Trabajo Fin de Máster

Máster en Ingeniería Industrial

El método primal-dual en problemas de transporte generalizado no-estándar

Autor: Carmen Viera Viera

Tutor: Francisco García Benítez

Dpto. Ingeniería y Ciencia de los Materiales y del Transporte

Área de Ingeniería e Infraestructura de los Trasnsportes

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2022

Trabajo Fin de Máster
Máster en Ingeniería Industrial

El método primal-dual en problemas de transporte generalizado no-estándar

Autor:
Carmen Viera Viera

Tutor:
Francisco García Benítez
Catedrático de Universidad

Dpto. de Ingeniería y Ciencia de los Materiales y del Transporte
Área de Ingeniería e Infraestructura de los Transportes
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2022

Trabajo Fin de Máster: El método primal-dual en problemas de transporte generalizado no-estándar

Autor: Carmen Viera Viera

Tutor: Francisco García Benítez

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2022

El Secretario del Tribunal

Agradecimientos

En primer lugar, quisiera agradecer a mi tutor, Francisco García Benítez, la oportunidad de haber podido profundizar y extender mis conocimientos de la asignatura de Ingenería del Transporte impartida en el Máster de Ingeniería Industrial, la cual presenta una gran variedad de aplicaciones en los diferentes ámbitos de la empresa. Darle las gracias también por dirigir el proyecto, guiarme durante el transcurso de este y prestarme su ayuda cada vez que la he necesitado.

Transmitir mi más sincero agradecimiento a mi familia, la que ha dedicado todo su tiempo y esfuerzo en educarme y formarme de la mejor manera posible para afrontar la vida. Gracias por acompañarme en cada paso de esta larga etapa a la que pongo fin con el presente documento. Por vuestro inestimable apoyo y vuestro amor incondicional, gracias.

Por último, no olvidar que la ingeniería resulta menos dura si te rodeas de las personas adecuadas y yo tengo la suerte de haber conocido a los mejores. Gracias por vuestra ayuda desinterasada y por estar a mi lado en los momentos buenos y los no tanto.

Carmen Viera Viera

Sevilla, 2022

Resumen

Los métodos de resolución del problema del transporte presentan una gran complejidad computacional y ofrecen un número muy grande de posibles soluciones, siendo por ello necesario buscar otro tipo de métodos de solución. Teniendo en cuenta esta necesidad y la estructura especial del problema se han propuesto algunos métodos de resolución más eficientes que se apoyan en la forma matricial del modelo matemático [1].

El presente proyecto va a basarse en la aplicación del método primal-dual en el problema del transporte generalizado no estándar mediante la programación de un código en Matlab.

Primeramente, va a definirse el problema del transporte en su forma estándar y el concepto de dualidad.

Después de esto, el siguiente punto se centrará en la definición y características del problema generalizado y su transformación a forma estándar.

A continuación, llegará el grueso del proyecto consistente en la aplicación del método primal-dual al problema generalizado, desarrollándose en este apartado la formulación matemática del problema y el algoritmo de resolución de este. También se resolverán una serie de ejercicios, manualmente y a través de la implementación del código diseñado, ejemplificando las diferentes variaciones del problema que pueden darse en función de los signos que presenten las restricciones de oferta y demanda.

Finalmente, el documento llegará a su fin con una sección en la que se dará una explicación detallada del funcionamiento del código en Matlab y una descripción de las variables y parámetros de que consta.

Abstract

The methods for solving the transport problem are computationally very complex and offer a very large number of possible solutions, making it necessary to look for other types of solution methods. Taking into account this need and the special structure of the problem, some more efficient solution methods have been proposed that rely on the matrix form of the mathematical model [1].

The present project will be based on the application of the primal-dual method to the non-standard generalised transport problem by programming a code in Matlab.

First, the transport problem in its standard form and the concept of duality will be defined.

After this, the next point will focus on the definition and characteristics of the generalised problem and its transformation to standard form.

This will be followed by the bulk of the project consisting of the application of the primal-dual method to the generalised problem, developing in this section the mathematical formulation of the problem and the algorithm for solving it. A series of exercises will also be solved, manually and through the implementation of the designed code, exemplifying the different variations of the problem that may occur depending on the signs of the supply and demand restrictions.

Finally, the document will end with a section in which a detailed explanation of the operation of the Matlab code and a description of its variables and parameters will be given.

Índice

Agradecimientos .... **vii**

Resumen .... **ix**

Abstract .... **xi**

Índice .... **xiv**

1 Objetivo del trabajo **16**

2 El problema del transporte **17**

2.1. Introducción *17*
2.2. Definición del problema estándar *18*
2.2.1 Dualidad 19
2.2.1.1 Propiedades de los problemas primales y duales 20
2.3. El problema generalizado *21*
2.3.1 Introducción 21
2.3.2 Definición del problema 22
2.4. El método primal-dual aplicado al problema generalizado *24*
2.4.1 Introducción 24
2.4.2 Formulación matemática 24
2.4.3 Resolución del problema 26
2.4.4 Algoritmo 34
2.4.5 Problema generalizado no estándar con restricciones de desigualdad ≤ en las ecuaciones de oferta y/o demanda. 36
2.4.5.1 Problemas con restricciones ≤ en las ecuaciones de oferta 36
2.4.5.2 Ejemplo 1 39
2.4.5.3 Ejemplo 2 55
2.4.5.4 Ejemplo 3 64
2.4.6 Problema generalizado no estándar con resistricciones mixtas de desigualdad ≤ e igualdad = en las restricciones de oferta y/o demanda. 67
2.4.6.1 Problemas con restricciones ≤ y = en las ecuaciones de oferta y demanda 67
2.4.6.2 Ejemplo 4 70
2.4.6.3 Ejemplo 5 85

3 Explicación del código **91**

4 Conclusiones **97**

5 Anexos **98**

5.1 Código para la resolución del problema generalizado no estándar a través del método primal-dual. 98
5.1.1 Código principal 98
5.1.2 Código función ofertas 102
5.1.3 Código función algoritmo 103

6 Referencias **106**

1 OBJETIVO DEL TRABAJO

El objetivo principal de este trabajo consiste en la extensión del método primal-dual al problema del transporte generalizado, de forma que se cubran todos los casos posibles. En efecto, los bucles ordinarios utilizados en el problema del transporte común no resuelven el problema generalizado por sí mismos, sino que deben ser ampliados.

Teniendo esto en consideración, se va a desarrollar un código en Matlab que permita resolver el problema generalizado no estándar a través del método primal-dual. El código será capaz de ofrecer la solución óptima en problemas del transporte generalizado no estándar con restricciones de desigualdad ≤ en las ecuaciones de oferta y/o demanda y para aquellos que presenten resistricciones mixtas de desigualdad ≤ e igualdad = en las restricciones de oferta y/o demanda.

El desarrollo del código en Matlab estará basado en una descripción pormenorizada de la teoría. En primer lugar, se adaptará la teoría del método primal-dual al problema del transporte generalizado para la obtención de la formulación del modelo matemático y, a continuación, se detallarán los pasos de que consta el algoritmo de resolución del problema.

Por otra parte, debido a que el proceso de resolución del problema del transporte se fundamenta en una serie de definiciones, propiedades y teoremas que posibilitan el posterior desarrollo de los resultados básicos obtenidos, con el fin de poner en contexto al lector, se incluirá la teoría base que es necesaria conocer para la fácil comprensión del algoritmo que se pretende desarrollar. Esto es, la definición del problema del transporte y del transporte generalizado en su forma estándar, los fundamentos en que se basa el método primal-dual y el concepto de dualidad. Además, se añadirá, a lo largo del informe, una colección de ejemplos resueltos manualmente para poder clarificar la apliación del método en este tipo de problemas.

2 EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

2.1. Introducción

El objetivo de los modelos de transporte es encontrar la solución a un coste mínimo para la realización de un plan de envíos, transporte o distribución, desde cualquier grupo de centros de abastecimiento llamados orígenes, a cualquier grupo de centros de recepción llamados destinos, es decir, determinar la cantidad de productos o mercancías que se deben enviar desde cada punto de origen a cada punto de destino, teniendo en cuenta las restricciones propias del problema. Estas restricciones hacen referencia a las capacidades o disponibilidades de los centros de abastecimiento y las demandas de los centros de destino, de manera que se minimicen los costes totales de transporte o distribución. Los orígenes pueden ser fábricas, almacenes o cualquier punto o lugar desde el que se quiera enviar mercancías o productos. Los destinos son los puntos o lugares en los cuales se reciben dichas mercancías o productos [1].

El modelo de transporte presenta una gran variedad de aplicaciones en los diferentes ámbitos de la empresa (comercial, industrial, etc.), muchos de los cuales no tienen relación con el transporte. De hecho, muchos problemas económicos que, en principio nada tienen que ver con el problema del transporte, pueden ser convertidos en un problema de transporte mediante la utilización de ciertas transformaciones y, en consecuencia, ser resueltos aplicando los métodos propios de este tipo de problemas. No obstante, sigue hablándose de estos problemas como el problema del transporte [1].

La formulación lineal del problema, conocida como problema de transporte clásico fue descrita por Frank L. Hitchcock en el año 1941 [2]. Es por este motivo que hoy en día al problema del transporte también se le conoce como problema del transporte de Hitchcock.

Tras la formulación original del problema por parte de Hitchcock (1941), Koopmans (1949) y Koopmans y Reiter (1951), la solución del problema del transporte pasó a explotar rápidamente el potencial de la teoría de grafos y, por lo tanto, a conseguir tiempos de solución rápidos incluso para problemas grandes [3].

Posteriormente, utilizando los antecedentes económicos teóricos proporcionados por Samuelson (1952) y, más tarde, por Smith (1963), Takayama y Judge (1971) fueron capaces de plasmar un grupo de problemas de equilibrio espacial con funciones lineales de demanda y oferta en un marco de programación cuadrática. Al hacerlo, generalizaron implícitamente el problema de transporte para tener en cuenta las demandas y suministros linealmente dependientes del precio [3].

Trabajando de forma independiente, Hartwick (1971) investigó el problema de la renta económica asociada al problema del transporte generalizado para incluir demandas y suministros lineales [3].

Simultáneamente y más tarde, Murtagh y Saunders desarrollaron un sistema de solución de programación no lineal, que posteriormente designaron MINOS, con el objetivo de resolver grandes problemas de programación no lineal. MINOS se hizo público en 1977 y con él el potencial para resolver problemas no lineales limitados sólo por la imaginación y el ingenio del economista aplicado. El problema del transporte generalizado, con funciones de oferta y demanda no lineales explícitas, es sólo uno de esos problemas [3].

Los métodos de resolución del problema del transporte pertenecen a la clase de los llamados modelos combinatorios que presentan una gran complejidad computacional y ofrecen un número muy grande de posibles soluciones, siendo por ello necesario buscar otro tipo de métodos de solución. En consecuencia, los esfuerzos referentes a la búsqueda de métodos diferentes de resolución se han dirigido en un primer enfoque hacia los métodos que están basados en la utilización de algoritmos matemáticos, es decir, que permiten obtener una solución óptima exacta para el problema combinatorio, mediante la utilización de técnicas que permitan reducir la búsqueda de soluciones. La resolución de este tipo de problemas puede ser llevada a cabo utilizando un programa lineal o bien, mediante el algoritmo de transporte basado en la forma matricial. Cuando se utiliza un programa lineal, expresando el problema de transporte en forma estándar, al ser las restricciones igualdades es posible su resolución utilizando el método Simplex, añadiendo las correspondientes variables artificiales para obtener una solución inicial. No obstante, la carga computacional para la resolución de este problema es grande debido a la cantidad elevada de variables de decisión y restricciones que forman parte de él, incluso en el supuesto de que el número de orígenes y destino tengan valores moderados. Por esta razón, teniendo en cuenta la estructura especial del problema se han propuesto algunos métodos de resolución más eficientes (en el tiempo), que la resolución a través del método del Simplex en su forma usual, y que se apoyan en la forma matricial del problema que consiste en representar el problema del transporte mediante la llamada tabla de transporte, con el objetivo de resumir de manera conveniente, todos los datos del problema para resolverlo mediante el llamado algoritmo de transporte [1].

2.2. Definición del problema estándar

La información que se añade en este apartado del documento hace referencia en su totalidad al libro de Redes de Transporte de Francisco García Benítez [4].

El problema del transporte tiene muchas variantes por la gran cantidad de incógnitas que involucra. No obstante, en el presente documento, el objetivo del problema del transporte va a consistir en minimizar el costo del transporte de un único producto desde *m* centros a *n* destinos distintos.

Se representa por a_i y b_j los niveles de oferta y demanda del origen genérico *i*-ésimo y del destino *j*-ésimo. Se define por c_{ij} el costo unitario del transporte desde el origen *i* hasta el destino *j* y por x_{ij} el volumen de unidades derivado de uno a otro. A continuación, se formula el plan de optimización que trata de obtener la solución del problema planteado.

Para que el problema tenga solución se ha de verificar que el volumen ofertado sea siempre superior al demandado, es decir, $\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$. Si se parte de la hipótesis de que la oferta coincide con la demanda ($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$), el problema quedará definido de la siguiente forma:

$$\begin{gathered} Minimizar\ f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}c_{ij} \\ s.a. \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ ; \ \forall\ i = 1,2,\dots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ ; \ \forall\ j = 1,2,\dots,n \\ x_{ij} \geq 0 \ \ \forall \begin{cases} i = 1,2,\dots,m \\ j = 1,2,\dots,n \end{cases} \end{gathered} \tag{2.1}$$

Para el caso en el que la oferta no coincida con la demanda se puede definir un destino ficticio o artificial con una demanda dada por $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ y costos $c_{i,n+1} = 0\ \forall\ i = 1,2,\dots,m$.

Por otra parte, el problema (2.1) puede escribirse en su forma matricial como:

$$\begin{gathered} Minimizar\ \boldsymbol{cx} \\ s.a.\ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq 0 \end{gathered} \tag{2.2}$$

donde

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x} = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{mn})^T \\ \boldsymbol{c} = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}, c_{21}, \dots, c_{mn})^T \\ \boldsymbol{b} = (a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n)^T \\ \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{11}, \boldsymbol{a}_{12}, \dots, \boldsymbol{a}_{1n}, \boldsymbol{a}_{21}, \dots, \boldsymbol{a}_{2n}, \dots, \boldsymbol{a}_{m1}, \dots, \boldsymbol{a}_{mn})^T \end{gathered}$$

siendo

$$\boldsymbol{a}_{ij} = \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_{m+j}$$

y $\boldsymbol{e}_i$ y $\boldsymbol{e}_{m+j}$ vectores unitarios con un uno en la *i*-ésima y *m*+*j*-ésima fila, respectivamente.

En lo que sigue se utilizarán las siguientes definiciones [5]:

- Función objetivo: $z = cx$
- Coeficientes de costo: $c_j\ \forall\ j = 1,2, \dots, m \times n$
- Variables de decisión: $x_j\ \ \forall\ j = 1,2, \dots, m \times n$
- Restricciones: $A_i x \leq b_i\ \forall\ i = 1, \dots, m + n$
- Coeficientes tecnológicos: $a_{ij}\ \forall\ i = 1, \dots, m;\ \forall\ j = 1, \dots, n$
- Matriz de restricciones: $A = \left(a_{ij}\right)$
- Restricciones de no-negatividad: $x_j \geq 0\ \forall\ j = 1, \dots, m \times n$
- Vector de recursos: $b_i\ \forall\ i = 1, \dots, m + n$

La matriz de coeficientes $\boldsymbol{A}$ tendrá una dimensión $(m + n, m \cdot n)$ y presentará la siguiente forma:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n & \cdots & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}$$

siendo $\mathbf{1}$ el vector unidad de dimensión $1 \times n$ e $\boldsymbol{I}_n$ matrices unidad de dimensión $n \times n$.

Debido a que el rango de la matriz **A** es exactamente $m + n - 1$ se deduce que toda base del problema del transporte (2.1) estará compuesta de $m + n - 1$ variables.

El problema definido en su forma estándar (2.1) siempre tiene al menos una solución básica factible dada por:

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{d}$$

donde $d = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Por otra parte, la solución es siempre acotada ya que se verifica que:

$$0 \leq x_{ij} \leq mínimo(a_i, b_j)$$

Como todo problema lineal, acotado y con al menos una solución básica factible presenta un óptimo, se demuestra la existencia de solución para este tipo de problemas.

Hasta ahora se ha tratado el problema del transporte en su forma estándar. En general, cualquier problema de optimización lineal podrá ponerse en forma estándar, sin más que [5]:

1. Tratar las desigualdades con variables de holgura.
2. Hacer no negativos los términos independientes.
3. Tratar las variables acotadas.
4. Transformar la optimización en minimización.

2.2.1 Dualidad

El concepto de dualidad es uno de los más importantes en la teoría de optimización lineal. La relación existente entre un problema lineal y su dual revela un conjunto de propiedades que permiten comprender el proceso de obtención del óptimo y la relación de éste con las diferentes restricciones que conforman el problema a resolver. La teoría de la dualidad abre horizontes a nuevos algoritmos, tales como el simplex-dual y el primal-dual, así como a post-análisis, tales como los análisis de sensibilidad y análisis paramétricos [5]. El presente documento se centra en el método primal-dual que se acaba de mencionar para la resolución del problema generalizado.

Sea el problema del transporte definido en forma estándar por (2.1), si se definen m variables duales u_i ($\forall\ i = 1,2,\dots,m$) asociadas a las restricciones de oferta y n variables v_j ($\forall\ j = 1,2,\dots,n$) asociadas a las de demanda, el problema dual del 2.1 tendrá la siguiente estructura:

$$
\begin{gathered}
Maximizar \sum_{i=1}^{m} u_i a_i + \sum_{j=1}^{n} v_j b_j \\
s.a.\ u_i + v_j \leq c_{ij} \\
u_i\ libre\ \forall\ i = 1,2,\dots,m \\
v_j\ libre\ \forall\ j = 1,2,\dots,n
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

A los problemas (2.1) y (2.3) se les denominará a partir de este momento como problemas primal y dual respectivamente. Nótese como existen tantas variables duales como restricciones primales y tantas restricciones duales como variables primales. Además, para el problema dual, una vez transformado a forma estándar de igualdad, se cumple que el número de variables es siempre superior al número de restricciones, independientemente de que esto no sea así para el problema primal [5].

