excitados se acercan bastante más a las experimentales en nuestro modelo.

Se obtiene un estado fundamental  $3/2^+$  con una energía de  $-0,73$  MeV, compatible con el valor experimental  $S_n = 0,73$  MeV [27]. En la figura 3.3 se muestran las funciones  $u_{lj\Omega}(r)$  para  $l < 4$ . El 53% del peso corresponde a la componente  $d_{5/2}$  con  $\Omega = 3/2$  y un 38% corresponde a la componente  $s_{1/2}$ , el resto de componentes no llegan a sumar un 10%. Viendo estos resultados ya se intuye que este estado es mayoritariamente una mezcla de los estados de la figura 3.1 denotados por  $[1d_{5/2}, \Omega = 3/2]$  y  $[2s_{1/2}, \Omega = 1/2]$ . En la figura 3.3, en el panel inferior, se muestra la comparación de la parte radial con el modelo PAMD [19] y en la

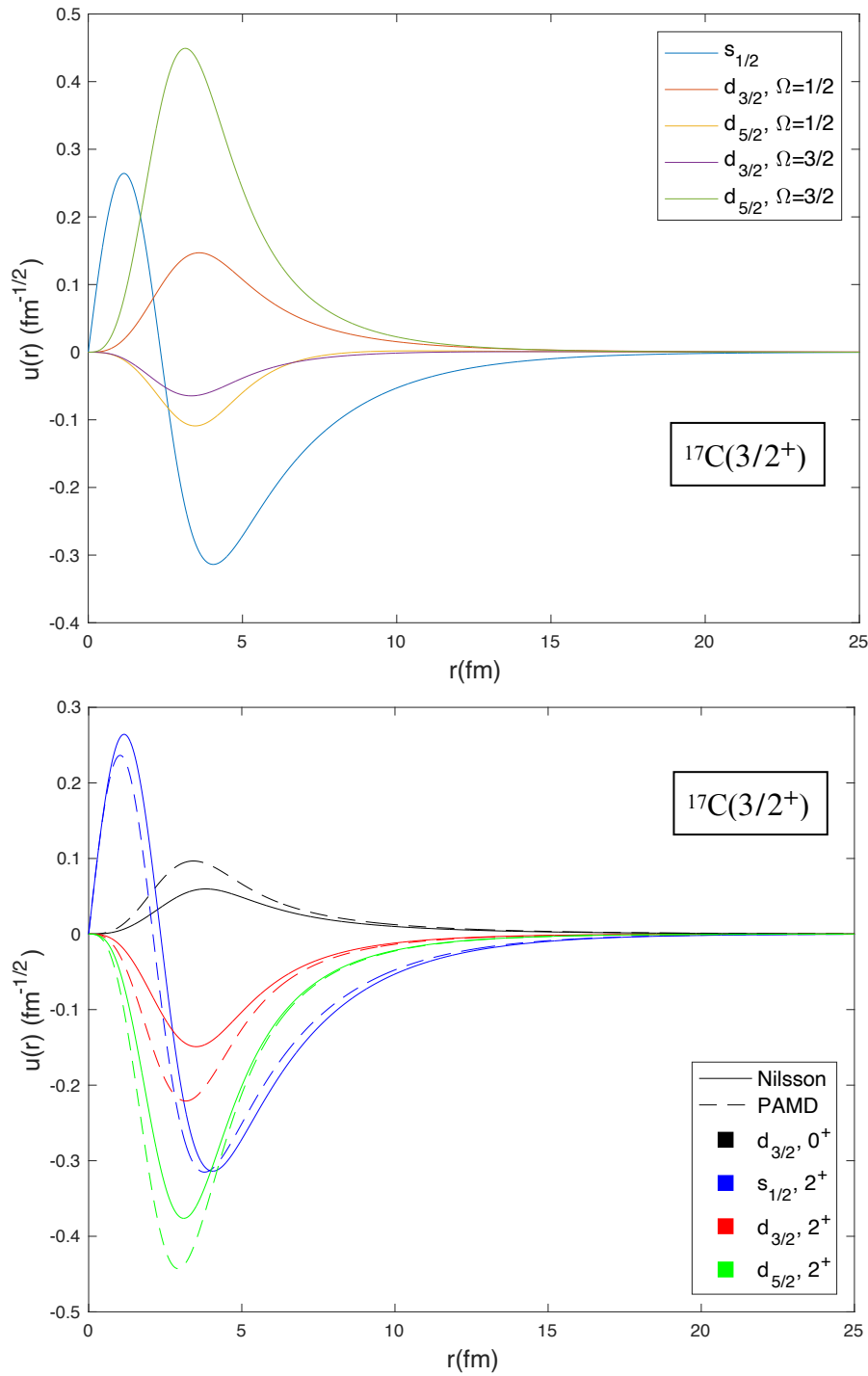


Figura 3.3: Parte radial de la función de onda del estado fundamental  $(3/2^+)$  del núcleo  $^{17}\text{C}$ . En la parte superior se muestran las componentes  $u_{ij\Omega}$  y abajo las  $u_{ijr}$ . En el segundo caso se comparan los resultados de nuestra diagonalización (línea continua), con los obtenidos con el modelo PAMD [19] (línea discontinua).

tabla 3.1 se compara los pesos de las componentes. La forma de nuestras funciones son muy similares a las obtenidas con el modelo PAMD, pero con cierta diferencia en los pesos que también se manifiesta en las gráficas. El modelo PAMD se restringe a  $I \leq 2$ , mientras que nuestro modelo sí considera componentes con  $I > 2$ . En concreto, la componente con el neutrón en un orbital  $d_{5/2}$  y el core en su estado  $4^+$  tiene un 19% de peso para este núcleo, y claramente esto influye en la diferencia de pesos de los modelos. Hay otros trabajos [24] que también apuntan a la importancia de incluir la componente  $4^+$  del core. Los dos modelos, Nilsson y PAMD, coinciden en que cerca del 100% del peso es con el core en un estado excitado.

Nuestro modelo da un radio cuadrático medio de 4,18 fm frente a los 4,03 fm del modelo PAMD. A la vista de los valores del radio cuadrático medio y las funciones de onda en los distintos estados para ambos modelos, parece que nuestro modelo implica una mayor extensión espacial en el movimiento del neutrón respecto al core.

$^{17}\text{C}_{gs}(3/2^+)$	$d_{3/2}, 0^+$	$s_{1/2}, 2^+$	$d_{3/2}, 2^+$	$d_{5/2}, 2^+$
Nilsson	1 %	38 %	6 %	36 %
PAMD	3 %	35 %	13 %	49 %

Tabla 3.1: Comparación con PAMD de los pesos de las componentes con números cuánticos  $l, j, I$  definidos en el estado fundamental de  $^{17}\text{C}$ .

Obtenemos un primer estado excitado  $1/2^+$  a  $-0,46$  MeV, algo mayor que el valor experimental [28]. Al ser un estado con  $J = 1/2$ ,  $\Omega$  solo puede valer  $1/2$  y se cumple  $u_{jl} = \pm u_{lj\Omega}$ . Por eso, los pesos en nuestro modelo de la tabla 3.2 son los mismos que para las funciones  $u_{lj\Omega}$ . En dicha tabla se comparan estos pesos con los del modelo PAMD, y podemos ver que nuestro modelo tiene un peso menor de componentes con el core excitado. La parte radial de la función de onda se representa en el panel superior de la figura 3.4.

Se obtiene un segundo estado excitado  $5/2^+$  a  $-0,44$  MeV, cercano al valor experimental [28]. En la parte inferior de la figura 3.4 se representan las funciones  $u_{lj\Omega}$  para este estado. En este caso el peso se distribuye aproximadamente por igual entre las componentes  $s_{1/2}, d_{5/2}$  con

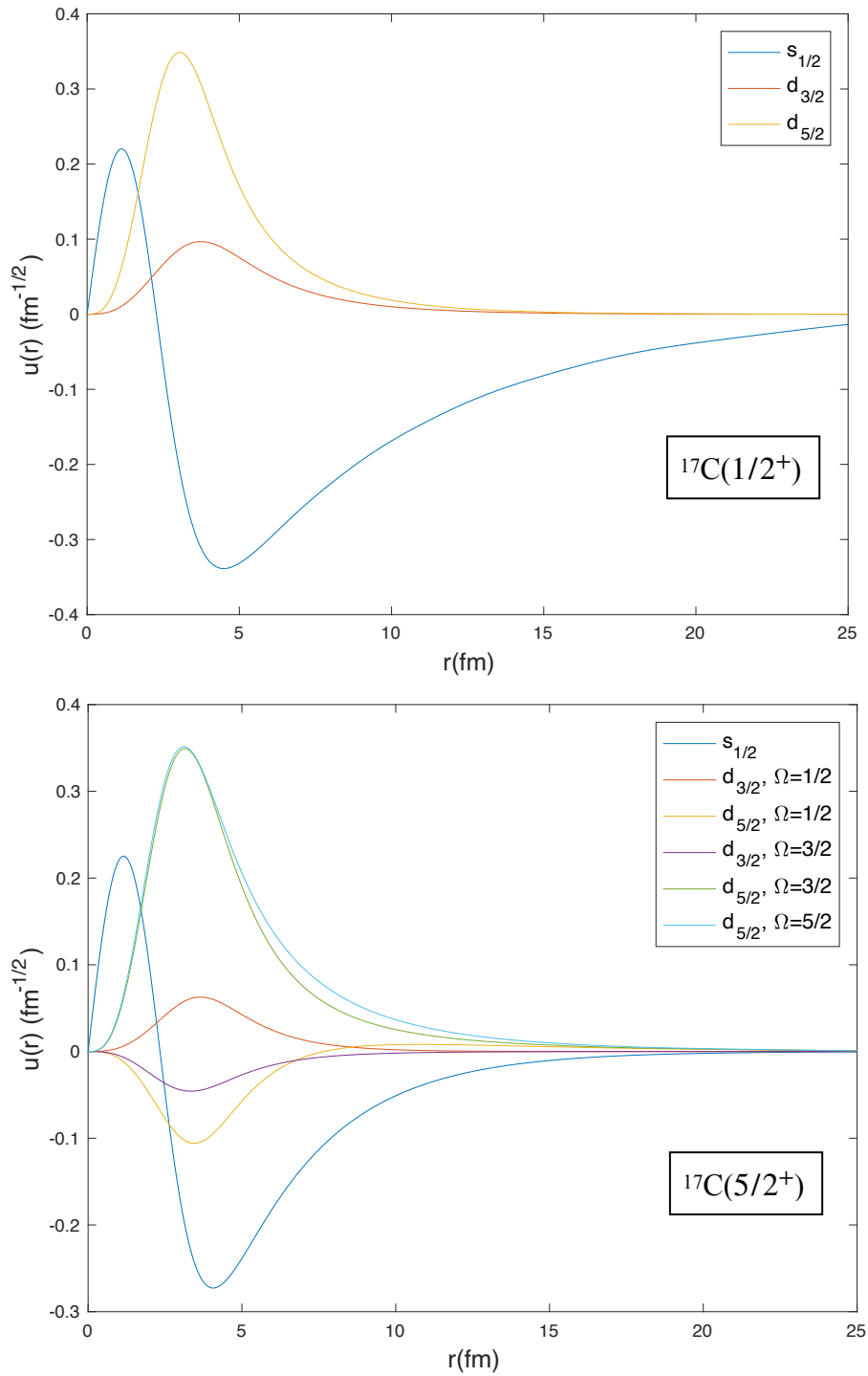


Figura 3.4: Parte radial de la función de onda del primer ( $1/2^+$ ) y segundo estado excitado ( $5/2^+$ ) del núcleo  $^{17}\text{C}$ , situados en el panel superior e inferior respectivamente. Ambas han sido calculadas con una base THO con  $n_{max} = 15$ .