El problema dual constará de $m \times n$ ecuaciones con $m + n$ incógnitas. Por los teoremas de holgura se sabe que:

- Si x_{ij} es básica → $u_i + v_j = c_{ij}$
- Si x_{ij} es no básica → $u_i + v_j \leq c_{ij}$

y que el criterio de optimalidad vendrá definido cuando los costos relativos de las variables no básicas del problema sean no negativos:

$$r_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$$

2.2.1.1 Propiedades de los problemas primales y duales

Sean los problemas primal y dual, definidos en forma estándar:

$$
\begin{gathered}
Minimizar\ \boldsymbol{cx} \\
s.a.\ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{x} \geq 0
\end{gathered}
\qquad\qquad
\begin{gathered}
Maximizar\ \boldsymbol{\lambda b} \\
s.a.\ \boldsymbol{\lambda A} \leq c \\
\boldsymbol{\lambda}\ libre
\end{gathered}
$$

Las siguientes propiedades pueden fácilmente demostrarse:

1. Si $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{\lambda}$ son soluciones básicas factibles de los problemas primal y dual respectivamente, se verifica $\boldsymbol{cx} \geq \boldsymbol{\lambda b}$**.** Esto se traduce en que el valor de la función objetivo del problema primal, para una solución factible, es siempre mayor o igual a la función objetivo del problema dual. De esta forma, se deduce que el valor de la función objetivo del problema primal es siempre una cota superior del óptimo del problema dual. Inversamente, el problema dual define una cota inferior del óptimo del problema primal. Por tanto, si el problema primal es no acotado ($\boldsymbol{cx} = -\infty$) el dual es no factible; y si el problema dual es no acotado ($\boldsymbol{\lambda b} = \infty$), el primal no tiene soluciones admisibles. Por otra parte, si el primal o dual es no factible, el dual o primal puede o no ser factible o ser no acotado [5].
2. Si el problema primal es acotado presentando como solución óptima $\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{x}_B, 0) = (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, 0)$, el problema dual tiene como solución óptima $\boldsymbol{\lambda}^* = c_B\boldsymbol{B}^{-1}$ [5].
3. Si las soluciones del primal y dual son $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{\lambda}^* = c_B\boldsymbol{B}^{-1}$ respectivamente, los problemas de minimización y maximización son equivalentes si $\boldsymbol{\lambda A} \leq \boldsymbol{c}$ [5].

2.3. El problema generalizado

La información que se añade en este apartado del documento hace referencia en su totalidad al libro de Redes de Transporte de Francisco García Benítez [4].

2.3.1 Introducción

MacKinnon avanzó y discutió un algoritmo versátil de punto fijo para la solución de lo que él definió como el problema de transporte generalizado, que esencialmente extendió el conocido problema de transporte de Hitchcock-Koopmans para permitir que la cantidad demandada y suministrada mostrara elasticidad de precios y que los costes de transporte fueran no lineales [3].

La principal diferencia entre el problema del transporte y el problema generalizado es que en estos úlitmos no se mantiene la conservación del flujo, sino que puede haber ganancias o pérdidas de flujo a ritmos específicos dentro de la red. Este concepto se ve reflejado en el modelo matemático a través de la existencia de unos coeficientes tecnológicos que multiplican a las variables x_{ij} [6]:

- $q_{ij}x_{ij} = a_{ij}$ → Cantidad suministrada por el centro i-ésimo para ser entregada al centro j-ésimo donde q_{ij} se define como el coeficiente de incremento/decremento experimentado por la cantidad x_{ij} justo después de la expedición desde el centro i-ésimo. Por ejemplo, el incremento de agua en los productos congelados.
- $t_{ij}x_{ij} = b_{ij}$ → Importe recibido por el centro de demanda j-ésima del centro i-ésima donde t_{ij} se define como el coeficiente de incremento/decremento experimentado por la cantidad x_{ij} durante el transporte desde el centro i-ésimo. Por ejemplo, disminución de las mercancías debido a la degradación/daño durante el transporte.

Se supone que todos los términos multiplicativos de ganancia y pérdida son no negativos [6].

Algunos ejemplos de aplicaciones que emplean estos modelos son: la gestión del efectivo, la ampliación de la capacidad, la gestión del combustible, la logística, la asignación de espacio y la asignación de tiempo [6].

Es bien sabido que las técnicas de solución de los problemas de red generalizados son significativamente menos eficientes que las de los problemas de red "puros", es decir, aquellos problemas para los que se asume la conservación del flujo. Para aplicaciones en las que las ganancias o pérdidas son razonablemente pequeñas, puede ser ventajoso ignorar temporalmente estas ganancias o pérdidas y resolver el problema de red puro resultante. Posteriormente, la solución óptima del problema puro podría utilizarse para derivar la solución óptima del problema original de la red generalizada [6]. En [6], dada una solución óptima del problema de transporte habiendo ignorado las ganancias o pérdidas del problema del transporte generalizado, se investiga bajo qué condiciones la solución óptima del problema generalizado original tendrá las mismas variables básicas.

El problema generalizado presenta las siguientes propiedades:

- No existe, a priori, combinación lineal entre las ecuaciones por lo que no está garantizado encontrar ciclos entre las celdas de la tabla de transporte. Si no hay combinación de vectores no hay combinación de celdas ya que existe una relación biunívoca entre vectores-celdas, vectores-variables y variables-ciclos. En el presente documento no se va a considerar que haya ciclos, aunque realmente haya multitud de ellos.
- $Rg\ (A) \leq m + n$
- El criterio de optimalidad tendrá una expresión similar a la del problema del transporte estándar.
- El teorema de la matriz reducida no podrá aplicarse si existen coeficientes tanto en las ecuaciones de oferta como en las de demanda. Esto es, solo podrá aplicarse por columnas o por filas.

2.3.2 Definición del problema

El problema de transporte generalizado presenta la siguiente estructura:

$$
\begin{gathered}
Minimizar\ f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}\overline{c_{ij}} \\
s.a. \sum_{j=1}^{n} q_{ij}z_{ij}=\overline{a_i}\ ;\ \forall\, i=1,2,\dots,m \\
\sum_{i=1}^{m} t_{ij}z_{ij}=\overline{b_j}\ ;\ \forall\, j=1,2,\dots,n \\
\overline{l_{ij}}\leq z_{ij}\leq\overline{u_{ij}}\ \forall \begin{cases} i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n \end{cases}
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

En la que los coeficientes de las restricciones y los recursos son positivos, $q_{ij}\geq 0, t_{ij}\geq 0, \overline{a_i}\geq 0, \overline{b_j}\geq 0$.

A continuación, se va a realizar un cambio de variable para suprimir los coeficientes de las restricciones de oferta o demanda. Se eliminarán unos u otros dependiendo del cambio de variable que resulte más conveniente desde un punto de vista computacional.

En el presente desarrollo van a eliminarse los coeficientes de las restricciones de demanda. De este modo, mediante el cambio de variable $t_{ij}z_{ij}=y_{ij}$, la formulación anterior quedará transformada en:

$$
\begin{gathered}
Minimizar\ f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{c_{ij}}}{t_{ij}}y_{ij} \\
s.a. \sum_{j=1}^{n}\frac{q_{ij}}{t_{ij}}y_{ij}=\overline{a_i}\ ;\ \forall\, i=1,2,\dots,m \\
\sum_{i=1}^{m} y_{ij}=\overline{b_j}\ ;\ \forall\, j=1,2,\dots,n \\
\overline{l_{ij}}\leq\frac{y_{ij}}{t_{ij}}\leq\overline{u_{ij}}\ \forall \begin{cases} i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n \end{cases}
\end{gathered}
$$

Por otra parte, realizando el siguiente cambio de variable, $x_{ij} = y_{ij} - \overline{l_{ij}} t_{ij}$, se consigue eliminar las cotas inferiores:

$$Minimizar\ f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{c_{ij}}}{t_{ij}}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overline{c_{ij}}\,\overline{l_{ij}}$$

$$s.a. \sum_{j=1}^{n}\frac{q_{ij}}{t_{ij}}x_{ij} = \overline{a_i} - \sum_{j=1}^{n}\overline{l_{ij}}q_{ij} \ \ ; \ \ \forall\ i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij} = \overline{b_j} - \sum_{i=1}^{m}\overline{l_{ij}}t_{ij} \ \ ; \ \ \forall\ j = 1,2,\dots,n$$

$$0 \le x_{ij} \le \left(\overline{u_{ij}} - \overline{l_{ij}}\right)t_{ij} \ \ \forall \begin{cases} i = 1,2,\dots,m \\ j = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

Finalmente, se definen las siguientes variables para simplificar la estructura resultante de las modificaciones comentadas anteriormente:

$$\overline{a_i} - \sum_{j=1}^{n}\overline{l_{ij}}q_{ij} \equiv a_i \ \ ; \ \ \overline{b_j} - \sum_{i=1}^{m}\overline{l_{ij}}t_{ij} \equiv b_j$$

$$\left(\overline{u_{ij}} - \overline{l_{ij}}\right)t_{ij} \equiv u_{ij} \ \ ; \ \ \frac{\overline{c_{ij}}}{t_{ij}} \equiv c_{ij} \ \ ; \ \ \frac{q_{ij}}{t_{ij}} = p_{ij}$$

Incorporando las variables definidas en el paso anterior, el problema generalizado queda estructurado de la siguiente forma:

$$\begin{gathered}
Minimizar\ f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \\
s.a. \sum_{j=1}^{n}p_{ij}x_{ij} = a_i \ \ ; \ \ \forall\ i = 1,2,\dots,m \\
\sum_{i=1}^{m}x_{ij} = b_j \ \ ; \ \ \forall\ j = 1,2,\dots,n \\
0 \le x_{ij} \le u_{ij} \ \ \forall \begin{cases} i = 1,2,\dots,m \\ j = 1,2,\dots,n \end{cases}
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Una vez formulado el modelo matemático del problema generalizado, el siguiente paso consiste en resolverlo para obtener los mejores valores numéricos de las variables de decisión.

Las soluciones del problema anterior ya no son enteras y, para la resolución de este, aunque podría aplicarse el método Simplex, es previsible que pueda desarrollarse un algoritmo específico más eficiente teniendo en cuenta la estructura de sus restricciones.

El problema dual presentará la siguiente formulación:

$$\begin{gathered} Maximizar\ z = \sum_{i=1}^{m} u_i a_i + \sum_{j=1}^{n} v_j b_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} u_{ij} \\ s.a.\ \ p_{ij} u_i + v_j + \beta_{ij} \leq c_{ij}\ \ \forall \begin{cases} i = 1,2,\dots,m \\ j = 1,2,\dots,n \end{cases} \\ \beta_{ij} \leq 0 \\ (u_i, v_j)\ libres \end{gathered} \tag{2.6}$$

El procedimiento de resolución de este tipo de problemas presenta ciertas analogías con el problema 2.1. Así el criterio de optimalidad viene definido por los costos relativos:

$$r_{ij} = c_{ij} - (p_{ij} u_i + v_j) \geq 0\ \ \forall\ 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$
$$r_{ij} = c_{ij} - (p_{ij} u_i + v_j) \leq 0\ \ \forall\ x_{ij} = u_{ij}$$

El número de ecuaciones y variables del problema es $m + n\ y\ m \times n$, respectivamente. Como no existe ninguna combinación lineal entre las restricciones de oferta y demanda, el número de variables básicas será $m + n$.

Por otra parte, la resolución de este tipo de problemas requiere la obtención de una solución básica factible. En estos casos, el nivel asignado a la celda correspondiente no puede superar la cantidad $x_{ij} = min\ \left(\frac{a_i}{p_{ij}}, b_j\ , u_{ij}\right)$, siendo $a_i\ y\ \ b_j$ los niveles actualizados de oferta y demanda, obtenidos al decrementar los niveles originales de oferta y demanda en las cantidades ya asignadas previamente a otras celdas.

2.4. El método primal-dual aplicado al problema generalizado

La información que se añade en este apartado del documento hace referencia en su totalidad al libro de Redes de Transporte de Francisco García Benítez [4].

2.4.1 Introducción

El método primal-dual se inicia con una solución básica factible para el problema dual y se itera hasta obtener factibilidad del primal, manteniendo durante el proceso holgura complementaria. En este procedimiento, la solución dual de la que se parte no tiene por qué ser básica para el problema primal [5].

2.4.2 Formulación matemática

A continuación, va a adaptarse la teoría primal-dual al problema generalizado en su forma estándar. La definición detallada del problema generalizado en la forma estándar, habiendo eliminado las cotas inferiores y los coeficientes de las restricciones de demanda a través de un cambio de variable, se ha presentado en el capítulo 2.3. Para mayor claridad, la estructura estándar que va a utilizarse a partir de ahora es la indicada en (2.7). La formulación matemática del problema se puede modelar bien a través del problema primal o por el problema dual como:

- Problema Primal:

$$
\begin{aligned}
&Minimizar\ f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
&s.a. \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij} = a_i \ ; \ \forall\, i = 1,2,\dots,m \\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ ; \ \forall\, j = 1,2,\dots,n \\
&0 \le x_{ij} \le u_{ij} \ \ \forall \begin{cases} i = 1,2,\dots,m \\ j = 1,2,\dots,n \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

- Problema Dual:

$$
\begin{aligned}
&Maximizar\ f = \sum_{i=1}^{m} u_i a_i + \sum_{j=1}^{n} v_j b_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}u_{ij} \\
&s.a.\ \ p_{ij}u_i + v_j + w_{ij} \le c_{ij}\ \forall \begin{cases} i = 1,2,\dots,m \\ j = 1,2,\dots,n \end{cases} \\
&(u_i, v_j) \equiv libres \\
&w_{ij} \le 0\ \forall \begin{cases} i = 1,2,\dots,m \\ j = 1,2,\dots,n \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Si x_{ij} es una solución básica factible del problema primal y $(u_i, v_j, w_{ij} = 0)$ una solución básica factible del problema dual, se pueden definir los problemas restringidos. Las variables x_{ij} asociadas a las restricciones de igualdad serán las consideradas como básicas para definir el problema primal restringido:

- Problema Primal Restringido:

$$
\begin{aligned}
&Minimizar\ f = \sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j \\
&s.a. \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij} + y_i = a_i \ ; \ \forall\, i = 1,2,\dots,m \\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + z_j = b_j \ ; \ \forall\, j = 1,2,\dots,n \\
&0 \le x_{ij} \le u_{ij} \ \ \forall \begin{cases} i = 1,2,\dots,m \\ j = 1,2,\dots,n \end{cases} \\
&y_i \ge 0, z_i \ge 0 \ \ \forall \begin{cases} i = 1,2,\dots,m \\ j = 1,2,\dots,n \end{cases} \\
&(i,j)\ básico
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

- Problema Dual Restringido:

$$
\begin{aligned}
&Maximizar\ f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} u_{ij} \\
&s.a.\ \ p_{ij}\alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} \leq 0\ ;\ \forall\ i = 1,2,\dots,m\ ;\ \forall\ j = 1,2,\dots,n \\
&\alpha_i \leq 1\ ;\ \forall\ i = 1,2,\dots,m \\
&\beta_j \leq 1\ ;\ \forall\ j = 1,2,\dots,n \\
&\gamma_{ij} \leq 0\ \forall \begin{cases} i = 1,2,\dots,m \\ j = 1,2,\dots,n \end{cases} \\
&(i,j)\ básico
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

De los teoremas primal-dual se deduce que la solución básica factible primal x_{ij} es admisible y óptima para el problema primal (2.7) si y solo si se verifica que $y_i = z_j = 0$ para todo i, j. Es decir, cuando se anulen las cantidades siguientes:

$$y_i = a_i - \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij}\ \ ;\ \ \forall\ i = 1,2,\dots,m$$

$$z_j = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\ \ ;\ \ \forall\ j = 1,2,\dots,n$$

2.4.3 Resolución del problema

De la teoría del método primal-dual se tienen los siguientes teoremas:

- Sea (u_i, v_j, w_{ij}) una solución básica factible para el problema dual, si (x_{ij}, y_i, z_j) es la solución óptima para el problema primal restringido y se cumple que $y_i = z_j = 0$, entonces x_{ij} es una solución admisible para el problema primal y (u_i, v_j, w_{ij}) y x_{ij} son las soluciones óptimas para el par de problemas primal y dual.
- Sea (u_i, v_j, w_{ij}) una solución básica factible para el problema dual, si (x_{ij}, y_i, z_j) es la solución óptima para el problema primal restringido y si $(y_i, z_j) > 0$, entonces puede encontrarse una nueva solución dual $(\overline{u_i}, \overline{v_j}, \overline{w_{ij}})$ que mejore la función objetivo del problema dual. Definiendo la nueva solución $(\overline{u_i}, \overline{v_j}, \overline{w_{ij}})$ como $(\overline{u_i}, \overline{v_j}, \overline{w_{ij}}) = (u_i, v_j, w_{ij}) + \epsilon^*(\alpha_i^*, \beta_j^*, \gamma_{ij}^*)$, con $\epsilon > 0$, se demuestra que para que $(\overline{u_i}, \overline{v_j}, \overline{w_{ij}})$ sea siempre admisible debería de verificarse:

  $$\epsilon = \min\left(\frac{\widehat{r_{ij}} = r_{ij} - w_{ij}}{(\alpha_i^*, \beta_j^*, \gamma_{ij}^*)\boldsymbol{A'_{ij}}}, (\alpha_i^*, \beta_j^*, \gamma_{ij}^*)\boldsymbol{A'_{ij}} > 0\right)$$

  o lo que es lo mismo:

  $$\epsilon = \min\left(\frac{c_{ij} - (p_{ij}u_i + v_j + w_{ij})}{p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^*}, p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^* > 0\right)$$

  Los costos relativos $\widehat{\widehat{r_{ij}}}$, para la nueva solución dual $(\overline{u_i}, \overline{v_j}, \overline{w_{ij}})$, vendrán definidos por:

  $$\widehat{\widehat{r_{ij}}} = \widehat{r_{ij}} - \epsilon^*(p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^*)$$

Las bases matemáticas para la resolución de los problemas de transporte mediante el algoritmo primal-dual se fundamentan en los siguientes puntos:

1. Para la aplicación de los teoremas primal-dual se requiere partir de una solución básica, no necesariamente factible, del problema Primal mediante la obtención de una solución básica factible del problema dual. Esto puede obtenerse aplicando el teorema de la matriz reducida a la matriz de costos considerando como arcos básicos aquellos que tengan costo relativo nulo.
   i. Seleccionando por cada fila de la tabla del problema de transporte el costo mínimo, se tiene:

   $$\breve{u}_i = \min_{j=1}\left\{\frac{c_{ij}}{p_{ij}}\right\} \; ; \; \forall\, i = 1,2,\dots,m$$

   ii. Restando este costo mínimo $\breve{u}_i$ a todos los elementos de esa fila, se tiene:

   $$c'_{ij} = c_{ij} - p_{ij}\breve{u}_i \; ; \; \forall\, i = 1,2,\dots,m \, ; j = 1,2,\dots,n$$

   iii. Eligiendo por cada columna de la nueva matriz de costos el costo mínimo, se tiene:

   $$\breve{v}_j = \min_{i=1}\{c'_{ij}\} \; ; \; \forall\, j = 1,2,\dots,n$$

   iv. Restando este costo mínimo, $\breve{v}_j$, a todos los elementos de esa columna, se tiene:

   $$c''_{ij} = c'_{ij} - \breve{v}_j \; ; \; \forall i = 1,2,\dots,m \, ; j = 1,2,\dots,n$$

   v. La nueva matriz de costos obtenida, c''_{ij}, tendrá un número mínimo de ceros coincidente con la menor dimensión del problema, m o n. Para el problema dual, tomando como variables duales $\breve{u}_i = u_i$ y $\breve{v}_j = v_j$, se verifica que $p_{ij}\breve{u}_i + \breve{v}_j = c_{ij}$ en aquellas casillas asociadas a costos c''_{ij} nulos. Por tanto, el conjunto de estas casillas definirá una solución básica factible para el problema dual. Los arcos asociados a estas casillas definirán los arcos básicos sobre los que se construirá el problema primal restringido.

   * El teorema de la matriz reducida podrá aplicarse sobre el problema generalizado si se cumplen las siguientes condiciones: si las restricciones de oferta o de demanda tienen coeficientes tecnológicos unidad y signo de igualdad. La reducción, en estos casos, solo será posible por filas (restricciones de oferta) o por columnas (restricciones de demanda).

2. Para poder seguir aplicando los teoremas primal-dual es necesario resolver la red definida por el problema primal restringido. Esta red puede modificarse equivalentemente creando un nodo de salida S y otro de entrada E artificiales, unidos a los nodos de oferta y demanda respectivamente. La capacidad de los arcos genéricos artificiales (S, i) y (j, E) serán a_i y b_j, respectivamente. Para este procedimiento, los nodos originales de la red habrán quedado transformados en nodos de transbordo.
   La red quedará matemáticamente expresada de la forma:

$$Minimizar\ f = \sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j$$

$$s.a. \sum_{k \in D(S)} x_{Sk} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m} y_i \ ;\ \forall\, j = S$$

$$\sum_{k \in D(j)} p_{jk} x_{jk} - \sum_{i \in A(j)} x_{ij} = 0 \ ;\ \forall\, j \neq S, E$$

$$- \sum_{i \in A(E)} x_{iE} = - \sum_{j=1}^{n} b_j + \sum_{j=1}^{n} z_j \ ;\ \forall\, j = S$$

$$\left.\begin{array}{r} x_{ij}\ básico \\ 0 \le x_{ij} \le u_{ij} \\ y_i \ge 0\ ;\ z_j \ge 0 \end{array}\right\} \quad \forall \begin{cases} i = S, 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n, E \end{cases}$$

Denotando por:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = A \ ;\ \sum_{j=1}^{n} b_j = B \ ;\ \sum_{i=1}^{m} y_i = Y \ ;\ \sum_{j=1}^{n} z_j = Z$$

Sustituyendo la función de minimización por maximización, el sistema puede escribirse como:

$$-Maximizar - Y - Z$$

$$s.a. \sum_{k \in D(S)} x_{Sk} = A - Y \ ;\ \forall\, j = S$$

$$s.a. \sum_{k \in D(j)} p_{jk} x_{jk} - \sum_{i \in A(j)} x_{ij} = 0 \ ;\ \forall\, j \neq S, E$$

$$- \sum_{i \in A(E)} x_{iE} = -(B - Z) \ ;\ \forall\, j = E$$

$$Y, Z \ge 0$$

$$\left.\begin{array}{r} x_{ij}\ básico \\ 0 \le x_{ij} \le u_{ij} \end{array}\right\} \quad \forall \begin{cases} i = S, 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n, E \end{cases}$$

Como $a_i \ge y_i$ y $b_j \ge z_j$ las cantidades $A - Y$ y $B - Z$ serán también positivas y se denotarán por F_S y F_E, flujos de salida y entrada desde y hacia los nodos S y E respectivamente. De esta forma, el anterior sistema queda definido como:

$$Maximizar\ F_S + F_E$$

$$s.a. \sum_{k \in D(S)} x_{Sk} = F_S \ ; \ \forall j = S$$

$$s.a. \sum_{k \in D(j)} p_{jk} x_{jk} - \sum_{i \in A(j)} x_{ij} = 0 \ ; \ \forall j \neq S, E$$

$$- \sum_{i \in A(E)} x_{iE} = -F_E \ ; \ \forall j = E$$

$$F_S \geq 0 \ ; \ F_E \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{c} x_{ij}\ básico \\ 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \end{array} \right\} \ \forall \begin{cases} i = S, 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n, E \end{cases}$$

Considerando que $F_S = F_E = F$ debido a que no se crea ni se destruye flujo entre el nodo S y E:

$$Maximizar\ F$$

$$s.a. \sum_{k \in D(S)} x_{Sk} = F \ ; \ \forall j = S$$

$$s.a. \sum_{k \in D(j)} p_{jk} x_{jk} - \sum_{i \in A(j)} x_{ij} = 0 \ ; \ \forall j \neq S, E$$

$$- \sum_{i \in A(E)} x_{iE} = F \ ; \ \forall j = E$$

$$F \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{c} x_{ij}\ básico \\ 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \end{array} \right\} \ \forall \begin{cases} i = S, 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n, E \end{cases}$$

Esta formulación se corresponde con el problema de flujo máximo en la red. Para obtener el flujo máximo se aplica el algoritmo de Ford-Fulkerson. Los pasos de este algoritmo consisten en un marcado hacia delante y hacia atrás. Sobre la tabla de transporte los pasos del algoritmo se describen en la siguiente sección.

3. Una vez obtenido el flujo máximo, se habrá alcanzado el óptimo del problema primal restringido, habiéndose obtenido una cortadura $(X, \bar{X})$. Al conjunto X pertenecerán nodos de oferta, denotados por I, y nodos de demanda denotados por J. Análogamente, al conjunto $\bar{X}$ pertenecerán nodos de oferta, denotados por $\bar{I}$, y nodos de demanda que se denotarán por $\bar{J}$.
   Para los nodos I que se han alcanzado por marcaje desde el nodo S, siempre se verificará:

$$y_i = a_i - \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij} \neq 0$$

Para los nodos I, que se han alcanzado por marcaje desde el nodo J, se verificará:

$$y_i \geq 0$$

Para los nodos $i \in \bar{I}$ que no se encuentran marcados, el arco (S, i) se encontrará saturado, ya que en caso contrario podría haber sido marcado desde el nodo S; luego para estos nodos se verificará:

$$y_i = a_i - \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij} = 0$$

Similarmente, para los nodos $j \in J$, los arcos (j, E) se encontrarán saturados, ya que en caso contrario podría alcanzarse el nodo E dando lugar posteriormente a un incremento en el flujo de la red. Para estos nodos se verificará:

$$z_j = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 0$$

Para los nodos $j \in \bar{J}$ que no se encuentran marcados, el valor de z_j podrá ser positivo o nulo.

Resumiendo:

$$i \in X \rightarrow i \in I \rightarrow y_i \geq 0$$

$$i \in \bar{X} \rightarrow i \in \bar{I} \rightarrow y_i = 0$$

$$j \in X \rightarrow j \in J \rightarrow z_j = 0$$

$$j \in \bar{X} \rightarrow j \in \bar{J} \rightarrow z_j \geq 0$$

Se habrá alcanzado la solución óptima del problema cuando las holguras y_i y z_j sean todas nulas. En caso contrario, será preciso cambiar de solución básica factible dual.

4. En el óptimo se verificarán las siguientes restricciones:

$$\forall\, x_{ij}^* \rightarrow \begin{cases} p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^* \leq 0 \\ \alpha_i^* \leq 1 \\ \beta_j^* \leq 1 \\ \gamma_{ij}^* \leq 0 \end{cases}$$

La solución del problema dual restringido será:

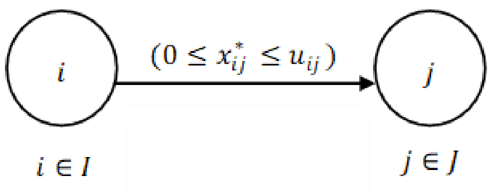
$$\alpha_i^* = \begin{cases} \dfrac{1}{p_{ij}}\ si\ i \in I(\equiv X) \\ 0\ si\ i \in \bar{I}\,(\equiv \bar{X}) \end{cases}$$

$$\beta_j^* = \begin{cases} -1\ si\ j \in J(\equiv X) \\ 0\ si\ j \in \bar{J}\,(\equiv \bar{X}) \end{cases}$$

$$\gamma_{ij}^* = \begin{cases} -1\ si\ i \in (i,j) \in (I, \bar{J}), básico \\ 0\ si\ otros\ casos \end{cases}$$

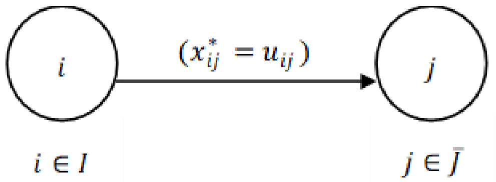
Esta hipótesis se comprobará para todos los arcos del problema primal restringido. Si (i, j) es básico, se pueden dar los siguientes casos:

i. Para todo arco básico en el que el nodo origen $i \in I$ y el destino $j \in J$, se tiene:



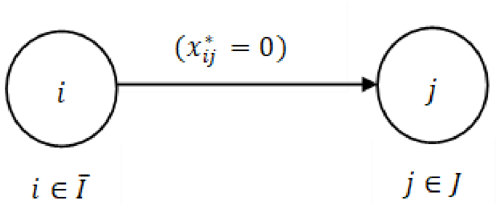
$$p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^* = p_{ij} \cdot \frac{1}{p_{ij}} - 1 + 0 = 0 \leq 0\ ✓$$

ii. Para todo arco básico en el que el nodo origen $i \in I$ y el destino $j \in \bar{J}$, se tiene:



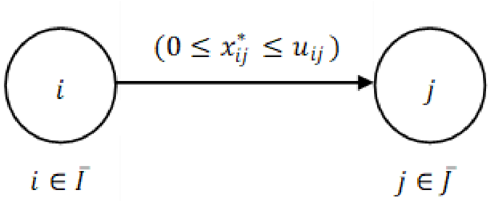
$$p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^* = p_{ij} \cdot \frac{1}{p_{ij}} + 0 - 1 = 0 \leq 0 \ \checkmark$$

iii. Para todo arco básico en el que el nodo origen $i \in \bar{I}$ y el destino $j \in J$, se tiene:



$$p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^* = p_{ij} \cdot 0 - 1 + 0 = -1 \leq 0 \ \checkmark$$

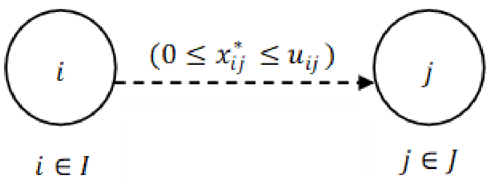
iv. Para todo arco básico en el que el nodo origen $i \in \bar{I}$ y el destino $j \in \bar{J}$, se tiene:



$$p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^* = p_{ij} \cdot 0 + 0 + 0 = 0 \leq 0 \ \checkmark$$

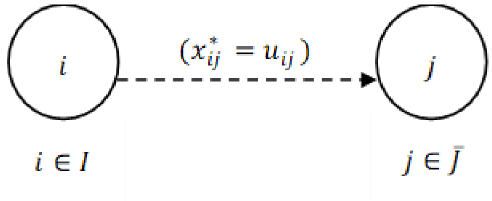
No obstante, para cambiar de solución básica factible habría que tener en cuenta los arcos no básicos que se convertirán en básicos. Si (i, j) es no básico, se tendrán los siguientes casos:

v. Para todo arco no básico en el que el nodo origen $i \in I$ y el destino $j \in J$, se tiene:



$$p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^* = p_{ij} \cdot \frac{1}{p_{ij}} - 1 + 0 = 0 \leq 0 \ \checkmark$$

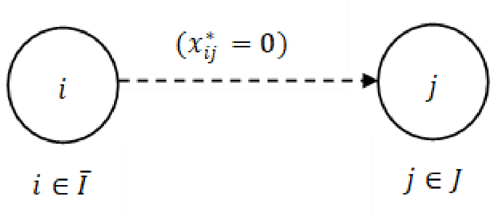
vi. Para todo arco no básico en el que el nodo origen $i \in I$ y el destino $j \in \bar{J}$, se tiene:



$$p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^* = p_{ij} \cdot \frac{1}{p_{ij}} + 0 + 0 = 1 \nleq 0 \text{ ✗}$$

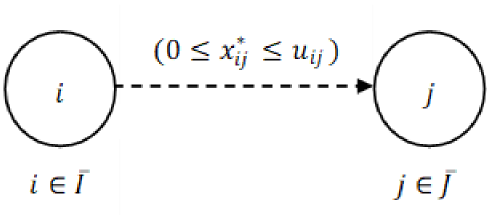
No admisible para el dual restringido.

vii. Para todo arco no básico en el que el nodo origen $i \in \bar{I}$ y el destino $j \in J$, se tiene:



$$p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^* = p_{ij} \cdot 0 - 1 + 0 = -1 \leq 0 \text{ ✓}$$

viii. Para todo arco no básico en el que el nodo origen $i \in \bar{I}$ y el destino $j \in \bar{J}$, se tiene:



$$p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^* = p_{ij} \cdot 0 + 0 + 0 = 0 \leq 0 \text{ ✓}$$

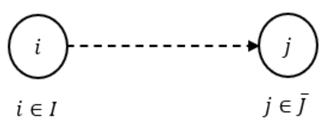
El único arco no básico que no es admisible para el dual restringido es el que conecta un nodo $i \in I$ y otro $j \in \bar{J}$. Obligando la admisibilidad se tendrá:

$$\epsilon^* = \min_{j \in D}\left(\frac{r_{ij} - w_{ij}}{p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^*}, p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^* > 0\right) = \min_{j \in D}\left(\frac{\widehat{r_{ij}}}{1}\right)$$

$$\epsilon^* = \min_{j \in D}\left(r_{ij} - (w_{ij} = 0)\right) = \min_{j \in D}(r_{ij})$$

Denominando $r^* = \min_{j \in D}(r_{ij})$ $\forall\, i \in I, j \in \bar{J}$, el mínimo de los costos relativos de las filas marcadas y columnas no marcadas:

$$\epsilon = r^* = \min_{j \in D}(r_{ij})$$

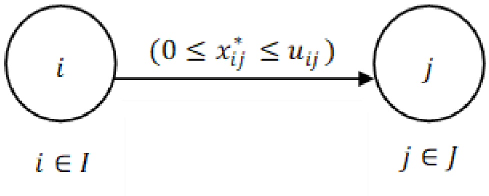


Los nuevos costos relativos estarán definidos por la siguiente expresión:

$$\overline{r_{ij}} = r_{ij} - r^*\left(p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^*\right)$$

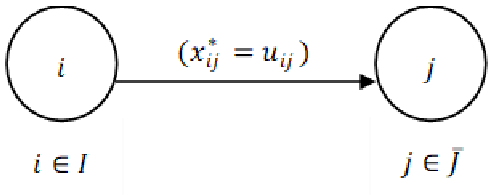
Teniendo en cuenta los nuevos costos relativos, va a comprobarse en que casos los arcos del problema primal restringido sufren modificaciones. Va a seguirse la misma estructura que en el proceso anterior:

i. Para todo arco básico en el que el nodo origen $i \in I$ y el destino $j \in J$, se tiene:



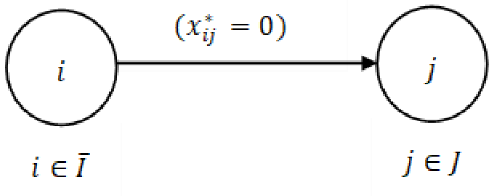
$$\overline{r_{ij}} = r_{ij} - r^*(p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^*) = r_{ij} - r^*\left(p_{ij} \cdot \frac{1}{p_{ij}} - 1 + 0\right) = r_{ij}$$

ii. Para todo arco básico en el que el nodo origen $i \in I$ y el destino $j \in \bar{J}$, se tiene:



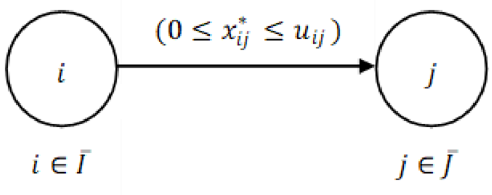
$$\overline{r_{ij}} = r_{ij} - r^*(p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^*) = r_{ij} - r^*\left(p_{ij} \cdot \frac{1}{p_{ij}} + 0 + -1\right) = r_{ij}$$

iii. Para todo arco básico en el que el nodo origen $i \in \bar{I}$ y el destino $j \in J$, se tiene:



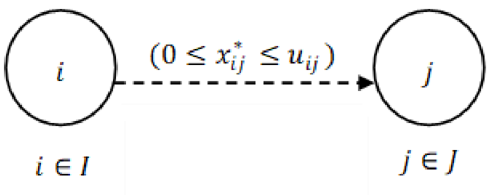
$$\overline{r_{ij}} = r_{ij} - r^*(p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^*) = r_{ij} - r^*(p_{ij} \cdot 0 - 1 + 0) = r_{ij} + r^*$$

iv. Para todo arco básico en el que el nodo origen $i \in \bar{I}$ y el destino $j \in \bar{J}$, se tiene:



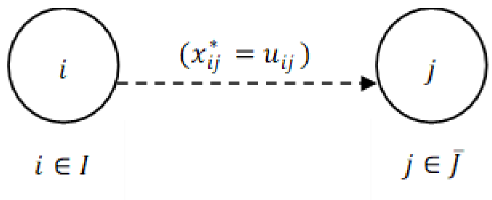
$$\overline{r_{ij}} = r_{ij} - r^*(p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^*) = r_{ij} - r^*(p_{ij} \cdot 0 + 0 + 0) = r_{ij}$$

v. Para todo arco no básico en el que el nodo origen $i \in I$ y el destino $j \in J$, se tiene:



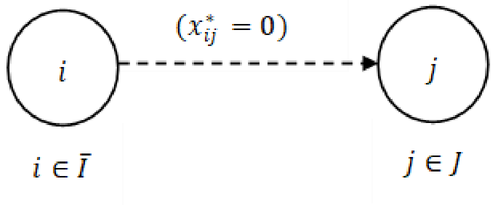
$$\overline{r_{ij}} = r_{ij} - r^*(p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^*) = r_{ij} - r^*\left(p_{ij} \cdot \frac{1}{p_{ij}} - 1 + 0\right) = r_{ij}$$

vi. Para todo arco no básico en el que el nodo origen $i \in I$ y el destino $j \in \bar{J}$, se tiene:



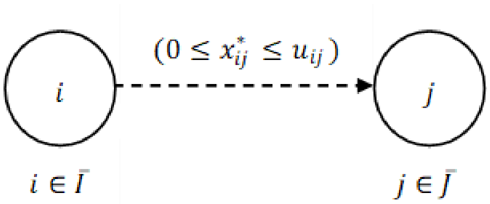
$$\overline{r_{ij}} = r_{ij} - r^*\left(p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^*\right) = r_{ij} - r^*\left(p_{ij} \cdot \frac{1}{p_{ij}} + 0 + 0\right) = r_{ij} - r^*$$

vii. Para todo arco no básico en el que el nodo origen $i \in \bar{I}$ y el destino $j \in J$, se tiene:



$$\overline{r_{ij}} = r_{ij} - r^*\left(p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^*\right) = r_{ij} - r^*\left(p_{ij} \cdot 0 - 1 + 0\right) = r_{ij} + r^*$$

viii. Para todo arco no básico en el que el nodo origen $i \in \bar{I}$ y el destino $j \in \bar{J}$, se tiene:



$$\overline{r_{ij}} = r_{ij} - r^*\left(p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^*\right) = r_{ij} - r^*\left(p_{ij} \cdot 0 + 0 + 0\right) = r_{ij}$$

A continuación, se recogen las conclusiones que se han obtenido sobre la nueva solución del problema dual cuando $y^*, z^* \neq 0$:

$$\overline{r_{ij}} = r_{ij} - r^*\left(p_{ij}\alpha_i^* + \beta_j^* + \gamma_{ij}^*\right) = \begin{cases} r_{ij} - r^* \ \forall\ i \in I, j \in \bar{J} \\ r_{ij} + r^* \ \forall\ i \in \bar{I}, j \in J \\ r_{ij}\ para\ el\ resto\ de\ los\ casos \end{cases}$$

2.4.4 Algoritmo

A continuación, van a describirse los pasos que, de carácter práctico, deben seguirse para resolver los problemas de transporte mediante esta metodología teniendo en cuenta el problema generalizado con coeficientes tecnológicos en las restricciones de oferta y acotado superiormente:

1. Por el método de la matriz reducida se obtienen las casillas admisibles, celdas con costo nulo. En estas casillas se asignan los niveles transportados. Esta asignación puede realizarse arbitrariamente o bien ordenadamente siguiendo el criterio indicado en el siguiente punto (punto 2). Realizada la asignación, en la izquierda de la tabla aparecerán las variables $y_i = a_i - \sum_j p_{ij}x_{ij}$ para cada una de las filas, mientras que en la parte superior de la tabla aparecerán las variables $z_j = b_j - \sum_i x_{ij}$, para cada una de las columnas.