$\Omega = 3/2$  y  $d_{5/2}$  con  $\Omega = 5/2$ , siendo menor del 10% la suma del resto de componentes. El modelo PAMD con el que comparamos considera este estado como una resonancia de baja energía, pero aún así, la forma de sus funciones radiales son similares a las nuestras. Los pesos se pueden comparar en la tabla 3.3. Hay un buen acuerdo entre los modelos para la componente con el core en su estado fundamental, pero para las componentes con un core excitado el peso se distribuye de forma distinta. Nuestro modelo de Nilsson, además, tiene casi un 20% de componentes con  $I > 2$ .

$^{17}\text{C}_{1ex}(1/2^+)$	$s_{1/2}, 0^+$	$d_{3/2}, 2^+$	$d_{5/2}, 2^+$
Nilsson	67 %	3 %	30 %
PAMD	51 %	4 %	45 %

Tabla 3.2: Comparación de los pesos de las funciones  $u_{ijl}$ , para el primer estado excitado del núcleo  $^{17}\text{C}$ , entre nuestro modelo basado en el de Nilsson y el modelo PAMD.

$^{17}\text{C}_{2ex}(5/2^+)$	$d_{5/2}, 0^+$	$s_{1/2}, 2^+$	$d_{3/2}, 2^+$	$d_{5/2}, 2^+$
Nilsson	33 %	29 %	<1 %	21 %
PAMD	32 %	67 %	<1 %	1 %

Tabla 3.3: Comparación de los pesos de las funciones  $u_{ijl}$  entre nuestro modelo y el modelo PAMD para el segundo estado excitado del núcleo  $^{17}\text{C}$ .

## 3.2 Aplicación al núcleo $^{19}\text{C}$

En el caso del núcleo  $^{19}\text{C}$ , experimentalmente se conocen dos estados ligados y dos resonancias [29]. Ajustamos el potencial tomando  $V_0 = 40$  MeV,  $\beta = 0,52$ . El valor de  $\beta$  obtenido con las densidades AMD es 0,4 [19]. La energía de excitación de 1,59 MeV de  $^{18}\text{C}$  [30] nos lleva a un valor de  $\hbar^2/2\mathcal{J}$  entre los 0,2 MeV y 0,3 MeV, pero ha sido necesario disminuirlo a 0,1 MeV para lograr al menos un estado excitado ligado con unos valores de  $V_0$  y  $\beta$  razonables.

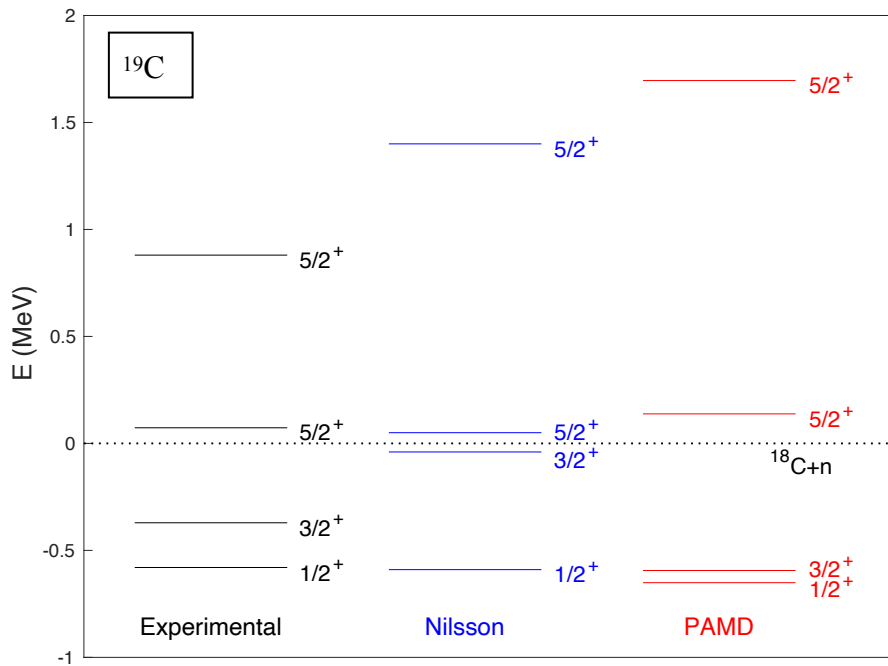


Figura 3.5: Espectro de energías del núcleo  $^{19}\text{C}$ , el momento angular y la paridad de los estados se especifica a la derecha de cada nivel. Se comparan las energías experimentales [27-29,31], las obtenidas con nuestro modelo de Nilsson y con el modelo PAMD [19]. La línea de puntos marca el umbral de separación de un neutrón.

Se utiliza una base THO con  $b = 2,0$  fm,  $\gamma = 2,7$  fm<sup>1/2</sup> y, en el caso de los estados ligados,  $n_{max} = 15$ . En la figura 3.5 se muestra el espectro experimental de este núcleo junto con los resultados de nuestro modelo y el modelo PAMD[19]. Hay algo de discusión sobre si existe un estado ligado 5/2<sup>+</sup> con una energía ligeramente superior al estado 3/2<sup>+</sup>, como aparece en la referencia [28], pero los últimos resultados experimentales [29] parecen indicar que el primer estado 5/2<sup>+</sup> es una resonancia de baja energía, y eso es lo que se considera en el espectro experimental de la figura. Se puede comprobar en el espectro, que a pesar de reducir el valor de  $\hbar^2/2\mathcal{I}$  para ligar el estado 3/2<sup>+</sup>, su energía queda por encima de la experimental.

Se obtiene un estado fundamental 1/2<sup>+</sup> a  $-0,59$  MeV frente al valor  $S_n = 0,58$  MeV experimental [27]. Al ser un estado de  $J = 1/2$ , se cumple:  $u_{jl} = \pm u_{j\Omega}$ , por lo que nos limitamos describir las componentes de  $I$  fijo. Estas se representan en la figura 3.5 comparadas con las obtenidas con el modelo PAMD [19]. En la tabla 3.4 se comparan los pesos de las funciones en ambos modelos. Tanto en la tabla como en la figura, se aprecia que

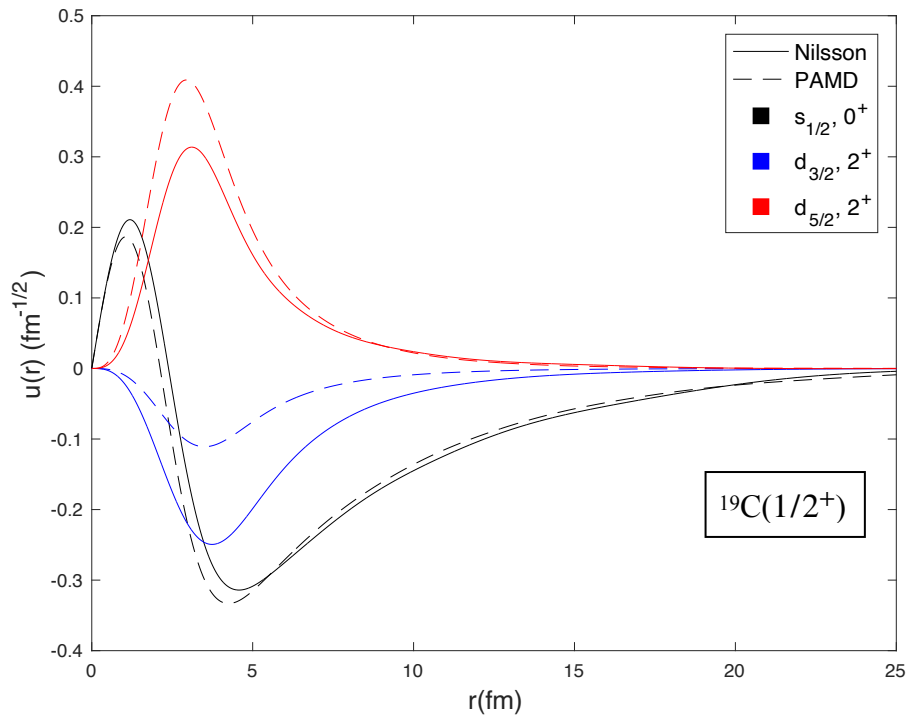


Figura 3.6: Parte radial de la función de onda del estado fundamental ( $1/2^+$ ) del núcleo  $^{19}\text{C}$ . Se compara el resultado de nuestro modelo (línea continua), obtenido con  $n_{max} = 15$ , y el del modelo PAMD [19] (línea discontinua).

nuestro modelo tiene una menor cantidad de la componente  $d_{5/2}$  y mayor de la  $d_{3/2}$  respecto al modelo PAMD. Sin embargo, ambos obtienen que algo más de la mitad del peso se corresponde a la componente con  $0^+$ . Los radios cuadráticos obtenidos son 5,83 fm en nuestro modelo y 5,54 fm en el PAMD. Este radio tan grande va en consonancia con el hecho de que  $^{19}\text{C}$  se considera un núcleo halo. Para el núcleo  $^{19}\text{C}$ , volvemos a tener una mayor extensión espacial para todos los estados con nuestro modelo.

$^{19}\text{C}_{gs}(1/2^+)$	$s_{1/2}, 0^+$	$d_{3/2}, 2^+$	$d_{5/2}, 2^+$
Nilsson	53 %	20 %	25 %
PAMD	55 %	3 %	42 %

Tabla 3.4: Comparación de los pesos de las funciones  $u_{ij}$ , del estado fundamental del núcleo  $^{19}\text{C}$ , entre nuestro modelo y el modelo PAMD.

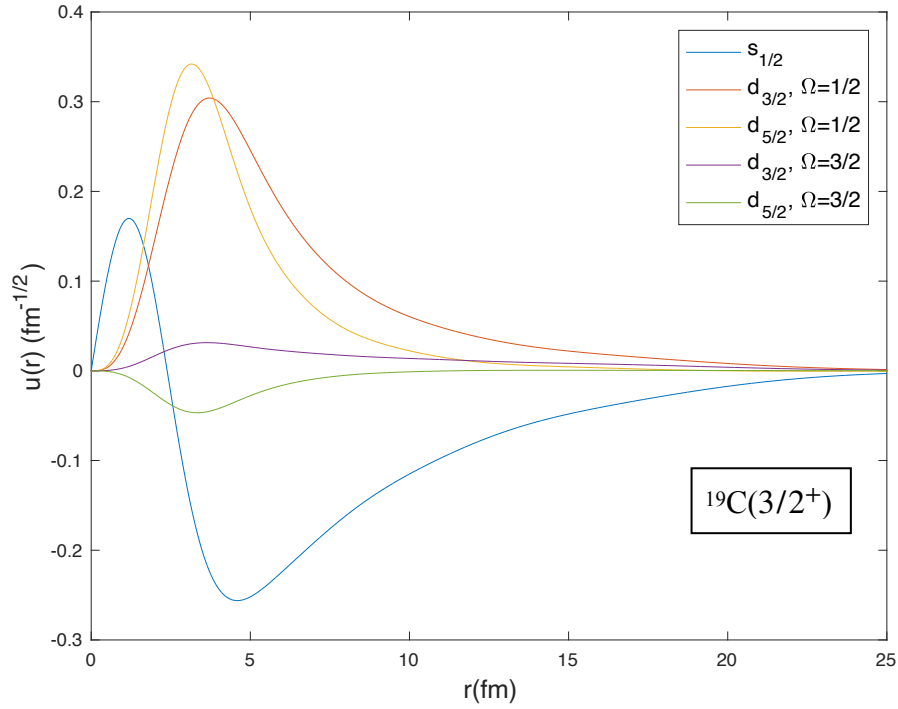


Figura 3.7: Parte radial de la función de onda del primer estado excitado ( $3/2^+$ ) del núcleo  $^{19}\text{C}$ , obtenida con  $n_{max} = 15$ .