2. El segundo paso consta de los siguientes subpasos:
   i. Las filas con nivel de ofertas ($y_i \neq 0$), se marcan con la etiqueta $(-, y_i)$.
   ii. Para cada fila marcada debe marcarse la columna j, cuando la celda (i, j) sea admisible, con la etiqueta (i, ε), siendo $\varepsilon = \min\left(\frac{y_i}{p_{ij}}, u_{ij} - x_{ij}\right)$.
   iii. Para cada columna marcada debe marcarse la fila k, cuando la celda (k, j) sea admisible y tenga asignación no nula ($x_{ij} > 0$), y cuando no haya sido marcada precedentemente. La etiqueta será $\left(j, \varphi = \min(x_{ij}, \varepsilon)\right)$.
   iv. Volver al paso ii.

   El proceso termina cuando:
   - Se marca una columna no saturada, es decir, una columna j en la que $z_j \neq 0$. En este caso ir al paso 3.
   - No se pueden marcar más filas y columnas. En este caso ir al paso 4.
3. Una columna *j*-ésima no saturada, en la que $z_j \neq 0$ se ha marcado con (i, ε). Esto indica que se ha alcanzado el nodo de entrada desde el de salida, y la red permite un incremento de flujo de valor $\mu = \min\,(\varphi, z_j)$. A partir de este punto se llevan a cabo los siguientes subpasos:
   i. Se modifica el nivel de saturación de dicha columna en $z_j' = z_j - \mu$.
   ii. Se incrementa el flujo de la casilla (i, j) en μ.
   iii. Ir a la fila i, que se encontrará marcada con $(k, \cdot)$ y seleccionar la celda (i, k), decrementando su flujo en μ.
   iv. Ir a la columna k. El primer término de su etiqueta indicará la fila en la que se encontrará la celda (l, k). Ir al paso *ii*.
   v. El proceso terminará cuando se alcance una fila no saturada.
   vi. Modificando la fila no saturada en $y_i' = y_i - \mu$ se habrá finalizado este paso del algoritmo.
4. Modificar la tabla de costos relativos, según los subpasos siguientes:
   i. De entre las filas marcadas y columnas no marcadas, seleccionar el mínimo costo relativo, sin tener en cuenta aquellas que están acotadas superiormente y tiene asignadas las máximas unidades posibles.

$$r^* = \min(r_{ij})\ \forall\ i\ \in I, j\ \in \bar{J}$$

   ii. Sustraer r^* de los costos de las filas marcadas y columnas no marcadas:

$$\bar{r}_{ij} = r_{ij} - r^*\ \forall\ i\ \in I, j\ \in \bar{J}$$

   iii. Adicionar r^* a los costos de las filas no marcadas y columnas marcadas:

$$\bar{r}_{ij} = r_{ij} + r^*\ \forall\ i\ \in \bar{I}, j\ \in J$$

   iv. Definir como casillas admisibles aquellas con costo nulo a excepción de aquellas que están acotadas superiormente y tiene asignadas las máximas unidades posibles.
   v. Ir al paso 2.
   vi. El algoritmo termina cuando todas las filas y columnas se encuentran saturadas.

<u>Nota.</u> Este algoritmo no es más que el de algoritmo primal-dual de Ford-Fulkerson aplicado directamente a un problema cuya red corresponde a un problema de transporte, con la salvedad de que se aplica directamente sobre la tabla en lugar de sobre la red.

2.4.5 Problema generalizado no estándar con restricciones de desigualdad ≤ en las ecuaciones de oferta y/o demanda.

2.4.5.1 Problemas con restricciones ≤ en las ecuaciones de oferta

$$Minimizar\ f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}\overline{c_{ij}}$$

$$s.a. \sum_{j=1}^{n} q_{ij}z_{ij} \leq \overline{a_i}\ ;\ \forall\, i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} t_{ij}z_{ij} = \overline{b_j}\ ;\ \forall\, j = 1,2,\dots,n$$

$$\overline{l_{ij}} \leq z_{ij} \leq \overline{u_{ij}}\ \forall \begin{cases} i = 1,2,\dots,m \\ j = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

Primeramente, va a aplicarse un cambio de variables, $t_{ij}z_{ij} = y_{ij}$, para suprimir los coeficientes de las ecuaciones de oferta. De forma análoga, se podría haber procedido con la eliminación de los coeficientes de las restricciones de demanda.

$$Minimizar\ f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{c_{ij}}}{t_{ij}} y_{ij}$$

$$s.a. \sum_{j=1}^{n} \frac{q_{ij}}{t_{ij}} y_{ij} \leq \overline{a_i}\ ;\ \forall\, i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} = \overline{b_j}\ ;\ \forall\, j = 1,2,\dots,n$$

$$\overline{l_{ij}} \leq \frac{y_{ij}}{t_{ij}} \leq \overline{u_{ij}}\ \forall \begin{cases} i = 1,2,\dots,m \\ j = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

A continuación, va a efectuarse un segundo cambio de variable con el objetivo de eliminar las cotas inferiores, $\overline{l_{ij}}$.

$$\overline{l_{ij}} \leq \frac{y_{ij}}{t_{ij}} \leq \overline{u_{ij}} \to 0 \leq y_{ij} - \overline{l_{ij}}t_{ij} \leq (\overline{u_{ij}} - \overline{l_{ij}})t_{ij} \to 0 \leq x_{ij} \leq (\overline{u_{ij}} - \overline{l_{ij}})t_{ij}$$

$$x_{ij} = y_{ij} - \overline{l_{ij}}t_{ij}$$

Si se aplica este segundo cambio de variable el problema queda definido como:

$$Minimizar\ f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{c_{ij}}}{t_{ij}}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overline{c_{ij}}\,\overline{l_{ij}}$$

$$s.a.\sum_{j=1}^{n}\frac{q_{ij}}{t_{ij}}x_{ij} \le \overline{a_i} - \sum_{j=1}^{n}\overline{l_{ij}}q_{ij}\ \ ;\ \ \forall\ i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij} = \overline{b_j} - \sum_{i=1}^{m}\overline{l_{ij}}t_{ij}\ \ ;\ \ \forall\ j = 1,2,\dots,n$$

$$0 \le x_{ij} \le (\overline{u_{ij}} - \overline{l_{ij}})t_{ij}\ \forall \begin{cases} i = 1,2,\dots,m \\ j = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

Con el fin de simplificar la estructura del modelo, se definen las siguientes variables:

$$\overline{a_i} - \sum_{j=1}^{n}l_{ij}q_{ij} \equiv a_i\ ;\ \overline{b_j} - \sum_{i=1}^{m}l_{ij}t_{ij} \equiv b_j$$

$$\left(\overline{u_{ij}} - \overline{l_{ij}}\right)t_{ij} \equiv u_{ij}\ \ ;\ \ \frac{\overline{c_{ij}}}{t_{ij}} \equiv c_{ij}\ ;\ \ \frac{q_{ij}}{t_{ij}} = p_{ij}$$

Aplicando estas últimas actualizaciones y elminando la constante que aparece en la función objetivo $\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overline{c_{ij}}\,\overline{l_{ij}}\right)$, se obtiene el problema equivalente:

$$Minimizar\ f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$s.a.\sum_{j=1}^{n}p_{ij}x_{ij} \le a_i\ \ ;\ \ \forall\ i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij} = b_j\ \ ;\ \ \forall\ j = 1,2,\dots,n$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij}\ \forall\ \begin{cases} i = 1,2,\dots,m \\ j = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

Finalmente, es necesario que todas las restricciones tengan signo de igualdad. En el caso que se representa en este apartado del documento se hace referencia a un exceso de oferta, es decir, existe un signo de desigualdad, ≤, en las ecuaciones de oferta. Para convertirlo a la forma estándar se define un destino artificial *n+1*-ésimo y las variables de holgura $z_{i,n+1}$. De esta forma, las restricciones de oferta quedan definidas a partir de la siguiente expresión:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij} + x_{i,n+1} = a_i\ \ ;\ \ \forall\ i = 1,2,\dots,m$$

Como se ha mencionado anteriormente, en el problema generalizado no existe ninguna combinación lineal entre las restricciones de oferta y demanda por lo que no puede formularse una ecuación resultado de la adición de las ecuaciones de oferta y de demanda.

El problema estará en forma estándar una vez definidos los costos $c_{i,n+1}$. En este caso, se considera que las holguras no tienen limitación en los valores que pueden alcanzar en el óptimo por lo que los costos serán nulos o tendrán un cierto valor debido a un costo de almacenamiento.

De esta forma, la formulación del problema quedará como:

$$Minimizar\ f' = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} 0 \cdot x_{i,n+1}$$

$$s.a. \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij} + x_{i,n+1} = a_i \ ; \ \ \forall\, i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ ; \ \ \forall\, j = 1,2,\dots,n$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij} \ \ \forall \begin{cases} i = 1,2,3 \\ j = 1,2,3 \end{cases}$$

$$x_{i,n+1} \ge 0$$

2.4.5.2 Ejemplo 1

$$Minimizar\ f = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} z_{ij}\overline{c_{ij}}$$

$$s.a. \sum_{j=1}^{3} q_{ij}z_{ij} \leq \overline{a_i}\ \ ;\ \ \forall\, i = 1{,}2{,}3$$

$$\sum_{i=1}^{3} t_{ij}z_{ij} = \overline{b_j}\ \ ;\ \ \forall\, j = 1{,}2{,}3$$

$$\overline{l_{ij}} \leq\ z_{ij} \leq \overline{u_{ij}}\ \ \forall \begin{cases} i = 1{,}2{,}3 \\ j = 1{,}2{,}3 \end{cases}$$

$$\bar{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 2 \\ 50 & 10 & 12 \\ 6 & 20 & 28 \end{pmatrix};\ \bar{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 140 \\ 150 \\ 110 \end{pmatrix};\ \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 130 \\ 190 \\ 121 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};\ \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{l}} = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix};\ \bar{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} 50 & 45 & 50 \\ 20 & 40 & \infty \\ \infty & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, va a realizarse un cambio de variable $t_{ij}z_{ij} = y_{ij}$ que permita eliminar los coeficientes t_{ij} de las ecuaciones de demanda.

Por otra parte, va a efectuarse un segundo cambio de variable, $x_{ij} = y_{ij} - \overline{l_{ij}}t_{ij}$, con el objetivo de suprimir las cotas inferiores, $\overline{l_{ij}}$.

Aplicando estos dos cambios de variables el problema queda definido de la siguiente forma:

$$Minimizar\ f' = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.a. \sum_{j=1}^{3} p_{ij}x_{ij} \leq a_i\ \ ;\ \ \forall\, i = 1,2,\dots,3$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j\ \ ;\ \ \forall\, j = 1,2,\dots,3$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}\ \ \forall \begin{cases} i = 1{,}2{,}3 \\ j = 1{,}2{,}3 \end{cases}$$

A continuación, van a calcularse las matrices del problema:

$$c_{ij} = \frac{\overline{c_{ij}}}{t_{ij}} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 15 & 2 \\ 50 & 10 & 12 \\ 6 & 20 & 28 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3 & 7.5 & 0.67 \\ 12.5 & 5 & 6 \\ 3 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

$$a_i = \overline{a_i} - \sum_{j=1}^{n} \overline{l_{ij}}q_{ij} = \begin{pmatrix} 140 \\ 150 \\ 110 \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{3} \begin{pmatrix} 0 & 15 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 117 \\ 141 \\ 90 \end{pmatrix}$$

$$b_j = \overline{b_j} - \sum_{i=1}^{m} \overline{l_{ij}} t_{ij} = \begin{pmatrix} 130 \\ 190 \\ 121 \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^{3} \begin{pmatrix} 0 & 15 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102 \\ 150 \\ 87 \end{pmatrix}$$

$$u_{ij} = (\overline{u_{ij}} - \overline{l_{ij}}) t_{ij} = \left[\begin{pmatrix} 50 & 45 & 50 \\ 20 & 40 & \infty \\ \infty & 10 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 15 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 60 & 126 \\ 72 & 80 & \infty \\ \infty & 10 & 40 \end{pmatrix}$$

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{t_{ij}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.33 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, para que todas las ecuaciones tengan signo de igualdad va a definirse un nodo artificial, *n+1*-ésimo, y las variables de holgura, $z_{i,n+1}$:

$$Minimizar\ f' = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{3} 0 \cdot x_{i4}$$

$$s.a. \sum_{j=1}^{3} p_{ij} x_{ij} + x_{i,4} = a_i \ ; \ \forall\, i = 1,2,3$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j \ ; \ \forall\, j = 1,2,3$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \ \forall \begin{cases} i = 1,2,3 \\ j = 1,2,3 \end{cases}$$

Las matrices c_{ij}, u_{ij} y p_{ij} presentan la siguiente estructura una vez añadida la variable artificial x_{i4}:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 7.5 & 0.67 & 0 \\ 12.5 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 10 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.33 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

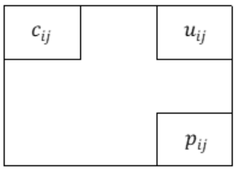
$$u_{ij} = \begin{pmatrix} 50 & 60 & 126 & \infty \\ 72 & 80 & \infty & \infty \\ \infty & 10 & 40 & \infty \end{pmatrix}$$

El primer paso va a consistir en la obtención de una solución básica factible del dual aplicando el teorema de la matriz reducida por columnas:

$$c'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 9.5 & 0 & 5.33 & 0 \\ 0 & 5 & 13.33 & 0 \end{pmatrix}$$

Los ceros que aparecen en la matriz de costos cumplen las restricciones del dual con estricto signo de igualdad por lo que dichas celdas identifican las variables básicas del primal.

Una vez calculadas las matrices se obtiene la tabla del problema de transporte. En la siguiente imagen se muestra un esquema de los datos que se representan en la tabla:



Sea el problema generalizado del transporte definido por la tabla siguiente donde c_{ij} se especifica en la esquina superior izquierda de cada casilla, p_{ij} en la inferior derecha y u_{ij} en la superior derecha, se desea obtener la solución óptima. Las casillas marcadas representan las celdas básicas en las que el costo relativo es nulo. Se han obtenido a través del teorema de la matriz reducida en pasos anteriores (paso 1 del algoritmo).

a_i/b_j	102	150	87	
117	0 50 1	2.5 60 0.5	0 126 0.33	0 1
141	9.5 72 0.5	0 80 1	5.33 0.5	0 1
90	0 0.5	5 10 1	13.33 40 2	0 1

Iteración 1. Marcaje desde el nodo S a las ofertas 1, 2 y 3.

a_i/b_j	102	150	87		
117	0 50 □ 1	0 60 0.5	0 126 □ 0.33	0 □ 1	(-, 117)
141	9.5 72 0.5	0 80 □ 1	5.33 0.5	0 □ 1	(-, 141)
90	0 □ 0.5	0 10 1	13.33 40 2	0 □ 1	(-, 90)

Iteración 2. Marcaje desde el nodo ofertante 1 a los demandantes 1, 2 y 3.

a_i/b_j	102	150	87		
117	0 50 □ 1	0 60 0.5	0 126 □ 0.33	0 □ 1	(-, 117)*
141	9.5 72 0.5	0 80 □ 1	5.33 0.5	0 □ 1	(-, 141)
90	0 □ 0.5	0 10 1	13.33 40 2	0 □ 1	(-, 90)
	(1, 50) (1) ↑ Δ				

$$(1) = \min\left(\frac{117}{1}, 50\right)$$

* El primer número de la etiqueta está indicando la fila que se está estudiando.

Como puede comprobarse, se ha marcado una columna no saturada por lo que la red permite un incremento de flujo de la siguiente cantidad:

$$\Delta = \min(102, 50) = 50$$

Iteración 3. Asignación de flujo.

Haciendo las siguientes modificaciones, la tabla del transporte quedará definida de la forma:

$$\widehat{a_1} = a_1 - p_{11} \cdot \Delta = 117 - 1 \cdot 50 = 67$$

$$\widehat{b_1} = b_1 - \Delta = 102 - 50 = 52$$

$$x_{11} = \Delta = 50$$

a_i/b_j	52	150	87	
67	0 50 $\boxed{50}$ 1	0 60 0.5	0 126 $\boxed{}$ 0.33	0 $\boxed{}$ 1
141	9.5 72 0.5	0 80 $\boxed{}$ 1	5.33 0.5	0 $\boxed{}$ 1
90	0 $\boxed{}$ 0.5	0 10 1	13.33 40 2	0 $\boxed{}$ 1

Iteración 4. Marcaje desde el nodo S a los nodos ofertantes 1, 2 y 3.

a_i/b_j	52	150	87		
67	0 50 $\boxed{50}$ 1	0 60 0.5	0 126 0.33	0 1	(-, 67)*
141	9.5 72 0.5	0 80 1	5.33 0.5	0 1	(-, 141)
90	0 0.5	0 10 1	13.33 40 2	0 1	(-, 90)
			(1,126) (1) ↑ Δ		

$$(1) = \min\left(\frac{67}{0.33}, 126\right) = 126$$

$$\Delta = \min(126, 87) = 87$$

Iteración 5. Asignación de flujo.

$$\widehat{a_1} = a_1 - p_{13} \cdot \Delta = 67 - 0.33 \cdot 87 = 38$$

$$\widehat{b_3} = b_3 - \Delta = 87 - 87 = 0$$

$$x_{13} = \Delta = 87$$

a_i/b_j	52	150		
38	0 50 $\boxed{50}$ 1	0 60 0.5	0 126 $\boxed{87}$ 0.33	0 $\boxed{\ }$ 1
141	9.5 72 0.5	0 80 $\boxed{\ }$ 1	5.33 0.5	0 $\boxed{\ }$ 1
90	0 $\boxed{\ }$ 0.5	0 10 1	13.33 40 2	0 $\boxed{\ }$ 1

Iteración 6. Marcaje desde el nodo S a los nodos ofertantes 1, 2 y 3.

a_i/b_j	52	150			
38	0 50 $\boxed{50}$ 1	0 60 0.5	0 126 $\boxed{87}$ 0.33	0 $\boxed{\ }$ 1	(-, 38)
141	9.5 72 0.5	0 80 $\boxed{\ }$ 1	5.33 0.5	0 $\boxed{\ }$ 1	(-, 141)
90	0 $\boxed{\ }$ 0.5	0 10 1	13.33 40 2	0 $\boxed{\ }$ 1	(-, 90)

Iteración 7. Marcaje desde nodos ofertantes a demandantes.

a_i/b_j	52	150			
38	0 50 50 1	2.5 60 0.5	0 126 87 0.33	0 1	(-, 38)*
141	9.5 72 0.5	0 80 1	5.33 0.5	0 1	(-, 141)*
90	0 0.5	5 10 1	13.33 40 2	0 1	(-, 90)
		(2, 80) (1) ↑ Δ	(1, 39)	(1, 38)	

$$(1) = \min\left(\frac{141}{1}, 80\right) = 80$$

$$\Delta = \min(80, 150) = 80$$

Iteración 8. Asignación de flujo.

$$\widehat{a_2} = a_2 - p_{22} \cdot \Delta = 141 - 1 \cdot 80 = 61$$

$$\widehat{b_2} = b_2 - \Delta = 150 - 80 = 70$$

$$x_{22} = \Delta = 70$$

a_i/b_j	52	70		
38	0 50 $\boxed{50}$ 1	0 60 0.5	0 126 $\boxed{87}$ 0.33	0 $\boxed{\ }$ 1
61	9.5 72 0.5	0 80 $\boxed{80}$ 1	5.33 0.5	0 $\boxed{\ }$ 1
90	0 $\boxed{\ }$ 0.5	0 10 1	13.33 40 2	0 $\boxed{\ }$ 1

A partir de ahora se van a realizar los pasos de marcaje desde el nodo S a los nodos ofertantes y desde los nodos ofertantes a los demandantes en la misma iteración.