Obtenemos un estado excitado  $3/2^+$  a  $-0,04$  MeV muy débilmente ligado. En la figura 3.7 se representa la parte radial de la función de onda para este estado. Casi todo el peso de las funciones se divide, aproximadamente por igual, entre las componentes de  $l \leq 2$  con  $\Omega = 1/2$ . Los pesos de las componentes  $u_{lj}$  se exponen en la tabla 3.5 comparados con los obtenidos por el modelo PAMD, se observan grandes diferencias. A causa del bajo valor de  $\hbar^2/2\mathcal{J}$  que estamos tomando, tenemos una componente  $d_{5/2}, 4^+$  con un 29% de peso, siendo la segunda mayor componente. Por último, se obtiene un radio cuadrático medio de 5,44 fm.

$^{19}\text{C}_{1ex}(3/2^+)$	$d_{3/2}, 0^+$	$s_{1/2}, 2^+$	$d_{3/2}, 2^+$	$d_{5/2}, 2^+$
Nilsson	20 %	35 %	13 %	2 %
PAMD	3 %	44 %	11 %	41 %

Tabla 3.5: Comparación con el modelo PAMD de los pesos de las funciones  $u_{lj}$ , del primer estado excitado del núcleo  $^{19}\text{C}$ .

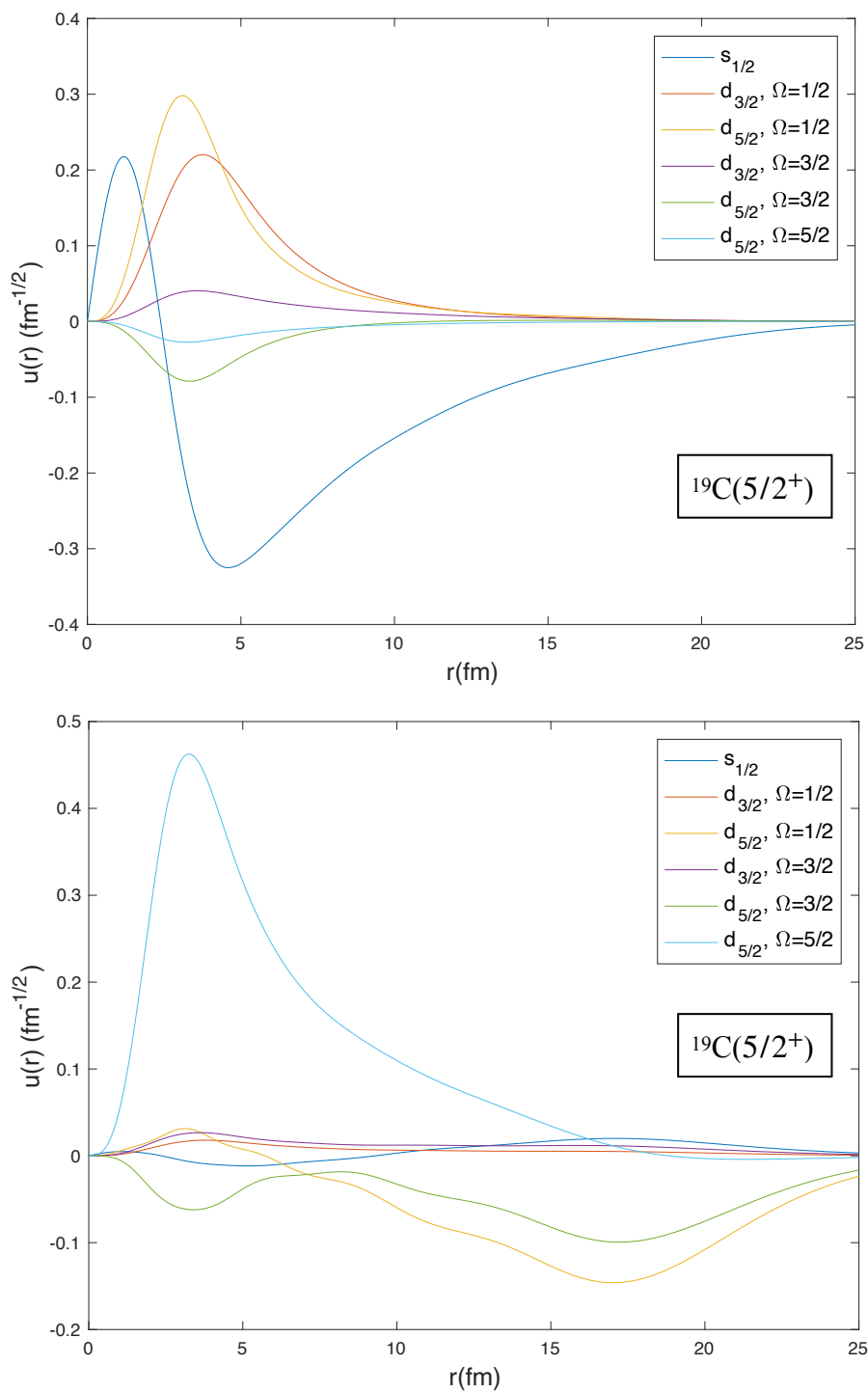


Figura 3.8: Parte radial de la función de onda del continuo para la dos resonancias  $5/2^+$  del núcleo  $^{19}\text{C}$ , obtenidas con  $n_{max} = 10$ . La parte superior corresponde a la de menor energía.

Se obtiene una primera resonancia  $5/2^+$  a 0,05 MeV y una segunda a 1,4 MeV. Para encontrar las resonancias utilizamos el método de estabilización descrito en la sección 2.6. En la figura 2.1 se muestra la aplicación de este método para estas resonancias. En la parte superior de la figura 3.8 se representan la parte radial de la función de onda para la primera resonancia, donde el 58% del peso recae en la componente  $s_{1/2}$ . Lo mismo, para la segunda resonancia  $5/2^+$ , se exponen en la parte inferior. En este caso es la componente  $d_{5/2}$  con  $\Omega = 5/2$  la que domina con un 73%, y el conjunto de las componentes  $d_{5/2}$  suman hasta el 97%. Estas resonancias siguen teniendo una gran contribución de las componentes con  $I = 4$  y grandes diferencias con el modelo PAMD. En las tablas 3.6 y 3.7 se pueden comprobar las diferencias entre los pesos de los modelos. Las funciones se han obtenido tomando autoestados con  $\gamma = 2,7 \text{ fm}^{1/2}$  y  $n_{max} = 10$  aproximadamente a la energías de las resonancias.

$^{19}\text{C}_{1res}(5/2^+)$	$d_{5/2}, 0^+$	$s_{1/2}, 2^+$	$d_{3/2}, 2^+$	$d_{5/2}, 2^+$
Nilsson	3 %	58 %	5 %	10 %
PAMD	27 %	72 %	<1 %	1 %

Tabla 3.6: Comparación con el modelo PAMD del peso de las componentes de la función de onda del continuo para la primera resonancia  $5/2^+$  del núcleo  $^{19}\text{C}$ .

$^{19}\text{C}_{2res}(5/2^+)$	$d_{5/2}, 0^+$	$s_{1/2}, 2^+$	$d_{3/2}, 2^+$	$d_{5/2}, 2^+$
Nilsson	30 %	<1 %	1 %	57 %
PAMD	23 %	11 %	<1 %	65 %

Tabla 3.7: Comparación con el modelo PAMD del peso de las componentes de la función de onda del continuo para la segunda resonancia  $5/2^+$  del núcleo  $^{19}\text{C}$ .

### 3.3 Aplicación al núcleo $^{11}\text{Be}$

Considerando la secuencia de llenado de los núcleos estables en el modelo de capas tradicional, el  $^{11}\text{Be}$  debería tener un estado fundamental  $1/2^-$  y un primer estado excitado  $1/2^+$ . Sin embargo, los datos experimentales indican que presenta un estado fundamental  $1/2^+$  y primer excitado  $1/2^-$ . Esta inversión de niveles convierte al  $^{11}\text{Be}$  en un núcleo

especialmente peculiar. En un primer modelo, consideramos que la inversión de niveles es consecuencia de la deformación y se puede reproducir con el potencial descrito en la metodología, que etiquetamos como 1V. Este potencial utiliza  $a = 0,67$  fm y  $R = 2,824$  fm, teniendo en cuenta los resultados de [2-4]. Tomamos  $V_0 = 39,86$  MeV,  $\beta = 0,81$  y  $\hbar^2/2\mathcal{J} = 0,5$  MeV, siendo este último valor aproximadamente compatible con los 0,56 MeV que se obtienen de la energía de excitación del  $^{10}\text{Be}$ : 3,37 MeV [32]. Para este potencial hemos utilizado una base con  $b = 2,1$  fm,  $\gamma = 2,8$  fm $^{1/2}$  y, para los estados ligados,  $n_{max} = 15$ .

El modelo 1V reproduce bien las energías de los estados ligados, pero dista mucho de reproducir la energía de las resonancias, como sí hacen otros modelos PRM [20] y el PAMD con el que venimos comparando [19]. Probamos un segundo modelo 2V, que pretende utilizar un potencial similar a los usados en los modelos PRM y PAMD. Como en estos modelos, el potencial central depende de la paridad:

$$V_c(r) = \begin{cases} -V_0 f(r) & \pi = 1 \\ -V_1 f(r) & \pi = -1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Este modelo supone que la inversión de los niveles no se debe exclusivamente a la deformación, sino que hay otros efectos no considerados que pueden intervenir. Se reajusta el término de espín-órbita para incluir el mismo potencial que se utiliza en el modelo PRM [20]:

$$V_{ls}(r) = \frac{4V_s}{r} \frac{df(r)}{dr}, \quad (3.2)$$

siendo  $V_s = 8,5$  MeV. Además, cambiamos los parámetros de la función de Woods-saxon:  $a = 0,65$  fm y  $R = 2,483$  fm. Consideramos la misma deformación que el modelo PRM [20],  $\beta = 0,67$  y tomamos  $\hbar^2/2\mathcal{J} = 0,6$  MeV. Con este modelo, ajustamos  $V_0 = 52,64$  MeV y  $V_1 = 49,80$  MeV para reproducir los niveles energéticos experimentales [33]. Se utiliza una base con  $b = 2,0$  fm,  $\gamma = 2,5$  fm $^{1/2}$  y, para los estados ligados,  $n_{max} = 15$ .