Iteración 9. Marcaje.

a_i/b_j	52	70			
38	0 50 $\boxed{50}$ 1	2.5 60 0.5	0 126 $\boxed{87}$ 0.33	0 $\boxed{\ }$ 1	(-, 38)*
61	9.5 72 0.5	0 80 $\boxed{80}$ 1	5.33 0.5	0 $\boxed{\ }$ 1	(-, 61)*
90	0 $\boxed{\ }$ 0.5	5 10 1	13.33 40 2	0 $\boxed{\ }$ 1	(-, 90)*
	(3, 180) (1) ↑ Δ		(1, 39)	(1, 38)	

$$(1) = \min\left(\frac{90}{0.5}, \infty\right) = 52$$

$$\Delta = \min\left(\frac{90}{0.5}, 52\right) = 52$$

Iteración 10. Asignación de flujo.

$$\widehat{a_3} = a_3 - p_{31} \cdot \Delta = 90 - 0.5 \cdot 52 = 64$$

$$\widehat{b_1} = b_1 - \Delta = 52 - 52 = 0$$

$$x_{31} = \Delta = 52$$

a_i/b_j		70			
38	0 50 $\boxed{50}$ 1	2.5 60 0.5	0 126 $\boxed{87}$ 0.33	0 $\boxed{}$ 1	(-, 38)*
61	9.5 72 0.5	0 80 $\boxed{80}$ 1	5.33 0.5	0 $\boxed{}$ 1	(-, 61)*
64	0 $\boxed{52}$ 0.5	5 10 1	13.33 40 2	0 $\boxed{}$ 1	(-, 64)*
	(3, 128)*		(1, 39)*	(1, 38)*	

Como puede comprobarse en la matriz anterior, no es posible ninguna asignación sin previa modificación de la matriz de costos relativos.

Fase II. Cambio de la matriz de costos relativos.

a_i/b_j 70

38	0 50 $\boxed{50}$ 1	2.5 60 0.5	0 126 $\boxed{87}$ 0.33	0 $\boxed{}$ 1	I
61	9.5 72 0.5	0 80 $\boxed{80}$ 1	5.33 0.5	0 $\boxed{}$ 1	I
64	0 $\boxed{52}$ 0.5	5 10 1	13.33 40 2	0 $\boxed{}$ 1	I
	J	J	J	J	

$$r^* = \min(2.5, 5) = 2.5$$

La nueva matriz de costos quedará definida de la siguiente forma:

$$c'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9.5 & 0 & 5.33 & 0 \\ 0 & 2.5 & 13.33 & 0 \end{pmatrix}$$

a_i/b_j 70

38	0 50 $\boxed{50}$ 1	0 60 $\boxed{}$ 0.5	0 126 $\boxed{87}$ 0.33	0 $\boxed{}$ 1
61	9.5 72 0.5	0 80 $\boxed{80}$ 1	5.33 0.5	0 $\boxed{}$ 1
64	0 $\boxed{52}$ 0.5	2.5 10 1	13.33 40 2	0 $\boxed{}$ 1

Fase II: Iteración 1. Marcaje.

a_i/b_j		70			
38	0 50 $\boxed{50}$ 1	0 60 $\boxed{}$ 0.5	0 126 $\boxed{87}$ 0.33	0 $\boxed{}$ 1	(-, 38)
61	9.5 72 0.5	0 80 $\boxed{80}$ 1	5.33 0.5	0 $\boxed{}$ 1	
64	0 $\boxed{52}$ 0.5	2.5 10 1	13.33 40 2	0 $\boxed{}$ 1	
		(1, 60) (1) ↑ Δ			

$$(1) = \min\left(\frac{38}{0.5}, 60\right) = 60$$

$$\Delta = \min(60, 70) = 60$$

Fase II: Iteración 2. Asignación de flujo.

$$\widehat{a_1} = a_1 - p_{12} \cdot \Delta = 38 - 0.5 \cdot 60 = 8$$

$$\widehat{b_2} = b_2 - \Delta = 70 - 60 = 10$$

$$x_{12} = \Delta = 60$$

a_i/b_j		10		
8	0 50 $\boxed{50}$ 1	0 60 $\boxed{60}$ 0.5	0 126 $\boxed{87}$ 0.33	0 $\boxed{\ }$ 1
61	9.5 72 0.5	0 80 $\boxed{80}$ 1	5.33 0.5	0 $\boxed{\ }$ 1
64	0 $\boxed{52}$ 0.5	0 10 1	13.33 40 2	0 $\boxed{\ }$ 1

Fase II: Iteración 3. Marcaje.

a_i/b_j		10			
8	0 50 $\boxed{50}$ 1	0 60 $\boxed{60}$ 0.5	0 126 $\boxed{87}$ 0.33	0 $\boxed{\ }$ 1	(-, 8)*
61	9.5 72 0.5	0 80 $\boxed{80}$ 1	5.33 0.5	0 $\boxed{\ }$ 1	(-, 61)*
64	0 $\boxed{52}$ 0.5	2.5 10 1	13.33 40 2	0 $\boxed{\ }$ 1	(-, 64)*
	(3, 128)*		(1, 24)*	(1, 8)*	

Se ha obtenido el óptimo del PPR, pero no el óptimo del PP ya que $y_i \neq 0, z_j \neq 0$. De nuevo se da una situación en la que se debe modificar la matriz de costos relativos para continuar con el proceso de asignación.

Fase III. Cambio de la matriz de costos relativos.

a_i/b_j		10			
8	0 / 50 / $\boxed{50}$ / 1	0 / 60 / $\boxed{60}$ / 0.5	0 / 126 / $\boxed{87}$ / 0.33	0 / $\boxed{}$ / 1	I
61	9.5 / 72 / 0.5	0 / 80 / $\boxed{80}$ / 1	5.33 / 0.5	0 / $\boxed{}$ / 1	I
64	0 / $\boxed{52}$ / 0.5	2.5 / 10 / 1	13.33 / 40 / 2	0 / $\boxed{}$ / 1	I
	J	J	J	J	

$$r^* = \min(2.5) = 2.5$$

La nueva matriz de costos estará definida mediante la siguiente expresión:

$$c'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9.5 & 0 & 5.33 & 0 \\ 0 & 0 & 13.33 & 0 \end{pmatrix}$$

a_i/b_j		10		
8	0 / 50 / $\boxed{50}$ / 1	0 / 60 / $\boxed{60}$ / 0.5	0 / 126 / $\boxed{87}$ / 0.33	0 / $\boxed{}$ / 1
61	9.5 / 72 / 0.5	0 / 80 / $\boxed{80}$ / 1	5.33 / 0.5	0 / $\boxed{}$ / 1
64	0 / $\boxed{52}$ / 0.5	0 / 10 / $\boxed{}$ / 1	13.33 / 40 / 2	0 / $\boxed{}$ / 1

Fase III: Iteración 1. Marcaje.

a_i/b_j		10			
8	0 50 $\boxed{50}$ 1	0 60 $\boxed{60}$ 0.5	0 126 $\boxed{87}$ 0.33	0 $\boxed{}$ 1	(-, 8)*
61	9.5 72 0.5	0 80 $\boxed{80}$ 1	5.33 0.5	0 $\boxed{}$ 1	(-, 61)*
64	0 $\boxed{52}$ 0.5	0 10 $\boxed{}$ 1	13.33 40 2	0 $\boxed{}$ 1	(-, 64)*
	(3, 128)	(3, 10) (1) ↑ Δ	(1, 24)	(1, 8)	

$$(1) = \min\left(\frac{64}{1}, 10\right) = 10$$

$$(\Delta) = \min(10, 10) = 10$$

Fase III: Iteración 2. Asignación de flujo.

a_i/b_j

8	0 50 $\boxed{50}$ 1	0 60 $\boxed{60}$ 0.5	0 126 $\boxed{87}$ 0.33	0 $\boxed{}$ 1
61	9.5 72 0.5	0 80 $\boxed{80}$ 1	5.33 0.5	0 $\boxed{}$ 1
54	0 $\boxed{52}$ 0.5	0 10 $\boxed{10}$ 1	13.33 40 2	0 $\boxed{}$ 1

Se ha alcanzado la solución óptima.

Deshaciendo los cambios de variables que se realizaron en los primeros pasos de resolución del problema:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{t_{ij}} + \overline{l_{ij}} = \frac{\begin{pmatrix} 50 & 60 & 87 \\ 0 & 80 & 0 \\ 52 & 10 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 0 & 15 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 45 & 37 \\ 2 & 40 & 5 \\ 36 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, el valor de la función objetivo será:

$$f = \overline{c_{ij}} z_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 2 \\ 50 & 10 & 12 \\ 6 & 20 & 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & 45 & 37 \\ 2 & 40 & 5 \\ 36 & 10 & 0 \end{pmatrix} = 1875$$

2.4.5.3 Ejemplo 2

$$Minimizar\ f = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} z_{ij}\overline{c_{ij}}$$

$$s.a. \sum_{j=1}^{3} q_{ij}z_{ij} \leq \overline{a_i}\ ;\ \ \forall i = 1,2,3$$

$$\sum_{i=1}^{3} t_{ij}z_{ij} = \overline{b_j}\ \ ;\ \ \forall j = 1,2,3$$

$$\overline{l_{ij}} \leq\ z_{ij} \leq \overline{u_{ij}}\ \begin{cases}\forall i = 1,2,3\\ \forall j = 1,2,3\end{cases}$$

$$\overline{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix}40 & 30 & 10\\ 8 & 10 & 20\\ 5 & 20 & 3\end{pmatrix};\overline{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix}150\\ 110\\ 140\end{pmatrix}\ ;\ \overline{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix}130\\ 190\\ 121\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\ ;\ \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{l}} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 10 & 5 & 0\\ 0 & 15 & 8\end{pmatrix}\ ;\ \overline{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix}20 & 30 & \infty\\ \infty & 10 & 20\\ 50 & 100 & 50\end{pmatrix}$$

El problema anterior queda formulado en su forma estándar como se muestra a continuación:

$$Minimizar\ f' = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{3} 0 \cdot x_{i4}$$

$$s.a. \sum_{j=1}^{3} p_{ij}x_{ij} + x_{i4} = a_i\ ;\ \ \forall\ i = 1,2,3$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j\ ;\ \ \forall\ j = 1,2,3$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}\ \ \forall \begin{cases}i = 1,2,3\\ j = 1,2,3\end{cases}$$

$$c_{ij} = \frac{\overline{c_{ij}}}{t_{ij}} = \frac{\begin{pmatrix}40 & 30 & 10\\ 8 & 10 & 20\\ 5 & 20 & 3\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}10 & 10 & 5\\ 4 & 5 & 10\\ 5 & 10 & 1\end{pmatrix}$$

$$a_i = \overline{a_i} - \sum_{j=1}^{n} \overline{l_{ij}}q_{ij} = \begin{pmatrix}150\\ 110\\ 140\end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{3}\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 10 & 5 & 0\\ 0 & 15 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}141\\ 90\\ 117\end{pmatrix}$$

$$b_j = \overline{b_j} - \sum_{i=1}^{m} \overline{l_{ij}}t_{ij} = \begin{pmatrix}130\\ 190\\ 121\end{pmatrix} - \sum_{i=1}^{3}\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 10 & 5 & 0\\ 0 & 15 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}102\\ 150\\ 87\end{pmatrix}$$

$$u_{ij} = (\overline{u_{ij}} - \overline{l_{ij}})t_{ij} = \left[\begin{pmatrix}20 & 30 & \infty\\ \infty & 10 & 20\\ 50 & 100 & 50\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 10 & 5 & 0\\ 0 & 15 & 8\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}72 & 90 & \infty\\ \infty & 10 & 40\\ 50 & 170 & 126\end{pmatrix}$$

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{t_{ij}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 2 \\ 1 & 0.5 & 0.33 \end{pmatrix}$$

Las matrices c_{ij}, u_{ij} y p_{ij} presentan la siguiente estructura una vez añadida la variable artificial x_{i4}:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 10 & 0 \\ 5 & 10 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0.5 & 0.33 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_{ij} = \begin{pmatrix} 72 & 90 & \infty & \infty \\ \infty & 10 & 40 & \infty \\ 50 & 170 & 126 & \infty \end{pmatrix}$$

Seguidamente se obtiene una solución básica factible del dual aplicando el teorema de la matriz reducida por columnas:

$$c'_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a_i/b_j	102	150	87	
141	6 72 0.5	5 90 1	4 0.5	0 1
90	0 0.5	0 10 1	9 40 2	0 1
117	1 50 1	5 170 0.5	0 126 0.33	0 1

Iteración 1. Marcaje.

a_i/b_j	102	150	87		
141	6 72 0.5	5 90 1	4 0.5	0 $\square$ 1	(-, 141)*
90	0 $\square$ 0.5	0 10 $\square$ 1	9 40 2	0 $\square$ 1	(-, 90)
117	1 50 1	5 170 0.5	0 126 $\square$ 0.33	0 $\square$ 1	(-, 117)
	(2, 180) (1) ↑ Δ			(1, 141)	

$$(1) = \min\left(\frac{90}{0.5}, \infty\right) = 180$$

$$\Delta = \min(180, 102) = 102$$

Iteración 2. Asignación de flujo.

$$\widehat{a_2} = a_2 - p_{21} \cdot \Delta = 90 - 0.5 \cdot 102 = 39$$

$$\widehat{b_1} = b_1 - \Delta = 102 - 102 = 0$$

$$x_{21} = \Delta = 102$$

a_i/b_j		150	87	
141	6 72 0.5	5 90 1	4 0.5	0 $\boxed{}$ 1
39	0 $\boxed{102}$ 0.5	0 10 $\boxed{}$ 1	9 40 2	0 $\boxed{}$ 1
117	1 50 1	5 170 0.5	0 126 $\boxed{}$ 0.33	0 $\boxed{}$ 1

Iteración 3. Marcaje.

a_i/b_j		150	87		
141	6 72 0.5	5 90 1	4 0.5	0 $\boxed{}$ 1	(-, 141)*
39	0 $\boxed{102}$ 0.5	0 10 $\boxed{}$ 1	9 40 2	0 $\boxed{}$ 1	(-, 39)
117	1 50 1	5 170 0.5	0 126 $\boxed{}$ 0.33	0 $\boxed{}$ 1	(-, 117)
	(2, 78)*	(2, 10) (1) ↑ Δ		(1, 141)	

$$(1) = \min\left(\frac{39}{1}, 10\right) = 10$$

$$\Delta = \min(10, 150) = 10$$

Iteración 4. Asignación de flujo.

$$\widehat{a_2} = a_2 - p_{22} \cdot \Delta = 39 - 1 \cdot 10 = 29$$

$$\widehat{b_2} = b_2 - \Delta = 150 - 10 = 140$$

$$x_{22} = \Delta = 10$$

a_i/b_j		140	87	
141	6 72 0.5	5 90 1	4 0.5	0 $\boxed{}$ 1
29	0 $\boxed{102}$ 0.5	0 10 $\boxed{10}$ 1	9 40 2	0 $\boxed{}$ 1
117	1 50 1	5 170 0.5	0 126 $\boxed{}$ 0.33	0 $\boxed{}$ 1

Iteración 5. Marcaje y asignación de flujo.

$$(1) = \min\left(\frac{117}{0.33}, 126\right) = 126$$

$$\Delta = \min(126, 87) = 87$$

$$\widehat{a_3} = a_3 - p_{33} \cdot \Delta = 117 - 0.33 \cdot 87 = 88$$

$$\widehat{b_3} = b_3 - \Delta = 87 - 87 = 0$$

$$x_{33} = \Delta = 87$$

a_i/b_j	140			
141	6 72 0.5	5 90 1	4 0.5	0 $\boxed{}$ 1
29	0 $\boxed{102}$ 0.5	0 10 $\boxed{10}$ 1	9 40 2	0 $\boxed{}$ 1
88	1 50 1	5 170 0.5	0 126 $\boxed{87}$ 0.33	0 $\boxed{}$ 1

Iteración 6. Marcaje.

a_i/b_j	140				
141	6 72 0.5	5 90 1	4 0.5	0 $\boxed{}$ 1	(-, 141)*
29	0 $\boxed{102}$ 0.5	0 10 $\boxed{10}$ 1	9 40 2	0 $\boxed{}$ 1	(-, 29)*
88	1 50 1	5 170 0.5	0 126 $\boxed{87}$ 0.33	0 $\boxed{}$ 1	(-, 88)*
	(2, 58)*		(3, 39)*	(1, 141)*	

Fase II. Cambio de la matriz de costos relativos.

a_i/b_j		140			
141	6 72 0.5	5 90 1	4 0.5	0 $\boxed{}$ 1	I
29	0 $\boxed{102}$ 0.5	0 10 $\boxed{10}$ 1	9 40 2	0 $\boxed{}$ 1	I
88	1 50 1	5 170 0.5	0 126 $\boxed{87}$ 0.33	0 $\boxed{}$ 1	I
	J	$\bar{J}$	J	J	

$$r^* = \min(5) = 5$$

La nueva matriz de costos quedará definida de la siguiente forma:

$$c'_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fase II: Iteración 1. Marcaje y asignación de flujo.

$$(1) = \min\left(\frac{141}{1}, 90\right) = 90$$

$$\Delta = \min(90, 140) = 90$$

$$\widehat{a_1} = a_1 - p_{12} \cdot \Delta = 141 - 1 \cdot 90 = 51$$

$$\widehat{b_2} = b_2 - \Delta = 140 - 90 = 50$$

$$x_{12} = \Delta = 90$$

a_i/b_j		50		
51	6 72 0.5	0 90 $\boxed{90}$ 1	4 0.5	0 $\boxed{\ }$ 1
29	0 $\boxed{102}$ 0.5	0 10 $\boxed{10}$ 1	9 40 2	0 $\boxed{\ }$ 1
88	1 50 1	0 170 $\boxed{\ }$ 0.5	0 126 $\boxed{87}$ 0.33	0 $\boxed{\ }$ 1

Fase II: Iteración 2. Marcaje y asignación de flujo.

$$(1) = \min\left(\frac{88}{0.5}, 170\right) = 170$$

$$\Delta = \min(170, 50) = 50$$

$$\widehat{a_3} = a_3 - p_{32} \cdot \Delta = 88 - 0.5 \cdot 50 = 63$$

$$\widehat{b_2} = b_2 - \Delta = 50 - 50 = 0$$

$$x_{32} = \Delta = 50$$

a_i/b_j

51	6 72 0.5	0 90 $\boxed{90}$ 1	4 0.5	0 $\boxed{}$ 1
29	0 $\boxed{102}$ 0.5	0 10 $\boxed{10}$ 1	9 40 2	0 $\boxed{}$ 1
63	1 50 1	0 170 $\boxed{50}$ 0.5	0 126 $\boxed{87}$ 0.33	0 $\boxed{}$ 1

Se ha alcanzado la solución óptima.

Deshaciendo los cambios de variables que se realizaron en los primeros pasos de resolución del problema:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{t_{ij}} + \overline{l_{ij}} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 90 & 0 \\ 90 & 10 & 0 \\ 0 & 50 & 87 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 10 & 5 & 0 \\ 0 & 15 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 30 & 5 \\ 61 & 10 & 0 \\ 0 & 40 & 37 \end{pmatrix}$$

Finalmente, el valor de la función objetivo será:

$$f = \overline{c_{ij}} z_{ij} = \begin{pmatrix} 40 & 30 & 10 \\ 8 & 10 & 20 \\ 5 & 20 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 30 & 5 \\ 61 & 10 & 0 \\ 0 & 40 & 37 \end{pmatrix} = 2529$$

2.4.5.4 Ejemplo 3

En esta sección va a resolverse un problema, con dimensiones mayores de los que se han venido presentando hasta ahora, a través del código que se ha desarrollado. Los datos del enunciado se han extraído de [7]:

$$Minimizar\ f = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_{ij}c_{ij}$$

$$s.a. \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1 \ \ ; \ \ \forall i = 1,2,\ldots 15$$

$$\sum_{i=1}^{3} p_{ij}x_{ij} \leq b_j \ \ ; \ \ \forall j = 1,2,\ldots,5$$

$$0 \leq \ x_{ij} \leq 1 \ \ \forall\ i = 1,2,\ldots,15\ ;\ \forall\ j = 1,2,\ldots,5$$

En este ejemplo, las capacidades máximas de los centros demandantes 1, 2, 3, 4 y 5 son 36, 34, 38, 27 y 33 unidades, respectivamente:

$$\boldsymbol{b_j} = (36 \quad 34 \quad 38 \quad 27 \quad 33)$$

A continuación, se muestran las matrices de costos y de los coeficientes tecnológicos p_{ij} que multiplican a las variables x_{ij} en las restricciones de demanda:

Tabla 1. Matriz de costos.

i/j	1	2	3	4	5
1	17	23	16	19	18
2	21	16	20	19	19
3	22	21	16	22	15
4	18	16	25	22	15
5	24	17	24	20	21
6	15	16	16	16	25
7	20	19	17	19	16
8	18	25	19	17	16
9	19	18	19	21	23
10	18	21	18	19	15
11	16	17	20	25	22
12	22	15	16	23	17
13	23	25	17	25	19
14	24	17	21	25	22
15	16	24	24	25	24

Tabla 2. Matriz de coeficientes tecnológicos (p_{ij}).

i/j	1	2	3	4	5
1	8	15	21	20	8
2	15	7	20	11	13
3	14	23	6	8	13
4	23	22	22	14	13
5	8	11	24	9	10
6	16	11	10	5	20
7	8	12	24	6	25
8	25	10	9	19	16
9	9	17	21	19	16
10	17	16	14	7	17
11	25	7	11	6	10
12	15	16	14	6	10
13	10	10	11	13	5
14	8	18	19	9	12
15	24	22	16	18	23

Una vez ejecutado el código en Matlab se obtiene la siguiente solución:

Tabla 3. Solución básica factible del problema

i/j	1	2	3	4	5
1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	1
5	0	1	0	0	0
6	1	0	0	0	0
7	0	0	0,25	0,75	0
8	0	0	0	1	0
9	0	0,82	0	0,18	0
10	0	0	0	0	0,28
11	0,80	0	0	0	0
12	0	0,13	0	0	0
13	0	0	1	0	0
14	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0

La función objetivo alcanza un valor de **183,94.**

2.4.6 Problema generalizado no estándar con resistricciones mixtas de desigualdad ≤ e igulded = en las restricciones de oferta y/o demanda.

2.4.6.1 Problemas con restricciones ≤ y = en las ecuaciones de oferta y demanda

$$Minimizar\ f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}\overline{c_{ij}}$$

$$s.a. \sum_{j=1}^{n} q_{ij}z_{ij} \leq \overline{a_i}\ ;\ \forall\, i = 1,2,\dots,k$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij}z_{ij} = \overline{a_i}\ ;\ \forall\, i = k+1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} t_{ij}z_{ij} \leq \overline{b_j}\ ;\ \forall\, j = 1,2,\dots,l$$

$$\sum_{i=1}^{m} t_{ij}z_{ij} = \overline{b_j}\ ;\ \forall\, j = l+1,\dots,n$$

$$\overline{l_{ij}} \leq x_{ij} \leq \overline{u_{ij}}\ \forall \begin{cases} i = 1,2,\dots m \\ j = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

Primeramente, va a aplicarse un cambio de variables, $t_{ij}z_{ij} = y_{ij}$, para suprimir los coeficientes de las ecuaciones de oferta.

$$Minimizar\ f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{c_{ij}}}{t_{ij}} y_{ij}$$

$$s.a. \sum_{j=1}^{n} \frac{q_{ij}}{t_{ij}} y_{ij} \leq \overline{a_i}\ ;\ \forall\, i = 1,2,\dots,k$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{q_{ij}}{t_{ij}} y_{ij} = \overline{a_i}\ ;\ \forall\, i = k+1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \leq \overline{b_j}\ ;\ \forall\, j = 1,2,\dots,l$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} = \overline{b_j}\ ;\ \forall\, j = l+1,\dots,n$$

$$\overline{l_{ij}} \leq \frac{y_{ij}}{t_{ij}} \leq \overline{u_{ij}}\ \forall \begin{cases} i = 1,2,\dots m \\ j = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

A continuación, va a efectuarse un segundo cambio de variable con el objetivo de eliminar las cotas inferiores, $\overline{l_{ij}}$.

$$\overline{l_{ij}} \leq \frac{y_{ij}}{t_{ij}} \leq \overline{u_{ij}} \rightarrow 0 \leq y_{ij} - \overline{l_{ij}}t_{ij} \leq (\overline{u_{ij}} - \overline{l_{ij}})t_{ij} \rightarrow 0 \leq x_{ij} \leq (\overline{u_{ij}} - \overline{l_{ij}})t_{ij}$$

$$x_{ij} = y_{ij} - \overline{l_{ij}}t_{ij}$$

Si se aplica este segundo cambio de variable el problema queda definido como:

$$Minimizar\ f' = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{c_{ij}}}{t_{ij}}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overline{c_{ij}}\,\overline{l_{ij}}$$

$$s.a. \sum_{j=1}^{n}\frac{q_{ij}}{t_{ij}}x_{ij} \leq \overline{a_i} - \sum_{j=1}^{n}\overline{l_{ij}}q_{ij} \quad ; \ \forall\, i = 1,2,\dots,k$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{q_{ij}}{t_{ij}}x_{ij} = \overline{a_i} - \sum_{j=1}^{n}\overline{l_{ij}}q_{ij} \quad ; \ \forall\, i = k+1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij} \leq \overline{b_j} - \sum_{i=1}^{m}\overline{l_{ij}}t_{ij} \quad ; \ \forall\, j = 1,2,\dots,l$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij} = \overline{b_j} - \sum_{i=1}^{m}\overline{l_{ij}}t_{ij} \quad ; \ \forall\, j = l+1,\dots,n$$

$$\overline{l_{ij}} \leq\ x_{ij} \leq (\overline{u_{ij}} - \overline{l_{ij}})t_{ij}\ \forall \begin{cases} i = 1,2,\dots m \\ j = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

Con el fin de simplificar la estructura del modelo, se definen las siguientes variables:

$$\overline{a_i} - \sum_{j=1}^{n}\overline{l_{ij}}q_{ij} \equiv a_i \ ; \ \overline{b_j} - \sum_{i=1}^{m}\overline{l_{ij}}t_{ij} \equiv b_j$$

$$\left(\overline{u_{ij}} - \overline{l_{ij}}\ \right)t_{ij} \equiv u_{ij} \ ; \ \frac{\overline{c_{ij}}}{t_{ij}} \equiv\ c_{ij} \ ; \ \frac{q_{ij}}{t_{ij}} = p_{ij}$$

Aplicando estas últimas actualizaciones:

$$Minimizar\ f' = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$s.a. \sum_{j=1}^{n}p_{ij}x_{ij} \leq a_i \ ; \ \forall\, i = 1,2,\dots,k$$

$$\sum_{j=1}^{n}p_{ij}x_{ij} = a_i \ ; \ \forall\, i = k+1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij} \leq b_j \ ; \ \forall\, j = 1,2,\dots,l$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij} = b_j \ ; \ \forall\, j = l+1,\dots,n$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall \begin{cases} i = 1,2,\dots m \\ j = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

Finalmente, es necesario que todas las restricciones tengan signo de igualdad. Para convertirlo a la forma estándar se define un destino artificial *n+1*-ésimo y origen artificial *m+1*-ésimo y las variables de holgura $x_{i,n+1}$ y $x_{m+1,j}$. A pesar de que no sería necesario añadir nodos artificiales en las restricciones con signo de igualdad, se adicionan para conseguir que la tabla del problema de transporte tenga forma rectangular y facilitar, así, la resolución del ejercicio. De esta forma, las restricciones de oferta y demanda quedan definidas a partir de la siguiente expresión:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij} + x_{i,n+1} = a_i \ ; \ \forall\, i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + x_{m+1,j} = b_j \ ; \ \forall\, j = 1,2,\dots,n$$

Como se ha mencionado anteriormente, en el problema generalizado no existe ninguna combinación lineal entre las restricciones de oferta y demanda por lo que no puede formularse una ecuación resultado de la adición de las ecuaciones de oferta y de demanda.

El problema estará en forma estándar una vez definidos los costos $c_{i,n+1}$ y $c_{m+1,j}$. Los valores que tomarán estos costes dependerá de si las restricciones tienen signo de igualdad o desigualdad.

De esta forma, la formulación del problema quedará como:

$$Min\ f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{k} 0\cdot x_{i,n+1} + \sum_{i=k+1}^{m} M\cdot x_{i,n+1} \sum_{j=1}^{l} 0\cdot x_{m+1,j} + \sum_{j=l+1}^{n} M\cdot x_{m+1,j}$$

siendo M un valor muy alto que tenderá a infinito en el óptimo.

$$s.a. \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij} + x_{i,n+1} = a_i \ ; \ \forall\, i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + x_{m+1,j} = b_j \ ; \ \forall\, j = 1,2,\dots,n$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij} \quad \forall \begin{cases} i = 1,2,\dots m \\ j = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

$$x_{i,n+1} \ge 0$$

$$x_{m+1,j} \ge 0$$

2.4.6.2 Ejemplo 4

$$Minimizar\ f=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_{ij}c_{ij}$$

$$s.a.\sum_{j=1}^{3}q_{1j}x_{1j}=a_1\ \ ;\ \ \sum_{j=1}^{3}q_{2j}x_{2j}=a_2\ \ ;\ \ \sum_{j=1}^{3}q_{3j}x_{3j}=a_3$$

$$\sum_{i=1}^{3}x_{i1}\le b_1\ \ ;\ \ \sum_{i=1}^{3}x_{i2}\le b_2\ \ ;\ \ \sum_{i=1}^{3}x_{i3}=b_3$$

$$0\le x_{ij}\le u_{ij}\quad\forall\begin{cases}i=1,2,3\\ j=1,2,3\end{cases}$$

$$\bar{\boldsymbol{c}}=\begin{pmatrix}-3&-1&-3\\-2&-2&-4\\-1&-4&-2\end{pmatrix};\bar{\boldsymbol{a}}=\begin{pmatrix}200\\75\\100\end{pmatrix};\ \bar{\boldsymbol{b}}=\begin{pmatrix}175\\125\\40\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}4&2&4\\1&2&1\\1&3&4\end{pmatrix};\ \bar{\boldsymbol{u}}=\begin{pmatrix}\infty&50&\infty\\25&\infty&\infty\\\infty&25&\infty\end{pmatrix}$$

En este problema no es necesario realizar los cambios de variables que se han venido desarrollando hasta ahora debido a que los coeficientes tecnológicos están presentes únicamente en las ecuaciones de oferta y las cotas inferiores tienen valor nulo.

No obstante, para que el problema se encuentre en su forma estándar habrá que conseguir que todas las ecuaciones tengan signos de igualdad. Para ello, se define un destino artificial *n+1*-ésimo y las variables de holgura $x_{i,n+1}$:

$$Minimizar\ f'=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_{ij}c_{ij}+\sum_{j=1}^{2}0\cdot c_{4j}+M\cdot c_{43}$$

$$s.a.\sum_{j=1}^{3}q_{ij}x_{ij}=a_i\ \ ;\ \ \forall i=1,2,3$$

$$\sum_{i=1}^{3}x_{ij}+x_{4j}=b_j\ \ ;\ \forall j=1,2,3$$

$$0\le x_{ij}\le u_{ij}\quad\forall\begin{cases}i=1,2,3\\ j=1,2,3,4\end{cases}$$

Las matrices c_{ij}, u_{ij} y q_{ij} presentan la siguiente estructura una vez añadida la variable artificial $x_{i,4}$:

$$c_{ij}=\begin{pmatrix}-3&-1&-3\\-2&-2&-4\\-1&-4&-2\\0&0&M\end{pmatrix}$$

$$q_{ij}=\begin{pmatrix}4&2&4\\1&2&1\\1&3&4\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$u_{ij} = \begin{pmatrix} \infty & 50 & \infty \\ 25 & \infty & \infty \\ \infty & 25 & \infty \\ \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

El primer paso va a consistir en la obtención de una solución básica factible del dual aplicando el teorema de la matriz reducida por columnas:

$$c'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & M \end{pmatrix}$$

Una vez calculadas las matrices se obtiene la tabla del problema de transporte. Sea el problema generalizado del transporte definido por la tabla siguiente donde c_{ij} se especifica en la esquina superior izquierda de cada casilla, p_{ij} en la inferior derecha y u_{ij} en la superior derecha, se desea obtener la solución óptima.

a_i/b_j	175	125	40
200	0 4	3 50 2	1 4
75	1 25 1	2 2	0 1
100	2 1	0 25 3	2 4
	3 1	4 1	M 1

Iteración 1. Marcaje desde el nodo S a los nodos de oferta 1, 2 y 3 y de los nodos ofertantes a los demandantes.

a_i/b_j	175	125	40	
200	0 4	3 50 2	1 4	(-,200)*
75	1 25 1	2 2	0 1	(-,75)
100	2 1	0 25 3	2 4	(-,100)
	3 1	4 1	M 1	
	(1, 50) (1) ↑ Δ			

$$(1) = \min\left(\frac{200}{4}, \infty\right) = 50$$

$$\Delta = \min(50, 175) = 50$$

Iteración 2. Asignación de flujo.

$$\widehat{a_1} = a_1 - p_{11} \cdot \Delta = 200 - 4 \cdot 50 = 0$$

$$\widehat{b_1} = b_1 - \Delta = 175 - 50 = 125$$

$$x_{11} = \Delta = 50$$

a_i/b_j	125	125	40
	0 $\boxed{50}$ 4	3 50 2	1 4
75	1 25 1	2 2	0 1
100	2 1	0 25 3	2 4
	3 1	4 1	M 1

Iteración 3. Marcaje.

a_i/b_j	125	125	40	
	0 $\boxed{50}$ 4	3 50 2	1 4	
75	1 25 1	2 2	0 $\boxed{}$ 1	(-,75)*
100	2 1	0 25 $\boxed{}$ 3	2 4	(-,100)
	3 1	4 1	M 1	
			(2, 75) (1) ↑ Δ	

$$(1) = \min\left(\frac{75}{1}, \infty\right) = 75$$

$$\Delta = \min(75, 40) = 40$$

Iteración 4. Asignación de flujo.

$$\widehat{a_2} = a_2 - p_{23} \cdot \Delta = 75 - 1 \cdot 40 = 35$$

$$\widehat{b_3} = b_3 - \Delta = 40 - 40 = 0$$

$$x_{23} = \Delta = 40$$

a_i/b_j	125	125	
	0 $\boxed{50}$ 4	3 50 2	1 4
35	1 25 1	2 2	0 $\boxed{40}$ 1
100	2 1	0 25 3	2 4
	3 1	4 1	M 1

Iteración 5. Marcaje.

a_i/b_j	125	125		
	0 $\boxed{50}$ 4	3 50 2	1 4	
35	1 25 1	2 2	0 $\boxed{40}$ 1	(-,35)*
100	2 1	0 25 $\boxed{}$ 3	2 4	(-,100)*
	3 1	4 1	M 1	
		(3, 25)		
		(1)		
		↑ Δ		

$$(1) = \min\left(\frac{100}{3}, 25\right) = 25$$

$$\Delta = \min(25, 125) = 25$$

Iteración 6. Asignación de flujo.

$$\widehat{a_3} = a_3 - p_{32} \cdot \Delta = 100 - 3 \cdot 25 = 25$$

$$\widehat{b_2} = b_2 - \Delta = 125 - 25 = 100$$

$$x_{23} = \Delta = 25$$

a_i/b_j	125	100	
	0 $\boxed{50}$ 4	3 50 2	1 4
35	1 25 1	2 2	0 $\boxed{40}$ 1
25	2 1	0 25 $\boxed{25}$ 3	2 4
	3 1	4 1	M 1

Iteración 7. Marcaje.

a_i/b_j	125	100		
	0 $\boxed{50}$ 4	3 50 2	1 4	
35	1 25 1	2 2	0 $\boxed{40}$ 1	(-,35)*
25	2 1	0 25 $\boxed{25}$ 3	2 4	(-,25)*
	3 1	4 1	M 1	
			(2, 35)*	

Como puede comprobarse en la matriz anterior, no es posible ninguna asignación sin previa modificación de la matriz de costos relativos.