Para ambos modelos se exponen los resultados obtenidos para los dos estados ligados y para dos resonancias. Las energías de estos estados se comparan entre ambos modelos, los valores experimentales [33] y el modelo PAMD [19] en la figura 3.9. Observamos cómo el modelo

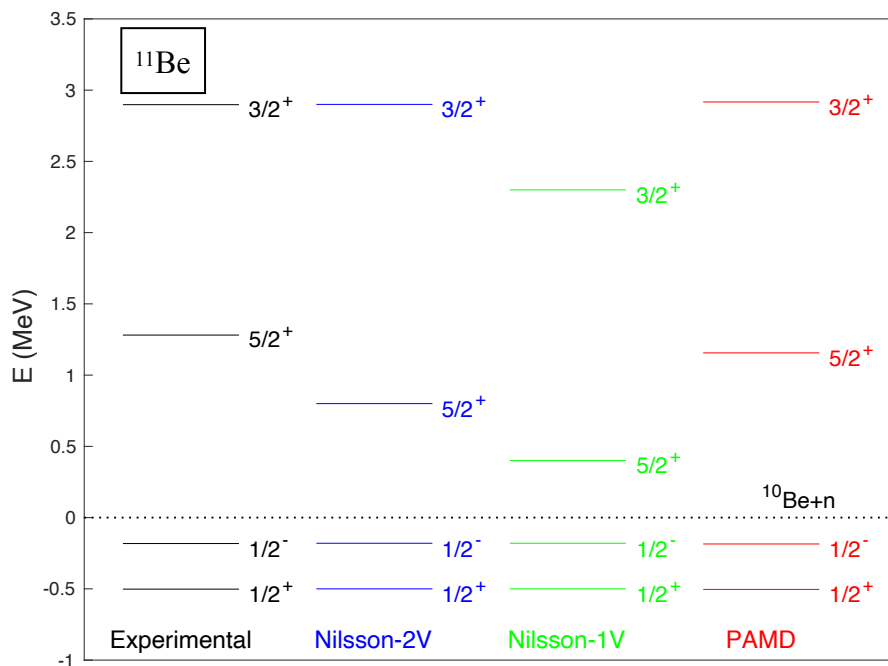


Figura 3.9: Espectro de energías del núcleo  $^{11}\text{Be}$ , el momento angular y la paridad de los estados se especifica a la derecha de cada nivel. Se comparan las energías experimentales [33] con las obtenidas con nuestro modelo de Nilsson de potencial dependiente de la paridad (2V) y de potencial único (1V) junto con el modelo PAMD [19]. La línea de puntos indica el umbral de separación de un neutrón.

PAMD se ajusta casi a la perfección a los niveles experimentales, mientras que las resonancias del modelo 1V quedan muy por debajo en energía. El modelo 2V sí que se ajusta mejor a los resultados experimentales, únicamente la resonancia  $5/2^+$  se encuentra por debajo del caso experimental, pero por encima del caso 1V.

Para nuestros dos modelos se obtiene un estado fundamental  $1/2^+$  de  $-0,50$  MeV, que se ajusta perfectamente al valor experimental  $S_n = 0,50$  MeV [33]. En el panel superior de la figura 3.10 se compara la parte radial de la función de onda resultante de nuestros modelos con el modelo PAMD. Los pesos de las componentes se muestran en la tabla 3.8. Aunque los resultados de nuestros dos modelos se acercan a los de PAMD, los del modelo 2V son más próximos. En concreto, el peso de la componente con un neutrón en un orbital  $d_{5/2}$  y el core de  $^{10}\text{Be}$  en su estado  $2^+$ , es bastante superior en el modelo 1V, lo que tiene consecuencias en el cálculo de reacciones de transferencia. Aún así, en los tres casos hay un fuerte dominio de



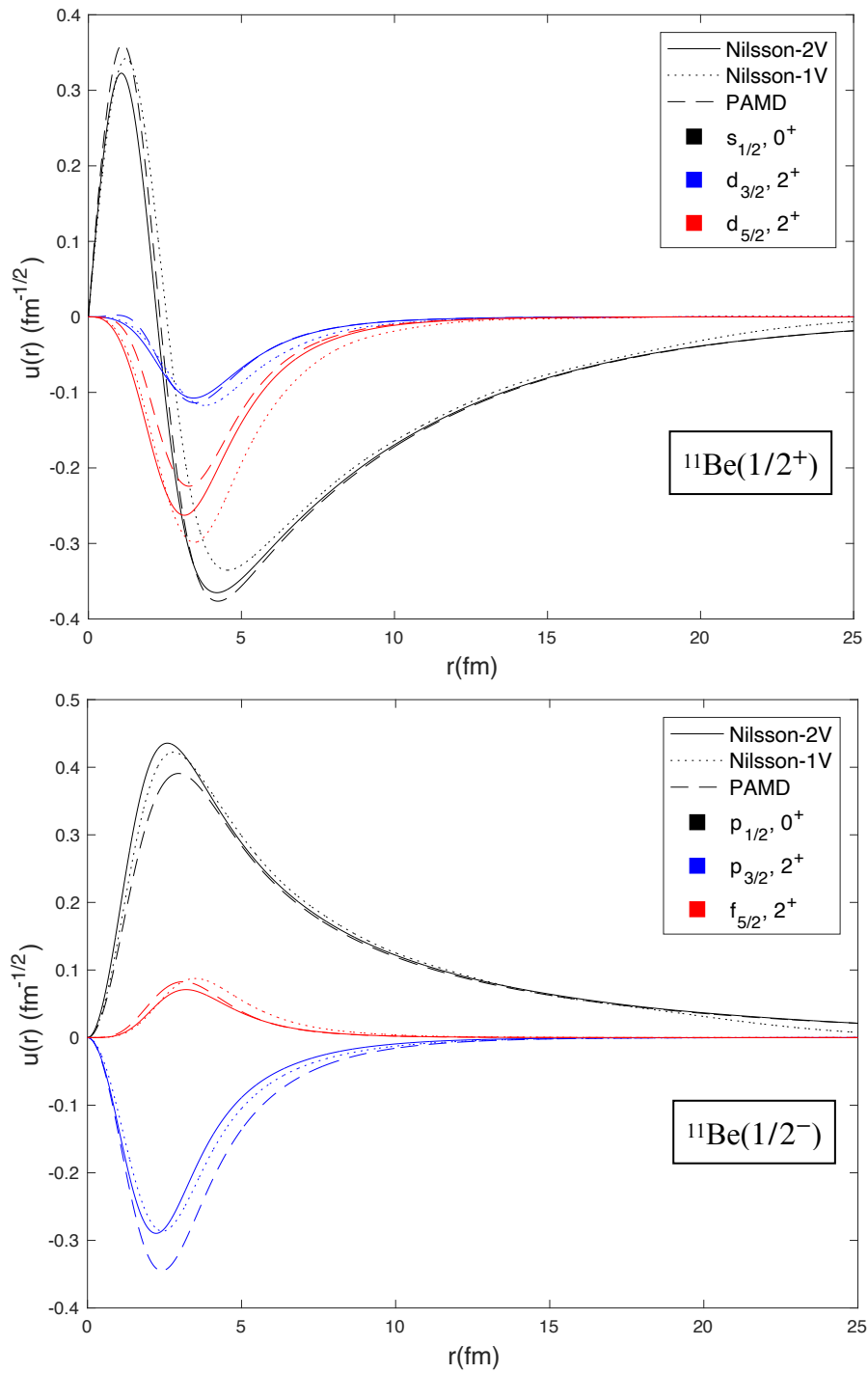


Figura 3.10: Parte radial de la función de onda del estado fundamental ( $1/2^+$ ) del núcleo  $^{11}\text{Be}$  (parte superior) y de su primer estado excitado ( $1/2^-$ , parte inferior). Se comparan los resultados de nuestros modelos 2V (línea continua) y 1V (punteada) con los del modelo PAMD [19] (discontinua). Todas las funciones han sido generadas con  $n_{max} = 15$ .

la componente  $s_{1/2}$ . Los radios cuadráticos obtenidos son de 6,47 fm para nuestro modelo 2V, 6,37 fm para 1V y 6,52 fm para PAMD. En este caso es el modelo PAMD el que tiene una mayor extensión espacial, pero la diferencia con el modelo 2V es menor del 1%.

$^{11}\text{Be}_{gs}(1/2^+)$	$s_{1/2}, 0^+$	$d_{3/2}, 2^+$	$d_{5/2}, 2^+$
Nilsson-2V	79 %	3 %	17 %
Nilsson-1V	72 %	4 %	24 %
PAMD	85 %	3 %	12 %

Tabla 3.8: Comparación del peso de las funciones  $u_{ijl}$ , del estado fundamental del núcleo  $^{11}\text{Be}$ , entre nuestros modelos y el modelo PAMD.

Se obtiene un primer estado excitado  $1/2^-$  de  $-0,18$  MeV. En la parte inferior de la figura 3.10 comparamos nuestras funciones  $u_{ijl}$  para los modelos 1V, 2V y PAMD [19], los pesos aparecen en la tabla 3.9. En este caso hay muy poca diferencia entre los resultados de nuestros dos modelos, que a su vez se acercan a los del modelo PAMD. Los radios cuadráticos medios de los tres modelos son muy similares: 5,43 fm para nuestro modelo 2V, 5,57 fm para 1V y 5,48 fm para PAMD.

$^{11}\text{Be}_{1ex}(1/2^-)$	$p_{1/2}, 0^+$	$p_{3/2}, 2^+$	$f_{5/2}, 2^+$
Nilsson-2V	79 %	19 %	1 %
Nilsson-1V	77 %	20 %	2 %
PAMD	68 %	30 %	2 %

Tabla 3.9: Comparación del peso de las funciones  $u_{ijl}$ , del primer estado excitado del núcleo  $^{11}\text{Be}$ , entre nuestros modelos y el modelo PAMD.

Además de los dos estados ligados, se han estudiado dos resonancias, una  $5/2^+$  y otra  $3/2^+$ , encontradas por el método de estabilización descrito en la sección 2.6 tanto para  $\gamma$  como para  $n_{max}$ .