Fase II. Cambio de la matriz de costos relativos.

a_i/b_j	125	100		
	0 $\boxed{50}$ 4	3 50 2	1 4	Ī
35	1 25 1	2 2	0 $\boxed{40}$ 1	I
25	2 1	0 25 $\boxed{25}$ 3	2 4	I
	3 1	4 1	M 1	
	J̄	J̄	J	

$$r^* = \min(1, 2) = 1$$

La nueva matriz de costos estará definida mediante la siguiente expresión:

$$c'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & M \end{pmatrix}$$

Fase II: Iteración 1. Marcaje.

a_i/b_j	125	100		
	0 $\boxed{50}$ 4	3 50 2	2 4	
35	0 25 $\boxed{}$ 1	1 2	0 $\boxed{40}$ 1	(-, 35)
25	1 1	0 25 $\boxed{25}$ 3	2 4	(-, 25)
	3 1	4 1	M 1	
	(2, 25) (1) ↑ Δ			

$$(1) = \min\left(\frac{35}{1}, 25\right) = 25$$

$$\Delta = \min(25, 125) = 25$$

Fase II: Iteración 2. Asignación de flujo.

$$\widehat{a_2} = a_2 - p_{21} \cdot \Delta = 35 - 1 \cdot 25 = 10$$

$$\widehat{b_1} = b_1 - \Delta = 125 - 25 = 100$$

$$x_{21} = \Delta = 25$$

a_i/b_j	100	100		
	0 $\boxed{50}$ 4	3 50 2	2 4	
10	0 25 $\boxed{25}$ 1	1 2	0 $\boxed{40}$ 1	(-, 10)*
25	1 1	0 25 $\boxed{25}$ 3	2 4	(-, 25)*
	3 1	4 1	M 1	
			(2, 10)*	

Fase III. Cambio de la matriz de costos relativos.

a_i/b_j	75	100		
	0 $\boxed{50}$ 4	3 50 2	2 4	$\bar{I}$
10	0 25 $\boxed{25}$ 1	1 2	0 $\boxed{40}$ 1	I
25	1 1	0 25 $\boxed{25}$ 3	2 4	I
	3 1	4 1	M 1	
	$\bar{J}$	$\bar{J}$	J	

$$r^* = \min(1) = 1$$

La nueva matriz de costos estará definida mediante la siguiente expresión:

$$c'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & M \end{pmatrix}$$

Fase III: Iteración 1. Marcaje y asignación de flujo.

$$\Delta = \min\left(\frac{10}{2}, \infty, 100\right) = 5$$

$$\widehat{a_2} = a_2 - p_{22} \cdot \Delta = 15 - 2 \cdot 5 = 0$$

$$\widehat{b_2} = b_2 - \Delta = 100 - 5 = 95$$

$$x_{22} = \Delta = 5$$

a_i/b_j	100	95	
	0 $\boxed{50}$ 4	3 50 2	3 4
	0 25 $\boxed{25}$ 1	0 $\boxed{5}$ 2	0 $\boxed{40}$ 1
25	0 $\boxed{}$ 1	0 25 $\boxed{25}$ 3	2 4
	3 1	4 1	M 1

Fase III. Iteración 2. Marcaje y asignación de flujo.

$$\Delta = \min\left(\frac{25}{1}, \infty, 100\right) = 25$$

$$\widehat{a_2} = a_2 - p_{22} \cdot \Delta = 25 - 1 \cdot 25 = 0$$

$$\widehat{b_2} = b_2 - \Delta = 100 - 25 = 75$$

$$x_{22} = \Delta = 25$$

a_i/b_j	75	95	
	0 $\boxed{50}$ 4	3 50 2	3 4
	0 25 $\boxed{25}$ 1	0 $\boxed{5}$ 2	0 $\boxed{40}$ 1
	0 $\boxed{25}$ 1	0 25 $\boxed{25}$ 3	2 4
	3 1	4 1	M 1

Se ha alcanzado la solución óptima.

Finalmente, el valor de la función objetivo será:

$$f = c_{ij}x_{ij} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & -4 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 25 & 5 & 40 \\ 25 & 25 & 0 \end{pmatrix} = -495$$

2.4.6.3 Ejemplo 5

$$Minimizar\ f = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} z_{ij}\overline{c_{ij}}$$

$$s.a. \sum_{j=1}^{3} q_{1j}z_{1j} \le \overline{a_1}\ ;\quad \sum_{j=1}^{3} q_{2j}z_{2j} \le \overline{a_2}\ ;\ \sum_{j=1}^{3} q_{3j}z_{3j} = \overline{a_3}$$

$$\sum_{i=1}^{3} t_{i1}z_{i1} \le \overline{b_1}\ ;\ \sum_{i=1}^{3} t_{i2}z_{i2} = \overline{b_2}\ ;\ \sum_{i=1}^{3} t_{i3}z_{i3} \le \overline{b_3}\ ;$$

$$l_{ij} \le\ x_{ij} \le u_{ij}\ \begin{cases}\forall i = 1,2,3\\ \forall j = 1,2,3\end{cases}$$

$$\bar{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix}40 & 30 & 10\\ 8 & 10 & 20\\ 5 & 20 & 3\end{pmatrix};\ \bar{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix}150\\110\\140\end{pmatrix};\ \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix}130\\190\\121\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix};\ \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{l}} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 10 & 5 & 0\\ 0 & 15 & 8\end{pmatrix};\ \bar{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix}20 & 30 & \infty\\ \infty & 10 & 20\\ 50 & 100 & 50\end{pmatrix}$$

El problema anterior queda formulado en su forma estándar como se muestra a continuación:

$$Minimizar\ f = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{2} 0\cdot x_{i4} + M\cdot x_{34} + 0\cdot x_{41} + M\cdot x_{42} + 0\cdot x_{43}$$

$$s.a. \sum_{j=1}^{3} p_{ij}x_{ij} + x_{i4} = a_i\ ;\ \ \forall\ i = 1,2,3$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} + x_{4j} = b_j\ ;\ \ \forall\ j = 1,2,3$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij}\ \ \forall \begin{cases} i = 1,2,3\\ j = 1,2,3\end{cases}$$

$$c_{ij} = \frac{\overline{c_{ij}}}{t_{ij}} = \frac{\begin{pmatrix}40 & 30 & 10\\ 8 & 10 & 20\\ 5 & 20 & 3\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}10 & 10 & 5\\ 4 & 5 & 10\\ 5 & 10 & 1\end{pmatrix}$$

$$a_i = \overline{a_i} - \sum_{j=1}^{n}\overline{l_{ij}}q_{ij} = \begin{pmatrix}150\\110\\140\end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{3}\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 10 & 5 & 0\\ 0 & 15 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}141\\90\\117\end{pmatrix}$$

$$b_j = \overline{b_j} - \sum_{i=1}^{m}\overline{l_{ij}}t_{ij} = \begin{pmatrix}130\\190\\121\end{pmatrix} - \sum_{i=1}^{3}\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 10 & 5 & 0\\ 0 & 15 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}102\\150\\87\end{pmatrix}$$

$$u_{ij} = (\overline{u_{ij}} - \overline{l_{ij}})t_{ij} = \left[\begin{pmatrix}20 & 30 & \infty\\ \infty & 10 & 20\\ 50 & 100 & 50\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 10 & 5 & 0\\ 0 & 15 & 8\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}72 & 90 & \infty\\ \infty & 10 & 40\\ 50 & 170 & 126\end{pmatrix}$$

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{t_{ij}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 2 \\ 1 & 0.5 & 0.33 \end{pmatrix}$$

Las matrices c_{ij}, u_{ij} y p_{ij} presentan la siguiente estructura una vez añadida las variables artificiales $x_{i4}\ y\ x_{4j}$:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 10 & 0 \\ 5 & 10 & 1 & M \\ 0 & M & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0.5 & 0.33 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_{ij} = \begin{pmatrix} 72 & 90 & \infty & \infty \\ \infty & 10 & 40 & \infty \\ 50 & 170 & 126 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Por otra parte, para poder alcanzar la solución óptima, los vectores de oferta y demanda quedan definidos como:

$$a_i = \begin{pmatrix} 141 \\ 90 \\ 117 \\ 339 \end{pmatrix}$$

$$b_j = \begin{pmatrix} 102 \\ 150 \\ 87 \\ 348 \end{pmatrix}$$

En la fila extra se ha incluido un nivel de oferta igual que la suma de las demandas, y en la columna extra un nivel de demanda igual a la suma de las ofertas.

Seguidamente se obtiene una solución básica factible del dual aplicando el teorema de la matriz reducida por columnas:

$$c'_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 10 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & M \\ 0 & M & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tabla del problema del transporte:

a_i/b_j	102	150	87	348
141	10 72 0.5	5 90 1	5 0.5	0 1
90	4 0.5	0 10 1	10 40 2	0 1
117	5 50 1	5 170 0.5	1 126 0.33	M 1
339	0 1	M 1	0 1	0 1

Iteración 1. Asignación de flujo.

a_i/b_j		140		
	10 72 0.5	5 90 1	5 0.5	0 $\boxed{141}$ 1
	4 0.5	0 10 $\boxed{10}$ 1	10 40 2	0 $\boxed{80}$ 1
117	5 50 1	5 170 0.5	1 126 0.33	M 1
23	0 $\boxed{102}$ 1	M 1	0 $\boxed{87}$ 1	0 $\boxed{127}$ 1

Fase II. Cambio de la matriz de costos relativos.

a_i/b_j		140		
	10 72 0.5	0 90 $\boxed{\ }$ 1	5 0.5	0 $\boxed{141}$ 1
	4 0.5	0 10 $\boxed{10}$ 1	10 40 2	0 $\boxed{80}$ 1
117	5 50 1	0 170 $\boxed{\ }$ 0.5	1 126 0.33	M 1
23	0 $\boxed{102}$ 1	M 1	0 $\boxed{87}$ 1	0 $\boxed{127}$ 1

Fase II. Iteración 1. Asignación de flujo.

a_i/b_j				
	10 72 0.5	0 90 $\boxed{}$ 1	5 0.5	0 $\boxed{141}$ 1
	4 0.5	0 10 $\boxed{10}$ 1	10 40 2	0 $\boxed{80}$ 1
47	5 50 1	0 170 $\boxed{140}$ 0.5	1 126 0.33	M 1
23	0 $\boxed{102}$ 1	M 1	0 $\boxed{87}$ 1	0 $\boxed{127}$ 1

Se ha alcanzado la solución óptima.

Deshaciendo los cambios de variables que se realizaron en los primeros pasos de resolución del problema:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{t_{ij}} + \overline{l_{ij}} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 140 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 10 & 5 & 0 \\ 0 & 15 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 85 & 8 \end{pmatrix}$$

Finalmente, el valor de la función objetivo será:

$$f = \overline{c_{ij}} z_{ij} = \begin{pmatrix} 40 & 30 & 10 \\ 8 & 10 & 20 \\ 5 & 20 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 85 & 8 \end{pmatrix} = 2034$$

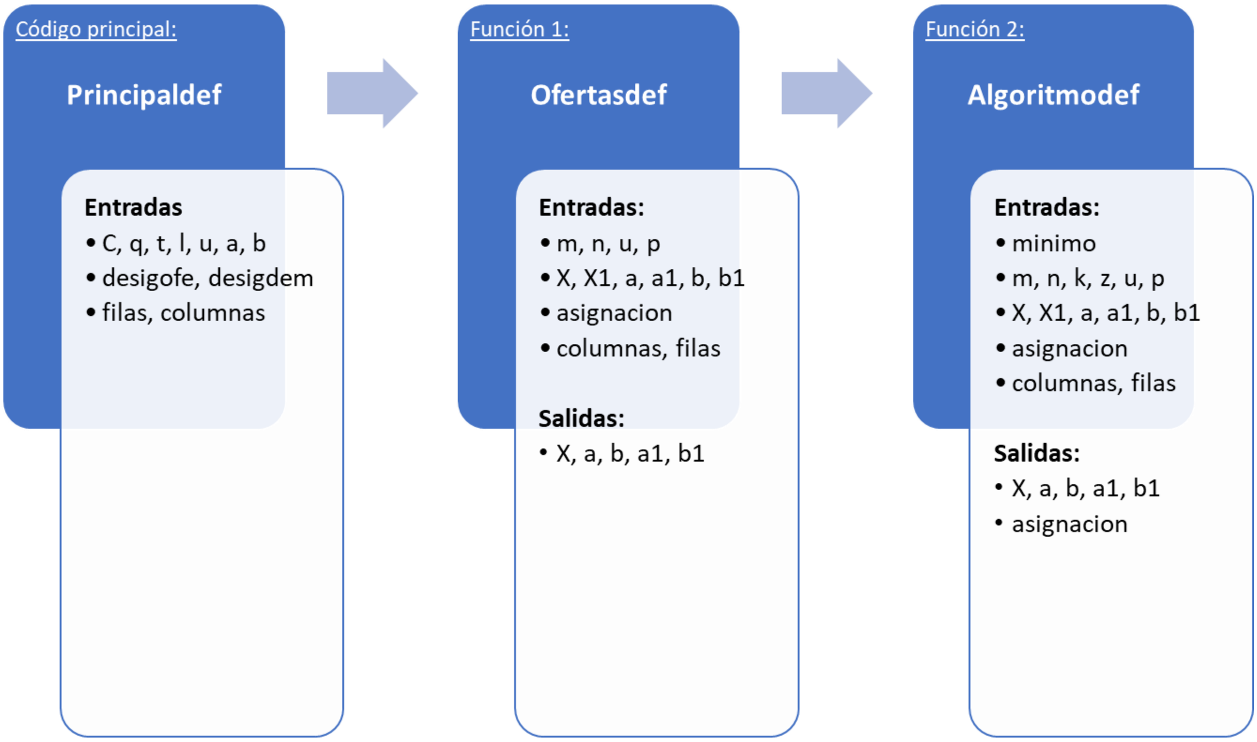
3 EXPLICACIÓN DEL CÓDIGO

Previamente a ejecutar el código será necesario la introducción de los datos del enunciado manualmente además de otros parámetros que dependerán de las características del problema. A continuación, se van a detallar las variables que tendrán que ser modificadas en el código para todo tipo de problema:

- **C** → Matriz de costos.
- **q** → Matriz de coeficientes tecnológicos de las ecuaciones de oferta.
- **t** → Matriz de coeficientes tecnológicos de las ecuacioens de demanda.
- **l** → Matriz de cotas inferiores.
- **u** → Matriz de cotas superiors.
- **a** → Vector de ofertas.
- **b** → Vector de demandas.
- **desigofe** → Variable que podrá tomar los valores 0 o 1 y que indicará si las ecuaciones de oferta tienen signo de igualdad o desigualdad, respectivamente. La variable **desigofe** tomará valor 1 en el caso de que las restricciones de oferta presenten signos de desigualdad (en su totalidad) y 0 en caso contrario.
- **desigdem** → Variable que podrá tomar los valores 0 o 1 y que indicará si las ecuaciones de demanda tienen signo de igualdad o desigualdad, respectivamente. La variable **desigdem** tomará valor 1 en el caso de que las restricciones de demanda presenten signos de desigualdad (en su totalidad) y 0 en caso contrario.
- **filas** → Variable que podrá tomar los valores 0 o 1 y que indicará si el teorema de la matriz reducida se aplica por filas (filas =1; columnas = 0) o por columnas (filas = 0; columnas = 1) en función de las características del problema, es decir, dependiendo de si se quieren eliminar los coeficientes de las ecuaciones de oferta o demanda, respectivamente.
- **columnas** → Variable que podrá tomar los valores 0 o 1 y que indicará si el teorema de la matriz reducida se aplica por filas (filas =1; columnas = 0) o por columnas (filas = 0; columnas = 1) en función de las características del problema, es decir, dependiendo de si se quieren eliminar los coeficientes de las ecuaciones de oferta o demanda, respectivamente.

Por útltimo, solo para el caso de problemas que tengan restricciones mixtas con signo de igualdad y desigualdad en las ecuaciones de oferta y/o demanda habrá que añadir manualmente un costo de valor muy alto (variable M en el código) en las celdas que tengan signos de igualdad ya que por defecto el código les asigna costo nulo.

En el siguiente diagrama de bloques se especifican las entradas y salidas de las distintas funciones de que consta el código de Matlab:



Una vez insertados los datos que se acaban de comentar va a explicarse la operativa del código a través de uno de los ejemplos que se han resuelto en el presente documento. El enunciado del problema se muestra a continuación:

$$
\begin{gathered}
Minimizar\ f = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_{ij}c_{ij} \\
s.a. \sum_{j=1}^{3} q_{ij}x_{ij} \leq a_i \quad ; \quad \forall i = 1,2,3 \\
\sum_{i=1}^{3} t_{ij}x_{ij} = b_j \quad ; \quad \forall j = 1,2,3 \\
l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \ \begin{cases} \forall i = 1,2,3 \\ \forall j = 1,2,3 \end{cases} \\
\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 2 \\ 50 & 10 & 12 \\ 6 & 20 & 28 \end{pmatrix} ; \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 140 \\ 150 \\ 110 \end{pmatrix} ; \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 130 \\ 190 \\ 121 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} ; \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{l} = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix} ; \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 50 & 45 & 50 \\ 20 & 40 & \infty \\ \infty & 10 & 20 \end{pmatrix}
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Teniendo en cuenta los datos del enunciado (3.1) las variables que son necesarias rellenar manualmente en el código para poder resolver el problema quedan definidas de la siguente forma:

- `C=[40,30,10;8,10,20;5,20,3];`
- `q=[2,3,1;1,2,4;1,1,1];`
- `t=[4,3,2;2,2,2;1,2,3];`
- `l=[2,0,5;10,5,0;0,15,8];`
- `u=[20,30,M;M,10,20;50,100,50];`
- `a=[150;110;140];`
- `b=[130,190,121];`
- `desigofe=1;`
- `desigdem=0;`
- `filas=0;`
- `columnas=1;`

Se ha considerado que van a suprimirse los coeficientes t_{ij} que multiplicand a las variables x_{ij} en las ecuaciones de demanda. Esto implica que el teorema de la matriz reducida debe aplicarse por columnas una vez que el problema quede definido en su forma estándar. Por este motivo, las variables filas y columnas toman los valores 0 y 1, respectivamente.

En primer lugar, van a realizarse los cambios de variable necesarios para eliminar las cotas inferiores y para hacer desaparecer los coeficientes t_{ij}. Seguidamente, se adjuntan las matrices, usando los nombres que utiliza el código, tras haber realizado las modificaciones que se acaban de comentar:

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 & 7.5 & 0.67 \\ 12.5 & 5 & 6 \\ 3 & 10 & 14 \end{pmatrix} ;\ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 117 \\ 141 \\ 90 \end{pmatrix} ; \boldsymbol{b} = (102 \quad 150 \quad 87)$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.33 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 2 \end{pmatrix} ;\ \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 50 & 60 & 126 \\ 72 & 80 & M \\ M & 10 & 40 \end{pmatrix}$$

El siguiente paso va a consisitir en ampliar las matrices para transformar el problema a su forma estándar. Esto es, hacer que las ecuaciones de oferta y demanda presenten signos de igualdad.

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 & 7.5 & 0.67 & 0 \\ 12.5 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 10 & 14 & 0 \end{pmatrix} ;\ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 117 \\ 141 \\ 90 \end{pmatrix} ; \boldsymbol{b} = (102 \quad 150 \quad 87 \quad 0)$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.33 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 50 & 60 & 126 & M \\ 72 & 80 & M & M \\ M & 10 & 40 & M \end{pmatrix}$$

A continuación, va a aplicarse el teorema de la matriz reducida sobre la matriz de costos por columnas para obtener las celdas básicas:

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 9.5 & 0 & 5.33 & 0 \\ 0 & 5 & 13.33 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuando se ha resuelto el problema manualmente se han marcado las casillas con costo relativo cero con rectángulos. En el código estas celdas van a identifarse insertando en ellas el valor -1:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Además, se inicializan a cero las siguientes matrices las cuales van a usarse para el marcaje de las celdas durante el proceso de asignación de unidades, esto es, el marcado hacia delante y hacia detrás del Fold-Fulkerson.

$$\boldsymbol{X1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \boldsymbol{a1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \boldsymbol{b1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, también se inicializan a cero las variables que se muestran a continuación:

- **asignacion** → variable que toma el valor 1 cuando es posible la asignación de unidades para dar paso a la actualización de los valores de las celdas marcadas. Una vez, se han modificado las casillas correspondientes, la variable **asignacion** vuelve a ser nula.
- **fina** → variable que tomar el valor 1 cuando se han asigando todas las unidades de oferta, es decir, cuando el vector de ofertas **a** es nulo.
- **finb** → variable que tomar el valor 1 cuando se han asigando todas las unidades de demanda, es decir, cuando el vector de ofertas **b** es nulo.
- **fin** → variable que tomar el valor 1 si **fina** y/o **finb** tienen valor unidad.

A partir de este momento va a iniciarse el algoritmo de resolución del problema.

Iteración 1. Marcaje desde el nodo S a los nodos ofertantes y desde los nodos ofertantes a los demandantes. El marcaje va a realizarse insertando el valor 1 en las matrices **X1**, **a1** y **b1**.

$$\boldsymbol{X1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \boldsymbol{a1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \boldsymbol{b1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Itereación 2. Asignación de flujo.