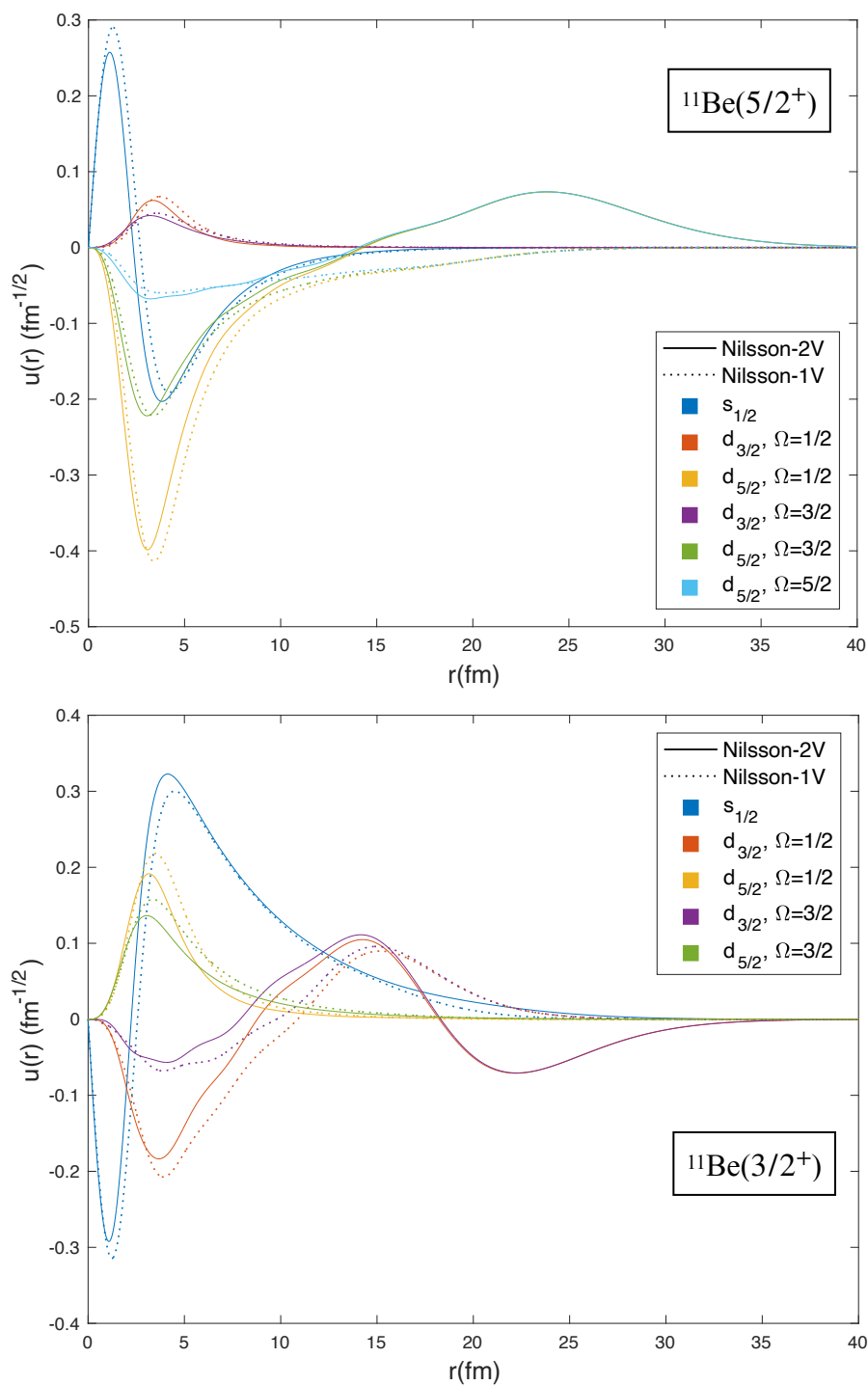


Figura 3.11: Parte radial de la función de onda del continuo para la resonancia  $5/2^+$  (parte superior) y  $3/2^+$  (parte inferior) del núcleo  $^{11}\text{Be}$ . Aparecen los resultados del modelo 2V (línea continua) y 1V (punteada).

Para el modelo con el potencial dependiente de la paridad, encontramos una resonancia  $5/2^+$  a 0,82 MeV, para nuestro otro potencial se encuentra a 0,40 MeV, bastante por debajo de la energía experimental. Las funciones  $u_{lj\Omega}$  de los estados más cercanos a la resonancia se representan en el panel superior de la figura 3.11. Estas funciones han sido generadas con  $n_{max} = 12$  para el potencial 2V y 10 para el potencial 1V.

La resonancia  $3/2^+$  se encuentra a 2,91 MeV para el modelo de Nilsson-2V y a 2,29 MeV para 1V, de nuevo muy por debajo de la energía experimental [33] en este último caso. Las funciones  $u_{lj\Omega}$ , que han sido generadas con  $n_{max} = 10$  para 2V y 8 para el 1V, se representan en el panel inferior de la figura 3.11.

Los pesos de los dos modelos son casi idénticos. En los dos, algo más de la mitad de la norma de la función de onda corresponde a la componente  $d_{5/2}$  con  $\Omega = 1/2$  para la resonancia  $5/2^+$  y a la  $s_{1/2}$  para la  $3/2^+$ .

# 4. Aplicación a reacciones de transferencia

---

## 4.1 $^{11}\text{Be}(p,d)^{10}\text{Be}$

Se han calculado las secciones eficaces diferenciales de la reacción  $^{11}\text{Be}(p,d)^{10}\text{Be}$  para dos estados finales de  $^{10}\text{Be}$  (el estado fundamental y el primer estado excitado), utilizando las funciones resultantes de nuestros dos modelos y del modelo PAMD [19]. Estos resultados se comparan con los experimentales [5] en la figura 4.1.

La medida experimental procede del *Research Center for Nuclear Physics* (RCNP), en Osaka. Fue obtenida para una energía en el sistema laboratorio de 26,9 MeV/nucleón. Debido a que  $^{11}\text{Be}$  es radiactivo, la reacción fue realizada en cinemática inversa, es decir, con un haz de  $^{11}\text{Be}$  y un blanco con protones, concretamente se usó polietileno  $(\text{CH}_2)_n$ . La motivación de este experimento era determinar los pesos de las componentes  $s_{1/2}, 0^+$  y  $d_{5/2}, 2^+$  para el núcleo  $^{11}\text{Be}$  utilizando distintos potenciales ópticos.

En nuestro caso, para el potencial óptico del sistema inicial ( $U_{pA}$ ), utilizamos un potencial CH89 [34], utilizando unos parámetros ligeramente reajustados para reproducir los datos de dispersión elástica obtenidos en el mismo experimento [35]. Para el potencial del sistema final ( $U_{dC}$ ), se ha calculado un potencial “adiabático”, siguiendo la prescripción de Johnson-Tandy [36]. Para potencial de ligadura  $V_{pn}$ , utilizamos un potencial *Reid Soft Core* [37], que está ajustado para reproducir las propiedades del estado ligado del deuterón del deuterón.

En el panel superior de la figura 4.1 se muestran los resultados para el canal  $^{11}\text{Be}(p,d)^{10}\text{Be}(0^+)$ , donde se observa que los modelos tienen un comportamiento muy similar. La diferencia más importante está en el caso 1V, que se separa de los demás entre los 20° y los 50°. Los resultados experimentales quedan ligeramente por encima de los teóricos, siendo el modelo PAMD el que más se acerca, aunque con muy poca diferencia. En cualquier caso los resultados son bastante próximos y están dentro del margen de error de los resultados experimentales.

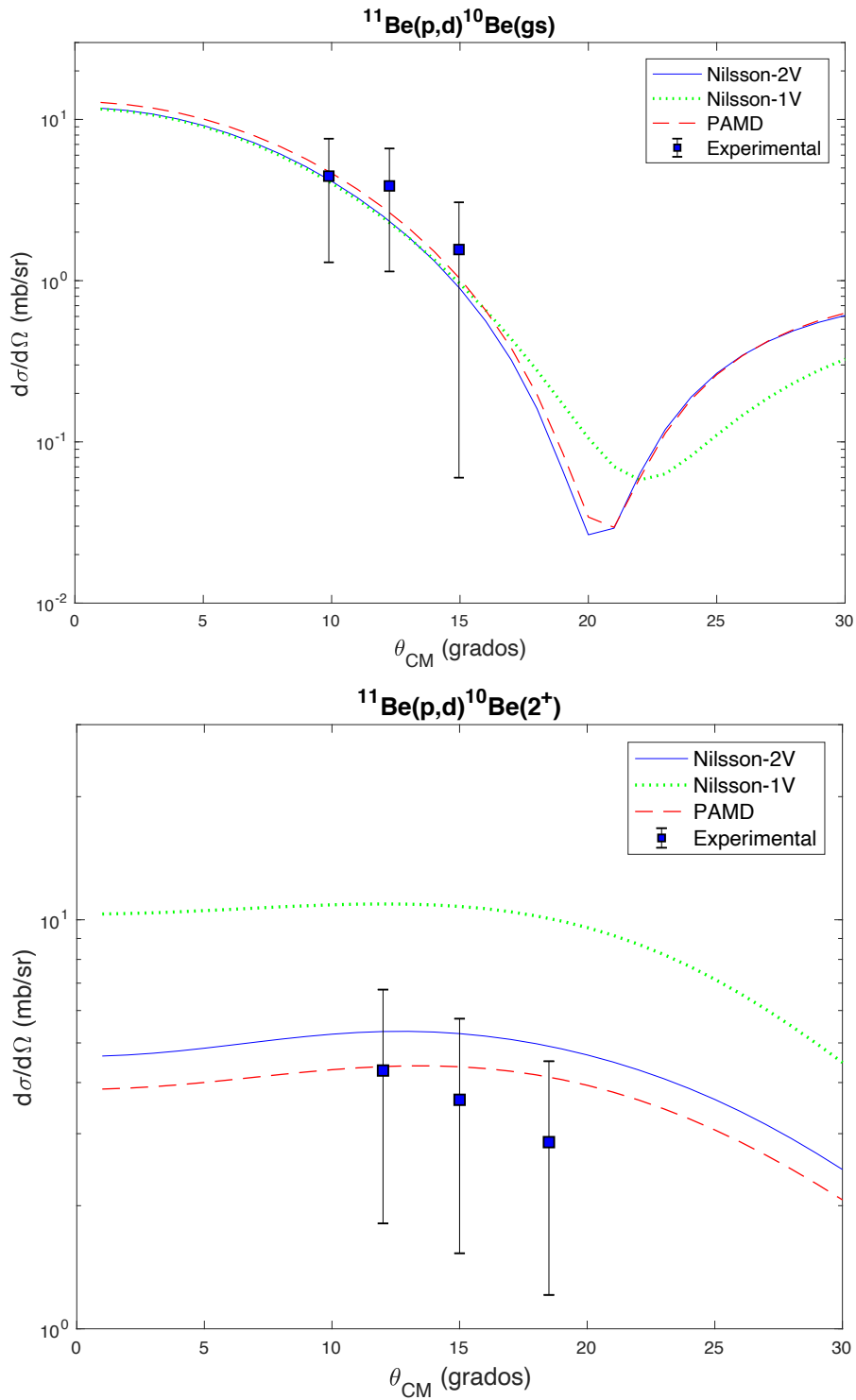


Figura 4.1: Sección eficaz diferencial de la reacción  $^{11}\text{Be}(p,d)^{10}\text{Be}$  a una energía incidente de 26,9 MeV/nucleón. En la parte superior se muestran los resultados para el canal en el cual el núcleo  $^{10}\text{Be}$  queda en su estado fundamental  $0^+$ , abajo para el canal en el que queda en su estado excitado  $2^+$ . Se representan los resultados de nuestros dos modelos, el modelo PAMD [19] y los datos experimentales [5].

En el panel inferior se muestran los resultados para el canal  $^{11}\text{Be}(p,d)^{10}\text{Be}(2^+)$ . En este caso se observa una mayor discrepancia entre los distintos modelos. En primer lugar, el modelo 1V obtiene más del doble de sección eficaz que el modelo PAMD, una diferencia muy significativa. El modelo 2V sí se acerca bastante más al PAMD, pero se queda por encima. En comparación con los resultados experimentales es claramente el modelo PAMD el que más se acerca, entrando dentro del margen de error de dos de los tres puntos experimentales. Nuestro modelo 2V, a pesar de acercarse al PAMD, no llega a entrar en el margen de error de ninguno de los puntos, y el 1V está muy por encima.

La principal causa de la diferencia entre el modelo PAMD y el nuestro está en el peso de la componente con el neutrón en el orbital  $d_{5/2}$  y el core en su estado  $0^+$  ( $d_{5/2}, 0^+$ ), que ya analizamos en la sección de estructura. Ya comentamos que la contribución de las funciones  $\phi_{jl}^{\lambda,J^\pi}$  a la sección eficaz es proporcional a su peso, por lo que observando la tabla 3.6 vemos que el comportamiento de la sección eficaz  $^{11}\text{Be}(p,d)^{10}\text{Be}(2^+)$  se debe mayoritariamente a la componente  $d_{5/2}, 0^+$ . En la misma tabla comprobamos que el peso de esta componente en el modelo 1V es el doble que en el PAMD, similar a la relación entre las secciones eficaces. En el caso 2V la diferencia de pesos es menor, al igual que en las secciones eficaces.

En conclusión, la comparación con las medidas para la reacción  $^{11}\text{Be}(p,d)^{10}\text{Be}$  sugieren que los modelos 2V y 1V proporcionan una descripción razonable para la componente  $^{10}\text{Be}(\text{gs})$ . Para la componente  $^{10}\text{Be}(2^+)$ , dichos modelos parecen dar un peso algo elevado, con un mejor acuerdo para el modelo 2V que para 1V. Sería interesante investigar la sensibilidad de estos resultados con respecto a los potenciales empleados en el cálculo de reacción, así como estudiar otras reacciones de  $^{11}\text{Be}$ .

## 4.2 $^{16}\text{C}(d,p)^{17}\text{C}$

Se han calculado las secciones eficaces diferenciales de la reacción  $^{16}\text{C}(d,p)^{17}\text{C}$  para tres estados finales de  $^{17}\text{C}$  (los tres ligados), utilizando las funciones resultantes de nuestro modelo y del modelo PAMD [19]. Estos resultados se comparan con los datos experimentales [6] en la figura 4.2 y la figura 4.3.

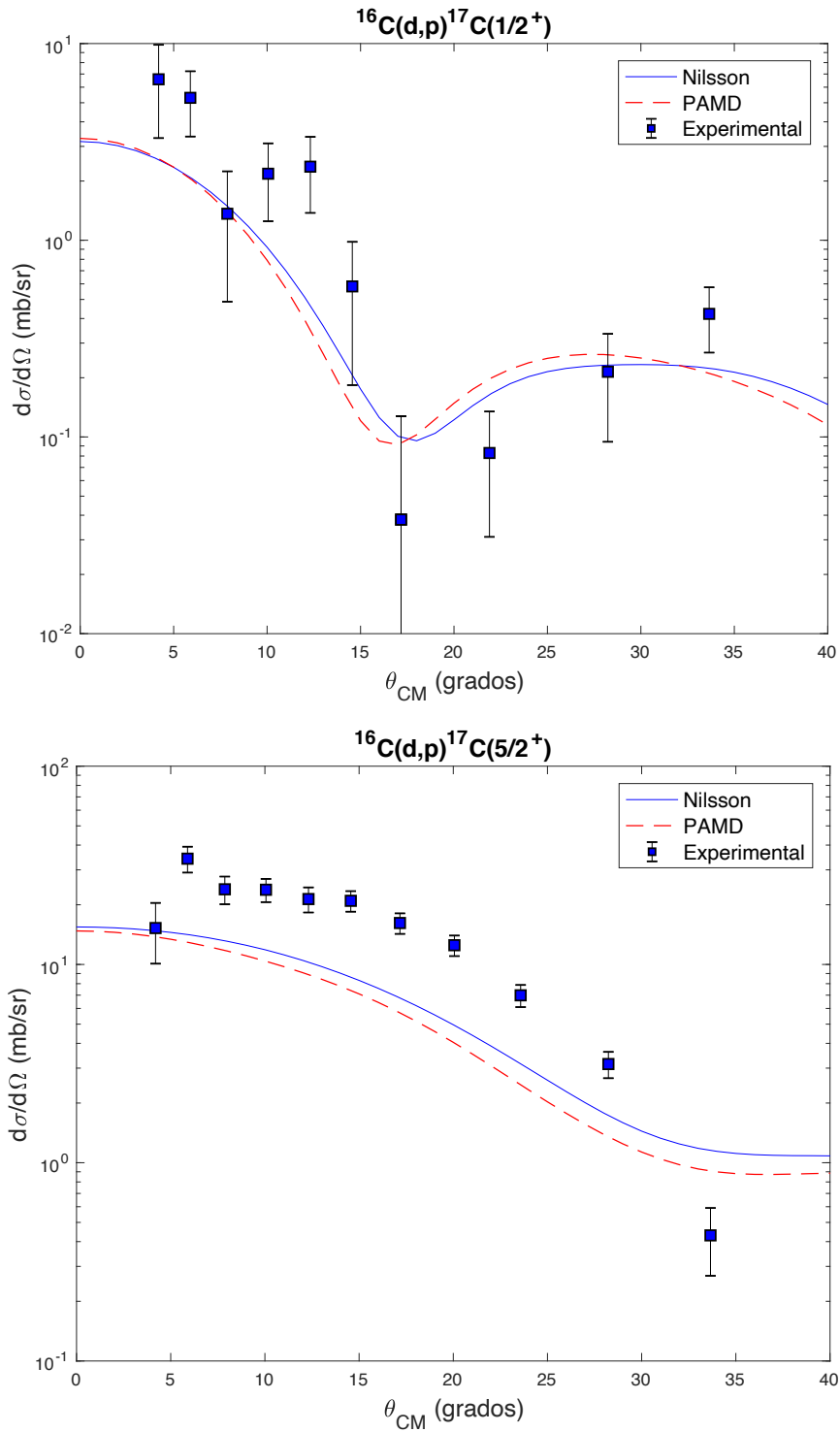


Figura 4.2: Sección eficaz diferencial de la reacción  $^{16}\text{C}(d,p)^{17}\text{C}$  a una energía incidente de 17,2 MeV/nucleón. En la parte superior se muestran los resultados para el canal en el que el núcleo  $^{17}\text{C}$  queda en su primer estado excitado  $1/2^+$ , en la parte inferior para el segundo estado excitado  $5/2^+$ . Se representan los resultados de nuestro modelo, el modelo PAMD [19] y los datos experimentales [6].



En nuestro cálculo, utilizamos un potencial óptico CH89 [34] para el sistema final ( $U_{pA}$ ) y, para el potencial de ligadura del deuterón ( $V_{pn}$ ), el mismo potencial *Reid Soft Core* [37] que en la reacción anterior. En el caso del potencial del sistema inicial ( $U_{dC}$ ), se ha calculado un potencial “adiabático”, siguiendo la prescripción de Johnson-Tandy [36], cómo se hizo para el caso de la reacción  $^{11}\text{Be}(\text{p},\text{d})^{10}\text{Be}$ .

La medida experimental procede del *Grand Accélérateur National d'Ions Lourds* (GANIL), en Francia. De nuevo la reacción fue realizada en cinemática inversa, con un haz de  $^{16}\text{C}$  de 17,2 MeV/nucleón. Como blanco se utilizó polietileno deuterado  $\text{CD}_2$ . En el experimento se ha medido la sección eficaz diferencial para los casos en los que el núcleo  $^{17}\text{C}$  queda en un estado excitado y para la reacción  $^{16}\text{C}(\text{d},\text{p})^{17}\text{C}$  en general. Para poder separar la sección eficaz para los estados excitados se midió la radiación  $\gamma$  en coincidencia. Debido a esto, no se tienen datos experimentales para el caso  $^{16}\text{C}(\text{d},\text{p})^{17}\text{C}(\text{gs})$ .

En la parte superior de la figura 4.2 se muestran los resultados para los cuales el núcleo  $^{17}\text{C}$  queda en su primer estado excitado ( $^{16}\text{C}(\text{d},\text{p})^{17}\text{C}(1/2^+)$ ). Comprobamos que los resultados de los dos modelos son muy similares, y que se ajustan moderadamente bien a los resultados experimentales. Con estos valores experimentales, utilizando potenciales CH89, se predice un peso, para  $^{17}\text{C}$ , de la componente con el neutrón en un orbital  $s_{1/2}$  y el core en su estado  $0^+$  ( $s_{1/2}, 0^+$ ), de  $0,80 \pm 0,22$  [6]. Esto es compatible con el 67% que obtiene nuestro modelo de Nilsson, no tanto con el 51% del modelo PAMD.

En la parte inferior de la figura se muestra el caso en el que se obtiene  $^{17}\text{C}$  en su segundo estado excitado. En este caso los dos modelos quedan, en general, por debajo de los datos experimentales. El valor obtenido, para el peso de la componente  $d_{5/2}, 0^+$  de  $^{17}\text{C}$ , mediante el análisis de los datos experimentales en la aproximación DWBA es  $0,62 \pm 0,13$  [6]. Los modelos de Nilsson y PAMD obtienen poco más de la mitad, nuestro modelo obtiene 0,33 y el modelo PAMD 0,32. Podemos señalar que, aunque la diferencia es muy pequeña, nuestro modelo se acerca más a los datos experimentales que el modelo PAMD.

En la figura 4.3 se muestra la sección eficaz diferencial total para la reacción  $^{16}\text{C}(\text{d},\text{p})^{17}\text{C}$ . Para obtener este resultado con los modelos utilizados se suman las contribuciones de cada estado final de  $^{17}\text{C}$ , incluyendo el estado fundamental  $3/2^+$ . El resultado es similar al caso

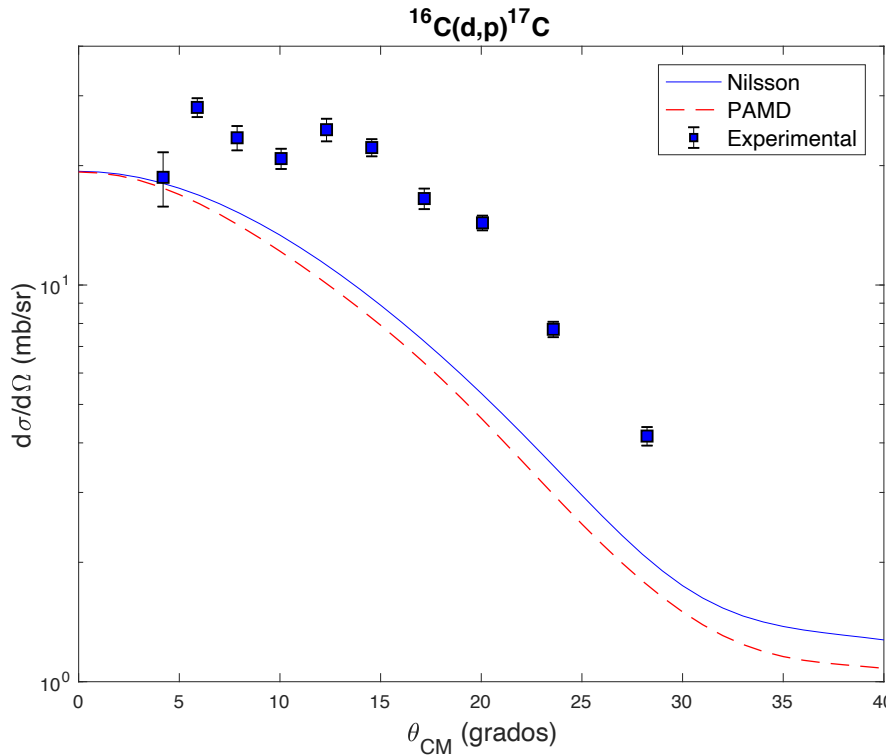


Figura 4.3: Sección eficaz diferencial de la reacción  $^{16}\text{C}(d,p)^{17}\text{C}$  a una energía incidente de 17,2 MeV/nucleón. Se muestran los resultados de nuestro modelo, el modelo PAMD [19] y los datos experimentales [6].