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 50 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ;\ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 67 \\ 141 \\ 90 \end{pmatrix} ; \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 52 & 150 & 87 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteración 3. Marcaje y asignación de flujo.

$$\boldsymbol{X1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \boldsymbol{a1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \boldsymbol{b1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}50 & 0 & 87 & -1\\ 0 & -1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix};\ \boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}38\\ 141\\ 90\end{pmatrix};\boldsymbol{b}=(52 \quad 70 \quad 0 \quad 0)$$

Iteración 4. Marcaje y asignación de flujo.

$$\boldsymbol{X1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\boldsymbol{a1}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix};\boldsymbol{b1}=(0 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}50 & 0 & 87 & -1\\ 0 & 80 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix};\ \boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}38\\ 61\\ 90\end{pmatrix};\boldsymbol{b}=(52 \quad 70 \quad 0 \quad 0)$$

Iteracíon 5. Marcaje y asignación de flujo.

$$\boldsymbol{X1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\boldsymbol{a1}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix};\boldsymbol{b1}=(1 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$$

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}50 & 0 & 87 & -1\\ 0 & 80 & 0 & -1\\ 52 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix};\ \boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}38\\ 61\\ 64\end{pmatrix};\boldsymbol{b}=(0 \quad 70 \quad 0 \quad 0)$$

Iteración 6. Marcaje.

$$\boldsymbol{X1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\boldsymbol{a1}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix};\boldsymbol{b1}=(1 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$$

No es posible la asignación de unidades por lo que habrá que modificar la matriz de costos relativos.

Fase II. Cambio de la matriz de costos relativos.

Van a identicarse las celdas que van a sufrir cambios a partir de los vectores **a1** y **b1**, los cuales indican las casillas marcadas.

Por otro lado, para obtener el mínimo coste relativo entre las celdas no tachadas se van a utilizar las siguientes variables:

- **notachado** → vector que recoge los costos relativos de las celdas no tachadas sin tener en cuenta aquellas que tienen asignadas el máximo número de unidades posibles en función de su cota superior.

- **r** → mínimo del vector **notachado.**

$$\boldsymbol{notachado}=(2.5 \quad 5)$$

$$r=2.5$$

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}50 & -1 & 87 & -1\\ 0 & 80 & 0 & -1\\ 52 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix};\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 9.5 & 0 & 5.33 & 0\\ 0 & 2.5 & 13.33 & 0\end{pmatrix}$$

Ha aparecido un nuevo 0 en la matriz **c** (-1 en la matriz **X**) en la posición (1,2).

Fase II. Iteración 1. Marcaje y asignación de flujo.

$$\boldsymbol{X1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \boldsymbol{a1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \boldsymbol{b1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 50 & 60 & 87 & -1 \\ 0 & 80 & 0 & -1 \\ 52 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 61 \\ 64 \end{pmatrix}; \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fase II. Iteración 2. Marcaje.

$$\boldsymbol{X1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \boldsymbol{a1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \boldsymbol{b1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fase III. Cambio de la matriz de costos relativos.

$$\boldsymbol{notachado} = (2.5)$$

$$r = 2.5$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 50 & 60 & 87 & -1 \\ 0 & 80 & 0 & -1 \\ 52 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9.5 & 0 & 5.33 & 0 \\ 0 & 0 & 13.33 & 0 \end{pmatrix}$$

Ha aparecido un nuevo 0 en la matriz **c** (-1 en la matriz **X**) en la posición (3,2).

Fase III. Iteración 1. Marcaje y asignación de flujo.

$$\boldsymbol{X1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \boldsymbol{a1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \boldsymbol{b1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 50 & 60 & 87 & -1 \\ 0 & 80 & 0 & -1 \\ 52 & 10 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 61 \\ 54 \end{pmatrix}; \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se han asignado todas las unidades de demanda por lo que se ha obtenido una solución básica factible que en este caso coincide con la óptima.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 50 & 45 & 37 \\ 2 & 40 & 5 \\ 36 & 10 & 0 \end{pmatrix}; f = 1875$$

4 CONCLUSIONES

En el presente documento se ha demostrado que, a diferencia del problema generalizado resuelto por Hitchcock, usando el método primal-dual es necesario seguir una de las siguientes técnicas para obtener la solución óptima:

1. Incluir en la fila extra un nivel de oferta igual que la suma de las demandas, y en la columna extra un nivel de demanda igual a la suma de las ofertas con una celda intersección con coste nulo.

2. Incluir en la fila extra y en la columna extra un nivel de oferta y de demanda, respectivamente, ambos iguales de valor el máximo de los dos (o cualquier valor superior a este máximo) y crear también la celda intersección con un coste nulo.

Se propone para futuras investigaciones el análisis de la aplicación del método primal-dual en problemas de transporte generalizados con restricciones $\geq$ en las ecuaciones de oferta y/o demanda y restricciones mixtas de desigualdad $\geq$, $\leq$ e igualdad $=$ en las ecuaciones de oferta y/o demanda.

5 ANEXOS

5.1 Código para la resolución del problema generalizado no estándar a través del método primal-dual.

5.1.1 Código principal

```
clear
clc

M=10E6;

% Datos del ejemplo 5
C=[40,30,10;8,10,20;5,20,3];
q=[2,3,1;1,2,4;1,1,1];
t=[4,3,2;2,2,2;1,2,3];
l=[2,0,5;10,5,0;0,15,8];
u=[20,30,M;M,10,20;50,100,50];
a=[150;110;140];
b=[130,190,121];

desigofe=1;
desigdem=1;

filas=0;
columnas=1;

% Se realizan simultáneamente dos cambios de variable: uno para eliminar los
% coeficientes de las ecuaciones de demanda y otro para suprimir las cotas
% inferiores. Por lo tanto, el cambio de variables consiste en yij=tij*xij

if columnas==1
%Para eliminar los coeficientes de las ecuaciones de demanda
c=C./t;
p=q./t;
a=a-sum(l.*q,2);
b=b-sum(l.*t);
u=(u-l).*t;
else if filas==1
%Para eliminar los coeficientes de las ecuaciones de oferta
c=C./q;
p=t./q;
a=a-sum(l.*q,2);
b=b-sum(l.*t);
u=(u-l).*q;
    end
end

% Este código resuelve problemas con signos de desigualdad <= en las
% ecuaciones de oferta o de demanda.Por lo tanto, habrá que ampliar la tabla
% del problema de transporte añadiendo una columna o fila adicional
% respectivamente cuyas celdas tendrán costo nulo, cota superior infinita y
% coeficiente tecnológico unidad.
[m,n]=size(c);
```

```
ccolextra=zeros(m,1);
ucolextra=zeros(m,1);
cfilextra=zeros(1,n);
ufilextra=zeros(1,n);
for k=1:n
    ufilextra(k)=M;
end
for k=1:m
    ucolextra(k)=M;
end
if (desigofe==1&&desigdem==1)
    c=[c,ccolextra];
    cfilextra=[cfilextra,0];
    c=[c;cfilextra];
    u=[u,ucolextra];
    ufilextra=[ufilextra,M];
    u=[u;ufilextra];
    p=[p,ones(m,1)];
    p=[p;ones(1,n+1)];
    b(n+1)=sum(a);
    a(m+1)=sum(b(1:n));
else if (desigdem==1&&desigofe==0)
        c=[c;cfilextra];
        u=[u;ufilextra];
        p=[p;ones(1,n)];
        a(m+1)=0;
    else if (desigofe==1&&desigdem==0)
            c=[c,ccolextra];
            u=[u,ucolextra];
            p=[p,ones(m,1)];
            b(n+1)=0;
        end
    end
end


% En caso de que las ecuaciones de oferta y/o de demanda presenten
% desigualdades e igualdades simultáneamente habrá que insertar manualmente
% costo M en las celdas que tengan igualdad ya que por defecto el código
% le asigna costo nulo.
if (desigdem==1&&desigofe==1)
    c(m+1,n+1)=0;
end
c(4,2)=M;
c(3,4)=M;

[m,n] = size(c);

% A continuación, va a aplicarse el teorema de la matriz reducida por
% columnas únicamente debido a las propiedades que presenta el problema
% generalizado.

if columnas==1
%Si se eliminan los coeficientes de las restricciones de demanda
% Mínimo por columnas
minimo = min(c,[],1);
for j=1:n
    for i=1:m
        c(i,j)= c(i,j)- minimo(j);
    end
end
```

```
else if filas==1
%Si se eliminan los coeficientes de las restricciones de oferta
%Mínimo por filas
minimo = min(c,[],2);
for i=1:m
    for j=1:n
        c(i,j)= c(i,j)- minimo(i);
    end
end
    end
end

% Por el método de la matriz reducida se han obtenido las celdas con costo
% nulo, es decir, las celdas básicas en las que pueden asignarse unidades.
% Se crea una matriz X en la que se inserta el valor -1 en estas celdas
% para facilitar posteriormente el código.
X=zeros(m,n);
for i=1:m
    for j=1:n
        if c(i,j)==0
            X(i,j)=-1;
        end
    end
end

% Matriz y vectores nulos creados para señalar las celdas marcadas.
X1=zeros(m,n);
a1=zeros(m,1);
b1=zeros(n,1)';

% Variables necesarias para el código inicializadas a cero.
asignacion=0;
fin=0;
fina=0;
finb=0;

% Bucle while que acabará una vez que se hayan asignado todas las
% unidades de oferta, es decir, vector de ofertas b nulo.
while fin==0

% Función que busca nivel de oferta distinto de cero para comenzar con el
% algoritmo.
[X,a,b,a1,b1]=ofertasdef(m,n,X,X1,a,a1,b,b1,u,p,asignacion,columnas,filas);

% Una vez realizado la iteración se comprueba si el vector de ofertas es
% nulo,es decir,se ha alcanzado la solución óptima.
for i=1:m
    if a(i)~=0
        fina=1;
    end
end
for i=1:n
    if b(i)~=0
        finb=1;
    end
end

if (fina==0 || finb==0)
    fin=1;
end
```

```
fina=0;
finb=0;

if fin==1
    break
end

% En el caso de que el vector de ofertas aun tenga unidades por asignar,
% hay que proceder modificando la matriz de costos relativos, ya que no se
% encuentra camino para alcanzar una asignación.

% Se calcula el mínimo de las celdas de la matriz no tachadas. De entre las
% celdas no tachadas descartar las celdas que tengan asignadas las máximas
% unidades posibles en función de su cota superior.
s=1;
for i=1:m
    for j=1:n
        if a1(i)==1
            if b1(j)~=1
                if u(i,j)~=X(i,j)
                    notachado(s)=c(i,j);
                    s=s+1;
                end
            end
        end
    end
end
r=min(notachado);
notachado=0;

% Se modifica la matriz de costos sumando o restando el minimo calculado
% anteriormente en función de si son celdas doblemente tachadas o no
% tachadas. En este paso también se mantienen intactas las celdas con un
% número de unidades asignado igual a su cota superior.
for i=1:m
    for j=1:n
        if a1(i)==1
            if b1(j)~=1
                if u(i,j)~=X(i,j)
                    c(i,j)=c(i,j)-r;
                end
            end
        else
            if b1(j)==1
                if u(i,j)~=X(i,j)
                    c(i,j)=c(i,j)+r;
                end
            end
        end
    end
end

% Se actualiza la matriz A añadiendo las nuevas celdas con costo relativo
% nulo.
for i=1:m
    for j=1:n
        if X(i,j)==-1
            if c(i,j)~=0
                X(i,j)=0;
            end
        end
```

```
        if c(i,j)==0
            if X(i,j)==0
                X(i,j)=-1;
            end
        end
    end
end
finb=0;
a1=zeros(m,1);
b1=zeros(n,1);
X1=zeros(m,n);
end

% Se deshace el cambio que se hizo en un prinpio en que se asignaba el valor
% -1 a las celdas con coste relativo nulo.
for i=1:m
    for j=1:n
        if X(i,j)==-1
            X(i,j)=0;
        end
    end
end

% Se deshacen los dos cambios de variables que se hicieron para formular el
% problema en su forma estándar.
if (desigofe==1&&desigdem==0)
    X(:,n)=[];
else if (desigdem==1&&desigofe==0)
        X(m,:)=[];
    else if (desigdem==1&&desigofe==1)
            X(m,:)=[];
            X(:,n)=[];
        end
    end
end

if columnas==1
%Si se eliminan los coeficientes de las ecuaciones de demanda
x=X./t+1
else if filas==1
% Si se eliminan los coeficientes de las ecuaciones de oferta
x=X./q+1
    end
end
f=sum(sum(x.*C))
```

5.1.2 Código función ofertas

```
function [X,a,b,a1,b1] =
ofertasdef(m,n,X,X1,a,a1,b,b1,u,p,asignacion,columnas,filas)
%Se recorre el vector de ofertas y se comienza el algoritmo por el primer
%nivel no nulo.
for k=1:m
    if a(k)~=0
        z=k;
        minimo=a(k);
%Función que conduce al código del algoritmo (este proceso resulta ser el
%paso de marcado hacia delante y hacia detrás en el algoritmo
%Ford-Fulkerson sobre la red).
```

```
[X,a,b,asignacion,a1,b1]=algoritmodef(minimo,m,n,k,X,X1,a,a1,b,b1,u,p,z,asign
acion,columnas,filas);
        if asignacion==1
            asignacion=0;

[X,a,b,a1,b1]=ofertasdef(m,n,X,X1,a,a1,b,b1,u,p,asignacion,columnas,filas);
            return
        end
    end
end
end
```

5.1.3 Código función algoritmo

```
function [X,a,b,asignacion,a1,b1] =
algoritmodef(minimo,m,n,k,X,X1,a,a1,b,b1,u,p,z,asignacion,columnas,filas)
prioridad=0;
fila=0;

%Marcaje desde el nodo de salida a los ofertantes 1,...,m
for i=1:m
    if a(i)~=0
        a1(i)=1;
    end
end

%Las siguientes líneas indican si existe alguna celda de asignación
%directa para priorizarla posteriormente.
for i=1:n
    if (b(i)~=0 && X1(k,i)~=1 && X1(k,i)~=-1 && b1(i)~=1 && X(k,i)<u(k,i) &&
(X(k,i)~=0 || X(k,i)==-1))
        prioridad=1;
    end
end

if prioridad==1
    for i=1:n
        if (X1(k,i)~=1 && X1(k,i)~=-1 && b1(i)~=1 && X(k,i)<u(k,i) &&
(X(k,i)~=0 || X(k,i)==-1))
            if b(i)~=0
                if X(k,i)~=-1
                    if columnas==1
                    %Si se eliminan los coeficientes de las ecuaciones de
                    %demanda
                    t=[minimo/p(k,i),u(k,i)-X(k,i),b(i)];
                    else if filas==1
                    %Si se eliminan los coeficientes de las ecuaciones de
                    %oferta
                    t=[minimo,u(k,i)-X(k,i),b(i)/p(k,i)];
                        end
                    end
                    minimo=min(t);
                else
                    if columnas==1;
                    %Si se eliminan los coeficientes de las ecuaciones de
                    %demanda
                    t=[minimo/p(k,i),u(k,i),b(i)];
                    else if filas==1
                     %Si se eliminan los coeficientes de las ecuaciones de
                    %oferta
```

```
                        t=[minimo,u(k,i),b(i)/p(k,i)];
                            end
                        end
                        minimo=min(t);
                    end
                    X1(k,i)=1;
                    b1(i)=1;
                    for r=1:m
                        for s=1:n
                            if X1(r,s)==1
                                if X(r,s)==-1
                                    X(r,s)=X(r,s)+minimo+1;
                                else
                                    X(r,s)=X(r,s)+minimo;
                                end
                            end
                            if X1(r,s)==-1
                                if X(r,s)==-1
                                    X(r,s)=X(r,s)-minimo+1;
                                else
                                    X(r,s)=X(r,s)-minimo;
                                end
                            end
                        end
                    end
                    if columnas==1
                    %Si se eliminan los coeficientes de las ecuaciones de
                    %demanda
                    a(z)=a(z)-minimo*p(k,i);
                    b(i)=b(i)-minimo;
                    else if filas==1
                    %Si se eliminan los coeficientes de las ecuaciones de
                    %oferta
                    a(z)=a(z)-minimo;
                    b(i)=b(i)-minimo*p(k,i);
                        end
                    end
                    asignacion=1;
                    a1=zeros(m,1);
                    b1=zeros(n,1);
                    X1=zeros(m,n);
                    return
                end
            end
        end
    else
        for i=1:n
            if (X1(k,i)~=1 && X1(k,i)~=-1 && b1(i)~=1 && X(k,i)<u(k,i) &&
(X(k,i)~=0 || X(k,i)==-1))
                b1(i)=1;
                X1(k,i)=1;
                for j=1:m
                    %Se hace una búsqueda previa a seguir con el algoritmo para
                    %saber si hay alguna fila en la que puedan asignarse
                    %unidades. En caso de que no se encuentren opciones, se
                    %pasa directamente al estudio de otra celda.
                    for s=1:m
                        if (X(s,i)~=0 && X(s,i)~=-1 && X1(s,i)~=1 && X1(s,i)~=-1
&& a1(s)~=1 && X(s,i)<u(s,i))
                            fila=1;
                        end
                    end
```

```
                if fila==1
                    if (X(j,i)~=0 && X(j,i)~=-1 && X1(j,i)~=1 && X1(j,i)~=-1
&& a1(j)~=1 && X(j,i)<u(j,i))
                        X1(j,i)=-1;
                        a1(j)=1;
                        k=j;
                        if X(k,i)==-1
                            t=[minimo,u(k,i),X(j,i)];
                        end
                        if X(k,i)~=-1
                            t=[minimo,u(k,i)-X(k,i),X(j,i)];
                        end
                        minimo=min(t);
                        fila=0;

[X,a,b,asignacion,a1,b1]=algoritmodef(minimo,m,n,k,X,X1,a,a1,b,b1,u,p,z,asign
acion,columnas,filas);
                        if asignacion==1
                            return
                        else
                            for s=1:m
                                for r=1:n
                                    if s==k && r==i
                                        X1(s,r)=0;
                                        a1(s)=0;
                                    end
                                end
                            end
                        end
                    end
                else
                    X1(k,i)=0;
                    break
                end
            end
        end
    end
end
```

6 REFERENCIAS

[1] G. B. Dantzig y M. N. Thapa, Linear Programming 1: Introduction, Springer, 1997.

[2] F. Hitchcock, «The distribution of a product from several sources to numerous localities,» *Journal of Mathematics and Physics,* vol. 20, pp. 224-230, 1941.

[3] J. ROWSE, «SOLVING THE GENERALIZED TRANSPORTATION*,» *Regional Science and Urban Economics ,* vol. 11, pp. 57-68, 1981.

[4] F. G. Benítez, Redes de Trasnporte. Teoría y Algoritmos básicos., Sevilla: TED Technical Editions, 2003.

[5] F. G. Benítez, Optimización Lineal y Entera. Teoría y Algoritmos., Sevilla: TED Technical Editions, 2002.

[6] E. S. Gottlieb, «Solving Generalized Transportation Problems via Pure Transportation Problems,» *Naval Research Logistics,* vol. 49, 2002.

[7] K. Sethanan y R. Pitakaso, «Improved differential evolution algorithms for solving generalized assignment problem,» *Expert SystemsWithApplications,* vol. 45, p. 450–459, 2016.