$^{17}\text{C}(5/2^+)$ , que es claramente la componente dominante. Por tanto, los resultados de ambos modelos vuelven a estar por debajo de los resultados experimentales, siendo los resultados de nuestro modelo ligeramente más cercanos. Considerando estos datos experimentales, junto con los de la figura 4.2, se obtiene un peso de la componente  $d_{3/2}, 0^+$  de  $^{17}\text{C}$ , en su estado fundamental, de  $0,03^{+0,05}_{-0,03}$  [6]. Los pesos, 3% para el modelo de Nilsson y 1% para el modelo PAMD, son consistentes con este resultado.

En conclusión, la comparación de nuestro modelo con las medidas experimentales para la reacción  $^{16}\text{C}(d,p)^{17}\text{C}$  obtiene un acuerdo aceptable para la componente  $^{17}\text{C}(1/2^+)$ . También parece que nuestro modelo proporciona una descripción razonable para la componente  $^{17}\text{C}(\text{gs})$ . La mayor diferencia está en la componente  $^{17}\text{C}(5/2^+)$ , debido al pequeño peso de la componente  $d_{5/2}, 0^+$  para el segundo estado excitado de  $^{17}\text{C}$  en nuestro modelo. Seguramente se puede mejorar el acuerdo añadiendo distintos efectos adicionales no considerados en la estructura del núcleo  $^{17}\text{C}$ , como el apareamiento.

# 5. Conclusiones

---

En este trabajo hemos estudiado núcleos exóticos ligeros con un número par de protones e impar de neutrones. Simplificamos el problema considerando un sistema de dos cuerpos: un neutrón y el core. Los núcleos que estudiamos tienen una deformación considerable respecto a la simetría esférica. Por simplicidad, se considera un core elipsoidal con simetría axial. De esta forma, nos basamos en el modelo de Nilsson para núcleos deformados, incluyendo un grado de libertad rotacional para el core. Utilizamos un potencial central de Woods-Saxon al que añadimos un término de espín-órbita, cuya dependencia radial viene dada por la derivada del potencial central, y el término deformado, proporcional al armónico esférico  $Y_{20}$ . También se incluye el hamiltoniano rotacional del core. Se diagonaliza en tres pasos el hamiltoniano completo en la base THO, obteniendo estados de momento angular y paridad  $J^\pi$  definidos. El momento angular del neutrón  $j$  y su proyección sobre el eje axial  $\Omega$  no son constantes de movimiento, de manera que los estados son una suma de distintas componentes con  $j$  y  $\Omega$  definidos.

Se han obtenido resultados de estructura para los núcleos  $^{17}\text{C}$ ,  $^{19}\text{C}$  y  $^{11}\text{Be}$ . Para cada uno de ellos, se ajustan la profundidad del potencial y el parámetro de deformación  $\beta$  intentando acercarnos lo máximo posible al espectro experimental. El momento de inercia del core se ajusta en cada caso para reproducir la energía del primer estado excitado ( $2^+$ ) de  $^{16}\text{C}$ ,  $^{18}\text{C}$  y  $^{10}\text{Be}$ . Obtenemos, para cada núcleo, los niveles de energía de los estados ligados y sus respectivas funciones de onda. Se consigue lo mismo para algunas resonancias aplicando el método de estabilización. Todos los resultados obtenidos se comparan con los de un modelo PAMD [19].

En el caso del  $^{17}\text{C}$  también se obtiene un diagrama de Nilsson idéntico al de la referencia [3]. El espectro obtenido se ajusta bastante bien a los resultados experimentales, mejor que el modelo PAMD. Las funciones de onda son similares en ambos modelos, pero con algunas diferencias importantes en los pesos de las componentes.

Para el  $^{19}\text{C}$  es necesario aumentar el momento de inercia respecto al que predice  $^{18}\text{C}$ , de lo contrario no se consigue ningún estado excitado ligado. El espectro no mejora mucho el resultado del modelo PAMD, y sus diferencias en los pesos de las componentes son muy significativas.

Para el núcleo  $^{11}\text{Be}$  se utiliza en un primer momento el mismo modelo de potencial que para los núcleos de carbono (1V). Para este potencial se obtiene un espectro que se ajusta perfectamente en los estados ligados, pero las resonancias quedan muy por debajo de los resultados experimentales. Las componentes de las funciones de onda difieren notablemente de las del modelo PAMD en algunos casos. En particular, para el estado fundamental, el peso de la componente  $d_{5/2}$  es muy superior en nuestro modelo. El gran peso de la componente  $d_{5/2}$  nos lleva luego a una sección eficaz para el proceso  $^{11}\text{Be}(p,d)^{10}\text{Be}(2^+)$  muy superior a los resultados experimentales. Con la idea de acercarnos más a los buenos resultados de los modelos PRM, o concretamente el modelo PAMD [19], probamos un nuevo potencial (2V) con una parte central dependiente de la paridad, una función de Wood-Saxon más estrecha y una deformación menor. Para este segundo potencial el espectro mejora, las resonancias no llegan a acercarse tanto a las experimentales como el modelo PAMD, pero se acercan más que el potencial anterior. En las funciones de onda sigue habiendo algunas diferencias, pero en general mucho menores.

Se han calculado las secciones eficaces diferenciales de la reacción  $^{11}\text{Be}(p,d)^{10}\text{Be}$ , para los estados finales  $^{10}\text{Be}(0^+)$  y  $^{10}\text{Be}(2^+)$ , utilizando las funciones de onda de  $^{11}\text{Be}$  de los distintos modelos. En el caso en el que el  $^{10}\text{Be}$  se queda en su estado fundamental,  $^{11}\text{Be}(p,d)^{10}\text{Be}(0^+)$ , los resultados de los tres modelos son similares y entran en el margen de error de los datos experimentales. Sin embargo, para el caso  $^{11}\text{Be}(p,d)^{10}\text{Be}(2^+)$ , como ya comentábamos, el primer modelo daba una sección eficaz muy por encima de los resultados del modelo PAMD y los resultados experimentales. El segundo se acerca bastante más al modelo PAMD, pero queda algo por encima, sin llegar a entrar en los márgenes de error de los datos experimentales. El modelo PAMD es más compatible con los datos experimentales.

A la vista de los resultados obtenidos para el  $^{11}\text{Be}$ , es necesario utilizar una profundidad distinta para los estados de paridad positiva y negativa. De lo contrario, hay que utilizar un parámetro  $\beta$  muy grande y aumentar levemente el momento de inercia del core para

---

reproducir la energía de excitación del primer estado excitado  $1/2^-$ . La gran deformación provoca un gran peso de la componente  $d_{5/2}$ , que es por tanto la principal causa de la discrepancia con la sección eficaz experimental. El porqué del potencial dependiente de la paridad está en la peculiaridad del núcleo  $^{11}\text{Be}$ , que tiene un estado fundamental  $1/2^+$  y primer estado excitado  $1/2^-$ , en vez de lo contrario, que es lo que predice el modelo de capas para núcleos del valle de estabilidad. El potencial 2V considera que hay otras causas además de la deformación para esta peculiaridad, como el efecto del principio de exclusión Pauli en la ocupación de los niveles monoparticulares. Sin embargo, el potencial 1V supone que es exclusivamente por la deformación, de ahí el elevado valor de  $\beta$ . También hemos comprobado que nuestro modelo de Nilsson empeora los resultados del modelo PAMD, por tanto, aunque se podrían estudiar distintas modificaciones, parece que el modelo PAMD es más adecuado para este núcleo.

También se han obtenido las secciones eficaces diferenciales de la reacción  $^{16}\text{C}(d,p)^{17}\text{C}$ , para los tres estados ligados finales posibles de  $^{17}\text{C}$ , utilizando las funciones de onda del núcleo  $^{17}\text{C}$ . Para las componentes  $^{17}\text{C}(\text{gs})$  y  $^{17}\text{C}(1/2^+)$  se obtienen unos resultados aceptables. Para la componente  $^{17}\text{C}(5/2^+)$ , se obtiene una sección eficaz significativamente menor que las medidas experimentales. La principal causa de esta diferencia debe ser el pequeño peso de la componente de la función de onda de  $^{17}\text{C}$ , en la que el neutrón está en un orbital  $d_{5/2}$  y el core está en un estado  $0^+$ . Se podría intentar mejorar el modelo añadiendo efectos adicionales como el apareamiento o un tratamiento distinto del principio de exclusión de Pauli, como se describe más adelante.

Los resultados del modelo de Nilsson son muy similares a los obtenidos con el modelo PAMD, pero están un poco más próximos a los experimentales. Como también se obtiene un mejor resultado en el espectro, es posible que el modelo de Nilsson sea más adecuado para la descripción de este núcleo.

En el caso del núcleo  $^{19}\text{C}$ , nos haría falta comparar con algunos resultados experimentales para tener una mejor idea de la adecuación de nuestro modelo. No está muy claro que hayamos obtenido los mejores resultados, ya que se ha tenido que usar un momento de inercia mayor a lo que cabría esperar por la energía del  $^{18}\text{C}(2^+)$ . En cualquier caso, para los tres núcleos se podrían probar distintas modificaciones para ver si mejoran los resultados.

En los modelos de PRM como el PAMD no tenemos idea de la ocupación de los niveles, por lo tanto, siempre que haya un nivel esférico parcialmente ocupado va a añadir una dificultad extra en la aplicación del Principio de Pauli. Este es el caso del  $^{19}\text{C}$ , donde los neutrones del  $^{18}\text{C}$  ocuparían cuatro de los seis estados posibles en el nivel esférico  $1d_{5/2}$ . Esto es más sencillo en el caso de Nilsson, ya que se conoce la degeneración de los niveles antes de incluir el término de Coriolis (dos). En nuestro caso, se ha aplicado el principio de Pauli después de la última diagonalización, excluyendo las bandas rotacionales ocupadas por los neutrones del core. Sería interesante observar el cambio en los resultados si aplicamos el principio de exclusión de Pauli antes de la última diagonalización, es decir, considerar prohibidos los primeros niveles de Nilsson y diagonalizar el término rotacional en la base de los estados de Nilsson permitidos. Es cierto que el método que hemos utilizado incluye contribuciones de bandas rotacionales que deberían haber sido excluidas, pero también es cierto que los estados ocupados por los nucleones del core no son exactamente los niveles de Nilsson que obtenemos. Una continuación interesante del presente trabajo sería, por lo tanto, comparar cuál de los dos métodos obtiene un mejor resultado al comparar con los datos experimentales.

# 6. Bibliografía

---

- [1] A. Bohr y B. R. Mottelson, *Nuclear Structure Vol. II* (Benjamin, Massachusetts, 1975).
- [2] I. Hamamoto, Phys. Rev. C **72** (2005) 024301.
- [3] I. Hamamoto, Phys. Rev. C **76** (2007) 054319.
- [4] I. Hamamoto y S. Shimoura, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **34** (2007) 2715.
- [5] Y. Jiang *et al.*, Chin. Phys. Lett. **35** (2018) 082501.
- [6] X. Pereira-López *et al.*, Phys. Lett. B **811** (2020) 135939.
- [7] S. Karataglidis *et al.*, Phys. Rev. C **71** (2005) 064601.
- [8] D. M. Brink y G. R. Satchler, *Angular Momentum* (Clarendon, Oxford, 1968).
- [9] B. Hird, Comput. Phys. Commun. **6** (1973) 30.
- [10] A. Quirantes, subrutina *NED* para el cálculo de coeficientes Clebsch-Gordan. Última actualización en 2003. <http://www.ugr.es/~aquiran/codigos.htm>.
- [11] J. Burkardt, subrutina *JACOBI\_EIGENVALUE* para la diagonalización de matrices reales y simétricas. Última actualización en 2013. [https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/f\\_src/jacobi\\_eigenvalue/jacobi\\_eigenvalue.html](https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/f_src/jacobi_eigenvalue/jacobi_eigenvalue.html).
- [12] A. M. Moro, J. A. Lay, M. Gomez-Ramos, R. de Diego, programa *THOx: A few-body coupled-channels code with core excitation*. Sin publicar, disponible en: <https://github.com/MarioGomezRamos/THOx>
- [13] Base de datos *National Nuclear Data Center*, Brookhaven National Laboratory. Consultado en noviembre de 2020. [www.nndc.bnl.gov](http://www.nndc.bnl.gov).
- [14] A. S. Broad *et al.*, Nucl. Phys. A **273** (1976) 69.
- [15] Michel Baranger y Erich Vogt, *Advances in Nuclear Physics Vol. II* (Plenum, Nueva York, 1969).
- [16] A. U. Hazi y H. S. Taylor, Phys. Rev. A **1** (1970) 1109.
- [17] I. J. Thompson, Comput. Phys. Rep. **7** (1988) 167.

- 
- [18] J. Gómez Camacho y A. M. Moro, Lect. Notes in Phys. **879** (2014) 39.
- [19] J. A. Lay *et al.*, Phys. Rev. C. **89** (2014) 014333.
- [20] J. A. Lay *et al.*, Phys. Rev. C. **85** (2012) 054618.
- [21] Y. Kanada-Enyo *et al.*, Phys. Rev. C **52** (1995) 628.
- [22] Y. Kanada-Enyo y H. Horiuchi, Phys. Rev. C **52** (1995) 647.
- [23] D. R. Tilley *et al.*, Nucl. Phys. A **564** (1993) 1.
- [24] K. Amos *et al.*, Nuclear Physics A **879** (2012) 132.
- [25] H. J. Ong, *et al.*, Phys. Rev. C **73** (2006) 024610.
- [26] M. Wiedeking, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 152501.
- [27] Meng Wang *et al.*, Chinese Physics C **41** (2017) 030003.
- [28] Z. Elekes *et al.*, Phys. Lett. B **614** (2005) 174.
- [29] J. W. Hwang *et al.*, Phys. Lett. B **769** (2017) 503.
- [30] D. R. Tilley *et al.*, Nucl. Phys. A **595** (1995) 1.
- [31] Y. Satou *et al.*, Phys. Lett. B **660** (2008) 320.
- [32] D. R. Tilley *et al.*, Nucl. Phys. A **745** (2004) 155.
- [33] J. H. Kelley *et al.*, Nucl. Phys. A **880** (2012) 88.
- [34] R.L. Varner *et al.*, Phys. Rep. **201** (1991) 57.
- [35] J. Chen *et al.*, Phys. Rev. C **93** (2016) 034623.
- [36] R. C. Johnson, P. C. Tandy, Nucl. Phys. A **235** (1974) 56.
- [37] R. V. Reid Jr., Ann. Phys. Rev., **1** (1968) 411.



# Apéndice

---

En este apéndice se expone cómo pasar de la expresión (2.27) a la (2.28) [14,15]. Partimos de la expresión inicial:

$$\Psi_{\lambda J \pi}^M(\vec{r}', \omega) = \sqrt{\frac{2J+1}{16\pi^2}} \sum_{j\Omega} \phi_{j\Omega}^{\lambda J \pi}(r) [\mathcal{Y}_{ls}^{j\Omega}(\hat{r}') D_{M\Omega}^{J*}(\omega) + (-1)^{J-j} \mathcal{Y}_{ls}^{j-\Omega}(\hat{r}') D_{M-\Omega}^{J*}(\omega)], \quad (\text{A.1})$$

donde las funciones  $\phi_{j\Omega}^{\lambda J \pi}$  se pueden escribir en la base THO:

$$\phi_{j\Omega}^{\lambda J \pi}(r) = \sum_n C_{nj\Omega}^{\lambda J \pi} \phi_{nl}^{THO}(r). \quad (\text{A.2})$$

La parte angular, expresada en el sistema intrínseco, se puede reescribir en el sistema fijo haciendo uso de las matrices D [8]:

$$\mathcal{Y}_{ls}^{jK}(\hat{r}') = \sum_m D_{mK}^j(\omega) \mathcal{Y}_{ls}^{jm}(\hat{r}), \quad (\text{A.3})$$

siendo  $\omega = \{\phi, \theta, \psi\}$  los tres ángulos de Euler y  $K = \pm \Omega$ . Esto nos lleva a la siguiente expresión para  $\Psi_{\lambda J \pi}^M$ :

$$\Psi_{\lambda J \pi}^M(\vec{r}, \omega) = \sqrt{\frac{2J+1}{16\pi^2}} \sum_{j\Omega m} \phi_{j\Omega}^{\lambda J \pi}(r) \mathcal{Y}_{ls}^{jm}(\hat{r}) [D_{m\Omega}^j(\omega) D_{M\Omega}^{J*}(\omega) + (-1)^{J-j} D_{m-\Omega}^j(\omega) D_{M-\Omega}^{J*}(\omega)]. \quad (\text{A.4})$$

Se busca reescribir la parte rotacional con las funciones del core, que son las siguientes:

$$\Phi_I^{M_I}(\omega) = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} D_{M_I 0}^{I*}(\omega). \quad (\text{A.5})$$

Al ser un core par-par,  $I$  sólo puede ser par. Sin embargo, para aplicar la relación de cierre debemos considerar la base completa  $\{\Phi_{IK_I}^{M_I}\}$ , donde  $I$  no tiene restricciones:

$$\Phi_{IK_I}^{M_I}(\omega) = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} D_{M_I K_I}^{I*}(\omega),$$

$$\Psi_{\lambda J \pi}^M(\vec{r}, \omega) = \sum_{IM_I K_I} \left[ \int d\omega \Phi_{IK_I}^{M_I*}(\omega) \Psi_{\lambda J \pi}^M(\vec{r}, \omega) \right] \Phi_{IK_I}^{M_I}(\omega), \quad (\text{A.6})$$

El resultado de la integral depende exclusivamente de las matrices D:

$$F_K = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} \sqrt{\frac{2J+1}{16\pi^2}} \int d\omega D_{MK}^{J*}(\omega) D_{mK}^j(\omega) D_{M_I K_I}^I(\omega). \quad (\text{A.7})$$

El producto de dos matrices D se puede escribir como una suma de otras, utilizando los coeficientes de Clebsch-Gordan [8]:

$$D_{mK}^j D_{M_I K_I}^I = \sum_{J' M' K'} \langle J' K' | j K I K_I \rangle \langle J' M' | j m I M_I \rangle D_{M' K'}^{J'}. \quad (\text{A.8})$$

Llevando esto a  $F_{MK}^I$  y aplicando el resultado conocido de la integración de dos matrices D [8] se obtiene:

$$F_K = \sqrt{\frac{2I+1}{2(2J+1)}} \langle JK | j K I K_I \rangle \langle JM | j m I M_I \rangle. \quad (\text{A.9})$$

Este resultado se anula para  $K_I \neq 0$  y  $M_I \neq M - m$ , por tanto, en la expresión de  $\Psi_{\lambda J \pi}^M$  se considera  $K_I = 0$  y  $M_I = M - m$ :

$$\Psi_{\lambda J \pi}^M(\vec{r}, \omega) = \sum_{jm \Omega I} \phi_{j \Omega}^{\lambda J \pi}(r) \mathcal{Y}_{ls}^{jm}(\hat{r}) \Phi_{I0}^{M_I}(\omega) [F_{\Omega} + (-1)^{J-j} F_{-\Omega}]. \quad (\text{A.10})$$

Haciendo uso de las propiedades de los coeficientes de Clebsch-Gordan, se obtienen las siguientes expresiones:

$$F_K = \frac{(-1)^{J+K-I}}{\sqrt{2}} \langle I0 | j - K J K \rangle \langle JM | j m I M_I \rangle,$$

$$F_{\Omega} + (-1)^{J-j} F_{-\Omega} = [1 + (-1)^J] F_{\Omega}. \quad (\text{A.11})$$

La última de las expresiones se anula para  $I$  impar, lo que nos lleva a sumar solo sobre los  $I$  pares y utilizar las funciones  $\Phi_I^{M_I}$ :

$$\Psi_{\lambda J \pi}^M(\vec{r}, \omega) = \sqrt{2} \sum_{j \Omega I M_I} (-1)^{J+\Omega} \phi_{j \Omega}^{\epsilon J \pi}(r) \mathcal{Y}_{ls}^{jm}(\hat{r}) \Phi_I^{M_I}(\omega) \langle I 0 | j - \Omega J \Omega \rangle \langle J M | j m I M_I \rangle. \quad (\text{A.12})$$

Agrupando la parte radial y la angular se definen las nuevas funciones radiales:

$$\phi_{jl}^{\lambda J \pi}(r) = \sqrt{2} \sum_{\Omega} (-1)^{J+\Omega} \langle I 0 | j - \Omega J \Omega \rangle \phi_{j \Omega}^{\lambda J \pi}(r). \quad (\text{A.13})$$

La parte angular la expresamos de la siguiente forma:

$$[\mathcal{Y}_{ls}^j(\hat{r}) \otimes \Phi_I(\omega)]_{JM} = \sum_{M_I} \langle J M | j m I M_I \rangle \mathcal{Y}_{ls}^{jm}(\hat{r}) \Phi_I^{M_I}(\omega). \quad (\text{A.14})$$

Entonces, podemos expresar la función de onda total como:

$$\Psi_{\lambda J \pi}^M(\vec{r}, \omega) = \sum_{j l} \phi_{j l}^{\epsilon J \pi}(r) [\mathcal{Y}_{ls}^j(\hat{r}) \otimes \Phi_I(\omega)]_{JM}. \quad (\text{A.15})$$

Las nuevas funciones radiales se pueden escribir en función de la base THO:

$$\phi_{jl}^{\lambda J \pi}(r) = \sqrt{2} \sum_{n \Omega} (-1)^{J+\Omega} \langle I 0 | j - \Omega J \Omega \rangle C_{n j \Omega}^{\lambda J \pi} \phi_{nl}^{THO}(r) = \sqrt{2} \sum_n C_{n j l}^{\lambda J \pi} \phi_{nl}^{THO}(r), \quad (\text{A.16})$$

definiendo unos nuevos coeficiente:

$$C_{n j l}^{\lambda J \pi} = \sqrt{2} \sum_{\Omega} (-1)^{J+\Omega} \langle I 0 | j - \Omega J \Omega \rangle C_{n j \Omega}^{\lambda J \pi}. \quad (\text{A.17})$$